

**Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Matemática Bacharelado**

Ervenney Silvestre Da Silva

Sobre o problema da Medida

**João Pessoa
2022**

Ervenney Silvestre Da Silva

Sobre o problema da Medida

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso Matemática Bacharelado, do Departamento de Matemática, do Centro de Ciências Exatas e Natureza, da Universidade Federal do Paraíba, como requisito para obtenção do título de Bacharel em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

João Pessoa
2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586s Silva, Ervenney Silvestre da.
Sobre o problema da medida / Ervenney Silvestre da
Silva. - João Pessoa, 2022.
30 f. : il.

Orientação: Flank David Morais Bezerra.
TCC (Curso de Bacharelado em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Problema da medida. 2. Teoria da medida. 3.
Funções mensuráveis. 4. Medidas. I. Bezerra, Flank
David Morais. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

FOLHA DE APROVAÇÃO

Ervenney Silvestre da Silva

Sobre o problema da Medida

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Matemática, do Departamento de Matemática, do Centro de Ciências Exatas e da Natureza, da Universidade Federal da Paraíba, como requisito para obtenção do título de Bacharel em Matemática

Aprovado em:

22 / 06 / 2022 .


Comissão Examinadora



Professor Dr. Flank David Morais Bezerra
Departamento de Matemática - CCEN/UFPB
Prof.(a) Orientador(a)



Professor Dr. Carlos Bocker Neto
Departamento de Matemática - CCEN/UFPB
Membro Interno
Examinador



Professora Dra. Renata de Farias Limeira Carvalho
Departamento de Matemática - CCET/UFMA
Membro Externo
Examinador

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família,
pelos momentos de estresse e ausência

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente á Deus por nunca me abandonar e me deixar desamparada e acima de tudo, por me dar forças para enfrentar toda e qualquer batalha até aqui, que não me deixou desistir de tudo, que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitária, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

Aos meus pais Geovani Silvestre da Silva e Edilma Roseno da Silva, pelo amor, incentivo e apoio incondicional nas horas difíceis, de querer desistir de desânimo e cansaço, sem eles do meu lado seria muito difícil vencer esse desafio.

Ao meu grande parceiro nessa vida, meu esposo Michael Pontes da Silva por encarar comigo todo e qualquer aventura e por me fazer acreditar, todos os dias, que sou capaz de realizar o que eu quiser. Agradeço por toda paciência comigo em todos estes anos, pela compreensão pelas as minhas ausências principalmente nesta reta final e por todo seu, carinho, parceria, amor e cuidado comigo.

Certamente estes parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte dessa importante fase de minha vida. Portanto, desde já peço desculpas àquelas que não estão presentes entre essas palavras, mas elas podem estar certas que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

Agradeço a meu orientador Professor Dr.Flank David Morais Bezerra, pela sabedoria com que me guiou nesta trajetória.

Aos meus amigos que fiz ao longo dessa trajetória universitária Camila Gadelha, Pedro, Silmara de Sousa, Joémerson de Oliveira, Joevertton de Oliveira a sua amizade, sem dúvidas, tornou esta caminhada mais leve, mais rica e muito mais feliz. Perto ou longe sempre levarei vocês em meu coração.

Aos demais colegas de sala e companheiros de estudo com quem compartilhei momentos de tensão, alegrias e tristeza durante esta graduação vocês foram sem dúvidas, fundamentais para a minha chegada até aqui.

A Secretaria do Curso, pela cooperação.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram direta ou indiretamente com minha formação, o meu muito obrigado.

“A persistência é o caminho do êxito.” (Charles Chaplin)

“A vitalidade é demonstrada não apenas pela persistência, mas pela capacidade de começar de novo.” (F. Scott Fitzgerald)

RESUMO

Neste trabalho estudaremos um famoso problema dentro da Teoria da Medida o chamado o problema da Medida, para isso introduziremos definições, propriedades, exemplos e conceitos como espaços mensuráveis, conjuntos mensuráveis, funções mensuráveis, o conceito de medida, por fim enunciaremos e provaremos o resultado conhecido como problema da medida.

Palavras-chaves: Teoria da Medida. Problema da Medida. Conjuntos Mensuráveis. Funções Mensuráveis.

ABSTRACT

In this work we will study a famous problem within the Theory of Measure called the Problem of measure, for that we will introduce definitions, properties, examples and concepts such as measurable spaces, measurable sets, measurable functions, the concept of measure, finally we will state and prove the result known as the problem of measure.

Keywords: Measure Theory. The Problem of Measure. Mensurable sets. Mensurable Functions.

LISTAS DE FIGURAS

Figura 1: Émile Borel em 1932	13
Figura 2: Henri Lebesgue	14
Figura 3: Andrei kolmogorov	14
Figura 4: Ilustração do gráfico da função com lei de formação $f(x)$	18
Figura 5: Ilustração do gráfico da função com lei de formação $f^+(x)$	18
Figura 6: Ilustração do gráfico da função com lei de formação $f^-(x)$	19

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{N} denota o conjunto dos números naturais $\{1, 2, \dots\}$

n denota um número natural

$\overline{\mathbb{R}}$ denota o conjunto dos números reais estendidos $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Seja qual for $x \in \mathbb{R}$

$$-\infty < x < +\infty$$

$\mathcal{P}(X)$ denota o conjunto potência do conjunto X

$A \setminus B$ denota o conjunto $\{x \in A; x \notin B\}$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	HISTORIA DO PROBLEMA DA MEDIDA	13
3	FUNÇÕES MENSURÁVEIS	15
4	MEDIDAS.....	23
5	O PROBLEMA DA MEDIDA	26
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	29
7	BIBLIOGRAFIA.....	30

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar informações sobre o tema “o problema da medida”, mas concretamente o problema da teoria da medida se divide basicamente em duas partes:

- Definir uma medida que associe a cada conjunto de uma família em um dado espaço um valor significativo do seu tamanho.
- Definir uma teoria de integração para as funções que tomam valores neste espaço.

Nele serão encontrados definições e exemplos.

Está organizado em 3 partes/ Capítulos. Na parte 1/ Capítulo 2, será abordado um breve fundamento histórico de como tudo se iniciou. Na parte 2/ Capítulo 3 optamos por abordar alguns conceitos como expor o conceito de álgebra sobre conjuntos não vazios, e de sigma-álgebra sobre conjuntos não vazios, (ideia que declara conjuntos não vazios). A álgebra de uma coleção sobre conjuntos não vazios acumula três propriedades:

Se contém o conjunto;

Se ela contém o conjunto ela contém o complementar desse conjunto;

E ela é fechada para uniões finitas.

Na sigma-álgebra as duas primeiras propriedades são “semelhantes”, só na última propriedade ela é um “pouco melhor” no sentido de que a sigma-álgebra elas são coleções fechadas a uniões enumeráveis dos subconjuntos de um conjunto, previamente declara. Quando se tem um conjunto e associado a ele uma sigma-álgebra essa estrutura matemática se chama um espaço mensurável. Nesse capítulo ainda mostramos a definição de espaço mensuráveis e algumas propriedades vários exemplos de espaços mensuráveis, como pode gerar espaços mensuráveis, como pode gerar quando se tem apenas uma álgebra e outros. Na parte 3/ Capítulos 4 e 5, temos a definição do conceito de medida com todo rigor que a expressão exige, começamos mostrando os trabalhos de Émile Borel e em seguida finalizamos com os trabalhos de Lebesgue que é o problema da medida provado.

A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica usando vários livros que se encontram no final do trabalho.

2 HISTORIA DO PROBLEMA DA MEDIDA

A teoria da medida é um ramo da matemática iniciado pelos trabalhos de Émile Borel, mas muito desenvolvido por matemáticos como Henri Lebesgue e Constantin Carathéodory.

Figura 1: Émile Borel



Fonte:

https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%89mile_Borel

Félix Édouard Justin Émile Borel, (Nasceu em Saint-Affrique, 7 de janeiro de 1871 e morreu em Paris, 3 de fevereiro de 1956) foi um matemático e político francês.

Em 1894, enunciou a primeira definição de conjunto insignificante. Na teoria da medição, em um espaço medido, um conjunto desprezível é um conjunto de medida zero ou uma parte de tal conjunto. A definição pode depender da medida escolhida: duas medidas no espaço mensurável que possuem os mesmos conjuntos de medida zero são consideradas equivalentes.

Em um nível elementar, é possível abordar a noção de um conjunto desprezível para um certo número de espaços (incluindo a linha real) sem ter que introduzir uma medida historicamente, a noção de conjunto desprezível é anterior à de medição.

Em 1897, ele definiu os conjuntos mensuráveis, um espaço mensurável (na teoria da medição) é um par onde está um conjunto e uma tribo ou σ -álgebra (X, A) . Um espaço mensurável raramente é usando sozinho, na maioria das vezes é complementado por uma medida para construir um espaço medido $\mu (X, A, \mu)$. Na teoria da probabilidade, o espaço mensurável é chamado de espaço de probabilidade, o todo é chamado de universo e os elementos da tribo são chamados de eventos (Ω, A) e completado com uma medida de probabilidade

Henri-Léon Lebesgue mais conhecido sob o nome de **Henri Lebesgue**, (Nasceu em Beauvais (França), 28 de junho de 1875 e morreu em Paris, 26 de julho de 1941) é um dos grandes matemáticos franceses da primeira metade do século XX.

É conhecido por sua teoria da medida, que estende as primeiras obras importantes de Émile Borel, um de seus professores e depois seu amigo. A teoria se desenvolveu até a década de 1950.

Em 1901 Ele desenvolveu uma teoria das funções mensuráveis com base nos resultados de Émile Borel: as tribos Borelianas.

Figura 2: Henri Lebesgue



Fonte:
https://pt.wikipedia.org/wiki/Henri_Lebesgue

Figura 3: Andrei kolmogorov



Fonte:
https://pt.wikipedia.org/wiki/Andrei_Kolmogorov

Andrei Nikolaevich Kolmogorov e mais conhecido sob nome **Andrei kolmogorov** (Nasceu em Tambov é uma cidade da Rússia (Imperio Russo), 25 de abril de 1903 e morreu em Moscou "é a maior cidade da Rússia, além de ser a capital do país" (União Soviética), 20 de outubro de 1987) é um matemático russo e soviético que fez contribuições significativas em matemática, incluindo teoria da probabilidade, topologia, turbulência, mecânica clássica, lógica intuicionista, teoria da informação algorítmica e análise de complexidade de algoritmos.

Ele propôs uma axiomatização do cálculo de probabilidade com base em particular, na integração definida a partir de uma medida.

Lebesgue e seus sucessores foram levados a generalizar a noção de integral a ponto de torná-la o que alguns chamam de integral abstrata. A área sob uma curva é calculada pela soma de pequenos retângulos cuja altura representa o valor médio da função em um intervalo e a base é a medida do intervalo. Em uma linha real, a medida de Lebesgue de um intervalo é a diferença nas distâncias da origem. Mas uma medida é uma função, e isso levou os matemáticos da época a generalizar a integral não mais de acordo com uma medida particular, a de Lebesgue, mas de acordo com qualquer medida. É como se para medir um intervalo utilizássemos um ábaco (medidas discretas) ou qualquer outro instrumento ao invés de uma fita métrica.

3 FUNÇÕES MENSURÁVEIS

Para introduzir o conceito de função mensurável é necessário definir outro conceito, o de σ -álgebra (ou σ -campo) sobre um conjunto X . Neste capítulo apresentaremos o conceito de funções mensuráveis, daremos exemplos e propriedades dessa classe de funções. Esse capítulo foi confeccionado seguindo as referências [1] e [4].

Definição de Álgebra

Seja X um conjunto não vazio. Uma álgebra sobre X é uma coleção \mathcal{F} de subconjuntos de X tal que

- i. $X \in \mathcal{F}$
- ii. $\forall F \in \mathcal{F}, X/F \in \mathcal{F}$
- iii. $\forall F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}, F_1 \cup \dots \cup F_n \in \mathcal{F}$

Para mais detalhe, sugiro que o leitor consulte o livro [1].

Definição de σ – álgebra

Seja X um conjunto não vazio. Uma σ – álgebra sobre X é uma coleção Σ de subconjuntos de X tal que

- i. $X \in \Sigma$
- ii. $\forall F \in \Sigma, X/F \in \Sigma$
- iii. $\forall F_1, \dots, F_n, \dots \in \Sigma, \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \Sigma$

Definição de Espaço Mensurável

Um espaço mensurável é uma estrutura matemática constituída de um par (X, Σ) , consistindo em um conjunto não vazio X e uma σ – álgebra sobre X .

1. Exemplos

- i. Seja X um conjunto não vazio. Note que $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, X\}$ e $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(X)$ são exemplos de álgebras sobre X , estas são as chamadas álgebras sobre X mais econômica e menos econômica, respectivamente;
- ii. Sejam X um conjunto não vazio e $A \subset X$. Note que $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, X/A, X\}$ é uma álgebra sobre X ;
- iii. A interseção finita de álgebras sobre X é uma álgebra sobre X ;

- iv. Sejam X um conjunto não vazio e A uma coleção não vazia de subconjuntos de X . A interseção de todas as álgebras sobre X contendo A é a menor álgebra sobre X contendo A . Esta é a chamada álgebra sobre X gerada por A .

2. Exemplos

- i. Seja X um conjunto não vazio. Note que $\Sigma_1 = \{\emptyset, X\}$ e $\Sigma_2 = P(X)$ são exemplos de σ -álgebras sobre X , estas são as chamadas σ -álgebras sobre X mais econômica e menos econômica, respectivamente;
- ii. Sejam X um conjunto não vazio e $A \subset X$. Note que $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, X/A, X\}$ é uma σ -álgebra sobre X ;
- iii. A interseção finita de σ -álgebras sobre X é uma σ -álgebras sobre X ;
- iv. Sejam X um conjunto não vazio e A uma coleção não vazia de subconjuntos de X . A interseção de todas as σ -álgebras sobre X contendo A é a menor σ -álgebra sobre X contendo A . Esta é a chamada σ -álgebra sobre X gerada por A .

3. Exemplos

A σ -álgebra sobre \mathbb{R} gerada por todos os intervalos abertos (a, b) em \mathbb{R} é a chamada álgebra de Borel de \mathbb{R} . Os elementos da álgebra de Borel de \mathbb{R} são chamadas Bolerianos ou conjuntos de Borel em \mathbb{R} .

4. Exemplos

A σ -álgebra sobre \mathbb{R}^n gerada por todos os conjuntos abertos em \mathbb{R}^n é a chamada álgebra de Borel do \mathbb{R}^n . Os elementos da álgebra de Borel do \mathbb{R}^n são chamadas Bolerianos ou conjuntos de Borel em \mathbb{R}^n .

5. Exemplos

Seja B a álgebra de Borel sobre \mathbb{R} . A σ -álgebra sobre $\overline{\mathbb{R}}$ gerada pela coleção $\overline{B} = \{E \in B, E \cup \{-\infty\}, E \cup \{+\infty\}, E \cup \{-\infty, +\infty\}\}$ é a chamada álgebra de Borel estendida de $\overline{\mathbb{R}}$. Os elementos da álgebra de Borel estendida de $\overline{\mathbb{R}}$ são chamados Bolerianos estendido ou conjuntos de Borel estendidos em $\overline{\mathbb{R}}$.

Definição de Funções Mensuráveis

Sejam (X, Σ) um espaço mensurável e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diremos que f é mensurável (Σ -mensurável) quando para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $f^{-1}(\alpha, +\infty) = \{x \in X; f(x) > \alpha\}$ pertence à Σ .

Por consequência desta definição e das propriedades de uma σ -álgebra a $f^{-1}(-\infty, \alpha)$ também pertence à Σ .

6. Exemplos

- i. Sejam (X, Σ) um espaço mensurável e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função constante. Note que f é mensurável;
- ii. Sejam (X, Σ) um espaço mensurável, $E \subset X$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ a função característica do E ; a saber, $f(x) = 1$ se $x \in E$ e $f(x) = 0$ se $x \notin E$. Note que f é mensurável se, e somente se, $E \in \Sigma$; comumente, se escreve $f = \chi_E$;

Lema 1

Sejam (X, Σ) um espaço mensurável, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções reais definidas em X

$$cf, \quad f^2, \quad f + g, \quad fg = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2], \quad |f|$$

também são mensuráveis.

Prova:

- a) Se $c = 0$, afirmação é trivial. Se $c > 0$ então $\{x \in X: cf(x) > \alpha\} = \{x \in X: f(x) > \frac{\alpha}{c}\} \in X$. O caso $c < 0$ é tratado da mesma forma.
- b) Se $\alpha < 0$, então $\{x \in X: (f(x))^2 > \alpha\} = X$; Se $\alpha \geq 0$, então $\{x \in X: (f(x))^2 > \alpha\} = \{x \in X: f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X: f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$
- c) Por hipótese se r é um número racional, então $S_r = \{x \in X: f(x) > r\} \cap \{x \in X: g(x) > \alpha - r\}$ pertence a X . Uma vez que é facilmente visto que $\{x \in X: (f + g)(x) > \alpha\} = \cup \{S_r: r \text{ racional}\}$, Segue –se que $f + g$ é mensurável.
- d) Como $fg = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2]$ segue das (a), (b) e (c) que fg é mensurável.
- e) Se $\alpha < 0$, então $\{x \in X: |f(x)| > \alpha\} = X$, enquanto que se $\alpha \geq 0$, então $\{x \in X: |f(x)| > \alpha\} = \{x \in X: f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X: f(x) < -\alpha\}$. Assim, a função $|f(x)|$ é mensurável.

Lema 2 (Parte Positiva e Parte Negativa de uma Função)

Sejam (X, Σ) um espaço mensurável e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então as funções reais definidas em X por

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$$

chamadas parte positiva de f e parte negativa de f , respectivamente, são tais que f é uma função mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são funções mensuráveis.

Prova:

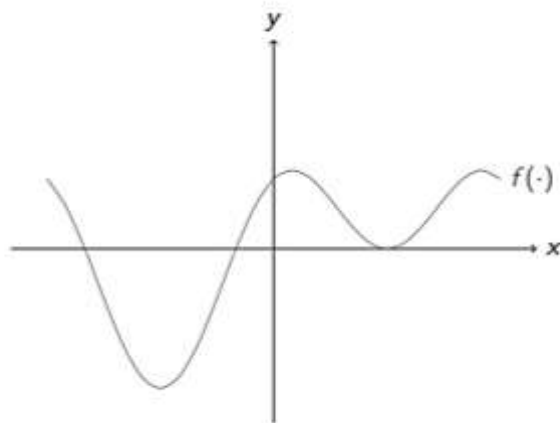
É claro que

$$f = f^+ - f^- \text{ e } |f| = f^+ + f^-.$$

E segue dessas identidades que $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$, $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$

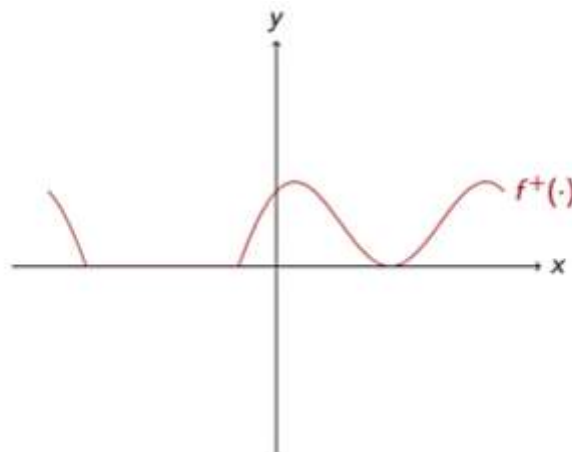
Geometricamente

Figura 4: Ilustração do gráfico da função com lei de formação $f(x)$



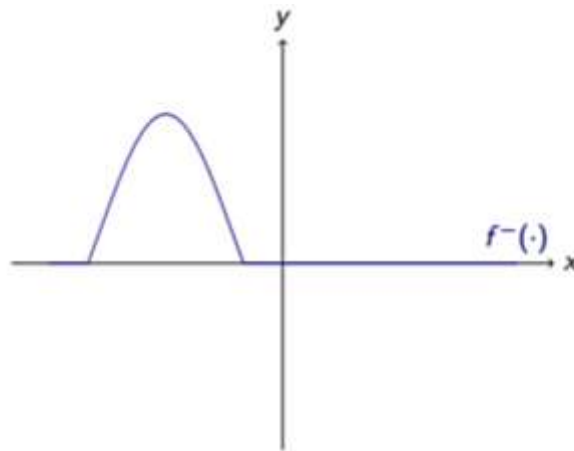
Fonte: Elaboração Própria

Figura 5: Ilustração do gráfico da função com lei de formação $f^+(x)$



Fonte: Elaboração Própria

Figura 6: Ilustração do gráfico da função com lei de formação $f^-(x)$



Fonte: Elaboração Própria

Pelo **Lema 1**, concluímos que f é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são mensuráveis.

Em lidar com seqüências de funções mensuráveis frequentemente desejamos a forma suprema, limites, etc, e é conveniente permitir a extensão dos números reais, ou seja, permitiremos que $-\infty$ e $+\infty$ sejam tomados como “valores”; isto é, terão as propriedades que intuitivamente esperamos para “infinito” e “menos infinito”.

Definição do Sistema Numérico Real Estendido

A reta estendida $\bar{\mathbb{R}}$ é o conjunto

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \quad \text{ou} \quad [-\infty, \infty]$$

Em $\bar{\mathbb{R}}$, definimos as operações usuais de \mathbb{R} e

$$x + \infty = \infty + x = \infty; \text{ para todo } x \in \mathbb{R};$$

$$x - \infty = -\infty + x = -\infty; \text{ para todo } x \in \mathbb{R};$$

$$\infty + \infty = \infty \text{ e } -\infty + (-\infty) = -\infty;$$

$$x \cdot \infty = \infty \cdot x = \begin{cases} \infty, & \text{se } x \in \bar{\mathbb{R}} \text{ e } x > 0; \\ -\infty, & \text{se } x \in \bar{\mathbb{R}} \text{ e } x < 0; \end{cases}$$

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \begin{cases} -\infty, & \text{se } x \in \bar{\mathbb{R}} \text{ e } x > 0; \\ \infty, & \text{se } x \in \bar{\mathbb{R}} \text{ e } x < 0; \end{cases}$$

$$0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = \infty \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0$$

Definição Função de Valores Reais Estendidos

Sejam (X, Σ) um espaço mensurável e $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função a valores reais estendidos. Diremos que f é mensurável (Σ – mensurável) quando para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $f^{-1}(\alpha, +\infty) = \{x \in X; f(x) > \alpha\}$ pertence a Σ .

A coleção de todas as funções a valores reais estendidos mensuráveis é denotada por $M(X, \Sigma)$.

Lema 3

Sejam (X, Σ) um espaço mensurável e $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função a valores reais estendidos. Então f é mensurável se, e somente se, os conjuntos

$$A = \{x \in X; f(x) = +\infty\}, \quad B = \{x \in X; f(x) = -\infty\}$$

pertencem a Σ e função $f_1: X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = f(x)$ se $x \notin A \cup B$ e $f(x) = 0$ se $x \in A \cup B$ é mensurável.

Prova: Seja $f \in M(X, \Sigma)$. Não é difícil ver que A, B pertencem a Σ . Agora, seja $\alpha \geq 0$, e veja que

$$\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \setminus A.$$

Se $\alpha < 0$ então

$$\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup B.$$

Portanto f_1 é mensurável.

Reciprocamente, se A, B e f_1 são mensuráveis, então

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \cup A,$$

quando $\alpha \geq 0$, e

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \setminus B.$$

quando $\alpha < 0$.

Portanto, f é mensurável.

Lema 4

Sejam (X, Σ) um espaço mensurável e $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função a valores reais estendidos e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções a valores reais estendidos definidas em X

$$cf(0(\pm\infty) = 0), \quad f^2, \quad |f|, \quad f^+, \quad f^-$$

Também são mensuráveis.

Lema 5

Sejam (X, Σ) um espaço mensurável e (f_n) uma sequência de funções a valores reais estendidos mensuráveis. Então as funções a valores reais estendidos em X

$$f(x) = \inf f_n(x), \quad F(x) = \sup f_n(x),$$

$$f^*(x) = \liminf f_n(x) = \sup_{n \geq 1} \left\{ \inf_{m \geq n} f_m(x) \right\}$$

$$F^*(x) = \limsup f_n(x) = \inf_{n \geq 1} \left\{ \sup_{m \geq n} f_m(x) \right\}$$

São também mensuráveis.

Convergência Pontual

Seja $X \in \mathbb{R}$ um conjunto e $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções a valores reais que compartilham do mesmo domínio X .

Diz-se que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge pontualmente para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada ponto $x \in X$ a sequência numérica $f_n(x)$ converge para $f(x)$. Ou, na notação de limites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ para cada } x \in X$$

Equivalentemente, diz-se que $\{f_n\}$ converge para f em X se para todo $\varepsilon > 0$ e todo $x \in X$ existe um \mathbb{N} tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq \mathbb{N}.$$

Corolário.

Sejam (X, Σ) um espaço mensurável e (f_n) uma sequência de funções a valores reais estendidos mensuráveis que converge pontualmente para f em X , então f é uma função a valores reais estendidos mensurável.

Lema 6

Sejam (X, Σ) um espaço mensurável, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções a valores reais estendidos mensuráveis. Então a função a valores reais estendidos definida em X dada por fg é mensurável.

Teorema 1

Sejam (X, Σ) um espaço mensurável e $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função a valores reais estendidos mensurável e não negativa. Então, existe uma sequência (φ_n) em $M(X, \Sigma)$ tal que

- i. $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ sejam quais forem $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$;
- ii. $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ for cada $x \in X$;
- iii. Cada φ_n possui apenas um número finito de valores reais.

Prova:

Para construir a sequência (φ_n) vamos usar n argumentos, para todo $n \in \mathbb{N}$. Na etapa $n = 1$, “dividimos horizontalmente” a ilustração gráfico da f até a altura 1 em duas partes iguais, definindo assim os conjuntos

$$E_{01} = \left\{x \in X; 0 \leq f(x) < \frac{1}{2}\right\}, \quad E_{11} = \left\{x \in X; \frac{1}{2} \leq f(x) < 1\right\}, \text{ e}$$

$$E_{21} = \{x \in X; f(x) \geq 1\}$$

e a função $\varphi_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_1(x) = \frac{k}{2}$ se $x \in E_{k1}, k \in \{0, 1, 2\}$.

Na etapa $n = 2$, “dividimos horizontalmente” a ilustração gráfico da f até a altura 2 em oito partes iguais, definindo assim os conjuntos

$$E_{02} = \left\{x \in X; 0 \leq f(x) < \frac{1}{4}\right\}, \quad E_{12} = \left\{x \in X; \frac{1}{4} \leq f(x) < \frac{1}{2}\right\},$$

$$E_{22} = \left\{x \in X; \frac{1}{2} \leq f(x) < \frac{3}{4}\right\}, \quad E_{32} = \left\{x \in X; \frac{3}{4} \leq f(x) < 1\right\},$$

$$E_{42} = \left\{x \in X; 1 \leq f(x) < \frac{5}{4}\right\}, \quad E_{52} = \left\{x \in X; \frac{5}{4} \leq f(x) < \frac{3}{2}\right\},$$

$$E_{62} = \left\{x \in X; \frac{7}{4} \leq f(x) < \frac{5}{2}\right\}, \quad E_{72} = \left\{x \in X; \frac{7}{4} \leq f(x) < 2\right\},$$

$$E_{82} = \{x \in X; f(x) \geq 2\},$$

E a função $\varphi_2: X \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_2(x) = \frac{k}{4}$ se $x \in E_{k1}$, $k \in \{0, 1, \dots, 8\}$.

Na etapa $n = 3$, “dividimos horizontalmente” a ilustração gráfico da f até a altura 3 em vinte e quatro partes iguais, definindo assim os conjuntos.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\}$, considere o conjunto

$$E_{kn} = \left\{x \in X, \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}$$

Para $k = n2^n$, considere o conjunto

$$E_{n2^n n} = \{x \in X; f(x) \geq n\}.$$

Observe que os conjuntos $\{E_{kn}; k = 0, 1, \dots, n2^n\}$ são disjuntos, pertencem a Σ , e

$$\bigcup_{k \in \{0, 1, \dots, n2^n\}} E_{kn} = X.$$

Finalmente, defina $\varphi_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}$ se $x \in E_{kn}$, então $\varphi_n \in M(X, \Sigma)$ e os itens i), ii) e iii) são válidos.

Definição

Sejam (X, Σ_X) e (X, Σ_Y) espaços mensuráveis e $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação. Diremos que f é mensurável quando para cada $E \in \Sigma_Y$ o conjunto

$$f^{-1}(E) = \{x \in X; f(x) \in E\}$$

Pertence a Σ_X .

4 MEDIDAS

Neste capítulo introduzimos a noção de um espaço mensurável (X, Σ) . Agora consideramos certas funções que são definidas em X e têm valores reais ou reais estendidos. Essas funções, que serão chamadas de "medidas", são sugeridas por nossa idéia de comprimento, área, massa e assim por diante.

Definição de Medida

Sejam (X, Σ) um espaço mensurável. Um medida sobre X é uma função $\mu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que

- i. $\mu(\emptyset) = 0$
- ii. $\mu(E) \geq 0$
- iii. Se $E_1, \dots, E_n, \dots \in \Sigma$ é uma sequência disjunta, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Definição

Sejam (X, Σ) um espaço mensurável e $\mu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma medida.

- i. A medida μ é chamada finita quando $\mu(E) < +\infty$ para todo $E \in \Sigma$
- ii. A medida μ é chamada σ -finita quando existe uma sequência $E_1, \dots, E_n, \dots \in \Sigma$ com $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e $\mu(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição de Espaço de Medida

Um espaço de medida é uma estrutura matemática constituída de uma terna (X, Σ, μ) , onde (X, Σ) um espaço mensurável e $\mu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma medida.

1. Exemplos

Seja (X, Σ) um espaço mensurável com $\Sigma = \mathcal{P}(X)$.

- i. Se $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é definida por $\mu(E) = 0$ para todo $E \subset X$, então μ é uma medida finita;
- ii. Se $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é definida por $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(E) = +\infty$ para todo $E \subset X$ com $E \neq \emptyset$, então μ é uma medida σ -finita;

- iii. Se $p \in X$ e $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é definida por $\mu(E) = 0$ se $p \notin E$ e $\mu(E) = 1$ se $p \in E$, então μ é uma medida finita; esta medida é chamada medida unitária concentrada em p .

2. Exemplos

Seja (X, Σ) um espaço mensurável com $X = \mathbb{N}$ e $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

- i. Se $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é definida por $\mu(E)$ é igual ao número de elementos de E se E é finito, e $\mu(E) = +\infty$ se E é infinito, então μ é uma medida σ -finita; esta medida é conhecida como medida de contagem sobre \mathbb{N} .

Lema 1

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida.

- i. Se E, F são conjuntos mensuráveis e $E \subset F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$;
- ii. Se E, F são conjuntos mensuráveis e $E \subset F$ com $\mu(E) < +\infty$, então
- $$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E).$$

Prova:

É suficiente observar que $F = E \cup (F \setminus E)$ e $E \cap (F \setminus E) = \emptyset$, e usar a aditividade de μ , em consequência temos $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$.

Uma vez que, $\mu(F \setminus E) \geq 0$, segue que $\mu(E) \leq \mu(F)$. Daí segue que Se $\mu(E) < +\infty$, então o resultado da identidade acima

$$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E).$$

Lema 2

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida.

- i. Se $E_1, \dots, E_n, \dots \in \Sigma$ é uma sequência não decrescente, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n)$$

- ii. Se $F_1, \dots, F_n, \dots \in \Sigma$ é uma sequência não crescente com $\mu(F_1) < +\infty$, então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim \mu(F_n).$$

Prova:

- i. Se $\mu(E_n) = +\infty$, para algum n , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = +\infty = \lim \mu(E_n).$$

Agora, se $\mu(E_n) < +\infty$, para todo n , então escreva $A_1 = E_1$ e $A_n = E_n \setminus E_{n-1}$ para $n > 1$. Então, a sequência $A_1, \dots, A_n, \dots \in \Sigma$ é disjunta e

$$E_n = \bigcup_{j=1}^n A_j, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Conseqüentemente

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim \sum_{n=1}^m \mu(A_n),$$

e já que $\mu(A_n) = \mu(E_n) - \mu(E_{n-1})$ para $n > 1$, temos

$$\sum_{n=1}^m \mu(A_n) = \mu(E_m).$$

- ii. Seja $E_n = F_1 \setminus F_n$, então $E_1, \dots, E_n, \dots \in \Sigma$ é uma sequência não decrescente. Por i), temos

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n) = \lim [\mu(F_1) - \mu(F_n)]$$

e

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right).$$

E o resultado segue.

5 O PROBLEMA DA MEDIDA

Queremos investigar a existência de uma função $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- i. $\mu(E) \geq 0$ seja qual for $E \subset \mathbb{R}$;
- ii. Dada uma sequência disjunta E_1, \dots, E_n, \dots de subconjuntos de \mathbb{R} , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

- iii. Sejam quais forem $E \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, temos $\mu(E + x) = \mu(E)$, onde $E + x = \{e + x; e \in E\}$;
- iv. $0 < \mu([0,1]) < +\infty$.

Nosso objetivo é mostrar que tal função μ não existe. Antes disso, observamos algumas consequências simples das propriedades i), ii), iii), e iv) acima.

Lema 1

Se uma função $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ satisfaz as propriedades i), ii), iii) e iv) acima, então ela também satisfaz as seguintes propriedades:

- a) $\mu(\emptyset) = 0$;
- b) Dada uma coleção infinita disjunta E_1, \dots, E_n, \dots de subconjuntos de \mathbb{R} , então

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k).$$

- c) Se $A \subset B \subset \mathbb{R}$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$;
- d) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$, então $\mu([a, b]) < +\infty$.

Prova:

- a) Considere $E_1 = [0,1]$ e $E_n = \emptyset$ para todo $n \geq 2$, então por i) e ii)

$$\mu([0,1]) = \mu([0,1]) + \mu(\emptyset) + \dots + \mu(\emptyset) + \dots +$$

E usando iv) devemos ter $\mu(\emptyset) = 0$.

- b) Considere $E_k = \emptyset$ para todo $k > n$, e use as propriedades i), ii) e a).
- c) Basta observar que a propriedade b) implica $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, onde $\mu(B \setminus A) \geq 0$.
- d) Seja n tal que $b < a + n$. As propriedades b) e c) implicam que

$$\mu([a, b]) \leq \mu([a, a+n]) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu([a+k, a+k+1])$$

e

$$\mu([a, b]) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mu([a+k, a+k+1])$$

E as propriedades iii) e iv) implicam que $\mu([a+k, a+k+1]) = \mu([0,1]) < +\infty$ seja qual for k .

Definição do Produto Cartesiano

Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma coleção não vazia de conjuntos não vazios. O produto Cartesiano

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

É o conjunto de todas as aplicações

$$f: A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$$

tais que $f(\alpha) \in X_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. Frequentemente, escrevemos x e x_α , ao invés de f e $f(\alpha)$, e chamamos x_α a α -ésima coordenada de x .

Definição do Axioma da Escolha

Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma coleção não vazia de conjuntos não vazios, então o produto Cartesiano

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

é não vazio.

O teorema que veremos a seguir é o principal resultado deste trabalho

Teorema 1

Não existe uma função $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ satisfazendo as propriedades i), ii), iii) e iv) acima.

Prova:

Considere a relação binário \sim no intervalo $[0,1]$ definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Para todos $x, y \in [0,1]$. Não é difícil ver que \sim é uma relação de equivalência no intervalo $[0,1]$. Seja $A \subset [0,1]$ um conjunto escolhido para \sim ; isto é, A possui exatamente um elemento de cada classe de equivalência.

Temos então $x - y \notin \mathbb{Q}$, para todos $x, y \in A$ com $x \neq y$. Em particular, os conjuntos $(A + q)_{q \in \mathbb{Q}}$ são dois a dois disjuntos. Note também que para todo $x \in [0,1]$ existe $y \in A$ com $x - y \in \mathbb{Q}$; na verdade, temos $x - y \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ já que $x, y \in [0,1]$.

Segue então que

$$[0,1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (A + q) \subset [-1,2]$$

Como $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ é enumerável, as propriedades i), ii), iii) e c) implicam que

$$\mu([0,1]) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mu(A + q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mu(A) \leq \mu([-1,2])$$

Agora, se $\mu(A) = 0$ concluímos que $\mu([0,1]) = 0$, contradizendo iv); se $\mu(A) > 0$ concluímos que $\mu([-1,2]) = +\infty$, contradizendo d).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho trata de um importante resultado dentro da teoria da medida que é conhecido como o problema da medida. O problema da medida é importante porque ele é um problema intuitivo, o senso comum diz que se você propõe a apresentar a teoria da medida, deve existir uma função que associa a cada conjunto que possui algum sentido uma mensurabilidade um número não negativo associado a esse conjunto, o problema da medida vem dá uma resposta negativa a esse problema, então ele vem nos dizer que mesmo que apresente uma teoria da medida satisfatória, o problema de associa a cada conjunto mensurável um número real não negativo é um problema que não tem solução. É importante destacar aqui que uma teoria da medida satisfatória ela não precisa por exemplo está associada a existência de uma medida no conjunto das partes de um conjunto não vazio predefinido, e sim numa σ – álgebra.

7 BIBLIOGRAFIA

- [1] R. G. Bartle, The Elements of Integration and Lebesgue Measure, John Wiley & Sons, 1995.
- [2] W. Rudin, Princípios de Análise Matemática, Editora Ao Livro Técnico, 1971.
- [3] G. B. Folland, Real Analysis. Modern Techniques and their Applications, John Wiley & Sons, 1999.
- [4] C. Isnard, Introdução á Medida e Integração, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [5] Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami (28 de novembro de 2009). Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces (em inglês). [S.l.]: Princeton University Press
- [6] https://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_da_medida#:~:text=A%20teoria%20da%20medida%20%C3%A9,Henri%20Lebesgue%20e%20Constantin%20Carath%C3%A9odory.