



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

CÁLCULO COMPUTACIONAL DA FRONTEIRA DO DIAGRAMA DE VORONOI COM
DOIS SÍTIOS E UM OBSTÁCULO CIRCULAR

EMERSON CHARLES DO NASCIMENTO MARREIROS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientadores: Ana Flávia Uzeda dos Santos
Macambira
Sérgio de Carvalho Bezerra

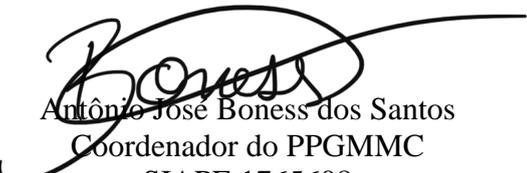
João Pessoa
Dezembro de 2021

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional
Universidade Federal da Paraíba

Ata da Sessão Pública de Defesa de Dissertação de Mestrado de **EMERSON CHARLES DO NASCIMENTO MARREIROS**, candidato ao título de Mestre em Matemática Computacional, na Área de Modelagem Matemática e Computacional, realizada no dia 10 de Dezembro de 2021.

Aos 10 dias do mês de Dezembro do ano de dois mil e vinte e um, às 09:00 horas, via videoconferência, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para julgar o Trabalho Final da Sr. **EMERSON CHARLES DO NASCIMENTO MARREIROS**, vinculado à Universidade Federal da Paraíba sob matrícula nº 20191001224, candidato ao grau de Mestre em “*Modelagem Matemática e Computacional*”, na linha de pesquisa “Modelagem e Simulação de Sistemas”, do Programa de Modelagem Matemática e Computacional. A comissão examinadora foi composta pelos professores **SÉRGIO DE CARVALHO BEZERRA**, Orientador e Presidente da Banca; **ANA FLÁVIA UZEDA DOS SANTOS MACAMBIRA** Segundo Orientador, **JOSÉ MIGUEL AROZTEGUI MASSERA**, Examinador Interno ao Programa; **SÍLVIO DE BARROS MELO**, Examinador Externo à Instituição. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca cumprimentou os presentes, comunicou aos mesmos a finalidade da reunião e passou a palavra ao candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado “**CÁLCULO COMPUTACIONAL DA FRONTEIRA DO DIAGRAMA DE VORONOI NO PLANO COM DOIS SITIOS E UM OBSTÁCULO CIRCULAR**”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer: “*aprovado*”. Do ocorrido, eu Antônio José Boness dos Santos, Coordenador do Programa de Modelagem Matemática e Computacional (PPGMMC), lavrei a presente ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora.

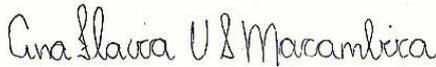
João Pessoa, 10 de Dezembro de 2021.


Antônio José Boness dos Santos
Coordenador do PPGMMC
SIAPE 1765608

Prof. Dr. **SÉRGIO DE CARVALHO BEZERRA**
Orientador (PPGMMC)



Prof. Dra. **ANA FLÁVIA UZEDA DOS SANTOS MACAMBIRA**
Segundo Orientador Externo ao Programa (DE/UFPB)



Prof. Dr. **JOSÉ MIGUEL AROZTEGUI MASSERA**
Examinador Interno ao Programa (PPGMMC)



Prof. Dr. **SÍLVIO DE BARROS MELO**
Examinador Externo à Instituição (CIn/UFPE)



Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M358c Marreiros, Emerson Charles do Nascimento.
Cálculo computacional da fronteira do diagrama de Voronoi no plano com dois sítios e um obstáculo circular / Emerson Charles do Nascimento Marreiros. - João Pessoa, 2021.
64 f. : il.

Orientação: Sérgio de Carvalho Bezerra.
Coorientação: Ana Flávia U. dos Santos Macambira.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/Informática.

1. Matemática computacional. 2. Diagrama de Voronoi - fronteira. 3. Cálculo computacional. I. Bezerra, Sérgio de Carvalho. II. Macambira, Ana Flávia Uzeda dos Santos. III. Título.

UFPB/BC

CDU 519.67(043)

A minha querida mãe
Raimunda Pereira do
Nascimento
In memoriam meu saudoso pai
José Gonçalves Marreiros e minha
amada esposa
Lúcia de Fátima Duarte Galvão

Agradecimentos

Agradeço primeiramente, a Deus por ter me proporcionado essa oportunidade e me dado ânimo pra vencer as dificuldades e chegar até essa maravilhosa conquista, a todos os professores que contribuíram nessa caminhada rumo a esse título, aos meus queridos familiares e aos meus amados e preciosos filhos.

Agradeço aos meus orientadores **Ana Flávia Uzeba dos Santos Macambira** e **Sérgio de Carvalho Bezerra**, pela dedicação e excelente trabalho de orientação que proporcionou a realização dessa dissertação de mestrado.

Agradeço ao professor **Jairo Rocha de Faria** por conta das excelentes aulas que tive nesse mestrado.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CÁLCULO COMPUTACIONAL DA FRONTEIRA DO DIAGRAMA DE VORONOI COM
DOIS SÍTIOS E UM OBSTÁCULO CIRCULAR

EMERSON CHARLES DO NASCIMENTO MARREIROS

Dezembro/2021

Orientadores: Ana Flávia Uzeda dos Santos Macambira
Sérgio de Carvalho Bezerra

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

O diagrama de Voronoi é um tipo de decomposição de um dado espaço em subconjuntos neste espaço. O objeto de estudo desta dissertação é o diagrama de Voronoi com dois pontos geradores quaisquer e um obstáculo circular. Este problema pode ser aplicado no cálculo de rotas para robôs. No caso do obstáculo circular, além dos pontos geradores, foi necessária a criação de pontos adicionais para o cálculo da distância entre um ponto P qualquer no espaço considerado e um ponto gerador do Diagrama de Voronoi. Nesta dissertação foram calculadas todas as coordenadas dos pontos e todas as distâncias entre os mesmos de forma exata. Também foi definida a função da fronteira existente entre as células e um algoritmo para a construção da mesma foi apresentado, assim como exemplos numéricos e figuras. Foi introduzida a noção de grafo de proximidade e foram exibidas figuras dos grafos de proximidade dos exemplos numéricos.

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

DISSERTAÇÃO MESTRADO

EMERSON CHARLES DO NASCIMENTO MARREIROS

December/2021

Advisors: Ana Flávia Uzeda dos Santos Macambira
Sérgio de Carvalho Bezerra

Program: Computational Mathematical Modelling

The Voronoi diagram is a type of decomposition of a given space into subsets in that space. The object of this work is the Voronoi's diagram when two generating points are located at any positions on the Cartesian plane and there is a circular obstacle. This problem can be applied in the calculation of routes for robots. In case of circular obstacle, in addition to the generating points, it was necessary to create additional points for the calculation of the distance between any point P in the space considered and a generating point in the Diagram of Voronoi. In this dissertation, all point coordinates and all distances were calculated between them exactly. The function of the existing boundary between the cells was also defined. and an algorithm for its construction was presented, as well as numerical examples and figures. The notion of proximity graph was introduced and figures of the proximity graphs of the numerical examples.

Sumário

Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
1.1 Diagrama de Voronoi no plano cartesiano	1
1.2 Descrição do Trabalho	4
1.2.1 Objetivo principal	5
1.2.2 Objetivos específicos	5
1.2.3 Organização dos Capítulos	5
2 Definições e conceitos importantes	7
2.1 Conjunto e Fecho Convexos	7
2.2 Noções de Grafos	9
2.3 Métodos numéricos de zeros de uma função	14
3 Representação gráfica e cálculo de coordenadas	17
3.1 Representação gráfica do problema	17
3.2 Equações das coordenadas dos pontos	19
3.3 Cálculo das coordenadas do ponto Q_1 e Q_2	19
3.4 Cálculo das coordenadas do ponto D	22
3.5 Cálculo das coordenadas dos pontos Q_3 e Q_4	23
3.6 Cálculo das coordenadas dos pontos Q_5 e Q_6	26
4 Cálculo das distâncias entre os pontos	27
4.1 Cálculo da distância euclidiana entre os pontos A e Q_2	27
4.2 Cálculo da distância geodésica entre os pontos Q_2 e Q_3	28
4.3 Cálculo da distância entre os pontos Q_3 e E	30
4.4 Cálculo da distância entre os pontos E e Q_4	30
4.5 Cálculo da distância do ponto Q_4 ao ponto Q_5	31
4.6 Cálculo da distância do ponto Q_5 ao ponto B	32
5 Função $D(P_i)$ e sua derivada	33
5.1 Definição da função $D(P_i)$, diferença das distâncias geodésicas $d(P, A)$ e $d(P, B)$	33
5.2 Definição da derivada da função $D(P_i)$ relativa a fronteira do diagrama de Voronoi	36
6 Exemplos e Algoritmo da Fronteira	40
6.1 Exemplos e Algoritmo	40
6.1.1 Exemplos	40
6.1.2 Algoritmo	45

7 Grafo de Proximidade	47
8 Resultados e Perspectivas	50
Referências Bibliográficas	54

Lista de Figuras

1.1	$V(p_i)$ - Par de pontos geradores separados por uma reta equidistante.	2
1.2	$V(p_i)$ - Intersecção de semiplanos que contém p_i .	2
1.3	Arestas de Voronoi.	3
2.1	Conjunto não convexo (i) e convexo (ii)	7
2.2	Adjacência entre os Estados Brasileiros	10
2.3	Grafos de Kuratowski	11
2.4	Representação do grafo de visibilidade através do gráfico de barras.	13
2.5	Representação gráfica - Método Newton-Raphson	15
3.1	Principais pontos para obtenção do diagrama de Voronoi	18
4.1	Distância entre o ponto A e Q_2	27
5.1	Distâncias geodésicas: $d(A, P_i) = d(P_i, B)$	34
5.2	Grafo de Visibilidade	35
6.1	Comportamento dos pontos tangentes ao obstáculo circular	42
6.2	Visualização numéricas dos pontos que determinam a fronteira do diagrama de Voronoi na primeira situação	43
6.3	Visualização numéricas dos pontos que determinam a fronteira do diagrama de Voronoi da situação 2	44
7.1	Regiões de atuação dos grafos	48
7.2	Grafo - caso 1	48
7.3	Grafo - caso 2	49
7.4	Grafo - caso 3	49
7.5	Grafo - caso 4	49
8.1	Fronteira caso 1	51
8.2	Fronteira caso 2	52
8.3	Fronteira caso 3	53

Capítulo 1

Introdução

O Diagrama de Voronoi - igualmente conhecido como Polígono de Thiessen ou Tesselção de Delaunay - é empregado nas áreas de arqueologia, biologia, cartografia, mineralogia, meteorologia, fisiologia, estatística e, mais recentemente, em planejamento urbano e regional [2].

A história do uso do Diagrama de Voronoi inicia-se com Descartes, em dois de seus trabalhos, "Le Monde de Mr. Descartes" e "Le Traité de La Lumière", publicados em 1644, e no terceiro capítulo do livro Principia Philosophiae. Esses diagramas, usados para demonstrar a disposição da matéria no sistema solar, são semelhantes aos criados posteriormente por Voronoi. Os primeiros trabalhos que efetivamente apresentaram polígonos na forma do diagrama são os de Dirichlet, realizado em 1850, e o de Voronoi, em 1908, os quais, ao estudarem formas quadráticas, consideraram uma forma especial do Diagrama de Voronoi.

A diferença na abordagem desses trabalhos é que Dirichlet estudava o diagrama em duas e três dimensões, enquanto Voronoi o estudava em n dimensões [2]. No entanto, somente em 1911 foram iniciados estudos, por um pesquisador da área de meteorologia de nome Thiessen, que usava os Diagramas para a representação espacial do relacionamento entre áreas geográficas.

Em seu trabalho, Thiessen empregou o Diagrama de Voronoi - denominando-o Polígono de Thiessen - para estimar com mais acurácia as médias regionais de precipitação de chuva [17] e [4].

A partir desse momento, a aplicação do Diagrama de Voronoi passou a ser mais intensa tanto na área de meteorologia como em outras, por exemplo, cartografia e planejamento urbano [20] e [16]. Este incremento ocorreu também em decorrência das facilidades de processamento de dados introduzidas pela informática e pela construção de algoritmos, como o de [10], e o de [4], que possibilitaram a criação de polígonos de forma mais rápida e em n dimensões. Após isso, outros algoritmos surgiram, como os apresentados por [3], [24], [15], e [23].

1.1 Diagrama de Voronoi no plano cartesiano

Seja $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ um conjunto de pontos no plano euclidiano com $2 \leq n < \infty$. Cada ponto p_i tem coordenadas cartesianas (x_i, y_i) e $p_i \neq p_j$ para $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tomando-se um ponto p qualquer no plano cartesiano com coordenadas

(x, y) , a distância euclidiana de p até p_i é dada por:

$$d(p, p_i) = \sqrt{(x_{p_i} - x_p)^2 + (y_{p_i} - y_p)^2}$$

Se $d(p, p_i) < d(p, p_j)$, com $j \neq i$, então o ponto p é designado para a região determinada por p_i e a região de Voronói associada ao ponto gerador p_i é definida por:

$$V(p_i) = \{p \mid d(p, p_i) < d(p, p_j), \text{ para } i \neq j\}.$$

O diagrama $V(P)$ gerado pelo conjunto P de pontos geradores chama-se diagrama de Voronói e é dado por:

$$V(P) = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\}.$$

Denomina-se p_i ponto gerador e o conjunto $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ corresponde ao conjunto gerador do diagrama de Voronói V . Assume-se que os pontos geradores têm o mesmo peso e a construção do diagrama depende apenas da distância euclidiana entre eles.

A célula de Voronói $V(p_i)$ é formada pelo conjunto de pontos que estão mais próximos de p_i do que de qualquer outro ponto gerador de P . Cada par de pontos geradores (p_i, p_j) pode ser separado por uma reta equidistante dos mesmos e perpendicular ao segmento que os une. Esta reta divide o plano em dois semiplanos, cada um contendo um dos pontos do par, ou seja, um dos pontos geradores.

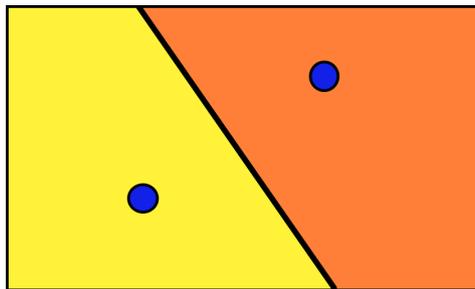


Figura 1.1: $V(p_i)$ - Par de pontos geradores separados por uma reta equidistante.

Fonte: Interactive Voronoi Diagram Generator with WebGL

A célula de Voronói associada a um ponto p_i é definida pela interseção dos semiplanos que contém p_i , gerados por todos os pares de pontos que incluem p_i .

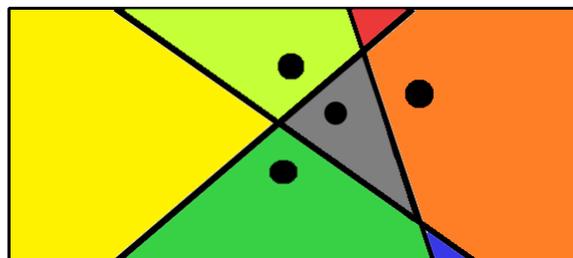


Figura 1.2: $V(p_i)$ - Intersecção de semiplanos que contém p_i .

Criada pelo autor

A interseção dos semiplanos gera uma célula poligonal convexa (eventualmente limitada). Cada par de pontos geradores (p_i, p_j) pertencentes a células adjacentes é

separado por um segmento de reta equidistante dos mesmos, denominado aresta de Voronói. O diagrama de Voronói $V(P)$ é definido pelas arestas das células de Voronói.

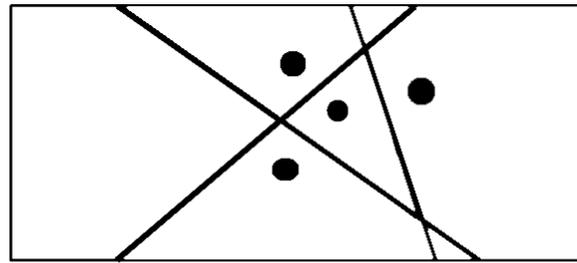


Figura 1.3: Arestas de Voronoi.

Criada pelo autor

Neste trabalho consideramos um obstáculo circular entre dois pontos geradores e, sendo assim, equidistante aos dois pontos geradores temos uma curva. Portanto, não podemos chamá-la de aresta, já que não é um segmento de reta, então neste trabalho designamos por fronteira de Voronoi a curva equidistante aos pontos geradores existente entre duas células adjacentes.

Nesta seção descrevemos exemplos e aplicações onde o Diagrama de Voronoi é um modelo matemático aplicável.

- O reticulado 2D forma um diagrama de favo de mel regular, com hexágonos iguais e pontos simétricos; no caso de uma rede triangular, é regular; no caso de uma rede retangular, são formados retângulos em linhas e colunas; uma rede quadrada nos dá um diagrama regular em forma de mosaico; note que os retângulos e os quadrados também podem ser gerados por outras redes (por exemplo, a rede definida pelos vetores $(1,0)$ e $(1/2,1/2)$ produz quadrados).
- Uma rede cúbica 3D produz um favo de mel cúbico. Planos paralelos com redes triangulares regulares alinhadas, com cada um alinhado com o centro dos outros, produz um favo de mel prismático hexagonal. Certos corpos centrados reticulados tetragonais produzem um diagrama do espaço com dodecaedro rhombo-hexagonal.
- Um reticulado cúbico face-centrado produz um diagrama do espaço com dodecaedro r-hombic.
- Um reticulado cúbico corpo-centrado produz um diagrama do espaço com octaedros truncados.
- Para o conjunto de pontos (x, y) com x em um conjunto discreto X e y em um conjunto discreto Y , temos telhas retangulares com os pontos não necessariamente em seus centros.
- Uma das primeiras aplicações do Diagrama de Voronoi foi dada por John Snow [5] para estudar a epidemia de cólera no bairro londrino do Soho em 1854, localizado na Inglaterra. Ele mostrou a correlação entre áreas do mapa de Londres e as áreas com mais mortes devido ao surto, utilizando uma bomba de água particular.

- Uma estrutura de dados de localização de pontos pode ser construída através do Diagrama de Voronoi, a fim de responder a questões como o vizinho mais próximo ou o objeto que está mais próximo de um ponto de determinada consulta. Consultas a vizinho mais próximo têm inúmeras aplicações. Por exemplo, encontrar o hospital mais próximo ou o objeto mais similar em um banco de dados [12]. Uma aplicação importante é a quantização vetorial, comumente utilizada em compressão de dados.
- Um determinado Diagrama de Voronoi, pode-se também encontrar o maior círculo vazio [19] dentre um conjunto de pontos em um polígono abrangente; por exemplo, para construir um novo supermercado o mais distante possível dos demais supermercados existentes, em uma determinada cidade plana.
- Diagrama de Voronoi é utilizado na relação física de polímeros, mas especificamente na representação do volume livre do polímero [22].
- Também é utilizado em derivações da capacidade de uma rede sem fio [21].
- Em Climatologia, Diagramas de Voronoi são utilizados para calcular a precipitação de uma área, com base em uma série de medições pontuais. Neste caso, geralmente referenciados como polígonos Thiessen [11].
- Diagramas de Voronoi são utilizados para estudar os padrões de crescimento das florestas. Também pode ser útil no desenvolvimento de modelos preditivos para incêndios florestais [1].
- Diagramas de Voronoi também são utilizados em computação gráfica para gerar alguns tipos de texturas orgânicas [6].
- Em robótica autônoma de navegação, Diagramas de Voronoi são utilizados para encontrar rotas livres. Se cada obstáculo do percurso for representado por um ponto, então as bordas do diagrama serão as rotas mais distantes dos obstáculos (afastando assim, em teoria, o risco de colisões) [9].
- Em química computacional, as células Voronoi definidas pelas posições dos núcleos em uma molécula são usadas para calcular cargas atômicas. Isto é feito utilizando o método de densidade de deformação de Voronoi [18].
- Na ciência dos materiais, microestruturas policristalinas em ligas metálicas são geralmente representadas utilizando Diagramas de Voronoi [25].

1.2 Descrição do Trabalho

Nesta dissertação, a noção de Diagrama de Voronoi com um obstáculo circular e de sua fronteira são introduzidos. Tal situação se apresenta com um círculo unitário centrada num ponto $C = (c, 0)$ com $0 < c < 1$, chamado de obstáculo. Têm-se dois pontos geradores situados sobre o eixo y e exteriores ao círculo, designados por $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$ com $a > 0$ e $-b > a$, essa condição existe para que o ponto A sempre seja mais próximo do obstáculo circular que o ponto B , tais que esses pontos são exteriores ao obstáculo circular, ou seja, esses pontos não pertencem ao interior do círculo de raio 1 e centro $C = (c, 0)$, com $0 < c < 1$

1.2.1 Objetivo principal

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um algoritmo para o cálculo computacional da fronteira do diagrama de Voronoi com dois pontos quaisquer e um obstáculo circular unitário centrado no ponto $C = (c, 0)$.

1.2.2 Objetivos específicos

- (i) Demonstrar proposições que mostrem como calcular a fronteira do diagrama de Voronoi na situação de dois pontos quaisquer.
- (ii) Implementar o cálculo da fronteira do Diagrama de Voronoi na situação de dois pontos quaisquer com um obstáculo circular.
- (iii) Identificar o Grafo de Proximidade com dois pontos quaisquer com um obstáculo circular. Tal grafo permite identificar se um dado ponto no plano pertence a célula de A ou a célula de B.

1.2.3 Organização dos Capítulos

Detalhando melhor o problema, o comportamento do Diagrama nesta situação, difere do comportamento do Diagrama de Voronoi planar original. No diagrama original, a distância euclidiana definia as células de Voronoi. Nesta nossa abordagem, a distância de um certo ponto p para A não corresponde necessariamente à distância euclidiana. Isso interfere diretamente na fronteira do Diagrama de Voronoi com obstáculo circular, que passa a ser descrita por uma função não linear. No trabalho descrevemos um método computacional para a obtenção da fronteira do Diagrama de Voronoi, que utiliza o método de Newton-Raphson devido ao fato da função que determina a fronteira ser não linear. Caso um ponto p tem a propriedade do segmento \overline{pA} ou do segmento \overline{pB} interceptar o obstáculo, então a menor distância entre p e A ou p e B é definida pela distância entre p e um ponto do círculo mais um comprimento de arco sobre o obstáculo mais o comprimento do ponto final do arco até A , e similarmente para B .

As coordenadas desses pontos sobre o obstáculo que definem essas distâncias são calculadas no Capítulo 3. No Capítulo 4 as distâncias dos segmentos e dos arcos acima citados são avaliadas.

Com o objetivo de se calcular os pontos da fronteira do diagrama no nosso caso, vamos denotar um ponto qualquer da fronteira por E . Para determinarmos esses pontos, faz-se necessário a construção de uma função que calcula para qualquer ponto P do plano exterior ao círculo e com abcissa negativa, denotamos ela por $D(P)$, a diferença entre a distância de P para A e de P para B (distância geodésica, que considera a existência do obstáculo). Portanto, os zeros dessa função correspondem aos pontos da fronteira do Diagrama de Voronoi com um obstáculo circular.

Uma observação importante é o fato de se estudar só a fronteira do diagrama com abcissas negativas, o cálculo é similar para o lado direito, mas quando as fronteiras do lado direito e do lado esquerdo se aproximam o estudo aparentemente não é tão

simples.

Para calcular computacionalmente zeros de uma função, utilizou-se o método de Newton-Raphson e a função $D(P)$. No Capítulo 5, a função $D(P)$ é definida, assim como, sua derivada (necessária para uso do método computacional). O método de Newton-Raphson é descrito com detalhes no Capítulo 2. O conceito de Fecho convexo importante para o entendimento dos primeiros resultados também é descrito no Capítulo 2.

No Capítulo 6, mostramos graficamente alguns exemplos de pontos da fronteira e seus respectivos pontos sobre o círculo que determina suas distâncias geodésicas para A e B . Neste capítulo, também, é mostrado o algoritmo desenvolvido para cálculo da fronteira do Diagrama de Voronoi com obstáculo circular. Um terceiro tópico considerado no capítulo 6 é o grafo de proximidade. Grafo surge como uma ferramenta forte quando se estuda Diagrama de Voronoi. O primeiro problema de Voronoi com obstáculo tratado foi quando se considerou objetos poligonais. Nessa situação, um grafo, chamado grafo de Visibilidade, determinava como calcular a qual célula do Diagrama um ponto qualquer do plano pertence.

No capítulo 2 para entendimento da noção de grafo de visibilidade, introduzimos vários conceitos da Teoria de Grafo.

Quando o problema se trata de um obstáculo circular, a ideia de grafo de visibilidade não se aplica diretamente. Um conceito de grafo é introduzido generalizando a ideia do grafo de visibilidade, para então, defini-se o grafo de proximidade.

No Capítulo 7, os resultados obtidos no trabalho são mostrados (graficamente, numericamente e verbalmente). Destacamos como resultados os gráficos dos pontos pertencentes a fronteira, nas três situações possíveis de se realizar. De fato a fronteira pode ter três situações possíveis (destacadas no Capítulo 7). Os resultados referentes aos grafos de proximidades também são destacados.

Por fim, no Capítulo 8 as conclusões são tomadas e projeta-se para o futuro possíveis desdobramentos do trabalho.

Capítulo 2

Definições e conceitos importantes

Neste capítulo iremos revisar os temas matemáticos usados para o desenvolvimento dos cálculos na solução dos problemas elencados nos Capítulos 3 e 4 deste trabalho.

2.1 Conjunto e Fecho Convexos

Conjunto Convexo

Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se para quaisquer x^1 e $x^2 \in C$,

$$x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \quad (2.1)$$

para $0 \leq \lambda \leq 1$ implicar em $x \in C$.

Podemos definir intuitivamente um conjunto convexo como sendo um conjunto de pontos no qual, ao tomarmos quaisquer dois pontos pertencentes esse conjunto e uni-los, o segmento de reta que os une também pertencerá ao mesmo conjunto convexo. [8]

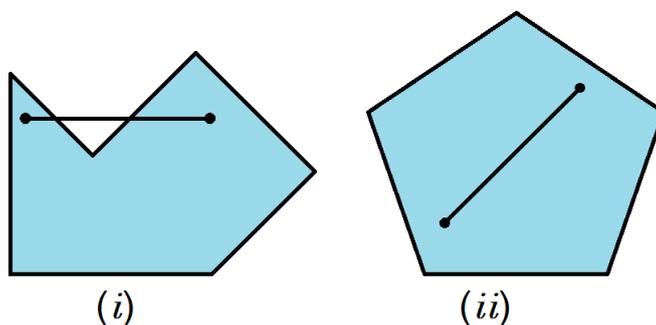


Figura 2.1: Conjunto não convexo (i) e convexo (ii)

Fonte: Criada pelo autor

Na Figura 2.1 temos exemplos de conjuntos convexos e não convexos, portanto,

podemos ver graficamente a diferença entre esses conjuntos.

O conjunto (i) da Figura 2.1 é não convexo, pois podemos observar que nem todas as retas unindo dois pontos pertencentes a estes conjuntos vão pertencer a ele também.

O conjunto (ii) da Figura 2.1 é convexo porque, ao unirmos quaisquer dois pontos pertencentes ao primeiro conjunto, a reta que os une também pertencerá a ele.

Fecho Convexo

Inicialmente estabelecemos algumas definições a respeito de convexidade.

Um conjunto $C \in \mathbb{R}^n$ é convexo se quaisquer que sejam x^1 e $x^2 \in C$ e $0 \leq \lambda \leq 1$, tem-se na equação 2.1, (isto é, se as combinações convexas de elementos de C pertencem a C).

Um ponto $w \in C$ é um ponto externo (ou um vértice) de C se não pode ser expresso como combinação convexa de elementos de C distintos de w .

O fecho convexo de um conjunto finito $C = p_1, p_2, \dots, p_m$ de pontos de \mathbb{R}^n é $conv(C)$.

$$conv(C) = \left\{ \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_m p_m \mid \lambda_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}$$

isto é, $conv(C)$ é o conjunto de todas as combinações convexas de elementos de C .

Para verificarmos que o fecho convexo de um conjunto finito C fica inteiramente caracterizado pelos seus pontos extremos, que são necessariamente elementos de C .

Isto é, se $C' = \{p \in C \mid p \text{ é extremo}\}$ é extremo, então $conv(C') = conv(C)$.

Teorema 2.7.1: O fecho convexo de um conjunto finito é um politopo (politopo é um poliedro limitado). Reciprocamente, todo politopo é um fecho convexo do conjunto (finito) de seus pontos extremos. [14]

Embora politopos figurem completamente caracterizado através de seus vértices ou das equações dos hiperplanos que limitam os semi-espacos, consideramos que descrever um poliedro (poliedro convexo: é a interseção de um número finito de semi-espacos (um semi-espaco é um conjunto da forma $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n\}$)), que consiste em descrever a sua estrutura facial, que completamente caracteriza sua fronteira.

Uma face (ou um conjunto extremo) de um conjunto convexo C é um subconjunto convexo F de C cujos elementos podem ser descritos como combinações convexas de elementos de C somente se estes elementos pertencem a F . Pode-se demonstrar que cada face de C é dada pela interseção de C com um semi-espaco que o contenha.

Note que cada ponto extremo de um conjunto convexo determina uma face de dimensão 0. (A dimensão de um subconjunto S de \mathbb{R}^2 é a dimensão do espaco vetorial

pelos vetores da forma $x - y$, onde x e y são elementos de S).

Dado um poliedro de dimensão d , suas faces de dimensão 0 são chamadas de vértices; as faces de dimensão 1 são as arestas e as faces de dimensão $d - 1$ são chamadas de facetas.

Descrever a estrutura facial de um poliedro consiste em descrever suas faces de todas as dimensões e as relações de incidência entre elas.

Neste trabalho, consideraremos apenas poliedro de dimensão 2, poliedro de dimensão 2 são polígonos convexos, que possuem apenas faces de dimensão 0 (vértices) e 1 (arestas ou lados), e sua estrutura facial é descrita por uma lista circular $v_1 a_1 v_2 a_2 v_3 a_3 \cdots v_n a_n$, que caracteriza a incidência de seus vértices e arestas.

Em consequência, a descrição de um polígono convexo de n lados requer uma estrutura de dados que ocupa espaço $O(n)$.

2.2 Noções de Grafos

Grafos

Um grafo $G = (V, E)$ consiste de um conjunto finito não vazio $V(G)$ de elementos denominados vértices de G e de um conjunto finito $E(G)$ de pares de elementos de $V(G)$, denominados arestas.

Uma aresta como $\{v, w\}$ será denotada simplesmente por vw ou wv . Diremos que a aresta vw incide em v e em w . Se vw é uma aresta, podemos dizer que os vértices v e w adjacentes.

Um grafo que não possua arestas múltiplas (arestas que incidem exatamente no mesmo par de vértices) e nem laço (uma aresta que liga o vértice a ele mesmo) é denominado grafo simples.

Se o grafo for denotado por G , o conjunto dos seus vértices será denotado por $V(G)$ e o conjunto das suas arestas por $E(G)$. O número de vértices de G é denotado por $n(G)$ e o número de arestas por $m(G)$, portanto,

$$n(G) = |V(G)| \text{ e } m(G) = |E(G)|$$

Algumas definições

Definição 2.9.1 (Cruzamento de arestas): Um cruzamento de arestas é a interseção de duas arestas no diagrama de um grafo, sem que haja um vértice na interseção. Um cruzamento, às vezes, pode ser eliminado desenhando-se outro diagrama para o grafo.

Definição 2.9.2 (Incidência): Uma aresta é dita incidente a um vértice v , quando essa aresta está ligada a v .

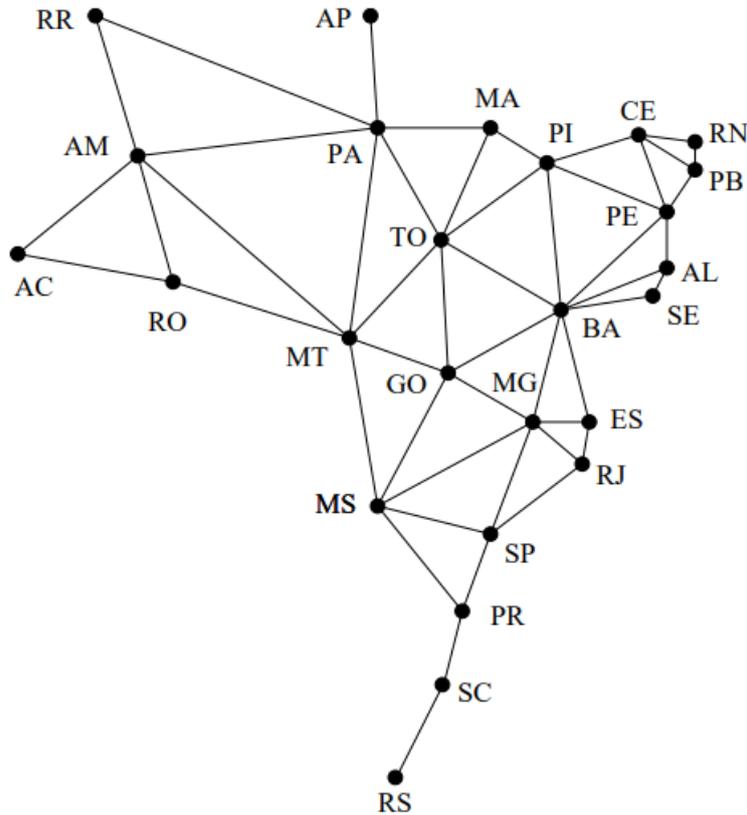


Figura 2.2: Adjacência entre os Estados Brasileiros

Fonte: [7]

Definição 2.9.3 (Ordem de um grafo): A ordem de um grafo G é dada pelo número de vértices de G .

Definição 2.9.4 (Passeio ou percurso): Um passeio ou percurso é uma sequência alternada finita de vértices e arestas da forma.

$$v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

começando e terminando com vértices tais que v_{i-1} e v_i são os vértices terminais da aresta e_i , $1 \leq i \leq k$.

Definição 2.9.5 (Caminho): Um caminho é um passeio sem vértices repetidos.

Definição 2.9.6 (Circuito): Um circuito é um trajeto fechado, ou seja, onde o vértice final coincide com o inicial.

Definição 2.9.7 (Ciclo): Um ciclo é um trajeto fechado onde os vértices inicial e final são os únicos que coincidem. Portanto, concluímos que todo ciclo é um circuito, mas nem todo circuito é um ciclo.

Definição 2.9.8 (Grafo finito e infinito): Um grafo é dito finito quando possui ordem é finita. Caso contrário, é dito infinito.

Definição 2.9.9 (Grafo conexo e desconexo): Um grafo é conexo se existir um caminho entre qualquer par de vértices. Caso Contrário, é desconexo.

Definição 2.9.10 (Grafo Completo): Um grafo completo é aquele onde todo par de vértices é ligado por uma aresta. Um grafo completo com n vértices é chamado K_n .

Definição 2.9.12 (Grafo Planar): Um grafo G é dito planar se puder ser representado graficamente no plano de tal forma que não haja cruzamento de suas arestas. Caso contrário o grafo é dito não-planar. Usaremos o termo grafo plano para uma representação planar de um grafo planar. Se existir uma representação do grafo em uma superfície sem que haja cruzamento de arestas, dizemos que existe uma imersão do grafo na superfície.

Existem dois grafos não planares que são muito importantes no estudo de planaridade. Estes dois grafos são chamados Grafos de Kuratowski e serão apresentados a seguir.

Grafos de Kuratowski (i): O grafo K_5 é um grafo não planar.

Prova 1: Para mostrar este teorema usaremos uma metodologia que pode ser bastante útil na obtenção de uma representação planar de um grafo planar ou na prova de que tal representação não pode ser encontrada. Vamos considerar o grafo K_5 . Sejam $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ os cinco vértices deste grafo. Como o grafo é completo, podemos encontrar um circuito em G . Seja por exemplo o seguinte circuito contido da figura 2.3.

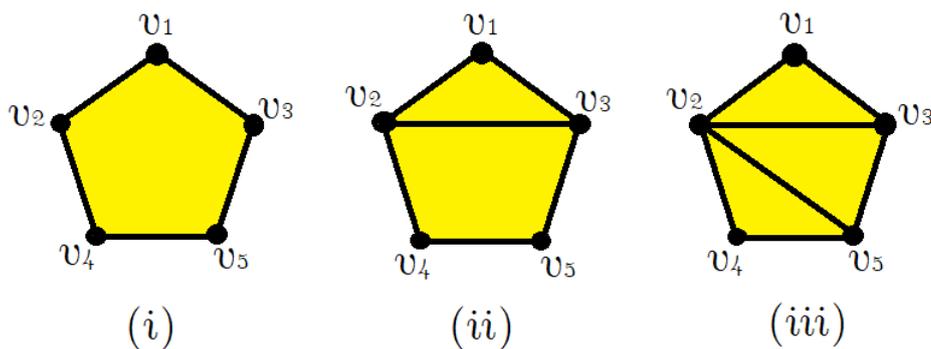


Figura 2.3: Grafos de Kuratowski
Teoria dos Grafos (Antunes Rangel e Araujo)

1. Vamos acrescentar aresta (v_2, v_3) na figura 2.3-(i), e termos como resultado a figura 2.3- (ii).
2. Acrescentando a aresta (v_2, v_5) na figura 2.3- (ii), e temos como resultado a figura 2.3- (iii).

3. Acrescentando as arestas (v_4, v_1) e (v_4, v_3) observamos que não temos escolha e que é necessário inclui-las externamente.
4. Ao tentarmos incluir a última aresta do grafo (v_5, v_1) verificamos que não é possível inclui-la sem que haja cruzamento de arestas. Portanto o grafo K_5 é não planar.

Para apresentar o próximo grafo de Kuratowski vamos relembrar a definição de grafo bipartido.

Grafo Bipartido

Um grafo $G = (V, E)$ é bipartido quando o seu conjunto de vértices V , puder ser particionado em dois conjuntos V^1 e V^2 tais que toda aresta de G tem uma extremidade em V^1 e outra em V^2 . Um grafo bipartido completo possui uma aresta para cada par de vértices $v_i \in V^1$ e $v_j \in V^2$. Se n_1 é o número de vértices em V^1 e n_2 é o número de vértices em V^2 , o grafo bipartido completo é denotado por K_{n_1, n_2} .

Grafos de Kuratowski (ii): O grafo $K_{3,3}$ é um grafo não planar. É possível demonstrar este teorema usando o mesmo argumento da "**Prova 1**".

Observação: O que estes dois grafos possuem em comum:

1. São grafos regulares.
2. Os dois são não planares.
3. A remoção de uma aresta ou um vértice torna o grafo planar.
4. K_5 é não planar com o menor número de vértices.
5. $K_{3,3}$ é não planar com o menor número de arestas.

Teorema 2.9.1 Num grafo planar conexo vale a relação $f + v - a = 2$, onde f é o número de faces, v o de vértices e a o número de arestas.

Teorema 2.9.2 Num grafo planar conexo G vale que $a \leq 3v - 6$, onde a representa o número de arestas de G e v indica o número de vértices. A igualdade vale se G é maximal planar.

Teorema 2.9.3 Num grafo planar bipartido conexo G vale $a \leq 2 \cdot v - 4$.

Teorema 2.9.4 - (Teorema de Kuratowski) Um grafo é planar se não contiver subgrafo homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$.

Grafo de Visibilidade

Para um melhor entendimento, vamos ilustrar a ideia desse grafo usando um gráfico estatístico de barras conforme a figura 2.4.

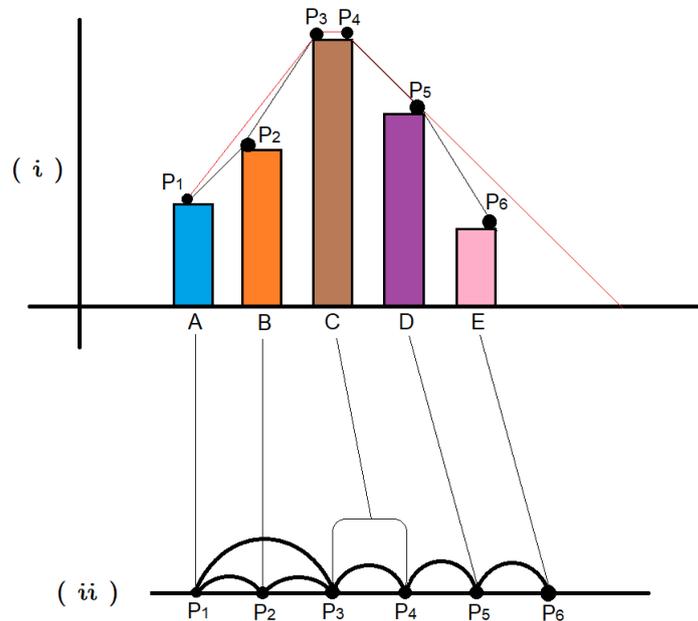


Figura 2.4: Representação do grafo de visibilidade através do gráfico de barras.

Criada pelo autor

Aqui, cada barra P_n , para $n = 1, 2, \dots, 6$ do gráfico da figura 2.4 simboliza um vértice (pontos) e a visibilidade entre duas barras representa a aresta (linha) entre duas barras.

Pela figura 2.4 percebe-se no item (i) que se tivermos um dado ponto P_1 no topo da barra A, que vê o ponto P_2 no topo da barra B, e este vê o ponto P_3 no topo da barra C e também o ponto P_1 vê o ponto P_3 temos um grafo de visibilidade.

Seguindo o que temos no gráfico da Figura 2.4, o ponto P_3 que está no topo da barra C vê o ponto P_4 que também está no topo da barra C, este vê, o ponto P_5 que fica no topo da barra D, e este vê o ponto P_6 no topo da barra E, e portanto esse conjunto de visualização dos pontos gera a composição do grafo de visibilidade conforme item (ii) da Figura 2.4.

Só é possível termos um grafo de visibilidade se, cada ponto puder ver outro ponto sem que haja barras intermediárias que bloqueiem a visão do outro ponto, ou seja, um ponto só terá visibilidade de outro ponto apenas se puder traçar uma reta de visão que não intercepte outra barra.

O grafo de visibilidade é usado para mapear uma série temporal em um grafo, dessa maneira, é capaz de preservar estruturas não-triviais acerca da série que representa.

[13]

Podemos descrever uma técnica de visibilidade usando uma função de mapeamento, Assim: Dados dois pontos pares de valores arbitrários (t_a, y_a) e (t_b, y_b) serão visíveis entre si, e consequentemente serão "nós" conectados no grafo associado, se qualquer outro par (t_c, y_c) no qual $t_a < t_c < t_b$ satisfaz a desigualdade :

$$y_c < y_b + (y_c - y_b) \cdot \frac{t_b - t_c}{t_b - t_a}$$

2.3 Métodos numéricos de zeros de uma função

O método de Newton-Raphson é um dos métodos mais eficientes para a solução numérica de $f(x) = 0$, esse método possui ordem de convergência 2.

Suponha que $f(x)$ tenha uma raiz simples no intervalo $[a, b]$ e que f seja de classe C^2 em $[a, b]$, usando o desenvolvimento de Taylor, podemos escrever

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2!} f''(x'_n)(x - x_n)^2, \quad (2.2)$$

onde x'_n está entre x e x_n . Se α é a solução, então

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2!} f''(x'_n)(\alpha - x_n)^2, \quad (2.3)$$

onde x'_n está entre α e x_n . Supondo que x_n esteja suficientemente próximo de α , podemos desprezar o resto

$$\frac{1}{2!} f''(x'_n)(x - x_n)^2,$$

donde obtemos uma aproximação para α

$$\alpha \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

desde que $f'(x_n) \neq 0$. Obtemos assim o método de Newton-Raphson que nos dá x_{n+1} como uma aproximação para a raiz α por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0. \quad (2.4)$$

Note que o método de Newton-Raphson é um iterativo de passo 1 e que para ser iniciado necessitamos da aproximação inicial x_0 . A função

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2.5)$$

é chamada de função de iteração para o método de Newton-Raphson. Como $\phi'(\alpha) = 0$ e $\phi'(x)$ é contínua, segue que existe uma vizinhança de α em que $|\phi'(x)| \leq k < 1$, onde $0 \leq k < 1$. O que mostra que $\phi(x)$ é uma contração em alguma vizinhança de α . Isto explica por que o método de Newton-Raphson funciona.

Método Prático

Uma maneira prática para usar o método de Newton-Raphson é utilizar uma tabela como mostrado abaixo, tabela 1. Nesse exemplo, determinamos uma aproximação para a solução da equação $4 \cdot \cos(x) - e^x = 0$ localizada em $[0, 1]$, tomamos $x_0 = 0.9$ como aproximação inicial.

Tabela 1

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$ x_{k+1} - x_k $
0	0.9	0.02683676	-5.59291075	-
1	0.904798353	-0.00005693	-5.61663586	0.004798353
2	0.904788217	0	-5.61658576	0.000010136
3	0.9047882179	-	-	-

Interpretação Gráfica

A reta tangente de $f(x)$ no ponto $(x_k, f(x_k))$ cruza o eixo OX no ponto x_{k+1} dado por

$$x_{x+k} = x_k - \frac{f(x)}{f'(x_k)}$$

Isso justifica o outro nome do método de Newton-Raphson: o método das tangentes.

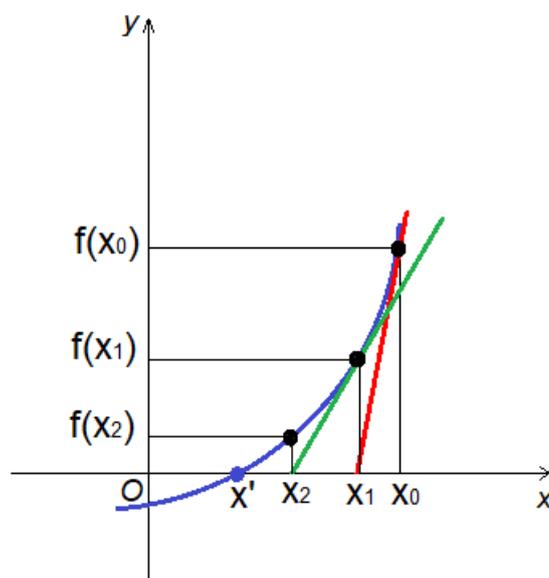


Figura 2.5: Representação gráfica - Método Newton-Raphson

Fonte: Criada pelo autor

Ordem de convergência

Agora mostraremos que a convergência no método de Newton-Raphson é de ordem 2. Suponha que f seja de classe C^2 em (a, b) e que tenha raiz simples $\alpha \in [a, b]$. Usando a expressão em Taylor em torno de algum x_k temos:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2}f''(x'_k)(x - x_k)^2,$$

onde x' é algum ponto entre x_k e α .

Tomando $x = \alpha$ reduzimos a expressão acima

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(\alpha - x_k) + \frac{1}{2}f''(x'_k)(\alpha - x_k)^2,$$

onde x' é algum ponto entre x_k e α . Dividindo toda a expressão por $f'(x_k)$ obtemos

$$0 = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + (\alpha - x_k) + \frac{1}{2}(\alpha - x_k)^2 \frac{f''(x')}{f'(x_k)}$$

Substituindo

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - x_k \text{ por } -x_{k+1}$$

temos:

$$0 = -x_{k+1} + \alpha + \frac{1}{2}(\alpha - x_k)^2 \frac{f''(x')}{f'(x_k)}$$

Reagrupando, fica

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{1}{2}(\alpha - x_k)^2 \frac{f''(x')}{f'(x_k)}$$

Tomando o módulo e fazendo $k \rightarrow \infty$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|^2}{|\alpha - x_k|^2} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{f''(x')}{f'(x)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right| = 0$$

O que mostra que a convergência no método de Newton-Raphson é quadrática.

Capítulo 3

Representação gráfica e cálculo de coordenadas

O principal resultado do trabalho é a determinação da fronteira do diagrama de Voronoi gerado por dois pontos específicos $A = (0, a)$, com $a > 0$, e $B = (0, b)$, com $-b > a$, essa condição existe para que o ponto A sempre seja mais próximo do obstáculo circular que o ponto B , tais que esses pontos são exteriores ao obstáculo circular, ou seja, esses pontos não pertencem ao interior do círculo de raio 1 e centro $C = (c, 0)$, com $0 < c < 1$, conforme ilustrado na Figura 3.1. Vale ressaltar que se o raio não for unitário se faz necessário a construção de figuras semelhantes, ou seja, faz-se uma homotetia, em que transforma o círculo com raio não unitário, em um círculo de raio unitário e calcula-se a fronteira do diagrama de Voronoi, e depois faz-se outra homotetia para as coordenadas iniciais.

A Figura 3.1 auxilia bastante no entendimento da construção da fronteira do diagrama de Voronoi objeto deste trabalho, pois é possível ver os pontos Q_2, Q_3, Q_4 e Q_5 pertencentes a circunferência centrada em C de raio 1, que são usados para o cálculo da fronteira do Diagrama de Voronoi na situação mais complexa.

3.1 Representação gráfica do problema

Na figura abaixo vemos os pontos que estão relacionados para a determinação da fronteira do Diagrama de Voronoi, na situação mais complexa. Têm-se os pontos $A, B, C, D, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$ e E . A e B são os sitios geradores, o ponto C é o centro do obstáculo circular. O ponto Q_2 é tal que CQ_2 é ortogonal a AQ_2 . Vamos tomar E como um ponto da fronteira (mas não precisa necessariamente ser da fronteira). Os pontos Q_3 e Q_4 são, tais que, EQ_3 e EQ_4 são ortogonais a CQ_3 e CQ_4 , respectivamente. Por fim, o ponto Q_5 corresponde ao ponto que BQ_5 é ortogonal Q_5C . O ponto Q_1 será usado no futuro para a determinação da fronteira do lado direito do plano.

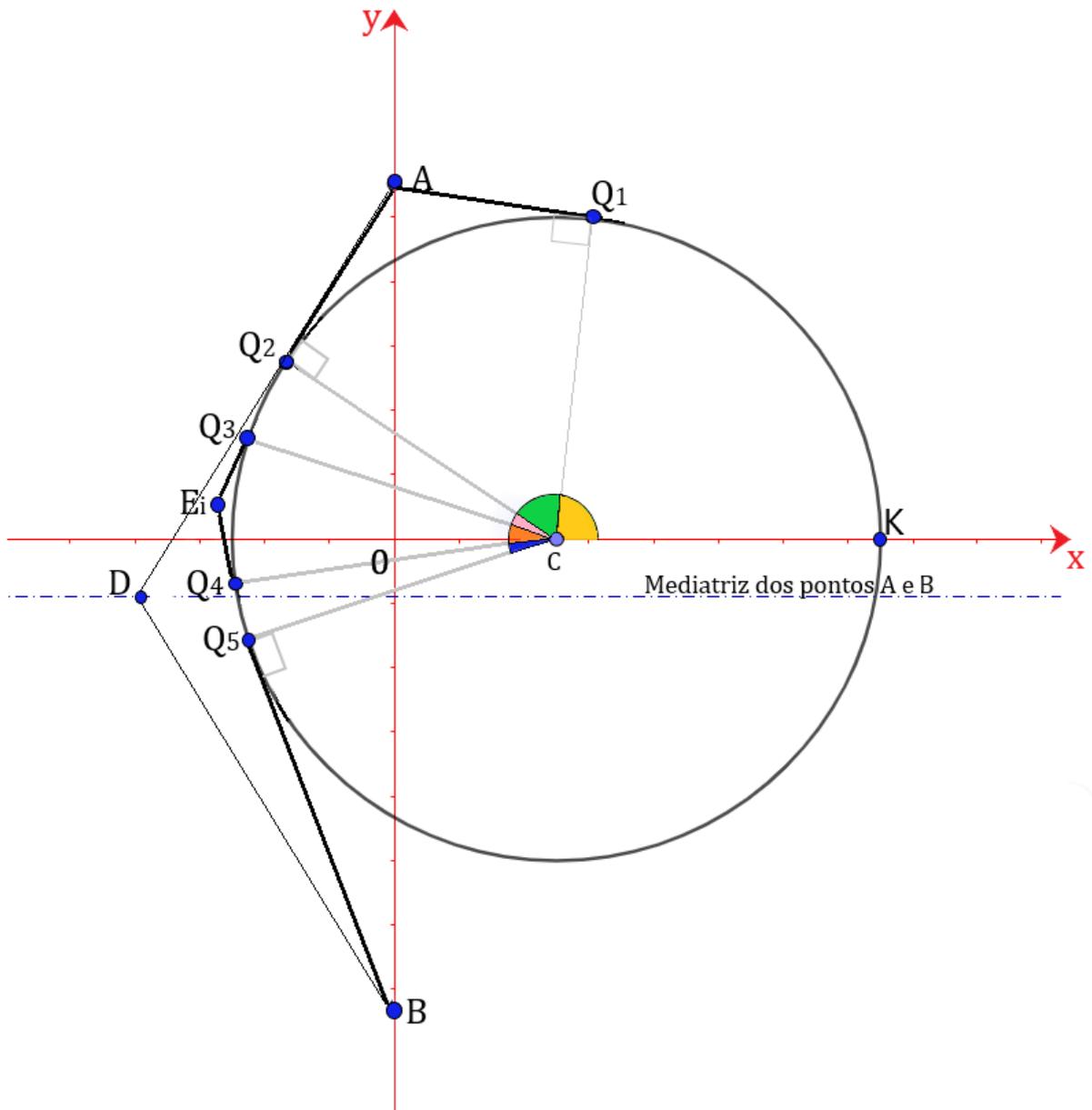


Figura 3.1: Principais pontos para obtenção do diagrama de Voronoi

Fonte: Criada pelo autor

Além dos pontos descritos acima, deve-se destacar os seguintes ângulos:

$$\angle(K\hat{C}Q_1) = \theta_1, \quad \angle(K\hat{C}Q_2) = \theta_2, \quad \angle(K\hat{C}Q_3) = \theta_3,$$

$$\angle(K\hat{C}Q_4) = \theta_4 \text{ e } \angle(K\hat{C}Q_5) = \theta_5.$$

O ponto D pertence a mediatriz dos pontos A e B e pode vê-los sem interferência do obstáculo circular, é representado pelas coordenadas:

$$D = (x_0, y_0), \quad \text{para} \quad y_0 = \frac{a+b}{2}.$$

3.2 Equações das coordenadas dos pontos

Pontos parametrizados e vetorizados ao obstáculo circular:

$$\overrightarrow{Q_1(\theta_1)} = (c + \cos\theta_1, \sin\theta_1); \quad (3.1)$$

$$\overrightarrow{Q_2(\theta_2)} = (c + \cos\theta_2, \sin\theta_2); \quad (3.2)$$

$$\overrightarrow{Q_3(\theta_3)} = (c + \cos\theta_3, \sin\theta_3); \quad (3.3)$$

$$\overrightarrow{Q_4(\theta_4)} = (c + \cos\theta_4, \sin\theta_4). \quad (3.4)$$

Conforme vimos no Capítulo 1, o diagrama de Voronoi pode ser obtido em função da distância euclidiana, ligando dois pontos que pertençam a quaisquer sítios por apenas uma linha reta, caso não haja obstáculo que impeça que estes dois pontos sejam visíveis entre si. Diante de uma situação com obstáculos, deve-se encontrar uma forma de contorná-los.

Na Figura 3.1, temos a ilustração dos possíveis pontos que podem determinar como encontrar a fronteira do diagrama de Voronoi com dois pontos geradores específicos A e B , com um obstáculo circular de raio igual a 1 e centro $(c, 0)$, cuja equação é dada por:

$$(x - c)^2 + (y - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow (x - c)^2 + y^2 = 1.$$

Como o obstáculo é circular, para determinar como contorná-lo precisamos de alguns pontos que são tangentes a circunferência (Q_2, Q_3, Q_4 e Q_5). Se vamos precisar de somente os dois primeiros ou dos quatros vai depender se esse ponto da fronteira que buscamos vê diretamente o ponto B ou não. Vale salientar que neste trabalho só estará em questão a fronteira do Diagrama de Voronoi com abcissas negativas.

3.3 Cálculo das coordenadas do ponto Q_1 e Q_2

Proposição 1 Os valores das coordenadas Q_1 e Q_2 são:

$$Q_1 = \left(c + \frac{-c + |a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a^2 + c^2}, \frac{-c^2 + c|a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a(a^2 + c^2)} + \frac{1}{a} \right)$$

$$Q_2 = \left(c + \frac{-c - |a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a^2 + c^2}, \frac{-c^2 - c|a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a(a^2 + c^2)} + \frac{1}{a} \right)$$

com $a(a^2 + c^2) \neq 0$, $a \neq 0$ e $(a^2 + c^2 - 1) > 0$.

Demonstração:

Vamos determinar as coordenadas dos pontos Q_1 e Q_2 em função das coordenadas do ponto $A = (0, a)$ e do centro $C = (c, 0)$.

Para que os vetores $\overrightarrow{AQ_2}$ e $\overrightarrow{CQ_2}$ sejam ortogonais, o produto interno euclidiano entre estes vetores é igual a 0, $\langle \overrightarrow{AQ_2}, \overrightarrow{CQ_2} \rangle = 0$.

Determinando os vetores, temos:

$$\overrightarrow{AQ_2} = (x_{Q_2} - x_A, y_{Q_2} - y_A) = (c + \cos\theta_2 - 0, \sin\theta_2 - a)$$

$$\overrightarrow{CQ_2} = (x_{Q_2} - x_C, y_{Q_2} - y_C) = (c + \cos\theta_2 - c, \sin\theta_2 - 0) = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$$

Calculando o produto interno, temos:

$$\langle \overrightarrow{AQ_2}, \overrightarrow{CQ_2} \rangle = \langle (c + \cos\theta_2, \sin\theta_2 - a), (\cos\theta_2, \sin\theta_2) \rangle = 0.$$

$$(c + \cos\theta_2) \cdot (\cos\theta_2) + (\sin\theta_2 - a) \cdot (\sin\theta_2) = 0$$

$$c \cdot \cos\theta_2 + \cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 - a \cdot \sin\theta_2 = 0$$

$$\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2 + c \cdot \cos\theta_2 - a \cdot \sin\theta_2 = 0$$

$$1 + c \cdot \cos\theta_2 - a \cdot \sin\theta_2 = 0$$

$$a \cdot \sin\theta_2 = c \cdot \cos\theta_2 + 1$$

$$\sin\theta_2 = \frac{c \cdot \cos\theta_2 + 1}{a}, a \neq 0 \quad (3.5)$$

Utilizando o resultado descrito na equação (3.5) e a identidade trigonométrica $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, podemos escrever:

$$\left(\frac{c \cdot \cos\theta_2 + 1}{a} \right)^2 + \cos^2\theta_2 = 1$$

$$\frac{(c \cdot \cos\theta_2 + 1)^2}{a^2} + \cos^2\theta_2 = 1$$

$$\frac{c^2 \cdot \cos^2\theta_2 + 2c \cdot \cos\theta_2 + 1}{a^2} + \cos^2\theta_2 = 1$$

$$c^2 \cdot \cos^2\theta_2 + 2c \cdot \cos\theta_2 + 1 + a^2 \cdot \cos^2\theta_2 = a^2$$

$$c^2 \cdot \cos^2\theta_2 + 2c \cdot \cos\theta_2 + a^2 \cdot \cos^2\theta_2 + 1 - a^2 = 0$$

$$c^2 \cdot \cos^2\theta_2 + 2c \cdot \cos\theta_2 + a^2 \cdot \cos^2\theta_2 + (1 - a^2) = 0 \quad (3.6)$$

Podemos observar que a equação (3.6) é uma equação quadrática com variável $\cos\theta_2$. Sendo assim, podemos encontrar o valor de $\cos\theta_2$ utilizando para isto a fórmula de Bhaskara.

$$(c^2 + a^2) \cdot \cos^2\theta_2 + 2c \cdot \cos\theta_2 + (1 - a^2) = 0$$

$$\cos\theta_2 = \frac{-2c \pm \sqrt{(2c)^2 - 4(c^2 + a^2)(1 - a^2)}}{2(c^2 + a^2)}$$

$$\begin{aligned}\cos\theta_2 &= \frac{-(2c) \pm \sqrt{4c^2 - 4(c^2 - a^2c^2 + a^2 - a^4)}}{2(c^2 + a^2)} \\ \cos\theta_2 &= \frac{-(2c) \pm \sqrt{4(c^2 - c^2 + a^2c^2 - a^2 + a^4)}}{2(c^2 + a^2)} \\ \cos\theta_2 &= \frac{-(2c) \pm 2\sqrt{a^2c^2 - a^2 + a^4}}{2(c^2 + a^2)} \\ \cos\theta_2 &= \frac{-c \pm \sqrt{a^2c^2 - a^2 + a^4}}{c^2 + a^2} \\ \cos\theta_2 &= \frac{-c \pm \sqrt{a^2(c^2 - 1 + a^2)}}{c^2 + a^2} \\ \cos\theta_2 &= \frac{-c \pm |a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a^2 + c^2}\end{aligned}\tag{3.7}$$

Uma vez tendo encontrado o valor de $\cos\theta_2$, podemos determinar a equação de $\sin\theta_2$ em função das coordenadas dos pontos A e C . Temos que

$$\sin\theta_2 = \frac{c \cdot \cos\theta_2 + 1}{a}$$

logo,

$$\sin\theta_2 = \frac{c}{a} \cdot \cos\theta_2 + \frac{1}{a}.$$

Substituindo $\cos\theta_2$ pela sua equação apresentada em [3.7](#), temos:

$$\sin\theta_2 = \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{-c \pm |a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a^2 + c^2} \right) + \frac{1}{a}.$$

Multiplicando as frações, encontramos:

$$\sin\theta_2 = \frac{-c^2 \pm c|a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a(a^2 + c^2)} + \frac{1}{a},\tag{3.8}$$

De acordo com as equações [3.7](#) e [3.8](#) e substituindo elas nas equações [3.1](#) e [3.10](#) encontramos as coordenadas do ponto Q_1 e Q_2 em função das coordenadas dos pontos A e C , que é dado por:

$$Q_1 = \left(c + \frac{-c + |a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a^2 + c^2}, \frac{-c^2 + c|a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a(a^2 + c^2)} + \frac{1}{a} \right)\tag{3.9}$$

$$Q_2 = \left(c + \frac{-c - |a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a^2 + c^2}, \frac{-c^2 - c|a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a(a^2 + c^2)} + \frac{1}{a} \right)\tag{3.10}$$

com $a(a^2 + c^2) \neq 0$, $a \neq 0$ e $(a^2 + c^2 - 1) > 0$.

3.4 Cálculo das coordenadas do ponto D

Nessa seção, determinamos as coordenadas do ponto D , último ponto com abscissa negativa que pertence a mediatriz entre A e B e que vê A e B diretamente.

Proposição 2 *As coordenadas do ponto D são:*

$$D = \left(\frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)x_{Q_2}}{a - y_{Q_2}}, \quad \frac{a+b}{2} \right)$$

Demonstração:

Dados os pontos $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$, temos o ponto D pertencente a mediatriz entre esses pontos e de imediato obtemos as coordenadas de D , que são $\left(x_0, \frac{a+b}{2}\right)$, como podemos observar a ordenada de D está em função das coordenadas de A e B , como de fato deveria ser, mas a abscissa de D , não está definida, para encontrar o valor da abscissa do ponto D , vamos fazer uso do modelo matemático que determina a equação da reta entre os pontos A e Q_2 , pois o ponto D pertence a essa reta, conforme podemos ver na figura [3.1](#) temos a ordenada desse ponto que é dada no momento que determinamos a mediatriz entre os pontos A e B .

$$(y_a - y_{Q_2})x + (x_{Q_2} - x_a)y + x_a y_{Q_2} - x_{Q_2} y_a = 0 \quad (3.11)$$

Substituindo as coordenadas dos pontos A , Q_2 e a ordenada do ponto D na equação [3.11](#) teremos então a abscissa de D . Assim:

$$A = (0, a), \quad Q_2 = (x_{Q_2}, y_{Q_2}) \quad e \quad D = \left(x_0, \frac{a+b}{2}\right)$$

temos:

$$(a - y_{Q_2})x_0 + (x_{Q_2} - 0)y_0 + 0 \cdot y_{Q_2} - x_{Q_2} \cdot a = 0$$

$$ax_0 - y_{Q_2}x_0 + x_{Q_2}y_0 - x_{Q_2}a = 0$$

$$(a - y_{Q_2})x_0 = x_{Q_2}(a - y_0) \quad (a - y_{Q_2})x_0 = ax_{Q_2} - y_0x_{Q_2}$$

Agora, vamos substituir a ordenada do ponto D , para determinarmos a abscissa do mesmo ponto. Assim:

$$(a - y_{Q_2})x_0 = ax_{Q_2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)x_{Q_2}$$

$$(a - y_{Q_2})x_0 = ax_{Q_2} - \left(\frac{a}{2}\right)x_{Q_2} - \left(\frac{b}{2}\right)x_{Q_2}$$

$$(a - y_{Q_2})x_0 = \left(\frac{a}{2}\right)x_{Q_2} - \left(\frac{b}{2}\right)x_{Q_2}$$

$$x_0 = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)x_{Q_2} - \left(\frac{b}{2}\right)x_{Q_2}}{(a - y_{Q_2})}$$

logo, o valor de x_0 é:

$$x_0 = \frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)x_{Q_2}}{a - y_{Q_2}}$$

Portanto, temos as coordenadas do ponto D.

$$D = \left(\frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)x_{Q_2}}{a - y_{Q_2}}, \quad \frac{a+b}{2} \right) \quad (3.12)$$

3.5 Cálculo das coordenadas dos pontos Q_3 e Q_4

Nessa situação estamos considerando um ponto E que não vê diretamente o ponto B. Além disso, $\overrightarrow{Q_3E}$ e $\overrightarrow{Q_4E}$ são ortogonais a $\overrightarrow{Q_3C}$ e $\overrightarrow{Q_4C}$ respectivamente.

Proposição 3 As coordenadas dos pontos Q_3 e Q_4 são:

$$Q_3 = \left(c + \frac{(x-c) - |y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{(c-x)^2 + y^2}, \quad \frac{y^2 + (x-c)|y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{y((c-x)^2 + y^2)} \right)$$

$$Q_4 = \left(c + \frac{(x-c) + |y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{(c-x)^2 + y^2}, \quad \frac{y^2 - (x-c)|y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{y((c-x)^2 + y^2)} \right)$$

Para $y((c-x)^2 + y^2) \neq 0$ e $y^2 + (c-x)^2 - 1 \geq 0$.

Demonstração:

Vamos determinar as coordenadas do ponto Q_3 seguindo a Proposição ???. As coordenadas do ponto Q_3 serão dadas em função dos pontos C e E. Temos:

$$C = (c, 0), E = (x, y), Q_3 = (c + \cos\theta_3, \sin\theta_3). \quad (3.13)$$

Analisando a Figura 3.1, podemos observar que os vetores $\overrightarrow{CQ_3}$ e $\overrightarrow{EQ_3}$ são ortogonais, então vale a relação $\langle \overrightarrow{CQ_3}, \overrightarrow{EQ_3} \rangle = 0$. Vamos agora descrever as coordenadas de $\overrightarrow{CQ_3}$.

$$\overrightarrow{CQ_3} = (x_{Q_3} - x_C, y_{Q_3} - y_C)$$

$$\overrightarrow{CQ_3} = (c + \cos\theta_3 - c, \sin\theta_3 - 0);$$

$$\overrightarrow{CQ_3} = (\cos\theta_3, \sin\theta_3).$$

As coordenadas de $\overrightarrow{EQ_3}$ são:

$$\overrightarrow{EQ_3} = (x_{Q_3} - x_E, y_{Q_3} - y_E) = (c + \cos\theta_3 - x, \sin\theta_3 - y).$$

Agora, usando o fato de que os vetores $\overrightarrow{CQ_3}$ e $\overrightarrow{EQ_3}$ são ortogonais, vamos determinar as coordenadas do ponto Q_3 .

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{CQ_3}, \overrightarrow{EQ_3} \rangle &= 0 \\ \langle (\cos\theta_3, \sin\theta_3), (c + \cos\theta_3 - x, \sin\theta_3 - y) \rangle &= 0 \\ (\cos\theta_3) \cdot (c + \cos\theta_3 - x) + (\sin\theta_3) \cdot (\sin\theta_3 - y) &= 0 \\ c \cdot \cos\theta_3 + \cos^2\theta_3 - x \cdot \cos\theta_3 + \sin^2\theta_3 - y \cdot \sin\theta_3 &= 0 \\ \underbrace{\sin^2\theta_3 + \cos^2\theta_3}_1 + c \cdot \cos\theta_3 - x \cdot \cos\theta_3 - y \cdot \sin\theta_3 &= 0 \\ 1 + c \cdot \cos\theta_3 - x \cdot \cos\theta_3 - y \cdot \sin\theta_3 &= 0 \\ 1 + (c - x) \cdot \cos\theta_3 - y \cdot \sin\theta_3 &= 0 \\ y \cdot \sin\theta_3 &= (c - x) \cdot \cos\theta_3 + 1 \\ \sin\theta_3 &= \frac{(c - x) \cdot \cos\theta_3 + 1}{y} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Vamos usar a identidade $\sin^2\theta_3 + \cos^2\theta_3 = 1$ para encontrarmos o valor de $\cos\theta_3$ em função das coordenadas dos pontos C e E .

$$\begin{aligned} \left(\frac{(c - x) \cdot \cos\theta_3 + 1}{y} \right)^2 + \cos^2\theta_3 &= 1 \\ \frac{((c - x) \cdot \cos\theta_3 + 1)^2}{y^2} + \cos^2\theta_3 &= 1 \\ \frac{(c - x)^2 \cdot \cos^2\theta_3 + 2(c - x) \cdot \cos\theta_3 + 1}{y^2} + \cos^2\theta_3 &= 1 \\ (c - x)^2 \cdot \cos^2\theta_3 + 2(c - x) \cdot \cos\theta_3 + 1 + y^2 \cdot \cos^2\theta_3 &= y^2 \\ (c - x)^2 \cdot \cos^2\theta_3 + 2(c - x) \cdot \cos\theta_3 + 1 + y^2 \cdot \cos^2\theta_3 - y^2 &= 0 \\ [(c - x)^2 + y^2] \cdot \cos^2\theta_3 + 2(c - x) \cdot \cos\theta_3 + (1 - y^2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Podemos observar que a equação (3.15) é uma equação quadrática com variável $\cos\theta_3$. Para resolvermos esta equação utilizaremos a fórmula de Bhascara.

$$\begin{aligned} \cos\theta_3 &= \frac{-(2(c - x)) \pm \sqrt{(2(c - x))^2 - 4[(c - x)^2 + y^2] \cdot (1 - y^2)}}{2[(c - x)^2 + y^2]} \\ \cos\theta_3 &= \frac{-(2(c - x)) \pm \sqrt{4(c - x)^2 - 4[(c - x)^2 + y^2] \cdot (1 - y^2)}}{2[(c - x)^2 + y^2]} \\ \cos\theta_3 &= \frac{-(2(c - x)) \pm \sqrt{4[(c - x)^2 - ((c - x)^2 + y^2) \cdot (1 - y^2)]}}{2[(c - x)^2 + y^2]} \\ \cos\theta_3 &= \frac{2(x - c) \pm 2\sqrt{(c - x)^2 - ((c - x)^2 + y^2) \cdot (1 - y^2)}}{2[(c - x)^2 + y^2]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\theta_3 &= \frac{(x-c) \pm \sqrt{(c-x)^2 - (c-x)^2 + y^2(c-x)^2 - y^2 + y^4}}{(c-x)^2 + y^2} \\
\cos\theta_3 &= \frac{(x-c) \pm \sqrt{y^4 + y^2(c-x)^2 - y^2}}{(c-x)^2 + y^2} \\
\cos\theta_3 &= \frac{(x-c) \pm \sqrt{y^2(y^2 + (c-x)^2 - 1)}}{(c-x)^2 + y^2} \\
\cos\theta_3 &= \frac{(x-c) \pm |y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{(c-x)^2 + y^2} \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Agora que encontramos a equação do $\cos\theta_3$, vamos substituir (3.15) em (3.14) para encontrar a equação para o $\sin\theta_3$. Por (3.14), temos que:

$$\begin{aligned}
\sin\theta_3 &= \frac{(c-x) \cdot \cos\theta_3 + 1}{y} \\
\sin\theta_3 &= \frac{(c-x)}{y} \cdot \cos\theta_3 + \frac{1}{y} \\
\sin\theta_3 &= \frac{(c-x)}{y} \cdot \left[\frac{(x-c) \pm |y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{(c-x)^2 + y^2} \right] + \frac{1}{y} \\
\sin\theta_3 &= \frac{-(x-c)}{y} \cdot \left[\frac{(x-c) \pm |y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{(c-x)^2 + y^2} \right] + \frac{1}{y} \\
\sin\theta_3 &= \frac{-(x-c)^2 \mp (x-c)|y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{y((c-x)^2 + y^2)} + \frac{1}{y} \\
\sin\theta_3 &= \frac{-(x-c)^2 \mp (x-c)|y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1} + (x-c)^2 + y^2}{y((c-x)^2 + y^2)} \\
\sin\theta_3 &= \frac{y^2 \mp (x-c)|y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{y((c-x)^2 + y^2)} \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Os pontos Q_3 e Q_4 têm abscissas negativas, mas Q_3 tem a menor delas e de acordo com as equações (3.16) e (3.17) e substituindo elas em (3.18) e (3.19) encontramos as coordenadas do ponto Q_3 e Q_4 em função das coordenadas do ponto E e do centro C , que é dado por:

$$Q_3 = \left(c + \frac{(x-c) - |y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{(c-x)^2 + y^2}, \frac{y^2 + (x-c)|y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{y((c-x)^2 + y^2)} \right) \tag{3.18}$$

$$Q_4 = \left(c + \frac{(x-c) + |y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{(c-x)^2 + y^2}, \frac{y^2 - (x-c)|y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{y((c-x)^2 + y^2)} \right) \tag{3.19}$$

Para $y((c-x)^2 + y^2) \neq 0$ e $y^2 + (c-x)^2 - 1 \geq 0$.

3.6 Cálculo das coordenadas dos pontos Q_5 e Q_6

Nessa seção calculamos as coordenadas dos pontos Q_5 e Q_6 pertencentes ao obstáculo circular tal que BQ_5 é ortogonal a CQ_5 e BQ_6 é ortogonal a CQ_6 . O ponto Q_6 tal como no caso de Q_1 não será usado neste trabalho, pois está do lado das abscissas positivas.

Proposição 4 *Os valores das coordenadas de Q_5 e Q_6 são:*

$$Q_5 = \left(c + \frac{-c - |b|\sqrt{b^2 + c^2 - 1}}{b^2 + c^2}, \frac{-c^2 - c|b|\sqrt{b^2 + c^2 - 1}}{b(b^2 + c^2)} + \frac{1}{b} \right) \quad (3.20)$$

$$Q_6 = \left(c + \frac{-c + |b|\sqrt{b^2 + c^2 - 1}}{b^2 + c^2}, \frac{-c^2 + c|b|\sqrt{b^2 + c^2 - 1}}{b(b^2 + c^2)} + \frac{1}{b} \right) \quad (3.21)$$

com $b(b^2 + c^2) \neq 0$, $b \neq 0$ e $(b^2 + c^2 - 1) > 0$.

Demonstração:

A demonstração é similar a que determinou as coordenadas dos pontos Q_1 e Q_2 , tendo apenas que fazer a troca da coordenada a pela coordenada b , pois as contas seguem o mesmo rito.

Capítulo 4

Cálculo das distâncias entre os pontos

Neste capítulo, o objetivo é determinar as distâncias entre os pontos especificados no capítulo anterior que estabelecem a fronteira do Diagrama de Voronoi. Essas distâncias vão definir as distâncias, entre um ponto P qualquer com relação a A e B, condicionadas a existência do obstáculo circular.

4.1 Cálculo da distância euclidiana entre os pontos A e Q_2

Proposição 5 A distância entre o ponto A e o ponto Q_2 é:

$$d(A, Q_2) = \sqrt{a^2 + c^2 - 1}$$

Demonstração:

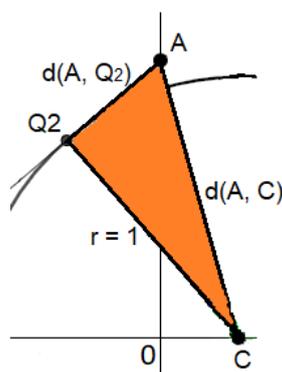


Figura 4.1: Distância entre o ponto A e Q_2

Fonte: Criada pelo autor

Vamos determinar a equação da distância euclidiana entre os pontos A e Q_2 , para esse feito vamos utilizar o teorema de pitágoras, vejamos a figura [4.1](#), temos as seguintes informações:

$$A = (0, a), C = (c, 0) \text{ e } r = 1. \tag{4.1}$$

Para determinarmos a distância $d(A, Q_2)$ devemos primeiro achar a distância $d(A, C)$, assim:

$$d(A, C) = \sqrt{(x_c - x_A)^2 + (y_c - y_A)^2}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(c - 0)^2 + (0 - a)^2}$$

$$d(A, C) = \sqrt{a^2 + c^2}$$

Agora que temos a distância $d(A, C)$, usando novamente o teorema de Pitágoras, podemos determinar a distância $d(A, Q_2)$, assim:

$$d^2(A, C) = d^2(A, Q_2) + r^2$$

$$d^2(A, Q_2) = d^2(A, C) - r^2$$

$$d^2(A, Q_2) = a^2 + c^2 - 1$$

$$d(A, Q_2) = \sqrt{a^2 + c^2 - 1}$$

Portanto, temos agora a distância $d(A, Q_2)$ igua a $\sqrt{a^2 + c^2 - 1}$, Para $a^2 + c^2 - 1 > 0$.

4.2 Cálculo da distância geodésica entre os pontos Q_2 e Q_3

A distância geodésica entre Q_2 e Q_3 é o comprimento de arco entre esses dois pontos. Ou seja, tal distância corresponde a diferença entre $\theta_3 - \theta_2$.

Iniciamos essa seção definindo algumas funções que serão usadas na sequência (essas funções simplificam as expressões das distâncias e de suas derivadas):

$$\phi = \frac{1}{a} + \frac{-c^2 - c|a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a(a^2 + c^2)} = \frac{1}{a} + \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{-c - |a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a^2 + c^2} \right) = \frac{1}{a} + \frac{c}{a} \cdot \lambda. \quad (4.2)$$

$$\lambda = \frac{-c - |a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a^2 + c^2} \quad (4.3)$$

$$M_0 = y \quad (4.4)$$

$$M_1 = y^2 \quad (4.5)$$

$$M_2 = x - c \quad (4.6)$$

$$M_3 = c - x = -(x - c) = -M_2 \quad (4.7)$$

$$M_4 = |y| \quad (4.8)$$

$$M_5 = y^2 + (x - c)^2 - 1 = M_1 + M_2^2 - 1 \quad (4.9)$$

$$M_6 = (x - c) - |y| \cdot \sqrt{y^2 + (x - c)^2 - 1} = M_2 - M_4 \cdot \sqrt{M_5} \quad (4.10)$$

$$M_7 = (c - x)^2 + y^2 = M_1 + M_2^2 \quad (4.11)$$

$$M_8 = y \cdot ((c - x)^2 + y^2) = M_0 \cdot (M_1 + M_2^2) = M_0 \cdot M_7 \quad (4.12)$$

$$M_9 = y^2 + (x - c) \cdot |y| \cdot \sqrt{y^2 + (x - c)^2 - 1} = M_1 + M_2 \cdot M_4 \cdot \sqrt{M_5} \quad (4.13)$$

$$M_{10} = (x - c) + |y| \cdot \sqrt{y^2 + (x - c)^2 - 1} = M_2 + M_4 \cdot \sqrt{M_5} \quad (4.14)$$

$$M_{11} = M_1 - M_2 \cdot M_4 \cdot \sqrt{M_5} \quad (4.15)$$

Proposição 6 A distância entre os pontos Q_2 e Q_3 é determinada pelo comprimento do arco $\widehat{Q_2Q_3}$ que é igual a:

$$\widehat{Q_2Q_3} = \theta_3 - \theta_2 = \cos^{-1} \left(\left(\frac{M_6}{M_7} \right) (\lambda) + \left(\frac{M_9}{M_8} \right) (\phi) \right)$$

Demonstração:

Como podemos ver na figura 3.1 o comprimento do arco $\widehat{Q_2Q_3}$ está à esquerda da abscissa do plano cartesiano, por esse motivo, vamos pegar as coordenadas mais a esquerda do seno e do cosseno de θ_2 e θ_3 , portanto esse comprimento é determinado pela transformação trigonométrica:

$$\cos(\theta_3 - \theta_2) = \cos\theta_3 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_3 \cdot \sin\theta_2 \quad (4.16)$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \sin\theta_2 = \frac{1}{a} + \frac{-c^2 - c|a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a(a^2 + c^2)} \\ \cos\theta_2 = \frac{-c - |a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a^2 + c^2} \end{cases}$$

e

$$\theta_3 = \begin{cases} \sin\theta_3 = \frac{y^2 + (x - c)|y|\sqrt{y^2 + (c - x)^2 - 1}}{y((c - x)^2 + y^2)} \\ \cos\theta_3 = \frac{(x - c) - |y|\sqrt{y^2 + (c - x)^2 - 1}}{(c - x)^2 + y^2} \end{cases}$$

Para facilitar o entendimento das contas vamos definir algumas funções em y para as expressões dos ângulos θ_2 e θ_3 .

Podemos representar os senos e cossenos de θ_2 e θ_3 , através das funções M_i , com $i = 0, 1, 2, \dots, 11$. Assim:

$$\theta_2 = \begin{cases} \sin\theta_2 = \phi \\ \cos\theta_2 = \lambda \end{cases}$$

e

$$\theta_3 = \begin{cases} \sin\theta_3 = \frac{M_9}{M_8} \\ \cos\theta_3 = \frac{M_6}{M_7} \end{cases}$$

Fazendo as devidas substituição na equação 4.16 temos:

$$d(Q_2, Q_3) = (\theta_3 - \theta_2) = \cos^{-1} \left(\left(\frac{M_6}{M_7} \right) (\lambda) + \left(\frac{M_9}{M_8} \right) (\phi) \right) \quad (4.17)$$

4.3 Cálculo da distância entre os pontos Q_3 e E

Como E vê o ponto Q_3 essa distância é a euclidiana.

Proposição 7 A distância entre os pontos Q_3 e E é determinada por:

$$\|\overrightarrow{EQ_3}\| = \sqrt{\left[\frac{M_6}{M_7} + c - x \right]^2 + \left[\frac{M_9}{M_8} - y \right]^2}$$

Demonstração:

Dados das coordenadas dos pontos Q_3 e E :

$$Q_3 = \left(c + \frac{(x-c) - |y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{(c-x)^2 + y^2}, \frac{y^2 + (x-c)|y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{y((c-x)^2 + y^2)} \right)$$

Vamos abordar as coordenadas do ponto Q_3 em relação as funções M_i , com $i = 0, 1, \dots, 11$. Assim:

$$Q_3 = \left(c + \frac{M_6}{M_7}, \frac{M_9}{M_8} \right)$$

e

$$E = (x, y)$$

A norma do vetor $\overrightarrow{EQ_3}$ é representada pela distância euclidiana entre os pontos Q_3 e E . Assim:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{EQ_3}\| &= \sqrt{\left[\left(c + \frac{M_6}{M_7} \right) - x \right]^2 + \left[\left(\frac{M_9}{M_8} \right) - y \right]^2} \\ \|\overrightarrow{EQ_3}\| &= \sqrt{\left[\frac{M_6}{M_7} + c - x \right]^2 + \left[\frac{M_9}{M_8} - y \right]^2} \end{aligned}$$

Portanto, temos a distância entre os pontos Q_3 e E determinada por $\|\overrightarrow{EQ_3}\|$.

4.4 Cálculo da distância entre os pontos E e Q_4

Proposição 8 A distância entre os pontos E e Q_4 será determinada pela distância euclidiana entre esses pontos. Assim:

$$d(E, Q_4) = \sqrt{\left[x - c - \frac{M_{10}}{M_7} \right]^2 + \left[y - \frac{M_{11}}{M_8} \right]^2}$$

Demonstração:

Dados das coordenadas dos pontos:

$$E = (x, y)$$

e

$$Q_4 = \left(c + \frac{(x-c) + |y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{(c-x)^2 + y^2}, \frac{y^2 + (x-c)|y|\sqrt{y^2 + (c-x)^2 - 1}}{y((c-x)^2 + y^2)} \right)$$

Vamos abordar as coordenadas do ponto Q_4 em relação as funções M_i , com $i = 0, 1, \dots, 11$. Assim:

$$Q_4 = \left(c + \frac{M_{10}}{M_7}, \frac{M_{11}}{M_8} \right)$$

Agora, podemos determinar a distância entre os pontos apresentados nessa seção, assim:

$$d(E, Q_4) = \sqrt{\left[x - \left(c + \frac{M_{10}}{M_7} \right) \right]^2 + \left[y - \frac{M_{11}}{M_8} \right]^2}$$

Logo, temos:

$$d(E, Q_4) = \sqrt{\left[x - c - \frac{M_{10}}{M_7} \right]^2 + \left[y - \frac{M_{11}}{M_8} \right]^2}$$

Atenção:

Sabendo-se que as coordenadas do ponto $D = (x_0, y_0)$ são:

$$x_0 = \frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)x_{Q_2}}{a - y_{Q_2}} \quad e \quad y_0 = \frac{a+b}{2}$$

Os pontos E de interesse são da forma $P_i = (x_i, y)$ com x_i dado por:

$$x_i = x_0 + ih \tag{4.18}$$

para um i fixo e sendo h o tamanho do passo que avançaremos na abscissa do plano cartesiano onde encontra-se o diagrama de Voronoi. Portanto, sempre saberemos a abscissa de P_i e usando um método numérico que calcula zeros de funções, computaremos o valor da ordenada y do ponto P_i .

Então, para usarmos as distâncias $d(Q_3, P_i)$ e $d(P_i, Q_4)$ vamos adotar as coordenadas do ponto P_i . Assim:

$$d(Q_3, P_i) = \|\overrightarrow{P_i Q_3}\| = \sqrt{\left[\frac{M_6}{M_7} + c - x_i \right]^2 + \left[\frac{M_9}{M_8} - y \right]^2} = \sqrt{\left[\frac{M_6}{M_7} + c - (x_0 + i * h) \right]^2 + \left[\frac{M_9}{M_8} - y \right]^2}$$

$$d(P_i, Q_4) = \sqrt{\left[x_i - c - \frac{M_{10}}{M_7} \right]^2 + \left[y - \frac{M_{11}}{M_8} \right]^2} = \sqrt{\left[(x_0 + i * h) - c - \frac{M_{10}}{M_7} \right]^2 + \left[y - \frac{M_{11}}{M_8} \right]^2}$$

4.5 Cálculo da distância do ponto Q_4 ao ponto Q_5

Proposição 9 A distância entre os pontos Q_4 e Q_5 é determinada pelo comprimento do arco $\widehat{Q_4 Q_5}$ que é igual a:

$$\widehat{Q_4 Q_5} = \theta_5 - \theta_4 = \cos^{-1} \left(\left(\frac{M_{10}}{M_7} \right) (\lambda_1) + \left(\frac{M_{11}}{M_8} \right) (\phi_1) \right)$$

Demonstração:

$$\lambda_1 = \cos(\theta_5) = \frac{-c - |b|\sqrt{b^2 + c^2 - 1}}{b^2 + c^2}$$

$$\phi_1 = \sin(\theta_5) = \frac{-c^2 - c|b|\sqrt{b^2 + c^2 - 1}}{b(b^2 + c^2)} + \frac{1}{b}$$

$$\cos(\theta_4) = \frac{M_{10}}{M_7}$$

$$\sin(\theta_4) = \frac{M_{11}}{M_8}$$

4.6 Cálculo da distância do ponto Q_5 ao ponto B

Essa distância só é utilizada se o ponto P_i não vê B diretamente. Essa distância é um valor constante e dado por:

Proposição 10 *A distância entre os pontos Q_5 e B segue o mesmo modelo que usamos para determinar a distância $d(A, Q_2)$, ou seja, iremos trabalhar com a definição da distância euclidiana para encontrar a distância entre dois pontos. Assim:*

$$d(Q_5, B) = \sqrt{b^2 + c^2 - 1}$$

Demonstração:

Mesmo raciocínio da distância de Q_2 a A .

Capítulo 5

Função $D(P_i)$ e sua derivada

5.1 Definição da função $D(P_i)$, diferença das distâncias geodésicas $d(P, A)$ e $d(P, B)$

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um algoritmo para o cálculo computacional da fronteira do diagrama de Voronoi com dois sítios fixos e um obstáculo circular unitário centrado no ponto $C = (c, 0)$. Duas situações são apresentadas para os pontos P pertencentes à região interna do triângulo DAB que não possui interseção com o obstáculo.

Só existem duas situações a se considerar: ou o ponto P vê diretamente o ponto B ou não o vê. De fato, nós vamos olhar para os pontos $P_i(y) = (x_i, y)$ definidos no capítulo anterior ($x_i = x_0 + ih$), com i variando de 1 até um número fixo.

Primeira Situação:

O ponto P_i não vê diretamente o ponto A , a geodésica que parte de P_i para A , atinge um ponto Q_3 pertencente ao círculo, em seguida anda sobre o círculo até o ponto Q_2 e em linha reta segue até o ponto A . Porém, o ponto P_i vê o ponto B diretamente sem intermédio de qualquer outro ponto. Assim podemos determinar o seguinte modelo matemático para $D(P_i)$. Assim:

$$D(P_i) = d(A, Q_2) + d(Q_2, Q_3) + d(Q_3, P_i) - d(P_i, B) \quad (5.1)$$

Usando $D(P_i)$ que defini-se como sendo as diferenças entre as distâncias geodésicas entre os pontos A até P_i e os pontos B e P_i , conforme podemos ver na figura [5.1](#) que dá uma ideia inicial de onde partirá a curva que representa a fronteira do diagrama de Voronoi.

Segunda Situação:

O ponto P_i vê o ponto A passando pelos pontos Q_3 e Q_2 , como na situação anterior, e vê o ponto B passando por Q_4 e caminhando sobre o círculo até o ponto Q_5 . Em seguida, segue em linha reta até B . Portanto, podemos determinar o seguinte modelo

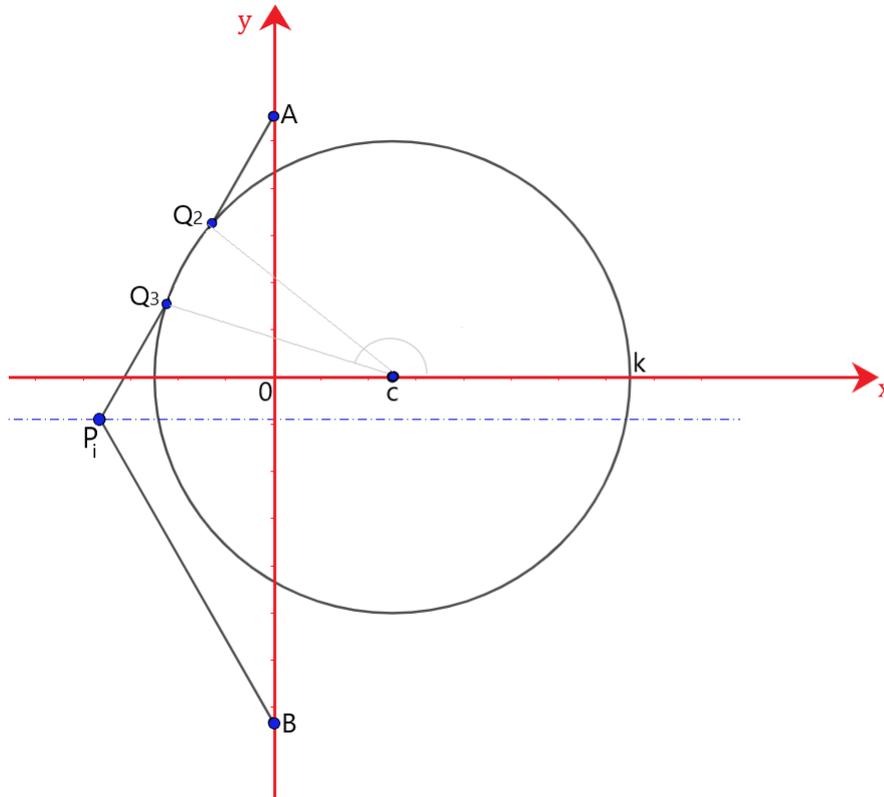


Figura 5.1: Distâncias geodésicas: $d(A, P_i) = d(P_i, B)$

Fonte: Criada pelo autor

matemático para $D(P_i)$. Assim:

$$D(P_i)(y) = d(A, Q_2)(y) + d(Q_2, Q_3)(y) + d(Q_3, P_i)(y) - [d(P_i, Q_4)(y) + d(Q_4, Q_5)(y) + d(Q_5, B)(y)] \quad (5.2)$$

Demonstração:

Diante dos dados colhidos do problema, temos $a > 0$ e $-b > a$. Então, queremos encontrar os pontos $E_i = (x_i, y_i)$, tais que, a distância, $d(E_i, A) = d(E_i, B)$ (distância geodésica). Para achar esse ponto E_i vamos partir de um ponto P_i como definido anteriormente e aplicando o método de Newton-Haphson encontrarmos o valor y_i tal que $D(E_i) = 0$. Mas tudo parte da função $D(P_i) = D((x_i, y))$ a condição inicial para o y usando Newton-Raphson é o valor do zero anterior y_{i-1} . O índice i varia entre 1 até 100 (por exemplo) e sendo $h > 0$ pequeno, que corresponde ao passo em que andamos no eixo das abcissas. O valor x_0 é a abscissa do ponto D. Substituindo essas informações na equação [4.18](#).

Sabendo-se que as distâncias das situações 1 e 2, são todas funções de variável em y , então vamos escrevê-las, assim:

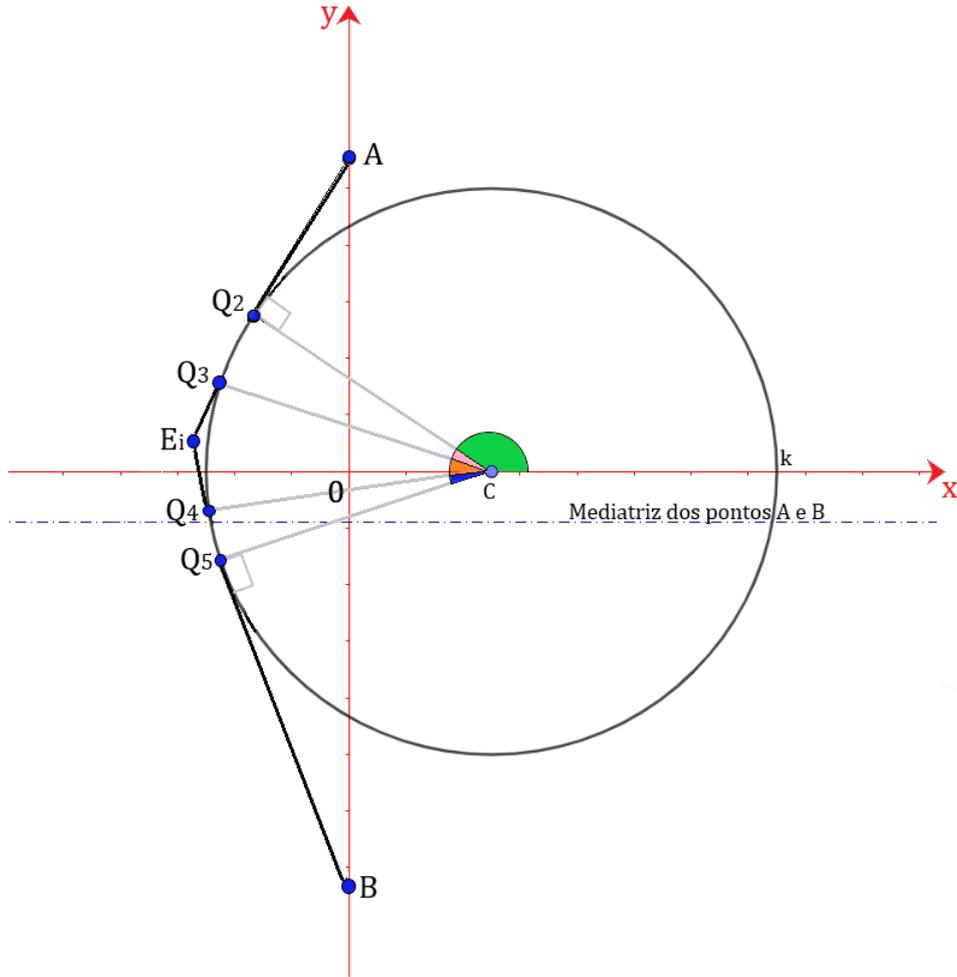


Figura 5.2: Grafo de Visibilidade

Fonte: Criada pelo autor

$$\left\{ \begin{array}{l}
 d(A, Q_2)(y) = \sqrt{a^2 + c^2 - 1} \\
 d(Q_2, Q_3)(y) = \theta_3 - \theta_2 = \cos^{-1} \left[\left(\frac{M_6}{M_7} \right) (\lambda) + \left(\frac{M_9}{M_8} \right) (\phi) \right] \\
 d(Q_3, P_i)(y) = \sqrt{\left[\left(c + \frac{M_6}{M_7} \right) - (x_0 + ih) \right]^2 + \left[\left(\frac{M_9}{M_8} \right) - y \right]^2} \\
 d(P_i, Q_4)(y) = \sqrt{\left[x_0 + ih - c - \frac{M_{10}}{M_7} \right]^2 + \left[y - \frac{M_{11}}{M_8} \right]^2} \\
 d(Q_4, Q_5)(y) = \theta_5 - \theta_4 = \cos^{-1} \left[\left(\frac{M_{10}}{M_7} \right) (\lambda) + \left(\frac{M_{11}}{M_8} \right) (\phi) \right] \\
 d(Q_5, B)(y) = \sqrt{b^2 + c^2 - 1} \\
 d(P_i, B)(y) = \sqrt{(x_0 + ih)^2 + (y - b)^2}
 \end{array} \right.$$

Dessa maneira, fica mais compreensivo implementar $D(P_i)$ em função das distâncias citadas acima.

5.2 Definição da derivada da função $D(P_i)$ relativa a fronteira do diagrama de Voronoi

Como vamos utilizar o método numérico de Newton-Raphson para determinar a curva da fronteira do diagrama de Voronoi, precisamos ter a derivada da função $D(P_i)(y)$ nas duas situações apresentadas nas figuras 5.1 e 5.2. Assim:

Situação 1:

$$D'(P_i)(y) = d'(A, Q_2)(y) + d'(Q_2, Q_3)(y) + d'(Q_3, P_i)(y) - d'(P_i, B)(y) \quad (5.3)$$

Situação 2:

$$D'(P_i) = d'(A, Q_2)(y) + d'(Q_2, Q_3)(y) + d'(Q_3, P_i)(y) - [d'(P_i, Q_4)(y) + d'(Q_4, Q_5)(y) + d'(Q_5, B)(y)] \quad (5.4)$$

Vamos determinar as derivadas das distâncias $d(A, Q_2)(y)$, $d(Q_2, Q_3)(y)$, $d(Q_3, P_i)(y)$ e $d(P_i, Q_4)(y)$, $d(Q_4, Q_5)$ e $d(Q_4, B)(y)$ para tanto vamos fazer uso das derivadas das funções $M_i(y)$, com $i = 1, 2, \dots, 10$. Assim:

$$M_0(y) = y \quad \longrightarrow \quad M'_0(y) = 1$$

$$M_1(y) = y^2 \quad \longrightarrow \quad M'_1(y) = 2y$$

$$M_2(y) = x - c \quad \longrightarrow \quad M'_2(y) = 0$$

$$M_3(y) = -(x - c) = \quad \longrightarrow \quad M'_3(y) = 0$$

$$M_4(y) = |y| \quad \longrightarrow \quad M'_4(y) = \pm 1. \quad \text{Se } y > 0 \longrightarrow M'_4(y) = 1. \quad \text{Se } y < 0 \longrightarrow M'_4(y) = -1$$

$$M_5(y) = M_1(y) + M_2^2(y) - 1 \quad \longrightarrow \quad M'_5(y) = M'_1(y)$$

$$M_6(y) = M_2(y) - M_4(y) \cdot \sqrt{M_5(y)} \quad \longrightarrow \quad M'_6(y) = - \left(M'_4(y) \cdot \sqrt{M_5(y)} + \frac{M_4(y) \cdot M'_5(y)}{2\sqrt{M_5(y)}} \right)$$

$$M_7(y) = M_1(y) + M_2^2(y) \quad \longrightarrow \quad M_7'(y) = M_1'(y) + 2M_2(y) \cdot M_2'(y) = M_1'(y)$$

$$M_8(y) = M_0(y) \cdot (M_1(y) + M_2^2(y)) = M_0(y) \cdot M_7(y) \quad \longrightarrow \quad M_8'(y) = M_7'(y) + M_0'(y) \cdot M_7(y)$$

$$M_9(y) = M_1(y) + M_2(y) \cdot M_4(y) \cdot \sqrt{M_5(y)} \quad \longrightarrow$$

$$M_9'(y) = M_1'(y) + [M_2(y) \cdot M_4'(y)] \cdot \sqrt{M_5(y)} + [M_2(y) \cdot M_4(y)] \cdot \frac{M_5'(y)}{2\sqrt{M_5(y)}}$$

$$M_{10}(y) = M_2(y) + M_4(y) \cdot \sqrt{M_5(y)} \quad \longrightarrow \quad M_{10}'(y) = M_4'(y) \cdot \sqrt{M_5(y)} + \frac{M_4(y) \cdot M_5'(y)}{2\sqrt{M_5(y)}}$$

$$M_{11}(y) = M_1 - M_2 \cdot M_4 \cdot \sqrt{M_5} \quad \longrightarrow$$

$$M_{11}'(y) = M_1'(y) - [M_2(y) \cdot M_4'(y)] \cdot \sqrt{M_5(y)} - [M_2(y) \cdot M_4(y)] \cdot \frac{M_5'(y)}{2\sqrt{M_5(y)}}$$

As derivadas das distância em função das funções $M(y)$, $\lambda(y)$ e $\phi(y)$ dos pontos A , Q_2 , Q_3 , P_i , Q_4 e B . São:

$$d'(A, Q_2)(y) = 0 \quad (5.5)$$

$$d'(Q_2, Q_3)(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2(y)}} \cdot u'(y), \quad \text{para } u(y) = u_1 + u_2 \quad \text{e} \quad u'(y) = u_1' + u_2'. \quad (5.6)$$

Sendo:

$$u_1 = \left(\frac{M_6}{M_7} \right) (\lambda) \quad \text{e} \quad u_2 = \left(\frac{M_9}{M_8} \right) (\phi)$$

$$u_1' = \lambda \cdot \left(\frac{M_6' \cdot M_7 - M_6 \cdot M_7'}{M_7^2} \right) \quad \text{e} \quad u_2' = \phi \cdot \left(\frac{M_9' \cdot M_8 - M_9 \cdot M_8'}{M_8^2} \right)$$

$$d'(Q_3, P_i)(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{v(y)}} \cdot v'(y) \quad \text{para } v(y) = v_1 + v_2 \quad \text{e} \quad v'(y) = v_1' + v_2'. \quad (5.7)$$

Sendo:

$$v_1 = \left[\left(c + \frac{M_6}{M_7} \right) - (x_0 + ih) \right]^2 \quad \text{e} \quad v_2 = \left[\left(\frac{M_9}{M_8} \right) - y \right]^2$$

$$v_1' = 2 \cdot \left[\left(c + \frac{M_6}{M_7} \right) - (x_0 + ih) \right] \cdot \left[\frac{M_6' \cdot M_7 - M_6 \cdot M_7'}{M_7^2} \right] \quad \text{e} \quad v_2' = 2 \cdot \left[\left(\frac{M_9}{M_8} \right) - y \right] \cdot \left[\frac{M_9' \cdot M_8 - M_9 \cdot M_8'}{M_8^2} - 1 \right]$$

$$d'(P_i, Q_4)(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{w}} \cdot w'(y), \quad \text{para } w = w_1 + w_2, \quad w' = w'_1 + w'_2. \quad (5.8)$$

Sendo:

$$w_1 = \left[x - c - \frac{M_{10}}{M_7} \right]^2 \quad e \quad w_2 = \left[y - \frac{M_9}{M_8} \right]^2$$

$$w'_1 = 2 \cdot \left[x - c - \frac{M_{10}}{M_7} \right] \cdot \left[\frac{M'_{10} \cdot M_7 - M_{10} \cdot M'_7}{M_7^2} \right] \quad e \quad w'_2 = 2 \cdot \left[y - \frac{M_9}{M_8} \right] \cdot \left[1 - \frac{M'_9 \cdot M_8 - M_9 \cdot M'_8}{M_8^2} \right]$$

$$d'(Q_4, B)(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z(y)}} \cdot z'(y) \quad \text{para } z(y) = z_1 + z_2 \quad e \quad z'(y) = z'_1 + z'_2. \quad (5.9)$$

Sendo:

$$z_1 = \left[c + \frac{M_{10}}{M_7} \right]^2 \quad e \quad z_2 = \left[\frac{M_9}{M_8} - b \right]^2$$

$$z'_1 = 2 \cdot \left[c + \frac{M_{10}}{M_7} \right] \cdot \left[\frac{M'_{10} \cdot M_7 - M_{10} \cdot M'_7}{M_7^2} \right] \quad e \quad z'_2 = 2 \cdot \left[\frac{M_9}{M_8} - b \right] \cdot \left[\frac{M'_9 \cdot M_8 - M_9 \cdot M'_8}{M_8^2} \right]$$

$$d(P_i, B)(y) = \sqrt{(x_0 + ih)^2 + (y - b)^2}$$

$$d'(P_i, B)(y) = \frac{y_i - b}{\sqrt{(x_0 + ih)^2 + (y - b)^2}}$$

$$d'(Q_4, Q_5)(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2(y)}} \cdot u'(y), \quad \text{para } u(y) = u_1 + u_2 \quad e \quad u'(y) = u'_1 + u'_2. \quad (5.10)$$

Sendo:

$$u_1 = \left(\frac{M_{10}}{M_7} \right) (\lambda_1) \quad e \quad u_2 = \left(\frac{M_{11}}{M_8} \right) (\phi_1)$$

$$u'_1 = \lambda_1 \cdot \left(\frac{M'_{10} \cdot M_7 - M_{10} \cdot M'_7}{M_7^2} \right) \quad e \quad u'_2 = \phi_1 \cdot \left(\frac{M'_{11} \cdot M_8 - M_{11} \cdot M'_8}{M_8^2} \right)$$

$$d'(Q_5, B)(y) = 0 \quad (5.11)$$

Para determinar a fronteira do diagrama de Voronoi, vamos utilizar o método numérico de Newton Raphson através das funções [5.1](#), [5.2](#), [5.3](#) e [5.4](#). Assim: com o índice i fixo e tomando como j o índice das iterações de Newton-Raphson. Nós tomamos

$z_0 = y_{i-1}$ e usamos o método:

$$z_{j+1} = z_j - \frac{D(P_i(z_j))}{D'(P_i(z_j))}, \quad j, i \in \mathbb{N}, \text{ e com o } i \text{ fixo.} \quad (5.12)$$

Após finalizarmos as iterações para um i fixo nós tomamos como zero, ou seja, como y_i o último valor de z_j .

Dessa forma temos como pontos da fronteira os pares $E_i = (x_i, y_i)$ com i variando entre 1 até o número de pontos especificados.

Capítulo 6

Exemplos e Algoritmo da Fronteira

Neste Capítulo temos duas Seções: a primeira apresenta o algoritmo desenvolvido, com exemplos numéricos e a segunda explora o tema do grafo de proximidade.

6.1 Exemplos e Algoritmo

6.1.1 Exemplos

A fim de facilitar a visualização do problema, esta seção se inicia com exemplos numéricos. Para um melhor entendimento, vamos fazer um exemplo inicial, um exemplo relacionado à **Primeira Situação** apresentada no início do Capítulo 5 e a seguir um outro exemplo relacionado à **Segunda Situação** também presente no início do Capítulo 5.

Para determinarmos numericamente a posição dos pontos necessários para o desenvolvimento dos exemplos, usaremos os modelos matemáticos que determinam os pontos $A, B, C, D, E_i, Q_2, Q_3, Q_4$ e Q_5 , sendo E_i um ponto da fronteira do diagrama extraído da simulação.

O ponto $D = E_0$, presente no exemplo inicial, dado abaixo, é o último ponto da fronteira que pertence à mediatriz $y = (a + b)/2$.

Vamos trabalhar com hipóteses e atribuir valores numéricos para as coordenadas dos pontos A, B e C , para exemplificar e mostrar o comportamento dos pontos Q_2, Q_3, Q_4 e Q_5 pertencentes ao obstáculo circular de raio igual a 1 e centro C .

Vejamos os modelos matemáticos abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_2 = \left(c + \frac{-c - |a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a^2 + c^2}, \frac{-c^2 - c|a|\sqrt{a^2 + c^2 - 1}}{a(a^2 + c^2)} + \frac{1}{a} \right) \\ Q_3 = \left(c + \frac{(x - c) - |y|\sqrt{y^2 + (c - x)^2 - 1}}{(c - x)^2 + y^2}, \frac{y^2 + (x - c)|y|\sqrt{y^2 + (c - x)^2 - 1}}{y((c - x)^2 + y^2)} \right) \\ D = \left(x = \frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)x_{Q_2}}{a - y_{Q_2}}, y = \frac{a+b}{2} \right) \\ Q_4 = \left(c + \frac{(x - c) + |y|\sqrt{y^2 + (c - x)^2 - 1}}{(c - x)^2 + y^2}, \frac{y^2 - (x - c)|y|\sqrt{y^2 + (c - x)^2 - 1}}{y((c - x)^2 + y^2)} \right) \\ Q_5 = \left(c + \frac{-c - |b|\sqrt{b^2 + c^2 - 1}}{b^2 + c^2}, \frac{-c^2 - c|b|\sqrt{b^2 + c^2 - 1}}{b(b^2 + c^2)} + \frac{1}{b} \right) \end{array} \right.$$

Exemplo inicial:

Nessa situação vamos analisar o que ocorre na figura [6.1](#) em que temos um ponto $D = E_0$, que é o último ponto pertencente a mediatriz dos pontos com abcissa negativa, que vê A e B . Uma vez estabelecidas estas hipóteses, veremos como se comportam os pontos de tangencia no obstáculo circular. Vamos considerar os seguintes valores numéricos para os pontos: $A = (0, 1)$, $B = (0, -1.25)$ e $C = (0.5, 0)$. Através destas coordenadas podemos ver que $a = 1$, $b = -1.25$ e $c = 0.5$. Agora, vamos substituir esses valores nos modelos matemáticos dos pontos Q_2 , Q_3 e D .

Após as devidas substituições dos valores numéricos de a , b e c , encontramos os seguintes resultados para os pontos:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_2 = (-0.3, 0.6), \\ Q_3 = (-0.3, 0.6) \quad e \\ D = (-0.84, -0.125). \end{array} \right.$$

Diante das informações acima, já temos os valores numéricos para as coordenadas dos pontos A , B , C , D , Q_2 e Q_3 . Agora vamos analisar o comportamento desses pontos nessa situação, podemos ver na figura [6.1](#) que o ponto D , consegue visualizar diretamente os pontos A e B , podemos notar que os pontos Q_2 e Q_3 têm as mesmas coordenadas, ou seja, estão sobrepostos um ao outro, isso se dar em virtude da forma que o ponto D ver os pontos A e B , podemos verificar também que as distâncias geodésicas ($d(A, D)$ e $d(D, B)$) estão bem definidas.

Temos agora todas as coordenadas dos pontos A , B , C , D , Q_2 e Q_3 e vamos representá-las na figura [6.1](#).

Exemplo da Primeira Situação:

Neste exemplo vamos analisar o que ocorre na figura [6.2](#) em que temos um ponto E_i pertencente a curva que determina a fronteira do diagrama de Voronoi e que esse ponto não consegue visualizar imediatamente o ponto A , pois há um obstáculo circular, que impede essa visualização. Portanto, o ponto E_i só conseguirá ver os pontos B , As distâncias geodésicas de interesse são: $d(A, E_i) = d(A, Q_2) + d(Q_2, Q_3) + d(Q_3, E_i)$ e $d(E_i, B)$. Como queremos mostrar o comportamento dos pontos pertencente a figura

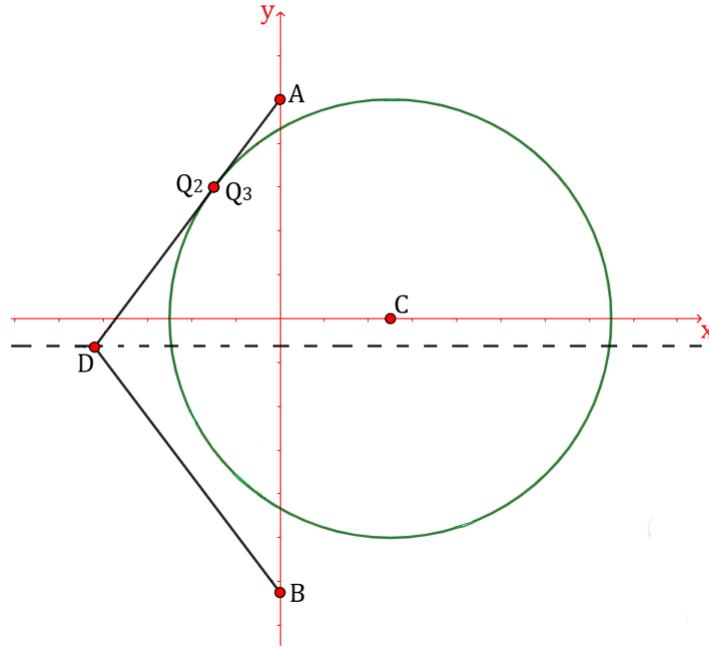


Figura 6.1: Comportamento dos pontos tangentes ao obstáculo circular

Fonte: Criada pelo autor

6.2, vamos atribuir valores numéricos aos pontos A , B e C .

Assim: $A = (0, 2)$, $B = (0, -5)$ e $C = (0.5, 0)$. Através destas coordenadas podemos ver que $a = 2$, $b = -5$ e $c = 0.5$, agora, tomando $E_i = (-0.4, -0.45)$, da simulação numérica, e substituindo esses valores nos modelos matemáticos dos pontos Q_2 e Q_3 , obtemos os seguinte resultados numéricos para os pontos:

$$\begin{cases} Q_2 = (-0.4660, 0.2584) \\ Q_3 = (-0.4975, 0.0705) \\ D = (-1.8731, -1.5) \end{cases}$$

Podemos verificar o comportamento desses pontos na figura **6.2**, na qual constatamos as distâncias geodésicas. Na mesma figura vemos uma silhueta da frenteita do diagrama de Voronoi, que está determinada entre os pontos D e E_i

Exemplo da Segunda Situação:

Neste exemplo, adotaremos as seguintes coordenadas para os pontos $A = (0, 1)$, $B = (0, -1.3)$ e $C = (0.5, 0)$, logo, podemos ver que $a = 1$, $b = -1.3$ e $c = 0.5$, diante dessas informações vamos alocar os pontos D , Q_2 , Q_3 , Q_4 e Q_5 em suas devidas posições de pontos de tangencia ao obstáculo circular contido no plano cartesiano. Para tanto, vamos fazer uso dos modelos matemáticos que foram determinados nas equações apresentadas acima. Assim:

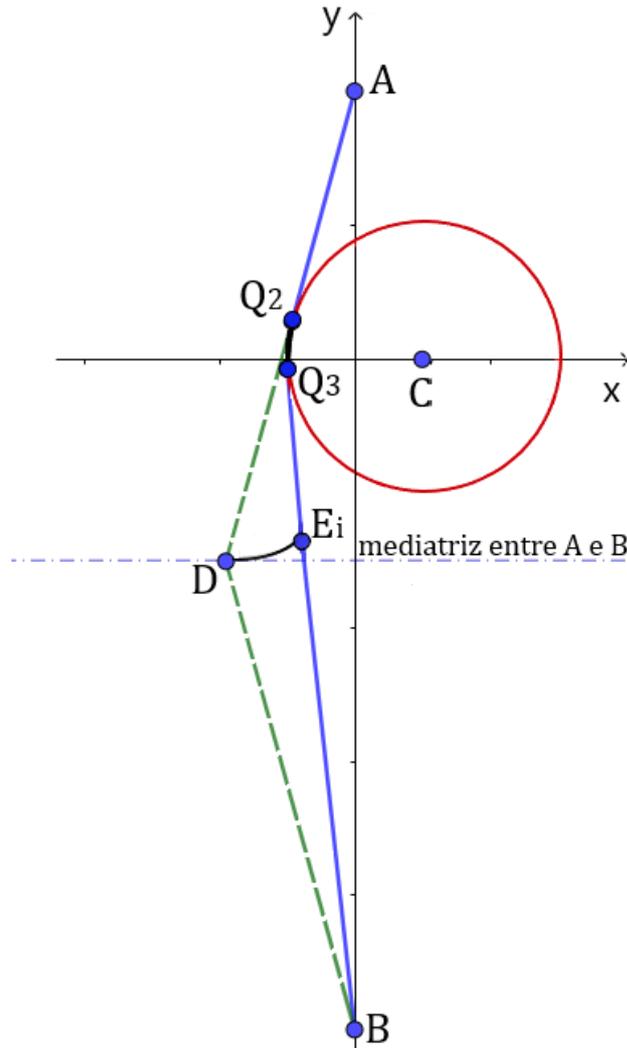


Figura 6.2: Visualização numérica dos pontos que determinam a fronteira do diagrama de Voronoi na primeira situação

Fonte: Criada pelo autor

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_2 = (-0.30000000000000004, 0.6) \\ Q_3 = (-0.3962465759340962, 0.44355616907716255) \\ Q_4 = (-0.44755251580212496, -0.31960010919438614) \\ Q_5 = (-0.4074210118186833, -0.4202226877620448) \\ D = (-0.69000000000000001, -0.15000000000000002) \end{array} \right.$$

Na figura [6.3](#), podemos observar os pontos Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 e D deste exemplo. Observe que o ponto E_i não vê nem A e nem B de forma direta.

Com as coordenadas A, B e C acima o nosso algoritmo gerou como saída os seguintes pontos da fronteira do diagrama, apresentados na Tabela abaixo.

Agora que já vimos os exemplos numéricos, vamos apresentar o algoritmo para obtenção da fronteira do diagrama de Voronoi. A complexidade do algoritmo é linear no número de pontos da fronteira. A ideia principal é: sabendo a abcissa de um ponto pertencente à fronteira, encontramos a ordenada desse ponto utilizando um método numérico de zero de função (Newton-Raphson). Esse zero da função corresponde a

índice i	x_i	y_i
1	0.8525000000000004	0.14999247437734078
2	0.8425000000000003	0.14996946486029417
3	0.8325000000000002	0.14993029588814813
\vdots	\vdots	\vdots
	0.5825000000000002	0.14044905050731823
\vdots	0.5725000000000001	0.13949961234811387
	0.5625000000000000	0.13847148108350277
\vdots	\vdots	\vdots
P_n	0.5124999999999996	0.12704337884206701

Tabela 6.1: Valores de pontos da fronteira do **Exemplo da Segunda Situação**:

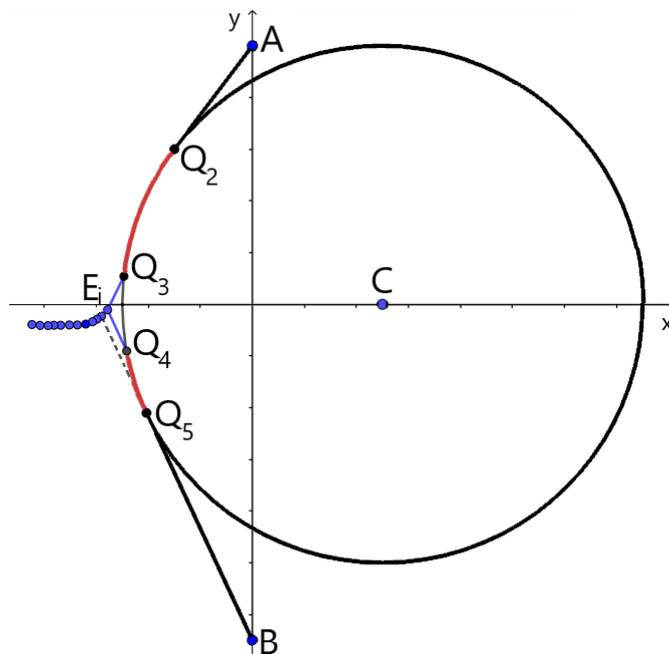


Figura 6.3: Visualização numérica dos pontos que determinam a fronteira do diagrama de Voronoi da situação 2

Fonte: Criada pelo autor

ordenada desejada. A função para a qual buscamos o zero é a função F no algoritmo abaixo, ou como definida nos capítulos anteriores por: $D(P_i)(y)$, que corresponde a diferença da distância geodésica entre um ponto P_i , com i sendo o índice que corresponde as abcissas, e A e a distância geodésica entre P_i e B. Quando essa função acha um zero, z_j (ao usar o método de Newton-Raphson), encontra-se um ponto da fronteira $E_i = (x_i, y_i)$ onde y_i é o último valor de z_j (j é o índice das iterações). O critério de parada utilizado foi o número de iterações, pois assim o diagrama tem uma quantidade constante de iterações e não aleatória. Vale lembrar que o método Newton-Raphson foi utilizado pelo fato da função que gera a fronteira do diagrama de Voronoi ser não linear.

6.1.2 Algoritmo

A seguir alguns pontos relacionados ao algoritmo são comentados. A fronteira do diagrama pode tocar o obstáculo e nesta situação o algoritmo é finalizado. Com esta finalidade nós criamos um teste (testecirculo, variável booleana). Também existem duas possíveis situações para o cálculo da função $D(P_i)$: ou o ponto P_i vê diretamente B ou não vê. Assim, nós construímos um outro teste (testeabaixodareta, outra variável booleana). Neste teste verificamos se o ponto $P_i + \epsilon(1,1)$, com $\epsilon > 0$ e pequeno, está acima da reta que passa por B e Q_5 e tem ordenada superior a ordenada de Q_5 . Foi necessária a utilização do ϵ , pois na próxima iteração precisamos saber se usamos P_i como sendo da situação 1 ou da situação 2.

Algoritmo 1: Algoritmo para a fronteira do diagrama de Voronói com obstáculo circular

```
Atribua valores para  $a$ ,  $b$  e  $c$  respeitando as condições  $a > 0$ ,  $-b > a$  e  $0 < c < 1$ .
   $testecirculo \leftarrow false$ ;
   $testeabaixodareta \leftarrow true$ ;
   $tamanho \leftarrow 0$ ;
   $lambda \leftarrow (-c - abs(a) * sqrt(a * a + c * c - 1)) / (a * a + c * c)$ ;
   $phi \leftarrow (-c * c - c * abs(a) * sqrt(a * a + c * c - 1)) / (a * (a * a + c * c)) + 1/a$ ;
   $x0 \leftarrow ((c + lambda) * (b - a) / 2) / (phi - a)$ ;
   $h \leftarrow -x0 / 200$ ;
   $pontos \leftarrow round((-x0 + c) / h) - 1$ ;
   $y \leftarrow (a + b) / 2$ ;
para  $i \leftarrow 1$  até  $pontos$  faça
  |    $w[i] \leftarrow 0$ ;
  |    $z[i] \leftarrow 0$ ;
   $i \leftarrow 1$ ;
enquanto  $i < pontos + 1$  e  $testecirculo == false$  faça
  |    $w[i] \leftarrow x0 + ih$ ;
  |    $x \leftarrow w[i]$ ;
  |    $j \leftarrow 0$ ;
  |   enquanto  $j < 5$  e  $testeabaixodareta == true$  faça
  |   |    $d1 \leftarrow d((x, y), A)$ ;
  |   |    $d2 \leftarrow d((x, y), B)$ ;
  |   |    $d1prime \leftarrow$  derivada de  $d1$ ;
  |   |    $d2prime \leftarrow$  derivada de  $d2$ ;
  |   |    $F \leftarrow d1 - d2$ ;
  |   |    $Fprime \leftarrow d1prime - d2prime$ ;
  |   |    $y \leftarrow y - F / Fprime$ ;
  |   |    $j \leftarrow j + 1$ 
  |   enquanto  $j < 5$  e  $testeabaixodareta == false$  faça
  |   |    $d1 \leftarrow d((x, y), A)$ ;
  |   |    $d2mod \leftarrow d((x, y), B)$ ;
  |   |    $d1prime \leftarrow$  derivada de  $d1$ ;
  |   |    $d2modprime \leftarrow$  derivada de  $d2mod$ ;
  |   |    $F \leftarrow d1 - d2mod$ ;
  |   |    $Fprime \leftarrow d1prime - d2modprime$ ;
  |   |    $y \leftarrow y - F / Fprime$ ;
  |   |    $j \leftarrow j + 1$ 
  |    $z[i] \leftarrow y$ ;
  |   se teste da reta  $== true$  então
  |   |    $testeabaixodareta \leftarrow false$ 
  |   se teste do círculo  $== true$  então
  |   |    $testecirculo \leftarrow true$ 
  |    $i \leftarrow i + 1$ ;
  |    $tamanho \leftarrow i$ ;
```

Capítulo 7

Grafo de Proximidade

Na situação onde os obstáculos são poligonais, usa-se o grafo de visibilidade para determinar a qual célula de Voronoi um ponto P qualquer pertence. No nosso caso, existem pontos P para os quais não podemos aplicar o grafo de Visibilidade, vide **Exemplo da Primeira Situação**, na qual o ponto Q_2 não vê o ponto Q_3 . Assim, faz-se necessário expandir esse conceito. No nosso caso, só temos dois pontos geradores A e B , portanto, só temos duas células. O conceito do grafo de proximidade é bem simples, mas é o início para situações com mais pontos e com mais obstáculos circulares.

Uma outra observação é que no caso de obstáculos poligonais os vértices do grafo de visibilidade são os geradores mais os vértices dos polígonos, ou seja, todos conhecidos a priori. No nosso caso, existem vértices do grafo de proximidade que dependem do ponto P para o qual desejamos saber a qual célula de Voronoi ele pertence.

Basicamente, existem quatro casos para um ponto P posicionado do lado das abscissas negativas, que estão representados na Figura 7.1. O primeiro caso refere-se à região cor de rosa, na Figura 7.1. Os pontos P da região cor de rosa pertencem a célula do ponto gerador A e o grafo de proximidade para um ponto desses é o grafo com dois vértices P e A e está representado na Figura 7.2. Nesta Figura podemos ver o vértice A em azul e o vértice P a ser classificado em vermelho.

Se o ponto P não pertence ao triângulo e sua ordenada é menor que $\frac{a+b}{2}$, ou seja, P pertence à região laranja, então P pertence a célula do ponto gerador B e seu grafo de proximidade tem dois vértices P e B e está representado na Figura 7.3. Nesta Figura podemos ver o vértice B em azul e o vértice P a ser classificado em vermelho.

Agora, se o ponto P pertence à região verde da Figura 7.1, então o grafo de proximidade tem vértices P, Q_2, Q_3, A e B e arestas PQ_3, Q_3Q_2, Q_2A e PB . Vale salientar que o ponto Q_3 é dinâmico, pois depende das coordenadas do ponto P . Este grafo está representado na Figura 7.4. Nesta Figura podemos ver os vértices A e B em azul, o vértice P a ser classificado em vermelho, o vértice estático Q_2 em verde e o vértice dinâmico Q_3 em laranja.

Para saber se o ponto P pertence a célula do ponto gerador A temos que calcular as distâncias: $d(P, Q_3), \widehat{Q_2Q_3}, d(Q_2, A)$ e $d(P, B)$. Se

$$d(P, Q_3) + \widehat{Q_2Q_3} + d(Q_2, A) < d(P, B)$$

então P pertence a célula do ponto gerador A , caso contrário, P pertence a célula do ponto gerador B .

Na última possibilidade, o ponto P pertence à região azul da Figura 7.1. Sendo assim, o grafo de proximidade é formado pelos vértices: P, A, B, Q_2, Q_3, Q_4 e Q_5 e as arestas

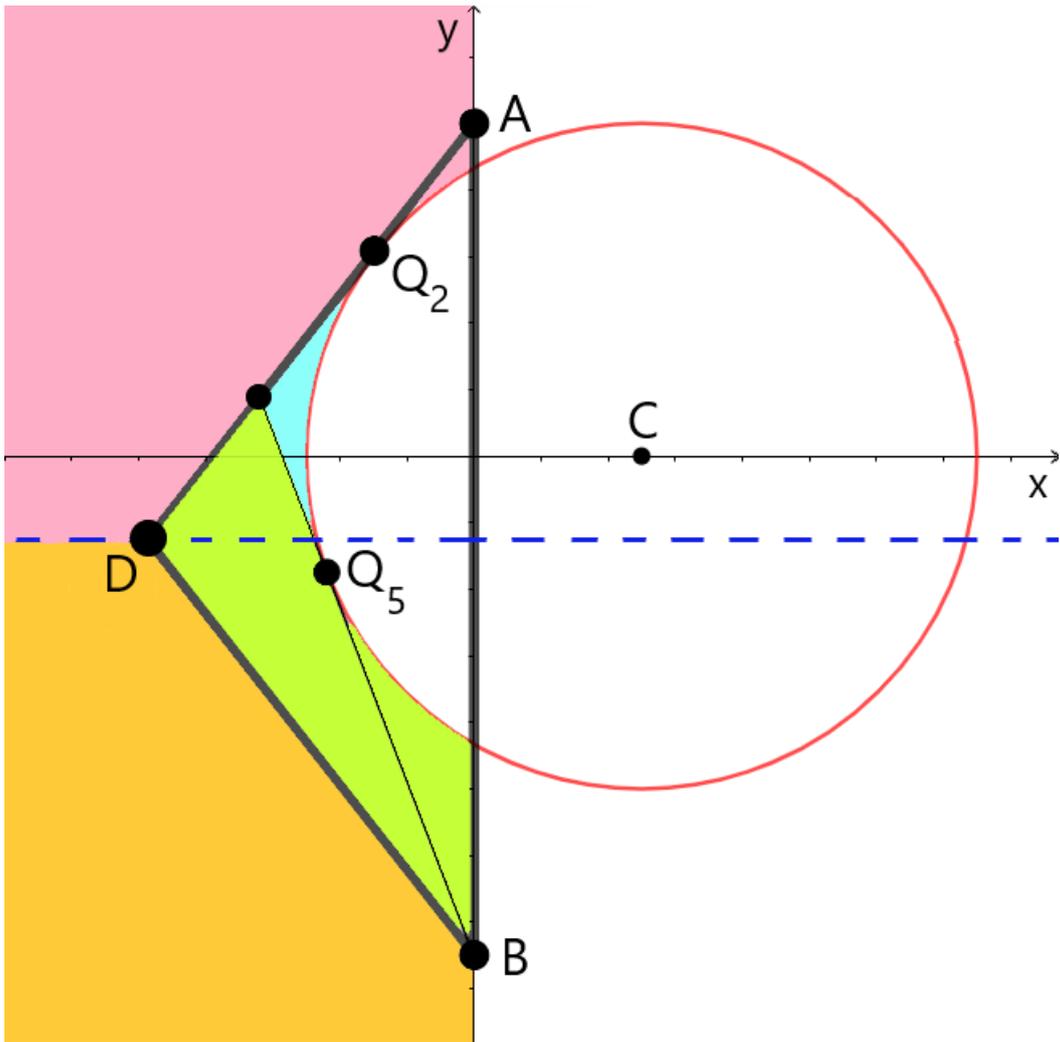


Figura 7.1: Regiões de atuação dos grafos

Fonte: Criada pelo autor

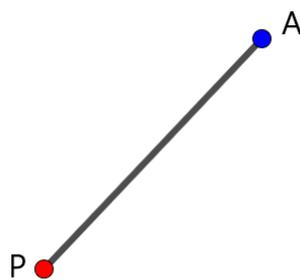


Figura 7.2: Grafo - caso 1

Fonte: Criada pelo autor

tas $PQ_3, Q_3Q_2, Q_2A, PQ_4, Q_4Q_5, Q_5B$. Os vértices Q_3 e Q_4 são dinâmicos pois dependem das coordenadas do ponto P . Este grafo está representado na Figura [7.5](#). Nesta Figura podemos ver os vértices A e B em azul, o vértice P a ser classificado em vermelho, os

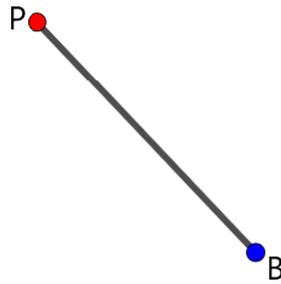


Figura 7.3: Grafo - caso 2
Fonte: Criada pelo autor

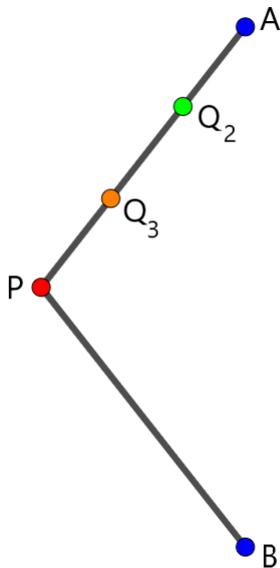


Figura 7.4: Grafo - caso 3
Fonte: Criada pelo autor

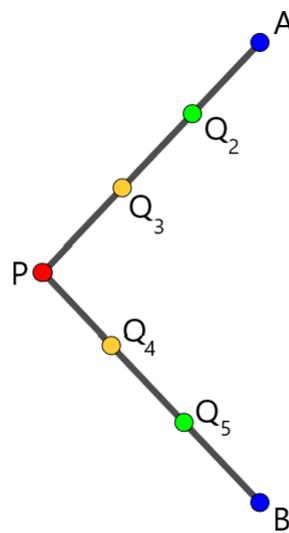


Figura 7.5: Grafo - caso 4
Fonte: Criada pelo autor

vértices estáticos Q_2 e Q_5 em verde e os vértices dinâmicos Q_3 e Q_4 em laranja.

Para determinar se o ponto P pertence à célula do ponto gerador A ou B , calculamos as distâncias

$$d(P, Q_3) + \widehat{Q_2 Q_3} + d(Q_2, A) - d(P, Q_4) - \widehat{Q_4 Q_5} - d(Q_5, B)$$

Se essa quantidade for positiva então P pertence a célula de B e se for negativa P pertence a célula de A . Nesse grafo temos dois vértices dinâmicos: Q_3 e Q_4 que dependem de P .

Apesar de ter sido descrito em cada grafo as cores dos vértices vamos resumir o significado de cada uma: um vértice vermelho corresponde a um ponto a ser classificado. Um vértice azul corresponde a um ponto gerador, um vértice verde corresponde a um ponto estático, cujas coordenadas dependem de um ponto gerador e um ponto laranja é um ponto dinâmico, cujas coordenadas dependem das coordenadas do ponto a ser classificado.

Capítulo 8

Resultados e Perspectivas

Sabemos que o diagrama de Voronoi com k pontos geradores é formado por k polígonos convexos. Em relação a obstáculos existentes no diagrama de Voronoi, o que já existe na literatura é relacionado a obstáculos poligonais.

Neste trabalho, foi introduzido um obstáculo circular entre dois pontos geradores A e B . É importante lembrar que os pontos que estão na fronteira de um diagrama de Voronoi são equidistantes de seus pontos geradores.

Esta dissertação apresenta vários resultados importantes, que estão resumidos a seguir.

- Determinação algébrica das coordenadas de todos os pontos de tangência ao obstáculo, pontos estes estritamente necessários para o desenvolvimento do estudo;
- Determinação algébrica de todas as distâncias geodésicas de um dado ponto P para os pontos geradores A e B . Desta forma foram calculadas e apresentadas todas as distâncias possíveis e necessárias ao estudo;
- Definição da função da fronteira do diagrama de Voronoi objeto deste trabalho;
- Construção do algoritmo para a determinação da fronteira do diagrama de Voronoi objeto deste trabalho;
- Com a implementação do algoritmo, obtivemos que a fronteira do diagrama de Voronoi é curva, tem trajetória ascendente e é dinâmica;
- Construção do grafo de proximidade que generaliza o grafo de visibilidade para o diagrama de Voronoi objeto deste trabalho.

Uma vez apresentado o resumo dos resultados obtidos, vamos iniciar a discussão de forma a apresentar uma visão mais completa do trabalho.

Um resultado que obtivemos neste trabalho é que a fronteira adquire aspectos curvos, como foi observado na Figura 6.2. Como o obstáculo é uma circunferência, para que as distâncias entre o ponto da fronteira e os pontos geradores A e B permaneçam iguais, a ordenada do ponto da fronteira aumenta, à medida que o valor da abcissa também aumenta.

As Figuras 8.1, 8.2 e 8.3 ilustram, respectivamente, as possíveis configurações de fronteiras obtidas com a implementação do algoritmo. Nas três figuras a semi-reta de cor azul é a mediatriz das ordenadas dos pontos $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$. A mediatriz

aparece em posições diferentes em cada uma das figuras porque as coordenadas dos pontos A e B mudam para que seja apresentado ao leitor o que se deseja em cada figura. A parte vermelha em cada uma das figuras apresenta a fronteira do Diagrama de Voronoi para cada caso apresentado.

Existem três possíveis casos para o comportamento da fronteira em relação ao obstáculo. No primeiro caso a fronteira não toca o obstáculo, que está apresentada na Figura 8.1.

No segundo caso a fronteira toca o obstáculo, mas nenhum ponto da fronteira satisfaz a condição da **Segunda Situação**, descrita no Capítulo 5. Este caso está apresentado na Figura 8.2.

No terceiro caso a fronteira toca o obstáculo, mas existem pontos da fronteira que satisfazem a condição da **Segunda Situação**, descrita no Capítulo 5 e está apresentada na Figura 8.3.

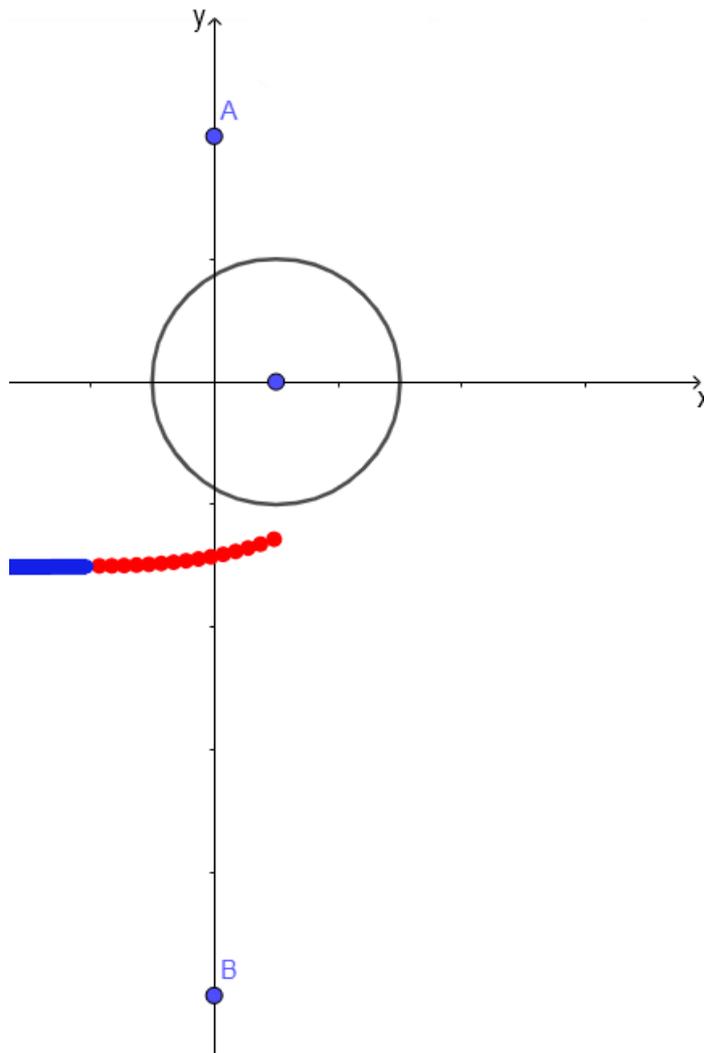


Figura 8.1: Fronteira caso 1

Fonte: Criada pelo autor

Um outro resultado obtido a respeito da fronteira do diagrama de Voronoi objeto de estudo deste trabalho, é que a sua construção é dinâmica e não estática como é a construção da fronteira de um diagrama de Voronói sem obstáculos, por exemplo. O com-

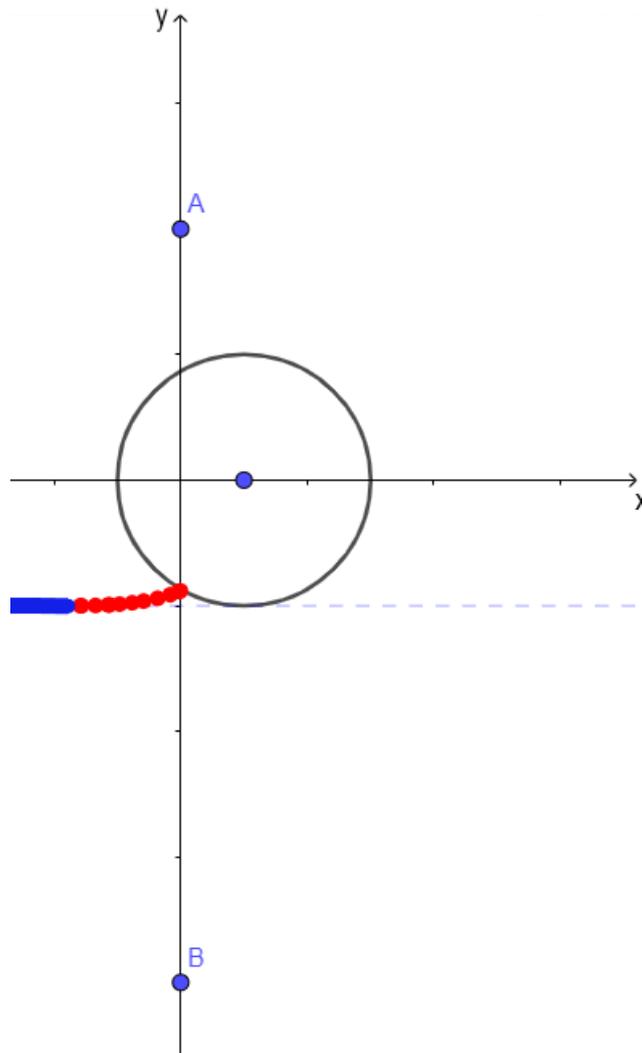


Figura 8.2: Fronteira caso 2

Fonte: Criada pelo autor

portamento curvo da fronteira já define a natureza dinâmica de sua construção, pois reflete a mudança de comportamento da fronteira conforme a posição do elemento em relação ao obstáculo. Este resultado pode ser melhor observado na animação que pode ser acessada através do link: <https://fronteiravoronoi.blogspot.com/>

Como perspectivas futuras, temos, o estudo do comportamento da fronteira do lado direito do obstáculo é uma continuação bastante natural deste estudo.

Pode-se calcular a derivada e a curvatura da fronteira, visto que a mesma é uma função suave. A suavidade da fronteira do diagrama de Voronoi depende da suavidade do obstáculo.

Outras perspectivas surgem ao adicionarmos mais pontos geradores e/ou mais obstáculos.

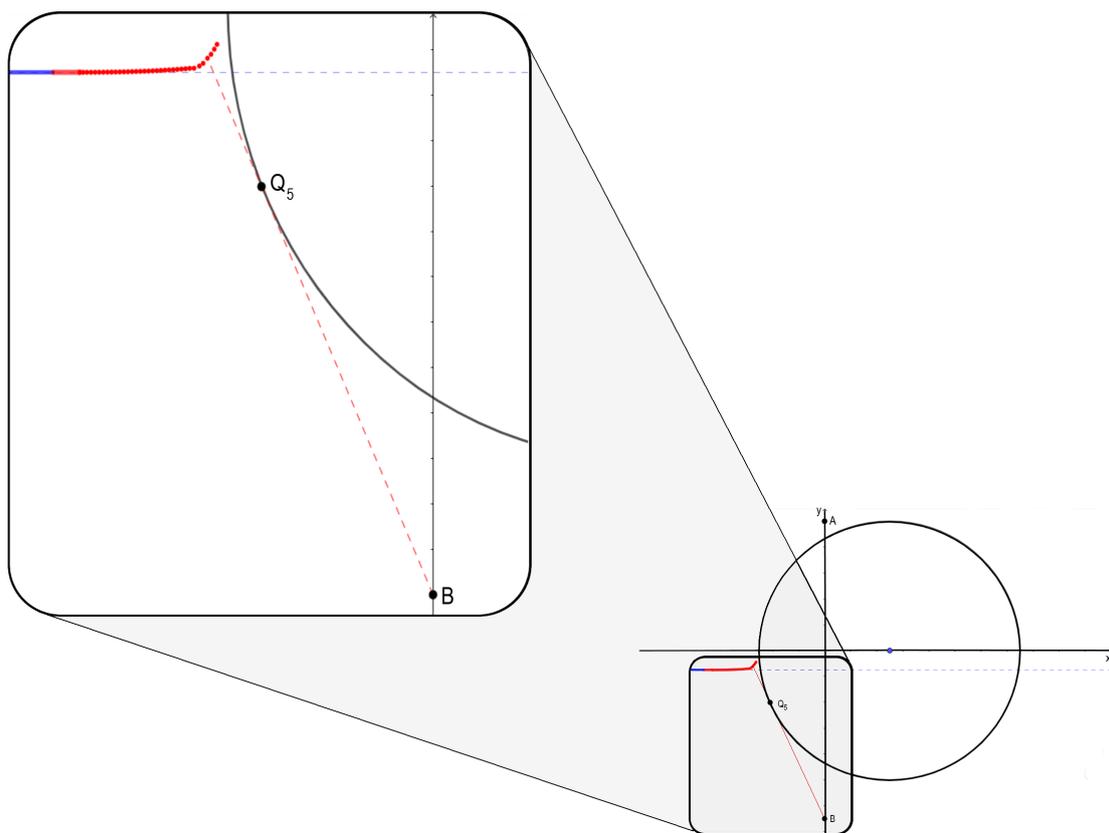


Figura 8.3: Fronteira caso 3

Fonte: Criada pelo autor

Referências Bibliográficas

- [1] ABELLANAS, B., ABELLANAS, M., POMMERENING, A., et al., 2016, “A forest simulation approach using weighted Voronoi diagrams. An application to Mediterranean fir *Abies pinsapo* Boiss stands”, *Forest Systems*, v. 25 (07), pp. e062. doi: 10.5424/fs/2016252-08021.
- [2] BOOTS, B. N., 1980, “Weighting Thiessen Polygons”, *Economic Geography*, v. 56, n. 3, pp. 248–259. ISSN: 00130095, 19448287. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/142716>>.
- [3] BOWYER, A., 1981, “Computing Dirichlet tessellations*”, *The Computer Journal*, v. 24, n. 2 (01), pp. 162–166. ISSN: 0010-4620. doi: 10.1093/comjnl/24.2.162. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/comjnl/24.2.162>>.
- [4] BRASSEL, K. E., REIF, D., 1979, “A Procedure to Generate Thiessen Polygons”, *Geographical Analysis*, v. 11, n. 3, pp. 289–303. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1538-4632.1979.tb00695.x>. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1538-4632.1979.tb00695.x>>.
- [5] BRODY, H., RIP, M., VINTEN-JOHANSEN, P., et al., 2000, “Map-making and myth-making in Broad Street: The London cholera epidemic, 1854”, *Lancet*, v. 356 (08), pp. 64–8. doi: 10.1016/S0140-6736(00)02442-9.
- [6] CHENG, P., WANG, J., MIAO, C., et al., 2018, “Constrained Texture Mapping via Approximate Voronoi Base Domain”. In: *Proceedings of Computer Graphics International 2018*, CGI 2018, p. 19–22, New York, NY, USA, june. Association for Computing Machinery. ISBN: 9781450364010. doi: 10.1145/3208159.3208188. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/3208159.3208188>>.
- [7] FEOFILOFF, P., KOHAYAKAWA, Y., WAKABAYASHI, Y., “Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos”, .
- [8] FIGUEIREDO, L. H., CARVALHO, P. C. P., 1991, *Introdução à Geometria Computacional*. Rio de Janeiro, IMPA. ISBN: 85-244-0061-7.

- [9] GARRIDO, S., MORENO, L., 2015, “Mobile Robot Path Planning using Voronoi Diagram and Fast Marching”. In: *Robotics, Automation, and Control in Industrial and Service Settings*, cap. Mobile Robot Path Planning using Voronoi Diagram and Fast Marching, Madrid, IGI Global Books, 05. ISBN: 9781466686939. doi: 10.4018/978-1-4666-8693-9.
- [10] GREEN, P. J., SIBSON, R., 1978, “Computing Dirichlet Tessellations in the Plane”, *The Computer Journal*, v. 21, n. 2 (05), pp. 168–173. ISSN: 0010-4620. doi: 10.1093/comjnl/21.2.168. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/comjnl/21.2.168>>.
- [11] JU, L., RINGLER, T., GUNZBURGER, M., 2011, “Voronoi Tessellations and Their Application to Climate and Global Modeling”, *Numerical Techniques for Global Atmospheric Models*, v. 80 (02), pp. 313–342. doi: 10.1007/978-3-642-11640-7_10.
- [12] KRISHAN, K., GOYAL, D. K., PARAY, A., 2020, “To Predict The Best Hospital In An Area Using Machine Learning”, *International Journal of Advanced Science and Technology*, v. 29 (01), pp. 1371–1377.
- [13] LACASA, L., LUQUE, B., BALLESTEROS, F., et al., 2008, “From time series to complex networks: The visibility graph”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 105 (05), pp. 4972. doi: 10.1073/pnas.0709247105.
- [14] MACAMBIRA, A., MACULAN, N., CABRAL, L., et al., 2016, *Programação Linear*. João Pessoa, Editora da UFPB. ISBN: 9788523712488.
- [15] MACEDONIO, G., PARESCHI, M., 1991, “An algorithm for the triangulation of arbitrarily distributed points: Applications to volume estimate and terrain fitting”, *Computers & Geosciences*, v. 17, n. 7, pp. 859–874. ISSN: 0098-3004. doi: [https://doi.org/10.1016/0098-3004\(91\)90086-S](https://doi.org/10.1016/0098-3004(91)90086-S). Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/009830049190086S>>.
- [16] MARTIN, D., WILLIAMS, H. C. W. L., 1992, “Market-Area Analysis and Accessibility to Primary Health-Care Centres”, *Environment and Planning A: Economy and Space*, v. 24, n. 7, pp. 1009–1019. doi: 10.1068/a241009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1068/a241009>>.
- [17] RHYNSBURGER, D., 1973, “Analytic Delineation of Thiessen Polygons*”, *Geographical Analysis*, v. 5, n. 2, pp. 133–144. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1538-4632.1973.tb01003.x>. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1538-4632.1973.tb01003.x>>.

- [18] ROUSSEAU, B., PEETERS, A., VAN ALSENOY, C., 2001, "Atomic charges from modified Voronoi polyhedra", *Journal of Molecular Structure: THEOCHEM*, v. 538, n. 1, pp. 235–238. ISSN: 0166-1280. doi: [https://doi.org/10.1016/S0166-1280\(00\)00692-8](https://doi.org/10.1016/S0166-1280(00)00692-8). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166128000006928>>.
- [19] SCHUSTER, M., 2008. "The Largest Empty Circle Problem". .
- [20] SIBSON, R., 1981, "A brief description of natural neighbor interpolation". .
- [21] SO, A. M.-C., YE, Y., 2005, "On Solving Coverage Problems in a Wireless Sensor Network Using Voronoi Diagrams". In: *WINE*, 3.
- [22] TOKITA, N., HIRABAYASHI, M., AZUMA, C., et al., 2004, "Voronoi space division of a polymer: topological effects, free volume, and surface end segregation." *The Journal of chemical physics*, v. 120 1, pp. 496–505.
- [23] TSAI, V. J., 1993, "Fast topological construction of delaunay triangulations and voronoi diagrams", *Computers & Geosciences*, v. 19, n. 10, pp. 1463–1474. ISSN: 0098-3004. doi: [https://doi.org/10.1016/0098-3004\(93\)90062-A](https://doi.org/10.1016/0098-3004(93)90062-A). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/009830049390062A>>.
- [24] WATSON, D. F., 1981, "Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes*", *The Computer Journal*, v. 24, n. 2 (01), pp. 167–172. ISSN: 0010-4620. doi: [10.1093/comjnl/24.2.167](https://doi.org/10.1093/comjnl/24.2.167). Disponível em: <https://doi.org/10.1093/comjnl/24.2.167>>.
- [25] ŻYDEK, A., WERMIŃSKI, M., TRYBULA, M. E., 2021, "Description of grain boundary structure and topology in nanocrystalline aluminum using Voronoi analysis and order parameter", *Computational Materials Science*, v. 197, pp. 110660. ISSN: 0927-0256. doi: <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2021.110660>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927025621003876>>.