

José Lukas Montenegro Ferreira

Análise da Relação entre Coerência e Polarização: Uma Visão Quântica

João Pessoa, PB - Brasil

Junho de 2022

José Lukas Montenegro Ferreira

Análise da Relação entre Coerência e Polarização: Uma Visão Quântica

Trabalho de conclusão de curso apresentado
como componente curricular obrigatório para
obtenção do título de Bacharel em Física pela
Universidade Federal de Paraíba.

Universidade Federal da Paraíba

Departamento de Física

Programa de Graduação em Física

Orientador: Bertúlio de Lima Bernardo

João Pessoa, PB - Brasil

Junho de 2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F383a Ferreira, Jose Lukas Montenegro.

Análise da relação entre coerência e polarização:
uma visão quântica / Jose Lukas Montenegro Ferreira. -
João Pessoa, 2022.
52 f. : il.

Orientação: Bertúlio de Lima Bernardo.

TCC (Curso de Bacharelado em Física) - UFPB/CCEN.

1. Polarização. 2. Coerência. 3. Interferência. 4.
Óptica quântica. I. Bernardo, Bertúlio de Lima. II.
Título.

UFPB/CCEN

CDU 53(043.2)

Ata da Sessão Pública da Defesa do
Trabalho de Conclusão de Curso de
Bacharelado em Física, do discente
José Lukas Montenegro Ferreira.

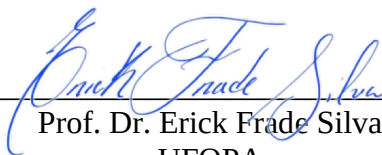
Aos 03 dias do mês de junho do ano de 2022, às 9h, reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída pelos docentes Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo (Dep. Física – UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Prof. Dr. Jesús Pavón López (Dep. Física – UFPB) e Prof. Dr. Erick Frade Silva (UFOPA), para avaliar o discente José Lukas Montenegro Ferreira. Dando início aos trabalhos, o professor orientador e presidente da banca examinadora comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, concedeu a palavra ao discente José Lukas Montenegro Ferreira para que fizesse a explanação, oralmente, de seu Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado “*Análise da Relação entre Coerência e Polarização: Uma Visão Quântica*”. Concluída a exposição, o discente foi arguido pela Banca Examinadora. Após as arguições, a banca examinadora, de comum acordo, [(declarou que a monografia apresentada foi aprovada com nota 10,0) / (emitiu o seguinte parecer: “aprovado”)]. Assim sendo, encerrada a reunião, eu, Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo (Dep. Física – UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, lavrei esta ata, que vai assinada pelos demais examinadores, pelo discente e por mim que a subscrevi. João Pessoa, 03 de junho de 2022.



Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo
UFPB – Orientador



Prof. Dr. Jesús Pavón López
UFPB



Prof. Dr. Erick Frade Silva
UFOPA



José Lukas Montenegro Ferreira
Discente

Link da reunião: <https://meet.google.com/vpm-tbdg-sqx>

Agradecimentos

Agradeço a Universidade Federal da Paraíba, em especial ao departamento de física, com todos os seus professores, técnicos e funcionários, por fornecerem os meios e instrumentos pelos quais pude obter uma educação de qualidade durante os anos de graduação e, como consequência, produzir este trabalho.

Agradeço em especial ao professor Dr. Bertúlio de Lima Bernardo, meu orientador, pelos anos de instrução, atenção, acompanhamento, cuidado e paciência. Seu esforço e dedicação foram fundamentais para que eu trilhasse os primeiros passos no mundo da pesquisa e produção científica.

Agradeço aos meus pais, Jailson e Tereza, pelo constante apoio e incentivo nesta jornada acadêmica, bem como em todos os outros aspectos da vida, assim como meus irmãos e membros da família que sempre me apoiaram.

Agradeço também a todos os colegas da graduação de física da UFPB pelo apoio e parceria durante esses anos. O trabalho em equipe, as discussões e o aprendizado em grupo fizeram toda a diferença no meu processo de formação.

O agradecimento final vai ao apoio financeiro oferecido pela Universidade Federal da Paraíba através do programa de bolsas PIBIC-UFPB, vigência 2020/2021.

"A medida de grandeza de uma ideia científica é a extensão na qual ela estimula o pensamento e abre novas linhas de pesquisa."
(P.A.M. Dirac)

Resumo

Neste trabalho fazemos uma análise das propriedades de coerência e polarização da luz, primeiro revisando o que é conhecido no caso clássico (onde a luz é entendida como uma onda eletromagnética) e depois analisando como esses conceitos são traduzidos para a visão quântica. Utilizando o formalismo dos parâmetros de Stokes, descrevemos as propriedades de polarização para um ensemble aleatório de fótons polarizados em termos dos elementos de sua matriz densidade. Definimos então, pela primeira vez, os parâmetros generalizados de Stokes para a mecânica quântica e discutimos, no contexto do experimento da fenda dupla, como esses parâmetros generalizados podem ser interpretados fisicamente em termos do grau de coerência de uma teoria geral de interferência. Através desse último desenvolvimento, torna-se possível observar uma relação mais profunda entre coerência e polarização no comportamento da luz, onde a polarização afeta o grau de coerência do ensemble e, por outro lado, o grau de coerência determina as propriedades de polarização que serão observadas depois da ocorrência de interferência.

Palavras-chave: polarização; coerência; interferência; óptica quântica.

Abstract

In this work we analyze the coherence and polarization properties of light, first reviewing what is known in the classical case (where light is understood as an electromagnetic wave) and then analyzing how these concepts are translated to the quantum view. Using the Stokes parameters formalism, we describe the polarization properties for a random ensemble of polarized photons in terms of the elements of their density matrix. We then define for the first time the generalized Stokes parameters for quantum mechanics and discuss, in the context of the double slit experiment, how these generalized parameters can be interpreted physically in terms of the degree of coherence in a general theory of interference. Through this final development, it becomes possible to observe a deeper relationship between coherence and polarization in the behavior of light, where polarization affects the degree of coherence of the ensemble and, on the other hand, the degree of coherence determines the polarization properties that will be observed after interference has occurred.

Keywords: coherence; polarization; interference; quantum optics.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquema do interferômetro de fenda dupla.	19
Figura 2 – Representação dos estados de polarização na esfera de Poincaré.	25
Figura 3 – Esquema da propagação de um feixe luminoso pelo eixo z a partir de um plano de origem.	27
Figura 4 – Distribuição dos Parâmetros de Stokes na Tela de Detecção para um Ensemble Hiper-Emaranhado.	46

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	19
2.1	Conceitos Importantes de Óptica Clássica	19
2.1.1	Interferômetro de Fenda Dupla	19
2.1.2	Polarização e os Parâmetros de Stokes	22
2.1.3	Parâmetros generalizados de Stokes	26
2.2	Conceitos Importantes de Óptica Quântica	29
2.2.1	Mudança de Paradigma	29
2.2.2	Parâmetros de Stokes na Mecânica Quântica	31
3	RESULTADOS	33
3.1	Parâmetros Generalizados de Stokes na Mecânica Quântica	33
3.2	Aplicação em Interferometria	37
3.2.1	Quantificadores de Contraste	43
3.2.2	Exemplo: Ensemble Hiper-Emaranhado	45
4	CONCLUSÃO	47
	REFERÊNCIAS	49

1 Introdução

O estudo da coerência e da polarização foi e ainda é de fundamental importância para uma compreensão mais precisa da natureza da luz e dos fenômenos luminosos. O primeiro a perceber um fenômeno relacionado à polarização foi o físico dinamarquês Erasmus Bartholinus ([BARTHOLINUS, 1669](#)), que observou em 1669 a dupla refração da luz no mineral calcita. Alguns anos depois (em 1690), Christian Huygens interpretou a observação de Bartholinus postulando que a luz seria composta de uma onda primária e outra secundária, e através de seus próprios experimentos concluiu que qualquer uma delas poderia ser cancelada ao passar o feixe luminoso por um segundo cristal de calcita rotacionado na direção apropriada ([HUYGENS, 1690](#)).

O primeiro a utilizar o termo polarização foi o engenheiro francês Étienne Louis Malus, que em 1808 descobriu o fenômeno de polarização por reflexão e desenvolveu a regra que relaciona a intensidade da luz após atravessar um material polarizador com o cosseno quadrado do ângulo em que o polarizador foi rotacionado ([MALUS, 1809](#)). Alguns anos depois (1816), o cientista Augustin Jean Fresnel percebeu que dois feixes luminosos polarizados em direções formando um ângulo reto entre si, não são capazes de interferir ([FRESNEL, 1866](#)). Foi também Fresnel que concluiu em 1817 (confirmado posteriormente por François Arago ([ARAGO, 1819](#))) que a polarização pode ser explicada em termos da direção da oscilação da onda luminosa, sendo essa de natureza transversal. Sua definição é consideravelmente próxima do entendimento moderno.

Fazendo uma pequena digressão para o passado, em 1801 Young havia decidido concentrar seus estudos na própria natureza da luz. Passando um feixe focalizado de luz solar por um interferômetro de fenda dupla (o primeiro de seu tipo), Young foi capaz de observar um padrão de máximos e mínimos de intensidade luminosa em uma tela, demonstrando que a luz, ao atravessar as fendas, interferia consigo mesma. Esse fenômeno só era justificado supondo que a luz fosse uma onda ([YOUNG, 1802](#)).

Young também observou que dois fatores eram fundamentais para o sucesso do experimento. Um deles era a distância entre as fendas: o efeito de interferência é observado mais intensamente para distâncias de ordem de grandeza igual a do comprimento de onda. O outro não está relacionado ao aparato, mas as características da onda, e em especial às correlações espaciais entre as amplitudes da onda em diferentes pontos. A essas correlações é dado o nome de coerência ([ZILIO, 2009](#)). O interferômetro de fenda dupla, bem como as definições de coerência e polarização serão exploradas em mais detalhes ao longo deste trabalho.

Com a estruturação da teoria eletromagnética por J. C. Maxwell ([MAXWELL,](#)

1873) na segunda metade do século XIX e o novo entendimento de que a luz é uma onda de natureza eletromagnética, o estudo de coerência e polarização ganhou considerável sofisticação teórica. A descrição do estado de polarização de uma onda, por exemplo, ganhou diferentes formatos associados às componentes de seu campo elétrico. O talvez mais útil desses formatos é uma série de quatro quantidades intituladas parâmetros de Stokes, propostos por G. G. Stokes em 1852 (STOKES, 1852) e redescobertos por Perrin e Chandrasekar na primeira metade do século XX (CHANDRASEKHAR, 1960; PERRIN, 1942). A coerência tornou-se matematicamente bem definida através das expressões de interferência oriundas das somas vetoriais e das normas dos campos, como veremos na seção seguinte.

Essa estrutura permaneceria mais ou menos a mesma até o surgimento da mecânica quântica no começo do século XX, que traria profundas mudanças no entendimento científico da luz. Foi observado que, em certas situações, ela se comportava como onda (notadamente em experimentos de interferência e difração), mas que em fenômenos ligados à interação com a matéria (e.g. experimento fotoelétrico e espalhamento Compton), ela se comportava como partícula, o fóton. Na verdade, quando não-perturbado, o sistema quântico se comporta como uma onda e sua posição não é bem definida. Quando forçado a interagir, entretanto, ele comporta-se como uma partícula de posição bem localizada. Essa posição não pode ser determinada a priori e tudo que pode ser obtido, antes da observação, são as probabilidades de que a partícula se encontre em dada posição após a medição.

Baseado nessas descobertas, uma nova estrutura teórica teve então que ser criada, tendo como fundamento a teoria de superposição e o estudo de probabilidade. Os graus de liberdade de um fóton como posição, momento e mesmo a polarização foram então adequados a esse novo esquema. Isso era necessário para, nas palavras de Dirac, "efetuar a reconciliação das propriedades corpusculares e ondulatórias da luz" (DIRAC, 1947).

Talvez em nenhuma outra situação essa dualidade seja mais evidente do que no experimento da fenda dupla. Como veremos mais adiante, um único fóton lançado contra as fendas terá um estado de posição representado pela superposição dos estados de posição nas fendas. A cada um desses estados é então associada uma função de onda oriunda da ótica, cuja distribuição pelo espaço está agora ligada com a probabilidade de se localizar o fóton em determinada posição além das fendas.

Se qualquer experimento é realizado para observar o fóton imediatamente depois que ele cruza as fendas, ele se mostrará em um estado bem definido que chegará na tela de detecção na região imediatamente posterior a uma das fendas. Podemos somente calcular a probabilidade de em qual dos dois estados ele se mostrará. Se nenhuma observação desse tipo for feita, o fóton interferirá consigo mesmo até colidir com a tela de detecção, e o conjunto de possíveis estados de posição que ele passa a ter (bem como a probabilidade de acabar em um deles) segue o padrão de máximos e mínimos observado por Young para

uma onda luminosa (DIRAC, 1947). É importante salientar que esse comportamento é válido não só para fótons, mas para qualquer sistema com propriedades quânticas como elétrons, átomos e até moléculas (NAIRZ; ARNDT; ZEILINGER, 2003).

É importante também observar o uso do termo *propriedades quânticas* e como ele está intrinsecamente relacionado ao conceito de coerência. Os resultados que diferem a mecânica quântica do que é esperado classicamente só se manifestam no experimento da fenda dupla se o sistema for deixado imperturbado para interferir: e ele só irá interferir se houver coerência. Nesse sentido a coerência pode ser considerada como uma medida dessas propriedades quânticas.

O experimento da fenda dupla é também um excelente esquema para se observar a íntima relação entre coerência e polarização. Fótons com certo estado de polarização chegando nas fendas apresentarão um tipo de superposição dupla e a coerência se tornará dependente não só de correlações espaciais, mas também da polarização (SANTOS et al., 2022). Por outro lado, a coerência do sistema influenciará diretamente no estado de polarização dos fótons medidos na fenda.

O presente trabalho tem como objetivo realizar uma análise da interferência de fótons no contexto do interferômetro de fenda dupla, levando em consideração não só o grau de liberdade "caminho", como é tradicionalmente feito, mas também o de polarização. O foco da análise será observar a natureza interdependente da coerência e polarização ao longo do processo e mostrar como tal relação pode expandir a quantidade de informação que se obtém através da interferometria. Para tal, duas quantidades serão fundamentais e recorrentes: o grau de coerência como medida da mesma, e os parâmetros de Stokes como método de quantificar a polarização. Essa análise será fortemente embasada na descrição da matriz densidade unificada (BERNARDO, 2017) como forma de quantização da teoria unificada de coerência e polarização da óptica clássica (WOLF, 2003) e no uso da versão quântica dos parâmetros Generalizados de Stokes (KOROTKOVA; WOLF, 2005), derivada pelo autor.

Este trabalho está dividido em 4 capítulos. No capítulo I, a Introdução, foi realizado um apanhado dos fatos históricos significativos que levaram ao presente estudo de coerência e polarização da luz. Foram também delineados os objetivos do presente trabalho, dentro desse contexto. No capítulo II, Fundamentação Teórica, desenvolvemos uma revisão dos principais conceitos da óptica clássica associados ao estudo de coerência e polarização, traduzindo em seguida esses conceitos para o contexto da mecânica quântica. No capítulo III, Resultados, apresentamos a versão quântica dos parâmetros generalizados de Stokes e, utilizando do estudo da interferometria de fenda dupla, obtemos um significado físico para esses parâmetros, desenvolvendo uma versão expandida do conceito de interferência. Finalmente, no capítulo IV, a Conclusão, fazemos um resumo do que foi discutido ao longo do trabalho e argumentamos como tais desenvolvimentos permitiram conceber uma

relação mais íntima entre polarização e coerência. Apresentamos também uma perspectiva para futuros estudos no tema.

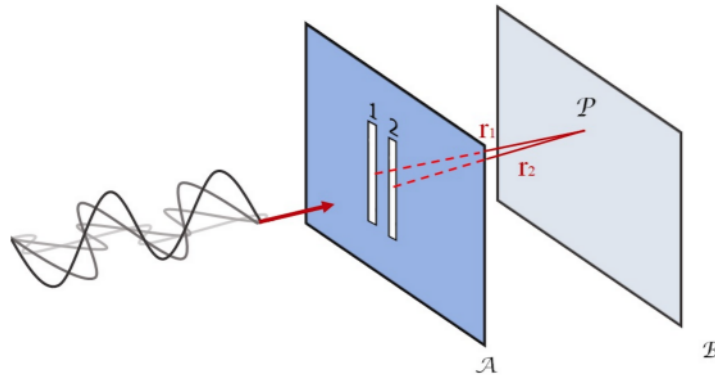
2 Fundamentação Teórica

2.1 Conceitos Importantes de Óptica Clássica

2.1.1 Interferômetro de Fenda Dupla

O interferômetro de fenda dupla será o plano de fundo para todo desenvolvimento teórico deste trabalho e portanto é necessário discuti-lo com certo cuidado. Um esquema geral do interferômetro está disposto na figura 1 abaixo.

Figura 1 – Esquema do interferômetro de fenda dupla.



Interferência por fenda dupla: Uma onda luminosa atinge uma máscara A contendo duas fendas, por onde passarão duas ondas intermediárias que interferirão entre si até atingirem posteriormente o anteparo B. Fonte: retirado de (SANTOS et al., 2022).

Uma onda luminosa é lançada contra a máscara A, onde se encontram as fendas 1 e 2. Pelo princípio de Huygens, da onda primária terão origem duas novas ondas propagando-se a partir das fendas. Elas interferirão entre si até atingirem a tela de detecção B. Se a espessura das fendas for consideravelmente pequena, as ondas secundárias serão esféricas. Para simplificar, consideraremos que a direção dos campos é igual (são paralelos), de modo que podemos tratar o problema da interferência em termos das amplitudes dos campos

elétricos¹. Elas poderão ser escritas como (ZILIO, 2009):

$$E_1 = \frac{E_{01}}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t + \phi_1)} \quad (2.1a)$$

$$E_2 = \frac{E_{02}}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t + \phi_2)}, \quad (2.1b)$$

onde $r_i = |r_i|$, $i = 1, 2$ é a distância entre a fenda i e a tela e E_{01} e E_{02} são constantes. A interferência será causada pela soma dos dois campos. Como o efeito observável da interferência será o padrão de intensidade luminosa projetado na tela de detecção, o interesse volta-se ao cálculo da intensidade em cada ponto P da tela, que é proporcional a $\vec{E}^* \cdot \vec{E}$:

$$I(P) \propto E^* \cdot E = E_1^* E_1 + E_2^* E_2 + E_1^* E_2 + E_2^* E_1. \quad (2.2)$$

Substituindo as equações (2.1a) e (2.1b) em (2.2), temos:

$$I(P) \propto \frac{E_{01}^2}{r_1^2} + \frac{E_{02}^2}{r_2^2} + \frac{E_{01}^* E_{02}}{r_1 r_2} e^{ik(r_2 - r_1)} + \frac{E_{02}^* E_{01}}{r_1 r_2} e^{ik(r_1 - r_2)}. \quad (2.3)$$

Aqui, para simplificar, consideramos que os campos não possuem diferença de fase entre si. Os dois primeiros termos dessa equação estão associados com a intensidade obtida se somente a fenda 1 ou 2 estivesse aberta, respectivamente. Os dois últimos termos são os de maior interesse: são os responsáveis pela interferência. É fácil perceber que um é o complexo conjugado do outro, de modo que podem ser reescritos como:

$$\frac{2E_{01}E_{02} \cos[k(r_1 - r_2)]}{r_1 r_2}. \quad (2.4)$$

Aplicando equação (2.4) em (2.3) e definindo $\delta = k(r_1 - r_2)$, é possível obter $I(P)$ como:

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)} \cos(\delta). \quad (2.5)$$

Aqui, $I_j(P) = I(0)/r_j^2$, $j = 1, 2$. Quando o ponto em consideração estiver em uma posição tal que a diferença entre as distâncias percorridas pelas ondas for igual a um número inteiro de comprimentos de onda, $I(P)$ será máximo. Caso a diferença seja igual a

¹ É um conhecido resultado do eletromagnetismo que a amplitude do campo magnético da onda é, em geral, muitas ordens de grandeza menor que a amplitude do campo elétrico. Assim, nesse tipo de estudo, somente o campo elétrico é considerado

um número semi-inteiro de comprimentos de onda, $I(P)$ será mínimo. Em posições que difiram dos dois primeiros casos, haverá um valor intermediário para $I(P)$. Assim, como dito antes, o efeito final da interferência será a formação de um padrão de máximos e mínimos de intensidade luminosa. É possível também quantificar o quão visível é este padrão de máximos e mínimos de intensidade (o quanto os pontos de máximo diferem dos pontos de mínimo). Podemos utilizar o quantificador de visibilidade proposto por Michelson:

$$V = \frac{\max[I] - \min[I]}{\max[I] + \min[I]}, \quad (2.6)$$

que no caso em consideração, torna-se:

$$V = \frac{2\sqrt{I_1(P)I_2(P)}}{I_1(P) + I_2(P)}. \quad (2.7)$$

É importante esclarecer que as condições impostas no começo dessa análise tiveram uma implicação importante no resultado obtido. A existência ou não de interferência, bem como o quantificador de visibilidade, tornou-se unicamente dependente da diferença entre as distâncias percorridas pelas ondas até cada ponto da tela, o que não é em geral verdade. Por exemplo, considerou-se que os campos elétricos são paralelos entre si, e não há razão para supor que o serão em qualquer situação. Se houver um ângulo relativo entre eles, o efeito da interferência mudará, de tal forma que o fator de interferência será nulo para um ângulo de 90° .² Assim, no geral, o mais apropriado é definir uma função de correlação ou **coerência** entre os campos, definida como:

$$\Gamma_{12}(r, t) = \langle \vec{E}_1(r, t)^* \vec{E}_2(r, t) \rangle_T, \quad (2.8)$$

Onde $\langle \quad \rangle$ é uma média temporal feita para situações onde as ondas não são perfeitamente monocromáticas; do contrário podem ser removidos. Fisicamente, a função de coerência mede a capacidade de um sistema ótico gerar interferência. Pode-se reescrever (2.8) de forma a deixar a parte espacial explícita:

$$\Gamma_{12}(r, t) = W_{12}(t) \frac{e^{ik(r_1 - r_2)}}{r_1 r_2}, \quad (2.9)$$

e aplicando a (2.5), obtem-se a forma mais geral da equação de interferência:

² Observe que, na (2.8), o produto interno (que é definido em termos do cosseno entre as direções dos campos elétricos) seria zero para um ângulo de 90° .

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)}\text{Re}\{\mu e^{ik(r_1-r_2)}\}, \quad (2.10)$$

onde

$$\mu = \frac{W_{12}}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (2.11)$$

é a versão normalizada da função W_{12} , chamada de grau de coerência. Da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que:

$$|\langle E_1(t)^* E_2(t) \rangle| \leq \|\langle \vec{E}_1(t)^* \vec{E}_1(t) \rangle\| \|\langle \vec{E}_2(t)^* \vec{E}_2(t) \rangle\| = \sqrt{I_1(0)}\sqrt{I_2(0)}, \quad (2.12)$$

de forma que $0 \leq |\mu| \leq 1$. Para $|\mu| = 1$, existe coerência total, como no caso tratado em (2.5). Para $|\mu| = 0$, temos incoerência. Para valores intermediários, a coerência é parcial.

2.1.2 Polarização e os Parâmetros de Stokes

A polarização de uma onda eletromagnética refere-se à direção de oscilação no espaço de seu campo elétrico (também chamado de campo óptico). Em geral ele pode oscilar em diferentes direções, com diferentes amplitudes. Caso todas as possíveis direções tenham igual amplitude, a onda é classificada como despolarizada. Caso uma (ou algumas) direções tenham amplitudes maiores do que as demais, a luz é classificada como parcialmente polarizada. Uma onda que possua uma única direção de oscilação encontra-se totalmente polarizada.

A maioria dos fenômenos interessantes discutidos na introdução deste trabalho referem-se a ondas totalmente polarizadas, mas a estrutura teórica apresentada ao longo desta subseção é geral. Sendo a polarização essencialmente uma direção no espaço, é conveniente para efeitos de apresentação escrevê-la como um vetor unitário $\vec{p}$. Para ondas totalmente polarizadas, esse vetor pode ser escrito em termos de uma de três bases: $\{\vec{h}, \vec{v}\}$ (polarização horizontal/vertical), $\{\vec{d}, \vec{a}\}$ (diagonal/anti-diagonal) e $\{\vec{r}, \vec{l}\}$ (polarização circular à direita/à esquerda).

Como é conhecido da álgebra linear, os vetores de uma base podem ser escritos em termos dos vetores de outra. Assim, por exemplo, a polarização diagonal é obtida pela superposição dos vetores da base horizontal/vertical, onde cada vetor tem igual intensidade luminosa e fase relativa nula:

$$\vec{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{h} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}, \quad (2.13)$$

onde $\|\vec{d}\| = 1$. Sendo o comprimento do vetor polarização sempre unitário e uma fase relativa entre os vetores não interferindo neste comprimento, tem-se uma representação geral:

$$\vec{p} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{h} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \vec{v}. \quad (2.14)$$

Onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$. Uma construção análoga poderia ser feita em termos das outras duas bases. Nota-se que tal representação permite descrever os vetores de polarização em termos de pontos $\{\theta, \phi\}$ da superfície de uma esfera de raio unitário. Essa questão será retomada posteriormente.

Partindo agora para a descrição de um vetor de polarização qualquer, existem duas formas de se definir quantitativamente o estado de polarização de uma onda eletromagnética: A primeira é a matriz de coerência (HECHT, 2017), uma formulação sistemática provinda das conhecidas matrizes de Jones e Mueller (WOLF, 2003). A segunda, escolhida para este trabalho, são os parâmetros de Stokes (STOKES, 1852; CHANDRASEKHAR, 1960; PERRIN, 1942), cuja definição mais precisa será apresentada agora.

Os parâmetros de Stokes possuem diversas representações. A mais intuitiva do ponto de vista experimental é considerar quatro ondas eletromagnéticas igualmente preparadas, sendo cada uma submetida aos seguintes aparatos experimentais: a primeira é transmitida integralmente, sem qualquer tipo de filtro ou bloqueio. A segunda é submetida a um divisor de feixe polarizado ou PBS, por onde luz horizontalmente polarizada será transmitida e luz verticalmente polarizada será refletida. A terceira é submetida ao PBS rotacionado em 45° , de forma que luz diagonalmente polarizada será transmitida e luz anti-diagonalmente polarizada será refletida. Finalmente, a quarta onda é submetida a uma lâmina de um quarto de onda, que transformará polarização circular a direita em polarização diagonal e polarização circular a esquerda em polarização anti-diagonal, e em seguida ao PBS rotacionado em 45° , de forma que a parte no final transmitida se refere à luz polarizada circularmente à direita e a parte refletida, à luz polarizada circularmente à esquerda. São então medidas as intensidades luminosas das partes transmitidas após a passagem por esses aparatos, com valores respectivos de I_0 , I_1 , I_2 e I_3 . Considerando a intensidade luminosa como unitária antes dos aparatos, os parâmetros de Stokes serão definidos como (HECHT, 2017):

$$s_0 = I_0, \quad (2.15a)$$

$$s_1 = 2I_1 - I_0, \quad (2.15b)$$

$$s_2 = 2I_2 - I_0, \quad (2.15c)$$

$$s_3 = 2I_3 - I_0. \quad (2.15d)$$

Nessa definição é possível observar que cada parâmetro representa a tendência da polarização de uma onda eletromagnética para uma das bases de polarização: s_1 para a base $\{\vec{h}, \vec{v}\}$, s_2 para a base $\{\vec{d}, \vec{a}\}$ e s_3 para a base $\{\vec{r}, \vec{l}\}$. Observa-se também, por este mesmo motivo, que cada conjunto $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ representa de maneira única um dado estado de polarização. Os valores dos parâmetros 1-3 variam entre 1 e -1, onde 1 significa que a onda encontra-se oscilando inteiramente na direção de transmissão da respectiva base e -1 que a oscilação ocorre exclusivamente na direção ortogonal à primeira.

Como exemplo para firmar o entendimento, considera-se uma onda luminosa parcialmente polarizada de tal forma que 50% de sua intensidade oscila na direção diagonal e os 50% restantes oscilam circularmente à esquerda. Daqui até o fim deste trabalho, para facilitar a compreensão, consideraremos a intensidade original da luz sempre como unitária³. Com relação aos filtros, se observará que $I_0 = 1$, (a intensidade transmitida é total com relação a intensidade original da onda), metade passará pelo filtro horizontal, $I_1 = 0,5$ (já que os estados diagonal e circularmente polarizado à esquerda, decompostos na base $\{\vec{h}, \vec{v}\}$, são formados cada um por 50% de polarização horizontal cada) e pelos dois outros filtros passarão 75% da intensidade inicial (100% da metade correspondente a cada base e 50% da decomposição da outra metade), de forma que $I_2 = I_3 = 0,75$. Aplicando esses valores às equações (2.15a)-(2.15d), obtemos os parâmetros de Stokes como: $\{1, 0, 1/2, 1/2\}$.

Através dos parâmetros de Stokes também é possível definir uma medida do quão polarizada certa onda luminosa é. Esta medida é chamada de grau de polarização, definida como (HECHT, 2017):

$$p = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0}. \quad (2.16)$$

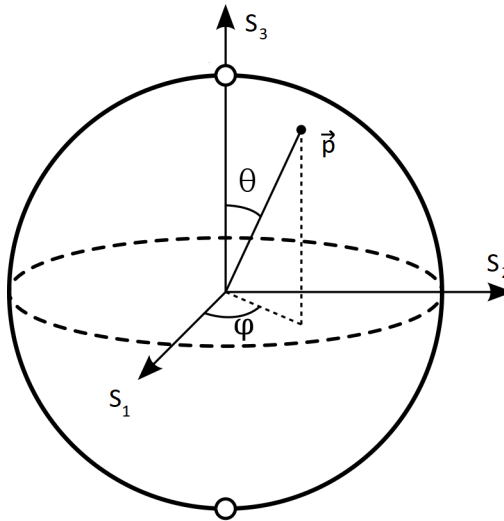
E é fácil perceber do próprio intervalo em que os parâmetros de Stokes estão definidos que $0 \leq p \leq 1$. Para $p = 0$, $S = \{1, 0, 0, 0\}$, o que significa que a onda está oscilando com mesma intensidade em todas as direções e portanto é totalmente

³ Uma observação sobre unidades de medida se faz importante aqui: a intensidade luminosa é medida no SI em Candelas (cd). Entretanto, devido à normalização dos valores, tem-se que quaisquer intensidades luminosas apresentadas no texto são na verdade sua divisão pela intensidade luminosa inicial, o que torna os valores de I_k adimensionais, $k = 0, 1, 2, 3$. Essencialmente estas intensidades são, na verdade, porcentagens da intensidade inicial.

despolarizada. Para $p = 1$ teremos $s_i = 1$ e $s_j = 0$, onde $i, j = 1, 2, 3$ e $j \neq i$, o que significa que a onda oscila em somente uma direção - é totalmente polarizada. Valores intermediários serão referentes às ondas parcialmente polarizadas. Para o exemplo acima, temos $p \approx 0,71$.

Retornando à representação geométrica dos estados de polarização, é possível observar que o grau de polarização confere o último parâmetro necessário para representação de qualquer polarização na esfera de raio unitário: os estados totalmente polarizados, como já visto, encontram-se na superfície ($r = 1$) e possuem grau de polarização 1. Assim, considerando o grau de polarização como o raio desta esfera, qualquer estado torna-se um ponto da mesma, descrito por $\{p, \theta, \phi\}$. Os estados parcialmente polarizados ocuparão então pontos no interior da esfera ($0 < p < 1$) e o estado totalmente despolarizado ocupará seu centro ($p = 0$). Esta esfera é denominada Esfera de Poincaré, proposta pelo mesmo em 1892 (GOLDSTEIN, 2010). Um esquema segue na figura 2.

Figura 2 – Representação dos estados de polarização na esfera de Poincaré.



Esfera de Poincaré: Estados de polarização quaisquer são representados na esfera através dos ângulos θ e ϕ e do grau de polarização p . Estados polarizados encontram-se na superfície e estados parcialmente polarizados no interior, com o estado totalmente despolarizado no centro. Fonte: Adaptado de (GOLDSTEIN, 2010).

Uma outra forma de descrever os parâmetros de Stokes, de maior interesse teórico, é diretamente através das componentes do campo óptico da onda. Em um sistema de coordenadas cartesianas, considerando a direção de propagação da onda como ao longo do eixo z , os possíveis componentes serão $\vec{E}_x$ e $\vec{E}_y$. No espaço livre, esses campos podem ser escritos como (HECHT, 2017):

$$\vec{E}_x(z, t) = E_{0x}(t) \exp[i(kz - \omega t + \epsilon_x(t))]\hat{x}, \quad (2.17a)$$

$$\vec{E}_y(z, t) = E_{0y}(t) \exp[i(kz - \omega t + \epsilon_y(t))] \hat{y}. \quad (2.17b)$$

E sabendo que a intensidade luminosa é proporcional ao módulo quadrado dos campos, ao aplicar as equações (2.17a) e (2.17b) nas equações de (2.15a) a (2.15d) obtém-se:

$$s_0 = \langle E_x^* E_x \rangle_T + \langle E_y^* E_y \rangle_T = \langle E_{0x}^2 \rangle_T + \langle E_{0y}^2 \rangle_T, \quad (2.18a)$$

$$s_1 = \langle E_x^* E_x \rangle_T - \langle E_y^* E_y \rangle_T = \langle E_{0x}^2 \rangle_T - \langle E_{0y}^2 \rangle_T, \quad (2.18b)$$

$$s_2 = \langle E_x^* E_y \rangle_T + \langle E_y^* E_x \rangle_T = \langle 2E_{0x} E_{0y} \cos(\epsilon) \rangle_T, \quad (2.18c)$$

$$s_3 = i[\langle E_y^* E_x \rangle_T - \langle E_x^* E_y \rangle_T] = \langle 2E_{0x} E_{0y} \sin(\epsilon) \rangle_T. \quad (2.18d)$$

Aqui, $\epsilon = \epsilon_x - \epsilon_y$ e os parâmetros 2 e 3 foram obtidos ao escrever os campos diagonal, anti-diagonal, circularmente polarizado à direita e à esquerda em termos de $\vec{E}_x$ e $\vec{E}_y$. A importância das equações (2.18a)-(2.18d) ficará clara na subseção seguinte.

2.1.3 Parâmetros generalizados de Stokes

A descrição dos parâmetros de Stokes apresentada até aqui levou em consideração um fator implícito que precisa ser salientado agora: a medição das intensidades ou a consideração dos campos elétricos é feita em uma posição r específica do espaço. Assim, não há razão para imaginar que o valor dos parâmetros de Stokes em certo ponto permanecerão os mesmos em outro. Um exemplo é a existência de algum material posicionado à certa distância dos filtros, tal que a interação com a onda luminosa provocasse mudanças de polarização. A rotação de Faraday, por exemplo, muda a base de oscilação da onda (MEYERS, 2001), de tal forma que o valor dos parâmetros antes e depois da passagem pelo material será geralmente distinto. Mesmo quando a onda luminosa se propaga no espaço livre poderá haver mudança nas propriedades de polarização, como mostrado para o caso de luz parcialmente coerente (JAMES, 1994) ou em interferometria, como será argumentado posteriormente.

Torna-se importante, então, desenvolver um método capaz de descrever os parâmetros de Stokes não como um grupo único de valores, mas em termos de uma função espacial que permita prevê-los em qualquer posição r . O primeiro método foi o estabelecimento da teoria unificada de coerência e polarização, cuja quantidade central é a matriz de correlação, que funciona como um complemento à matriz de coerência já mencionada

(WOLF, 2003). O segundo método foi a definição de um grupo extra de parâmetros, os parâmetros generalizados de Stokes (KOROTKOVA; WOLF, 2005), também conhecidos como parâmetros de Stokes de dois pontos:

$$S_0 = \langle E_x^*(r_1)E_x(r_2) \rangle + \langle E_y^*(r_1)E_y(r_2) \rangle, \quad (2.19a)$$

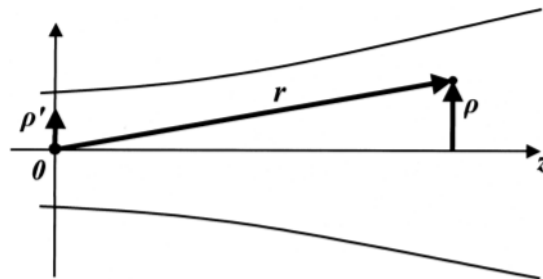
$$S_1 = \langle E_x^*(r_1)E_x(r_2) \rangle - \langle E_y^*(r_1)E_y(r_2) \rangle, \quad (2.19b)$$

$$S_2 = \langle E_x^*(r_1)E_y(r_2) \rangle + \langle E_y^*(r_1)E_x(r_2) \rangle, \quad (2.19c)$$

$$S_3 = i[\langle E_y^*(r_1)E_x(r_2) \rangle - \langle E_x^*(r_1)E_y(r_2) \rangle]. \quad (2.19d)$$

Comparados as equações (2.18a)-(2.18d), os parâmetros generalizados seguem a mesma definição, com a fundamental diferença de que os campos elétricos e seus conjugados são avaliados em duas posições distintas do espaço. Isso evidentemente remove a simples conceptualização experimental existente até então, já que os parâmetros generalizados não podem ser interpretados em termos de intensidade luminosa. Eles são, na verdade, correlações espaciais intrínsecas da onda, e esse significado ficará mais claro ao discutirmos sua aplicação na resolução do problema proposto no parágrafo abaixo.

Figura 3 – Esquema da propagação de um feixe luminoso pelo eixo z a partir de um plano de origem.



Fonte: Retirado de (KOROTKOVA; WOLF, 2005).

Considere um feixe luminoso propagando-se no espaço livre, na direção do eixo z , a partir de um plano de origem e cujo desvio do eixo seja pequeno. Estas condições permitiriam que o campo elétrico em certa posição $z > 0$ fosse definido em termos do campo elétrico no plano de origem ($z = 0$) através de uma aproximação paraxial. Considerando coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) (KOROTKOVA; WOLF, 2005):

$$E_i(r, t) = \int E_i^{(0)}(\rho', t) G(\rho - \rho', z) d^2 \rho', \quad (2.20)$$

com $r = (\rho', z)$, $G(\rho - \rho', z)$ uma função de Green e o índice superior (0) indicando que o campo é considerado no plano de origem. Um esquema desta situação é representado na figura 3. Utilizando tal definição, é natural escrever:

$$\langle E_i^*(r_1, t) E_j(r_2, t) \rangle = \int \langle E_i^{(0)}(\rho'_1, t) E_j^{(0)}(\rho'_2, t) \rangle K(\rho_1 - \rho'_1, \rho_2 - \rho'_2, z) d^2 \rho'_1 d^2 \rho'_2. \quad (2.21)$$

Aqui, $K(\rho_1 - \rho'_1, \rho_2 - \rho'_2, z) = G^*(\rho_1 - \rho'_1, z) \times G(\rho_2 - \rho'_2, z)$ e $i, j = x, y$. Dado que os parâmetros generalizados de Stokes são somas de termos descritos pela equação (2.21), eles podem ser escritos como:

$$S_\alpha(r_1, r_2, t) = \int S_\alpha^{(0)}(\rho_1, \rho_2, t) K(\rho_1 - \rho'_1, \rho_2 - \rho'_2, z) d^2 \rho'_1 d^2 \rho'_2, \quad (2.22)$$

e para $r_1 = r_2 = r$, S_α se reduz a $s_\alpha(r)$, os parâmetros tradicionais de Stokes, de forma que:

$$s_\alpha(r, t) = \int S_\alpha^{(0)}(\rho_1, \rho_2, t) K(\rho_1 - \rho'_1, \rho_2 - \rho'_2, z) d^2 \rho'_1 d^2 \rho'_2. \quad (2.23)$$

Ou seja, a partir do conhecimento dos parâmetros generalizados de Stokes na origem, tornou-se possível determinar os parâmetros tradicionais de Stokes (e com isso as propriedades de polarização da onda) em qualquer ponto do espaço de propagação.

2.2 Conceitos Importantes de Óptica Quântica

2.2.1 Mudança de Paradigma

Depois de considerar de forma mais detalhada a descrição teórica da interferência, coerência e polarização no caso clássico, onde a luz é tratada como uma onda eletromagnética, é importante avaliar como esses conceitos foram desenvolvidos para o caso quântico. Como brevemente discutido na introdução, na mecânica quântica a luz passa a ser vista não mais como uma onda, mas como uma partícula - o fóton. O estado físico desse fóton é descrito a partir de uma superposição dos autoestados associados a um ou mais observáveis físicos. Um autoestado é, por sua vez, o estado físico cuja medição do(s) respectivo(s) observável(is) resulta sempre em um mesmo valor.

O estado geral da partícula está então distribuído entre todos os autoestados até que seja feita uma medição, e é o ato de medir que força a partícula a mostrar-se em somente um de seus autoestados, cujo valor da medida é bem determinado. Antes da medição, tudo que a teoria quântica permite é calcular as probabilidades de que o processo de medição resulte no colapso do estado geral em qualquer dos autoestados associados.⁴

Para tornar a explicação menos abstrata, toma-se o caso em que o observável físico em consideração é a polarização. Não é mais possível defini-la como uma direção de oscilação do campo, visto que a luz comporta-se também como uma partícula. Em vez disso, a polarização torna-se um grau de liberdade intrínseco da partícula, que pode assumir diferentes valores. Para um fóton totalmente polarizado, o estado geral de polarização pode ser escrito em termos da superposição dos autoestados das bases de polarização discutidas na subseção 2.1.2. Tomando a base horizontal/vertical:

$$|\psi\rangle = a_1 |H\rangle + a_2 |V\rangle, \quad (2.24)$$

onde a_1 e a_2 são números complexos e $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$. O significado físico disso é que, antes da medição, o fóton não tem uma polarização bem definida. Tudo que se pode saber são as probabilidades de que, imediatamente após o ato de medição da polarização, ele se mostre com polarização vertical ou horizontal, sendo as probabilidades dadas pelo módulo ao quadrado dos coeficientes da superposição associados a cada autoestado.

Como um exemplo, pode-se imaginar que fótons individuais são lançados contra um filtro polarizador que só permite a passagem de luz polarizada perpendicular a um certo eixo interno (dicroísmo) (ZILIO, 2009). Ao passar pelo filtro, o fóton ou será inteiramente

⁴ Os conceitos discutidos neste parágrafo foram simplificados por assumir que o leitor já tem certa familiaridade com a interpretação de Copenhagen da mecânica quântica.

absorvido ou inteiramente transmitido, visto que não podem haver "meios-fótons". Caso o fóton seja transmitido, seu estado geral terá colapsado, no ato da medição, no autoestado associado à polarização perpendicular ao eixo. Caso seja absorvido, o estado geral colapsou no autoestado associado à polarização paralela ao eixo. Ao lançar um número considerável de fótons por esse filtro é possível computar a estatística de quantos passaram e quantos foram absorvidos e comparar com as probabilidades previstas pela teoria.

É importante mencionar que um estado quântico só pode ser escrito na forma da equação (2.24) devido à suposição inicial de que o fóton é totalmente polarizado. Na linguagem da mecânica quântica se diz que o ensemble de fótons tem um estado "puro". Ensembles parcialmente polarizados ou despolarizados são denominados de forma geral como um ensemble misto. Eles são por definição uma coleção de estados puros associados a diferentes pesos estatísticos clássicos (a abundância de cada estado puro dentro do ensemble misto), e.g., 30% do ensemble possui estado de polarização horizontal e 70% estado de polarização diagonal. Para descrever também esses estados, utiliza-se o formalismo mais geral da matriz densidade, introduzido por von Neumann em 1927 (SAKURAI, 1994):

$$\hat{\rho} = \sum_{i=0}^n c_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.25)$$

Aqui $|\psi_i\rangle$ são todos os possíveis estados puros compondo o estado geral e c_i são os pesos estatísticos supracitados. Observa-se no caso de um estado puro que $c_0=1$ e os demais são zero, de modo que $\hat{\rho} = |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$, sendo aqui $|\psi_0\rangle = |\psi\rangle$, o único estado. Observa-se também que o formalismo da matriz densidade descreve o estado do sistema como um operador. A matriz densidade possui autovalores entre 0 e 1 e é normalizada. Sua utilidade é melhor evidenciada em duas aplicações importantes:

1. $\langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle$ fornece a densidade de probabilidade de encontrar o sistema no estado $|\alpha\rangle$.
2. $\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho})$ representa a média das medidas de um dado observável A sobre um ensemble representado pelo estado $\hat{\rho}$.

A primeira aplicação é de evidente necessidade, visto que, como já discutido, toda a informação que a teoria quântica é capaz de fornecer sobre um sistema sem perturbá-lo são as probabilidades de encontra-lo, após a medição, em certo autoestado específico (caso o espectro do observável seja discreto) ou a densidade de probabilidade de encontra-lo, depois da medição, em certa região de possíveis autoestados (caso o espectro do observável seja contínuo).

A segunda aplicação requer uma consideração adicional para tornar-se igualmente significativa. Como a medição de um observável em geral não possui um valor determinís-

tico⁵, a média torna-se o mais próximo em termos do conhecimento sobre tais valores que é possível obter (mantendo o sistema não-perturbado). A média também pode oferecer um comportamento de tendência do ensemble a certos autoestados específicos, como veremos mais adiante.

2.2.2 Parâmetros de Stokes na Mecânica Quântica

Na óptica clássica, os parâmetros de Stokes apresentam a tendência do estado de polarização em relação a uma das direções de uma das bases existentes (horizontal/vertical, diagonal/anti-diagonal, circularmente polarizado à direita/à esquerda). Na mecânica quântica, o significado permanece, porém agora se traduz em termos das probabilidades de um dado fóton apresentar-se em um dos autoestados de uma dessas bases, após efetuada uma medição.

De maneira mais formal, os parâmetros de Stokes representam as amplitudes de probabilidade do estado geral de um sistema colapsar em um dos possíveis autoestados de polarização após a medição; da teoria de superposição, eles podem ser escritos como os coeficientes que expandem a matriz densidade do sistema em certa base conveniente (JAMES; KWIAT P. G. MUNRO; WHITE, 2001):

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \frac{s_i}{s_0} \hat{\sigma}_i \quad (2.26)$$

onde s_i são os parâmetros de Stokes, $\hat{\sigma}_0$ é a matriz identidade e $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$ e $\hat{\sigma}_3$ são as matrizes de Pauli. A divisão por s_0 existe para propósitos de normalização, e considerando os s_i 's como já normalizados, é possível reescrever (2.26) como:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_0 + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma} \}. \quad (2.27)$$

Aqui, $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ e $\boldsymbol{\sigma} = \{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3\}$. Multiplicando ambos os lados por uma das matrizes $\hat{\sigma}_i$, obtemos:

$$\hat{\sigma}_i \cdot \hat{\rho} = \frac{1}{2} [\hat{\sigma}_i + \mathbf{s} \cdot (\hat{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma})]. \quad (2.28)$$

E tomando o traço:

⁵ A exceção, claro, é para quando a medição for realizada em um sistema que já se encontra em um dos autoestados daquele observável.

$$tr(\hat{\sigma}_i \cdot \hat{\rho}) = \frac{1}{2}[tr(\hat{\sigma}_i) + \mathbf{s} \cdot tr(\hat{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma})]. \quad (2.29)$$

Das matrizes de Pauli, têm-se as seguintes propriedades:

- $tr(\hat{\sigma}_i) = 0$
- $tr(\hat{\sigma}_i \cdot \hat{\sigma}_j) = 2\delta_{ij}$ (GRIFFITHS, 2008).

Assim, a forma final da expressão se torna:

$$s_i = tr(\hat{\sigma}_i \cdot \hat{\rho}). \quad (2.30)$$

Para um dado estado de polarização cuja matriz densidade é:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

escrita na base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$, os parâmetros de Stokes serão, da equação (2.30):

$$s_0 = tr(\hat{\sigma}_0 \cdot \hat{\rho}) = \rho_{11} + \rho_{22}, \quad (2.32a)$$

$$s_1 = tr(\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\rho}) = \rho_{11} - \rho_{22}, \quad (2.32b)$$

$$s_2 = tr(\hat{\sigma}_2 \cdot \hat{\rho}) = \rho_{12} + \rho_{21}, \quad (2.32c)$$

$$s_3 = tr(\hat{\sigma}_3 \cdot \hat{\rho}) = i[\rho_{12} - \rho_{21}]. \quad (2.32d)$$

O que é um resultado importante, visto que permite extrair os parâmetros diretamente da matriz densidade, sem necessidade de recorrer frequentemente ao caso clássico.

3 Resultados

3.1 Parâmetros Generalizados de Stokes na Mecânica Quântica

Foi discutido na subseção 2.1.3 o desenvolvimento, na óptica clássica, de dois métodos para descrever as mudanças nas propriedades de polarização de uma onda eletromagnética à medida em que esta se propaga e também para prever, para cada ponto do espaço de propagação, tais propriedades: a teoria unificada de coerência e polarização e os parâmetros generalizados de Stokes. Com a mudança de paradigma para a mecânica quântica, se torna importante explorar o funcionamento destes métodos para o caso quântico. No caso da teoria unificada de coerência e polarização (WOLF, 2003), foi possível desenvolver uma versão quântica a partir de um tratamento centrado na matriz densidade unificada (BERNARDO, 2017). Resta então a dúvida de se seria possível construir uma versão apropriada para a mecânica quântica, partindo de primeiros princípios, dos parâmetros generalizados de Stokes. A presente seção é dedicada a responder tal questionamento.

Para começar, consideremos um ensemble de fótons submetido ao aparato de um experimento de fenda dupla, tal como representado na figura 1. Uma observação importante aqui é que os fótons serão lançados na máscara A de forma que há somente um fóton interferindo no espaço entre as fendas e a tela de detecção por vez. (HEISENBERG; EULER, 1936; PESKIN; SCHROEDER, 1995).

Se o estado de polarização destes fótons é levado em consideração, cria-se uma dupla superposição, onde tanto o grau de liberdade de caminho (por qual das fendas cada fóton passa) quanto o de polarização (em que autoestado de polarização ele se encontra) são incertos. A matriz densidade descrevendo um estado deste tipo pertence a um espaço formado pela união do espaço das matrizes 2×2 que descrevem os possíveis estados de polarização com o espaço das matrizes 2×2 que descrevem os possíveis estados de caminho¹ e portanto tem dimensão 4×4 :

¹ O espaço de possíveis caminhos normalmente tem dimensão infinita para uma partícula livre. Entretanto, para o experimento da fenda dupla, restringe-se os possíveis caminhos na máscara às combinações dos estados de caminho das fendas. Dessa forma, todos os possíveis caminhos encontram-se em um subespaço finito.

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

aqui escrita na base: $\{|H\rangle, |V\rangle\} \otimes \{|1\rangle, |2\rangle\} = \{|H, 1\rangle, |H, 2\rangle, |V, 1\rangle, |V, 2\rangle\}$, onde $|1\rangle, |2\rangle$ são os autoestados de caminho correspondentes às fendas 1 e 2, respectivamente. Os elementos dessa matriz densidade referem-se tanto a informações estatísticas referentes a cada fenda individualmente, quanto a correlações espaciais entre as fendas.

Que resultados interessantes podem ser obtidos desta configuração? O já citado trabalho de B. L. Bernardo ([BERNARDO, 2017](#)), por exemplo, constrói, a partir da matriz densidade e de alguns princípios gerais, uma equação de interferência que permite determinar a densidade de probabilidade de medir cada fóton em um dado ponto P da tela. Ele também determina o grau de coerência do ensemble, escrito em termos dos elementos da matriz densidade. Essa parte do trabalho será discutida em mais detalhes como uma introdução ao tema da próxima seção. Focaremos, portanto, em outro resultado interessante que pode ser extraído: os parâmetros de Stokes nas fendas.

A obtenção dos parâmetros nas fendas será realizada da seguinte forma: primeiro, focamos no significado da equação (2.30). Nela, os parâmetros são definidos como o valor médio da matriz identidade (que é unitário) e das matrizes de Pauli, que representam os observáveis de polarização horizontal, diagonal e circular. No cenário atual, é possível replicar esses observáveis através de um conjunto de operadores de projeção apropriados, associados ao estado de polarização e ao caminho desejados. Essas projeções mostrarão a tendência do estado geral ao ser projetado em um dado autoestado, em comparação com a projeção no autoestado ortogonal. Para finalizar, toma-se o traço para obter a média. Isso resulta em ([BERNARDO, 2017](#)):

$$s_0^{(1)} = \text{Tr}[(|H, 1\rangle \langle H, 1| + |V, 1\rangle \langle V, 1|)\hat{\rho}] = \rho_{11} + \rho_{33}, \quad (3.2a)$$

$$s_1^{(1)} = \text{Tr}[(|H, 1\rangle \langle H, 1| - |V, 1\rangle \langle V, 1|)\hat{\rho}] = \rho_{11} - \rho_{33}, \quad (3.2b)$$

$$s_2^{(1)} = \text{Tr}[(|H, 1\rangle \langle V, 1| + |V, 1\rangle \langle H, 1|)\hat{\rho}] = \rho_{13} + \rho_{31}, \quad (3.2c)$$

$$s_3^{(1)} = i\{\text{Tr}[(|V, 1\rangle \langle H, 1| - |H, 1\rangle \langle V, 1|)\hat{\rho}]\} = i\{\rho_{13} - \rho_{31}\}, \quad (3.2d)$$

para a fenda 1 e para a fenda 2:

$$s_0^{(2)} = Tr[(|H, 2\rangle \langle H, 2| + |V, 2\rangle \langle V, 2|)\hat{\rho}] = \rho_{22} + \rho_{44}, \quad (3.3a)$$

$$s_1^{(2)} = Tr[(|H, 2\rangle \langle H, 2| - |V, 2\rangle \langle V, 2|)\hat{\rho}] = \rho_{22} - \rho_{44}, \quad (3.3b)$$

$$s_2^{(2)} = Tr[(|H, 2\rangle \langle V, 2| + |V, 2\rangle \langle H, 2|)\hat{\rho}] = \rho_{24} + \rho_{42}, \quad (3.3c)$$

$$s_3^{(2)} = i\{Tr[(|V, 2\rangle \langle H, 2| - |H, 2\rangle \langle V, 2|)\hat{\rho}]\} = i\{\rho_{24} - \rho_{42}\}. \quad (3.3d)$$

É importante salientar que, pelo próprio propósito salientado e pela natureza dos operadores de projeção aplicados, os elementos da matriz densidade envolvidos nesta construção referem-se exclusivamente a informações individuais das duas fendas. Os elementos não envolvidos nas equações (3.2a)-(3.2d) e (3.3a)-(3.3d) referem-se a correlações entre as fendas, e podem ser organizados de forma semelhante aos parâmetros de Stokes utilizando um outro conjunto apropriado de operadores de projeção, desta vez considerando dois pontos do espaço - as duas fendas:

$$W_0 = |H, 1\rangle \langle H, 2| + |V, 1\rangle \langle V, 2|, \quad (3.4a)$$

$$W_1 = |H, 1\rangle \langle H, 2| - |V, 1\rangle \langle V, 2|, \quad (3.4b)$$

$$W_2 = |H, 1\rangle \langle V, 2| + |V, 1\rangle \langle H, 2|, \quad (3.4c)$$

$$W_3 = i\{|V, 1\rangle \langle H, 2| - |H, 1\rangle \langle V, 2|\}. \quad (3.4d)$$

E os parâmetros obtidos a partir destes são, utilizando as equações (3.1) e (3.2a)-(3.2d):

$$S_0 = Tr[(|H, 1\rangle \langle H, 2| + |V, 1\rangle \langle V, 2|)\hat{\rho}] = \rho_{21} + \rho_{43}, \quad (3.5a)$$

$$S_1 = Tr[(|H, 1\rangle \langle H, 2| - |V, 1\rangle \langle V, 2|)\hat{\rho}] = \rho_{21} - \rho_{43}, \quad (3.5b)$$

$$S_2 = Tr[(|H, 1\rangle \langle V, 2| + |V, 1\rangle \langle H, 2|)\hat{\rho}] = \rho_{23} + \rho_{41}, \quad (3.5c)$$

$$S_3 = i\{Tr[(|V, 1\rangle \langle H, 2| - |H, 1\rangle \langle V, 2|)\hat{\rho}]\} = -i\{\rho_{23} - \rho_{41}\}, \quad (3.5d)$$

onde $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}$ são números complexos. Como a matriz densidade é hermitiana, $\rho_{mn} = \rho_{nm}^*$, e os demais elementos de $\hat{\rho}$ podem ser organizados como as versões conjugadas complexas das equações (3.5a)-(3.5d):

$$S_0^* = (\rho_{21} + \rho_{43})^* = \rho_{12} + \rho_{34}, \quad (3.6a)$$

$$S_1^* = (\rho_{21} - \rho_{43})^* = \rho_{12} - \rho_{34}, \quad (3.6b)$$

$$S_2^* = (\rho_{23} + \rho_{41})^* = \rho_{14} + \rho_{32}, \quad (3.6c)$$

$$S_3^* = [-i(\rho_{23} - \rho_{41})]^* = -i\{\rho_{14} - \rho_{32}\}. \quad (3.6d)$$

Podemos obter uma interpretação para esses novos parâmetros ao observar suas principais propriedades, listadas abaixo:

1. São números complexos.
2. Têm características semelhantes aos parâmetros de Stokes, mas associados a dois, ao invés de um único ponto no espaço.
3. São quantidades que transmitem informações sobre a correlação espacial entre os estados de polarização das duas fendas.
4. Foram construídos em estreita analogia com os parâmetros clássicos generalizados de Stokes.

Todas essas características permitem definir com confiança as equações (3.5a)-(3.5d) como **a versão quântica dos parâmetros generalizados de Stokes** e as equações (3.6a)-(3.6d) como seus complexos conjugados. Como os parâmetros tradicionais de Stokes são sempre números reais, eles são seus próprios complexos conjugados. É interessante observar que este resultado não só extrai da matriz densidade os parâmetros generalizados, mas também, de forma natural, extrai seus complexos conjugados, o que não se encontrava postulado explicitamente para o caso clássico (KOROTKOVA; WOLF, 2005).

Dois questionamentos seguem desta definição: primeiro, existe uma interpretação física para estes parâmetros na mecânica quântica ou eles são uma mera curiosidade matemática? Segundo, esses parâmetros possuem algum uso prático na óptica quântica, especialmente no estudo da interferometria de fótons, que foi o plano de fundo no qual foram construídos?

Como veremos adiante, a resposta para essas duas perguntas é positiva. É importante observar que na óptica clássica, os parâmetros generalizados não tem significado físico bem definido e sua própria construção é na verdade secundária à função que devem desempenhar - a determinação dos parâmetros de Stokes em qualquer ponto do espaço de propagação da onda. Já para o caso quântico, o desenvolvimento que será apresentado na próxima seção mostrará que é sim possível dar um significado físico específico aos parâmetros generalizados. E é exatamente no contexto deste significado que responderemos à segunda questão - apresentando uma aplicação destes parâmetros no desenvolvimento de uma compreensão expandida do fenômeno de interferência.

3.2 Aplicação em Interferometria

Continuamos a discussão tendo em mente um ensemble de fótons submetido a um interferômetro de dupla fenda, cujo estado quântico geral pode ser descrito pela matriz densidade $\hat{\rho}$, descrita pela equação (3.1). Nesta seção, exploraremos de maneira mais detalhada o próprio fenômeno da interferência para fótons individuais, que é talvez uma das maiores descobertas da mecânica quântica em seus anos iniciais.

Foi Louis De Broglie que em 1923 primeiro percebeu que partículas individuais deveriam possuir algum tipo de propriedade ondulatória e que, portanto, seria possível observar fenômenos como interferência e difração para fótons e elétrons individuais (BROGLIE, 1923). Essa hipótese seria comprovada alguns anos depois de forma independente por C. J. Davisson e G. P. Thomson (THOMSON, 1927; DAVISSON; GERMER, 1927) que observaram experimentalmente a difração de elétrons, o primeiro através do padrão de espalhamento destes em um sólido cristalino e o segundo observando sua difração circular em um tubo de raios catódicos.

A discussão das características singulares da interferometria de uma única partícula, especialmente no contexto do experimento da fenda dupla, levariam posteriormente à interpretação estatística de Born para a função de onda: seu propósito não era a descrição de uma onda real, mas de uma distribuição estatística, sendo $|\Psi(x, t)|^2$ a função densidade de probabilidade de encontrar o fóton em dada região da tela. Essa nova visão traria drástica mudança no entendimento da mecânica quântica (BORN, 1926). Ela mostrava, como já discutido, que tudo que é possível conhecer sobre o estado da partícula antes de colidir com a tela de detecção são as probabilidades de que, uma vez que colida, seja detectada em determinada posição. A incerteza é um aspecto fundamental da natureza, não um defeito do experimento. Esse fato é tão profundo que R. P. Feynman afirmaria algumas décadas depois que o experimento da fenda dupla contém o único mistério que existe na mecânica quântica (FEYNMAN, 1963).

Dado o contexto histórico por trás do desenvolvimento da interferometria de fótons,

partimos para um entendimento teórico mais preciso do experimento. Estamos interessados em determinar a densidade de probabilidade de se medir um fóton em um dado ponto P da tela de detecção. Isso será dado pela expressão (BERNARDO, 2017):

$$\rho(P) = \langle H, P | \hat{\rho} | H, P \rangle + \langle V, P | \hat{\rho} | V, P \rangle. \quad (3.7)$$

Da aplicação 1, subseção 2.2.1, é possível observar que a (3.7) representa a densidade de probabilidade de que um fóton seja encontrado no ponto P com o autoestado de polarização horizontal, adicionado à probabilidade de que seja encontrado com autoestado de polarização vertical e considerando que a base de polarização horizontal/vertical está sendo utilizada, representa a densidade de probabilidade total de obter o fóton em certo ponto P . Para desenvolver essa expressão, faremos as seguintes considerações:

1. Fótons polarizados horizontalmente não interferem com fótons polarizados verticalmente.
2. O tamanho das fendas é muito menor que o comprimento de onda dos fótons.

A combinação dessas duas considerações leva à afirmação de que as únicas amplitudes de probabilidade diferentes de zero para fótons que emergem das fendas e a seguinte detecção em um ponto P são $\langle H, 1 | H, P \rangle$, $\langle V, 1 | V, P \rangle$, $\langle H, 2 | H, P \rangle$ e $\langle V, 2 | V, P \rangle$ e que estas podem ser escritas como ondas esféricas:²

$$\langle H, 1 | H, P \rangle = \langle V, 1 | V, P \rangle = \frac{e^{ikr_1}}{r_1} \quad (3.8a)$$

$$\langle H, 2 | H, P \rangle = \langle V, 2 | V, P \rangle = \frac{e^{ikr_2}}{r_2}. \quad (3.8b)$$

Aqui, r_1 e r_2 são as distâncias das respectivas fendas 1 e 2 até o ponto P . Expandindo a expressão (3.7), obtemos:

$$\begin{aligned} \rho(P) = & \rho_{11} \langle H, P | H, 1 \rangle \langle H, 1 | H, P \rangle + \rho_{12} \langle H, P | H, 1 \rangle \langle H, 2 | H, P \rangle + \\ & + \rho_{21} \langle H, P | H, 2 \rangle \langle H, 1 | H, P \rangle + \rho_{22} \langle H, P | H, 2 \rangle \langle H, 2 | H, P \rangle + \\ & + \rho_{33} \langle V, P | V, 1 \rangle \langle V, 1 | V, P \rangle + \rho_{34} \langle V, P | V, 1 \rangle \langle V, 2 | V, P \rangle + \\ & + \rho_{43} \langle V, P | V, 2 \rangle \langle V, 1 | V, P \rangle + \rho_{44} \langle V, P | V, 2 \rangle \langle V, 2 | V, P \rangle, \end{aligned} \quad (3.9)$$

² Consideramos aqui que o caminho entre a máscara e a tela de detecção é livre; caso existisse algum meio material entre as duas, seria possível observar amplitudes de probabilidade do tipo $\langle H, i | V, P \rangle$, $\langle V, i | H, P \rangle$, $i=1,2$, diferentes de zero.

e substituindo as equações (3.8a) e (3.8b) na equação (3.9) resulta em:

$$\rho(P) = \frac{\rho_{11} + \rho_{33}}{r_1^2} + \frac{\rho_{22} + \rho_{44}}{r_2^2} + \frac{(\rho_{21} + \rho_{43})e^{ik(r_1-r_2)}}{r_1 r_2} + \frac{(\rho_{12} + \rho_{34})e^{ik(r_2-r_1)}}{r_1 r_2}. \quad (3.10)$$

A equação acima pode ser rearranjada observando que os dois primeiros termos representam a densidade de probabilidade caso somente a fenda 1 ou 2 estivesse aberta, respectivamente³. Eles serão representados, portanto, por $\rho^{(1)}(P)$ e $\rho^{(2)}(P)$, onde os sobrescritos simbolizam a única fenda que estaria aberta. Observa-se também que o terceiro e quarto termos são complexos conjugados um do outro, de forma que:

$$\rho(P) = \rho^{(1)}(P) + \rho^{(2)}(P) + \frac{2\text{Re}[(\rho_{21} + \rho_{43})e^{ik(r_1-r_2)}]}{r_1 r_2}. \quad (3.11)$$

Multiplicando e dividindo por $\sqrt{(\rho_{11} + \rho_{33})}\sqrt{(\rho_{22} + \rho_{44})}$ e considerando a definição de $\rho^{(1)}(P)$ e $\rho^{(2)}(P)$ feita anteriormente, chegamos na forma final da equação de interferência:

$$\rho(P) = \rho^{(1)}(P) + \rho^{(2)}(P) + 2\sqrt{\rho^{(1)}(P)}\sqrt{\rho^{(2)}(P)}\text{Re}[\mu e^{ik(r_1-r_2)}]. \quad (3.12)$$

A quantidade μ aqui quantifica a intensidade da interferência observada para cada fóton e é chamada de forma equivalente ao caso clássico de grau de coerência:

$$\mu = \frac{\rho_{21} + \rho_{43}}{\sqrt{\rho_{11} + \rho_{33}}\sqrt{\rho_{22} + \rho_{44}}}, \quad (3.13)$$

cujos módulos, similar ao caso clássico, tem valores entre 0 e 1.

Tudo o que foi desenvolvido nesta seção até esse ponto explorou o que já é conhecido na literatura sobre o assunto (BERNARDO, 2017). Munidos dos resultados referentes aos parâmetros generalizados de Stokes, contudo, é possível ir mais adiante. Observa-se que, utilizando-se das equações (3.2a)-(3.2d), (3.3a)-(3.3d) e (3.4a)-(3.4d), a equação (3.9) será transformada para a seguinte forma:

$$s_0(P) = s_0^{(1)}(P) + s_0^{(2)}(P) + 2\sqrt{s_0^{(1)}(P)}\sqrt{s_0^{(2)}(P)}\text{Re}[S'_0 e^{ik(r_1-r_2)}]. \quad (3.14)$$

³ Caso somente a fenda 1 estivesse aberta, todos os termos relativos a fenda dois seriam anulados, o que resultaria para a equação (3.9) em somente o primeiro e quinto termos diferentes de zero e como consequência, $\rho(P) = (\rho_{11} + \rho_{33})/r_1^2$. De maneira análoga encontraríamos $\rho(P) = (\rho_{22} + \rho_{44})/r_2^2$ caso somente a fenda 2 estivesse aberta.

Aqui, da mesma forma que a equação (3.9), os termos $s_0^{(i)}$, $i=1,2$ são os parâmetros obtidos caso somente a fenda i estivesse aberta, e são escritos em termos dos parâmetros nas fendas: $s_0^{(i)}(P) = s_0^{(i)}/r_i^2$. Como esse resultado talvez não seja de imediata compreensão para os leitores, faremos aqui uma pausa para analisar com mais cautela o que foi proposto.

Da equações (3.2a) e (3.3a), observamos que o primeiro dos parâmetros de Stokes é a média das projeções do estado de cada fóton no estado de polarização horizontal, somado a média das projeções do estado de cada fóton no estado de polarização vertical. Sendo essas médias complementares, o que o parâmetro s_0 está medindo é na verdade a probabilidade de que o fóton passe por aquela fenda, independente do estado de polarização. É dessa forma que o parâmetro s_0 equivale à densidade de probabilidade tradicional. Caso somente aquela fenda esteja aberta, as informações estatísticas obtidas na fenda são transladadas para a tela na forma de uma onda esférica, cuja intensidade (e portanto, o valor da densidade de probabilidade em dado ponto, no caso quântico) decai com o quadrado da distância. Isso justifica a definição de $s_0^{(i)}(P) = s_0^{(i)}/r_i^2$.

Através de um raciocínio análogo é possível ver que o primeiro parâmetro de Stokes no ponto P , $s_0(P)$, equivale à densidade de probabilidade de que um dado fóton seja medido em P , independente do autoestado de polarização, e por isso é definido pela equação (3.14). O padrão de máximos e mínimos de concentração de fótons, que é a marca registrada do fenômeno de interferência, é na verdade o efeito observável de interferência do primeiro dos parâmetros de Stokes quando consideramos os valores de $s_0(P)$ em diferentes pontos da tela.

Um termo importante na equação (3.14) é S'_0 , que corresponde à versão normalizada do primeiro parâmetro generalizado de Stokes:

$$S'_0 = \frac{S_0}{\sqrt{\rho_{11} + \rho_{33}}\sqrt{\rho_{22} + \rho_{44}}}. \quad (3.15)$$

e comparando com as equações (3.15) a (3.13), obtemos uma importante interpretação física para S_0 : ele corresponde ao **grau de coerência do ensemble de fótons**. Isso é um resultado notável, pois associa um dos parâmetros generalizados - até então uma quantidade abstrata - à uma medida de coerência do sistema, de natureza bastante concreta. Também faz todo sentido, visto que a própria construção dos parâmetros generalizados em (3.4a)-(3.4d) foi feita para acomodar os elementos da matriz densidade (3.1) associados a correlações espaciais entre as fendas. Essa descoberta também permitirá discutir possíveis interpretações para os demais parâmetros generalizados, mais adiante.

Como discutido acima, o padrão de máximos e mínimos de concentração de fótons é consequência do fenômeno de interferência associado ao parâmetro s_0 do ensemble. Esse

é o tipo de interferometria tradicionalmente tratada quando consideramos o experimento da fenda dupla. Isso ocorre em parte porque a densidade de probabilidade é uma entidade de certa forma singular na descrição do ensemble. Já quando escrita como o parâmetro s_0 , torna-se parte de um conjunto de outros parâmetros. Isso suscita um importante questionamento: seria possível observar o fenômeno de interferência em relação aos outros parâmetros de Stokes? A resposta parece ser afirmativa, como será discutido a seguir.

Tomemos como exemplo do parâmetro s_1 . Este parâmetro é uma média das projeções de sucessivos fótons de um dado ensemble no estado de polarização horizontal, menos a mesma média com relação ao estado de polarização vertical. Ou seja, o parâmetro s_1 mede a tendência do ensemble em relação a um desses autoestados. Com referência ao experimento da fenda dupla, o parâmetro s_1 descreve em dado ponto P da tela de detecção, a tendência de que o fóton lá detectado esteja num autoestado de polarização horizontal versus vertical. Poderia, então, ser escrito em termos da diferença entre a densidade de probabilidade de medir um fóton horizontalmente polarizado em P e a densidade de probabilidade de medir um fóton verticalmente polarizado:

$$s_1(P) = \langle H, P | \hat{\rho} | H, P \rangle - \langle V, P | \hat{\rho} | V, P \rangle. \quad (3.16)$$

Os parâmetros s_2 e s_3 têm papel análogo em termos das bases de polarização diagonal/anti-diagonal e circularmente polarizado à direita/à esquerda. Assim, de forma geral seria possível escrever as seguintes expressões:

$$s_0(P) = \langle H, P | \hat{\rho} | H, P \rangle + \langle V, P | \hat{\rho} | V, P \rangle, \quad (3.17a)$$

$$s_1(P) = \langle H, P | \hat{\rho} | H, P \rangle - \langle V, P | \hat{\rho} | V, P \rangle, \quad (3.17b)$$

$$s_2(P) = \langle H, P | \hat{\rho} | V, P \rangle + \langle V, P | \hat{\rho} | H, P \rangle, \quad (3.17c)$$

$$s_3(P) = i\{\langle H, P | \hat{\rho} | V, P \rangle - \langle V, P | \hat{\rho} | H, P \rangle\}.^4 \quad (3.17d)$$

Seguindo o mesmo procedimento das equações (3.7) a (3.12), obtêm-se o conjunto completo das equações de interferência:

⁴ Para $s_2(P)$ e $s_3(P)$, essas expressões equivalem a $s_2(P) = \langle D, P | \hat{\rho} | D, P \rangle - \langle A, P | \hat{\rho} | A, P \rangle$ e $s_3(P) = \langle R, P | \hat{\rho} | R, P \rangle - \langle L, P | \hat{\rho} | L, P \rangle$, porém escritas na base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$.

$$s_0(P) = s_0^{(1)}(P) + s_0^{(2)}(P) + 2\sqrt{s_0^{(1)}(P)}\sqrt{s_0^{(2)}(P)}\text{Re}\{S'_0 e^{ik(r_1-r_2)}\}, \quad (3.18a)$$

$$s_1(P) = s_1^{(1)}(P) + s_1^{(2)}(P) + 2\sqrt{s_1^{(1)}(P)}\sqrt{s_1^{(2)}(P)}\text{Re}\{S'_1 e^{ik(r_1-r_2)}\}, \quad (3.18b)$$

$$s_2(P) = s_2^{(1)}(P) + s_2^{(2)}(P) + 2\sqrt{s_2^{(1)}(P)}\sqrt{s_2^{(2)}(P)}\text{Re}\{S'_2 e^{ik(r_1-r_2)}\}, \quad (3.18c)$$

$$s_3(P) = s_3^{(1)}(P) + s_3^{(2)}(P) + 2\sqrt{s_3^{(1)}(P)}\sqrt{s_3^{(2)}(P)}\text{Re}\{S'_3 e^{ik(r_1-r_2)}\}. \quad (3.18d)$$

ou de maneira geral, podemos escrever como:

$$s_n(P) = s_n^{(1)}(P) + s_n^{(2)}(P) + 2\sqrt{s_n^{(1)}(P)}\sqrt{s_n^{(2)}(P)}\text{Re}\{S'_n e^{ik(r_1-r_2)}\}, \quad (3.19)$$

onde $n = 0, 1, 2, 3$.

Na óptica clássica, uma discussão sobre outros tipos de interferência já havia sido proposta para ondas eletromagnéticas, considerando uma adição vetorial geral dos campos ópticos em direções aleatórias e através do uso da matriz de densidade espectral cruzada (SETälä; TERVO; FRIBERG, 2006). A derivação aqui desenvolvida é, porém, consideravelmente mais simples, extraída diretamente de primeiros princípios, em termos dos elementos da matriz de densidade e já própria para os estudos de interferência no nível quântico. Desenvolveremos também, a partir de agora, um significado físico para essas equações de interferência que são inteiramente originais.

O efeito observável da primeira das equações de interferência é o já citado padrão de máximos e mínimos de concentração de fótons na tela de detecção. Imaginemos agora que imediatamente na frente do ponto P de interesse na tela, posicionamos um divisor de feixe polarizado, um aparato óptico cujo efeito será permitir a passagem de fótons horizontalmente polarizados e refletir fótons verticalmente polarizados. Posicionamos também um fotomultiplicador na direção de reflexão dos fótons de polarização vertical. O que acontecerá é que, caso o fóton seja detectado em P , será também medido seu estado de polarização, e o efeito observável será que o fóton atingirá a tela em caso de polarização horizontal ou o fotomultiplicador no caso de polarização vertical. Quando o experimento é repetido para diversos fótons, a diferença entre a quantidade de fótons medidos na tela e no fotomultiplicador determinará experimentalmente o valor de $s_1(P)$. Repetindo o procedimento para diversos pontos da tela, observaremos um padrão de máximos e mínimos para $s_1(P)$, que deverá corresponder ao predito pela segunda equação de interferência. Aparatos experimentais semelhantes determinarão os valores dos parâmetros $s_2(P)$ e $s_3(P)$.

Assim, resumindo o que foi discutido no parágrafo anterior, o que as equações de interferência sugerem matematicamente é observado, fisicamente, como um padrão de máximos de mínimos dos valores de cada um dos parâmetros de Stokes, obtíveis experimentalmente através de um aparato óptico adicional aos componentes do interferômetro de fenda dupla, e de relativa simplicidade.

Agora é possível também discutir o significado físico dos demais parâmetros generalizados de Stokes. Das equações (3.18a)-(3.18d) é possível perceber que eles possuem uma função análoga a que o parâmetro S_0 tem para o fenômeno de interferência tradicional. S_1 , S_2 e S_3 são uma medida de correlação espacial que determina se haverá ou não, e em que intensidade ocorrerá, interferência para os parâmetros de Stokes s_1 , s_2 e s_3 , respectivamente. Da literatura, sabemos que a definição do grau de coerência é exatamente esta - uma medida da coerência do ensemble e, portanto, da existência e intensidade do fenômeno de interferência (HECHT, 2017; ZILIO, 2009; MANDEL; WOLF, 1995). Assim, torna-se claro que os parâmetros generalizados de Stokes $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}$ **são uma extensão natural do conceito de grau de coerência espacial**, apropriado para o tratamento das diferentes formas de interferência discutidas ao longo desta seção. Com esta sentença concluímos a resposta devida aos dois questionamentos feitos na seção anterior: estabelecemos um significado físico para os parâmetros generalizados e uma aplicação importante destes no estudo da interferometria.

Uma última observação sobre este assunto é que, uma vez que foi possível reconstruir todos os parâmetros de Stokes no ponto P via equações (3.18a)-(3.18d), é também possível reconstruir a matriz densidade na tela de detecção, através da equação (2.26), bem como determinar o grau de polarização em cada ponto através da equação (2.16).

3.2.1 Quantificadores de Contraste

Na discussão sobre o experimento da fenda dupla em óptica clássica (subseção 2.1.1), foi mostrado que é possível quantificar o quão visível é o padrão de interferência na tela (quão diferentes são os máximos dos mínimos de intensidade luminosa) através do quantificador de visibilidade de Michelson (2.6). Esse mesmo quantificador pode ser utilizado na mecânica quântica, com uma importante aplicação no estudo da dualidade onda-partícula.

O que foi percebido a partir do início do século XX é que sistemas físicos podem manifestar um comportamento ondulatório ou corpuscular, dependendo do fenômeno em questão. Por exemplo, na interação com a matéria, os estudos de A. Einstein, A. Compton e outros mostraram que a luz se comporta como uma partícula (EINSTEIN, 1905; COMPTON, 1923). Já quando se propaga livremente, a luz parece se comportar como uma onda, de acordo com os estudos já citados de Young, De Broglie, Davisson e outros. Em certas situações o comportamento pode ser intermediário. Neils Bohr foi o

primeiro a sugerir que a natureza corpuscular e ondulatória seriam complementares (TANG et al., 2013) e posteriormente, B. Englert, D. Greenberger e A. Yasin propuseram uma forma de quantificar essa complementariedade, através de uma desigualdade (ENGLERT, 1996; GREENBERGER; A., 2013):

$$V^2 + D^2 \leq 1, \quad (3.20)$$

onde V é o quantificador de visibilidade já discutido e portanto, um medidor de suas propriedades ondulatórias - e D é o quantificador de distinguibilidade - o quão discernível é o caminho tomado pelo sistema e, portanto, um medidor de suas propriedades corpusculares.

Esses dois quantificadores são os quantificadores conhecidos no estudo da dualidade onda-partícula. Com a descrição ampliada de interferometria discutida nesta seção, se torna possível calcular um novo conjunto de quantificadores através da seguinte expressão:

$$V_n = \frac{\max[s_n] - \min[s_n]}{\max[s_0] + \min[s_0]}. \quad (3.21)$$

onde para $n = 0$, obtemos novamente o quantificador de visibilidade tradicional. Os novos quantificadores são obtidos para $n = 1, 2, 3$ e medem o contraste entre os valores mais altos e mais baixos de cada um dos parâmetros de Stokes na tela. Estes serão chamados de quantificadores de contraste. Na óptica clássica existe uma versão desses quantificadores, conhecidos como parâmetros de contraste (SETÄLÄ; TERVO; FRIBERG, 2006), e evitamos o mesmo nome devido ao fato de que já há um duplo uso do termo parâmetro (com parâmetros Stokes e parâmetros generalizados de Stokes) e também para separar a versão quântica da clássica.

Para escrever a expressão (3.21) de forma mais conveniente, seguiremos o seguinte procedimento: escreveremos os parâmetros generalizados S'_n em coordenadas polares, $S'_n = |S'_n|e^{i\theta}$, de modo que o último termo da equação (3.19) torna-se $Re[S'_n e^{ik(r_1 - r_2)}] = |S'_n| \cos[k(r_1 - r_2) + \theta]$. A partir disso, os quantificadores serão:

$$V_n = \frac{2\sqrt{s_0^{(1)}(P)}\sqrt{s_0^{(2)}(P)} |S'_n|}{s_0^{(1)}(P) + s_0^{(2)}(P)}. \quad (3.22)$$

Se a tela de detecção estiver suficientemente longe das fendas, de modo que $r_1 \approx r_2 \approx r$ e considerando também que de (3.1), (3.2a) e (3.3a), $s_0^{(1)} + s_0^{(2)} = Tr(\hat{\rho}) = 1$, a equação anterior se reduz a:

$$V_n = 2 |S'_n|. \quad (3.23)$$

onde vemos mais um uso dos parâmetros generalizados de Stokes como um método fácil de obter os quantificadores o que, conseqüentemente, reforça sua interpretação física como uma medida mais completa da coerência espacial do ensemble.

3.2.2 Exemplo: Ensemble Hiper-Emaranhado

Para finalizar, é importante aplicar o que foi desenvolvido ao longo dessa seção através de um exemplo. Consideraremos aqui um ensemble puro hiper-emanhado⁵ cujo estado é descrito por:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H, 1\rangle + |V, 2\rangle), \quad (3.24)$$

e cuja matriz densidade $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ é:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Seguindo as equações (3.2a)-(3.2d), (3.3a)-(3.3d) e (3.4a)-(3.4d), obtemos os parâmetros de Stokes nas fendas, assim como os parâmetros generalizados, como:

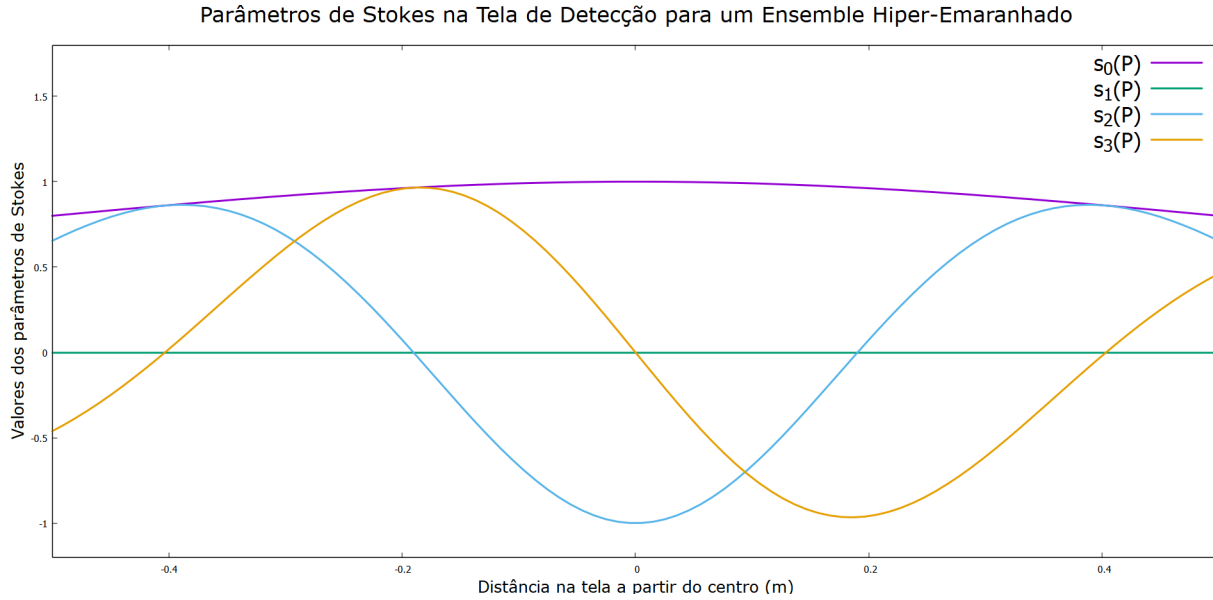
$$\begin{aligned} fenda1 : \{s_0, s_1, s_2, s_3\} &= \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right\} \\ fenda2 : \{s_0, s_1, s_2, s_3\} &= \left\{\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0, 0\right\} \\ \{S_0, S_1, S_2, S_3\} &= \left\{0, 0, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Pelos parâmetros generalizados vemos que não há nem coerência tradicional (para s_0) nem coerência na interferência associada ao parâmetro s_1 , mas sim para os parâmetros s_2 e s_3 . Aplicamos esses valores nas equações (3.18a)-(3.18d), considerando fótons cujo comprimento de onda está na faixa do vermelho (750 nm), uma distância de $1\mu m$ entre as fendas e de 1m entre a máscara e a tela de detecção. Os parâmetros de Stokes na tela,

⁵ O hiper-emanhamento tem definição análoga à definição do emaranhamento quântico tradicional, com a diferença de que não são duas partículas emaranhadas através de um único grau de liberdade, mas uma única partícula com dois graus de liberdade emaranhados entre si (PRILMÜLLER et al., 2017).

então, se comportarão como no gráfico abaixo:

Figura 4 – Distribuição dos Parâmetros de Stokes na Tela de Detecção para um Ensemble Hiper-Emaranhado.



Como discutido ao longo desta seção, um fóton lançado no experimento da fenda dupla sofrerá diversos tipos de interferência, uma relativa a cada parâmetro de Stokes. Neste gráfico, observa-se o efeito da interferência na distribuição de valores dos parâmetros na tela de detecção.

Os quantificadores de contraste nesse caso serão: $V_0 = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = 1$ e $V_3 = 1$, o que seria esperado pela análise do gráfico, visto que não se observará padrão de interferência para os primeiros dois parâmetros: no caso de s_0 , observaremos os fótons concentrados em maior proporção no centro da tela e diminuindo continuamente à medida que se move para as laterais; no caso de s_1 , existe iguais proporções de fótons atingindo a tela e sendo detectados no fotomultiplicador. Já para os dois últimos parâmetros, é de se esperar observar um padrão de interferência, de modo que deve haver quantificadores de contraste diferentes de zero: no centro da tela, todos os fótons que chegam no divisor de feixes (rotacionado 45°) são refletidos para o fotomultiplicador e à medida que se move para lateral, mais deles atingem a tela. Para os fótons circularmente polarizados, no centro da tela existem iguais proporções atingindo e sendo refletidos para o fotomultiplicador, e dependendo do sentido em que se move para a lateral, haverá uma quantidade maior de fótons atingindo a tela ou sendo refletidos.

4 Conclusão

Neste trabalho fizemos uma análise das propriedades de coerência e polarização, fundamentais para o entendimento dos fenômenos ondulatórios da luz como a interferência. O foco proposto foi especificamente a compreensão destas propriedades no âmbito quântico, onde a luz se comporta como uma partícula, o fóton, e fenômenos ondulatórios são interpretados em termos da teoria das probabilidades (por exemplo, a probabilidade da passagem ou não de um fóton por determinado aparato óptico).

No capítulo I, apresentamos uma motivação histórica para o estudo que foi desenvolvido. No capítulo II foi construída a fundamentação teórica para esse trabalho. Primeiro, no caso clássico, apresentamos a definição de coerência utilizando o exemplo do experimento da fenda dupla, assim como a definição de polarização, sendo os parâmetros de Stokes a forma escolhida para representá-la. Esses conceitos foram então traduzidos para o âmbito da mecânica quântica e para dinâmica de fótons. No capítulo III desenvolvemos, para a mecânica quântica, a definição dos parâmetros generalizados de Stokes, e retornando ao estudo do interferômetro de fenda dupla, estabelecemos seu significado físico em termos do grau de coerência de uma teoria geral de interferência.

Ao fim deste trabalho, é possível perceber como a definição dos parâmetros generalizados de Stokes torna mais íntima a relação entre coerência e polarização para a luz. Em certo sentido, são diferentes aspectos da mesma estrutura. Para um ensemble de fótons polarizados, os parâmetros generalizados são a medida de coerência do sistema e, no caso específico em que os dois pontos em que são definidos convergem para um único ponto, se transformam nos parâmetros tradicionais de Stokes, que descreve a polarização do sistema naquele ponto. As propriedades de polarização do sistema em duas posições determinam seu grau de coerência e o grau de coerência, por outro lado, determina as probabilidades de polarização numa posição subsequente.

Espera-se como perspectiva futura que esse trabalho possa ser utilizado para o estudo da dualidade onda-partícula, investigando o papel dos demais quantificadores de contraste nesse sentido. Também espera-se aplicá-lo no estudo da interação do sistema com um ambiente.

Referências

ARAGO, F. "rapport fait par m. arago à l'académie des sciences, au nom de la commission qui avait été chargée d'examiner les mémoires envoyés au concours pour le prix de la diffraction"[report made by mr. arago to the academy of sciences in the name of the commission which had been charged with examining the memoirs submitted to the competition for the diffraction prize]. *Annales de Chimie et de Physique*, v. 2, n. 11, p. 5–30, 1819. Citado na página 15.

BARTHOLINUS, E. *Experimenta Crystalli Islandici disdiaclastici: Quibus Mira et Insolita Refractio Detegitur*. 1. ed. Copenhagen: Daniellis Paulli, 1669. Citado na página 15.

BERNARDO, B. L. Unified quantum density matrix description of coherence and polarization. *Physics Letters A*, v. 381, n. 28, p. 2239–2245, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 17, 33, 34, 38 e 39.

BORN, M. Quantenmechanik der stoßvorgänge (quantum mechanics of collision processes. *Zeitschrift für Physik*, v. 38, n. 1, 1926. Citado na página 37.

BROGLIE, L. de. Waves and quanta. *Nature*, v. 112, n. 540, 1923. Citado na página 37.

CHANDRASEKHAR, S. *Radiative Transfer*. 1. ed. Nova Iorque: Dover Publications, 1960. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 23.

COMPTON, A. G. A quantum theory of the scattering of x-rays by light elements. *Physics Review*, v. 21, n. 483, 1923. Citado na página 43.

DAVISSON, C.; GERMER, L. H. Diffraction of electrons by a crystal of nickel. *The Physical Review*, v. 30, n. 6, 1927. Citado na página 37.

DIRAC, P. *Principles of Quantum Mechanics*. 3. ed. Oxford: Clarendon Press, 1947. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

EINSTEIN, A. Über einen die erzeugung und verwandlung des liches betreffenden heuristischen gesichtspunkt (on a heuristic viewpoint concerning the production and transformation of light). *Annalen der Physik*, v. 17, n. 132, 1905. Citado na página 43.

ENGLERT, B. G. Fringe visibility and which-way information: An inequality. *Physics Review Letters*, v. 7, n. 11, p. 2154–2157, 1996. Citado na página 44.

FEYNMAN, R. P. *Feynman Lecture in Physics*. 1. ed. Pasadena: Addison-Wesley, 1963. Citado na página 37.

FRESNEL, A. J. *Oeuvres Complètes d'Augustin Fresnel*. 1. ed. Paris: Imprimerie Impériale, 1866. Citado na página 15.

GOLDSTEIN, D. H. *Polarized Light*. 3. ed. Boca Raton: CRC Press, 2010. Citado na página 25.

GREENBERGER, D. M.; A., Y. Simultaneous wave and particle knowledge in a neutron interferometer. *Physics Letters A*, v. 128, n. 8, p. 391–394, 2013. Citado na página 44.

- GRIFFITHS, D. *Introduction to Elementary Particles*. 2. ed. Portland: Wiley-Vch, 2008. Citado na página 32.
- HECHT, E. *Optics*. 5. ed. Harlow: Pearson, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 25 e 43.
- HEISENBERG, W.; EULER, H. Folgerungen aus der diracschen theorie des positrons (consequences of dirac theory of the positron). *Zeitschrift Physik*, v. 98, n. 714, 1936. Citado na página 33.
- HUYGENS, C. *Traité de la Lumière: Où Sont Expliquées les Causes de ce qui Luy Arrive Dans la Reflexion and Dans la Refraction*. 1. ed. Leiden: Chez Pierre vander Aa, 1690. Citado na página 15.
- JAMES, D. F. V. Change of polarization of light beams on propagation in free space. *Journal of the Optical Society of America A*, v. 11, n. 5, p. 1641–1643, 1994. Citado na página 26.
- JAMES, D. F. V.; KWIAT P. G. MUNRO, W. G.; WHITE, A. G. Measurement of qubits. *Physics Review A*, v. 64, n. 052312, 2001. Citado na página 31.
- KOROTKOVA, O.; WOLF, E. Generalized stokes parameters of random electromagnetic beams. *Optics Letters*, v. 30, n. 2, p. 198–200, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 17, 27 e 36.
- MALUS, M. *Sur Une Propriété de la Lumière Réfléchi*e. 1. ed. Paris: Mémoires de physique et de chimie de la Société d'Arcuei, 1809. Citado na página 15.
- MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical Coherence and Quantum Optics*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. Citado na página 43.
- MAXWELL, J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. 1. ed. Oxford: Clarendon Press, 1873. Citado na página 16.
- MEYERS, R. A. *Encyclopedia of Physical Science and Technology*. 3. ed. Cambridge: Academic Press Inc, 2001. Citado na página 26.
- NAIRZ, O.; ARNDT, M.; ZEILINGER, A. Quantum interference experiments with large molecules. *American Journal of Physics*, v. 71, n. 4, p. 319–325, 2003. Citado na página 17.
- PERRIN, F. Polarization of light scattered by isotropic opalescent media. *The Journal of Chemical Physics*, v. 10, n. 7, p. 415–427, 1942. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 23.
- PESKIN, D. A.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction To Quantum Field Theory*. 1. ed. Reading: Perseus Books, 1995. Citado na página 33.
- PRILMÜLLER, M. et al. Hyperentanglement of photons emitted by a quantum dot. *Optica Publishing Group*, v. 6, n. 4, 2017. Citado na página 45.
- SAKURAI, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. 1. ed. Los Angeles: Addison-Wesley Publishing Company, 1994. Citado na página 30.
- SANTOS, A. F. dos et al. Influence of polarization and the environment on wave-particle duality. *arXiv:2205.00075*, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.

SETÄLÄ, T.; TERVO, J.; FRIBERG, A. T. Stokes parameters and polarization contrasts in young's interference experiment. *Optics Letters*, v. 31, n. 14, p. 2208–2210, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 44.

STOKES, G. G. On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, v. 9, n. 399, 1852. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 23.

TANG, J. et al. Revisiting bohr's principle of complementarity with a quantum device. *Physics Review A*, v. 88, n. 014103, p. 1–4, 2013. Citado na página 44.

THOMSON, G. P. Diffraction of cathode rays by a thin film. *Nature*, v. 119, n. 890, 1927. Citado na página 37.

WOLF, E. Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams. *Physics Letters A*, v. 312, n. 5-6, p. 263–267, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 17, 23, 27 e 33.

YOUNG, T. *The Bakerian Lecture: On the theory of Light and Colours*. 2. ed. Londres: Royal Society Publishing, 1802. Citado na página 15.

ZILIO, S. C. *Óptica Moderna: Fundamentos e Aplicações*. 1. ed. São Paulo: IFSC-USP, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 15, 20, 29 e 43.