



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física

GRAVITAÇÃO E O CAMPO DE PROCA

Mauro Parnaíba Duarte

João Pessoa, 2021



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física

GRAVITAÇÃO E O CAMPO DE PROCA

Mauro Parnaíba Duarte

Orientador: Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, na área de concentração: Gravitação e Cosmologia.

João Pessoa, 2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

D812g Duarte, Mauro Parnaíba.
Gravitação e o campo de Proca / Mauro Parnaíba Duarte.
- João Pessoa, 2021.
84 f.

Orientação: Carlos Augusto Romero Filho.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Gravitação. 2. Geometria de Weyl. 3. Teoria
invariante de Weyl. 4. Equações de campo. I. Romero
Filho, Carlos Augusto. II. Título.

UFPB/BC

CDU 531.5

Ata da Sessão Pública da Defesa de Dissertação de
Mestrado do aluno **Mauro Parnaíba Duarte**,
candidato ao Título de Mestre em Física na Área de
Concentração Gravitação e Cosmologia.

1 Aos vinte e três dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e um, às 16:00, reuniram-
2 se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato
3 ao grau de Mestre em Física na área de Gravitação e Cosmologia. **Mauro Parnaíba Duarte**.
4 A comissão examinadora composta pelos professores doutores: Carlos Augusto Romero Filho
5 (DF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Fábio Leal de Melo Dahia
6 (DF/UFPB) e José Edgar Madriz Aguilar (UDG/México). Dando início aos trabalhos, o Prof.
7 Carlos Augusto Romero Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir,
8 passou a palavra o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de
9 dissertação intitulado "*Gravitação e o Campo de Proca*". Concluída a exposição, o candidato
10 foi arguido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: "**aprovado**". Assim
11 sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em
12 Física na forma da lei. E para constar, eu, José Sérgio Trindade Silva, lavrei esta ata que vai
13 assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, **23 de fevereiro de**
14 **2021**.

15 Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho

Orientador - UFPB

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia

UFPB

Prof. Dr. José Edgar Madriz Aguilar

UDG México

Carlos Augusto Romero Filho

Fábio Leal de Melo Dahia

J. Edgar Madriz Aguilar

16 Link da reunião:

17 <https://meet.google.com/imm-evae-pkj> <<https://meet.google.com/imm-evae-pkj>>

*Aos meus amados pais, Adelaide e
Vicente, que nunca deixaram de
acreditar em mim.*

Agradecimentos

Agradeço ao meu Deus que sempre esteve presente em minha vida, dando-me forças para ir cada vez mais longe.

A minha família, pelo apoio durante toda a minha trajetória acadêmica e pelas inúmeras palavras de incentivo.

Ao Professor Carlos Augusto Romero Filho, sou grato por ter acreditado em mim e por toda dedicação prestada para a realização desse trabalho, dividindo comigo tanto do seu conhecimento.

A Thais Sanomiya, minha co-orientadora embora não formalmente, agradeço pelas experiências compartilhadas e pelas contribuições prestadas para o desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus amigos e colegas do departamento de Pós-Graduação em Física da UFPB, em especial agradeço a Andréa Freire, Guacira Melo, Anny Caroline, Jefferson Luan, Emanuel Wallison, Fabiano Oliveira, Jesriel Matias, Jabes de Almeida, Willames Magalhães, Matheus Alves, Pedro Moraes e Igor Santos, por todo o conhecimento compartilhado e pela ajuda nos momentos que precisei.

A todos os irmãos da ADCR-Castelo Branco, amigos que fiz durante a minha permanência em João Pessoa, agradeço pelo apoio e pelos momentos felizes vivenciados.

Agradeço também ao departamento de Pós-Graduação em Física da UFPB e a todos os Docentes que contribuíram na minha formação, em especial aos professores Sergio Azevedo, Jorge Gabriel, e Joel Fonseca.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

”Colha uma flor na Terra e moverá a estrela mais distante.”

PAUL DIRAC

Resumo

A presente dissertação versa sobre a teoria unificada de Weyl que, em 1918, buscou unificar o eletromagnetismo e a gravitação em uma única teoria. Inicialmente, apresentamos de forma detalhada a maneira de como essa teoria foi construída. Em seguida, procurando torná-la completa e consistente com a ideia original de Weyl, ou seja, a de uma teoria que possui uma nova simetria, a saber uma simetria de calibre, apresentamos uma proposta para tornar o tensor métrico e o campo de Weyl grandezas invariantes em relação a transformações de calibre. Isto nos permite ter uma concepção de tempo-próprio invariante de calibre (gauge), além de possibilitar descrever o acoplamento dos campos geométricos (gravitacional e eletromagnético) com a matéria. Para tanto, foi necessária uma modificação e reinterpretação da teoria original de Weyl. Desse modo, obtemos uma nova teoria alternativa da gravitação. Um aspecto importante, que enfatizamos nessa dissertação, é a reinterpretação (na teoria original de Weyl) do campo responsável pelo mecanismo de transporte paralelo como um campo vetorial massivo, que nos remete à antiga teoria desenvolvida pelo físico romeno Alexandru Proca, desenvolvida em 1936, no contexto de uma teoria das interações nucleares, antecipando de certa forma a teoria posterior de Hideki Yukawa para a explicação das forças nucleares fortes. Assim, dedicamos boa parte dessa dissertação ao estudo do campo de Proca em várias situações distintas: no espaço-tempo de Minkowski, na teoria da relatividade geral, assim como na teoria invariante de Weyl.

Palavras-chave: Geometria de Weyl, Gravitação, Teoria invariante de Weyl, campo de Proca, equações de campo.

Abstract

This dissertation constitutes a study on Weyl's unified theory, which attempted in 1918 to unify electromagnetism and gravitation into a single theory. Initially, we present in detail the way in which this theory was constructed. Then, trying to make it complete and consistent with Weyl's original spirit, that is, that of a theory exhibiting a new symmetry, namely, a gauge symmetry, we present a new proposal to make the metric tensor and the Weyl field invariant quantities with respect to gauge transformations. This allows us to develop a gauge invariant notion of proper time, besides allowing to describe the coupling of the geometric fields (gravitational and electromagnetic) with the matter fields. With this in mind, it was necessary to modify and reinterpret Weyl's original theory. In this way, we obtain a new kind of alternative theory of gravity. An important aspect that we emphasize in this dissertation is the reinterpretation (in Weyl's original theory) of the field responsible for the geometry of parallel transport as being formally identical to a massive vector field, which takes us back to the old theory developed by the Romanian physicist Alexandru Proca, developed in 1936, in the context of a theory of nuclear interactions, somewhat anticipating Hideki Yukawa's later theory for explaining strong nuclear forces. Thus, we dedicate part of this dissertation to the study of the Proca field in several different situations: in Minkowski's space-time, in the theory of general relativity, as well as in Weyl's invariant theory.

Keywords: Weyl geometry, Gravitation, Weyl invariant theory, Proca field, field equations.

Sumário

Resumo	i
Abstract	ii
1 INTRODUÇÃO	1
2 GEOMETRIA DE WEYL	4
2.1 Transformações de Calibre na Geometria de Weyl	7
2.1.1 Propriedades do Tensor $F_{\mu\nu}$	10
2.1.2 Invariantes na Geometria de Weyl	10
2.2 O Eletromagnetismo na Geometria de Weyl	16
2.2.1 As equações de campo no calibre natural	19
2.2.2 As equações de campo em um calibre qualquer	23
3 A TEORIA INVARIANTE DE WEYL E O CAMPO DE PROCA	28
3.1 A Crítica de Einstein à Teoria de Weyl	28
3.2 Reexaminando a crítica de Einstein	30
3.3 A geometrização do Campo de Proca	32
4 EQUAÇÕES DE MAXWELL E PROCA NA RELATIVIDADE ESPECIAL	33
4.1 Eletrodinâmica de Maxwell no espaço-tempo de Minkowski	33
4.1.1 Relação de Dispersão	35
4.1.2 Solução para o caso estático na eletrodinâmica de Maxwell	37
4.1.3 Tensor momento-energia do campo eletromagnético livre no espaço-tempo de Minkowski	38

4.2	Eletrodinâmica de Proca no espaço-tempo de Minkowski	40
4.2.1	Relação de Dispersão para o caso de Proca	42
4.2.2	Solução para o caso estático na eletrodinâmica de Proca	45
4.2.3	Tensor momento-energia do campo de Proca	46
5	CAMPO DE PROCA NA RELATIVIDADE GERAL	49
5.1	Sistema de equações Einstein-Proca	50
5.1.1	Tensor momento-energia do campo de Proca na Relatividade Geral	50
5.1.2	Solução com simetria esférica das equações de Einstein-Proca	52
6	CAMPO DE PROCA NA TEORIA INVARIANTE DE WEYL	59
6.1	Solução para o campo fraco	60
6.2	Aplicação no contexto cosmológico	64
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	69
	Referências Bibliográficas	71

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A teoria da Relatividade Especial formulada por Albert Einstein em 1905, é fundamentada em dois princípios fundamentais. O primeiro é o da covariância, que diz que as leis da física são as mesmas para todos os referenciais inerciais. O segundo princípio diz respeito à constância da velocidade da luz no vácuo, a qual deve ser a mesma em todos os referenciais inerciais. Entretanto, esse princípio nada diz sobre a covariância das leis da Física quando expressas em referenciais não-inerciais. Para englobar essa classe de referenciais em sua teoria, Einstein introduziu o chamado *princípio da relatividade geral*, cuja formulação matemática corresponde ao que se costuma chamar de *princípio da covariância geral*, que pode ser entendido como significando que as equações da Física devem ter uma forma tensorial [1–3].

Neste sentido, considerando o fato das equações de Maxwell serem covariantes, é possível dizer pelo princípio da covariância geral que o campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ se transforma como um tensor para qualquer transformação de coordenadas. A adoção do princípio da relatividade geral foi importante para Einstein construir uma teoria que fosse uma generalização da Relatividade Especial. Além disso, ele conseguiu descrever a gravitação em uma perspectiva inteiramente geométrica, associando o potencial gravitacional ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$, cuja dinâmica é determinada por um sistema de equações de campo, as conhecidas equações de Einstein. [3].

Com esse mesmo espírito, ao que nos parece, o matemático alemão Hermann Weyl em 1918 formulou uma generalização da geometria riemanniana (a geometria da relatividade geral) na tentativa de geometrização do campo eletromagnético, incorporando assim o

eletromagnetismo e a gravitação em uma única teoria. O que Weyl fez, na verdade, foi adicionar um grau de liberdade a mais à geometria riemanniana, isto é, dotar o espaço-tempo de uma nova grandeza geométrica, além do tensor métrico. Essa grandeza aparece na forma de um campo de 1-formas, estritamente relacionado com a lei de transporte paralelo de vetores no espaço-tempo.

Entretanto, a história nos mostra que a teoria de Weyl não foi bem aceita na época [4]. Sua proposta sofreu fortes críticas de Einstein, que sugeriu que a teoria previa alterações no espectro de radiação atômico de um gás quando este é submetido a um campo eletromagnético. Sabemos hoje, entretanto, que, na realidade, a teoria de Weyl não prevê esse efeito (pelo menos dentro de certa precisão dos instrumentos de medida atuais [5]). Infelizmente, a objeção de Einstein levou Weyl a abandonar sua teoria, que terminou sendo completamente esquecida. Recentemente, porém, graças a uma reinterpretação e extensão da teoria original, presenciamos um renovado interesse nas ideias de Weyl [6–11]. O objetivo do presente trabalho é apresentar uma discussão aprofundada dessa modificação e reinterpretação, que denominaremos de teoria invariante de Weyl, uma teoria alternativa à relatividade geral, na qual é introduzido um campo geométrico, que formalmente pode ser visto como um campo vetorial massivo. Esse campo tem sua dinâmica descrita pelas chamadas *equações de Proca* (em homenagem ao físico romeno Alexandru Proca) através de uma teoria que visava a descrever a interação e a dinâmica de *bósons massivos* de spin-1 [12].

Para uma melhor compreensão da maneira de como este trabalho está organizado, vamos aqui descrever a exposição dos capítulos que se seguem. No Capítulo 2 apresentamos de forma detalhada a maneira como a teoria e a geometria de Weyl foram construídas. No Capítulo 3 apresentamos a construção da teoria invariante de Weyl, onde propomos uma definição para o *tempo-próprio invariante de calibre* (gauge), além de descrevermos as equações de campo, considerando o acoplamento com a matéria. Introduzimos a seguir uma teoria modificada da gravidade considerando um campo vetorial massivo de natureza puramente geométrica. No Capítulo 4 por completeza, apresentamos um estudo de alguns casos particulares com o objetivo de comparar as características e propriedades da eletrodinâmica de Proca com as da eletrodinâmica de Maxwell, analisando os efeitos de "fótons" com uma massa diferente de zero. No Capítulo 5, será abordado o campo de Proca no contexto da relatividade geral, onde apresentamos soluções aproximadas encontradas na literatura para o sistema de equações Einstein-Proca. O Capítulo 6, é uma aplicação do campo de Proca na teoria invariante de Weyl, onde apresentamos uma solução para o campo fraco e a comparamos com resultados obtidos anteriormente no contexto da relatividade geral. Aqui também discutimos uma aplicação da teoria in-

variante na cosmologia. O Capítulo 7 finaliza o trabalho, tratando de soluções estáticas com simetria esférica na ausência de matéria. Na aproximação de campo fraco, vale aqui ressaltar, essas soluções se mostram grande semelhança com às encontradas na literatura para o campo de Proca na relatividade geral. Finalmente, em nossa conclusão, esboçamos uma breve perspectiva de possíveis trabalhos na direção de explorar novas consequências da teoria invariante de Weyl.

CAPÍTULO 2

GEOMETRIA DE WEYL

Na busca de uma teoria capaz de unificar o Eletromagnetismo e a Gravitação, objetivo tentado por Einstein durante toda sua vida [14], o matemático alemão Hermann Weyl , concebeu uma nova geometria que se constitui numa generalização da geometria riemanniana. Contendo um grau de liberdade a mais do que na geometria riemanniana, a partir de uma modificação da lei do transporte paralelo de um vetor, a geometria de Weyl considera a possibilidade de que no transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva fechada, além de direção sua norma possa variar. O mecanismo para tal modificação inclui a presença de um novo ente geométrico, a saber um campo de 1-formas que denotaremos daqui por diante de σ , cujas propriedades muito se assemelham com as propriedades do 4-potencial eletromagnético da teoria de Maxwell. Essa foi o caminho seguido por Weyl que, além de conseguiu introduzir o eletromagnetismo em uma perspectiva inteiramente geométrica, o faz num contexto de unificação com o campo gravitacional, o qual na teoria da relatividade de Einstein está associado ao tensor métrico g [15].

Façamos uma breve recapitulação do conceito de transporte paralelo na geometria riemanniana. Sabemos que para compararmos vetores definidos em uma variedade M em pontos distintos é utilizado o conceito de transporte paralelo, no qual um vetor transportado paralelamente de um ponto $P(x^\mu) \in M$ para um outro ponto infinitamente próximo $P(x^\mu + dx^\mu) \in M$, tem suas componentes alteradas pelo incremento $d\xi^\mu$ dado por

$$d\xi^\mu = -\Gamma_{\nu\gamma}^\mu dx^\nu \xi^\gamma \quad (2.1)$$

onde $\Gamma_{\nu\gamma}^{\mu}$ são as componentes da conexão métrica *. Na geometria riemanniana, um vetor transportado ao longo de uma curva fechada têm sua direção alterada, uma vez que o espaço é curvo, mas a sua norma permanece constante, diferentemente da geometria euclidiana em que tanto a norma quanto a direção são preservadas em um transporte paralelo do vetor. É feita também a exigência de que o produto escalar entre dois vetores seja invariante ao longo do transporte paralelo, o que é equivalente a postular que a derivada covariante da métrica g seja identicamente nula, ou seja,

$$\nabla_{\gamma}g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.2)$$

Tal fato, conhecido como "compatibilidade entre a métrica e a conexão" permite estabelecer-se uma relação de compatibilidade entre a métrica, de modo que os coeficientes da conexão $\Gamma_{\nu\gamma}^{\mu}$

$$\{\Gamma_{\nu\gamma}^{\mu}\} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\gamma\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^{\lambda}} \right), \quad (2.3)$$

que são conhecidos na literatura como *símbolos de Christoffel de segundo tipo*. A mudança proposta por Weyl consiste em considerar também a variação da norma do vetor ao ser transportado paralelamente por uma distancia infinitesimal, sendo essa variação proporcional ao comprimento do vetor antes do transporte ℓ , ao vetor deslocamento infinitesimal dx^{γ} e a um campo de 1-forma cujas componentes são $\sigma_{\gamma}(x)$, a saber:

$$d\ell = \frac{1}{2}\sigma_{\gamma}dx^{\gamma}\ell, \quad (2.4)$$

onde as componentes σ_{γ} como veremos serão associadas às componentes de um 4-potencial eletromagnético de maneira bastante original. Considerando a equação acima, é razoável pensar que σ_{γ} desempenha um papel semelhante a $\Gamma_{\nu\gamma}^{\mu}$ em (2.1). Essa modificação produz algumas alterações em relação à geometria riemanniana, caracterizando assim uma nova geometria, a saber, a geometria de Weyl.

Para verificarmos que alterações são estas vamos analisar a equação (2.4). O termo $d\ell$ pode ser calculado de duas maneiras distintas [11, 13], mas que devem ser equivalentes. Vejamos que fazendo a derivada do quadrado do comprimento de um vetor ξ , $\ell^2 = g_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu}$, e substituindo o lado direito da equação (2.4) vamos obter:

$$d\ell^2 = 2\ell d\ell = (g_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu})\sigma_{\gamma}dx^{\gamma} \Rightarrow d\ell^2 = g_{\mu\nu}\sigma_{\gamma}\xi^{\mu}\xi^{\nu}dx^{\gamma} \quad (2.5)$$

*O sinal de menos na relação (2.1) é uma convenção que estamos adotando, assim como [11].

Por outro lado, fazendo a derivada do quadrado do comprimento do vetor diretamente, temos:

$$d\ell^2 = d(g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu) = d(g_{\mu\nu}) \xi^\mu \xi^\nu + g_{\mu\nu} d(\xi^\mu) \xi^\nu + g_{\mu\nu} \xi^\mu d(\xi^\nu) \quad (2.6)$$

ao fazermos uso da lei de transporte paralelo expressa na equação (2.1), e escrevendo por regra da cadeia $d(g_{\mu\nu}) = g_{\mu\nu|\gamma} dx^\gamma$, obtém-se:

$$d\ell^2 = g_{\mu\nu|\gamma} \xi^\mu \xi^\nu dx^\gamma - g_{\mu\nu} \Gamma_{\eta\gamma}^\mu \xi^\eta \xi^\nu dx^\gamma - g_{\mu\nu} \Gamma_{\eta\gamma}^\nu \xi^\mu \xi^\eta dx^\gamma \quad (2.7)$$

Fazendo uma troca de índices livres de modo a escrever ξ^μ e dx^γ em evidência na expressão (2.7), e mediante a igualdade com a equação (2.5) podemos extrair, uma vez que ξ^μ e dx^γ são arbitrários:

$$g_{\mu\nu} \sigma_\gamma = g_{\mu\nu|\gamma} - g_{\eta\nu} \Gamma_{\mu\gamma}^\eta - g_{\mu\eta} \Gamma_{\nu\gamma}^\eta \quad (2.8)$$

Fazendo uma permutação cíclica dos índices podemos obter a conexão escrita em termos da métrica e do campo σ_γ , estabelecendo assim uma relação direta entre a conexão, a métrica e o campo de 1-forma σ_γ . Vamos obter por meio da permutação cíclica dos índices três equações, que são:

$$(i) \quad g_{\mu\nu} \sigma_\gamma = g_{\mu\nu|\gamma} - g_{\eta\nu} \Gamma_{\mu\gamma}^\eta - g_{\mu\eta} \Gamma_{\nu\gamma}^\eta$$

$$(ii) \quad g_{\gamma\mu} \sigma_\nu = g_{\gamma\mu|\nu} - g_{\eta\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^\eta - g_{\gamma\eta} \Gamma_{\mu\nu}^\eta$$

$$(iii) \quad g_{\nu\gamma} \sigma_\mu = g_{\nu\gamma|\mu} - g_{\eta\gamma} \Gamma_{\beta\mu}^\eta - g_{\nu\eta} \Gamma_{\gamma\mu}^\eta$$

Fazendo (i) + (ii) - (iii) e considerando a simetria da métrica e da conexão pela troca de índices, vamos obter:

$$(g_{\mu\nu} \sigma_\gamma + g_{\gamma\mu} \sigma_\nu - g_{\nu\gamma} \sigma_\mu) = (g_{\mu\nu|\gamma} + g_{\gamma\mu|\nu} - g_{\nu\gamma|\mu}) - 2g_{\mu\eta} \Gamma_{\nu\gamma}^\eta$$

Multiplicando essa equação por $g^{\mu\alpha}$ e contraindo μ , tem-se:

$$\delta_\eta^\alpha \Gamma_{\nu\gamma}^\eta = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\mu\nu|\gamma} + g_{\gamma\mu|\nu} - g_{\nu\gamma|\mu}) - \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\mu\nu} \sigma_\gamma + g_{\gamma\mu} \sigma_\nu - g_{\nu\gamma} \sigma_\mu)$$

$$\Gamma_{\nu\gamma}^\alpha = \{\alpha_{\nu\gamma}\} - \frac{1}{2} (\delta_\nu^\alpha \sigma_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \sigma_\nu - g_{\nu\gamma} \sigma^\alpha) \quad (2.9)$$

onde $\{\alpha_{\nu\gamma}\} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\mu\nu|\gamma} + g_{\gamma\mu|\nu} - g_{\nu\gamma|\mu})$ são os símbolos de christoffel de segundo tipo, como foi apresentado em (2.3).

Quando os coeficientes da conexão afim são dados pela equação (2.9) dizemos que eles representam os coeficientes da *conexão de Weyl*, a qual se reduz naturalmente á conexão riemanniana quando o campo de 1-formas σ é nulo. A expressão (2.8) corresponde então à condição de compatibilidade de Weyl, uma generalização da condição de compatibilidade riemanniana. Nesse caso, é fácil mostrar que derivada covariante da métrica g não é nula, mas sim dada por

$$\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\sigma_\gamma \quad (2.10)$$

Por outro lado, essa se reduz a condição de compatibilidade riemanniana quando $\sigma_\gamma = 0$, deste modo, a geometria de Weyl se apresenta como uma extensão da geometria riemanniana.

2.1 Transformações de Calibre na Geometria de Weyl

Consideremos agora a transformação conforme dada por [15]

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = e^{f(x)} g_{\alpha\beta} \quad (2.11)$$

onde $e^{f(x)}$ é chamado de fator conforme e $f(x)$ é uma função escalar. Feita essa transformação, precisamos saber qual deve ser a transformação de σ_μ induzida pelo novo campo métrico, para que a condição de compatibilidade de Weyl descrita na expressão (2.10) ainda seja válida. Para isso, devemos ter

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \bar{g}_{\alpha\beta} &= \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{\sigma}_\mu \Rightarrow \left(e^{f(x)} g_{\alpha\beta} \right)_{|\mu} = e^{f(x)} g_{\alpha\beta} \bar{\sigma}_\mu \Rightarrow \left(e^{f(x)} \right)_{|\mu} g_{\alpha\beta} + e^{f(x)} g_{\alpha\beta|\mu} = e^{f(x)} g_{\alpha\beta} \bar{\sigma}_\mu \\ &\Rightarrow f(x)_{|\mu} e^{f(x)} g_{\alpha\beta} + e^{f(x)} g_{\alpha\beta} \sigma_\mu = e^{f(x)} g_{\alpha\beta} \bar{\sigma}_\mu \Rightarrow [f(x)_{|\mu} + \sigma_\mu] g_{\alpha\beta} e^{f(x)} = e^{f(x)} g_{\alpha\beta} \bar{\sigma}_\mu \\ &\Rightarrow \bar{\sigma}_\mu = \sigma_\mu + f(x)_{|\mu}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde estamos introduzindo a notação $g_{\alpha\beta|\mu} = \nabla_\mu g_{\alpha\beta}$ para derivada covariante, e $f(x)_{|\mu} = \partial_\mu f(x)$ para a derivada parcial.

Portanto, σ_μ deve se transformar de acordo com a expressão (2.12) para que a condi-

ção de compatibilidade de Weyl ainda depois da transformação conforme de g continue válida. As expressões que definem as transformações acima, isto é,

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\alpha\beta} &= e^{f(x)} g_{\alpha\beta} \\ \bar{\sigma}_\mu &= \sigma_\mu + f(x)_{|\mu}\end{aligned}\tag{2.13}$$

representam o que se chama de *transformações de Weyl*, ou *transformações de calibre* (também ditas *transformações de gauge*), e são de fundamental importância na geometria de Weyl. Aqui é interessante notar que a conexão de Weyl descrita em (2.9) é invariante sob tais transformações. De fato, temos

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \bar{g}^{\lambda\alpha} (\bar{g}_{\beta\lambda|\gamma} + \bar{g}_{\lambda\gamma|\beta} - \bar{g}_{\gamma\beta|\lambda}) - \frac{1}{2} (\delta_\beta^\alpha \bar{\sigma}_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \bar{\sigma}_\beta - \bar{g}_{\beta\gamma} \bar{\sigma}^\alpha) \\ &= \frac{1}{2} e^{-f} g^{\lambda\alpha} \left[(e^f g_{\beta\lambda})_{|\gamma} + (e^f g_{\lambda\gamma})_{|\beta} + (e^f g_{\gamma\beta})_{|\lambda} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\delta_\beta^\alpha (\sigma_\gamma + f_{|\gamma}) + \delta_\gamma^\alpha (\sigma_\beta + f_{|\beta}) - g_{\beta\gamma} g^{\lambda\alpha} (\sigma_\lambda + f_{|\lambda}) \right] \\ &= \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} (\delta_\beta^\alpha f_{|\gamma} + \delta_\gamma^\alpha f_{|\beta} - g^{\lambda\alpha} g_{\gamma\beta} f_{|\lambda}) - \frac{1}{2} (\delta_\beta^\alpha f_{|\gamma} + \delta_\gamma^\alpha f_{|\beta} - g_{\gamma\beta} g^{\lambda\alpha} f_{|\lambda}).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}.\tag{2.14}$$

Grandezas que não mudam sua forma sob tais transformações são chamadas de *invariantes de calibre*.

Por definição de norma ou comprimento de vetores, então é imediato ver que se ξ^μ designa as componentes de um vetor ξ , então, depois da transformação conforme dada por (2.13), se ℓ e $\bar{\ell}$ denotam os comprimentos do mesmo vetor em relação às métricas g e $\bar{g}$, respectivamente, então teremos

$$\bar{\ell}^2 = \bar{g}_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = e^{f(x)} g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = e^{f(x)} \ell^2\tag{2.15}$$

Uma questão interessante diz respeito a quais são as condições mais gerais que o campo σ deve satisfazer para que a geometria de Weyl se reduza à geometria riemanniana, isto é, para que um vetor transportado ao longo de uma trajetória fechada mantenha seu comprimento preservado [16]. Essa condição pode ser obtida da seguinte maneira. Seja α uma curva fechada cujas equações sejam dadas por $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, sendo λ um parâmetro. Consideremos agora o transporte paralelo de um vetor tangente ξ de um ponto $x(\lambda_0)$ até outro ponto $x(\lambda)$. A variação finita no comprimento de ξ será obtida por integração a

partir da equação (2.4). Assim,

$$\begin{aligned} d\ell &= \frac{1}{2} \sigma_\mu dx^\mu \ell \Rightarrow \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\ell}{\ell} = \frac{1}{2} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sigma_\mu dx^\mu \Rightarrow \ln \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right) = \frac{1}{2} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sigma_\mu dx^\mu \\ &\Rightarrow \ell = \ell_0 \exp \left(\frac{1}{2} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sigma_\mu dx^\mu \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde ℓ_0 é o comprimento inicial do vetor ξ em $x(\lambda_0)$. Se a trajetória for fechada, ou seja, se $x(\lambda) = x(\lambda_0)$, então podemos fazer uso do teorema de Stokes, de modo a escrever a expressão (2.16) como:

$$\ell = \ell_0 \exp \left(\frac{1}{4} \int \int_s (\sigma_{\mu|v} - \sigma_{v|\mu}) dx^\mu \wedge dx^v \right) \quad (2.17)$$

Para que a integral seja nula, o rotacional de σ_μ deve ser zero em toda parte, ou seja:

$$\sigma_{\mu|v} - \sigma_{v|\mu} = 0 \quad (2.18)$$

Se isto acontece, podemos afirmar que existe pelo menos uma função escalar ϕ tal que $\sigma_\mu = \partial_\mu \phi = \phi_{|\mu}$. Nesse caso, é fácil ver que a integral $\int_{\lambda_0}^{\lambda} \sigma_\mu dx^\mu$ não depende do caminho de integração, o que caracteriza a chamada *geometria de Weyl integrável*. Além disso, é possível mostrar que tal tipo de geometria pode se reduzir a uma geometria riemanniana por uma transformação de Weyl apropriada, de modo a tornar o campo de Weyl σ nulo. De fato, o fator conforme que devemos escolher para que $\bar{\sigma}_\mu = 0$, deve ser determinado pela condição

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\mu &= \sigma_\mu + \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} = 0 \Rightarrow \sigma_\mu = -\frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} \Rightarrow -\phi_{|\mu} dx^\mu = df(x) \\ &\Rightarrow f(x) = -\phi + \text{constante}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

As considerações acima nos levam a definir naturalmente a 2-forma $F = 2d\sigma$, onde $d\sigma$ representa a derivada exterior da 1-forma σ , de maneira análoga à definição do tensor campo eletromagnético (ou tensor de Faraday), cujas componentes são dadas por

$$F_{\mu\nu} = \sigma_{\mu|v} - \sigma_{v|\mu}. \quad (2.20)$$

A chamada *geometria de Weyl não-integrável* trata do caso geral em que a 2-forma F é não-nula, o que corresponde a dizer que, pelo Lema de Poincaré, a 1-forma σ não é uma 1-forma exata. Weyl interpretou geometricamente F como uma espécie de curvatura, a que

ele chamou de "curvatura de comprimento" (*Streckenkrümmung*), por oposição à curvatura de direção (*Richtungskrümmung*), esta última dada pelo tensor de Riemann. (Daqui em diante, referir-nos-emos diretamente à 2-forma F como o *tensor* $F_{\mu\nu}$.)

2.1.1 Propriedades do Tensor $F_{\mu\nu}$

Assim como o tensor de curvatura de Riemann, esse campo tensorial $F_{\mu\nu}$ também possui algumas propriedades importantes, a saber :

- 1) O campo tensorial $F_{\mu\nu}$ é antissimétrico:

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \quad (2.21)$$

De fato,

$$F_{\mu\nu} = \sigma_{\mu|\nu} - \sigma_{\nu|\mu} = -(\sigma_{\nu|\mu} - \sigma_{\mu|\nu}) \Rightarrow F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \quad (2.22)$$

- 2) Suas derivadas parciais satisfazem a relação:

$$F_{\mu\nu|\gamma} + F_{\gamma\mu|\nu} + F_{\nu\gamma|\mu} = 0$$

- 3) Outra propriedade importante de $F_{\mu\nu}$ é de ser invariante sob transformação de calibre:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\mu\nu} &= \bar{\sigma}_{\mu|\nu} - \bar{\sigma}_{\nu|\mu} \Rightarrow \sigma_{\mu|\nu} + f(x)_{|\mu|\nu} - \sigma_{\nu|\mu} - f(x)_{|\nu|\mu} \Rightarrow \sigma_{\mu|\nu} - \sigma_{\nu|\mu} \\ &\Rightarrow \bar{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

caracterizando, assim, o $F_{\mu\nu}$ como sendo uma quantidade geométrica intrínseca da geometria de Weyl.

2.1.2 Invariantes na Geometria de Weyl

Na geometria de Weyl alguns conceitos da geometria riemanniana são mantidos. Por exemplo, a definição de transporte paralelo, em que intervém a conexão afim é a mesma. Portanto, podemos definir uma geodésica afim (ou auto-paralela) cujo vetor tangente é transportado seguindo a lei de transporte paralelo, ou seja, permanecendo paralelo a si mesmo. No entanto, a segunda definição da geodésica, como sendo uma linha entre dois pontos de menor comprimento, que é usada na geometria riemanniana, não pode mais

ser considerada na geometria de Weyl, pois o comprimento de uma curva não é uma quantidade invariante de calibre. Em contrapartida, o conceito de uma geodésica nula é invariante por calibre. Este é um fato importante tendo em vista o papel da geodésica nula na descrição da trajetória de uma partícula livre na relatividade geral. Outro conceito definido da mesma maneira que na geometria riemanniana é o de derivada covariante.

Sabemos que na geometria riemanniana a curvatura do espaço causa o chamado *desvio geodésico*, o qual é quantificado pelo comutador das derivadas covariantes, sendo a curvatura quantificada pelo tensor de Riemann, de acordo com a relação

$$\xi^\alpha_{\parallel\beta\parallel\gamma} - \xi^\alpha_{\parallel\gamma\parallel\beta} = R^\alpha_{\eta\beta\gamma} \xi^\eta. \quad (2.24)$$

A equação acima nos leva naturalmente ao *tensor de curvatura de Riemann*, que, em termos dos símbolos de Christoffel de segundo tipo, é definido pela expressão

$$R^\alpha_{\beta\gamma\eta} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma|\eta} - \Gamma^\alpha_{\beta\eta|\gamma} + \Gamma^\delta_{\beta\gamma} \Gamma^\alpha_{\delta\eta} - \Gamma^\delta_{\beta\eta} \Gamma^\alpha_{\delta\gamma} \quad (2.25)$$

A partir desse tensor definimos também por um processo de contração de índices as seguintes grandezas geométricas:

a) O tensor de curvatura de Ricci, dado por

$$R_{\beta\eta} = R^\alpha_{\beta\alpha\eta}, \quad (2.26)$$

b) O escalar de curvatura, a partir do tensor de Ricci, por uma contração de índices deste último, a saber,

$$R = g^{\beta\eta} R_{\beta\eta}. \quad (2.27)$$

É importante ressaltar que na geometria de Weyl, o tensor de curvatura é definido da mesma forma como na geometria riemanniana, embora a conexão usada em sua definição seja a conexão de Weyl, a qual é dada por

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \{\alpha_{\beta\gamma}\} - \frac{1}{2}(\delta^\alpha_\beta \sigma_\gamma - \delta^\alpha_\gamma \sigma_\beta - g_{\beta\gamma} \sigma^\alpha). \quad (2.28)$$

Como a conexão de Weyl é invariante sob transformações de calibre (2.13), o tensor de curvatura $R^\alpha_{\beta\gamma\eta}$ e o tensor de Ricci $R_{\beta\eta}$, que dependem apenas da conexão e de suas derivadas, também são invariantes de calibre. Por outro lado, o escalar de curvatura R definido por uma contração com a métrica g , não é invariante sob essas transformações, já que, designando por $\bar{R}$ e $\bar{g}^{\beta\eta}$ as grandezas R e $g^{\beta\eta}$ transformadas, temos

$$\bar{R} = \bar{g}^{\beta\eta} \bar{R}_{\beta\eta} = e^{-f} g^{\beta\eta} \bar{R}_{\beta\eta} = e^{-f} R \quad (2.29)$$

Nosso interesse agora é definir o escalar de curvatura na geometria de Weyl, ou seja, em termos da conexão de Weyl e determinar sua lei de transformação por transformações de Weyl e, também, encontra uma relação com o escalar de Riemann. Esse cálculo, como veremos, é bastante facilitado pela escolha de um sistema de coordenadas geodésicas. Portanto, como o escalar de curvatura R independe do sistema de coordenadas usado, vamos considerar assim como [16], um sistema de coordenadas geodésicas em um ponto P , e calcular o escalar de curvatura nesse ponto. Vamos, a partir de agora, identificar as grandezas riemannianas, seguindo a mesma notação de [11, 15] com um til ($\sim$) para distinguir as grandezas de Weyl das grandezas riemannianas.

No sistema de coordenadas geodésicas, considerando no ponto P , a conexão riemanniana dada pelos o símbolos de Christoffel de segundo tipo é nula, e assim o tensor de Riemann é descrito apenas pelos dois primeiros termos de (25) por serem termos onde intervêm derivadas da conexão, não necessariamente nulos.

É fácil ver que na geometria riemanniana o escalar de curvatura é dado por

$$\tilde{R} = g^{\beta\eta} \Gamma^\alpha_{\beta\alpha|\eta} - \left(g^{\beta\eta} \Gamma^\alpha_{\beta\eta} \right)_{|\alpha} + g^{\beta\eta} \Gamma^\delta_{\beta\alpha} \Gamma^\alpha_{\delta\eta} - g^{\beta\eta} \Gamma^\delta_{\beta\eta} \Gamma^\alpha_{\delta\alpha} \quad (2.30)$$

Nesse sistema de coordenadas a conexão de Weyl assume a forma:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2}(\delta^\alpha_\beta \sigma_\gamma + \delta^\alpha_\gamma \sigma_\beta - g_{\beta\gamma} \sigma^\alpha) \quad (2.31)$$

Para definirmos R na geometria de Weyl, precisamos definir os elementos de (2.30) em termos da conexão de Weyl. Da conexão de Weyl descrita pela expressão (2.28) podemos encontra os termos derivados da conexão riemanniana pois podem ser diferentes de zero.

Podemos encontra o primeiro termo derivado no escalar de curvatura, fazendo agora a contração de índices $\gamma = \alpha$. Obtemos, então:

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} &= \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}(\delta^\alpha_\beta \sigma_\gamma + \delta^\alpha_\gamma \sigma_\beta - g_{\beta\gamma} \sigma^\alpha) \\ &= \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\alpha} - \frac{1}{2}(\delta^\alpha_\beta \sigma_\alpha + \delta^\alpha_\alpha \sigma_\beta - g_{\beta\alpha} \sigma^\alpha) \\ &= \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\alpha} - \frac{1}{2}(g^{\alpha\lambda} g_{\lambda\beta} \sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sigma_\beta) \\ &\Rightarrow \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\alpha} - \frac{n}{2} \sigma_\beta. \end{aligned} \quad (2.32)$$

De (2.28) novamente, fazendo uma contração com a métrica inversa $g^{\beta\gamma}$, podemos obter o segundo termo do escalar de curvatura:

$$\begin{aligned}
 g^{\beta\eta}\Gamma^\alpha_{\beta\eta} &= g^{\beta\eta}\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\eta} - \frac{1}{2}g^{\beta\eta}(\delta^\alpha_\beta\sigma_\eta + \delta^\alpha_\eta\sigma_\beta - g_{\beta\eta}\sigma^\alpha) \\
 &= g^{\beta\eta}\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\eta} - \frac{1}{2}(\delta^\alpha_\beta\sigma^\beta + \delta^\alpha_\eta\sigma^\eta - g^{\beta\eta}g_{\beta\eta}\sigma^\alpha) \\
 &= g^{\beta\eta}\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\eta} - \frac{1}{2}(\sigma^\alpha + \sigma^\alpha - n\sigma^\alpha) \\
 &\Rightarrow g^{\beta\eta}\Gamma^\alpha_{\beta\eta} = g^{\beta\eta}\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\eta} + \frac{1}{2}(n-2)\sigma^\alpha, \tag{2.33}
 \end{aligned}$$

onde usamos nestas demonstrações o fato de que $g^{\beta\eta}g_{\beta\eta} = \delta^\beta_\beta = n$, sendo n a dimensão do espaço. Nos outros dois últimos termos do escalar de curvatura não aparecem derivadas da conexão; por isso consideramos a conexão de Weyl dada em (2.31), onde a conexão riemanniana é nula. Desse modo, podemos determiná-los diretamente, como mostramos abaixo:

$$\begin{aligned}
 g^{\beta\eta}\Gamma^\lambda_{\beta\alpha}\Gamma^\alpha_{\lambda\eta} &= \frac{1}{4}g^{\beta\eta}(\delta^\lambda_\beta\sigma_\alpha + \delta^\lambda_\alpha\sigma_\beta - g_{\beta\alpha}\sigma^\lambda)(\delta^\alpha_\lambda\sigma_\eta + \delta^\alpha_\eta\sigma_\lambda - g_{\lambda\eta}\sigma^\alpha) \\
 &= \frac{1}{4}g^{\beta\eta}(\sigma_\beta\sigma_\eta + \sigma_\eta\sigma_\beta - g_{\beta\eta}\sigma^\alpha\sigma_\alpha + \delta^\alpha_\alpha\sigma_\beta\sigma_\eta + \sigma_\beta\sigma_\eta - \sigma_\beta\sigma_\eta - \sigma_\beta\sigma_\eta - g_{\beta\eta}\sigma^\lambda\sigma_\lambda + \sigma_\eta\sigma_\beta) \\
 &= \frac{1}{4}g^{\beta\eta}(2\sigma_\beta\sigma_\eta - g_{\beta\eta}\sigma^\alpha\sigma_\alpha + n\sigma_\beta\sigma_\eta - g_{\beta\eta}\sigma^\lambda\sigma_\lambda) \\
 &= \frac{1}{4}(2\sigma_\beta g^{\beta\eta}\sigma_\eta - g^{\beta\eta}g_{\beta\eta}\sigma^\alpha\sigma_\alpha + n\sigma_\beta g^{\beta\eta}\sigma_\eta - g^{\beta\eta}g_{\beta\eta}\sigma^\lambda\sigma_\lambda) \\
 &= \frac{1}{4}(2\sigma_\beta\sigma^\beta - n\sigma_\alpha\sigma^\alpha + n\sigma_\beta\sigma^\beta - n\sigma_\lambda\sigma^\lambda).
 \end{aligned}$$

Fazendo $\lambda = \beta = \alpha$, obtemos a relação

$$\Rightarrow g^{\beta\eta}\Gamma^\lambda_{\beta\alpha}\Gamma^\alpha_{\lambda\eta} = -\frac{1}{4}(n-2)\sigma_\alpha\sigma^\alpha \tag{2.34}$$

De maneira análoga, nós encontramos

$$\Rightarrow g^{\beta\eta}\Gamma^\alpha_{\delta\alpha}\Gamma^\delta_{\beta\eta} = -\frac{1}{4}n(n-2)\sigma_\delta\sigma^\delta \tag{2.35}$$

Assim, o escalar de curvatura R em termos da conexão de Weyl é dado substituindo-se (2.32), (2.33), (2.34) e (2.35) na expressão (2.30) do escalar de curvatura na geometria

riemanniana. Tem-se, então,

$$\begin{aligned}
 R &= g^{\beta\eta} \left(\tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\alpha} + \frac{n}{2} \sigma_{\beta} \right)_{|\eta} - \left(g^{\beta\eta} \tilde{\Gamma}_{\beta\eta}^{\alpha} - \frac{1}{2}(n-2) \sigma^{\alpha} \right)_{|\alpha} - \frac{1}{4}(n-2) \sigma_{\alpha} \sigma^{\alpha} + \frac{1}{4}n(n-2) \sigma_{\delta} \sigma^{\delta} \\
 &= \left[g^{\beta\eta} \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha|\eta}^{\alpha} - (g^{\beta\eta} \tilde{\Gamma}_{\beta\eta}^{\alpha})_{|\alpha} \right] - \left(\frac{n}{2} g^{\beta\eta} \sigma_{\beta} \right)_{|\eta} - \frac{1}{2}(n-2) \sigma_{|\alpha}^{\alpha} + \left[\frac{1}{4}n(n-2) - \frac{1}{4}(n-2) \right] \sigma_{\alpha} \sigma^{\alpha} \\
 &= \tilde{R} - \frac{n}{2} \sigma^{\eta}_{|\eta} - \frac{1}{2}(n-2) \sigma^{\alpha}_{|\alpha} - \frac{1}{4}(n-1)(n-2) \sigma_{\alpha} \sigma^{\alpha} \\
 R &= \tilde{R} - (n-1) \sigma^{\alpha}_{|\alpha} + \frac{1}{4}(n-1)(n-2) \sigma_{\alpha} \sigma^{\alpha}. \tag{2.36}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, não é difícil ver que podemos reescrever essa expressão como:

$$R = \tilde{R} + \frac{1}{4}(n-1)(n-2) \sigma_{\alpha} \sigma^{\alpha} - (n-1) \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \sigma^{\alpha})_{|\alpha} \tag{2.37}$$

Esta é a expressão do escalar de curvatura na geometria de Weyl, dado em termos do escalar de curvatura riemanniano $\tilde{R}$ e do campo de Weyl σ_{α} . Observa-se que a expressão de R é invariante sob mudança de coordenadas dado o fato que todas as partes de (2.37) são escalares; assim, essa expressão é válida em todos os sistemas de coordenadas e não só no sistema de coordenadas que adotamos para essa demonstração. Para um espaço 4-dimensional ($n = 4$), a expressão (2.37) se reduz a

$$R = \tilde{R} + \frac{3}{2} (\sigma_{\alpha} \sigma^{\alpha}) - 3 \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \sigma^{\alpha})_{|\alpha}, \tag{2.38}$$

onde o último termo pode ser escrito em termos da 4-divergência riemanniana do vetor contravariante σ^{α} , a saber, $\tilde{\nabla}_{\alpha} \sigma^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \sigma^{\alpha})_{|\alpha}$. Assim :

$$R = \tilde{R} + \frac{3}{2} (\sigma_{\alpha} \sigma^{\alpha}) - 3 \tilde{\nabla}_{\alpha} \sigma^{\alpha}. \tag{2.39}$$

É importante ressaltar que na geometria de Weyl se tomarmos um campo vetorial covariante definido pela contração da métrica com um campo vetorial contravariante vamos obter uma quantidade que é não invariante de calibre, pois

$$\begin{aligned}
 \bar{\xi}_{\alpha} &= \bar{g}_{\alpha\beta} \xi^{\beta} = e^{f(x)} g_{\alpha\beta} \xi^{\beta} \\
 \bar{\xi}_{\alpha} &= e^{f(x)} \xi_{\alpha} \tag{2.40}
 \end{aligned}$$

Portanto, para termos quantidades tensoriais que se transformem pela lei usual de

mudança de coordenadas na geometria de Weyl, é introduzido assim como ressalta [16], o conceito de *peso de um tensor* em relação às transformações de calibre. De um modo geral, se um tensor se transforma segundo a lei

$$\bar{\xi}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots} = (e^{f(x)})^n \xi^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}, \quad (2.41)$$

dizemos que $\xi^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}$ é um tensor de peso n . Segundo essa definição, as grandezas de peso nulo ($n = 0$) são invariantes de calibre, a exemplo do campo tensorial $F_{\mu\nu}$. Já o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ ao ser submetido a uma transformação de Weyl, tem peso $n = 1$. O campo vetorial σ_μ não possui peso, uma vez que sua transformação é descrita por (2.12). Analogamente, é possível atribuir peso à densidade tensorial $\sqrt{-g}$ (ver [11, 16]) Podemos verificar isso facilmente considerando $g_{\mu\nu}$ na forma matricial, e levarmos em conta que ao multiplicar uma linha da matriz pelo fator e^f multiplicaremos o determinante de $g_{\mu\nu}$, denotado aqui por g por esse mesmo fator, isto é :

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu} \Rightarrow \bar{g} = e^f g \quad (2.42)$$

Para o caso de uma matriz quadrada com n linhas vamos ter, então:

$$\bar{g} = e^{nf} g \quad (2.43)$$

O determinante g de $g_{\mu\nu}$, portanto, tem peso n em relação à transformação de calibre (2.11), sendo n a dimensão da variedade. Se tomarmos o fator de densidade tensorial $\sqrt{-g}$ para um espaço-tempo quadri-dimensional ($n = 4$), verifica-se que ele tem peso 2 sob uma transformação de calibre, isto é :

$$\sqrt{-\bar{g}} = e^{(\frac{n}{2})f} \sqrt{-g} . \Rightarrow \sqrt{-\bar{g}} = e^{2f} \sqrt{-g}. \quad (2.44)$$

É interessante notar ainda, que apesar do campo tensorial $F_{\mu\nu}$ ser uma quantidade invariante de calibre, a sua forma contravariante não o é , tendo em vista que a mesma é definida por duas contrações com a métrica. Podemos verificar isso facilmente. Como a transformação de calibre de $g^{\mu\nu}$ é $\bar{g}^{\mu\nu} = e^{-f} g^{\mu\nu}$, temos

$$\bar{F}^{\alpha\beta} = \bar{g}^{\alpha\mu} \bar{g}^{\beta\nu} F_{\mu\nu} = e^{-2f} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu} .$$

Portanto, $\bar{F}^{\alpha\beta} = e^{-2f} F^{\alpha\beta}$. Logo, vemos que $F^{\alpha\beta}$ é não invariante de calibre, tendo peso $n = -2$. Por outro lado, podemos construir um tensor invariante $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ em uma variedade 4-dimensional multiplicando $F^{\alpha\beta}$ pela densidade tensorial $\sqrt{-g}$. De fato,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}^{\alpha\beta} &= \bar{F}^{\alpha\beta} \sqrt{-\bar{g}} = e^{-2f} F^{\alpha\beta} e^{2f} \sqrt{-g} = F^{\alpha\beta} \sqrt{-g} . : \\ \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}^{\alpha\beta} &= \mathcal{F}^{\alpha\beta}\end{aligned}\quad (2.45)$$

De modo análogo, podemos fazer o mesmo com o escalar de curvatura de Weyl R , produzindo assim, uma grandeza invariante de calibre, considerando a seguinte expressão:

$$R^2 \sqrt{-g} \quad (2.46)$$

Vale notar que o conceito de transformação de calibre desempenha um papel fundamental na geometria de Weyl, sendo assim relevante definir grandezas invariantes de calibre para a formulação de uma teoria consistente com o *Princípio de Invariância de Calibre*, postulado por Weyl e necessário em sua teoria para a geometrização do eletromagnetismo.

2.2 O Eletromagnetismo na Geometria de Weyl

Para uma compreensão física da intenção de Weyl em sua geometria, é preciso fazer uma conexão com o eletromagnetismo, incorporando seu formalismo na nova geometria. Com esse intuito, faz-se necessário expressar o campo eletromagnético em termos da geometria do espaço. O fascinante é que isso ocorre naturalmente, o que torna a teoria tão elegante. Podemos naturalmente interpretar o tensor $F_{\mu\nu}$ definido em (2.20) como o tensor campo eletromagnético, bem como o 4-potencial eletromagnético como o campo σ_μ , sendo a componente σ_0 identificada ao potencial escalar ϕ , e por conveniência definimos $\sigma_i = -A_i$ ($i = 1, 2, 3$) como o potencial vetor, já que a relação entre o 4-potencial e o tensor campo eletromagnético é descrita exatamente como em (2.20). Essa interpretação permite obter o primeiro par das equações de Maxwell, que provém da identidade

$$\{F_{\alpha\beta|\gamma}\} = 0 . \quad (2.47)$$

Naturalmente o segundo par de equações do eletromagnetismo, devem ser obtidas da variação da ação em relação a σ , como veremos posteriormente.

Observemos que sendo a densidade tensorial $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ bem como $F_{\alpha\beta}$, quantidades invariantes de calibre na geometria de Weyl, as equações de Maxwell nessa geometria, obtidas a partir de um escalar construído com essas grandezas deverão naturalmente serem covariantes em relação a transformações de coordenadas e invariantes em relação às

transformações de Weyl. Desse modo, como coloca [11], ” o eletromagnetismo surge como uma consequência natural dessa nova geometria, da mesma forma que a gravitação na relatividade geral”.

Para encontrarmos agora uma relação para o campo eletromagnético e o campo gravitacional em termos das quantidades σ_α e $g_{\alpha\beta}$, precisamos estabelecer equações de campo que relacionem tais quantidades. Com esse intuito, devemos inicialmente estabelecer uma ação, algo como:

$$S = \int W \sqrt{-g} \, d^4x, \quad (2.48)$$

onde é introduzido W , que deve ter peso -2 em uma transformação de calibre, já que $\sqrt{-g}$ tem peso 2 , para termos uma relação escalar invariante de calibre no fator integrante. vamos defini $\mathcal{W} = W \sqrt{-g}$ como uma densidade escalar na geometria de Weyl (a nossa densidade lagrangiana), tendo em vista que queremos obter equações de campo invariantes de calibre.

Portanto, podemos escrever a expressão (2.48) como:

$$S = \int \mathcal{W} \, d^4x.$$

O nosso intuito é fazer uso do princípio variacional, isto é , queremos encontrar uma $\mathcal{W}$ que, satisfazendo as condições usuais na fronteira da região de integração, atinja seu extremo na configuração que deve descrever a evolução real do sistema [17], ou seja:

$$\delta S = 0, \quad (2.49)$$

Devemos, então, definir uma densidade lagrangiana $\mathcal{W}$, cuja sua forma seja invariante sob transformações de Weyl, e que leve às equações de campo.

Conforme [16], precisamos definir $\mathcal{W}$ em termos do tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ e de sua primeira derivada, como também do campo vetorial σ_α e de suas primeiras derivadas, de modo que possamos encontrar as equações de campo na geometria de Weyl ao aplicarmos o princípio variacional.

A forma da densidade lagrangiana $\mathcal{W}$ proposta por Einstein para descrever o eletromagnetismo na relatividade geral, que leva às chamadas *equações de Einstein-Maxwell*, foi

$$\mathcal{W} = (R + \frac{C}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \sqrt{-g}, \quad (2.50)$$

onde C é uma constante que depende do sistema de unidades utilizado. Entretanto, $R\sqrt{-g}$

tem peso 1 sobre uma mudança de calibre, ou seja, não é invariante de calibre. Portanto, a densidade lagrangiana como proposta por Einstein não pode ser usada na teoria de Weyl.

Devemos escolher, segundo [16], uma densidade lagrangiana análoga à da (2.50), mas de modo a ser invariante de calibre, ou seja, ter peso nulo em uma transformação de Weyl. A forma mais simples é

$$\mathcal{W} = (R^2 + \omega F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \sqrt{-g}, \quad (2.51)$$

tendo em vista que $R^2 \sqrt{-g}$ é invariante de calibre sob transformações de Weyl. Assim, a ação proposta por Weyl será dada por

$$S = \int (R^2 + \omega F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \sqrt{-g} \, d^4x. \quad (2.52)$$

Fazendo a variação de S e admitindo o princípio da mínima ação, obtemos

$$\begin{aligned} \delta S = 0 &\Rightarrow \delta \int (R^2 + \omega F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \sqrt{-g} \, d^4x = 0 \\ &\Rightarrow \int [\delta(R^2 \sqrt{-g}) + \omega \delta(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g})] \, d^4x = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Analisando o termo $\delta(R^2 \sqrt{-g})$ separadamente, podemos escrever (2.53) de uma forma mais adequada para o nosso propósito:

$$\begin{aligned} \delta(R^2 \sqrt{-g}) &= 2R\delta R \sqrt{-g} + R^2 \delta(\sqrt{-g}) \\ &= 2R\delta(R\sqrt{-g}) - 2R^2 \delta(\sqrt{-g}) + R^2 \delta(\sqrt{-g}) \\ &\Rightarrow \delta(R^2 \sqrt{-g}) = 2R\delta(R\sqrt{-g}) - R^2 \delta(\sqrt{-g}) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Considerando-se o fato de que o escalar de curvatura R não é invariante de calibre, tendo peso $n = -1$, pode-se escolher um *gauge* (ou calibre) para o campo σ e o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, como o fez Weyl, de modo que

$$R = \Lambda, \quad (2.55)$$

sendo Λ uma constante. Podemos então, escrever o termo em (2.54) de modo a termos uma expressão mais simples para a variação de S . De fato, teremos

$$\delta(R^2 \sqrt{-g}) = 2\Lambda \delta(R) \sqrt{-g} + \Lambda^2 \delta(\sqrt{-g})$$

$$\begin{aligned}
&= 2\Lambda\delta(R\sqrt{-g}) - \Lambda^2\delta(\sqrt{-g}) \\
\Rightarrow \delta(R^2\sqrt{-g}) &= 2\Lambda \left[\delta(R\sqrt{-g}) - \frac{\Lambda}{2}\delta(\sqrt{-g}) \right] \quad (2.56)
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever (2.53) como:

$$\delta S = 2\Lambda \int \left[\delta(R\sqrt{-g}) - \frac{\Lambda}{2}\delta(\sqrt{-g}) + \frac{\omega}{2\Lambda}\delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}) \right] d^4x = 0.$$

Ou ainda,

$$\delta S = \delta \int \left(R - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right) \sqrt{-g} d^4x = 0. : \quad (2.57)$$

Substituindo o escalar de curvatura R da geometria de Weyl, dado em termos do escalar riemanniano $\tilde{R}$ pela (2.37), vamos obter:

$$\begin{aligned}
&\delta \int \left[\tilde{R} + \frac{3}{2}(\sigma_\alpha\sigma^\alpha) - \frac{3}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g} \sigma^\alpha)_{|\alpha} - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right] \sqrt{-g} d^4x = 0. : \\
\Rightarrow \delta \int \left[\tilde{R} + \frac{3}{2}(\sigma_\alpha\sigma^\alpha) - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right] \sqrt{-g} d^4x &- \underbrace{3 \int \partial_\alpha [\delta(\sqrt{-g} \sigma^\alpha)] d^4x}_{} = 0 \quad (2.58)
\end{aligned}$$

A integral em destaque na expressão (2.58) tem valor zero, pois trata de um termo de fronteira. Finalmente, obtemos:

$$\delta \int \left[\tilde{R} + \frac{3}{2}(\sigma_\alpha\sigma^\alpha) - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right] \sqrt{-g} d^4x = 0 \quad (2.59)$$

A partir dessa expressão podemos encontrar as equações de campo eletromagnéticas e gravitacionais da teoria de Weyl no calibre natural, ao fazermos uso do princípio variacional, considerando a variação em relação ao campo de Weyl σ_μ , e em relação ao campo métrico $g_{\mu\nu}$ de maneira independente.

2.2.1 As equações de campo no calibre natural

Para encontrarmos as equações para o campo σ , devemos considerar a variação em relação a esse campo da expressão (2.59). Desse modo, precisamos definir a forma das

variações dos termos $\delta(\sigma_\alpha \sigma^\alpha \sqrt{-g})$ e também $\delta(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g})$, que são os únicos termos não-nulos na variação em relação ao campo de Weyl . Vamos calcular estas variações separadamente:

$$\delta(\sigma_\alpha \sigma^\alpha \sqrt{-g}) = \delta(\sigma_\alpha) \sigma^\alpha \sqrt{-g} + \sigma_\alpha \delta(\sigma^\alpha) \sqrt{-g}. \quad (2.60)$$

Fazendo uso da relação $\sigma_\alpha \delta(\sigma^\alpha) = \sigma^\alpha \delta(\sigma_\alpha)$, obtemos

$$\delta(\sigma_\alpha \sigma^\alpha \sqrt{-g}) = 2\sqrt{-g} \sigma^\alpha \delta(\sigma_\alpha). \quad (2.61)$$

Já a variação $\delta(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g})$ é obtida da seguinte maneira:

$$\delta(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}) = \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} \delta(F_{\alpha\beta}) + \sqrt{-g} F_{\alpha\beta} \delta(F^{\alpha\beta}). \quad (2.62)$$

Utilizando agora a relação $F^{\alpha\beta} \delta(F_{\alpha\beta}) = F_{\alpha\beta} \delta(F^{\alpha\beta})$, vamos ter:

$$\begin{aligned} \delta(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}) &= 2\sqrt{-g} F^{\alpha\beta} \delta(F_{\alpha\beta}) = 2\sqrt{-g} F^{\alpha\beta} [(\delta\sigma_\alpha)_{|\beta} - (\delta\sigma_\beta)_{|\alpha}] \\ \Rightarrow \delta(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}) &= 2\sqrt{-g} F^{\alpha\beta} [2(\delta\sigma_\alpha)_{|\beta}]. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Para propósitos posteriores vamos escrever a expressão (2.63) como:

$$\delta(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}) = (4\sqrt{-g} F^{\alpha\beta} \delta\sigma_\alpha)_{|\beta} - 4(\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})_{|\beta} \delta\sigma_\alpha \quad (2.64)$$

Desse modo, ao substituírmos (2.61) e (2.64) em (2.59), têm-se:

$$\int \left[3\sqrt{-g} \sigma^\alpha \delta\sigma_\alpha + \frac{\omega}{2\Lambda} (4\sqrt{-g} F^{\alpha\beta} \delta\sigma_\alpha)_{|\beta} - \frac{2\omega}{\Lambda} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})_{|\beta} \delta\sigma_\alpha \right] d^4x = 0 \quad (2.65)$$

$$\int \left[3\sqrt{-g} \sigma^\alpha - \frac{2\omega}{\Lambda} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})_{|\beta} \right] \delta\sigma_\alpha d^4x + \underbrace{\int \frac{\omega}{2\Lambda} (4\sqrt{-g} F^{\alpha\beta} \delta\sigma_\alpha)_{|\beta} d^4x}_{=0} = 0 \quad (2.66)$$

Na equação acima, a integral em destaque se anula, pois se trata de um termo de fronteira. Deste modo, encontramos

$$\int \left[3\sqrt{-g} \sigma^\alpha - \frac{2\omega}{\Lambda} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})_{|\beta} \right] \delta\sigma_\alpha d^4x = 0. \quad (2.67)$$

Dado o fato de que $\delta\sigma_\alpha$ é uma variação arbitrária, conclui-se que

$$(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta})_{|\beta} = \frac{3\Lambda}{2\omega}\sqrt{-g}\sigma^\alpha, \quad (2.68)$$

Fica claro que para um calibre diferente do calibre natural ($R = \Lambda$), a equação acima deve mudar.

Do mesmo modo, tomando novamente a expressão (2.59), podemos obter as equações de campo gravitacional na geometria de Weyl no calibre natural fazendo agora uma variação em relação ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Temos, então,

$$\delta \int \left[\tilde{R} + \frac{3}{2}(\sigma_\alpha\sigma^\alpha) - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right] \sqrt{-g} d^4x = 0 \quad (2.69)$$

Vamos ver como ficam as variações de cada termo de (2.69) em relação ao campo métrico. Considerando a identidade $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}$, obtemos para o primeiro termo:

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{R}\sqrt{-g}) &= \delta(\tilde{R})\sqrt{-g} + \tilde{R}\delta(\sqrt{-g}) = \delta(\tilde{R}_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta})\sqrt{-g} + \tilde{R}\delta(\sqrt{-g}) \\ &= \delta(\tilde{R}_{\alpha\beta})g^{\alpha\beta}\sqrt{-g} + \tilde{R}_{\alpha\beta}\delta(g^{\alpha\beta})\sqrt{-g} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\beta}) \\ \Rightarrow \delta(\tilde{R}\sqrt{-g}) &= \left(\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{\alpha\beta} \right) \sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\beta}) + \delta(\tilde{R}_{\alpha\beta})g^{\alpha\beta}\sqrt{-g} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Vejamos agora os outros termos:

$$\begin{aligned} \delta(\sigma_\mu\sigma^\mu\sqrt{-g}) &= \delta(\sigma_\alpha\sigma_\beta g^{\alpha\beta})\sqrt{-g} + \sigma_\mu\sigma^\mu\delta(\sqrt{-g}) = \sigma_\alpha\sigma_\beta\sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\beta}) + \\ &\quad - \frac{1}{2}\sigma_\mu\sigma^\mu g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\beta}) \\ \Rightarrow \delta(\sigma_\mu\sigma^\mu\sqrt{-g}) &= \left(\sigma_\alpha\sigma_\beta - \frac{1}{2}\sigma_\mu\sigma^\mu g_{\alpha\beta} \right) \sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Para o termo $\delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g})$ vamos obter

$$\begin{aligned} \delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}) &= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}) + F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta(g^{\alpha\beta})F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sqrt{-g}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}g^{\beta\nu}\delta(g^{\alpha\mu}) + \sqrt{-g}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}g^{\alpha\mu}\delta(g^{\beta\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta(g^{\alpha\beta})F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sqrt{-g}F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu}g^{\mu\nu}\delta(g^{\alpha\beta}) + \sqrt{-g}F_{\nu\beta}F_{\mu\alpha}g^{\nu\mu}\delta(g^{\beta\alpha}). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Considerando as propriedades antissimétricas de $F_{\mu\nu}$, temos

$$\delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}) = -2\left(g^{\mu\nu}F_{\alpha\nu}F_{\beta\mu} + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\beta}). \quad (2.73)$$

De maneira mais compacta:

$$\delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}) = -2T_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\beta}) \quad (2.74)$$

onde $T_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}F_{\alpha\nu}F_{\beta\mu} + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, que podemos interpreta como sendo o tensor momento-energia do campo de Weyl. Portanto, substituindo as expressões (2.70), (2.71) e (2.74) em (2.69), vamos obter

$$\begin{aligned} \delta S = \int \left[\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{\alpha\beta} + \frac{3}{2}\left(\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta} - \frac{1}{2}\sigma_{\mu}\sigma^{\mu}g_{\alpha\beta}\right) + \frac{\Lambda}{4}g_{\alpha\beta} - \frac{\omega}{\Lambda}T_{\alpha\beta} \right] \sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\beta})d^4x + \\ + \underbrace{\int g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\delta\tilde{R}_{\alpha\beta}d^4x}_{=0} = 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

A integral em destaque é nula, pois o termo do integrando pode ser expresso como um termo de superfície. Portanto, impondo que $\delta S = 0$, e como a variação $\delta(g^{\alpha\beta})$ é arbitrária, podemos concluir que

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{\alpha\beta} + \frac{3}{2}\left(\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta} - \frac{1}{2}\sigma_{\mu}\sigma^{\mu}g_{\alpha\beta}\right) + \frac{\Lambda}{4}g_{\alpha\beta} = \frac{\omega}{\Lambda}T_{\alpha\beta} \quad (2.76)$$

Do mesmo modo que (2.68), essa expressão também só é válida no calibre natural ($R = \Lambda$). Observe que quando o campo de Weyl é nulo, $\sigma_{\mu} = 0$, recupera-se naturalmente a equação da relatividade geral que descreve o espaço vazio sem a presença de campo eletromagnético, quando considerado a constante cosmológica.

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{\alpha\beta} + \frac{\Lambda}{4}g_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.77)$$

onde a constante Λ pode ser interpretada como sendo a constante cosmológica. Desse modo, podemos considera que a teoria de Weyl se apresenta como uma extensão da teoria da relatividade geral de Einstein.

2.2.2 As equações de campo em um calibre qualquer

Podemos obter as equações de campo eletromagnéticas e gravitacionais válidas para qualquer calibre (gauge) e não apenas para o calibre natural escolhido anteriormente, o qual restringia o escalar de curvatura de Weyl R a ser uma constante Λ , que poderia ser entendida como sendo a constante cosmológica,

Tomando as transformações de Weyl definidas agora como [15]:

$$g_{\alpha\beta} = e^{f(x)} \bar{g}_{\alpha\beta},$$

$$\sigma_\mu = \bar{\sigma}_\mu + f(x)_{|\mu},$$

vamos busca determinar a forma da transformação de calibre necessária para passarmos do calibre natural em que $R = \Lambda$ para um calibre qualquer $\bar{R}$. Sendo a métrica inversa $g^{\alpha\beta} = e^{-f} \bar{g}^{\alpha\beta}$, e como o tensor de Ricci é invariante de calibre ($R_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta}$) na teoria de Weyl, podemos pela definição do escalar de curvatura obter a forma da transformação de calibre necessária. Assim, temos:

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = e^{-f} \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{R}_{\alpha\beta} = e^{-f} \bar{R} \Rightarrow R = e^{-f} \bar{R}$$

$$\Rightarrow e^f = \frac{\bar{R}}{\Lambda} \quad (2.78)$$

Portanto, substituindo (2.78) nas transformações de Weyl podemos escrever:

$$g_{\alpha\beta} = e^{f(x)} \bar{g}_{\alpha\beta} \Rightarrow g_{\alpha\beta} = \frac{\bar{R}}{\Lambda} \bar{g}_{\alpha\beta} \quad (2.79)$$

Como também,

$$\sigma_\mu = \bar{\sigma}_\mu + f_{|\mu} \Rightarrow \sigma_\mu = \bar{\sigma}_\mu + \left(\ln \frac{\bar{R}}{\Lambda} \right)_{|\mu} = \bar{\sigma}_\mu + (\ln \bar{R} - \ln \Lambda)_{|\mu}$$

$$\Rightarrow \sigma_\mu = \bar{\sigma}_\mu + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\mu \bar{R} \quad (2.80)$$

Sob essas transformações vejamos como ficam os termos $\sqrt{-g} \sigma^\alpha$ e $\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}$ da equação (2.68):

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \sigma^\alpha &= \sqrt{-g} g^{\alpha\mu} \sigma_\mu = \sqrt{-g} e^{-f} \bar{g}^{\alpha\mu} \left[\bar{\sigma}_\mu + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\mu \bar{R} \right] \\ &= \sqrt{-\bar{g}} e^{2f} e^{-f} \bar{g}^{\alpha\mu} \left[\bar{\sigma}_\mu + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\mu \bar{R} \right] = \sqrt{-\bar{g}} e^f \bar{g}^{\alpha\mu} \left[\bar{\sigma}_\mu + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\mu \bar{R} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{-g}\sigma^\alpha = \frac{\bar{R}}{\Lambda}\sqrt{-\bar{g}}\bar{g}^{\alpha\mu} \left[\bar{\sigma}_\mu + \frac{1}{\bar{R}}\partial_\mu \bar{R} \right] \quad (2.81)$$

Como $\bar{F}_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}$, temos diretamente:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta} \right)_{|\beta} &= \left(\sqrt{-g}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}F_{\mu\nu} \right)_{|\beta} = \left(\sqrt{-\bar{g}}e^{-2f}e^f e^f \bar{g}^{\alpha\mu}\bar{g}^{\beta\nu}\bar{F}_{\mu\nu} \right)_{|\beta} \\ &\Rightarrow \left(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta} \right)_{|\beta} = \left(\sqrt{-\bar{g}}\bar{F}^{\alpha\beta} \right)_{|\beta} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Substituindo então (2.81) e (2.82) nas equações de campo eletromagnéticas obtidas no calibre natural (2.68), vamos obter:

$$\left(\sqrt{-\bar{g}}\bar{F}^{\alpha\beta} \right)_{|\beta} = \frac{3}{2\omega}\sqrt{-\bar{g}}\bar{g}^{\alpha\mu} \left[\bar{R}\bar{\sigma}_\mu + \partial_\mu \bar{R} \right] \quad (2.83)$$

Essas são as equações de campo eletromagnéticas para o campo $\bar{\sigma}_\mu$, válidas para qualquer calibre.

Para obtermos agora, as equações de campo gravitacionais na teoria de Weyl válidas para qualquer calibre (gauge), vamos realiza um procedimento semelhante. Tendo em vista que o tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$ na geometria de Weyl é invariante sob transformações de calibre (gauge), podemos escrever a equação (2.76) unicamente em termos de quantidades com valores válidos para qualquer calibre. O tensor de Ricci weylano é dada por

$$R_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\alpha\beta} - F_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\beta \sigma_\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha \sigma_\beta + g_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\mu \sigma^\mu) - \frac{1}{2}(\sigma_\alpha \sigma_\beta - g_{\alpha\beta} \sigma_\mu \sigma^\mu). \quad (2.84)$$

Observe-se que o tensor de Ricci na teoria de Weyl não é simétrico devido a presença do tensor campo eletromagnético $F_{\alpha\beta}$ que é antissimétrico pela troca de índices. Assim, podemos decompor o tensor de Ricci em uma parte simétrica $R_{(\alpha\beta)}$ e outra antissimétrica $R_{[\alpha\beta]}$, sendo:

$$R_{(\alpha\beta)} = \tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\beta \sigma_\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha \sigma_\beta + g_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\mu \sigma^\mu) - \frac{1}{2}(\sigma_\alpha \sigma_\beta - g_{\alpha\beta} \sigma_\mu \sigma^\mu) \quad (2.85)$$

$$R_{[\alpha\beta]} = -F_{\alpha\beta} \quad (2.86)$$

Da equação (2.85) podemos expressa o tensor de Ricci riemaniano em termos da parte simétrica do tensor de Ricci weylano acrescentando mais alguns termos:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = R_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\beta \sigma_\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha \sigma_\beta + g_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\mu \sigma^\mu) + \frac{1}{2}(\sigma_\alpha \sigma_\beta - g_{\alpha\beta} \sigma_\mu \sigma^\mu) \quad (2.87)$$

Podemos ainda obter o escalar de curvatura riemanniano em termos do escalar de curvatura de Weyl contraindo (2.87) com $g^{\alpha\beta}$, isto é definido por $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$. A parte antissimétrica é nula, uma vez que $g^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0$ por ser o produto de um tensor simétrico $g^{\alpha\beta}$ com um antissimétrico $F_{\alpha\beta}$. então, vamos obter:

$$g^{\alpha\beta} \tilde{R}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} R_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\tilde{\nabla}_\beta \sigma_\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha \sigma_\beta + g_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\mu \sigma^\mu) + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\sigma_\alpha \sigma_\beta - g_{\alpha\beta} \sigma_\mu \sigma^\mu)$$

$$\tilde{R} = R + \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\beta \sigma^\beta + \tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha + 4\tilde{\nabla}_\mu \sigma^\mu) + \frac{1}{2}(\sigma_\alpha \sigma^\alpha - 4\sigma_\mu \sigma^\mu) \quad (2.88)$$

onde usamos o fato de $g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = n = 4$. Fazendo uma troca dos índices livres de modo a escrever:

$$\tilde{R} = R - \frac{3}{2} \sigma_\mu \sigma^\mu + 3\tilde{\nabla}_\mu \sigma^\mu, \quad (2.89)$$

que é equivalente ao escalar de curvatura encontrado pelo método de coordenadas geodésicas. É interessante notar também, que no calibre natural o campo de Weyl σ obedece à equação (2.68). Dessa forma, é imediato ver que ao derivarmos ambos os lados de (2.68) em relação à x^μ obtemos

$$\tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha = 0, \quad (2.90)$$

condição a que nos referemos na literatura como *gauge (ou calibre) de Lorentz*, que aqui aparece naturalmente. Feitas essas considerações, podemos reescrever o tensor de Ricci riemanniano (2.87) e o escalar de curvatura (2.88) como :

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = R_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\beta \sigma_\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha \sigma_\beta) + \frac{1}{2}(\sigma_\alpha \sigma_\beta - g_{\alpha\beta} \sigma_\mu \sigma^\mu), \quad (2.91)$$

o que implica

$$\tilde{R} = R - \frac{3}{2} \sigma_\mu \sigma^\mu. \quad (2.92)$$

Substituindo agora as equações (2.91) e (2.92) na equação de campo gravitacional no calibre natural vamos ter:

$$\begin{aligned}
R_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\beta \sigma_\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha \sigma_\beta) + \frac{1}{2}(\sigma_\alpha \sigma_\beta - g_{\alpha\beta} \sigma_\mu \sigma^\mu) - \frac{1}{2}(R - \frac{3}{2} \sigma_\mu \sigma^\mu) g_{\alpha\beta} + \\
+ \frac{3}{2}(\sigma_\alpha \sigma_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \sigma^\mu \sigma_\mu) + \frac{\Lambda}{4} g_{\alpha\beta} = \frac{\omega}{\Lambda} T_{\alpha\beta}
\end{aligned} \quad (2.93)$$

A derivada covariante riemanniana também pode ser expressa em termos da derivada covariante Weyliana, que é definida como :

$$\nabla_\alpha \sigma_\beta = \tilde{\nabla}_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\alpha \sigma_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \sigma_\mu \sigma^\mu$$

Desse modo, podemos escrever (2.93) como :

$$R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \frac{\Lambda}{4} g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\nabla_\beta \sigma_\alpha + \nabla_\alpha \sigma_\beta) + \sigma_\alpha \sigma_\beta = \frac{\omega}{\Lambda} T_{\alpha\beta} \quad (2.94)$$

Aplicando agora as transformações (2.78), (2.79) e (2.80) vamos ter:

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{R}}{\Lambda} \bar{g}_{\alpha\beta} \right) \Lambda + \frac{\Lambda}{4} \left(\frac{\bar{R}}{\Lambda} \bar{g}_{\alpha\beta} \right) + \frac{1}{2} [\nabla_\beta (\bar{\sigma}_\alpha + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\alpha \bar{R}) + \nabla_\alpha (\bar{\sigma}_\beta + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\beta \bar{R})] + \\
+ (\bar{\sigma}_\alpha + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\alpha \bar{R})(\bar{\sigma}_\beta + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\beta \bar{R}) = \frac{\omega}{\Lambda} \bar{T}_{\alpha\beta} e^{-f}
\end{aligned} \quad (2.95)$$

Sendo $e^{-f} = \frac{\Lambda}{\bar{R}}$, podemos escrever essa expressão como:

$$\begin{aligned}
\bar{R} \left[\bar{R}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{4} \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{R} \right] + \frac{1}{2} \bar{R} (\nabla_\beta \bar{\sigma}_\alpha + \nabla_\alpha \bar{\sigma}_\beta) + \nabla_\beta \nabla_\alpha \bar{R} + \bar{R} \bar{\sigma}_\alpha \bar{\sigma}_\beta + \\
+ (\bar{\sigma}_\alpha \nabla_\beta \bar{R} + \bar{\sigma}_\beta \nabla_\alpha \bar{R}) = \omega \bar{T}_{\alpha\beta}
\end{aligned} \quad (2.96)$$

Definindo o tensor simétrico $D_{(\alpha\beta)}$ por

$$D_{(\alpha\beta)} = \nabla_\beta \nabla_\alpha \bar{R} + \frac{1}{2} \bar{R} (\nabla_\beta \bar{\sigma}_\alpha + \nabla_\alpha \bar{\sigma}_\beta) + \bar{R} \bar{\sigma}_\alpha \bar{\sigma}_\beta + (\bar{\sigma}_\alpha \nabla_\beta \bar{R} + \bar{\sigma}_\beta \nabla_\alpha \bar{R}), \quad (2.97)$$

a equação (2.96) pode ser escrita de maneira mais simples como sendo

$$\omega \bar{T}_{\alpha\beta} = \bar{R} G_{\alpha\beta} + D_{(\alpha\beta)} \quad (2.98)$$

onde $G_{\alpha\beta} = \bar{R}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{4} \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{R}$, é o tensor de Einstein. Essas são as equações de campo

gravitacionais na teoria de Weyl, válidas para qualquer calibre (gauge). Admitindo o caso particular em que o campo de Weyl seja nulo, podemos recupera as equações de campo da relatividade geral. Com efeito, sendo $\sigma_\alpha = 0$, vamos ter como consequência direta que $T_{\alpha\beta} = 0$ e $F_{\alpha\beta} = 0$. Assim, de (2.83) temos:

$$\partial_\mu \bar{R} = 0 \Rightarrow \bar{R} = \Lambda = \text{Constante}. \quad (2.99)$$

Então, de (2.92) ficamos com:

$$R = \tilde{R} = \Lambda = \text{Constante} \quad (2.100)$$

Isto implica que $D_{(\alpha\beta)} = 0$, e, portanto, da equação (2.98) vamos ter duas possibilidades:

$$\tilde{R} = 0$$

ou

$$G_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.101)$$

Se $\tilde{R} = 0$ podemos concluir que as soluções das equações de Weyl serão idênticas às soluções das equações de Einstein no vazio, com $\tilde{R}_{\alpha\beta} = 0$. Por outro lado, se $G_{\alpha\beta} = 0$, temos que $\tilde{R}_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}\Lambda$, isso implica dizer que as soluções no vácuo das equações de Weyl correspondem a espaços em que o tensor de curvatura de Ricci é constante, conhecidos na literatura como *espaços de Einstein* [15].

Esses resultados são bastante interessantes, mostrando uma possível maneira de incorporar eletromagnetismo e a gravitação através de uma modificação da geometria do espaço-tempo, o que é, sem dúvidas, uma ideia brilhante.

CAPÍTULO 3

A TEORIA INVARIANTE DE WEYL E O CAMPO DE PROCA

Numa leitura atual da teoria de Weyl em sua versão original aponta que, apesar da sua elegância matemática existem algumas questões a serem esclarecidas, a começar pelo fato dela não descrever como a gravitação e o campo eletromagnético interagem com a matéria [6]. Em particular, esse reexame revela que de certo modo que a teoria estava incompleta. Neste sentido, buscamos aqui apresentar uma discussão detalhada de uma possível modificação e reinterpretação da teoria, de modo a torná-la completa e consistente com o espírito original de Weyl.

3.1 A Crítica de Einstein à Teoria de Weyl

Einstein apontou um fato bastante desestimulador sobre a teoria de Weyl referente a suas previsões observacionais, conhecido hoje como *o segundo efeito do relógio* [18]. Vindo de Einstein, isto se tornou uma forte crítica à teoria, o que levou ao seu esquecimento durante um longo período. O cerne da crítica de Einstein depende da definição e de certas interpretações de algumas noções relativas ao tempo próprio de um relógio ideal. Para entendermos melhor isto, vamos partir de uma análise simples, como é feito normalmente [6, 11, 15]. Como vimos, ao fazermos o transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva, a sua norma é alterada de acordo com a expressão abaixo:

$$\ell = \ell_0 \exp \left(\frac{1}{2} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sigma_{\mu} dx^{\mu} \right) \quad (3.1)$$

Consideremos uma região do espaço em que o campo de Weyl e o campo gravitacional ambos sejam estáticos e com simetria radial, sendo a única componente diferente de zero do campo de Weyl $\sigma_0 = \varphi(\vec{r})$. A proposta de Einstein é associar o período (isto é, seu "tique-taque") de um relógio ao comprimento ℓ de um certo vetor do tipo-tempo, de modo que considerando um relógio em repouso no instante $x^0 = 0$ associamos ao comprimento ℓ_0 o período τ_0 , então, no decorrer de um tempo $x^0 = t$ o período do relógio de acordo com (3.1) é :

$$\tau = \tau_0 \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^{x^0} \sigma_0 dx^0 \right) \Rightarrow \tau = \tau_0 \exp \left(\frac{1}{2} (\varphi t) \right), \quad (3.2)$$

Isso implica dizer que se tivermos dois relógios atômicos idênticos, onde o "tique-taque" desses relógios corresponde à frequência de radiação emitida pelos relógios, ao transportar um deles passando por uma região do espaço com a presença do campo de Weyl e o outro por uma região em que não tenhamos o campo de Weyl, o primeiro será afetado, sendo que ao se encontrarem novamente o relógio afetado continuará a emitir radiação em uma frequência diferente, ou seja, o espectro de radiação do átomo é afetado. Entretanto, o espectro de radiação do átomo é bem definido e tal alteração nunca foi, em princípio observada (pelo menos dentro de certa precisão [5]).

Começemos por discutir a objeção feita por Einstein. Entendemos que a teoria de Weyl, como uma teoria que adota o Princípio de Invariância de Calibre, deve ter suas quantidades descritas de modo a serem invariantes sob transformações de Weyl. Sendo assim, é de se esperar que a noção de tempo próprio também o seja. Analisando-se o argumento de Einstein, percebemos que a sua crítica se baseia, de certo modo, na definição de tempo próprio riemanniano, a saber:

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int [g_{\mu\nu} U^{\mu} U^{\nu}]^{\frac{1}{2}} d\lambda \quad (3.3)$$

onde U é o vetor tangente á linha de universo de um relógio que viaja ao longo de uma curva $x^{\alpha} = x^{\alpha}(\lambda)$, e c é a velocidade da luz.

Vejamos que essa definição riemanniana não é invariante sob transformações de Weyl, e que também não contém o campo de Weyl, ou seja, o campo de Weyl não contribui nessa definição de tempo próprio, o que está em desacordo com as características intrínsecas das quantidades fundamentais da nova teoria. Um primeiro passo, seria, portanto, é buscar

uma definição de tempo próprio invariante sob transformações de Weyl.

3.2 Reexaminando a crítica de Einstein

Na busca de uma definição de tempo próprio $\Delta\tau$ que seja compatível com a teoria de Weyl, [7] apresenta algumas condições que devem ser considerados. Essas condições são:

1. Ser invariante sob as transformações de Weyl;
2. Ter dependência tanto na métrica $g_{\mu\nu}$ quanto no campo de calibre σ_μ ;
3. Deve recair em (3.3) quando σ_μ for igual a zero;
4. Deve ser escrito na forma $\Delta\tau = \int \mathcal{F}(U, g, \sigma) d\lambda$, sendo $\mathcal{F}$ uma função homogênea de primeiro grau em relação ao vetor tangente U . Essa condição garante a invariância de $\Delta\tau$ sob reparametrização.

Uma definição que obedece a tais condições aparece na teoria escalar-tensorial geométrica, em que a geometria corresponde a uma variedade de Weyl integrável, um caso particular em que $\sigma_\mu = \phi_{|\mu}$ (ver [19]), sendo dada por

$$\Delta\tau = \int_a^b e^{-\frac{\phi}{2}} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda. \quad (3.4)$$

No entanto, na proposta recente que traz uma abordagem invariante da teoria original de Weyl (ver [6]), define-se uma métrica invariante $\gamma_{\mu\nu}$ como mostraremos a seguir.

Com $\gamma_{\mu\nu}$ é possível definir um tempo próprio invariante, como também buscar estabelecer um procedimento invariante para considerar o acoplamento entre a geometria e a matéria.

Neste sentido, vamos busca definir esse novo tensor métrico no calibre natural $\bar{R} = \Lambda$. Considerando assim, como [6], a transformação de Weyl

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\mu\nu} &= e^f g_{\mu\nu} \\ \bar{\sigma}_\mu &= \sigma_\mu + \partial_\mu f, \end{aligned} \quad (3.5)$$

podemos defini esse novo tensor métrico no calibre natural impondo que

$$\bar{R} = \Lambda = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} \Rightarrow \Lambda = e^{-f} R$$

$$\Rightarrow e^{-f} = \frac{\Lambda}{R}. \quad (3.6)$$

Portanto,

$$\gamma_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu} \Rightarrow \gamma_{\mu\nu} = \frac{R}{\Lambda} g_{\mu\nu} \quad (3.7)$$

Verifiquemos que essa nova métrica é invariante de calibre sob as transformações (3.5). De fato,

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\mu\nu} &= \frac{\bar{R}}{\Lambda} \bar{g}_{\mu\nu} = \frac{e^{-f} R}{\Lambda} e^f g_{\mu\nu} \\ &\Rightarrow \bar{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Desse modo, as quantidades construídas a partir dessa nova métrica também serão invariantes. Assim, podemos defini o tempo próprio invariante como [6]:

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int [\gamma_{\mu\nu} U^\mu U^\nu]^{\frac{1}{2}} d\lambda. \quad (3.9)$$

Interessados agora no acoplamento com a matéria, notemos que a definição da ação de interação com a matéria passa pela definição invariante do tensor momento-energia da matéria usando-se o procedimento padrão da relatividade geral, isto é,

$$\delta S_{(m)} = \delta \left(\kappa \int \sqrt{|\gamma|} L_M(\psi, \nabla\psi) d^4x \right) = \kappa \int \sqrt{|\gamma|} T_{\alpha\beta}^* \delta\gamma^{\alpha\beta} d^4x, \quad (3.10)$$

onde L_M representa a densidade lagrangiana da matéria, ψ designa os campos de matéria, ∇ o operador de derivada covariante em relação a $\gamma_{\mu\nu}$, e κ uma constante de acoplamento. É importante notar que a forma de $L_M(\psi, \nabla\psi)$ é obtida pela aplicação do mesmo princípio da mínima ação adotado na relatividade geral.

Calculando, então, a variação em relação a $\gamma_{\mu\nu}$ e σ_α da ação total S_T , dada pela soma dessa ação com a ação (2.69), e impondo que $\delta S_T = 0$, vamos obter as seguintes equações de campo:

$$\bar{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \bar{R} g_{\alpha\beta} + \frac{3}{2} \left(\sigma_\alpha \sigma_\beta - \frac{1}{2} \sigma_\mu \sigma^\mu g_{\alpha\beta} \right) + \frac{\Lambda}{4} g_{\alpha\beta} = \frac{\omega}{\Lambda} T_{\alpha\beta} - \kappa T_{\alpha\beta}^*, \quad (3.11)$$

$$(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta})_{|\beta} = \frac{3\Lambda}{2\omega}\sqrt{-g}\sigma^\alpha \quad (3.12)$$

Temos então as equações de campo na presença de matéria, sendo $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento associado ao campo de Weyl σ_α , e $T_{\mu\nu}^*$ o tensor energia-momento de matéria.

3.3 A geometrização do Campo de Proca

Analisando-se as equações de campo σ_α , nota-se que existem certas diferenças em relação às equações eletromagnéticas de Maxwell. Em sua teoria Weyl interpreta o campo σ_μ como sendo o 4-potencial eletromagnético A_μ ; no entanto, pode-se observar que de acordo com (3.12) o campo eletromagnético está acoplado consigo mesmo, uma vez que o campo σ_μ aparece como sendo sua própria fonte, e não como nas equações de Maxwell onde a fonte consiste de uma quadri-corrente j^μ , a qual só depende das cargas elétricas.

Por outro lado, como foi apontado por [6], tomando a ação no calibre natural

$$\delta \int \left[\tilde{R} + \frac{3}{2}(\sigma_\alpha\sigma^\alpha) - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right] \sqrt{-g}d^4x = 0 \quad (3.13)$$

devida à presença do termo $\frac{3}{2}(\sigma_\alpha\sigma^\alpha)$, percebe-se certa semelhança entre essa ação com a ação que descreve o chamado campo de Proca [20], cujos quanta, como se sabe, têm massa, ou seja, seriam um espécie de "fótons massivos" (aqui, no caso de um espaço-tempo curvo com a presença da constante cosmológica).

Neste sentido, vamos considerar a teoria invariante de Weyl como sendo uma teoria modificada da gravidade, na qual é introduzido um campo vetorial massivo, o qual, todavia, tem uma interpretação puramente geométrica.

Por completeza, apresentamos a seguir um estudo de algumas casos particulares na perspectiva de comparação das características e propriedades da eletrodinâmica de Proca em relação a eletrodinâmica de Maxwell.

EQUAÇÕES DE MAXWELL E PROCA NA RELATIVIDADE ESPECIAL

4.1 Eletrodinâmica de Maxwell no espaço-tempo de Minkowski

A Eletrodinâmica clássica, a primeira teoria de unificação de sucesso na física, descreve o comportamento dos campos elétricos e magnéticos e suas interações com as cargas. Essa teoria é muito bem descrita pelas famosas quatro equações de Maxwell, as quais podem ser obtidas pelo formalismo da teoria clássica de campos [2, 22, 23]. Partindo deste ponto, vamos buscar aqui obter a dinâmica do campo eletromagnético fazendo uso desse formalismo. A densidade lagrangiana que descreve o campo eletromagnético livre e sua interação com as cargas é definida no formalismo lagrangiano como sendo:

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c^2} J_{\alpha} A^{\alpha}, \quad (4.1)$$

onde j^{α} se refere ao quadri-vetor densidade de corrente e $F^{\alpha\beta}$ é o tensor campo eletromagnético. A quadri-corrente descreve a distribuição das cargas no espaço-tempo, cujas componentes são $j^{\alpha} \equiv (c\rho, \vec{j})$. Já o tensor campo eletromagnético que é antissimétrico (ou seja, $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$), é caracterizado pelos quadri-potencial $A_{\alpha} = (\phi, -\vec{A})$, de modo que podemos escrever $F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} A_{\beta} - \partial_{\beta} A_{\alpha}$. Assim, a equação (4.1) pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{16\pi}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) - \frac{1}{c^2}J_\alpha A^\alpha \quad (4.2)$$

onde $\partial_\alpha \equiv \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$ é o 4-gradiente. Admitindo o princípio de mínima ação, vamos fazer a variação da ação acima para obter as equações de campo. Assim,

$$\delta S = \frac{1}{c} \int dx^4 \delta \mathcal{L}(A_\alpha, \partial_\beta A_\alpha) = 0 \quad (4.3)$$

sendo esta variação tomada em relação ao 4-potencial A_α . Então, ao realizarmos integrações por partes, e fazendo uso da versão quadri-dimensional do teorema da divergência, vamos obter as equações correspondentes as equações de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \quad (4.4)$$

Calculando cada termo dessa equação separadamente, onde $\mathcal{L}$ é dado por(4.2) e lembrando que $\frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\nu} = \delta_\nu^\alpha$, vamos ter para o segundo termo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial}{\partial A_\nu} \left(-\frac{1}{c^2} J_\alpha \eta^{\alpha\beta} A_\beta \right) = -\frac{1}{c} J^\nu. \quad (4.5)$$

Já o cálculo do primeiro termo vai nos dar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left[-\frac{1}{16\pi} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\tau} (\partial_\gamma A_\tau - \partial_\tau A_\gamma) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \right] \\ &= -\frac{1}{16\pi} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\tau} \left[(\delta_\mu^\gamma \delta_\nu^\tau - \delta_\mu^\tau \delta_\nu^\gamma) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha) (\partial_\gamma A_\tau - \partial_\tau A_\gamma) \right] \\ &= -\frac{1}{16\pi} \left[(\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu}) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + (\eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\tau} - \eta^{\nu\gamma} \eta^{\mu\tau}) (\partial_\gamma A_\tau - \partial_\tau A_\gamma) \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} [\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Portanto, ao substituir (4.5) e (4.6) em (4.4) a equação de movimento obtida é :

$$\frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{c} J^\nu = 0 \quad (4.7)$$

que podemos escrever como:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (4.8)$$

Essa equação corresponde ao segundo par das equações de Maxwell, isto é,

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

e

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}.$$

Lembremos aqui, que podemos realizar transformações nos quadri-potenciais de modo que o tensor eletromagnético não seja afetado. Essas transformações são chamadas de transformações de calibre [24].

Consideremos agora a seguinte transformação:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \xi \quad (4.9)$$

onde ξ é uma função arbitrária. Nesse caso, o termo $\partial_\nu A^\mu$ transforma-se como:

$$\partial_\mu A^\mu \rightarrow \partial_\mu A^\mu + \square \xi, \quad (4.10)$$

onde $\square$ é o *operado d'Alembertiano* definido como:

$$\partial_\mu \partial^\mu = \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (4.11)$$

Podemos escolher um ξ de tal modo que $\square \xi = -\partial_\mu A^\mu$, e então encontramos a condição $\partial_\mu A^\mu = 0$, que corresponde ao calibre de Lorentz (ver [22, 25–27]). Esse calibre permite escrever a equação (4.8) em termos das componentes de A^μ separadamente. Portanto, a partir dessa condição podemos reescrever a equação (4.8) fazendo uso do *operado d'Alembertiano*, isto é :

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (4.12)$$

Essas equações correspondem a equações de onda não-homogêneas, revelando assim que os campos eletromagnéticos devem se propagar como ondas. A seguir, vamos estudar essa equação em casos particulares.

4.1.1 Relação de Dispersão

A relação de dispersão no caso de uma onda diz como esta deve se propagar em diferentes meios, como também no vácuo. Desse modo, como os campos eletromagnéticos se propagam como ondas podemos definir uma relação de dispersão para essa onda.

Se considerarmos um meio, ou uma região, em que não tenhamos fontes ($j^\nu = 0$), ou seja, no vácuo, a equação (4.12) se torna:

$$\square A^\nu = 0 \quad (4.13)$$

que corresponde a uma equação de onda, ou seja, descreve a propagação da onda eletromagnética no vácuo. Para resolver essa equação vamos buscar uma solução que corresponda a onda plana definida na forma [28, 29]:

$$A^\nu = \zeta^\nu e^{ik_\mu r^\mu}, \quad (4.14)$$

onde k_μ é o quadri-vetor de onda que caracteriza a onda plana e cujas componentes são $k^\alpha \equiv (\omega, \vec{k})$, em que ω descreve a frequência angular e $\vec{k}$ é o chamado *vetor de onda* [29, 30]. Substituindo (4.14) na equação (4.13) vamos obter:

$$\left(\frac{1}{c^2} k_0 k^0 - k_\alpha k^\alpha \right) \zeta^\nu e^{-ik_\mu r^\mu} = 0 \quad (4.15)$$

Em termos das componentes do quadri-vetor de onda obtemos a seguinte relação:

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + |\vec{k}|^2 \right) \zeta^\nu e^{-ik_\alpha r^\alpha} = 0 \Rightarrow \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + |\vec{k}|^2 \right) A^\nu = 0 \quad (4.16)$$

como A^ν é diferente de zero, logo:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + |\vec{k}|^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = c^2 |\vec{k}|^2 \quad (4.17)$$

Essa equação corresponde à relação de dispersão para a propagação da onda eletromagnética no vácuo, relacionando a frequência angular ω com o vetor de onda $\vec{k}$.

Podemos ainda calcular a velocidade de grupo e a velocidade de fase da onda propagada, isto é :

$$v_g = \frac{d\omega}{d|\vec{k}|} \Rightarrow v_g = c \quad (4.18)$$

$$v_f = \frac{\omega}{|\vec{k}|} \Rightarrow v_f = c \quad (4.19)$$

onde c corresponde a velocidade da luz no vácuo. Desse modo, como a velocidade de grupo e a velocidade de fase da onda propagada não depende da frequência da mesma, podemos dizer que esse meio (o vácuo) é não dispersivo em relação as ondas eletromagnéticas [25].

4.1.2 Solução para o caso estático na eletrodinâmica de Maxwell

Considerando a equação (4.12), vamos agora analisar o caso estático, em que tenhamos uma carga na origem do sistema de coordenadas, ou seja, uma carga pontual em repouso. O potencial gerado por está carga deve ser função apenas da coordenada radial e deve satisfazer a equação de Poisson (para a eletrostática)

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -4\pi q \delta(\vec{r}). \quad (4.20)$$

Nota-se que $\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial t} = 0$, já que o potencial gerado pela carga é estático. Uma forma de resolver essa equação é utilizando transformações de Fourier, convertendo esta equação diferencial em uma equação algébrica [31].

Vamos introduzir as seguintes transformações de Fourier para as quantidades $\Phi(\vec{r})$ e $\delta(\vec{r})$:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \psi(\vec{k}), \quad (4.21)$$

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (4.22)$$

onde o vetor $\vec{k}$ tem componentes X, Y, Z . Aplicando o operador laplaciano em ambos os lados da expressão (4.21) vamos obter:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -\frac{k^2}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \psi(\vec{k}) \quad (4.23)$$

substituindo então as expressões (4.23) e (4.22) em (4.20), podemos extrair mediante a igualdade:

$$k^2 \psi(\vec{k}) = 4\pi q \quad (4.24)$$

Portanto,

$$\psi(\vec{k}) = \frac{4\pi q}{k^2} \quad (4.25)$$

Desse modo, ao substituirmos $\psi(\vec{k})$ na expressão (4.21), e usando as coordenadas esféricas no espaço k , isto é, $d^3k = k^2 dk \sin \theta d\theta d\phi$, e com r na direção do eixo Z , de modo que $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos \theta$, vamos ficar com [31]:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_0^\pi \sin \theta e^{ikr \cos \theta} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (4.26)$$

Calculando as integrais nas variáveis θ e ϕ , vamos ter

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dk \left[-\frac{1}{ikr} \left(e^{-ikr} - e^{ikr} \right) \right]$$

Usando a fórmula de Euler vamos obter uma integral cujo resultado é bem conhecido, de modo que o potencial obtido é :

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{2q}{r\pi} \int_0^\infty dk \left[\frac{\sin kr}{k} \right] = \frac{2q}{r\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right),$$

isto é,

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} \quad (4.27)$$

Esse é o chamado potencial de Coulomb, associado a uma carga estática, o que é bem conhecido. A principal característica desse potencial é que ele é inversamente proporcional à distância r da carga.

4.1.3 Tensor momento-energia do campo eletromagnético livre no espaço-tempo de Minkowski

O tensor momento-energia carrega todas as informações sobre o conteúdo de energia e momento associadas a um determinado campo. Desse modo é interessante buscarmos a forma do tensor momento-energia do campo eletromagnético livre no espaço-tempo de Minkowski.

No espaço-tempo de Minkowski o tensor momento-energia é definido como [32]:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\alpha)} \partial_\nu A_\alpha - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \quad (4.28)$$

Na relatividade geral essa definição muda, pois devemos considerar a presença do campo associado à gravitação, ou seja, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

O cálculo do tensor momento-energia livre é feito tomando a densidade lagrangiana de um campo eletromagnético livre definida como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (4.29)$$

e substituindo essa densidade lagrangiana na relação (4.28). Como já calculamos

antes,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\alpha} \quad (4.30)$$

Assim, de maneira simples vamos obter:

$$T^\mu{}_\nu = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\alpha} \partial_\nu A_\alpha + \frac{1}{16\pi} \delta^\mu_\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (4.31)$$

ou na forma covariante,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-F_\mu{}^\alpha \partial_\nu A_\alpha + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \quad (4.32)$$

Observe que esse tensor não é simétrico pela troca de índices. Por outro lado, podemos simetrizá-lo de modo que o novo tensor momento-energia $\mathcal{T}^\mu{}_\nu$ satisfaça a lei de conservação $\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$. De modo geral, podemos redefinir o tensor momento-energia como sendo:

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu = T^\mu{}_\nu + \partial_\alpha \Lambda^{\mu\alpha}{}_\nu \quad (4.33)$$

sendo $\Lambda^{\mu\alpha}{}_\nu$ um tensor arbitrário antissimétrico nos índices superiores, ou seja, $\Lambda^{\mu\alpha}{}_\nu = -\Lambda^{\alpha\mu}{}_\nu$. É imediato ver que o tensor $\mathcal{T}^\mu{}_\nu$ também satisfaz a lei de conservação $\partial_\mu \mathcal{T}^\mu{}_\nu = 0$, e, sendo assim, temos liberdade na escolha do tensor $\Lambda^{\mu\alpha}{}_\nu$ que nos permite simetrizar o tensor momento-energia no caso geral.

Para o caso do tensor momento-energia do campo eletromagnético, o tensor $\Lambda^{\mu\alpha}{}_\nu$ assume a forma:

$$\Lambda^{\mu\alpha}{}_\nu = (F^{\alpha\mu}) A_\nu \quad (4.34)$$

Observe que devido o tensor eletromagnético ser antissimétrico a condição $\Lambda^{\mu\alpha}{}_\nu = -\Lambda^{\alpha\mu}{}_\nu$ é preservada. Portanto, ao aplicarmos a quadri-divergência em (4.34) vamos obter:

$$\partial_\alpha (F^{\alpha\mu} A_\nu) = \partial_\alpha (F^{\alpha\mu}) A_\nu + F^{\alpha\mu} \partial_\alpha A_\nu \quad (4.35)$$

Como estamos tratando o campo livre, ou seja, na ausência de cargas, então o termo $\partial_\alpha (F^{\alpha\mu}) = 0$, isto fica claro ao olharmos a equação (4.8), desse modo vamos ter:

$$\partial_\alpha (F^{\alpha\mu} A_\nu) = F^{\alpha\mu} \partial_\alpha A_\nu \quad (4.36)$$

Assim sendo, ao redefinirmos o tensor momento-energia teremos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}^\mu{}_\nu &\equiv \left(T^\mu{}_\nu + \frac{1}{4\pi} F^{\alpha\mu} \partial_\alpha A_\nu \right) = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\alpha} \partial_\nu A_\alpha + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\
 T^\mu{}_\nu &= \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\alpha} \partial_\nu A_\alpha + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{4\pi} F^{\alpha\mu} \partial_\alpha A_\nu \\
 T^\mu{}_\nu &= \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha} (\partial_\alpha A_\nu - \partial_\nu A_\alpha) + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\
 T^\mu{}_\nu &= \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \tag{4.37}
 \end{aligned}$$

Ou, na forma covariante,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_\mu{}^\alpha F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \tag{4.38}$$

Esse é o tensor momento-energia simetrizado para o campo eletromagnético livre.

4.2 Eletrodinâmica de Proca no espaço-tempo de Minkowski

Entre 1936 e 1941, Alexandru Proca fez uma modificação na densidade lagrangiana do campo eletromagnético, adicionando um termo não-linear no campo vetorial que pode ser interpretado, na versão quantizada da teoria, como referente a uma massa do fóton, buscando assim entender o que aconteceria se o fóton tivesse uma massa diferente de zero [12].

A densidade lagrangiana para o caso do campo de Proca é então definida como:

$$\mathcal{L}_{Proca} = -\frac{1}{16\pi} (\partial_\alpha \sigma_\beta - \partial_\beta \sigma_\alpha) (\partial^\alpha \sigma^\beta - \partial^\beta \sigma^\alpha) + \frac{\mu^2}{8\pi} \sigma_\alpha \sigma^\alpha - \frac{1}{c} J_\alpha \sigma^\alpha \tag{4.39}$$

onde o parâmetro μ faz referência à massa do fóton. Vamos buscar encontrar a equação de movimento correspondente a essa densidade lagrangiana. Considerando novamente as equações de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_\nu} = 0, \tag{4.40}$$

vamos ter para o segundo termo da equação acima

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_\nu} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_\mu} \left(\frac{\mu^2}{8\pi} \eta^{\alpha\beta} \sigma_\beta \sigma_\alpha - \frac{1}{c} J_\alpha \eta^{\alpha\beta} \sigma_\beta \right) \\
 &= \frac{\mu^2}{8\pi} \eta^{\alpha\beta} \left(\delta_\nu^\beta \sigma_\alpha + \delta_\nu^\alpha \sigma_\beta \right) - \frac{1}{c} \eta^{\alpha\beta} J_\alpha \delta_\nu^\beta. \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_\mu} &= \frac{\mu^2}{4\pi} \sigma^\nu - \frac{1}{c} J^\nu
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Considerando o primeiro termo, vamos ficar com

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma_\nu)} &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \sigma_\nu)} \left[-\frac{1}{16\pi} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\tau} (\partial_\gamma \sigma_\tau - \partial_\tau \sigma_\gamma) (\partial_\alpha \sigma_\beta - \partial_\beta \sigma_\alpha) \right] \\
 &= -\frac{1}{16\pi} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\tau} \left[(\delta_\mu^\gamma \delta_\nu^\tau - \delta_\mu^\tau \delta_\nu^\gamma) (\partial_\alpha \sigma_\beta - \partial_\beta \sigma_\alpha) + (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha) (\partial_\gamma \sigma_\tau - \partial_\tau \sigma_\gamma) \right] \\
 &= -\frac{1}{16\pi} \left[(\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu}) (\partial_\alpha \sigma_\beta - \partial_\beta \sigma_\alpha) + (\eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\tau} - \eta^{\nu\gamma} \eta^{\mu\tau}) (\partial_\gamma \sigma_\tau - \partial_\tau \sigma_\gamma) \right] \\
 &= -\frac{1}{4\pi} (\partial^\mu \sigma^\nu - \partial^\nu \sigma^\mu) = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma_\nu)} &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Portanto, a equação de movimento obtida é :

$$-\frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{\mu^2}{4\pi} \sigma^\nu + \frac{1}{c} J^\nu = 0 \tag{4.43}$$

a qual podemos escrever como:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \mu^2 \sigma^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu \tag{4.44}$$

Essa equação é a chamada equação de Proca. Observe que ela se reduz à equação de Maxwell quando μ for zero. Além disso, nela aparece a dependência em relação aos potenciais σ^ν de maneira explícita. Contraindo essa equação com ∂_ν vamos obter

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \mu^2 \partial_\nu \sigma^\nu = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu J^\nu,$$

isto é,

$$\mu^2 \partial_\nu \sigma^\nu = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu J^\nu. \tag{4.45}$$

Supondo que haja a conservação da corrente, devemos ter $\partial_\nu J^\nu = 0$, e assim, como $\mu^2 \neq 0$ podemos concluir que:

$$\partial_\nu \sigma^\nu = 0. \quad (4.46)$$

Ou ainda, em termos das componentes do potencial $\sigma^\nu = (\phi, \vec{A})$:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad (4.47)$$

equação que corresponde ao calibre de Lorentz. Escrevendo agora a equação (4.44) em termos do campo σ^ν , vamos obter:

$$\partial_\mu (\partial^\mu \sigma_\nu - \partial_\nu \sigma^\mu) + \mu^2 \sigma^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu, \quad (4.48)$$

ou ainda,

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma^\nu - \partial_\mu \partial^\nu \sigma^\mu + \mu^2 \sigma^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (4.49)$$

Como ∂^ν e ∂_μ comutam, e sendo $\partial^\mu \partial_\mu$ o *operador d'Alembertiano*, ao aplicarmos a condição (4.46), temos:

$$\square \sigma^\nu + \mu^2 \sigma^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (4.50)$$

Observe que na ausência de fonte ($J^\nu = 0$), está equação equivale a equação de Klein-Gordon para cada componente do campo σ^μ , descrevendo, então, um fóton massivo, cujo campo deve se propagar como uma onda [29].

4.2.1 Relação de Dispersão para o caso de Proca

Vimos que a velocidade da onda eletromagnética no vácuo corresponde à velocidade da luz, que, como sabemos da relatividade especial, é a velocidade limite de propagação. A questão aqui é saber o que a relação de dispersão nos diz sobre a velocidade de propagação da onda no caso de Proca.

Considerando a equação (4.50) na ausência de fonte, vamos ficar com

$$\square \sigma^\nu + \mu^2 \sigma^\nu = 0 \quad (4.51)$$

Vamos buscar resolver essa equação de modo semelhante ao que fizemos anteriormente, supondo que exista uma solução para σ^ν na forma de uma onda plana, isto é,

$$\sigma^\nu = \varepsilon^\nu e^{ik_\mu r^\mu} \quad (4.52)$$

Substituindo (4.52) na equação (4.51) vamos ter

$$\partial_\mu \partial^\mu \varepsilon^\nu e^{ik_\alpha r^\alpha} + \mu^2 \varepsilon^\nu e^{ik_\alpha r^\alpha} = 0, \quad (4.53)$$

que, resolvendo em termos das componentes do quadri-vetor de onda, nos dá a seguinte relação:

$$\left(\frac{1}{c^2} k_0 k^0 - k_\lambda k^\lambda \right) \varepsilon^\nu e^{ik_\alpha r^\alpha} + \mu^2 \varepsilon^\nu e^{ik_\alpha r^\alpha} = 0, \quad (4.54)$$

ou seja,

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + |\vec{k}|^2 + \mu^2 \right) \varepsilon^\nu e^{ik_\alpha r^\alpha} = 0, \quad (4.55)$$

o que implica

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + |\vec{k}|^2 + \mu^2 \right) \sigma^\nu = 0 \quad (4.56)$$

Sendo $\sigma^\nu \neq 0$, vamos ficar, então, com

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + |\vec{k}|^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = c^2 |\vec{k}|^2 + c^2 \mu^2 \quad (4.57)$$

Essa equação corresponde à equação de dispersão para o caso do campo de Proca, estabelecendo uma relação entre o vetor de onda $\vec{k}$ a frequência angular ω e o parâmetro μ referente a massa do fóton. Uma vez encontrada essa relação é possível calcular a velocidade de fase e a velocidade de grupo dessa onda. O resultado obtido pelo cálculo da velocidade de fase é :

$$v_f = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \frac{\omega}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mu^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = c \left(1 - \frac{c^2 \mu^2}{\omega^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.58)$$

já o cálculo da velocidade de grupo nós dá :

$$v_g = \frac{d\omega}{d|\vec{k}|} = \frac{c^2 |\vec{k}|}{(c^2 |\vec{k}|^2 + c^2 \mu^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{c^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mu^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(c^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mu^2 \right) + c^2 \mu^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(c^2 \omega^2 - c^4 \mu^2)^{\frac{1}{2}}}{\omega},$$

ou seja,

$$v_g = c \left(1 - \frac{c^2 \mu^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.59)$$

Observemos que a velocidade de fase e a velocidade de grupo desse tipo de onda dependem da frequência da onda, o que implica dizer que vamos ter uma dispersão do pacote de ondas. Queremos chamar a atenção aqui para o fato de que a velocidade de propagação dessa onda eletromagnética massiva é menor que a velocidade da luz (c), mas que se aproxima de c a medida que a frequência angular tende para o infinito. Portanto, podemos dizer que no regime de altíssimas frequências os resultados são então consistentes como o postulado de Einstein de que c é a velocidade limite. Desse modo, a massa do fóton implica que a velocidade limite c passa a ser uma função da frequência [30].

A partir da relação de dispersão, podemos ainda verificar, de fato, μ está relacionada com a massa do fóton. Para isso devemos considerar alguns conceitos da Mecânica Quântica.

Tomando a relação (4.57) e multiplicando ambos os lados por $\hbar$, vamos ficar com:

$$\hbar \omega = \sqrt{\hbar^2 c^2 k^2 + \hbar^2 c^2 \mu^2} \quad (4.60)$$

Como sabemos, da Mecânica Quântica, temos $p^2 = \hbar^2 k^2$ e $E = \hbar \omega$, devido às relações propostas por de Broglie fazendo uma correspondência entre as propriedades ondulatórias e as de corpúsculares da matéria. Podemos reescrever a relação acima como:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + \hbar^2 c^2 \mu^2}. \quad (4.61)$$

Portanto, se nós compararmos essa expressão com a expressão correspondente à energia associada a uma partícula relativística, podemos concluir que:

$$\hbar^2 c^2 \mu^2 \equiv m_\gamma^2 c^4 \quad \Rightarrow \quad \mu = \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar} \right). \quad (4.62)$$

onde m_γ seria, então, massa do fóton. Além disso, pela equação (4.62), podemos perceber que o parâmetro μ também está associado ao comprimento de onda de Compton para o fóton massivo, que é definido como $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_\gamma c}$, de modo que vamos ter:

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{\lambda_c} \quad (4.63)$$

4.2.2 Solução para o caso estático na eletrodinâmica de Proca

Veamos agora qual seria a solução da equação (4.50) considerando-se uma configuração estática $\left(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial t} = 0\right)$, e sendo a componente temporal $\sigma_0 = \Phi(r)$ a única componente não-nula do 4-potencial σ_μ . Para o caso da fonte sendo um corpo carregado esfericamente simétrico, vamos considerar, assim como foi feito por [33], a fonte do campo correspondente a uma carga pontual q em repouso na origem, de modo que possamos escrever $J_\mu = (cq\delta(\vec{r}), 0, 0, 0)$. Nesse caso, a equação (4.50) se torna:

$$\nabla^2 \Phi - \mu^2 \Phi = -4\pi q \delta(\vec{r}). \quad (4.64)$$

Sabemos que é possível encontrar a solução para o potencial $\Phi(\vec{r})$ determinando a função de Green correspondente, isto é, a função de Green que satisfaz a equação:

$$(-\nabla^2 + \mu^2)G(\vec{r}) = \delta(\vec{r}), \quad (4.65)$$

de forma que o potencial $\Phi(\vec{r})$ solução da equação (4.64) será dado por:

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r G(\vec{r}) 4\pi q \delta(\vec{r}). \quad (4.66)$$

Precisamos então definir a forma da função de Green, sendo que para isso devemos buscar resolver a equação (4.65). Essa equação é resolvida fazendo uso de transformações de Fourier, pelas quais podemos definir [30]:

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{G} \quad (4.67)$$

e,

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (4.68)$$

Substituindo (4.67) e (4.68) em (4.65), vamos ficar com:

$$(k^2 + \mu^2) \tilde{G} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (4.69)$$

de onde concluímos que

$$\tilde{G} = \frac{1}{(k^2 + \mu^2)}. \quad (4.70)$$

Desse modo, ao substituirmos (4.70) em (4.67) e resolvendo a integral, a função de

Green que se obtém é [30, 34, 35]:

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r} e^{-\mu r} \quad (4.71)$$

Portanto, substituindo (4.71) em (4.66), e considerando a propriedade de filtragem da delta, o potencial para o caso estático que vamos obter é :

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} e^{-\mu r} \quad (4.72)$$

Isso mostra que o potencial eletromagnético para o fóton massivo não é o potencial de Coulomb, mas sim o potencial de Yukawa, que decai exponencialmente com um comprimento típico de $1/\mu$, ou seja, a característica fundamental da massa do fóton [33, 36].

Para que tenhamos uma noção da ordem de grandeza dessa massa, podemos expandir a exponencial para valores muito pequenos de μr , assim como [33], onde obtém-se:

$$\Phi(r) = \frac{q}{r} (1 - \mu r + O(\mu r)^2) \quad (4.73)$$

Sendo assim, as correções no potencial de Coulomb serão da ordem de μ , mostrando que a massa do fóton, m_γ , deve ser incrivelmente pequena a ponto de não ser observada experimentalmente [33]. O fato da massa do fóton não ser detectada experimentalmente, a princípio, como coloca [28, 29] não prova que ela seja necessariamente nula, mas que talvez a precisão dos instrumentos ainda não seja suficiente para detectá-la.

Em 1936 Plimpton e Lawton realizaram testes experimentais para verificar se de fato existe uma correção no potencial de Coulomb [37], estabelecendo assim um limite para a lei do inverso da distância. Limites cada vez menores de distância foram estabelecidos considerando a eletrodinâmica de Proca [38], com isso é possível impor um limite para a massa do fóton. Até então, experiências comparando o campo de dipolo magnético derivado da teoria de Proca com as medidas de satélite do campo magnético terrestre apontam que o limite para a massa do fóton deve ser $m_\gamma \leq 1 \times 10^{-48}$ g [33, 39].

4.2.3 Tensor momento-energia do campo de Proca

Vamos, aqui, encontrar o tensor momento-energia do campo de Proca no espaço-tempo de Minkowski. A densidade lagrangiana do campo de Proca é dada por (4.39). Pela definição do tensor momento-energia temos

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma_\alpha)} \partial_\nu \sigma_\alpha - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}. \quad (4.74)$$

O cálculo do termo $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \sigma_\alpha)} \partial_\nu \sigma_\alpha\right)$ já foi realizado antes, tendo sido encontrado que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \sigma_\nu)} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}. \quad (4.75)$$

Assim, vamos obter de maneira direta

$$T^\mu{}_\nu = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\alpha} \partial_\nu \sigma_\alpha + \frac{1}{4} \delta^\mu_\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{\mu^2}{2} \delta^\mu_\nu \sigma_\alpha \sigma^\alpha \right), \quad (4.76)$$

ou, na forma covariante,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-F_\mu{}^\alpha \partial_\nu \sigma_\alpha + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{\mu^2}{2} \eta_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha \right). \quad (4.77)$$

Esse tensor também não é simétrico pela troca de índices, embora possamos simetrizá-lo de forma análoga ao que fizemos antes. Assim, redefinimos o tensor momento-energia como $\mathcal{T}^\mu{}_\nu = T^\mu{}_\nu + \partial_\mu \Lambda^{\mu\alpha}{}_\nu$, onde para este caso o tensor $\Lambda^{\mu\alpha}{}_\nu$ é escrito na forma:

$$\Lambda^{\mu\alpha}{}_\nu = (F^{\alpha\mu}) \sigma_\nu. \quad (4.78)$$

Ao aplicarmos o operador de quadri-divergência em (4.78) vamos obter:

$$\partial_\alpha (F^{\alpha\mu} \sigma_\nu) = \partial_\alpha (F^{\alpha\mu}) \sigma_\nu + F^{\alpha\mu} \partial_\alpha \sigma_\nu. \quad (4.79)$$

Como $F^{\alpha\mu} = \partial^\alpha \sigma^\mu - \partial^\mu \sigma^\alpha$, vamos ter para o termo $\partial_\alpha F^{\alpha\mu}$ da equação (4.79):

$$\partial_\alpha (F^{\alpha\mu}) = \partial_\alpha (\partial^\alpha \sigma^\mu - \partial^\mu \sigma^\alpha) = \square \sigma^\mu \quad (4.80)$$

onde usamos a condição de Lorentz $\partial_\alpha \sigma^\alpha = 0$. Pela equação de Proca para o campo livre nós temos que $\square \sigma^\mu + \mu^2 \sigma^\mu = 0$, de modo que podemos extrair:

$$\partial_\alpha (F^{\alpha\mu}) \equiv \square \sigma^\mu = -\mu^2 \sigma^\mu. \quad (4.81)$$

Desse modo, ao substituírmos (4.81) em (4.79), vamos ter

$$\partial_\alpha (F^{\alpha\mu} \sigma_\nu) = -\mu^2 \sigma^\mu \sigma_\nu + F^{\alpha\mu} \partial_\alpha \sigma_\nu. \quad (4.82)$$

Portanto, ao redefinirmos o tensor momento-energia, teremos:

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu \equiv \left(T^\mu{}_\nu + \frac{1}{4\pi} (-\mu^2 \sigma^\mu \sigma_\nu + F^{\alpha\mu} \partial_\alpha \sigma_\nu) \right) = \frac{1}{4\pi} (-F^{\mu\alpha} \partial_\nu \sigma_\alpha + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} +$$

$$-\frac{\mu^2}{2}\eta_{\mu\nu}\sigma_\alpha\sigma^\alpha) \quad (4.83)$$

$$T^\mu{}_\nu = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\alpha}\partial_\nu\sigma_\alpha + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{\mu^2}{2}\eta_{\mu\nu}\sigma_\alpha\sigma^\alpha \right) + \frac{1}{4\pi}\mu^2\sigma^\mu\sigma_\nu - \frac{1}{4\pi}F^{\alpha\mu}\partial_\alpha\sigma_\nu$$

$$T^\mu{}_\nu = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha}(\partial_\alpha\sigma_\nu - \partial_\nu\sigma_\alpha) + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{\mu^2}{2}\eta_{\mu\nu}\sigma_\alpha\sigma^\alpha + \mu^2\sigma^\mu\sigma_\nu \right)$$

$$T^\mu{}_\nu = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{\mu^2}{2}\eta_{\mu\nu}\sigma_\alpha\sigma^\alpha + \mu^2\sigma^\mu\sigma_\nu \right) \quad (4.84)$$

Na forma covariante,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_\mu{}^\alpha F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{\mu^2}{2}\eta_{\mu\nu}\sigma_\alpha\sigma^\alpha + \mu^2\sigma^\mu\sigma_\nu \right) \quad (4.85)$$

Esse é o tensor momento-energia simetrizado do campo de Proca no espaço-tempo de Minkowski. Portanto, percebe-se que na eletrodinâmica de Proca é adicionado termos proporcionais a μ e μ^2 nas equações e nas quantidades fundamentais, que são os chamados termos de massa. No próximo capítulo vamos considerar o campo de Proca na teoria da relatividade geral.

CAMPO DE PROCA NA RELATIVIDADE GERAL

Neste capítulo iremos considerar brevemente, no contexto da teoria da relatividade geral, a dinâmica do espaço-tempo determinada pela presença de um campo de Proca, cuja fonte consiste numa carga pontual. Esse tópico, isto é, a dinâmica do sistema Einstein-Proca tem merecido discussões recentes na literatura nos últimos anos [48–51]. Possíveis aplicações à Cosmologia podem ser encontradas em [52, 53]. Soluções numéricas para o sistema Einstein-Proca foram obtidas por alguns autores (ver, por exemplo, [54, 55]). Por outro lado, [53, 56] apresentam soluções aproximadas bastante razoáveis, fazendo uso da teoria de perturbação. Vamos apresentar a seguir uma breve descrição do sistema Einstein-Proca.

Pelo princípio do acoplamento mínimo, podemos substituir diretamente a métrica $\eta_{\mu\nu}$ da Relatividade Especial por $g_{\mu\nu}$, e também as derivadas ordinárias ∂_μ pelas derivadas covariantes ∇_μ , fazendo então uma generalização para espaços curvos, assim, podemos expressar as quantidades importantes na forma correspondente a Relatividade Geral.

Como vimos, as equações que descrevem a dinâmica de um *bóson massivo* (spin-1) [57], são as equações de Proca, que na ausência de correntes são descritas como:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} + \mu^2 \sigma^\nu = 0 \quad (5.1)$$

ou ainda,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{|\mu} + \mu^2 \sigma^\nu = 0 \quad (5.2)$$

A lagrangiana do campo de Proca, que leva a tal equação é dada por:

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{16\pi}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} + \frac{1}{8\pi}\mu^2\sigma_\alpha\sigma_\beta g^{\alpha\beta} \quad (5.3)$$

onde,

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu\sigma_\nu - \nabla_\nu\sigma_\mu \quad (5.4)$$

Essa lagrangiana de matéria é semelhante a lagrangiana de Maxwell, a menos do último termo, o qual leva à interpretação do fóton massivo [12]. A presença desse termo dificulta enormemente a obtenção de uma solução das equações de Einstein-Proca. Para uma melhor compreensão disso, vejamos o que se segue.

5.1 Sistema de equações Einstein-Proca

O campo de Proca é introduzido no espaço-tempo por meio da equação (5.1), sendo que, nas equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (5.5)$$

$T_{\mu\nu}$ denota, nesse caso, o tensor momento-energia associado ao campo de Proca. A seguir vamos calcular esse tensor.

5.1.1 Tensor momento-energia do campo de Proca na Relatividade Geral

Podemos definir o tensor momento-energia de Proca na relatividade Geral fazendo uso do princípio variacional. A variação da ação $S_m = \int \sqrt{|g|}L_M(\sigma, \nabla\sigma)d^4x$ em relação a métrica nos fornece a seguinte definição de $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}},$$

ou seja,

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m. \quad (5.6)$$

Partindo dessa definição, temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\lambda\eta}} = -\frac{1}{16\pi} \frac{\partial(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta})}{\partial g^{\lambda\eta}} + \frac{1}{8\pi} \mu^2 \frac{\partial(\sigma_\alpha \sigma_\beta g^{\alpha\beta})}{\partial g^{\lambda\eta}}. \quad (5.7)$$

Lembrando que $\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g^{\lambda\eta}} = \delta_\lambda^\alpha \delta_\eta^\beta$, vamos ter para o primeiro termo da equação acima:

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi} \frac{\partial(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta})}{\partial g^{\lambda\eta}} &= -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \left(\delta_\lambda^\alpha \delta_\eta^\mu g^{\beta\nu} + \delta_\lambda^\beta \delta_\eta^\nu g^{\alpha\mu} \right) \\ &= -\frac{1}{16\pi} \left(F_{\eta\nu} F_{\lambda\beta} g^{\beta\nu} + F_{\mu\eta} F_{\alpha\lambda} g^{\alpha\mu} \right) \end{aligned}$$

Considerando o fato de $F_{\mu\nu}$ ser antissimétrico, vamos ficar com:

$$\frac{1}{16\pi} \frac{\partial(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta})}{\partial g^{\lambda\eta}} = -\frac{1}{8\pi} F_{\lambda\beta} F_\eta^\beta \quad (5.8)$$

O segundo termo vai ser:

$$\frac{1}{8\pi} \mu^2 \frac{\partial(\sigma_\alpha \sigma_\beta g^{\alpha\beta})}{\partial g^{\lambda\eta}} = \frac{1}{8\pi} \mu^2 \sigma_\alpha \sigma_\beta \delta_\lambda^\alpha \delta_\eta^\beta \Rightarrow = \frac{1}{8\pi} \mu^2 \sigma_\lambda \sigma_\eta$$

Assim, vamos obter:

$$T_{\lambda\eta} = \frac{1}{4\pi} F_{\lambda\beta} F_\eta^\beta + \frac{1}{4\pi} \mu^2 \sigma_\lambda \sigma_\eta - g_{\lambda\eta} \mathcal{L}_m \quad (5.9)$$

Como o traço desse tensor é diferente de zero, diferentemente do caso do tensor momento-energia de Maxwell, as equações de Einstein podem ser escritas como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (5.10)$$

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = -\kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

$$R - \frac{1}{2} \delta_\mu^\mu R = -\kappa T$$

$$R - 2R = -\kappa T \implies R = \kappa T \quad (5.11)$$

Substituindo (5.11) na equação de Einstein, vamos obter:

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} T - T_{\mu\nu} \right) \quad (5.12)$$

Essa equação em conjunto com a equações (5.1) são chamadas de equações de Einstein-Proca.

5.1.2 Solução com simetria esférica das equações de Einstein-Proca

Analogamente ao caso da solução de Reissner-Nordstrom, correspondendo ao espaço-tempo gerado por uma distribuição de cargas esfericamente simétrica e estática carregada, o elemento de linha mais geral possível pode ser escrito na forma:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5.13)$$

onde $\nu = \nu(r)$ e $\lambda = \lambda(r)$. Devido à simetria, as únicas componentes do tensor $F_{\mu\nu}$ não-nulas são $F_{0r} = -F_{r0} = -\partial_r \sigma_0(r) = -\sigma'_0(r)$, o que pode ser escrito numa representação matricial por

$$F_{\mu\nu} = \sigma'_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da equação de Proca temos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r (\sqrt{-g} F^{r0}) + \mu^2 e^\lambda \sigma_0 = 0. \quad (5.14)$$

Considerando o elemento de linha (5.13), o determinante da métrica é dado por

$$g = -r^4 \sin^2 \theta e^{\nu+\lambda} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-g} = r^2 \sin \theta e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}. \quad (5.15)$$

Temos, assim,

$$\partial_r (\sqrt{-g}) = 2r \sin \theta e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} - \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} \right) r^2 \sin \theta e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}. \quad (5.16)$$

Desse modo, podemos reescrever a (5.14), substituindo esse resultado, ficando com:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 \sin \theta e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}} \left[\left(2r \sin \theta e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} - \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} \right) r^2 \sin \theta e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} \right) F_{r0} + \left(r^2 \sin \theta e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} \right) \partial_r (F_{r0}) \right] + \\ - \mu^2 e^\lambda \sigma_0 = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\left(\frac{2}{r} - \frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \right) \sigma'_0 + \sigma''_0 + \mu^2 e^\lambda \sigma_0 = 0$$

onde " ' " representa a derivada em relação à coordenada radial r . Podemos ainda sim-

plificar essa equação para

$$\sigma_0'' + \frac{2}{r}\sigma_0' - \left(\frac{v'}{2} + \frac{\lambda'}{2}\right)\sigma_0' + \mu^2 e^\lambda \sigma_0 = 0 \quad (5.18)$$

Feito isso, vamos agora expressar o tensor momento-energia do campo de Proca em termos de suas componentes. Dado o fato de que o tensor métrico é diagonal, podemos concluir que o tensor momento-energia também é diagonal. Sendo assim, vamos calcular as suas componentes diagonais, as únicas componentes não-nulas, a saber:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{1}{4\pi} \left[(F_{r0})^2 g^{rr} + \mu^2 \sigma_0^2 - g_{00} \left(-\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}\mu^2 \sigma_\alpha \sigma^\alpha \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[-e^{-\lambda} \sigma_0'^2 + \mu^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2}e^{-\lambda} \sigma_0'^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \sigma_0^2 \right] \end{aligned}$$

isto é,

$$T_{00} = \frac{1}{8\pi} \left(-e^{-\lambda} \sigma_0'^2 + \mu^2 \sigma_0^2 \right). \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \frac{1}{4\pi} \left[(F_{r0})^2 g^{00} - g_{rr} \left(-\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}\mu^2 \sigma_\alpha \sigma^\alpha \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[e^{-\nu} A_0'^2 - \frac{1}{2}e^{-\nu} \sigma_0'^2 + \frac{1}{2}\mu^2 \sigma_0^2 \right], \end{aligned}$$

isto é,

$$T_{rr} = \frac{1}{8\pi} \left(e^{-\nu} \sigma_0'^2 + \mu^2 \sigma_0^2 e^{\lambda-\nu} \right). \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} T_{\theta\theta} &= -g_{00} \left(-\frac{1}{16\pi}F^2 + \frac{1}{8\pi}\mu^2 \sigma_\alpha \sigma^\alpha \right) \\ &= r^2 \left(-\frac{1}{16\pi}2e^{-\nu-\lambda}A_0'^2 + \frac{1}{8\pi}\mu^2 e^{-\nu} \sigma_0^2 \right), \end{aligned}$$

isto é,

$$T_{\theta\theta} = \frac{1}{8\pi} \left(-r^2 e^{-(\nu+\lambda)} \sigma_0'^2 + r^2 \mu^2 \sigma_0^2 e^{-\nu} \right). \quad (5.21)$$

E, finalmente,

$$T_{\phi\phi} = (\sin^2 \theta) T_{\theta\theta}. \quad (5.22)$$

Encontradas as componentes, podemos representar o tensor momento-energia na forma matricial:

$$T_{\lambda\eta} = \frac{1}{8\pi}\sigma_0'^2 \begin{pmatrix} -e^{-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 e^{-(\nu+\lambda)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta e^{-(\nu+\lambda)} \end{pmatrix} + \frac{1}{8\pi}\mu^2\sigma_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 e^{-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta e^{-\nu} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

O traço desse tensor será, então:

$$T = g^{\lambda\eta}T_{\lambda\eta} = \frac{1}{8\pi} \left[-2\sigma_0'^2 e^{-(\nu+\lambda)} + e^{-(\nu+\lambda)}\sigma_0'^2 + e^{-(\nu+\lambda)}\sigma_0'^2 \right] + \frac{1}{8\pi}\mu^2 (e^{-\nu}\sigma_0^2 - e^{-\nu}\sigma_0^2 - e^{-\nu}\sigma_0^2 - e^{-\nu}\sigma_0^2) \quad (5.24)$$

Logo, temos

$$T = -\frac{1}{4\pi}\mu^2 e^{-\nu}\sigma_0^2 \quad (5.25)$$

A partir do elemento de linha, podemos calcular as componentes do tensor de Ricci, as quais serão dadas por

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda} \left[-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} \right] \quad (5.26)$$

$$R_{rr} = \left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right] \quad (5.27)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-\lambda} \left[1 + \frac{r\nu'}{2} - \frac{r\lambda'}{2} \right] - 1 \quad (5.28)$$

$$R_{\phi\phi} = (\sin^2 \theta)R_{\theta\theta} \quad (5.29)$$

Desse modo, pelas equações de Einstein (5.12), obtemos:

$$R_{00} = -\frac{\kappa}{8\pi} \left(-e^{-\lambda} \sigma_0'^2 + 2\mu^2 \sigma_0^2 \right) \quad (5.30)$$

$$R_{rr} = -\frac{\kappa}{8\pi} e^{-\nu} \sigma_0'^2 \quad (5.31)$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{\kappa}{8\pi} \left(-r^2 e^{-(\nu+\lambda)} \sigma_0'^2 \right). \quad (5.32)$$

Combinando essas equações para as componentes de $R_{\mu\nu}$ com as que foram apresentadas anteriormente, encontramos três equações, que são:

$$e^{\nu-\lambda} \left[-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} \right] = -\frac{\kappa}{8\pi} \left(-e^{-\lambda} \sigma_0'^2 + 2\mu^2 \sigma_0^2 \right), \quad (5.33)$$

$$\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right] = -\frac{\kappa}{8\pi} e^{-\nu} \sigma_0'^2, \quad (5.34)$$

$$e^{-\lambda} \left[1 + \frac{r\nu'}{2} - \frac{r\lambda'}{2} \right] - 1 = \frac{\kappa}{8\pi} r^2 e^{-(\nu+\lambda)} \sigma_0'^2. \quad (5.35)$$

Se multiplicarmos a equação (5.33) por $e^{-(\nu-\lambda)}$, e somando com (5.34), vamos obter

$$\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda'}{r} \right) = \frac{\kappa}{4\pi} \mu^2 \sigma_0^2 e^{-(\nu-\lambda)}, \quad (5.36)$$

da qual podemos tirar

$$\begin{aligned} \frac{\lambda'}{r} &= \frac{\kappa}{4\pi} \mu^2 \sigma_0^2 e^{-(\nu-\lambda)} - \frac{\nu'}{r} \\ \implies \lambda' &= \frac{\kappa}{4\pi} r \mu^2 \sigma_0^2 e^{(\lambda-\nu)} - \nu'. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Substituindo agora (5.37) em (5.35), vamos obter

$$e^{-\lambda} \left[1 + r\nu' - \frac{\kappa}{8\pi} r^2 \mu^2 \sigma_0^2 e^{\lambda-\nu} \right] - 1 = \frac{\kappa}{8\pi} r^2 e^{-(\nu+\lambda)} \sigma_0'^2, \quad (5.38)$$

onde podemos definir uma expressão para e^λ apenas em termos de ν e σ . De fato, fazendo

$$-\frac{\kappa}{8\pi} r^2 \mu^2 \sigma_0^2 e^{-\nu} + e^{-\lambda} (1 + r\nu') = 1 + \frac{\kappa}{8\pi} r^2 e^{-(\nu+\lambda)} \sigma_0'^2 \quad (5.39)$$

$$\implies e^{-\lambda}(1 + rv') - \frac{\kappa}{8\pi}r^2e^{-(v+\lambda)}\sigma_0'^2 = 1 + \frac{\kappa}{8\pi}r^2\mu^2\sigma_0^2e^{-v} \quad (5.40)$$

$$\implies e^{-\lambda} \left[1 + rv' - \frac{\kappa}{8\pi}r^2e^{-v}\sigma_0'^2 \right] = 1 + \frac{\kappa}{8\pi}r^2\mu^2\sigma_0^2e^{-v}. \quad (5.41)$$

Portanto,

$$e^\lambda = \frac{1 + rv' - \frac{\kappa}{8\pi}r^2e^{-v}\sigma_0'^2}{1 + \frac{\kappa}{8\pi}r^2\mu^2\sigma_0^2e^{-v}} \quad (5.42)$$

Substituindo então os termos e^λ e λ' nas equações (5.33) e (5.18), vamos obter um sistema de equações diferenciais não-lineares para as funções desconhecidas σ_0 e v .

Multiplicando a equação (5.33) por $-e^{-v+\lambda}$, vamos ficar com:

$$\frac{1}{2} \left(v'' - \frac{\lambda'v'}{2} + \frac{v'^2}{2} + \frac{2v'}{r} \right) = -\frac{\kappa}{8\pi}e^{-v}\sigma_0'^2 + \frac{\kappa}{4\pi}\mu^2\sigma_0^2e^{-v}e^\lambda. \quad (5.43)$$

Substituindo agora os termos e^λ e λ' , teremos:

$$v'' + v'^2 + \frac{2v'}{r} = -\frac{\kappa}{4\pi}\sigma_0'^2e^{-v} + \left(2 + \frac{v'r}{2} \right) \frac{\kappa}{4\pi}\mu^2\sigma_0^2e^{-v} \left[\frac{1 + rv' - \frac{\kappa}{8\pi}r^2e^{-v}\sigma_0'^2}{1 + \frac{\kappa}{8\pi}r^2\mu^2\sigma_0^2e^{-v}} \right]. \quad (5.44)$$

De modo semelhante, substituindo os termos e^λ e λ' na equação de Proca (5.18), vamos obter

$$\sigma_0'' + \frac{2}{r}\sigma_0' = \mu^2\sigma_0 \left(-1 + \frac{\kappa}{8\pi}r\sigma_0'\sigma_0'e^{-v} \right) \left[\frac{1 + rv' - \frac{\kappa}{8\pi}r^2e^{-v}\sigma_0'^2}{1 + \frac{\kappa}{8\pi}r^2\mu^2\sigma_0^2e^{-v}} \right] \quad (5.45)$$

Essas equações podem, em princípio, serem resolvidas para as funções desconhecidas σ_0 e v . Por outro lado, devido a não-linearidade desse sistema de equações, uma solução analítica seria demasiadamente difícil de se obter. Vale ressaltar que uma solução exata para esse sistema ainda não foi encontrada [56], felizmente, na literatura, podemos encontrar soluções aproximadas.

Usando uma abordagem perturbativa, [56] obteve soluções bastante interessantes. A solução obtida considera correções de primeira ordem para a métrica, com valor aproximado a menos de uma integral final. O parâmetro de perturbação adimensional usado por [56] é definido como:

$$\varepsilon = \kappa \frac{q^2 \mu^2}{\varepsilon_0} \quad (5.46)$$

onde $\kappa = G/c^4$ e ε_0 corresponde ao coeficiente de permissividade do espaço livre para à interação Proca. É feito ainda uma redefinição que permitiu escrever as funções σ_0 e v em termos adimensionais (definidas por [56] como $A_0 = su$, e $e^v = f$, onde $s = q\mu/\varepsilon_0$ carrega todas as unidades A_0 .*). Considerando ε muito pequeno, pode-se expandir essas funções de modo a obter:

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + O\varepsilon^2 + \dots \quad (5.47)$$

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + O\varepsilon^2 + \dots \quad (5.48)$$

Considerando apenas o caso de ordem zero, em (5.48), a solução para o campo de Proca obtida por [56] foi:

$$u_0 = C_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} + C_1 \frac{e^{\mu r}}{\mu r} \quad (5.49)$$

sendo que para $C_1 = 0$ e fazendo as devidas substituições bem como a devida redefinição da constante obtém-se:

$$\sigma_0 = q \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (5.50)$$

Para (5.47) é admitido correções até primeira ordem da função métrica e^v , sendo obtido ao fazer a renormalização apropriada das constantes:

$$e^v = 1 - \frac{2MG}{c^2 r} + \frac{q^2 G}{\varepsilon_0 c^4} \left(\frac{e^{-2\mu r}}{r^2} + \mu^2 \int_r^\infty \frac{e^{-2\mu r}}{r^2} dr \right) \quad (5.51)$$

Vale resultar que no limite quando $\mu \rightarrow 0$, esse resultado recai no espaço-tempo de Reissner-Nordstrom, descrevendo o corpo carregado com simetria esférica e estático.

Outra solução aproximada para o caso de uma campo vetorial com fóton de massa diferente de zero é a obtida por [53] no espaço-tempo de Reissner-Nordstrom de Sitter, considerando a aproximação para o campo fraco.

Os resultados obtidos, a saber, foram:

*Onde o termo A_0 correspondente ao σ_0 .

$$\begin{aligned}
ds^2 = & - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \frac{Q^2}{r^2}e^{-2\mu r} - \frac{2\mu Q^2}{r}e^{-2\mu r} - 4\mu^2 Q^2 \int_r^\infty \frac{e^{-2\mu r}}{r} dr \right) dt^2 \\
& + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \frac{Q^2}{r^2}e^{-2\mu r} - \frac{2\mu Q^2}{r}e^{-2\mu r} + \mu^2 Q^2 e^{-2\mu r} + 2r\mu^3 Q^2 e^{-2\mu r} \right)^{-1} dr^2 \\
& + r^2 \left(1 + \mu^2 Q^2 e^{-2\mu r} + 2\mu^2 Q^2 \int_r^\infty \frac{e^{-2\mu r}}{r} dr \right) (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)
\end{aligned} \tag{5.52}$$

cuja assinatura é $(-1, 1, 1, 1)$. Para o campo, têm-se :

$$\varphi(r) = \frac{Q}{r} e^{-\mu r} \tag{5.53}$$

onde a constante de integração C é interpretada como sendo a carga. Essa solução é tipo Schwarzschild com constante cosmológica.

No nosso caso o campo de Proca passa a ser interpretado como sendo um campo geométrico, ou seja, ele está associado a geometria do espaço-tempo, e não a uma fonte externa. A seguir, buscamos estudar campo de Proca geométrico aplicado na teoria invariante de Weyl.

CAPÍTULO 6

CAMPO DE PROCA NA TEORIA INVARIANTE DE WEYL

Para que uma teoria física tenha respaldo dentro da comunidade científica, é de se esperar que a sua aplicação tenha resultados consistentes com a realidade física. Neste sentido, a relatividade geral de Einstein se mostra hoje uma teoria de sucesso, tendo em vista os resultados obtidos quando aplicada em diferentes contextos.

Neste capítulo, buscaremos estudar possíveis soluções para as equações de campo da teoria de Weyl não-integrável e suas interpretações, admitindo o campo de Weyl como sendo o campo de Proca geométrico. Os cálculos aqui realizados seguem os resultados obtidos por [6, 15]. De agora em diante, quando falarmos do campo de Weyl estamos nós referindo ao campo de Proca geométrico.

Consideremos as equações de campo descritas no calibre natural ($R = \Lambda$) dadas por

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{\alpha\beta} + \frac{3}{2}\left(\sigma_\alpha\sigma_\beta - \frac{1}{2}\sigma_\mu\sigma^\mu g_{\alpha\beta}\right) + \frac{\Lambda}{4}g_{\alpha\beta} = \frac{\omega}{\Lambda}T_{\alpha\beta} \quad (6.1)$$

$$(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta})_{|\beta} = \frac{3\Lambda}{2\omega}\sqrt{-g}\sigma^\alpha. \quad (6.2)$$

Comparando a equação (6.2) com a equação do campo de Proca no espaço-tempo curvo para o caso em que não tenhamos fonte, isto é:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu} = -\mu^2\sigma^\mu \quad (6.3)$$

nota-se que $\mu^2 = -\frac{3\Lambda}{2\omega}$. Sendo assim, devemos ter $\frac{3\Lambda}{2\omega} < 0$, uma vez que o termo μ^2 que aparece na equação de Proca é proporcional a massa. Portanto, faz sentido fazermos menção a Proca.

De modo análogo ao que é feito na relatividade geral, podemos escrever a equação (6.1) de modo simplificado, dado o fato de que o tensor momento-energia do campo de Weyl tem traço nulo. De fato, da expressão

$$T_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} F_{\mu\beta} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

segue imediatamente que

$$T = F^{\nu\alpha} F_{\alpha\nu} + F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0. \quad (6.4)$$

Assim, ao multiplicarmos (6.1) por $g^{\alpha\beta}$, vamos obter:

$$\tilde{R} - 2\tilde{R} + \frac{3}{2}(\sigma_\alpha \sigma^\alpha - 2\sigma_\alpha \sigma^\alpha) + \Lambda = 0,$$

ou seja

$$\tilde{R} = \Lambda - \frac{3}{2}\sigma_\alpha \sigma^\alpha \quad (6.5)$$

onde usamos que $g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = n$, n correspondendo a dimensão do espaço-tempo, que no caso aqui é igual a 4. Desse modo, ao substituírmos (6.5) em (6.1), vamos ficar com:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{\Lambda}{4} g_{\alpha\beta} + \frac{3}{2} \sigma_\mu \sigma_\nu = \frac{\omega}{\Lambda} T_{\alpha\beta} \quad (6.6)$$

Considerando, então, essa equação e a equação (6.2), vamos procurar encontrar uma possível solução para esse conjunto de equações.

6.1 Solução para o campo fraco

Nesta seção, vamos buscar uma solução estática e esfericamente simétrica, considerando a aproximação em que o campo de Weyl tem um valor muito pequeno, sendo dado por:

$$\sigma_\mu = (\varepsilon \varphi(r), 0, 0, 0), \quad (6.7)$$

onde $\varepsilon \ll 1$. A métrica considerada, com simetria esférica, será aproximada para:

$$ds^2 = (1 + \varepsilon v) dt^2 - (1 + \varepsilon \lambda) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (6.8)$$

sendo v e λ duas funções dependentes apenas da coordenada radial r .

Sendo assim, nessa aproximação considerada, as componentes do tensor $T_{\mu\nu}$ serão nulas, pois correspondem a termos da ordem de $O(\varepsilon^2)$, que desprezaremos em nossa aproximação linear. Do mesmo modo, os termos de segunda ordem em ε para o campo de Weyl também são desprezados. Portanto, a equação (6.6) assume a forma:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{\Lambda}{4} g_{\alpha\beta} = 0 \quad (6.9)$$

onde estamos também admitindo que a constante Λ (interpretada aqui como sendo a constante cosmológica) é também, no máximo, de ordem ε . Representando o tensor $F_{\mu\nu}$ por uma matriz, teremos

$$F_{\mu\nu} = -\varepsilon \varphi'(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

Sendo assim, a equação (6.2) tem como única componente não-trivial, qual seja

$$(\sqrt{-g} F^{01})|_1 = \frac{3\Lambda}{2\omega} \sqrt{-g} \sigma^0. \quad (6.11)$$

E como a métrica, representada na forma matricial, é dada por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (1 + \varepsilon v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 + \varepsilon \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

podemos facilmente ver que

$$g = -r^4 \sin^2 \theta [1 + \varepsilon (v + \lambda)] \Rightarrow \sqrt{-g} = r^2 \sin \theta \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} (v + \lambda) \right]. \quad (6.13)$$

Portanto, a equação (6.11) fica:

$$\partial_r \left(-r^2 \sin \theta \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} (v + \lambda) \right] \varepsilon \varphi'(r) \right) = \frac{3\Lambda}{2\omega} r^2 \sin \theta \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} (v + \lambda) \right] (1 - \varepsilon \lambda) \varphi(r).$$

E assim, temos

$$\begin{aligned}\partial_r (r^2 \varepsilon \varphi'(r)) &= -\frac{3\Lambda}{2\omega} r^2 \varepsilon \varphi(r) \\ \Rightarrow \varphi''(r) + \frac{2}{r} \varphi'(r) + \frac{3\Lambda}{2\omega} \varphi(r) &= 0\end{aligned}\quad (6.14)$$

A solução geral dessa equação diferencial, considerando que $\frac{\Lambda}{\omega} > 0$, é :

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r} e^{-i\sqrt{|\frac{3\Lambda}{2\omega}|}r} + \frac{iC_2}{r} e^{i\sqrt{|\frac{3\Lambda}{2\omega}|}r} \quad (6.15)$$

Como nós interessa a solução partícula, e assumindo que $\Lambda > 0$ uma vez que desejamos interpreta-lá como sendo a constante cosmológica (que é positiva), portanto, vamos considerar que $\omega < 0$, de modo que a equação (6.14) torna-se:

$$\varphi''(r) + \frac{2}{r} \varphi'(r) - \frac{3\Lambda}{2\omega} \varphi(r) = 0. \quad (6.16)$$

A solução dessa equação é :

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r} e^{-\sqrt{\frac{3\Lambda}{2\omega}}r} + \frac{C_2}{r} e^{\sqrt{\frac{3\Lambda}{2\omega}}r} \quad (6.17)$$

Neste caso, tomando $C_2 = 0$, verificamos imediatamente que o campo de Weyl (ou Proca) tem exatamente a mesma forma do potencial de Yukawa, decaindo exponencialmente a medida que nos afastamos do centro da fonte, ou seja,

$$\varphi(r) = \frac{C}{r} e^{-\sqrt{\frac{3\Lambda}{2\omega}}r} \quad (6.18)$$

Analisando agora as equações (6.9), vamos considerar os casos em que $\mu = \nu = 0, 1, 2$, respectivamente, o que nos leva ao seguinte sistema de equações:

$$-\frac{\varepsilon \nu''}{2} - \frac{\varepsilon \nu'}{r} - \frac{\Lambda}{4} (1 + \varepsilon \nu) = 0, \quad (6.19)$$

$$\frac{\varepsilon \nu''}{2} - \frac{\varepsilon \lambda'}{r} + \frac{\Lambda}{4} (1 + \varepsilon \lambda) = 0, \quad (6.20)$$

$$\frac{r\varepsilon}{2} (\nu - \lambda)' - \varepsilon \lambda + \frac{\Lambda}{4} r^2 = 0. \quad (6.21)$$

Somando as equações (6.19) e (6.20), vamos obter a seguinte expressão:

$$-\frac{\varepsilon}{r}(\nu + \lambda)' + \frac{\Lambda}{4}\varepsilon(\lambda - \nu) = 0 \quad (6.22)$$

Note que, como havíamos assumido que Λ é da ordem de ε , podemos então descartar o último termo dessa equação. Assim, temos:

$$(\nu + \lambda)' = 0 \Rightarrow \nu = -\lambda \quad (6.23)$$

Ao substituir esse resultado na equação (6.21), vamos obter:

$$\lambda' + \frac{\lambda}{r} - \frac{\Lambda}{4\varepsilon}r = 0, \quad (6.24)$$

cujas soluções são :

$$\lambda(r) = \frac{C_1}{r} + \frac{\Lambda}{12\varepsilon}r^2. \quad (6.25)$$

Desse modo, pela relação (6.23), temos que ν assume a forma:

$$\nu(r) = -\frac{C_1}{r} - \frac{\Lambda}{12\varepsilon}r^2 \quad (6.26)$$

Portanto, a métrica na solução de campo fraco que estamos considerando é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\varepsilon C_1}{r} - \frac{\Lambda}{12}r^2\right) dt^2 - \left(1 + \frac{\varepsilon C_1}{r} + \frac{\Lambda}{12}r^2\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (6.27)$$

Essa solução corresponde a que se conhece na literatura como espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter, que descreve um buraco negro [60].

Em comparação com os resultados apresentados no capítulo 5, esse resultado se mostra consistente, uma vez que no nosso caso o campo vetorial massivo está associado a geometria do espaço e assim não temos uma fonte.

Para melhor compreender isso, vamos a princípio fazer algumas aproximações no caso do campo de Proca na Relatividade Geral. Considerando o caso em que temos q muito pequeno de modo que os termos de segunda ordem sejam desprezíveis, e para um campo fraco onde a massa seja $m \ll 1$, a solução (5.52) se reduz a:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2m}{r} + \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.28)$$

onde passamos a usar a assinatura $(1, -1, -1, -1)$ para propósito de comparação com

(6.27) que desejamos fazer*. Note que se fizermos em (6.27) a seguinte redefinição das constantes:

$$C_1 = \frac{2m}{\varepsilon} \quad (6.29)$$

$$\Lambda = 4\Lambda \quad (6.30)$$

onde nesse caso Λ corresponde a constante cosmológica, e comparando com (6.28), percebe-se que as soluções são perfeitamente idênticas. De modo análogo, se fizermos q muito pequeno em (5.51), obtemos:

$$e^v = 1 - \frac{2MG}{c^2 r} \quad (6.31)$$

que corresponde ao espaço-tempo de Schwarzschild sem a constante cosmológica. Podemos igualmente redefinir $C_1 = \frac{2MG}{\varepsilon c^2}$ e $\Lambda = 0$ em (6.27) e obter resultados idênticos.

Note ainda que, fazendo $\mu = \sqrt{\frac{3\Lambda}{2\omega}}$ em (6.18) obtemos:

$$\varphi(r) = \frac{C}{r} e^{-\mu r} \quad (6.32)$$

que é equivalente ao campo (5.53) obtida por [53], e ao campo (5.50) obtido por [56], que foram apresentados no capítulo 5. Desse modo, vemos que existe uma enorme semelhança entre o campo de Weyl e o campo de Proca geométrico.

6.2 Aplicação no contexto cosmológico

Buscamos aqui estudar uma solução cosmológica para as equações de campo da teoria invariante de Weyl, uma teoria modificada da gravitação, na qual é introduzido um campo de 1-formas σ (o campo de Weyl). A forma da lagrangiana proposta por Weyl nos leva a interpretar como sendo o campo massivo, análogo ao campo de Proca. Vamos supor que o campo de Weyl tenha apenas dependência temporal, sendo dado por:

$$\sigma_\mu = (\phi(t), \vec{B}(t)) \quad (6.33)$$

Adotando a hipótese de que o universo é homogêneo e isotrópico, com seção espacial plana, a métrica considerada será a de Friedmann-Robertson-Walker, que em coordena-

*Veja que, sendo $m \ll 1$, e uma vez que a constante cosmológica Λ é muito pequena por natureza, nós usamos a expansão em série de potências no segundo termo, isto é, por exemplo: $(1-x)^{-1} = (1+x + Ox^2 + \dots)$, para um x muito pequeno.

das cartesianas é dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (6.34)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala cósmico, que descreve a dinâmica do universo. Queremos determinar o comportamento de $a(t)$, sendo que para isso vamos precisar usar as equações de campo.

Como já vimos, as equações de campo na teoria invariante de Weyl (não-integrável) são dadas por

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{4}g_{\mu\nu} + \frac{3}{2}\left(\sigma_\mu\sigma_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sigma^\alpha\sigma_\alpha\right) = \frac{\omega}{\Lambda}T_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}^* \quad (6.35)$$

,

$$(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu} = \frac{3\Lambda}{2\omega}\sqrt{-g}\sigma^\mu, \quad (6.36)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia associado ao tensor $F_{\mu\nu}$, e o tensor da matéria $T_{\mu\nu}^*$. Admitindo que possamos descrever a matéria por um fluido perfeito, então

$$T_{\mu\nu}^* = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (6.37)$$

onde ρ e p denotam, respectivamente, a densidade de energia e a pressão, e estamos adotando a convenção de que a assinatura da métrica é do tipo $(+, -, -, -)$. Devido à suposição de homogeneidade e isotropia, ρ e p devem depender apenas do tempo e não das coordenadas espaciais, isto é, $\rho = \rho(t)$ e $p = p(t)$.

Por definição, $F_{\mu\nu} = \sigma_{\mu|\nu} - \sigma_{\nu|\mu}$, e usando a métrica para subir os índices, podemos calcular as componentes de $F_{\mu\nu}$, onde obtemos:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\dot{B}}{a^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.38)$$

Calculando também as componentes do tensor momento-energia do campo de Weyl, vamos obter

$$T_{\mu\nu} = \frac{\dot{B}^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{3}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.39)$$

Sendo a métrica dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

seu determinante é

$$g = -a^6 \Rightarrow \sqrt{-g} = a^3 \quad (6.41)$$

Vamos agora analisar a equação (6.36), considerando inicialmente o índice $\mu = 0$, onde ficamos com:

$$(a^3 F^{0\nu})_{|v} = \frac{3\Lambda}{2\omega} a^3 \sigma^0 \quad (6.42)$$

Como a componente F^{00} é zero e as componentes $F^{0\nu}$ são dependentes apenas do tempo, temos então, $\sigma^0 = 0$. Fazendo agora $\mu = 1$, obtemos:

$$(a^3 F^{1\nu})_{|v} = \frac{3\Lambda}{2\omega} a^3 \sigma^1 \quad (6.43)$$

As únicas componentes não-nula de $F^{\mu\nu}$ são $F^{10} = -F^{01} = -\frac{\dot{B}}{a^2}$, de modo que vamos obter a seguinte expressão:

$$(a\dot{B})_{|0} = \frac{3\Lambda}{2\omega} a^3 g^{11} \sigma_1 \Rightarrow \ddot{B} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{B} = \frac{3\Lambda}{2\omega} B. \quad (6.44)$$

Calculando as componentes do tensor de Ricci, encontramos :

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\dot{a}}{a} \\ R_{11} &= a\dot{a} + 2\dot{a}^2 \\ R_{22} &= R_{33} = R_{11} \end{aligned} \quad (6.45)$$

então, analisando a equação de campo (6.35), para $\mu = 1$ e $\nu = 2$ vamos obter

$$\frac{\dot{B}}{B} = \pm \sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}}. \quad (6.46)$$

É fácil ver que a solução dessa equação é :

$$B(t) = C e^{\pm \sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}} t}. \quad (6.47)$$

onde C é a constante de integração. Podemos tomar $C = 1$ por reescalonamento do elemento de linha. Assim, ficamos com:

$$B(t) = e^{\pm \sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}} t}, \quad (6.48)$$

onde temos duas soluções possíveis. Considerando o caso da raiz positiva em (6.48) e substituindo o resultado na equação (6.44), o fator de escala obtido é :

$$a(t) = e^{-2 \sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}} t} \quad (6.49)$$

onde novamente a constante de integração é tomada igual à unidade. (Uma observação importante: como o termo $\frac{\Lambda}{\omega}$ deve ser negativo para a raiz em (6.48) ser real, temos que tomar necessariamente $\omega < 0$.) Assim, vemos que o fator de escala descreve em um universo num regime de contração.

Por outro lado, de acordo com a outra solução possível, o campo de Weyl será dado por

$$B(t) = e^{-\sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}} t}. \quad (6.50)$$

Notemos que quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, à medida que o universo evolui com o tempo, e conseqüentemente se expande, o campo de Weyl tende a desaparecer, e a geometria do espaço-tempo torna-se riemanniana. Esse resultado mostra que a importância do campo de Weyl nesse modelo deve ser buscada no universo primitivo.

Portanto, substituindo esse resultado em (6.44), o fator de escala obtido é :

$$a(t) = e^{2 \sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}} t}, \quad (6.51)$$

que corresponde ao caso do universo em expansão, com o termo $\sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}} > 0$, uma vez que ω é negativo e Λ é a constante cosmológica (que é positiva).

Portanto, como nos interessa apenas o caso do universo em expansão, consideramos o caso da solução dada em (6.51). Nesse caso, temos

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}}t} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (6.52)$$

Analisando novamente a equação de campo (6.35), agora para $\mu = \nu = 0$, obtemos:

$$-3\frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{\Lambda}{4} + \frac{9}{4}\frac{B^2}{a^2} = \frac{3\omega}{2\Lambda}\frac{\dot{B}^2}{a^2} - \kappa\rho \quad (6.53)$$

substituindo o campo de Weyl (6.50) e o fator de escala (6.51) podemos obter uma expressão para $\rho(t)$, a saber:

$$\rho(t) = -\frac{\Lambda}{\kappa} \left(\frac{18}{\omega} + \frac{1}{4} \right) - \frac{9}{2\kappa} e^{-6\sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}}t}. \quad (6.54)$$

Para $\omega < 0$, essa densidade de energia torna-se:

$$\rho(t) = \frac{\Lambda}{\kappa} \left(\frac{18}{\omega} - \frac{1}{4} \right) - \frac{9}{2\kappa} e^{-6\sqrt{|\frac{3\Lambda}{2\omega}|}t}. \quad (6.55)$$

Fazendo agora $\mu = \nu = 1$, em (6.35), vamos obter para $p(t)$ a seguinte expressão:

$$\kappa p(t) = -\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\Lambda}{4} + \frac{3}{4}\frac{\dot{B}^2}{a^2} + \frac{\omega}{2\Lambda}\frac{\dot{B}^2}{a^2} \quad (6.56)$$

sendo que, ao substituirmos novamente o campo de Weyl e o fator de escala, ficamos com:

$$p(t) = \frac{\Lambda}{\kappa} \left(\frac{18}{\omega} + \frac{1}{4} \right) \quad (6.57)$$

Note que quando $t \rightarrow \infty$, a equação de estado obtida é $p = -\rho$, que corresponde a uma equação de estado típica de energia escura. Além disso, a solução obtida representa um universo não-singular em expansão. Do ponto de vista da Cosmologia, esse resultado é bastante interessante tendo em vista que os modelos mais aceitos atualmente são aqueles que procuram explicar a atual fase de expansão acelerada do Universo, sendo algumas propostas baseadas na hipótese de que essa dinâmica deve-se à presença da constante cosmológica positiva nas equações de campo, ideia originalmente concebida por Einstein. Na perspectiva de trabalhos futuros, o caminho será então buscar uma descrição para a matéria escura a luz da teoria invariante de Weyl.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

A teoria de Weyl, foco maior de nossa dissertação, além de representar a primeira tentativa de unificação relativista da gravitação e eletromagnetismo, deu origem às modernas teorias de calibre (gauge) [4]. Entretanto, como vimos, por causa da objeção levantada por Einstein, a elegante e engenhosa proposta de Weyl não teve seu mérito reconhecido até recentemente. Neste trabalho apresentamos um estudo detalhado dessa teoria, onde discutimos uma possível modificação, extensão e reinterpretação, capaz de resgatá-la como uma alternativa à relatividade geral.

Revisitando a teoria de Weyl, analisamos a crítica feita por Einstein sob uma perspectiva atual e apontamos novos caminhos para a construção de uma versão invariante, mais de acordo com o espírito e filosofia inicial de Weyl. Além disso, na perspectiva de torná-la mais completa, formulamos uma prescrição de como implementar na teoria o acoplamento da geometria com a matéria, utilizando um novo conceito de métrica invariante.

Além da discutir com maior profundidade a crítica de Einstein, lançamos um novo olhar sobre se o problema da geometrização do campo eletromagnético na teoria de Weyl teve êxito ou não. Argumentamos, com esse propósito, que a eletrodinâmica obtida originalmente por Weyl não coincide com a eletrodinâmica de Maxwell. Por outro lado, chamamos a atenção para o fato de que a ação que leva às equações de campo na teoria de Weyl têm grande semelhança com a ação que descreve o campo de Proca, o que nos levou a interpretar o campo de Weyl, não como o campo eletromagnético, mas sim como parte do campo gravitacional [6, 15]. Assim, a teoria de Weyl passa a ser interpretada como uma

teoria modificada da gravitação, na qual introduzimos um campo vetorial entendido como possuindo uma natureza puramente geométrica. Por completeza, apresentamos também um estudo das características e propriedades físicas do campo de Proca em relação ao campo eletromagnético, analisando diferentes situações.

Apresentamos ainda, como aplicação das equações de campo da teoria invariante de Weyl, soluções considerando tanto o espaço vazio, como na presença de matéria, nas quais, para o primeiro caso, as soluções obtidas se mostraram equivalentes às obtidas por [53,56], que considerou o campo de Proca na relatividade geral. Essas soluções estão descritas no Capítulo 5. Neste sentido, podemos dizer que a descrição do campo de Proca geométrico na teoria invariante de Weyl não altera ou inviabiliza as suas características físicas, mostrando-se, de certo modo, consistente com a teoria de Proca no contexto da relatividade geral. No segundo caso, considerando a presença de matéria, analisamos a solução cosmológica adotando o universo homogêneo e isotrópico, com seção espacial plana, do tipo Friedmann-Robertson-Walker. A solução obtida revela um universo não-singular em expansão. Além disso, observa-se que à medida que o universo se expande o campo de Weyl tende a desaparecer e a equação de estado do fluido cosmológico torna-se a mesma usada em modelos que pretendem descrever a *energia escura*.

Numa perspectiva futura há, pelo menos, dois problemas que gostaríamos de investigar. Primeiro, pretendemos estudar os efeitos nas ondas gravitacionais causados pela presença do campo de Proca na geometria do espaço-tempo. Pretendemos, também, considerar, à luz da teoria invariante de Weyl, uma possível modelização da matéria escura como uma manifestação (geométrica) do campo de Proca.

Referências Bibliográficas

- [1] R. D'INVERNO, *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [2] L.D.LANDAU ; E.M.LIFSHITZ, *The Classical Theory of Fields*. (pergamon press), 1975.
- [3] C.S. da C. NETO, *Soluções Cosmológicas e locais para uma Eletrodinâmica modificada* . Dissertação de Mestrado, Natal-RN, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2001.
- [4] L. O'RAIFEARTAIGH and N. STRAUMANN, *Gauge theory: Historical origins and some modern developments*, vol. 72. Reviews of Modern Physics, 2000.
- [5] I. P. LOBO and C. ROMERO, *Experimental constraints on the second clock effect*, vol. 783. Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics, 2018.
- [6] T.A.T. SANOMIYA; I.P. LOBO; J.B. FORMIGA; F. DAHIA; C. ROMERO, *An Invariant Approach to Weyl's unified field theory*. Phys. Rev., 2020.
- [7] C. ROMERO, *Is Weyl unified theory wrong or incomplete?* arXiv, 2015.
- [8] E. SCHOLZ, *The unexpected resurgence of Weyl geometry in late 20-th century physics*. arXiv, 2017.
- [9] W. O. STRAUB, *On the Failure of Weyl's 1918 Theory*. Disponível em: <https://vixra.org/abs/1401.0168>, 2014.

- [10] W. O. STRAUB, *Weyl's 1918 Theory Revisited*. Pasadena, California. Disponível em: <http://www.weylmann.com/revisited.pdf>, 2009.
- [11] LIMA, R. G., *Teoria da gravitação num espaço-tempo de Weyl não-integrável*. Dissertação de Mestrado, João Pessoa-PB, Universidade Federal da Paraíba, 2016.
- [12] D. N. POENARU ; A. CALBOREANU, *Alexandru Proca (1897-1955) and his equation of the massive vector boson field*, vol. 37. Europhysics News, 2006.
- [13] W. O. STRAUB, *Weyls Theory of the Combined Gravitational-Electromagnetic Field*. PhD Thesis, Pasadena, Californi.
- [14] HAWKING, STEPHEN, *A brief history of time*. Bantam Books; 10th Anniversary ed. edição (1 setembro 1998), 1998.
- [15] T. A. T. SANOMIYA, *Reinterpretação e extensão da teoria unificada de Weyl*. tese de doutorado, João Pessoa-PB, Universidade Federal da Paraíba, 2020.
- [16] A. ADLER ; M. BAZIN; M. SCHIFFER, *Introduction to general relativity*. Ch. 15 (Mc.Graw-Hill), 1975.
- [17] L. ELSGOLTZ, *Ecuaciones Diferenciales y Calculo Variacional*. (Editorial Mir Moscú), 1969.
- [18] R.PENROSE, *Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Jonathan Cape, London, 2004.
- [19] T. S. ALMEIDA and M. L.PUCHEU and C.ROMERO and J. B. FORMIGA, *From Brans-Dicke gravity to a geometrical scalar-tensor theory*, vol. 89. Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology, 2014.
- [20] W.GREINER; J.REINHARDT, *Field Quantization*. (Springer), 1996.
- [21] H.WEYL, *Gravitation and Electricity*. Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite, 1918.
- [22] C. S. HELRICH, *The Classical Theory of Fields*, vol. 53. (Graduate Texts in Physics), 2012.
- [23] V.RUBAKOV ; S.S.WILSON, *Classical Theory of Gauge Fields*. (Graduate Texts in Physics), 2019.

- [24] BRITO, G. P. DE ; J. A. HELAYEL-NETO, *Teorias de calibre via equações de Maxwell*. Notas de aula, 2017.
- [25] T. A. de SÁ M. SAMPAIO, *A Eletrodinâmica e a Gravidade Linearizada Sob os Efeitos da Violação da Invariância de Lorentz na Escala de Planck* . Dissertação de Mestrado, Campina Grande-PB, Universidade Federal de Campina Grande, 2018.
- [26] P. N. AKMANSOY, *Vínculos de Eletrodinâmicas Não Lineares*. Tese de doutorado, Natal-RN, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2018.
- [27] H. ARODŽ ; L. HADASZ, *Lectures on Classical and Quantum Theory of Fields*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [28] W. M.HERDY, *A Eletrodinâmica de Maxwell-Proca e o Fóton Massivo*. Trabalho de Conclusão de Curso, Rio de Janeiro, Faculdade De Filosofia, Ciências E Letras, 2010.
- [29] A. O. de O. GONÇALVES, *O fóton Massivo em Supercondutores*. Dissertação de Mestrado, Vitória, Universidade Federal do Espírito Santo, 2012.
- [30] E. S. GONÇALES, *A Massa do Fóton e a Eletrodinâmica de Proca*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física Téorica-IFT, Universidade Estadual Paulista, 2008.
- [31] B. P. KOSYAKOV, *Introduction to the classical theory of particles and fields*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [32] C.ROMERO, *Notas de Aula de Relatividade Geral*. Universidade Federal da Paraíba, 2020.
- [33] R. M. PEREIRA, *A Lagrangiana de Proca e uma Aplicação na Teoria da Supercondutividade - trabalho para o curso de eletromagnetismo da pós-Graduação*. Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.
- [34] D. V. DE JESUS, *Aplicações do Teorema do Resíduo* . Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.
- [35] L. R. W. ABRAMO, *Introdução geral às funções de Green*. Notas sobre Funções de Green, Departamento de Física Matemática, Instituto de Física, USP, 2011.
- [36] A. SMOLKOVI, *Photon mass and electron decay*. University of Ljubljana Faculty of Mathematics and Physics, 2016.

- [37] S. J. Plimpton and W. E. Lawton, *A very accurate test of coulomb's law of force between charges*, vol. 50. Physical Review, 1936.
- [38] E. R. Williams, J. E. Faller, and H. A. Hill, *New experimental test of Coulomb's Law: A laboratory upper limit on the photon rest mass*, vol. 26. Phys. Rev. Lett., 1971.
- [39] M. Fischbach, E.; Kloor, H.; Langel, R. A.; Lui, A. T. Y.; Peredo, *New geomagnetic limits on the photon mass and on long-range forces coexisting with electromagnetism.*, vol. 73. Physical Review Letters, 1994.
- [40] J. D. Jackson, *Eletrodinâmica Clássica*. Rio de Janeiro: (tradução de Annita Macedo e Horacio Macedo) Guanabara Dois, 1983.
- [41] H. GOLDSTEIN; C. POOLE; J. SAFKO, *Classical Mechanics*. 3rd ed. Addison–Wesley, New York, Ch. 13, 2002.
- [42] I. M. GELFAND; S. V. FOMIN, *Calculus Of Variations*. PRENTICE-HALL, INC.Englewood Cliffs, New Jersey. Translated and edited by Richard A. Silverman, 1963.
- [43] W. GREINER, *Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations*. (Springer), 2000.
- [44] J. C. LEITE, *Variáveis complexas*. São Cristóvão, Universidade Federal de Sergipe, CESAD, ch. 7, 2011.
- [45] A. O. BARUT, *Electrodynamics and classical theory of fields & particles*. General Publishing Company, 1980.
- [46] J. SCHWICHTENBERG, *No-Nonsense Quantum Field Theory: A Student-Friendly Introduction*. No-Nonsense Books; Annotated edição (25 fevereiro 2020).
- [47] C. N. de SOUZA, *Eletrodinâmica de Podolsky Aplicada à Cosmologia*. Dissertação de Mestrado, Poços de Caldas/MG, Universidade Federal de Alfenas, 2016.
- [48] T. DERELI; M. ONDER; J. SCHRAY; R.W. TUCKER; C. WANG, *Non-Riemannian gravity and the Einstein-Proca system*, vol. 13. Classical and Quantum Gravity, 1996.
- [49] GAO, CHANGJUN; SHEN, YOU GEN, *Static spherically symmetric solution of the Einstein-aether theory*, vol. 88. Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology, 2013.

- [50] A. GONZÁLEZ; R. LINARES; M. MACEDA; O. SÁNCHEZ-SANTOS, *Non-commutative Einstein-Proca spacetime*. Physical Review, 2014.
- [51] R. W. TUCKER; C. WANG, *An Einstein-Proca-fluid model for dark matter gravitational interactions*. Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) 57, 1997.
- [52] I. L. BUCHBINDER; T. DE PAULA NETTO; I. L. SHAPIRO, *Massive vector field on curved background: Nonminimal coupling, quantization, and divergences*. Physical Review D, 201, 2017.
- [53] C. SHI; Z. LIU, *Proca Effect in Reissner–Nordstrom de Sitter Metric*, vol. 44. International Journal of Theoretical Physics, 2005.
- [54] Y. N. OBUKHOV; E. J. VLACHYNSKY, *Einstein-Proca model: Spherically symmetric solutions*. No. 6, Annalen der Physik (Leipzig), 1999.
- [55] M. TOUSSAINT, *A Numeric Solution for Einstein’s Gravitational Theory with Proca Matter and Metric-Affine Gravity*. General Relativity and Gravitation, vol. 32, 1689–1709, 2000.
- [56] C. VUILLE; J. IPSER; J. GALLAGHER, *Einstein-Proca Model, Micro Black Holes, and Naked Singularities*. General Relativity and Gravitation, 2002.
- [57] D. N. POENARU, *Proca Equations of a Massive Vector Boson Field*. Horia Hulubei National Institute of Physics and Nuclear Engineering, PO Box MG-6, RO-077125 Bucharest-Magurele, Romania and Frankfurt Institute for Advanced Studies, J W Goethe University, Max-von-Laue-Str. 1, D-60438 Frankfurt am Main, Germany.
- [58] T. A. CHOWDHURY; R. RAHMAN; Z. A. SABUI, *Gravitational properties of the Proca field*. Nuclear Physics B, 2018.
- [59] I. SAKALLI; A. ÖVGÜN, *Quantum Tunneling of Massive Spin-1 Particles From Non-stationary Metrics*. No. 1, Gen.Rel.Grav. 48, 2016.
- [60] H. NARIAI, *On Some Static Solutions of Einstein’s Gravitational Field Equations in a Spherically Symmetric Case*, vol. 31. General Relativity and Gravitation, 1999.