



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Efeitos de Flutuações Devidas à População Finita na
Sincronização de Osciladores Globalmente
Acoplados**

Tiago Moy da Silva

João Pessoa - Paraíba

2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Efeitos de Flutuações Devidas à População Finita na Sincronização de Osciladores Globalmente Acoplados

Tiago Moy da Silva

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal da Paraíba como parte dos
requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre da Silva Rosas

João Pessoa - Paraíba

2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586e Silva, Tiago Moy da.

Efeitos de flutuações devidas à população finita na
sincronização de osciladores globalmente acoplados /
Tiago Moy da Silva. - João Pessoa, 2020.
77 f. : il.

Orientação: Alexandre Rosas.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Sincronização. 3. Osciladores globalmente
acoplados. 4. Flutuações devidas ao número finito. I.
Rosas, Alexandre. II. Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Tiago Moy da Silva**,
 candidato ao Título de Doutor em Física na Área
 de Concentração Física da Matéria Condensada

1 Aos vinte e oito dias do mês de agosto do ano de dois mil e vinte, às 16:00, reuniram-se,
 2 remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato
 3 ao grau de Doutor em Física na área de Física da Matéria Condensada, **Tiago Moy da**
 4 **Silva**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: **Alexandre da**
 5 **Silva Rosas** (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, **Sérgio André Fontes**
 6 **Azevedo** (UFPB), **Bertúlio de Lima Bernardo** (UFPB), **Tânia Tomé Martins de Castro**
 7 (USP), **Mauro Copelli Lopes da Silva** (UFPE). Dando início aos trabalhos, o Prof.
 8 Alexandre da Silva Rosas comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir,
 9 passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese
 10 intitulado "**Efeitos de Flutuações Devidas à População Finita na Sincronização de**
 11 **Osciladores Globalmente Acoplados**". Concluída a exposição, o candidato foi arguido
 12 pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: "**aprovado**". Assim sendo, deve
 13 a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na
 14 forma da lei. E para constar, eu, Jose Sérgio Trindade Silva, redigi esta ata que vai
 15 assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, 28 de
 16 agosto de 2020.

Prof. Dr. Alexandre da Silva Rosas
 Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Sérgio André Fontes Azevedo
 PPGF/UFPB

Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo
 PPGF/UFPB

Prof. Dr. Tânia Tomé Martins de Castro
 USP

Prof. Dr. Mauro Copelli Lopes da Silva
 UFPE

18 Link da reunião <https://meet.google.com/ncn-sfwd-auc>

Resumo

Efeitos de Flutuações Devidas à População Finita na Sincronização de Osciladores Globalmente Acoplados

Neste trabalho, nós apresentamos um estudo sobre a influência do número finito de osciladores na sincronização de dois modelos de osciladores globalmente acoplados. O primeiro é o modelo de Kuramoto com fases discretas e o segundo é o modelo de Yu, que tem como principal característica o crescimento da população. Em ambos os casos, nós partimos da dinâmica microscópica do número de osciladores em um dado estado e obtemos as respectivas equações de Langevin para as densidades de osciladores. Para o modelo de Kuramoto discretizado nós avaliamos a evolução temporal das densidades e comparamos nossos resultados com o caso contínuo, já estudado na literatura na aproximação de campo médio. Em seguida, nós utilizamos a teoria de escala de tamanho finito para obter os expoentes críticos do modelo, onde obtivemos valores próximos a uma classe de universalidade de um modelo de dinâmica de opinião. No estudo do modelo de Yu, que possui três estados, nossa análise restringiu-se ao caso em que o modelo apresenta biestabilidade. Nós estudamos, via dinâmica não linear, o diagrama de bifurcação, que indicou uma bifurcação de Hopf subcrítica, ou seja, o modelo possui dois atratores: um ponto fixo e um ciclo limite. Verificamos que, ao contrário do que ocorre em modelos com população fixa, a biestabilidade persiste no modelo de Yu e o mesmo apresenta histerese. Dessa forma, percebemos que as flutuações não quebram a biestabilidade em sistemas com população finita e crescente.

Palavras-chaves: sincronização; osciladores globalmente acoplados; flutuações devidas ao número finito.

Abstract

Effects of Fluctuations Due to Finite Population on the Synchronization of Globally Coupled Oscillators

In this work, we present a study on the influence of the finite number of oscillators on the synchronization of two models of globally coupled oscillators. The first is Kuramoto's model with discrete phases and the second is Yu's model, whose main characteristic is population growth. In both cases, we start from the microscopic dynamics of the number of oscillators in a given state and obtain the respective Langevin equations for the oscillator densities. For the discretized Kuramoto's model, we evaluated the temporal evolution of densities and compared our results with the continuous case, already studied in the literature in the mean field approach. Then, we used the finite size scale theory to obtain the critical exponents of the model, where we obtained values close to the universality class of an opinion dynamics model. In the study of Yu's model, which has three states, our analysis was restricted to the case in which the model has bistability. We studied, via nonlinear dynamics, the bifurcation diagram, which indicated a subcritical Hopf bifurcation, that is, the model has two attractors: a fixed point and a limit cycle. We found that, unlike what occurs in models with a fixed population, bistability persists in Yu's model and it has hysteresis. Thus, we realize that fluctuations do not break bistability in systems with a finite and growing population.

Keywords: synchronization; globally coupled oscillators; fluctuations due to the finite number

Agradecimentos

Agradeço...

- a minha família pela força e incentivo, especialmente aos meus pais Chaguinha e Socorro, a minha esposa Talita e meu filho Joaquim;
- ao Prof. Dr. Alexandre Rosas pela sua orientação, dedicação e conselhos fundamentais para esta tese;
- aos colegas da pós-graduação, especialmente aos amigos do café da tarde, pelas boas conversas, dicas e incentivos;
- ao Prof. Dr. Sérgio Azevedo por disponibilizar os computadores do seu laboratório para a execução desta tese;
- ao corpo docente e técnico do programa de Pós-Graduação em Física da UFPB;
- à CAPES pelo suporte financeiro.

Lista de Figuras

1.1	Em (a) temos um conjunto de osciladores de 3 estados. A interação é global (todos interagem com todos) com intensidade constante a . Em (b) a figura representa uma unidade com taxa de transição Γ_i entre os estados, onde $\Gamma_i = \Gamma_i(a)$	10
2.1	Postos fixos e sua estabilidade indicada pelas setas.	25
2.2	Bifurcação tipo sela-nó para as três possibilidades de r	26
2.3	Diagrama de bifurcação. Os pontos fixos estáveis são indicados pela linha cheia e os instáveis são representados pela linha tracejada.	27
2.4	A figura mostra um ponto fixo e um ciclo limite como atratores separados por um ciclo limite instável, representado pela linha tracejada. As trajetórias se aproximam dos atratores.	29
2.5	Bifurcação de Hopf supercrítica.	31
2.6	Bifurcação de Hopf subcrítica.	31
3.1	Esboço do gráfico do parâmetro de ordem r em função do acoplamento K	37
3.2	Os pontos representam as amplitudes dos osciladores no plano complexo. Eles foram obtidos de simulações da Eq. (3.16) com $N = 5000$, $\eta = 0,98696$, $K = 1,5708$, $J = 200$ e $a = 0,3$	40
4.1	Evolução temporal de n_i para cinco estados com $N = 500$ (a) e $N = 5000$ (b) osciladores.	49
4.2	Histograma obtido numericamente a partir da Eq. (3.16) e os pontos resultaram das evoluções das fases, Eqs. (4.18). A linha vermelha foi obtida da solução estacionária da equação de Fokker-Planck.	51
4.3	Parâmetro de ordem, susceptibilidade, e cumulante de Binder de quarta ordem como função do acoplamento K no caso de cinco estados e variando o número de osciladores.	52

4.4	Gráficos $\log \times \log$ cujas declividades são iguais a $1/\nu$ (a), γ/ν (b) e β/ν (c) obtidos por meio de ajuste de curva linear.	53
5.1	Diagrama de bifurcação. As linhas contínuas indicam os atratores estáveis e as linhas tracejadas representam os instáveis.	59
5.2	Trajetórias no espaço das densidades com as condições iniciais indicadas pelos círculos fechados em preto. As condições iniciais próximas ao ponto fixo se dirigem para ele, e as mais distantes do ponto fixo evoluem para o ciclo limite estável. . .	63
5.3	Média do parâmetro de ordem tomada sobre 10 amostras como função da taxa de crescimento k . O ciclo de histerese é consequência da biestabilidade.	64
5.4	Média do parâmetro de ordem tomada sobre 10 amostras como função da taxa de crescimento k	65

Lista de Tabelas

4.1	Variação de $N_j(t)$ por meio da comparação entre as taxas w e dos números aleatórios ζ	47
4.2	Expoentes críticos ν , γ e β utilizando o valor teórico de K_c	54
4.3	Expoentes críticos ν , γ e β utilizando o K_c obtido do cumulante de Binder. . . .	55

Sumário

Lista de Figuras	iv
Lista de Tabelas	vi
1 Introdução	9
2 Fundamentação Teórica	14
2.1 Dinâmica Estocástica	14
2.1.1 Equações de Langevin e Coeficientes de Kramers-Moyal	16
2.1.2 Equação de Fokker-Planck e Equação Mestra	21
2.1.3 Solução Numérica da Equação de Langevin	23
2.2 Dinâmica não linear	24
2.2.1 Conceitos iniciais e estabilidade	24
2.2.2 Bifurcação	26
2.3 Teoria de Escala de Tamanho Finito	31
3 Sincronização	35
3.1 Modelo de Kuramoto	35
3.2 Sincronização com fase discreta	38
3.3 Modelo de Kuramoto com fases discretas	39
3.4 Osciladores acoplados com crescimento de população	42
3.5 Flutuações devidas ao número finito de osciladores	43
4 Dinâmica Microscópica e Criticalidade do Modelo de Kuramoto com Fases Discretas	45
4.1 Introdução	45
4.2 Dinâmica microscópica	46
4.3 Comportamento crítico	51

4.4	Conclusão	55
5	Flutuações em um Modelo com Crescimento de População	57
5.1	Introdução	57
5.2	Modelo	58
5.3	Flutuações para população finita	62
5.4	Conclusões	65
6	Considerações finais	67
	Referências Bibliográficas	69

Capítulo 1

Introdução

Segundo o senso comum, dois eventos são sincronizados quando eles ocorrem ao mesmo tempo. Esse conceito informal está baseado em várias situações comuns, como a sincronização dos tempos dos semáforos em uma via visando melhorar o fluxo de veículos. Há, também, o esporte olímpico nado sincronizado, onde várias pessoas executam movimentos artísticos simultâneos em uma piscina e a sincronização de arquivos de um computador para um *smartphone*, se você modifica um arquivo no computador essa mudança é feita no *smartphone* e vice versa. Além disso, essa ideia vem da etimologia. A palavra sincronização, que vem do grego *synchro-nismós*, significa “compartilhando um tempo comum” ou “ocorrendo ao mesmo tempo” [1].

Foi o físico Christiaan Huygens (1629 - 1695), mais conhecido por seus trabalhos no campo da Ótica, quem iniciou os estudos sobre sincronização. Em seus experimentos ele utilizou relógios de pêndulo. Ele descobriu que a sincronização dos relógios ocorria por conta de uma trave utilizada para sustentar tais relógios. Essa trave movia-se lentamente enquanto os pêndulos oscilavam e, após certo tempo, eles alcançavam um mesmo ritmo, levando à sua sincronização. Ou seja, a viga era responsável pelo acoplamento (chamado de simpatia por Huygens) entre os pêndulos. Nos exemplos acima, percebemos que todos eles têm em comum a produção de eventos simultâneos, mas isso não é suficiente para definir, de maneira formal, como entendemos na física, a sincronização. Além desse aspecto, os eventos precisam gerar regularidade, ou periodicidade, no decorrer do tempo. Ou seja, eles devem produzir ritmos. Então, podemos dizer que a sincronização é o ajuste de ritmos devido a um acoplamento entre os componentes do sistema [1]. Trata-se de uma influência inicialmente individual, ou de poucos indivíduos, que gera um comportamento coletivo no decorrer do tempo.

No século passado, a sincronização de osciladores foi alvo de inúmeras pesquisas em física com

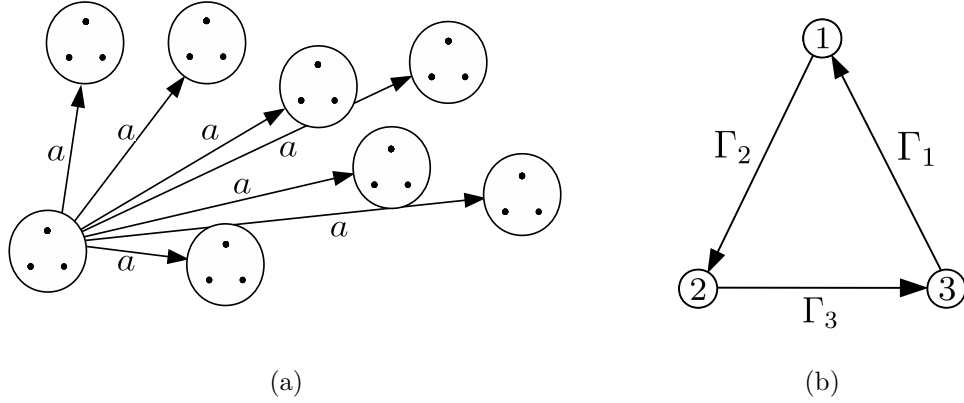


Figura 1.1: Em (a) temos um conjunto de osciladores de 3 estados. A interação é global (todos interagem com todos) com intensidade constante a . Em (b) a figura representa uma unidade com taxa de transição Γ_i entre os estados, onde $\Gamma_i = \Gamma_i(a)$.

vários aspectos diferentes explorados. Nos modelos de sincronização, os componentes do sistema são chamados de osciladores. Neste contexto, os osciladores são elementos que possuem diversos estados possíveis. A transição entre os estados de um oscilador decorre da interação com os seus pares, que tende a sincronizá-los. Essa influência é chamada de acoplamento e quando a interação ocorre com todos os osciladores influenciando todos os outros, dizemos que essa interação é global, como mostrado na Fig. 1.1(a). Já ao analisarmos um oscilador isoladamente, vemos que a transição entre os estados depende das taxas de transição Γ , ver Fig. 1.1(b). Se as taxas de transição entre os estados são probabilísticas, dizemos que os osciladores são estocásticos. Quanto aos estados, podem ser contínuos, cujas fases assumem um intervalo contínuo de valores; ou discretos, onde assume-se um número finito de estados (como no exemplo da Fig. 1.1). Assim, têm-se as bases conceituais para o estudo da sincronização, que com o passar dos anos foram modelados e estudados por vários pesquisadores.

Um dos modelos mais conhecidos no estudo da sincronização é o modelo de Kuramoto [2], onde os osciladores são acoplados globalmente, ou seja, todos os osciladores interagem uns com os outros. A ideia de Kuramoto foi escrever uma equação diferencial para a evolução temporal das fases e amplitudes dos osciladores. Apesar de sua simplicidade teórica, à primeira vista, o modelo de Kuramoto provou ser muito robusto. Ao longo do tempo foram adicionados diversos elementos ao modelo, como, por exemplo, as forças aleatórias (ruído). Se o acoplamento leva um conjunto de osciladores à sincronização o ruído pode retardar esse efeito. Sendo assim, a Dinâmica Estocástica, que é uma teoria bem estabelecida e trata de fenômenos aleatórios, tornou-se mais

uma importante ferramenta no estudo da sincronização. Ao contrário do modelo de Kuramoto, em que as fases são contínuas, vários modelos de sincronização foram desenvolvidos tendo as fases discretizadas. O primeiro destes foi apresentado por Prager *et al.* [14], apresentando um modelo de 3 estados. Vários outros pesquisadores seguiram essa linha, tanto em sistemas com 2 ou com 3 estados, como visto nas Refs. [15–22]. Aspectos experimentais e formulação matemática relativamente simples são as motivações para o sucesso dos modelos com fases discretas. Recentemente, a discretização de fase do modelo de Kuramoto também veio a ser explorada, como nas Refs. [23, 24]. No caso de fases discretas, é comum que as equações de campo médio apresentem características de sistemas dinâmicos, como sensibilidade às condições iniciais, devendo ser utilizados métodos da Dinâmica Não Linear para obtenção de diagramas de bifurcações e retratos de fase, entre outros. Dos exemplos acima, que se valeram de métodos da dinâmica não linear, podemos citar [21–23]. Outro aspecto a ser investigado é o efeito do número finito de osciladores. É possível analisar o efeito que as flutuações de um sistema finito podem causar, como realizado nas Refs. [25–27], onde os autores construíram um procedimento de contagem, do qual foi gerada a evolução temporal do número de osciladores em um dado estado. Dessa forma foi possível avaliar as flutuações devidas ao número finito de osciladores. Diversos sistemas possuem comportamento onde certas quantidades físicas tendem, após um dado intervalo de tempo, a um estado estável. Há casos, também, em que existe mais de um estado estável. Pinto *et al.* [25] mostraram que um conjunto de infinitos osciladores de 2 estados apresentam biestabilidade, ou seja, apresentam dois estados estáveis. Contudo, ao estudar o sistema com um número finito de unidades, algumas grandezas podem transitar, de maneira aleatória, entre esses estados, os quais são chamados de estados metaestáveis. Por fim, a sincronização em um sistema onde há aumento de população foi estudada por Yu e Wood [28]. Este modelo apresenta biestabilidade e as fases também são discretas. Os autores exploraram a maneira como o crescimento do número total de unidades afeta a sincronização.

Na natureza, a sincronização está presente em inúmeros processos, como o disparo de neurônios [1, 3, 4], o ciclo de vários tipos de células [5], o comportamento coletivo de insetos [6], entre outros. Com o passar das décadas e até os dias de hoje, as pesquisas sobre sincronização foram ramificando-se levando a publicações nos mais diversos campos científicos, em grande parte graças ao modelo de Kuramoto. Duas áreas muito influenciadas pelos avanços dos estudos da sincronização são as redes complexas e física biológica, vide [1, 3, 4, 7–13]. Uma aplicação consagrada de sincronização em física biológica é considerar os componentes do sistema como osciladores. Por exemplo, recentemente, Pinto e Copelli [4] realizaram um estudo

sobre neurônios excitáveis, onde os neurônios foram modelados como osciladores estocásticos de 3 estados. Então, foram definidas taxas de transição entre esses estados e o acoplamento entre as unidades foi responsável por modelar as sinapses (local onde ocorre a troca de informações entre os neurônios). Dessa forma, percebemos que o estudo de sincronização tem potencial para conectar os diversos modelos teóricos existentes com estudos experimentais conhecidos.

Neste trabalho vamos relacionar a sincronização de osciladores de fases discretas com flutuações devidas ao número finito de unidades. Considerando trabalhos anteriores que mostraram que o número de unidades afeta as flutuações, nós realizamos um estudo acerca da influência que as flutuações exercem em um sistema regido pelo modelo de Kuramoto com fases discretas. A ideia aqui foi obter uma equação de Langevin por meio do protocolo de contagem realizado nas Refs. [25–27]. Assim, obteremos a evolução temporal das densidades do número de osciladores em um dado estado. Resolvendo numericamente as equações de Langevin acopladas, nós vamos comparar com os resultados para o caso de campo médio, nos devidos limites, variando a quantidade de estados e o número de osciladores. Em seguida, vamos nos valer de elementos da teoria das transições de fase e criticalidade para estudar o comportamento crítico entre o sistema sincronizado e dessincronizado. Para esse estudo utilizaremos a teoria de escala de tamanho finito e obteremos os expoentes críticos para os casos do modelo de Kuramoto discretizado com 4 e 5 estados.

Outro aspecto que iremos apresentar é a maneira como as flutuações influenciam a sincronização em um sistema de três estados com processo de nascimento de população. Nos exemplos citados acima, a maior parte se interessa por sistemas com um número fixo de unidades, seja para estados discretos ou contínuos. Utilizando um método similar ao usado nas Refs. [25–27], vamos obter a dinâmica das densidades dos números de osciladores em um estado qualquer e, juntamente com o sistema de equações de Langevin para as densidades de osciladores nos diferentes estados, teremos uma equação mais acoplada ao sistema para a evolução do número total de osciladores. Nosso interesse em analisar tal sistema é verificar o caso em que existe biestabilidade na teoria de campo médio, conforme apresentado na Ref. [28]. As flutuações decorrentes da dinâmica microscópica podem, baseado em trabalhos anteriores, quebrar a biestabilidade. Então, temos a seguinte questão: ao variarmos o número total de osciladores as flutuações destroem a biestabilidade? Primeiramente, nós fizemos uma análise dos pontos fixos e da estabilidade do sistema, ainda na teoria de campo médio, visto que trata-se de um sistema dinâmico. Em seguida, nós obtemos as equações de Langevin, a partir da dinâmica microscópica, de onde tiramos o retrato de fase do sistema e o parâmetro de ordem. Por fim, nós analisamos

a biestabilidade do sistema a partir das equações de evolução das densidades.

No Cap. 2 vamos apresentar uma revisão sobre Dinâmica Estocástica, fundamental para esta tese, visto que em todos os casos que iremos estudar há a presença de ruído, sobre Dinâmica Não Linear, tratando mais especificamente a estabilidade e a teoria de bifurcações, e mostraremos, ainda, os principais conceitos de transições de fase e da Teoria de Escala de Tamanho Finito, tendo como principal objetivo a obtenção de expoentes críticos. No Cap. 3 vamos introduzir o modelo de Kuramoto, apresentar as características principais dos modelos discretos, principalmente os de 3 estados e vamos apresentar o modelo de Kuramoto com fases discretas e de crescimento do número de unidades. No Cap. 4 vamos apresentar os primeiros resultados deste trabalho. Nós vamos aplicar a metodologia descrita na Ref. [25, 26] para obter equações de Langevin com termos de flutuação, vamos analisar algumas grandezas perto da criticalidade, como o parâmetro de ordem e a susceptibilidade, ambos em função do número de osciladores e vamos obter os expoentes críticos, utilizando a Teoria de Escala de Tamanho Finito, para os casos de 4, 5 e 6 estados. Finalmente, no Cap. 5 vamos apresentar detalhadamente o modelo de osciladores, onde há aumento no número total de componentes. Vamos descrever as equações no caso em que apresenta biestabilidade e estudar seu diagrama de bifurcações. Em seguida, o principal resultado desta tese, a partir das equações de Langevin, vamos obter a dinâmica das densidades e analisar se as flutuações destroem a dependência das condições iniciais e quebram a biestabilidade.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo, vamos mostrar alguns conceitos teóricos necessários para o estudo da sincronização de osciladores estocásticos. Primeiramente, vamos mostrar os principais conceitos da dinâmica estocástica a partir de uma forma generalizada da equação de Langevin, da qual obteremos uma equação de Fokker-Planck. Na sequência, comentaremos sobre a equação mestra e mostraremos o método de Euler-Maruyama para resolver numericamente a equação de Langevin com ruído multiplicativo. Abordaremos neste capítulo, também, a dinâmica não linear a fim de entender os conceitos de estabilidade e bifurcação, dando ênfase à bifurcação de Hopf. No final do capítulo, apresentaremos alguns fundamentos das transições de fase e da teoria de escala de tamanho finito.

2.1 Dinâmica Estocástica

A dinâmica estocástica trata de sistemas que possuem variáveis aleatórias, ou seja, variáveis que podem assumir valores diferentes sob condições que não podemos controlar. Por exemplo, no lançamento de um dado ou uma moeda, não conseguimos controlar as condições (imperfeições na mesa à qual lançamos o dado e correntes de ar, por exemplo) para obtermos o mesmo resultado em todos os lançamentos. É importante salientar que a aleatoriedade que assume-se aqui não é decorrente de erros sistemáticos, estes podem ser, de certa forma, minimizados ou controlados. Já as variáveis responsáveis pela aleatoriedade de sistemas estocásticos são de natureza microscópica, de maneira que só podemos verificar os seus efeitos [29].

A teoria mais conhecida para descrever um sistema estocástico é a teoria de Langevin. Publicada em 1908 [30], a teoria tinha por objetivo a generalização da teoria de Einstein para o

movimento browniano, publicada em 1905 [31]. O movimento Browniano é o movimento errático de pólen na superfície da água. A ideia de Langevin foi descrever as colisões de um corpo de massa m (pólen) suspenso no líquido com as moléculas que compõem este líquido aplicando equações newtonianas somadas a uma força aleatória (ou força de Langevin). Esta força foi definida com duas propriedades: a primeira é que, após um tempo t suficientemente grande, a média da força de Langevin é nula; a segunda é que as colisões seguintes sejam independentes das anteriores. As duas propriedades da força de Langevin são conhecidas como ruído branco. Assim, através da evolução do sistema podemos obter as médias temporais das variáveis aleatórias de interesse. Para o movimento browniano, um importante resultado é a variância da posição ser proporcional ao tempo, confirmando o resultado obtido por Einstein [31]. A teoria de Langevin adaptou-se bem a inúmeros problemas científicos e tornou-se bastante popular, inclusive até os dias atuais.

Na prática, a equação de Langevin pode fornecer a evolução temporal e as médias, também temporais, das variáveis aleatórias de interesse. Variáveis aleatórias podem ser discretas ou contínuas. As primeiras são definidas quando o espaço amostral é discreto, como os lados de um dado, ou cartas de um baralho. Já as variáveis contínuas podem assumir qualquer valor dentro do intervalo em que o espaço amostral é definido. Como exemplo, temos o espaço percorrido por um corpo. Podemos avaliar variáveis aleatórias por meio de histogramas a partir dos dados temporais obtidos da equação de Langevin. Mesmo para variáveis contínuas, precisamos discretizar o espaço amostral em pequenos intervalos. Assim, sabemos em quais intervalos os valores da variável são mais e menos prováveis. Então, a teoria de Langevin não serve apenas para obter variações temporais, mas pode-se obter distribuições de probabilidades das variáveis aleatórias estudadas.

Outra equação muito importante para a dinâmica estocástica é a equação de Fokker-Planck. Foi nomeada devido aos trabalhos de A. Fokker e de M. Planck, em 1914 e 1917, respectivamente [32, 33]. Ambos investigavam, ainda, o movimento browniano. Ao invés de avaliar diretamente as variáveis aleatórias, a equação de Fokker-Planck tem como objetivo obter a evolução temporal das funções de densidade de probabilidade. Como a equação de Langevin também fornece uma distribuição de probabilidades, isso indica que os dois formalismos são equivalentes [34–36]. Inclusive, na próxima seção, vamos mostrar como obter a equação de Fokker-Planck a partir de uma forma geral da equação de Langevin.

Outra maneira de obter a função de distribuição de probabilidade é através da Equação Mestra [34–36]. Esta equação é dada em termos das taxas de transições entre diferentes estados, de modo que a partícula possa pular de um estado a outro no decorrer do tempo. Veremos que

a equação mestra é uma forma mais geral do que a equação de Fokker-Planck e seu formalismo é muito bem aplicado em casos onde os estados são discretos. Vários modelos de sincronização com estados discretos são dados por equações mestras, como veremos nos próximos capítulos.

Nas próximas seções vamos mostrar a formulação geral para a equação de Langevin por meio da expansão dos coeficientes de Kramers-Moyal até ordem 2 (coeficientes de difusão e *drift*), baseado na formulação apresentada nas Refs. [34, 36], em seguida vamos mostrar a obtenção da respectiva equação de Fokker-Planck e a detalhar a equação mestra. Também, vamos apresentar o método de Euler-Maruyama para resolver numericamente a equação de Langevin.

2.1.1 Equações de Langevin e Coeficientes de Kramers-Moyal

Uma forma generalizada da equação de Langevin para uma variável aleatória unidimensional $\xi = \xi(t)$ é

$$\dot{\xi} = h(\xi, t) + g(\xi, t)\Gamma(t), \quad (2.1)$$

onde $\Gamma(t)$ é a força de Langevin, que possui as seguintes propriedades:

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (2.2)$$

A função h na equação acima é a parte determinística, às vezes chamada força [35], é geralmente associada a efeitos macroscópicos do sistema sem ruído. O segundo termo do lado direito é chamado de termo de ruído, ou de difusão. Se g é constante, dizemos que a Eq. (2.1) tem um ruído aditivo, cuja intensidade é fixa para qualquer valor da variável aleatória. Por outro lado, se g for função de ξ e t , o ruído é chamado de multiplicativo, onde para cada valor da variável aleatória há um novo valor para o ruído. Caso o termo de ruído seja nulo temos uma equação determinística. As propriedades (2.2) são denominadas ruído branco gaussiano.

Os coeficientes de Kramers-Moyal podem ser definidos em termos dos momentos de uma densidade de probabilidade $W(x)$ e os momentos são dados em termos da função característica. Esta função é definida como a transformada de Fourier da densidade de probabilidade

$$C(u) = \langle e^{iux} \rangle = \int e^{iux} W(x) dx \quad (2.3)$$

e o n -ésimo momento M_n é dado pela média da variável aleatória elevada a n , ou seja,

$$M_n = \langle \xi^n \rangle = \int x^n W(x) dx. \quad (2.4)$$

A função característica se relaciona com os momentos através da seguinte expansão

$$C(u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (iu)^n \frac{M_n}{n!}, \quad (2.5)$$

que pode ser obtida diretamente da Eq. (2.3) ao expandirmos e^{ux} em potências de x . A partir dos primeiros momentos de uma distribuição obtemos a média da variável aleatória e a variância:

$$M_1 = \langle \xi \rangle \quad e \quad M_2 - M_1^2 = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2. \quad (2.6)$$

Mas, essa definição pode ser estendida para o momento centrado em um dado valor inicial da variável aleatória $\xi(0) = x$,

$$M_n = \langle [\xi(t) - x]^n \rangle. \quad (2.7)$$

Define-se os coeficientes de Kramers-Moyal como

$$D^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \left. \frac{dM_n(t)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.8)$$

Os coeficiente $D^{(n)}(x)$ se relacionam à equação de Langevin, Eq. (2.1), e à equação de Fokker-Planck que estudaremos mais tarde. Sendo $\xi(t + \tau)$ a solução da equação (2.1) para $\tau > 0$, podemos definir a seguinte expansão para os coeficientes de Kramers-Moyal

$$D^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle [\xi(t + \tau) - x]^n \rangle \Big|_{\xi(t)=x}. \quad (2.9)$$

Integrando a equação (2.1), temos

$$\xi(t + \tau) - x = \int_t^{t+\tau} h(\xi, t') dt' + \int_t^{t+\tau} g(\xi, t') \Gamma(t') dt' \quad (2.10)$$

com $\xi(t) = x$. Contudo, a formulação matemática para uma equação diferencial estocástica precisa ser definida. A propriedade de correlação, dada por uma delta de Dirac, descreve eventos sucessivos que ocorrem em intervalos de tempo muito próximos, ou seja, a escala de tempo é muito pequena em relação à variação de tempo do sistema. Além disso, os picos das deltas produzem indeterminações na variável aleatória $\xi(t)$ [37]. Veremos adiante que existem duas maneiras principais para definir o comportamento do ruído em torno dos picos do ruído.

Agora, vamos reescrever a equação (2.10) como uma integral de Stieltjes, definida a partir da soma

$$S_n = f(\xi_0)[y(x_1) - y(a)] + f(\xi_1)[y(x_2) - y(x_1)] + \dots + f(\xi_n)[y(b) - y(x_n)], \quad (2.11)$$

onde $x_{r+1} \leq \xi_r \leq x_r$. Se S_n tende a um único limite quando o maior intervalo de x tende a zero define-se

$$\int_a^b f(x) dy(x) \quad (2.12)$$

como uma integral de Stieltjes [38]. Então, vamos realizar a seguinte mudança de variáveis:

$$dW = \dot{W} dt = \Gamma(t) dt, \quad (2.13)$$

ou seja,

$$\xi(t + \tau) - x = \int_t^{t+\tau} h(\xi, t') dt' + \int_t^{t+\tau} g(\xi, t') dW(t'). \quad (2.14)$$

Uma nova função, $w(\tau)$, é definida ao integrarmos a equação (2.13),

$$w(\tau) = W(t + \tau) - W(t) = \int_t^{t+\tau} \Gamma(t') dt', \quad (2.15)$$

de modo que, usando as propriedades de $\Gamma(t)$ dadas por (2.2), obtemos

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ \langle w(\tau) \rangle &= 0 \\ \langle w(\tau)w(\tau') \rangle &= \begin{cases} \tau & , \text{ se } \tau' \geq \tau \\ \tau' & , \text{ se } \tau' \leq \tau \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Agora vamos utilizar as seguintes expansões de $h(\xi(t'), t')$ e $g(\xi(t'), t')$ em torno de $\xi(t') = x$:

$$\begin{aligned} h(\xi(t'), t') &= h(x, t') + h'(x, t')[\xi(t') - x] + \dots \\ g(\xi(t'), t') &= g(x, t') + g'(x, t')[\xi(t') - x] + \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde $h'(x, t')$ e $g'(x, t')$ são derivadas em relação a $\xi(t')$ para $\xi(t') = x$.

Substituímos as equações (2.17) em (2.14) e obtemos:

$$\begin{aligned} \xi(t + \tau) - x &= \int_t^{t+\tau} h(x, t') dt' + \int_t^{t+\tau} h'(x, t')[\xi(t') - x] dt' + \dots + \int_t^{t+\tau} g(x, t') dW(t') \\ &\quad + \int_t^{t+\tau} g'(x, t')[\xi(t') - x] dW(t') + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ao fazer $\tau = 0$ e $t = t'$ na equação acima, ou seja, $\xi(t') = x$, podemos substituir o resultado na própria equação (2.18), de forma que, essa substituição seja feita iterativamente.

$$\begin{aligned} \xi(t') - x &= \int_t^{t'} h(x, t'') dt'' + \int_t^{t'} h'(x, t'')[\xi(t'') - x] dt'' + \dots + \int_t^{t'} g(x, t'') dW(t'') \\ &\quad + \int_t^{t'} g'(x, t'')[\xi(t'') - x] dW(t'') + \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

Agora, vamos substituir (2.19) em (2.18):

$$\begin{aligned} \xi(t + \tau) - x &= \int_t^{t+\tau} h(x, t') dt' + \int_t^{t+\tau} h'(x, t') \int_t^{t'} h(x, t'') dt'' dt' \\ &\quad + \int_t^{t+\tau} h'(x, t') \int_t^{t'} g(x, t'') dW(t'') dt' + \dots \\ &\quad + \int_t^{t+\tau} g(x, t') dW(t') + \int_t^{t+\tau} g'(x, t') \int_t^{t'} h(x, t'') dt'' dW(t') \\ &\quad + \int_t^{t+\tau} g'(x, t') \int_t^{t'} g(x, t'') dW(t'') dW(t') + \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

Vamos reescrever a equação acima com as integrais em termos de τ e das funções $w(\tau)$, cuja correspondência é $t' = t + \tau$ e $dW(t') = dw(\tau')$. E tomando a média temporal, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \xi(t + \tau) - x \rangle = & \left\langle \int_0^\tau h(x, t + \tau') d\tau' + \mathcal{O}(\tau^2) + \dots + \text{termos proporcionais a } w(\tau) \right. \\ & \left. + \int_0^\tau g'(x, t + \tau') \int_0^\tau g(x, t + \tau'') dw(\tau'') dw(\tau') + \dots \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Devido à definição dos coeficientes de Kramers-Moyal (2.9) e as propriedades (2.16), precisamos eliminar os termos quadráticos em τ e os termos que levam a média de $w(\tau)$ a zero. Sobram os seguintes termos:

$$\langle \xi(t + \tau) - x \rangle = \left\langle \int_0^\tau h(x, t + \tau') d\tau' + \int_0^\tau g'(x, t + \tau') \int_0^{\tau'} g(x, t + \tau'') dw(\tau'') dw(\tau') \right\rangle. \quad (2.22)$$

O lado direito da equação acima possui integrais do tipo

$$\int_x^{x+\tau} f(x') dx' = \tau f(\kappa x), \quad (2.23)$$

onde κ é um parâmetro positivo entre 0 e 1, de modo que κx esteja entre x e $x + \tau$. Então, podemos reescrever a Eq. (2.22) como

$$\langle \xi(t + \tau) - x \rangle = \tau h(x, t + \kappa\tau) + g'(x, t + \kappa_3\tau) g(x, t + \kappa_3\kappa_2\tau') \left\langle \int_0^\tau w(\tau') dw(\tau') \right\rangle. \quad (2.24)$$

A integral dentro da média na equação acima,

$$A = \int_0^\tau w(\tau') dw(\tau'), \quad (2.25)$$

é chamada integral estocástica, decorrente da integração da equação de Langevin. Conforme relatado anteriormente, existem dois formalismos diferentes para resolver esse problema, que são as definições de Itô (I) e de Stratonovich (S) [34]:

$$\begin{aligned} A_I &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi[w(\tau_i), \tau_i] [w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)] \\ A_S &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi \left[\frac{w(\tau_i) + w(\tau_{i+1})}{2}, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2} \right] [w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)], \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde

$$\Delta = \max(\tau_{i+1} - \tau_i), \quad 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = \tau. \quad (2.27)$$

À primeira vista, podemos notar que na definição de Itô a função Φ é definida como dependente apenas do passo de tempo anterior τ_i , enquanto que na definição de Stratonovich a função Φ depende da contribuição no passo de tempo anterior e do passo de tempo atual de

maneira simétrica, ou seja, como a média dos pontos $w(\tau_i)$ e $w(\tau_{i+1})$. Reiteramos que o ruído possui propriedade de correlação que indica que em cada passo de tempo ocorre um salto δ -correlacionado no intervalo $\tau_{i+1} - \tau_i$. Como discutido anteriormente, os picos das sucessivas $\delta(\tau)$ provocam indeterminações, que são corrigidas pelas definições de Itô e Stratonovich. Baseado nessa interpretação percebemos que a definição de Itô leva em consideração somente os pontos anteriores ao salto e a definição de Stratonovich toma o ponto médio entre os pontos anterior e posterior ao salto. O uso dessas duas definições depende das características do sistema a ser estudado, portanto não há uma disputa para saber qual é o cálculo mais correto. É função do pesquisador analisar a utilidade de cada definição e utilizá-las nas situações em que cada uma enquadra-se melhor.

De forma geral, os termos de ruído em equações diferenciais estocásticas podem ser gerados de sistemas onde a fonte da aleatoriedade é externa ou interna. Segundo [37] podemos associar os ruídos externos à utilização do cálculo de Stratonovich e os ruídos internos à definição de Itô. O primeiro caso normalmente é de um sistema determinístico, onde o ruído é adicionado por um fator externo. Por outro lado, na aleatoriedade interna, temos ruídos que são inerentes ao sistema. Nos capítulos 4 e 5 obteremos equações de Langevin cujos ruídos são intrínsecos e utilizaremos, baseada na discussão acima, a definição de Itô. Utilizando as definições (2.26) obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \int_0^\tau w(\tau') dw(\tau') \right\rangle_I &= 0 \\ \left\langle \int_0^\tau w(\tau') dw(\tau') \right\rangle_S &= \tau, \end{aligned} \quad (2.28)$$

cujas demonstrações são apresentadas na Ref. [34]. Substituindo os resultados acima em (2.22), encontramos o *drift coefficient* a partir da Eq. (2.9) para $n = 1$,

$$D^{(1)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle \xi(t + \tau) - x \rangle, \quad (2.29)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} D_I^{(1)} &= h(x, t) \\ D_S^{(1)} &= h(x, t) + g'(x, t)g(x, t). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Para o coeficiente de difusão, $D^{(2)}$, usamos a equação (2.14) para $t' = t + \tau$, $\xi(t') = x$ e obedecendo as propriedades (2.16):

$$\xi(t + \tau) - x = \int_0^\tau h(x, t + \tau') d\tau' + \int_0^\tau g(x, t + \tau') dw(\tau'), \quad (2.31)$$

ou

$$\xi(t + \tau) - x = h(x, t + \kappa_1 \tau) \tau + g(x, t + \kappa_2 \tau) w(\tau). \quad (2.32)$$

Elevando ao quadrado, tomando a média e eliminando os termos quadráticos em τ sobram os seguintes termos:

$$\langle [\xi(t + \tau) - x]^2 \rangle = g^2(x, t + \kappa_2 \tau) \langle w^2(\tau) \rangle \quad (2.33)$$

Finalmente, fazendo $n = 2$ na equação (2.9) obtemos o coeficiente de difusão.

$$D^{(2)} = g^2(x, t). \quad (2.34)$$

Diferentemente do *drift coefficient*, este resultado é independente do formalismo utilizado.

2.1.2 Equação de Fokker-Planck e Equação Mestra

A equação de Langevin fornece a evolução temporal de uma variável aleatória x e de acordo com esse comportamento temporal podemos obter informações estatísticas a respeito do sistema físico descrito pela variável aleatória. A forma mais simples de realizar essa medida é por meio de um histograma. Mas, de forma mais direta, podemos obter a evolução temporal da função densidade de probabilidade com uma equação diferencial da forma

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \dot{P}(x, t) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x, t) \right] P(x, t), \quad (2.35)$$

chamada de equação de Fokker-Planck. Onde $D^{(1)}(x, t)$ e $D^{(2)}(x, t)$ são o *drift coefficient* e o coeficiente de difusão, respectivamente. Podemos observar que basta identificar os coeficientes $D^{(1)}(x, t)$ e $D^{(2)}(x, t)$ na equação de Langevin que podemos obter a respectiva equação de Fokker-Planck. Para obtermos a Eq. (2.35) vamos partir da transição de densidades de probabilidade entre os tempos t e $t + \tau$, ou seja $W(x, t) \rightarrow W(x, t + \tau)$, cuja probabilidade de transição é dada por $P(x, t + \tau | x', t)$. Matematicamente, temos [34]

$$W(x, t + \tau) = \int P(x, t + \tau | x', t) W(x', t) dx' \quad (2.36)$$

e os momentos, baseados na Eq. (2.7),

$$M_n(x', t, \tau) = \int (x - x')^n P(x, t + \tau | x', t) dx. \quad (2.37)$$

Tomando a transformada inversa na Eq. (2.3) podemos escrever a densidade de probabilidade como a transformada inversa de Fourier da função característica e esta pode ser dada em termos dos momentos, conforme Eq. (2.3):

$$P(x, t + \tau | x', t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(x-x')} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (iu)^n M_n(x', t, \tau) / n! \right] du. \quad (2.38)$$

Utilizando as relações

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (iu)^n e^{-iu(x-x')} du = \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \delta(x-x') \quad (2.39)$$

e

$$\delta(x-x')f(x') = \delta(x-x')f(x) \quad (2.40)$$

para $n \geq 0$, podemos reescrever a Eq. (2.38) como

$$P(x, t + \tau | x', t) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n M_n(x, t, \tau) \right] \delta(x-x'). \quad (2.41)$$

Substituindo a Eq. (2.41) em (2.36) e expandindo $W(x, t + \tau)$ obtemos

$$\begin{aligned} W(x, t + \tau) - W(x, t) &= \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \tau + \mathcal{O}(\tau^2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n [M_n(x, t, \tau)/n!] W(x, t). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Assumimos que os momentos podem ser expandidos em série de Taylor em potências de τ para $n \geq 1$, de modo que eles possam ser dados em termos dos coeficientes de Kramers-Moyal através da Eq. (2.8):

$$\frac{M_n(x, t, \tau)}{n!} = D^{(n)}(x, t) \tau + \mathcal{O}(\tau^2). \quad (2.43)$$

Inserindo (2.43) em (2.42) obtemos

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n D^{(n)}(x, t) W(x, t) \quad (2.44)$$

chamada de expansão de Kramers-Moyal. A equação de Fokker-Planck é dada pela expansão de Kramers-Moyal até $n = 2$ e modificando a notação da densidade de probabilidade de $W(x, t) \rightarrow P(x, t)$ recuperamos a Eq. (2.35).

A maneira mais geral de se obter a evolução de uma probabilidade é utilizando a equação Mestra. São equações diferenciais para sistemas que saltam de um estado para outro. As transições para um estado posterior dependem apenas do estado imediatamente anterior. Esse tipo de processo é chamado de markoviano. Sendo P_i a probabilidade de um evento i ocorrer e $\omega_{i \rightarrow j}$ a taxa de transição do estado i para o estado j , a variação de P_i é dada em termos da contribuição das transições de todos os outros estados para o estado i (aumentando assim o valor de P_i) e das transições do estado i para todos os outros estados (diminuindo P_i). Então, a equação mestra pode ser escrita como

$$\dot{P}_i = \sum_j (\omega_{j \rightarrow i} P_j - \omega_{i \rightarrow j} P_i). \quad (2.45)$$

A equação de Fokker-Planck pode ser considerada um caso particular e contínuo da equação mestra. Nesta tese, a equação mestra é particularmente especial, pois nós estudamos sistemas que são descritos por estas equações. A intenção é obter equações de Langevin com características microscópicas em que, no limite apropriado (número de partículas muito grande), recuperam-se as equações mestras de campo médio.

2.1.3 Solução Numérica da Equação de Langevin

A forma mais simples de resolver numericamente uma equação de Langevin com ruído multiplicativo, Eq. (2.1), é por meio da seguinte discretização com passo de tempo h :

$$\xi_{n+1} = \xi_n + f(t_n)h + g(t_n)w_n, \quad (2.46)$$

onde w_n são números aleatórios com as propriedades dadas pelas Eqs. (2.16). Um processo formado pela sequência dos números aleatórios w_n em dois diferentes tempos são conhecidos por processo de Wiener. Agora, definimos um conjunto de números aleatórios u_n , os quais possuem média zero e variância 1, ou seja,

$$\begin{aligned} \langle u_n \rangle &= 0, \\ \langle u_n u_m \rangle &= \delta_{nm} \end{aligned} \quad (2.47)$$

e, sua relação com w_n é dada por

$$w_n = \sqrt{h}u_n. \quad (2.48)$$

A Eq. (2.46) pode ser reescrita como

$$\xi_{n+1} = \xi_n + f(t_n)h + g(t_n)\sqrt{h}u_n. \quad (2.49)$$

A Eq. (2.49) é conhecida como método de Euler-Maruyama. Podemos reescrever a equação acima em termos dos coeficientes $D^{(1)}$ e $D^{(2)}$ que são definidas em termos das funções f e g [conforme as Eqs. (2.30) e (2.34)], então devemos especificar o cálculo utilizado, Itô ou Stratonovich. A utilização da definição de Stratonovich não é aconselhada para o método de Euler-Maruyama, sendo mais apropriado o cálculo de Itô [36]

$$\xi_{n+1} = \xi_n + D^{(1)}(\xi_n, t_n)h + \sqrt{D^{(2)}(\xi_n, t_n)}h u_n. \quad (2.50)$$

O método de Euler-Maruyama pode ser facilmente generalizado para duas ou mais dimensões:

$$\xi_{i,n+1} = \xi_{i,n} + f_i(\xi_n, t_n)h + \sum_{j=i}^N g_{ij}(\xi_n, t_n)\sqrt{h}u_{jn}. \quad (2.51)$$

Existem vários outros métodos mais precisos para resolver numericamente equações diferenciais estocásticas. Contudo, a escolha do método de Euler-Maruyama deu-se por conta das aplicações em que vamos utilizar o método. Veremos nos próximos capítulos que o tipo de problemas que estudamos possuem termos de ruído multiplicativo muito complexos. Métodos mais precisos geralmente necessitam das derivadas das funções g_{ij} analiticamente, sendo necessárias muitas operações, levando a um alto custo computacional.

2.2 Dinâmica não linear

2.2.1 Conceitos iniciais e estabilidade

A evolução temporal de grandezas físicas pode ser descrita por equações diferenciais de diversos tipos. Geralmente as equações diferenciais lineares possuem soluções exatas. Por exemplo, o problema da queda de um corpo onde atua uma força de resistência do ar proporcional à velocidade ou o sistema massa-mola, ambos são descritos por equações diferenciais lineares e podem ser resolvidos analiticamente. Além desses simples exemplos há muitos outros em vários ramos da física onde podem ser obtidas soluções exatas desse tipo de equações. Porém, alguns problemas são historicamente conhecidos como insolúveis analiticamente e, com o passar do tempo, surgiram inúmeros problemas sem soluções exatas. Problemas físicos que utilizam equações diferenciais não lineares são exemplos de sistemas, em geral, sem solução analítica, como a equação de movimento do pêndulo quando não é restringida ao caso de pequenas oscilações. Então, exceto para algumas equações matematicamente simples ou em que seja utilizada alguma aproximação, é preciso valer-se de métodos numéricos para equações diferenciais não lineares.

Seja um problema físico representado matematicamente por um sistema de equações de n variáveis

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{2.52}$$

onde $\dot{x}_i = dx_i/dt$ e as funções f_i não dependem explicitamente do tempo. A evolução temporal das variáveis x_i obtidas das equações acima representam trajetórias. No contexto dos sistemas dinâmicos, uma trajetória (ou órbita) é dada pelo conjunto de pontos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ obtidos em cada instante de tempo e plotados no espaço de coordenadas $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$. Este espaço abstrato, formado por variáveis relevantes do problema físico, é denominado espaço de fase [39].

Uma propriedade importante acerca das Eqs. (2.52) é a estabilidade. Vamos exemplificar

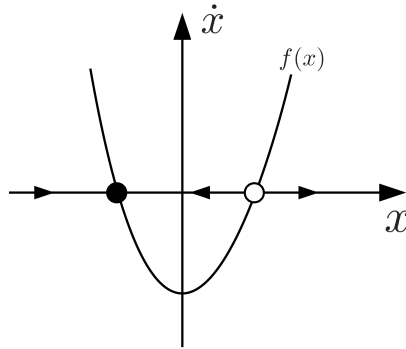


Figura 2.1: Postos fixos e sua estabilidade indicada pelas setas. Figura adaptada da Ref. [39].

com o caso unidimensional

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.53)$$

O sistema pode possuir trajetória que se afasta ou se aproxima de um dos zeros da função $f(x)$, dependendo da física do problema, ou seja, da forma da função $f(x)$. Define-se como ponto fixo o valor x^* , tal que $f(x^*) = 0$. A Fig. 2.1 mostra os pontos fixos e a estabilidade de cada um deles. Nós interpretamos o eixo x como um fluxo, neste caso unidimensional, que se move para a direita quando $f(x) > 0$ e para a esquerda quando $f(x) < 0$ (representados pelas setas na Fig. 2.1). Então, quando o fluxo converge para um ponto nós o chamamos de ponto fixo estável. Por outro lado, quando o fluxo se afasta de um ponto nós o denominamos ponto fixo instável. O ponto fixo estável é representado por um círculo fechado e o ponto fixo instável é representado por um círculo aberto.

De maneira mais geral, segundo [40], ao avaliarmos equações do tipo (2.52), o sistema pode tender a regiões estáveis chamadas de atratores. No exemplo unidimensional acima, o atrator é o ponto fixo. Então, é importante a obtenção da evolução temporal, e por conseguinte das trajetórias, visto que seu comportamento varia de acordo com os atratores presentes. Se o sistema tende para a estabilidade e permanece até o limite $t \rightarrow \infty$ dizemos que os estados são assintóticos. Ou seja, os pontos fixos podem ser estados assintóticos, visto que eles são atratores das trajetórias.

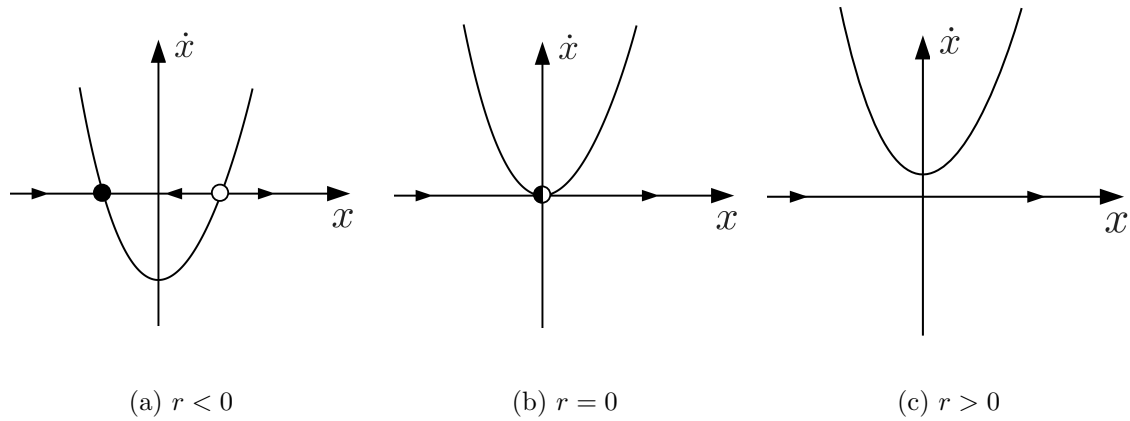


Figura 2.2: Bifurcação tipo sela-nó para as três possibilidades de r . Figura adaptada da Ref. [39].

2.2.2 Bifurcação

A partir de agora vamos trabalhar com sistemas em que pontos fixos podem sofrer alterações. Vamos supor que exista um parâmetro de controle, uma quantidade física que, ao ser modificada, pode alterar a estabilidade de um sistema. Vimos anteriormente que a estabilidade está relacionada aos pontos fixos. Agora, o parâmetro de controle r vai ter a influência de criar e destruir pontos fixos, bem como de modificar a estabilidade [39].

Existem vários tipos de bifurcações unidimensionais, como a bifurcação sela-nó, transcritical e forquilha. Vamos exemplificar com o tipo mais comum, a bifurcação sela-nó, cuja principal característica é a apresentação de um mecanismo de criação e destruição de pontos fixos. A representação matemática típica dessa bifurcação, chamada na literatura de forma normal, é dada por

$$\dot{x} = r + x^2. \quad (2.54)$$

Tomando o parâmetro r negativo e aumentando seu valor os dois pontos fixos aproximam-se até que eles colidam e se aniquilem. Esse comportamento é mostrado na Fig. 2.2. Para $r < 0$ os dois pontos fixos, um estável e outro instável, coexistem sobre a linha do fluxo. Ao aumentarmos o valor de r os pontos fixos vão se aproximando até $r = 0$, onde os pontos fixos colidem (representado pelo círculo preenchido pela metade). Por fim, quando $r > 0$, os pontos fixos se aniquilam. Notemos que em $r = 0$ o fluxo no eixo x muda de comportamento, ou seja, nessa transição ocorreu a bifurcação. Os três gráficos da Fig. 2.2 podem ser representados por apenas um, o diagrama de bifurcação, mostrado na Fig. 2.3. Os pontos fixos estáveis e instáveis se movem conforme r se aproxima de zero, que é o ponto onde a bifurcação ocorre. A

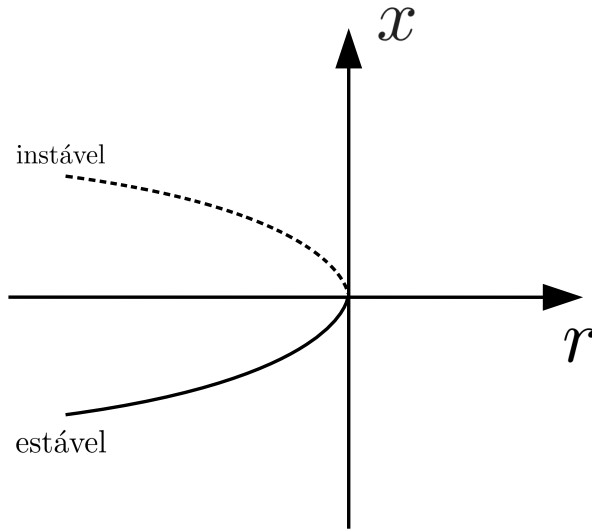


Figura 2.3: Diagrama de bifurcação. Os pontos fixos estáveis são indicados pela linha cheia e os instáveis são representados pela linha tracejada. Figura adaptada da Ref. [39].

representação dos pontos estáveis é dada pela linha preenchida, enquanto que a dos pontos fixos instáveis é dada pela linha tracejada.

Uma maneira qualitativa de avaliar a estabilidade é por meio da linearização em torno de um ponto fixo. Para o caso unidimensional, dado o ponto fixo x^* , vamos analisar o seu entorno através da perturbação

$$\eta(t) = x(t) - x^*. \quad (2.55)$$

Derivando $\eta(t)$ sendo x^* constante, obtemos

$$\dot{\eta}(t) = \dot{x} = f(x). \quad (2.56)$$

Reescrevendo a função f em termos de η e x^* podemos tomar a seguinte expansão

$$f(x^* + \eta) = f(x^*) + \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2). \quad (2.57)$$

Como x^* é um ponto fixo, $f(x^*) = 0$ e assumindo que $f'(x^*) \neq 0$ e que os termos de segunda ordem em η são desprezíveis, podemos escrever

$$\dot{\eta}(t) \approx \eta f'(x^*) \quad (2.58)$$

que é uma equação linear em η . Se $f'(x^*) > 0$ a perturbação cresce exponencialmente, caso contrário, $f'(x^*) < 0$ a perturbação diminui exponencialmente. Por fim, se $f'(x^*) = 0$, os termos de segunda ordem em η não são desprezíveis.

O estudo das bifurcações pode ser realizado em fluxos bidimensionais. Reduzindo as Eqs. (2.52) para duas dimensões, temos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned}\tag{2.59}$$

Podemos definir as características de estabilidade e pontos fixos de maneira semelhante ao caso unidimensional. Seja o par (x^*, y^*) um ponto fixo, então

$$\begin{aligned}f(x^*, y^*) &= 0 \\ g(x^*, y^*) &= 0.\end{aligned}\tag{2.60}$$

Utilizamos uma aproximação, na qual adicionamos uma pequena perturbação ao redor do ponto fixo nas duas direções x e y :

$$u = x(t) - x^* \quad \text{e} \quad v = y(t) - y^*.\tag{2.61}$$

Vamos analisar, primeiramente, a perturbação em x . Derivando a perturbação u , obtemos

$$\dot{u} = \dot{x} = f(x^* + u, y^* + v).\tag{2.62}$$

Expandindo a função f em série de Taylor e utilizando as definições dadas pelas Eqs. (2.60):

$$\dot{u} = u \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*} + v \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y^*} + \mathcal{O}(u^2, v^2, uv).\tag{2.63}$$

De maneira análoga, para v , temos

$$\dot{v} = u \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x=x^*} + v \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{y=y^*} + \mathcal{O}(u^2, v^2, uv).\tag{2.64}$$

Assumindo que os termos de ordem quadrática são desprezíveis, podemos escrever, na forma matricial, as equações linearizadas:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.\tag{2.65}$$

A matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}\tag{2.66}$$

é conhecida como matriz jacobiana. E, conforme as Eqs. (2.63) e (2.64), as derivadas, elementos da matriz jacobiana, são avaliadas no ponto fixo (x^*, y^*) .

Todas as bifurcações citadas no caso unidimensional podem ocorrer no caso bidimensional. Em sistemas bidimensionais existe outro atrator muito importante para este trabalho, o ciclo

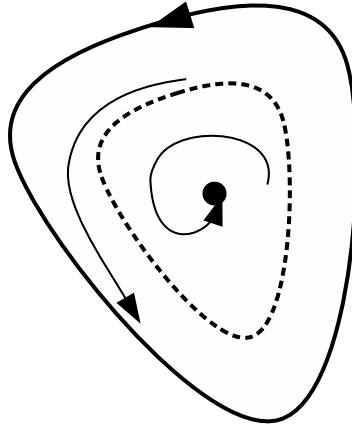


Figura 2.4: A figura mostra um ponto fixo e um ciclo limite como atratores separados por um ciclo limite instável, representado pela linha tracejada. As trajetórias se aproximam dos atratores.

limite estável, definido como uma trajetória fechada e isolada, para onde as trajetórias circundantes se dirigem, caso estejam próximas o suficiente [40]. Um ciclo limite pode ser também instável, neste caso não é mais um atrator. Como exemplo do comportamento dos atratores no caso bidimensional a Fig. 2.4 mostra um ponto fixo e um ciclo limite estáveis, separados por um ciclo limite instável. Dentro deste ciclo o sistema tende ao ponto fixo, fora dele a trajetória dirige-se ao ciclo limite estável. Anteriormente, nós exemplificamos o caso da bifurcação sela-nó. Também no caso bidimensional, os fluxos podem criar e destruir pontos críticos e alterar as características da estabilidade. Então, vamos exemplificar outro tipo de bifurcação no caso bidimensional que será aplicada nos capítulos posteriores, a bifurcação de Hopf.

Primeiramente, supondo que um sistema possua um ponto fixo estável, precisamos avaliar autovalores da jacobiana A . Sejam $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\omega$ os autovalores, assumimos que α e ω sejam dependentes de um parâmetro de controle r . A bifurcação de Hopf ocorre para $\alpha(r) = 0$ que, qualitativamente, é caracterizada por dois atratores, um ponto fixo e um ciclo limite [39]. A bifurcação de Hopf pode ser descrita matematicamente de várias maneiras, dependendo da natureza do problema, como pode ser visto em [39, 40]. A maneira mais interessante para problemas de sincronização envolve o cálculo de coeficientes de Lyapunov l_1 utilizando um procedimento dado em [40]. A bifurcação de Hopf é supercrítica se l_1 é negativo e subcrítica se l_1 for positivo. Os artigos de Wood e colaboradores das Refs. [15–18, 28] são exemplos da utilidade da Bifurcação de Hopf. Sendo uma dessas publicações o nosso objeto de estudo no

Cap. 5.

A bifurcação de Hopf possui soluções oscilatórias, que podem ser estáveis ou amortecidas. Para exemplificar o comportamento oscilatório, vamos apresentar a forma normal da bifurcação de Hopf na origem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 \mp x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 \mp x_2(x_1^2 + x_2^2).\end{aligned}\tag{2.67}$$

Se o último termo do lado direito possuir sinal negativo temos a bifurcação de Hopf supercrítica, se for positivo a bifurcação é subcrítica. O jacobiano para o sistema em equilíbrio é

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},\tag{2.68}$$

cujos autovalores são $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i$. A forma polar do sistema (2.67) mostra melhor as características ondulatórias. A dedução pode ser encontrada em [40]. Temos,

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho(\alpha \mp \rho^2), \\ \dot{\phi} &= 1.\end{aligned}\tag{2.69}$$

A primeira equação apresenta o equilíbrio quando $\rho = 0$ para todo α . Tanto no caso supercrítico quanto no subcrítico temos perda de estabilidade quando $\alpha = 0$. O parâmetro α tem o seguinte comportamento no caso supercrítico: Se $\alpha < 0$ o equilíbrio é linearmente estável, se $\alpha = 0$ o equilíbrio permanece estável, porém é não linear. Por outro lado, se $\alpha > 0$ o equilíbrio é linearmente instável, porém, há a ocorrência de um ponto de equilíbrio estável. No caso subcrítico temos: se $\alpha < 0$ o equilíbrio é linearmente estável, se $\alpha > 0$ é instável (igual ao caso anterior) e para $\alpha = 0$, contrariamente ao caso anterior, o equilíbrio é instável e não linear. Agora, a partir das duas equações em (2.69), podemos analisar a Fig. 2.5 que mostra o comportamento gráfico do caso supercrítico da bifurcação de Hopf. No caso $\alpha < 0$ há um ponto fixo estável para onde o sistema tende em forma de espiral e quando $\alpha > 0$ o ponto fixo se torna instável e o atrator passa a ser um ciclo limite estável de raio $\rho = \sqrt{\alpha}$. Na transição ocorre um ciclo limite com pequenas amplitudes. Diz-se, neste caso, que a perda de estabilidade é suave, ou não catastrófica. No caso subcrítico a perda de estabilidade é chamada de catastrófica. A região de estabilidade é cercada por um ciclo limite instável que diminui seu raio conforme o parâmetro de controle aproxima-se do valor crítico (de $\alpha < 0 \rightarrow \alpha = 0$). Assim, o sistema é levado abruptamente para fora da vizinhança do equilíbrio, como mostra a Fig. 2.6.

Um aspecto muito interessante ocorre na bifurcação de Hopf subcrítica: a presença de dois atratores para um mesmo valor do parâmetro de controle. O intervalo de α onde isso ocorre é $[\alpha_a; 0]$ onde α_a é o valor de α que indica o início da biestabilidade. Já comentamos no parágrafo

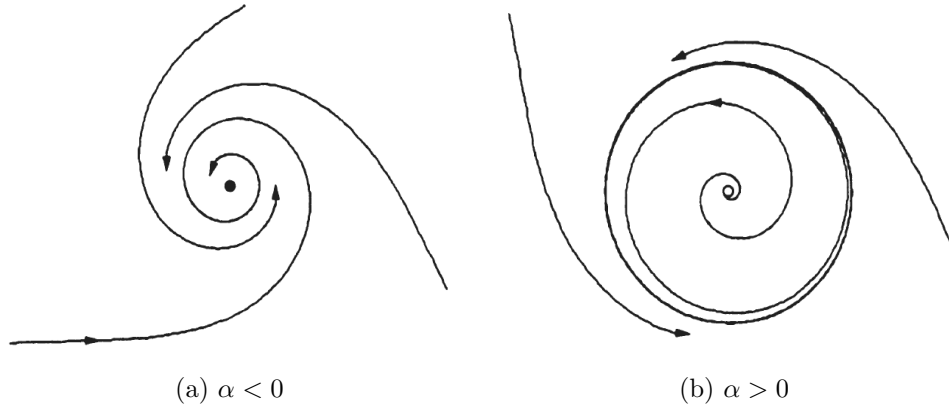


Figura 2.5: Bifurcação de Hopf supercrítica. Figura retirada da Ref. [39].

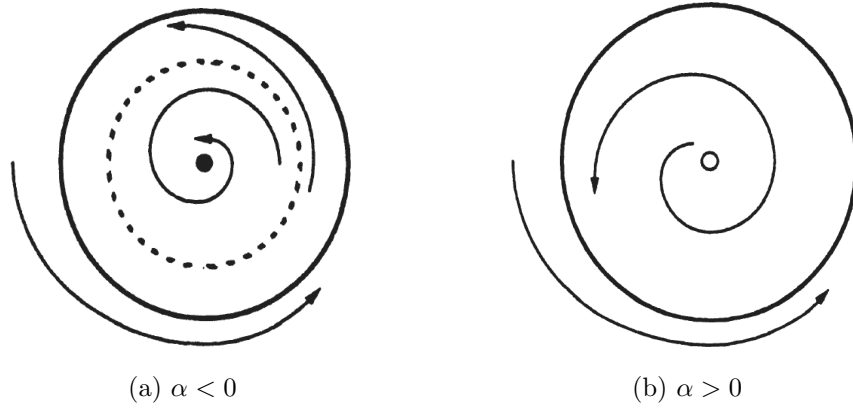


Figura 2.6: Bifurcação de Hopf subcrítica. Figura retirada da Ref. [39].

anterior que se o sistema caminha no sentido crescente de α o equilíbrio salta do ponto fixo para o ciclo limite em $\alpha = 0$. Supondo que consideremos agora o sentido oposto de α , se o sistema apresentar um comportamento distinto na região em que os dois atratores coexistam, dizemos que ocorre histerese. No Cap. 5 vamos analisar o ciclo de histerese que surge ao variarmos o parâmetro de controle k no modelo de Yu. Para pequenos valores de k o sistema apresenta órbitas estáveis e para grandes valores do parâmetro de controle em questão o sistema tende a um ponto fixo estável. Para valores intermediários verificamos um ciclo de histerese por meio da obtenção do gráfico do parâmetro de ordem em função de k .

2.3 Teoria de Escala de Tamanho Finito

Normalmente, as substâncias sofrem modificações sob mudança de temperatura e quando essa variação modifica o estado da substância dizemos que ocorreu uma transição de fase. Siste-

mas ferromagnéticos, por exemplo, exibem geralmente duas fases: uma fase ordenada, onde os spins estão alinhados, e a fase onde os spins estão desordenados. Se esse sistema inicialmente está em baixas temperaturas ele apresenta a fase ordenada, mas, conforme a temperatura aumenta o sistema se modifica e sofre uma transição para a fase desordenada, ou seja, o sistema sofreu uma transição de fase [41]. As transições de fase ocorrem a uma temperatura específica – chamada temperatura crítica, T_c – para cada tipo de sistema ou substâncias. Certas grandezas têm comportamento chave para descrever uma transição de fase. De maneira geral, quantidades físicas que são nulas em um lado da transição e não nulas no outro lado são chamadas de parâmetro de ordem [42]. Nos sistemas ferromagnéticos a magnetização m tem papel de parâmetro de ordem, um vez que $m > 0$ quando $T < T_c$ e $m = 0$ quando $T > T_c$.

É interessante estudar o sistema na região em torno de T_c . A maneira mais utilizada é através da obtenção de expoentes críticos, onde assume-se que cada grandeza se aproxima da temperatura crítica por leis de potências com expoentes específicos. Nesta seção, vamos mostrar como obter os expoentes críticos e a temperatura crítica de um sistema. Vamos fazer uso da Teoria de Escala de Tamanho Finito (*Finite Size Scaling*, FSS), cujo ponto de partida é a análise do comportamento das grandezas físicas em função do tamanho do sistema.

As quantidades físicas calculadas em torno da região crítica, ou seja, próximo da temperatura crítica T_c , possuem comportamento assintótico no limite termodinâmico. Assumimos que cada grandeza física se aproxima da criticalidade por meio de leis de potências cujos expoentes são definidos como expoentes críticos [42].

Os expoentes críticos foram bastante estudados, em particular, para sistemas magnéticos. Portanto, é usual defini-los inicialmente para tais sistemas. Seguindo essa prática, introduzimos os expoentes críticos β , relacionado ao comportamento crítico do parâmetro de ordem (no caso, a magnetização), γ , relacionado ao comportamento crítico da susceptibilidade e ν , relacionado ao comportamento crítico do comprimento de correlação. No limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$), temos,

$$m \sim \left| \frac{T - T_c}{T_c} \right|^\beta, \quad (2.70)$$

$$\chi \sim \left| \frac{T - T_c}{T_c} \right|^{-\gamma}, \quad (2.71)$$

$$\xi \sim \left| \frac{T - T_c}{T_c} \right|^{-\nu}. \quad (2.72)$$

De posse dos dados das quantidades em termos da temperatura é possível obter os respectivos expoentes. Para isso basta plotar os pontos em escala logarítmica que dá uma linha reta e a declividade dessa reta é o expoente crítico.

Um dos aspectos mais importantes na obtenção dos expoentes críticos está relacionado ao fato de que diferentes sistemas têm os mesmos coeficientes. Por exemplo, o artigo de Wood *et al.* [15] compara os expoentes β e ν aos obtidos no modelo XY . Quando dois sistemas apresentam os mesmos expoentes críticos dizemos que ambos estão em uma mesma classe de universalidade. Estas classes podem ser independentes da maioria dos parâmetros do modelo [42].

Para sistemas finitos o comportamento das grandezas físicas na criticalidade é modificado. Normalmente, associamos o tamanho do sistema ao comprimento de correlação ξ , definido como o tamanho do agrupamento de constituintes do sistema em uma mesma fase. No limite termodinâmico e próximo ao ponto crítico $\xi \rightarrow \infty$, já em sistemas finitos $\xi \approx L$. Baseado na suposição que relaciona o tamanho finito do sistema e o comprimento de correlação foi formulada a teoria de Escala de Comprimento Finito [42]. A FSS nos permite obter os expoentes críticos, dados pelas Eqs. (2.70), (2.71) e (2.72)), em termos do tamanho L bem como podemos obter uma estimativa para a temperatura crítica T_c .

Podemos escrever os expoentes críticos do parâmetro de ordem e da susceptibilidade em termos de ξ :

$$m \sim \xi^{-\beta/\nu}, \quad (2.73)$$

$$\chi \sim \xi^{\gamma/\nu}, \quad (2.74)$$

Ao limitarmos o tamanho do sistema estamos considerando que a singularidade da susceptibilidade em T_c será eliminada. Isso pode ser descrito através da relação

$$\chi = \xi^{\gamma/\nu} \chi_0(L/\xi), \quad (2.75)$$

onde

$$\chi_0(L/\xi) \sim \begin{cases} cte & \text{se } \xi \ll L \\ \left(\frac{L}{\xi}\right)^{\gamma/\nu} & \text{se } \frac{L}{\xi} \rightarrow 0 \end{cases}. \quad (2.76)$$

A Eq. (2.75) pode ser dada em termos de L usando a Eq. (2.72)

$$\chi = L^{\gamma/\nu} \tilde{\chi}(L^{1/\nu}|t|), \quad (2.77)$$

onde

$$\tilde{\chi}(L^{1/\nu}|t|) = L^{-\gamma/\nu} |t|^{-\gamma} \chi_0[(L^{1/\nu}|t|)^{\nu}] \quad (2.78)$$

e $t = (T - T_c)/T_c$ é a temperatura reduzida.

O comportamento de χ não é simétrico em relação ao ponto crítico, seja o limite tomado pela esquerda ou pela direita. Dessa maneira a temperatura reduzida deve assumir valores positivos ou negativos de t . Então devemos reescrever a Eq. (2.77) da seguinte forma:

$$\chi = L^{\gamma/\nu} \tilde{\chi}(L^{1/\nu}t). \quad (2.79)$$

O mesmo procedimento pode ser usado para obtermos a expressão do expoente crítico para o parâmetro de ordem em termos de L :

$$m = L^{-\beta/\nu} \tilde{m}(L^{1/\nu} t). \quad (2.80)$$

As funções $\tilde{\chi}(L^{1/\nu} t)$ e $\tilde{m}(L^{1/\nu} t)$ são chamadas de funções de escala. Para valores específicos dos expoentes críticos nós assumimos que as funções de escala são as mesmas para diferentes tamanhos do sistema. Também a temperatura crítica deve assumir um valor fixo, mesmo se mudarmos os valores de L . Definimos x como a variável de escala

$$x = L^{1/\nu} t = L^{1/\nu} (T_0 - T_c) / T_c, \quad (2.81)$$

da qual obtemos

$$T_0 = T_c (1 + x L^{-1/\nu}). \quad (2.82)$$

Interpretamos T_0 como a temperatura em que a grandeza que estamos medindo é máxima. No Cap. 4 vamos utilizar a FSS para obter os expoentes críticos do sistema de osciladores do modelo de Kuramoto com fases discretas.

Capítulo 3

Sincronização

Neste capítulo, vamos fazer uma revisão dos modelos de sincronização de osciladores relevantes para esta tese. Inicialmente, vamos mostrar as características gerais do modelo de Kuramoto, tanto a sua forma original como a com ruído. Em seguida, vamos fazer um apanhado dos principais modelos com fases discretas, sendo que reservamos uma seção exclusiva para a discretização do modelo de Kuramoto. Finalmente, vamos introduzir o modelo de três estados com crescimento de população, cuja motivação levou ao principal resultado desta tese, como veremos no Cap. 5.

3.1 Modelo de Kuramoto

No estudo da sincronização de osciladores, o Modelo de Kuramoto (MK) se destaca devido à sua versatilidade. Alvo de inúmeros estudos nas últimas décadas, o MK foi publicado originalmente em 1975 por Yoshiki Kuramoto [2]. Sua abordagem consiste no estudo das fases (ou das amplitudes) dos osciladores evoluídas no tempo por meio de uma equação diferencial de primeira ordem. Essa evolução temporal leva em conta a frequência natural dos osciladores e o acoplamento, que é função da diferença das fases de um oscilador com a fase de todos os outros osciladores, ou seja, é um acoplamento global. Originalmente, no artigo de 1975, Kuramoto apresentou a equação de seu modelo em termos das amplitudes e depois a converteu em uma equação para as fases. A equação diferencial para a amplitude A_i de um dado oscilador i é

$$\dot{A}_i = (i\omega_i + \alpha)A_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N A_j - \beta|A_i|^2 A_i. \quad (3.1)$$

A quantidade ω_i é a frequência do oscilador i , α e β são constantes, K é a constante de

acoplamento e N é o número de osciladores. A constante de acoplamento é responsável pela influência de um oscilador sobre os outros, de modo que quanto maior o valor de K o sistema dirige-se mais rapidamente à sincronização. Se o sistema está inicialmente dessincronizado, podemos aumentar a intensidade do acoplamento até um valor crítico K_c acima do qual o sistema está sincronizado. Temos, então para $K < K_c$ o sistema dessincronizado, $K > K_c$ o sistema sincronizado e o ponto $K = K_c$ é o ponto de transição entre os dois regimes. Podemos dizer que em K_c ocorre uma transição de fase.

A conversão para a equação das fases é feita definindo a amplitude dos osciladores como

$$A_i = ae^{i\theta_i}. \quad (3.2)$$

As amplitudes rapidamente evoluem para um único valor, portanto a pode ser considerado constante. Derivando a Eq. (3.2) em função do tempo e substituindo o resultado em (3.1), obtemos

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - i(\alpha - \beta a^2) + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N [-i \cos(\theta_j - \theta_i) + \sin(\theta_j - \theta_i)]. \quad (3.3)$$

A parte real do resultado acima nos fornece a forma padrão do MK, como apresentado na Ref. [43]:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (3.4)$$

onde $\theta_i \in [0, 2\pi]$. É possível definir um parâmetro de ordem para o MK nos moldes dos que são estudados em transições de fase:

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}. \quad (3.5)$$

A quantidade r mede a coerência dos osciladores (neste contexto, a coerência indica se os osciladores têm a mesma fase) e está definida no intervalo $r \in [0, 1]$. Quando as fases dos osciladores estão sincronizadas o parâmetro de ordem é $r > 0$. Caso contrário, quando há dessincronização, $r = 0$. A variável ψ é a fase do *cluster* (algumas vezes referida como fase média, como na Ref. [7]). Podemos reescrever a Eq. (3.4) em termos de r e ψ como

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i). \quad (3.6)$$

Apesar da aparente simplicidade, o comportamento crítico do MK ainda não é completamente conhecido, isto é, nem todos os expoentes críticos foram obtidos. A criticalidade do MK é focada na região próxima de K_c , ou seja, onde encontra-se o acoplamento crítico que separa em duas fases, uma onde os osciladores estão sincronizados, o parâmetro de ordem positivo, e outra onde os osciladores estão dessincronizados, parâmetro de ordem nulo. No final dos anos

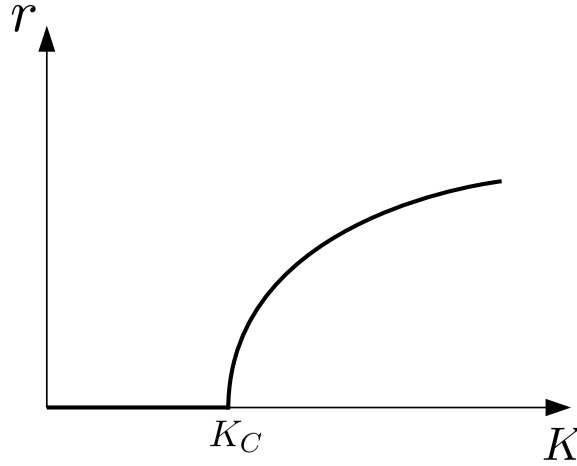


Figura 3.1: Esboço do gráfico do parâmetro de ordem r em função do acoplamento K .

1980, Hiroaki Daido publicou uma série de artigos baseado nos fundamentos de transições de fase. Dentre outras coisas, ele calcula o expoente crítico da flutuação do parâmetro de ordem, cujo valor é $1/8$, e o expoente do parâmetro de ordem que é igual a $1/2$ [44–47].

Um resultado interessante é a obtenção do parâmetro de ordem em termos de K de maneira exata, cuja demonstração pode ser encontrada em [8, 43]. O parâmetro de ordem parte da seguinte definição:

$$r = \int_{-Kr}^{Kr} \cos \theta(\omega) g(\omega) d\omega. \quad (3.7)$$

Podemos reescrever a integral acima em termos de θ ao fazermos $\dot{\theta}_i = 0$ em (3.6). Assim, obtemos

$$r = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta g(Kr \sin \theta) Kr \cos \theta d\theta = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta. \quad (3.8)$$

O parâmetro de ordem se anula quando $K = K_c$, então tomando o limite $r \rightarrow 0^+$ obtemos

$$r = \sqrt{1 - \frac{K_c}{K}}, \quad (3.9)$$

onde

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (3.10)$$

Se as frequências ω_i obedecem à distribuição lorentziana, $g(\omega) = \gamma/\pi(\gamma^2 + \omega^2)$, temos

$$K_c = 2\gamma. \quad (3.11)$$

A Fig. 3.1 mostra o comportamento do parâmetro de ordem em função de K , conforme a Eq. (3.9), onde $r = 0$ para $K < K_c$ (fase dessincronizada) e $r > 0$ para $K > K_c$ (fase sincronizada).

A dinâmica dos osciladores pode ser influenciada por elementos externos, além do acoplamento e de propriedades dos osciladores. Sakaguchi [10] apresenta dois tipos de forças externas que influenciam um conjunto de osciladores acoplados: uma força periódica e ruídos aleatórios. Neste trabalho nós daremos ênfase ao caso das forças aleatórias, que têm como base a Dinâmica Estocástica, cujos fundamentos foram apresentados no capítulo anterior. O interesse ao acrescentarmos o ruído ao MK vem da ideia de que o ruído pode afetar os fenômenos, que em termos práticos (como problemas do efeito de ruídos em transmissão de sinais de telecomunicações) pode ser um causador de problemas. Contudo, o ruído pode gerar interessantes comportamentos em alguns sistemas e em muitos casos é até útil. No caso do MK podemos explorar as suas principais características baseando-nos na competição entre a intensidade do ruído e o acoplamento. Esse balanço é um desafio a mais na compreensão física de todas as aplicações do MK, porém leva a uma vantagem: a utilização da dinâmica estocástica que é uma teoria muito bem estabelecida cientificamente. Então, adicionando um termo de ruído à Eq. (3.6), obtém-se, de acordo com [10],

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i) + f_i(t), \quad (3.12)$$

onde $f_i(t)$ é a força de Langevin (aleatória) a qual gera o ruído branco gaussiano, que tem média zero, correlação tipo delta de Dirac e intensidade D (visto no Cap. 2). Utilizando a abordagem da dinâmica estocástica é possível obter um acoplamento crítico modificado, como obtido por Strogatz e Mirollo [48]:

$$K_c = 2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D}{D^2 + \omega^2} g(\omega) d\omega \right]^{-1}. \quad (3.13)$$

No limite apropriado, $D \rightarrow 0^+$, a integral acima se reduz à Eq. (3.10). Podemos notar que as forças de ruído influenciam a sincronização, como já discutido anteriormente. Na Eq. (3.13) a intensidade do ruído influencia diretamente na criticalidade de tal sistema.

3.2 Sincronização com fase discreta

Alternativamente ao MK, existem modelos em que a sincronização é estudada com osciladores que apresentam M fases discretas. A correspondência é feita por meio da divisão da variável contínua θ em M estados:

$$\theta \in [0, 2\pi] \rightarrow \theta = \frac{2\pi j}{M}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (3.14)$$

No caso contínuo, cada oscilador pode ter uma fase dentro do intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$. No caso discreto estamos interessados no número de osciladores em uma dada fase j , ou seja, na variável

N_j , onde $\sum_j N_j = N$ e N é o número total de osciladores. Define-se

$$n_j(t) = \frac{N_j(t)}{N} \quad (3.15)$$

como a densidade de osciladores no estado j , onde a soma das densidades é unitária, ou seja, $\sum_j n_j(t) = 1$. Muitas vezes é mais prático trabalhar com as densidades $n_j(t)$, sendo que a maioria dos modelos de fase discreta utilizam estas quantidades. Geralmente, a equação de evolução das densidades é uma equação mestra, onde a variação das densidades dependem das taxas de transição entre os estados.

Os modelos discretos mais estudados possuem 3 estados. Podemos destacar, por exemplo, o trabalho de Prager *et al.* [14] publicado em 2003. Cada oscilador possui 3 estados e a taxa de transição entre esses estados é cíclica e unidirecional, ou seja, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Foram analisadas duas combinações diferentes de transições. Na primeira, todas as taxas tem distribuição poissoniana. Já no segundo caso, somente a transição $1 \rightarrow 2$ é poissoniana, as outras transições, $2 \rightarrow 3$ e $3 \rightarrow 1$ são determinísticas. Ao analisar o comportamento de conjuntos de osciladores globalmente acoplados, nos dois casos de transições, os resultados foram distintos. No primeiro, um estado estacionário estável, enquanto que o segundo caso apresenta oscilações estáveis. O modelo de Wood e colaboradores [15–18] apresenta características baseadas no modelo anterior. Porém, este modelo abriu diversas possibilidades de aplicações por conta das características das taxas de transição entre os estados. Apesar de as transições ainda serem cíclicas e unidirecionais, elas podem ser definidas tanto localmente como globalmente. Foram obtidos resultados dos expoentes críticos, indicando pertencerem à classe de universalidade do modelo XY . Existem ainda trabalhos de sincronização com elementos excitáveis, que são unidades que só mudam de estado ao interagir com outros componentes do sistema, do contrário, eles não mudam de estados (ver as Refs. [21, 22]).

3.3 Modelo de Kuramoto com fases discretas

O MK pode ser definido em termos das fases ou das amplitudes dos osciladores, conforme descrito na Sec. 3.1. Inicialmente, vamos trabalhar com uma equação do MK modificada com amplitudes complexas A_s ($s \in 1, \dots, N$), proposta por Escaff *et al.* [23]:

$$\dot{A}_s = J(1 - |A_s|^2)A_s + Kf(|\mathcal{R}|^2)\mathcal{R} + \sqrt{\eta}\zeta(t), \quad (3.16)$$

onde J é um parâmetro responsável pela dinâmica interna de cada oscilador, K é a constante de acoplamento, já definida na Sec. 3.1, e $\mathcal{R}$ é o parâmetro de ordem, definido como a amplitude

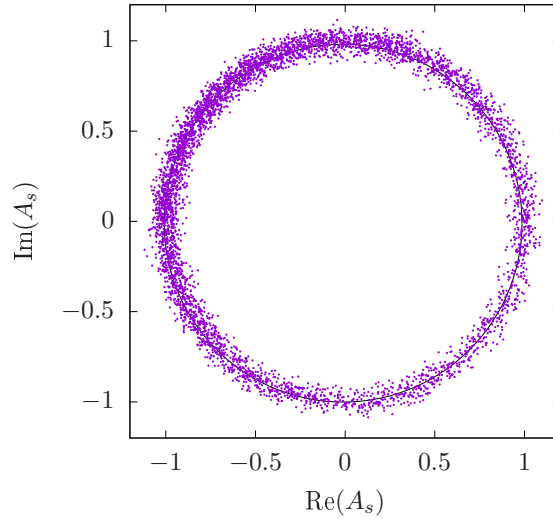


Figura 3.2: Os pontos representam as amplitudes dos osciladores no plano complexo. Eles foram obtidos de simulações da Eq. (3.16) com $N = 5000$, $\eta = 0,98696$, $K = 1,5708$, $J = 200$ e $a = 0,3$.

média

$$\mathcal{R} = \frac{1}{N} \sum_{s'=1}^N A_{s'}. \quad (3.17)$$

A função f é responsável pela interação não linear dos osciladores em função do parâmetro de ordem, a justificativa do uso da função f será mostrada mais adiante. Se $f(|\mathcal{R}|^2) = 1$ recuperamos o MK original [Eq. (3.1)], exceto pela adição do termo de ruído, cuja intensidade é η . O ruído branco gaussiano possui uma componente real e outra imaginária e é dado por

$$\zeta_s(t) = \zeta_R^s(t) + \imath \zeta_I^s(t), \quad (3.18)$$

onde as propriedades de correlação são

$$\langle \zeta_R^s(t) \zeta_R^{s'}(t') \rangle = \langle \zeta_I^s(t) \zeta_I^{s'}(t') \rangle = \delta_{ss'} \delta(t - t'), \quad (3.19)$$

$$\langle \zeta_R^s(t) \zeta_I^{s'}(t') \rangle = 0. \quad (3.20)$$

A Eq. (3.16) fornece as componentes real e imaginária de A_s e sua dinâmica mostra que, após um tempo de relaxamento, os módulos das amplitudes se ajustam em torno de um círculo de raio unitário, isto é, $|A_s| \approx 1$. Esse aspecto é mostrado na Fig. 3.2 obtida por simulações numéricas da Eq. (3.16) via método de Euler-Maruyama na abordagem de Itô. Notemos, na mesma figura, que os osciladores não se ajustam exatamente no ciclo unitário. Isso se dá devido ao ruído que compete com a intensidade do acoplamento.

A equação das fases pode ser obtida a partir da Eq. (3.1) por meio da aproximação $A_s \approx e^{i\phi_s}$ para tempos grandes

$$\dot{\phi}_s = KF(r) \sin(\psi - \phi_s) + \sqrt{\eta} \xi_s(t), \quad (3.21)$$

onde ψ é a fase do *cluster*, vista na Sec. 3.1. A função $F(r)$ é definida como

$$F(r) = f(r^2)r \quad (3.22)$$

e

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^N e^{i\phi_s}, \quad (3.23)$$

sendo $r \in [0,1]$. A função $f(r)$, como citada na Ref. [23], é dada por

$$f(r) = \exp(-r/a), \quad (3.24)$$

onde a é um parâmetro positivo. A função $f(r)$ deve ser decrescente em r para uma correta descrição da granularização do MK para $M < 7$.

A equação de Fokker-Planck obtida da Eq. (3.21) é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \phi^2} - K \frac{\partial}{\partial \phi} \{ \rho \Omega[\rho, \phi] \}, \quad (3.25)$$

onde $\rho = \rho(\phi, t)$ é a função densidade de probabilidade para a fase contínua ϕ e $\Omega[\rho, \phi] = F(r[\rho]) \sin(\psi[\rho] - \phi)$. O parâmetro de ordem é

$$R = r[\rho] e^{i\psi[\rho]} \equiv \int_0^{2\pi} \rho(\phi, t) e^{i\phi} d\phi. \quad (3.26)$$

A solução estacionária da Eq. (3.25), para dados ψ e r , é

$$\rho(\phi) = \frac{\exp \left[\frac{2Kre^{-\frac{r^2}{a}} \cos(\phi - \psi)}{\eta} \right]}{2\pi I_0 \left(\frac{2e^{-\frac{r^2}{a}} Kr}{\eta} \right)}, \quad (3.27)$$

onde $I_0(x)$ é a função de Bessel modificada de primeiro tipo. O estado dessincronizado corresponde a $\rho(\phi) = 1/(2\pi)$. Se $a \rightarrow \infty$ em (3.27) recuperamos o resultado do MK original, conforme Mikhailov e Calenbuhr [49].

A fase contínua ϕ pode ser discretizada em M estados ao dividir-se o ciclo unitário em M arcos (estados),

$$\phi \in \{j\Delta\phi\}_{j=0}^{M-1}, \quad (3.28)$$

onde

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{M}. \quad (3.29)$$

A Eq. (3.25) pode ser transformada em uma equação mestra com j estados discretos, conforme [23]:

$$\dot{P}_j = -(w_{j \rightarrow j+1} + w_{j \rightarrow j-1})P_j + w_{j+1 \rightarrow j}P_{j+1} + w_{j-1 \rightarrow j}P_{j-1}, \quad (3.30)$$

onde P_j é a probabilidade de encontrar uma unidade em um estado j , $w_{j \rightarrow j \pm 1}$ são as taxas de transição dadas por

$$w_{j \rightarrow j \pm 1} = \frac{\eta}{2(\Delta\phi)^2} \mp \frac{K}{2\Delta\phi} \Omega_j, \quad (3.31)$$

onde

$$\Omega_j = F(r) \sin(\psi - j\Delta\phi). \quad (3.32)$$

No caso discreto, o estado dessincronizado é $P_j = 1/M$ para qualquer estado j . Agora, a Eq. (3.30) é a versão discretizada da Eq. (3.25). Ela descreve a evolução do número de osciladores em um estado j . É uma equação mestra nos moldes das equações dos modelos de sincronização de fases discretas. Mas, como ela foi derivada da Eq. (3.21), então, suas características são compatíveis com o MK. O custo que a discretização do MK tem é a necessidade da função $f(r)$ ser não linear em r , pois, sem essa modificação, só casos com sete ou mais estados poderiam ser descritos corretamente. No que tange a dinâmica não linear, Escaff *et al.* [23] mostraram que para $M > 3$ as propriedades de bifurcação do modelo discreto e do modelo contínuo são as mesmas.

3.4 Osciladores acoplados com crescimento de população

O trabalho recente de Yu e Wood [28] apresenta um estudo sobre sincronização em sistemas onde ocorre crescimento da população. Foram propostos dois mecanismos para que o oscilador criado (filho) seja acoplado ao sistema: o primeiro indica se o crescimento depende ou não do estado de cada oscilador; o segundo permite que o oscilador filho seja dependente probabilisticamente da fase do oscilador que o gerou (“mãe”). Este sistema apresenta biestabilidade entre os estados sincronizados e os não sincronizados quando o crescimento não depende do estado e oscilador filho não depende da fase da “mãe”. Então, conforme descrito por Yu e Wood [28], a variação de N_i é dada pela equação

$$\dot{N}_i = -N_i\Gamma_{i+1} + N_{i-1}\Gamma_i + \frac{k}{2}(N_{i+1} + N_{i-1}), \quad (3.33)$$

onde N_i é o número de osciladores no estado i , Γ_i é a taxa de transição de um oscilador do estado $i - 1$ para o estado i e k é a constante de crescimento.

Note que o número de osciladores que entram em i vindos de $i + 1$ e $i - 1$ carregam o termo responsável pelo crescimento, ou seja, o aumento no número de osciladores no estado i não depende do próprio estado, como já esperávamos. As quantidades N_i obedecem a soma $\sum_i N_i = N(t)$, onde $N(t)$ é o número total de osciladores no tempo $t > 0$.

O interesse em estudar osciladores com crescimento de população está em alguns sistemas biológicos, onde o crescimento pode afetar a sincronização desde que a escala de tempo das oscilações seja comparável à do crescimento do número de componentes do sistema (ver, por exemplo, Ref. [50]). Apesar de haver aspectos biológicos como motivação, não há ainda muitas pesquisas analisando a sincronização com aumento de população. Além do modelo de Yu, podemos destacar o artigo de Emilianova *et al.* [51].

3.5 Flutuações devidas ao número finito de osciladores

Nesta tese vamos avaliar como as flutuações afetam um modelo de crescimento de população. Então, nesta seção vamos mostrar os aspectos qualitativos mais importantes sobre a influência da quantidade finita na sincronização de osciladores. Apesar de publicações recentes, este ainda é um problema em aberto. Recentemente, Pinto *et al.* [25] e Rosas *et al.* [26, 27] analisaram as flutuações que a população finita exerce no sistema. Para isso, parte-se de um procedimento de contagem para obter uma equação de Langevin. Porém, as flutuações afetam a sincronização e novos comportamentos podem surgir em um estudo nesse sentido. Primeiramente, é importante ressaltar que as equações da dinâmica microscópica tendem as equações do sistema de campo médio ao tomarmos o limite $N \rightarrow \infty$. Portanto, é natural que façamos a análise da estabilidade, ainda na aproximação de campo médio, para obter os estados assintóticos decorrentes da evolução temporal. Esse procedimento será apresentado no Cap. 5, onde avaliamos em primeiro lugar os estados assintóticos na aproximação de campo médio para depois analisar a quantidade finita de osciladores.

Pinto *et al.* [25] mostraram que um sistema de dois estados, tipo “on-off”, com quantidade infinita de osciladores apresenta biestabilidade, ou seja, apresenta dois estados assintóticos igualmente prováveis. Mas, ao analisar o sistema finito, eles verificaram que algumas quantidades físicas transitam (saltam), aleatoriamente, entre esses estados, que nesta situação são denominados estados metaestáveis. Ao obter a equação de Langevin dependente do número de osciladores nós podemos aumentar os valores de N e obter a evolução temporal, ou seja, primeiro tomamos

$t \rightarrow \infty$ e depois $N \rightarrow \infty$. Outra possibilidade é a utilização da equação mestra definida no limite termodinâmico. Então, por definição é preciso tomar primeiramente $N \rightarrow \infty$, em seguida evolui-se o sistema no tempo, ou seja, $t \rightarrow \infty$. A ordem dos limites, por exemplo, primeiramente $t \rightarrow \infty$ e depois $N \rightarrow \infty$ leva a resultados diferentes do que quando toma-se os limites na ordem oposta, $N \rightarrow \infty$ seguido por $t \rightarrow \infty$ [25].

Recentemente, vários trabalhos que analisaram modelos discretos de sincronização verificaram a análise da flutuação decorrente da população finita. Por exemplo, Rosas *et al.* [27, 52]. No primeiro foi realizada uma revisão, onde foram confrontadas as principais características dos modelos finitos e infinitos de dois e três estados. Inicialmente, foi analisado o sistema “on-off” citado acima, que apresenta bifurcação sela-nó. Como as densidades de osciladores são números entre zero e um, a correta aplicação da bifurcação em questão exigiu a definição de um sistema modificado e as taxas de transição do modelo foram generalizadas. O sistema apresenta biestabilidade e o número finito de unidades quebra essa característica, levando o sistema a somente um dos estados assintóticos. No caso de três estados, a abordagem é a mesma, porém o comportamento do sistema leva a um ponto fixo e um ciclo limite, ou seja, a bifurcação é de Hopf. Há, também, biestabilidade neste modelo e as flutuações a quebram. Por fim, eles consideram o MK discreto, mostrando a bifurcação e a condição necessária para a realização da discretização de fase, já discutido na Sec. 3.3.

Rosas *et al.* [52] mostraram como o modelo de Wood [15–18] se comporta ao analisarem as flutuações. Primeiramente, eles analisaram, na aproximação de campo médio, as características não lineares, como a bifurcação e os atratores do sistema, bem como as transições de sincronização contínuas e descontínuas. Quanto ao sistema finito, eles escreveram a equação de Fokker-Planck e de Langevin – ambas dependentes de N finito – e realizaram a análise para cada uma das transições encontradas no sistema infinito. Eles mostraram que as transições contínuas não apresentam modificações significantes ao ser analisado o sistema finito em comparação com a aproximação de campo médio. Por outro lado, as transições contínuas levaram a um comportamento rico. Como exemplo, podemos citar a biestabilidade, ao variar N o sistema transita entre as soluções possíveis encontradas no sistema infinito. Além disso, esse sistema apresenta modificações quando se analisa primeiramente $t \rightarrow \infty$ e, em seguida, $N \rightarrow \infty$, ou na ordem oposta, $N \rightarrow \infty$ e depois $t \rightarrow \infty$. Por fim, a transição de fase pôde ser quantificada por meio do cumulante de Binder de quarta ordem, onde as transições de fase contínuas e descontínuas foram verificadas.

Capítulo 4

Dinâmica Microscópica e Criticalidade do Modelo de Kuramoto com Fases Discretas

4.1 Introdução

Os estudos de sincronização de osciladores estocásticos nos permite explorar vários aspectos. O artigo de Escaff *et al.* [23] mostra um esquema de discretização da fase de osciladores acoplados do tipo Kuramoto, onde foi construído um formalismo de fases discretas a partir das fases contínuas dos osciladores. Uma dinâmica de fase contínua pode ser representada por uma cadeia de Markov de M estados discretos, desde que o parâmetro de ordem obedeça uma função não linear, modificando o MK original. Caso contrário, a descrição será permitida apenas por um número superior a sete estados discretos.

Neste capítulo, aplicamos a dinâmica microscópica proposta nas Refs. [25–27] para estudar – através das equações de Langevin acopladas – o efeito do número de osciladores em um sistema de osciladores estocásticos de M estados. Assim, obtemos a dinâmica de cada oscilador e mostramos que existe uma concordância entre a teoria do campo médio e a abordagem microscópica que serão detalhadas neste capítulo. Além disso, apresentamos alguns resultados sobre o comportamento crítico em torno do ponto crítico entre os estados sincronizados e dessincronizados. Obtemos, também, os expoentes críticos do parâmetro de ordem e da susceptibilidade para 4, 5

e 6 estados.

Na Sec. 4.2, apresentamos um modelo microscópico da granularização para M estados da qual emergirá uma dependência do número de osciladores. Também mostramos que essa nova abordagem está de acordo com a teoria de campo médio. Na Sec. 4.3 mostramos o estudo do comportamento crítico do parâmetro de ordem e da susceptibilidade, bem como calculamos seus expoentes críticos. As discussões e a conclusão são apresentadas na Sec. 4.4.

4.2 Dinâmica microscópica

Para estudar a influência do número de osciladores no modelo, usamos a densidade n_j , definida na Eq. (3.15). O parâmetro de ordem para o sistema com fases discretas é dado por

$$R = re^{i\psi} = \sum_{j=0}^{M-1} n_j e^{ij\Delta\phi}. \quad (4.1)$$

Para analisarmos a influência das flutuações vamos obter a evolução temporal do número de osciladores no estado j , $N_j(t)$, a partir da dinâmica microscópica, apresentada nas Refs. [25–27]. Trata-se de um processo de contagem que depende das taxas de transição (3.31) e de números aleatórios:

$$\begin{aligned} N_j(t+dt) - N_j(t) = & \sum_{k=1}^{N_{j-1}} \theta[w_{j-1 \rightarrow j} dt - \zeta_k] - \sum_{k=N_{j-1}+1}^{N_{j-1}+N_j} \theta[w_{j \rightarrow j-1} dt - \zeta_k] \\ & - \sum_{k=N_{j+1}+1}^{N_{j+1}+N_j} \theta[w_{j \rightarrow j+1} dt - \zeta_k] + \sum_{k=N_{j-1}+N_j+1}^{N_{j-1}+N_j+N_{j+1}} \theta[w_{j+1 \rightarrow j} dt - \zeta_k], \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $\theta(x)$ é a função de Heaviside (se $x \geq 0$, $\theta(x) = 1$ e se $x < 0$, $\theta(x) = 0$) e ζ_k são números aleatórios independentes e uniformemente distribuídos entre 0 e 1. A dinâmica de $N_j(t)$ depende das comparações entre as taxas de transição entre os estados e dos números aleatórios. Um esquema da evolução do número de osciladores em j é mostrado na Tab. 4.1. O primeiro termo do lado direito da Eq. (4.2) indica o número de osciladores que chegam no estado j vindos do estado $j-1$. O segundo e o terceiro termo representam a quantidade de unidades que vão de j para $j-1$ e de j para $j+1$, respectivamente. O quarto termo indica o número de osciladores que saem do estado $j+1$ e vão para o estado j . O número total de osciladores é constante, $\sum_{j=0}^{M-1} N_j = N$.

Agora, utilizamos a seguinte soma, justificável pelo teorema do limite central, conforme relatado na Ref. [25],

$$\sum_{k=1}^N \theta[X - \zeta_k] = NX + \sqrt{NX(1-X)}\varepsilon, \quad (4.3)$$

Tabela 4.1: Variação de $N_j(t)$ por meio da comparação entre as taxas w e dos números aleatórios ζ .

Condição			Variação de $N_j(t)$
se $w_{j-1 \rightarrow j} dt > \zeta_k$	ou	se $w_{j+1 \rightarrow j} dt > \zeta_k$	$N_j(t) \rightarrow N_j(t) + 1$
se $w_{j-1 \rightarrow j} dt < \zeta_k$	ou	se $w_{j-1 \rightarrow j} dt < \zeta_k$	$N_j(t) \rightarrow N_j(t)$
se $w_{j \rightarrow j-1} dt > \zeta_k$	ou	se $w_{j \rightarrow j+1} dt > \zeta_k$	$N_j(t) \rightarrow N_j(t) - 1$
se $w_{j \rightarrow j-1} dt < \zeta_k$	ou	se $w_{j \rightarrow j-1} dt < \zeta_k$	$N_j(t) \rightarrow N_j(t)$

onde ε é um número aleatório que obedece a uma distribuição gaussiana com média zero e desvio padrão 1.

Ao realizarmos a soma acima na Eq. (4.2) vamos obter M equações diferenciais acopladas que, após algumas manipulações, se transformarão em um sistema de $M-1$ equações de Langevin acopladas, ao usarmos a condição que o número total de osciladores é constante. Como exemplo, vamos obter o caso mais simples, de 3 estados. Então, para $j = 0, 1, 2$, temos

$$\begin{aligned}
dN_0 &= N_2 w_{2 \rightarrow 0} dt + \sqrt{N_2 w_{2 \rightarrow 0} dt} \varepsilon_2 - N_0 w_{0 \rightarrow 1} dt - \sqrt{N_0 w_{0 \rightarrow 1} dt} \varepsilon_0 \\
&\quad - N_0 w_{0 \rightarrow 2} dt - \sqrt{N_0 w_{0 \rightarrow 2} dt} \varepsilon_0 + N_1 w_{1 \rightarrow 0} dt + \sqrt{N_1 w_{1 \rightarrow 0} dt} \varepsilon_1 \\
dN_1 &= N_0 w_{0 \rightarrow 1} dt + \sqrt{N_0 w_{0 \rightarrow 1} dt} \varepsilon'_0 - N_1 w_{1 \rightarrow 0} dt - \sqrt{N_1 w_{1 \rightarrow 0} dt} \varepsilon'_1 \\
&\quad - N_1 w_{1 \rightarrow 2} dt - \sqrt{N_1 w_{1 \rightarrow 2} dt} \varepsilon'_1 + N_2 w_{2 \rightarrow 1} dt + \sqrt{N_2 w_{2 \rightarrow 1} dt} \varepsilon'_2 \\
dN_2 &= N_1 w_{1 \rightarrow 2} dt + \sqrt{N_1 w_{1 \rightarrow 2} dt} \varepsilon''_1 - N_2 w_{2 \rightarrow 0} dt - \sqrt{N_2 w_{2 \rightarrow 0} dt} \varepsilon''_2 \\
&\quad - N_2 w_{2 \rightarrow 1} dt - \sqrt{N_2 w_{2 \rightarrow 1} dt} \varepsilon''_2 + N_0 w_{0 \rightarrow 2} dt + \sqrt{N_0 w_{0 \rightarrow 2} dt} \varepsilon''_0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $dN_j = N_j(t+dt) - N_j(t)$ e ε_k são números aleatórios de distribuição gaussiana com média zero e desvio padrão 1. A notação com ' e '' são para indicar que ε_k , ε'_k e ε''_k são diferentes números aleatórios. Assumimos que o passo de tempo dt é muito pequeno, então $dt^2 \rightarrow 0$. O número de unidades que trocam de estados durante a evolução do sistema deve ser conservado, de modo que o número total de osciladores seja constante. Por exemplo, o número de osciladores que deixam o estado 1, em um passo de tempo qualquer, deve ser igual ao número de osciladores que entram em 2 e em 0, ambos vindos de 1 e no mesmo passo de tempo. Podemos representar matematicamente essa migração entre estados a partir da Eq. (4.4),

$$\begin{aligned}
N_1 w_{1 \rightarrow 0} dt + \sqrt{N_1 w_{1 \rightarrow 0} dt} \varepsilon'_1 + N_1 w_{1 \rightarrow 2} dt + \sqrt{N_1 w_{1 \rightarrow 2} dt} \varepsilon'_1 &= N_1 w_{1 \rightarrow 0} dt \\
&\quad + \sqrt{N_1 w_{1 \rightarrow 0} dt} \varepsilon_1 + N_1 w_{1 \rightarrow 2} dt + \sqrt{N_1 w_{1 \rightarrow 2} dt} \varepsilon_1.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Simplificando,

$$(\sqrt{N_1 w_{1 \rightarrow 0} dt} + \sqrt{N_1 w_{1 \rightarrow 2} dt}) \varepsilon'_1 = \sqrt{N_1 w_{1 \rightarrow 0} dt} \varepsilon_1 + \sqrt{N_1 w_{1 \rightarrow 2} dt} \varepsilon''_1. \quad (4.6)$$

Para fluxos partindo dos estados 0 e 2, podemos escrever relações análogas ao resultado acima:

$$(\sqrt{N_0 w_{0 \rightarrow 1} dt} + \sqrt{N_0 w_{0 \rightarrow 2} dt}) \varepsilon_0 = \sqrt{N_0 w_{0 \rightarrow 1} dt} \varepsilon'_0 + \sqrt{N_0 w_{0 \rightarrow 2} dt} \varepsilon''_0. \quad (4.7)$$

e

$$(\sqrt{N_2 w_{2 \rightarrow 0} dt} + \sqrt{N_2 w_{2 \rightarrow 1} dt}) \varepsilon''_2 = \sqrt{N_2 w_{2 \rightarrow 0} dt} \varepsilon_2 + \sqrt{N_2 w_{2 \rightarrow 1} dt} \varepsilon'_2. \quad (4.8)$$

Substituindo as relações acima nas Eqs. (4.4) e dividindo todas as equações pelo termo Ndt nós obtemos a evolução para as densidades $n_0(t)$, $n_1(t)$ e $n_2(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{n}_0 &= n_2 w_{2 \rightarrow 0} + \sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 0}} \frac{\xi_2(t)}{\sqrt{N}} - n_0 w_{0 \rightarrow 1} - \sqrt{n_0 w_{0 \rightarrow 1}} \frac{\xi'_0(t)}{\sqrt{N}} - n_0 w_{0 \rightarrow 2} \\ &\quad - \sqrt{n_0 w_{0 \rightarrow 2}} \frac{\xi''_0(t)}{\sqrt{N}} + n_1 w_{1 \rightarrow 0} + \sqrt{n_1 w_{1 \rightarrow 0}} \frac{\xi_1(t)}{\sqrt{N}} \\ \dot{n}_1 &= n_0 w_{0 \rightarrow 1} + \sqrt{n_0 w_{0 \rightarrow 1}} \frac{\xi'_0(t)}{\sqrt{N}} - n_1 w_{1 \rightarrow 0} - \sqrt{n_1 w_{1 \rightarrow 0}} \frac{\xi_1(t)}{\sqrt{N}} - n_1 w_{1 \rightarrow 2} \\ &\quad - \sqrt{n_1 w_{1 \rightarrow 2}} \frac{\xi'_1(t)}{\sqrt{N}} + n_2 w_{2 \rightarrow 1} + \sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 1}} \frac{\xi'_2(t)}{\sqrt{N}} \\ \dot{n}_2 &= n_1 w_{1 \rightarrow 2} + \sqrt{n_1 w_{1 \rightarrow 2}} \frac{\xi'_1(t)}{\sqrt{N}} - n_2 w_{2 \rightarrow 0} - \sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 0}} \frac{\xi_2(t)}{\sqrt{N}} - n_2 w_{2 \rightarrow 1} \\ &\quad - \sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 1}} \frac{\xi'_2(t)}{\sqrt{N}} + n_0 w_{0 \rightarrow 2} + \sqrt{n_0 w_{0 \rightarrow 2}} \frac{\xi''_0(t)}{\sqrt{N}}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde

$$\xi_i(t) = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{dt}} \quad (4.10)$$

é o ruído branco gaussiano. Suas propriedades de correlação são dadas por

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t'). \quad (4.11)$$

Podemos reduzir o sistema acima a duas equações, onde escolhemos n_0 e n_1 sabendo que a outra variável pode ser obtida por $n_2 = 1 - n_0 - n_1$. Além disso, podemos associar alguns termos de diferentes equações e relacionar ruídos que podem aparecer em mais de uma das equações acopladas. Por exemplo, da primeira das Eqs. (4.9) obtemos

$$\sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 0} + n_0 w_{0 \rightarrow 2}} \frac{\xi_{20}(t)}{\sqrt{N}} = \sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 0}} \frac{\xi_2(t)}{\sqrt{N}} - \sqrt{n_0 w_{0 \rightarrow 2}} \frac{\xi_0(t)}{\sqrt{N}} \quad (4.12)$$

ou

$$\xi_{20}(t) = \frac{\sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 0}} \xi_2(t) - \sqrt{n_0 w_{0 \rightarrow 2}} \xi_0(t)}{\sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 0} + n_0 w_{0 \rightarrow 2}}}. \quad (4.13)$$

Este resultado é similar à relação obtida na Ref. [25], válido devido à independência entre $\xi_2(t)$ e $\xi_0(t)$. De maneira análoga,

$$\xi_{10}(t) = \frac{\sqrt{n_1 w_{1 \rightarrow 0}} \xi_1'(t) - \sqrt{n_0 w_{0 \rightarrow 1}} \xi_0'(t)}{\sqrt{n_1 w_{1 \rightarrow 0} + n_0 w_{0 \rightarrow 1}}} = -\xi_{01}(t) \quad (4.14)$$

e

$$\xi_{21}(t) = \frac{\sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 1}} \xi_2''(t) - \sqrt{n_1 w_{1 \rightarrow 2}} \xi_1''(t)}{\sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 1} + n_1 w_{1 \rightarrow 2}}}. \quad (4.15)$$

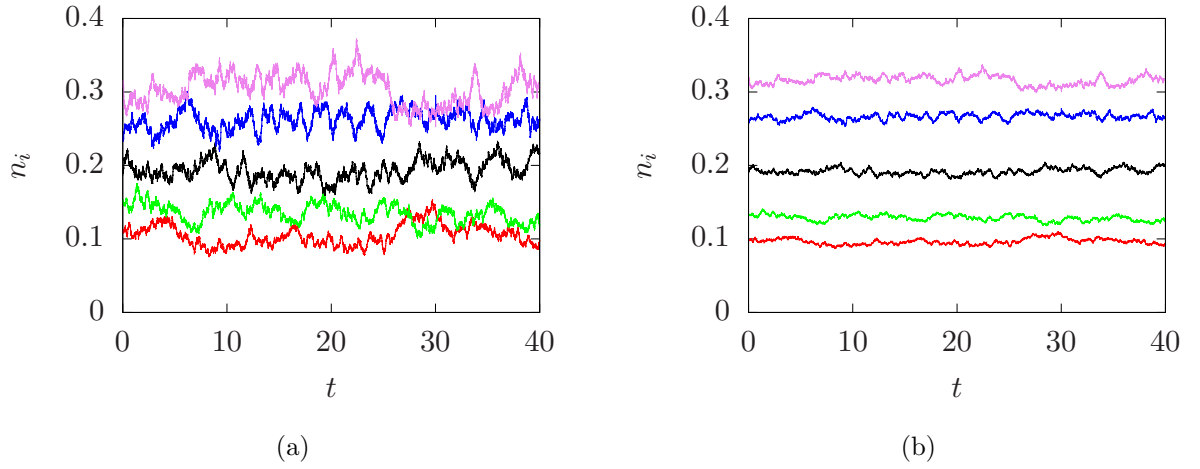


Figura 4.1: Evolução temporal de n_i para cinco estados com $N = 500$ (a) e $N = 5000$ (b) osciladores.

Finalmente, utilizando as Eqs. (4.13), (4.14) e (4.15) nós obtemos as seguintes equações de Langevin, as quais reduzimos para as variáveis n_0 e n_1

$$\begin{aligned} \dot{n}_0 &= n_2 w_{2 \rightarrow 0} - n_0 (w_{0 \rightarrow 1} + w_{0 \rightarrow 2}) + n_1 w_{1 \rightarrow 0} + \frac{\sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 0} + n_0 w_{0 \rightarrow 2}}}{\sqrt{N}} \xi_{20}(t) \\ &\quad + \frac{\sqrt{n_1 w_{1 \rightarrow 0} + n_0 w_{0 \rightarrow 1}}}{\sqrt{N}} \xi_{01}(t), \\ \dot{n}_1 &= n_2 w_{2 \rightarrow 1} - n_1 (w_{1 \rightarrow 0} + w_{1 \rightarrow 2}) + n_0 w_{0 \rightarrow 1} + \frac{\sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 1} + n_1 w_{1 \rightarrow 2}}}{\sqrt{N}} \xi_{12}(t) \\ &\quad - \frac{\sqrt{n_0 w_{0 \rightarrow 1} + n_1 w_{1 \rightarrow 0}}}{\sqrt{N}} \xi_{01}(t), \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde

$$n_2 = 1 - n_0 - n_1. \quad (4.17)$$

No limite termodinâmico os termos de ruídos são nulos e as quantidades $n_j \rightarrow P_j$, recuperando a equação de campo médio, Eq. (3.30). O procedimento para obtermos as equações de 3 estados

pode ser realizado para mais estados. As equações para o caso de 5 estados são

$$\begin{aligned}
\dot{n}_0 &= n_4 w_{4 \rightarrow 0} - n_0 (w_{0 \rightarrow 1} + w_{0 \rightarrow 4}) + n_1 w_{1 \rightarrow 0} + \sqrt{n_1 w_{1 \rightarrow 0} + n_0 w_{0 \rightarrow 1}} \frac{\xi_{10}(t)}{\sqrt{N}} \\
&\quad + \sqrt{n_4 w_{4 \rightarrow 0} + n_0 w_{0 \rightarrow 4}} \frac{\xi_{40}(t)}{\sqrt{N}}, \\
\dot{n}_1 &= n_2 w_{2 \rightarrow 1} - n_1 (w_{1 \rightarrow 0} + w_{1 \rightarrow 2}) + n_0 w_{0 \rightarrow 1} + \sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 1} + n_1 w_{1 \rightarrow 2}} \frac{\xi_{12}(t)}{\sqrt{N}} \\
&\quad - \sqrt{n_0 w_{0 \rightarrow 1} + n_1 w_{1 \rightarrow 0}} \frac{\xi_{10}(t)}{\sqrt{N}}, \\
\dot{n}_2 &= n_3 w_{3 \rightarrow 2} - n_2 (w_{2 \rightarrow 1} + w_{2 \rightarrow 3}) + n_1 w_{1 \rightarrow 2} + \sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 3} + n_3 w_{3 \rightarrow 2}} \frac{\xi_{23}(t)}{\sqrt{N}} \\
&\quad - \sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 1} + n_1 w_{1 \rightarrow 2}} \frac{\xi_{12}(t)}{\sqrt{N}}, \\
\dot{n}_3 &= n_2 w_{2 \rightarrow 3} - n_3 (w_{3 \rightarrow 4} + w_{3 \rightarrow 2}) + n_4 w_{4 \rightarrow 3} - \sqrt{n_2 w_{2 \rightarrow 3} + n_3 w_{3 \rightarrow 2}} \frac{\xi_{23}(t)}{\sqrt{N}} \\
&\quad + \sqrt{n_3 w_{3 \rightarrow 4} + n_4 w_{4 \rightarrow 3}} \frac{\xi_{34}(t)}{\sqrt{N}}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

e

$$n_4 = 1 - n_0 - n_1 - n_2 - n_3. \tag{4.19}$$

As Eqs. (4.18) foram resolvidas numericamente usando o método de Euler-Maruyama descrito na Sec. 2.1. A dinâmica microscópica, da qual as equações acima derivaram, indica que o sistema estudado neste trabalho apresenta ruído interno. Assim, é mais apropriada a descrição de Itô, cuja integral estocástica é definida no passo de tempo atual, antes do salto para o tempo posterior, conforme a Eq. (2.26). Notemos que as flutuações intrínsecas não permitem o cálculo com precisão de um salto futuro, por essa razão o cálculo de Stratonovich não é apropriado para o sistema em questão.

A Fig. 4.1 mostra a evolução temporal de um sistema com cinco estados, para 500 e 5000 osciladores. É possível perceber que os dois casos se diferenciam pela maior flutuação nos sistemas com 500 osciladores, o que é óbvio. Para simples comprovação do método descrito nesta seção, comparamos nossos resultados com o histograma das fases extraídas da Eq. (3.16) e o resultado analítico da equação de Fokker-Planck, dado pela Eq. (3.27) mostrados na Fig. 4.2. Os pontos foram obtidos a partir da evolução temporal de n_j obtidos das Eqs. (4.18), onde tomamos a média temporal das densidades $\langle n_j \rangle$ para $j = 0, 1, \dots, 4$ e $N = 5000$ osciladores. Podemos perceber uma boa concordância entre a simulação numérica e os resultados anteriores. Com a vantagem de variar o número de osciladores, realizamos simulações com 200, 300 e 1000 osciladores, todos com resultados satisfatórios.

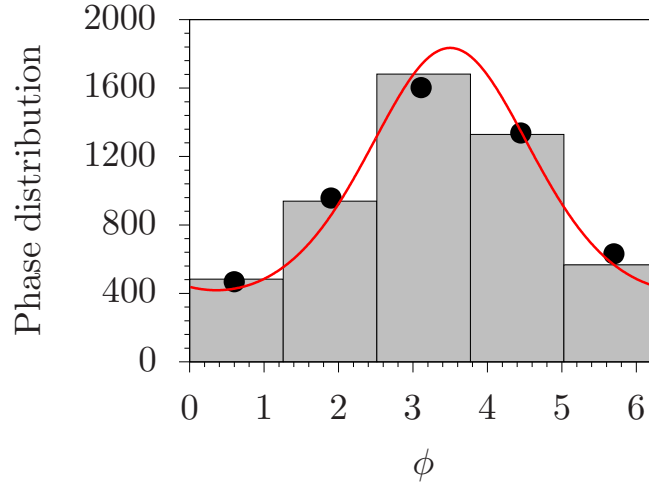


Figura 4.2: Histograma obtido numericamente a partir da Eq. (3.16) e os pontos resultaram das evoluções das fases, Eqs. (4.18). A linha vermelha foi obtida da solução estacionária da equação de Fokker-Planck [Eq. (3.27)] multiplicada pelo fator $2\pi N/5$. Os valores das constantes são $\eta = 0,98696$, $K = 1,5708$, $J = 200$ e $a = 0,3$. O número de osciladores foi $N = 5000$.

4.3 Comportamento crítico

Como mencionado anteriormente, simulações numéricas podem fornecer informações sobre certas medidas em torno do ponto crítico. Outros modelos de sincronização também realizaram estudos sobre o comportamento crítico do parâmetro de ordem e outras grandezas físicas (como nas Refs. [15–18, 53, 54]). Da mesma maneira que no procedimento padrão do estudo de transições de fase, mostramos o comportamento do valor absoluto do parâmetro de ordem, $|R| = r$. Outra quantidade de interesse é a susceptibilidade, geralmente definida como proporcional às flutuações do parâmetro de ordem, $\chi \approx \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2$ (Para um estudo detalhado sobre a susceptibilidade em transições de fase, consultar Ref. [41]). Frequentemente, χ também é proporcional ao tamanho do sistema quando os componentes são distribuídos espacialmente em uma rede regular. Mas neste trabalho os osciladores interagem globalmente, ou seja, todos os osciladores interagem com todos. Então, não há dependência espacial. Com base nessa premissa, usamos a susceptibilidade em termos de número de osciladores N , além da flutuação já citada anteriormente:

$$\chi = N[\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2]. \quad (4.20)$$

Outra grandeza importante no estudo de fenômenos críticos é o cumulante de Binder de

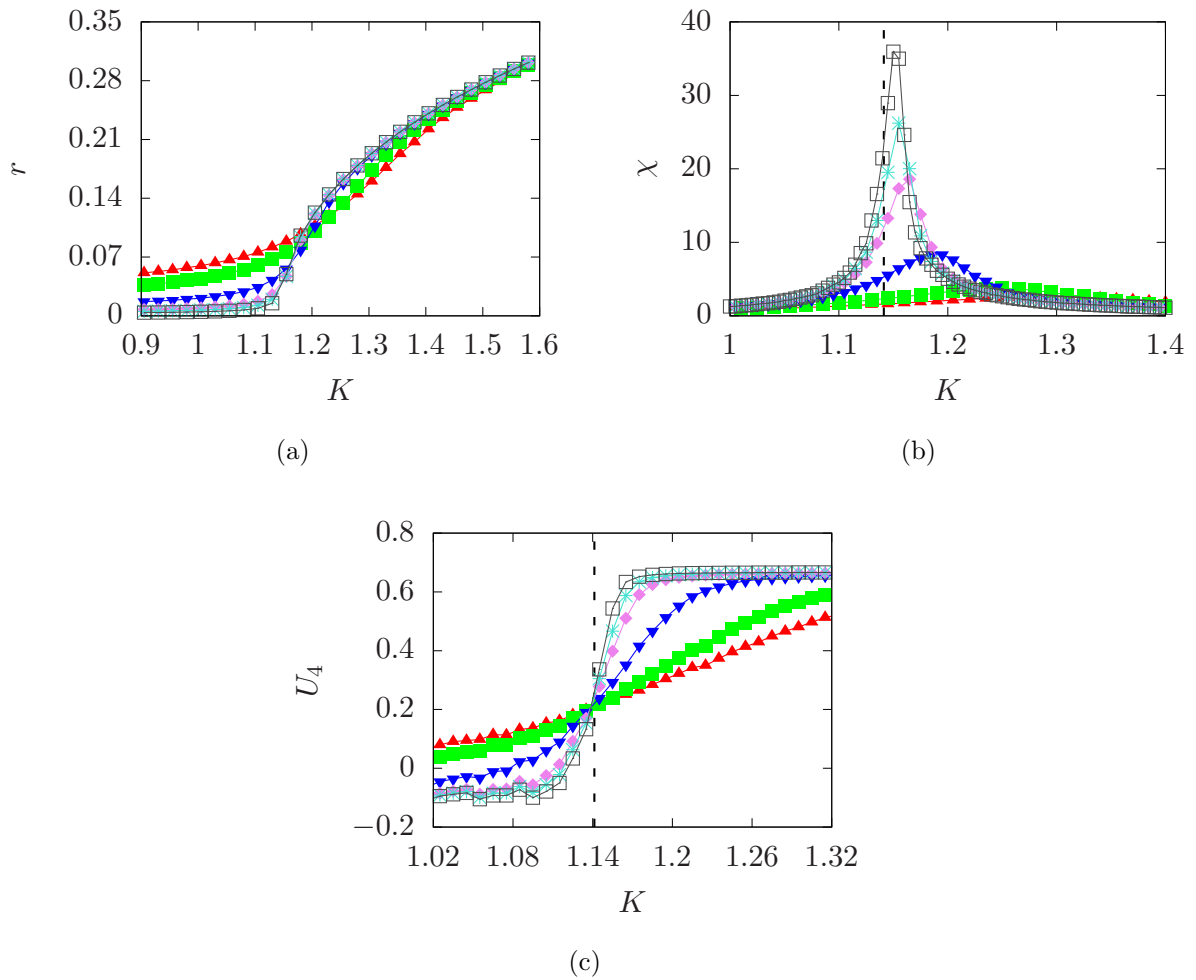


Figura 4.3: Parâmetro de ordem (a), susceptibilidade (b), e cumulante de Binder de quarta ordem (c) como função do acoplamento K no caso de cinco estados e variando o número de osciladores. Nos três casos foram tomadas médias sobre 10 amostras. A linha vertical nas Figs.(b) e (c) indica o acoplamento crítico teórico. Os símbolos indicam os diferentes valores de N : $N = 500$ ($\blacktriangle$, vermelho), $N = 1000$ ($\blacksquare$, verde), $N = 5000$ ($\blacktriangledown$, azul), $N = 25000$ ($\blacklozenge$, violeta), $N = 50000$ ($*$, turquesa) e $N = 100000$ ($\square$, cinza).

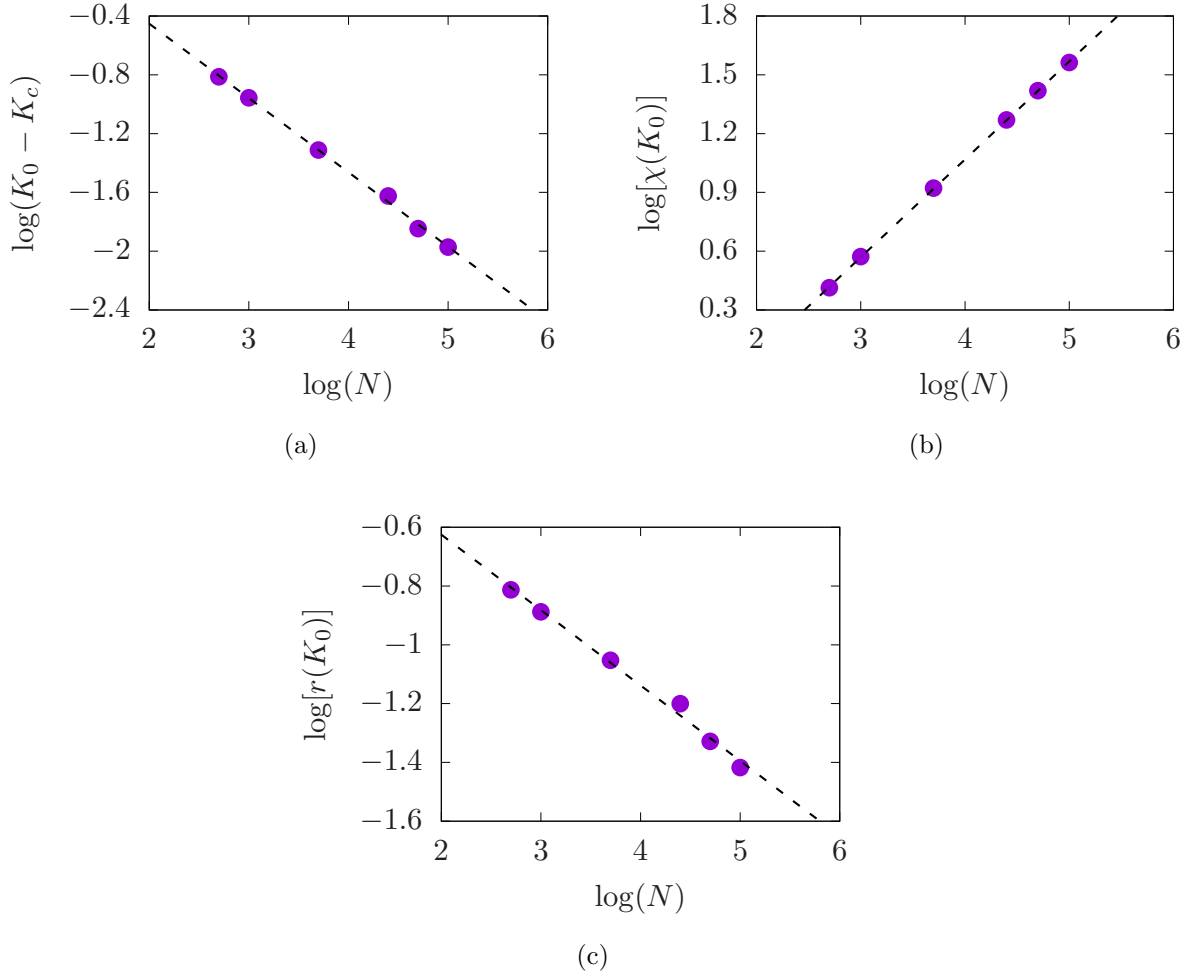


Figura 4.4: Gráficos $\log \times \log$ cujas declividades são iguais a $1/\nu$ (a), γ/ν (b) e β/ν (c) obtidos por meio de ajuste de curva linear.

quarta ordem, definido como

$$U_4 = 1 - \frac{\langle r^4 \rangle}{3\langle r^2 \rangle^2}. \quad (4.21)$$

O cumulante de Binder de quarta ordem nos fornece uma estimativa da temperatura crítica, no nosso caso a estimativa é do K_c . Para vários valores do número de osciladores, as curvas correspondentes $U_4 \times K$ interceptam-se quando o eixo das abscissas é próximo de K_c .

A Fig. 4.3(a) mostra o comportamento de r como função de K para osciladores de cinco estados, $M = 5$. Percebemos que, aumentando o número de osciladores, os valores de r se aproximam de zero quando $K < K_c$ (os osciladores estão dessincronizados). Após o ponto crítico, osciladores sincronizados, todos os valores de N seguem o mesmo comportamento. A susceptibilidade, dada pela Eq. (4.20), fornece um comportamento característico em torno do ponto crítico, como visto na Fig. 4.3(b). Nossa simulação mostrou que, ao aumentar N , o pico da

Tabela 4.2: Expoentes críticos ν , γ e β utilizando o valor teórico de K_c retirado da Ref. [23].

Número de Estados	ν	γ	β	K_c teórico (Ref. [23])
4 estados	$1,93 \pm 0,03$	$0,96 \pm 0,02$	$0,51 \pm 0,03$	1,25664
5 estados	$1,94 \pm 0,06$	$0,97 \pm 0,03$	$0,50 \pm 0,03$	1,14125
6 estados	$1,92 \pm 0,03$	$0,95 \pm 0,02$	$0,45 \pm 0,01$	1,08828

susceptibilidade se torna mais alto e se aproxima do ponto crítico. Por fim, a Fig. 4.3(c) mostra o comportamento do cumulante em função de K . Conforme comentado anteriormente, as curvas se cruzam próximo do K_c . A linha tracejada vertical na figura indica o valor $K_c = 1,14125$ do acoplamento crítico para 5 estados da aproximação de campo médio indicado na Ref. [23].

A partir de agora, vamos obter os expoentes críticos ν , γ e β utilizando a FSS. Vamos modificar as relações apresentadas no Cap. 2, onde foram usadas as variáveis de um sistema ferromagnético para as variáveis do nosso problema. Aqui, temos o parâmetro de ordem e a susceptibilidade em função do acoplamento K que é o parâmetro análogo à temperatura nos sistemas magnéticos. Como já discutido anteriormente, a grandeza referente ao tamanho do sistema é o número de osciladores N . Então, seguindo a FSS, podemos obter o expoente ν por meio equação

$$K_0 = K_c(1 + xN^{-1/\nu}), \quad (4.22)$$

onde $K_0 = K_0(N)$ é o valor do acoplamento referente aos picos da susceptibilidade [ver Fig. 4.3(b)], x é a variável de escala e K_c é o acoplamento crítico. Note que K_c pode ser obtido de três maneiras: por meio do gráfico do cumulante U_4 ; pode ser um dos valores a ser obtido pelo ajuste de curva (caso K_c seja desconhecido); ou um valor teórico, neste caso o modelo teórico que prevê os valores de K_c para estados discretos do modelo de Kuramoto [23]. Os outros expoentes dependem de ν e são dados por

$$\chi = N^{\gamma/\nu} \tilde{\chi}(N^{1/\nu}k) \quad (4.23)$$

e

$$r = N^{-\beta/\nu} \tilde{r}(N^{1/\nu}k), \quad (4.24)$$

onde $\tilde{\chi}(N^{1/\nu}k)$ e $\tilde{r}(N^{1/\nu}k)$ são funções de escala e $k = (K - K_c)/K_c$.

O procedimento padrão para obtermos os expoentes críticos é por meio da linearização das Eqs. (4.22), (4.23) e (4.24). Para a primeira dessas equações temos

$$K_0 - K_c = \tilde{K}_c N^{-1/\nu}. \quad (4.25)$$

Tabela 4.3: Expoentes críticos ν , γ e β utilizando o K_c obtido do cumulante de Binder.

Número de Estados	ν	γ	β	K_c
4 estados	$2,03 \pm 0,02$	$1,00 \pm 0,01$	$0,54 \pm 0,03$	$1,255 \pm 0,005$
5 estados	$2,02 \pm 0,05$	$1,01 \pm 0,02$	$0,52 \pm 0,03$	$1,140 \pm 0,005$
6 estados	$2,12 \pm 0,02$	$1,05 \pm 0,01$	$0,49 \pm 0,01$	$1,085 \pm 0,005$

Tomando o logaritmo na base 10 e manipulando os termos obtemos

$$\log(K_0 - K_c) = \log(\tilde{K}_c) - \left(\frac{1}{\nu}\right) \log(N). \quad (4.26)$$

Ou seja, é uma equação linear da forma $y = ax + b$ para $y = \log(K_0 - K_c)$ e $x = \log(N)$ e as constantes $b = \log(\tilde{K}_c)$ e $a = -1/\nu$. Assim, podemos obter o coeficiente ν a partir do gráfico $\log(K_0 - K_c) \times \log(N)$, onde $1/\nu$ é o coeficiente angular. Da mesma maneira podemos obter β/ν e γ/ν da linearização das Eqs. (4.23) e (4.24). A Fig. 4.4 mostra as retas para a obtenção dos expoentes críticos para 5 estados. Os pontos foram obtidos das Eqs. (4.18) e seus valores numéricos constam nas Tabs. 4.2 e 4.3 juntamente com os coeficientes para sistemas com 4 e 6 estados. Na Tab. 4.2 nós utilizamos o acoplamento crítico a partir dos valores teóricos a partir da Ref. [23], enquanto que a Tab. 4.3 mostra os expoentes obtidos com K_c obtido do gráfico do cumulante de Binder, Fig. 4.3(c).

4.4 Conclusão

Neste capítulo aplicamos a dinâmica microscópica ao MK com fases discretas. Realizamos uma minuciosa dedução para obter as respectivas equações de Langevin com os termos de flutuação dependentes de N . Primeiramente, trabalhamos a evolução temporal e comparamos com a distribuição de fase obtida em referências anteriores [23]. Em seguida, trabalhamos a criticalidade do sistema mostrando o comportamento do parâmetro de ordem, susceptibilidade e cumulante de Binder de quarta ordem, todos em função do acoplamento K . Por fim, foram obtidos os expoentes críticos ν , γ e β .

Nossos cálculos mostraram expoentes críticos próximos a de outros expoentes encontrados na literatura, como as Refs. [55–57] que tratam de modelos de dinâmica de opinião, onde os expoentes obtidos foram $\nu = 2$, $\beta = 0,5$ e $\gamma = 1$. Apesar da proximidade, alguns expoentes mostrados nas tabelas acima estão fora do intervalo de confiança dos resultados obtidos no modelo de dinâmica de opinião citado acima. Primeiramente, essa pequena discrepância pode ser

explicada por não levarmos em conta outras fontes de erros. Os erros estatísticos dos expoentes críticos contidos nas Tabs. 4.2 e 4.3 levam em consideração somente o erro da regressão linear. Contudo, é possível associar os erros das médias sobre a quantidade de amostras antes da regressão e, também, podemos aumentar a amostragem para 50 medidas, por exemplo, a fim de melhorar a qualidade de nossos resultados. Além disso, os expoentes β e γ dependem do valor de ν [ver Eqs. (4.23) e (4.24)], de modo que qualquer variação mínima em ν afeta os outros expoentes. Analogamente, qualquer pequena variação no valor de K_c também pode afetar os resultados. Desta forma, o erro apresentado nas tabelas de expoentes críticos, provavelmente, é subestimado e o modelo de Kuramoto com fases discretas pertence à mesma classe de universalidade do modelo de opiniões. Toda essa discussão também serve para analisar a diferença entre os expoentes nos casos de 4, 5 e 6 estados, ou seja, a omissão dos erros sobre os números de amostras e a dependência de ν – ou K_c – para com os outros expoentes podem gerar pequenas variações, como fica evidente nas diferenças observadas nos valores dos expoentes críticos mostrados nas Tabs. 4.2 e 4.3.

Capítulo 5

Flutuações em um Modelo com Crescimento de População

5.1 Introdução

A maioria dos trabalhos sobre sincronização considera o número de osciladores constante. Mas, devido a motivações em alguns sistemas biológicos (por exemplo, o ciclo de cianobactérias [50] e amebas [5]), Yu e Wood [28] propuseram um modelo de três estados em que a população cresce com o tempo. O modelo de Yu possui dois mecanismos de crescimento: no primeiro, osciladores em qualquer um dos três estados pode gerar um oscilador novo, já no segundo mecanismo, somente osciladores em um dos três estados pode criar uma nova unidade. Os osciladores podem nascer com o mesmo estado da “mãe”, com probabilidade χ , ou nos outros estados, com probabilidade $(1 - \chi)/2$. Nosso interesse é focado no seguinte aspecto deste modelo: o modelo apresenta biestabilidade entre os estados sincronizados e dessincronizados na abordagem de campo médio quando os nascimentos são independentes do estado dos osciladores e quando $\chi = 0$, ou seja, quando o estado no novo oscilador não depende do oscilador “mãe”.

Neste trabalho nós analisamos o papel que as flutuações devidas ao número finito de osciladores desempenham quando há crescimento de população. Como vem sendo mostrado recentemente, as flutuações destroem a biestabilidade, prevista na aproximação de campo médio, quando o número total de osciladores é fixo [25–27, 52]. Nosso interesse é no caso particular onde o modelo de Yu apresenta biestabilidade. Para isso nós vamos obter as equações de Lan-

gevin partindo da dinâmica microscópica já discutida nos capítulos anteriores. Essas equações possuem dependência do número de osciladores no termo de ruído multiplicativo, ausente da aproximação de campo médio. Ou seja, essa característica gerada pela dinâmica microscópica é a chave para entendermos as consequências da população ser finita.

Na Sec. 5.2, apresentamos o modelo de Yu e deduzimos as equações de Langevin, na Sec. 5.3 mostramos os resultados e os discutimos e na Sec. 5.4 as conclusões.

5.2 Modelo

O modelo de Yu trata de um conjunto de osciladores de três estados. As transições entre os estados ocorrem no sentido $(i \rightarrow i + 1)$ cuja taxa de transição é $\Gamma_{i+1} = e^{an_{i+1}}$, sendo $n_i(t) = N_i(t)/N(t)$ a densidade de osciladores no estado i e a a constante de acoplamento. Transições no sentido oposto, $(i \rightarrow i - 1)$ não são contempladas pelas taxas Γ_i . Como outros modelos de fase discreta para o estudo da sincronização, aqui os estados são cíclicos, ou seja, seguem o esquema $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Além das transições entre os estados, o modelo adiciona um processo de nascimento de osciladores, já discutido anteriormente. Como nossa intenção é avaliar a ocorrência de biestabilidade, devemos considerar os seguintes aspectos analisados por Yu em seu modelo [28]: os novos osciladores têm a mesma probabilidade de nascer a partir de qualquer estado; e que os novos osciladores também são igualmente prováveis em qualquer estado desde que não seja o do oscilador “mãe” ($\chi = 0$).

Os dois aspectos considerados acima nos fornecem a evolução do número de osciladores em um dado estado i , por meio da seguinte equação

$$\dot{N}_i = -\Gamma_{i+1}N_i + \Gamma_i N_{i-1} + \frac{k}{2}(N_{i+1} + N_{i-1}), \quad (5.1)$$

onde k é a taxa de crescimento. Podemos perceber que o processo de nascimento introduz no modelo transições no sentido inverso, isto é, além das transições $i \rightarrow i + 1$, agora temos, também, $i \rightarrow i - 1$. O número total de osciladores evolui no tempo como $N(t) = N_1(t) + N_2(t) + N_3(t)$, cujas quantidades $N_i(t)$ podem ser obtidas utilizando a Eq. (5.1), via $\dot{N} = \dot{N}_1 + \dot{N}_2 + \dot{N}_3$, de modo que

$$\dot{N} = kN. \quad (5.2)$$

Então, temos um crescimento exponencial do número total de osciladores. Podemos escrever a equação da evolução das densidades n_i , a partir da Eq. (5.1) como

$$\dot{n}_i = -\Gamma_{i+1}n_i + \Gamma_i n_{i-1} + \frac{k}{2}(1 - 3n_i), \quad (5.3)$$

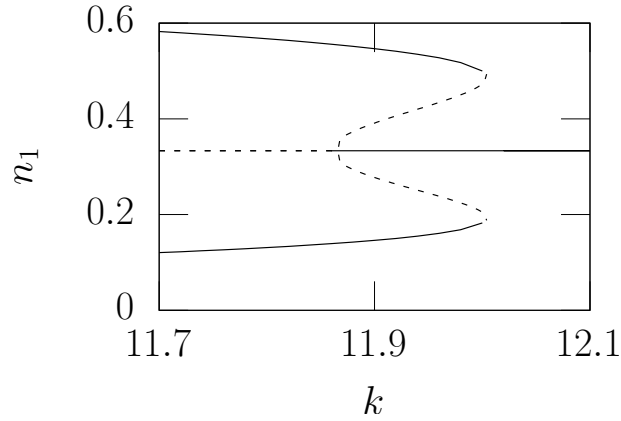


Figura 5.1: Diagrama de bifurcação. As linhas contínuas indicam os atratores estáveis e as linhas tracejadas representam os instáveis. A linha horizontal representa o ponto fixo e as curvas representam o valor máximo e mínimo que n_1 assume no ciclo limite. O acoplamento utilizado foi $a = 6,75$.

onde nós usamos a seguinte relação

$$\dot{n}_i = \frac{d}{dt} \frac{N_i}{N} = \frac{\dot{N}_i}{N} - \frac{N_i}{N} \frac{\dot{N}}{N}. \quad (5.4)$$

Tratando-se de uma aproximação de campo médio, as flutuações são negligenciadas na Eq. (5.3). Os seus estados assintóticos são dependentes apenas das condições iniciais, ou seja, ela descreve um sistema dinâmico e pode ser descrita por um diagrama de bifurcação, como mostrado na Fig. 5.1. Podemos ver que para pequenos valores de k a sincronização ocorre, sendo caracterizada por um ciclo limite estável. Para k grande os osciladores estão dessincronizados, isto é, o atrator é o ponto onde todas as densidades são iguais a $1/3$. Na zona intermediária dos valores de k , o gráfico mostra a região de biestabilidade, onde ambos, ponto fixo e ciclo limite, são estáveis. No Cap. 3, onde mostramos algumas definições sobre dinâmica não linear, vimos que o tipo de bifurcação bidimensional onde ciclo limite e pontos fixos são estáveis é a bifurcação de Hopf. A região intermediária de k , onde ocorre a biestabilidade, apresenta histerese, típico comportamento de uma bifurcação de Hopf subcrítica. Os dois atratores são separados por um ciclo limite instável. Isso indica que, quando as condições iniciais estão dentro deste ciclo limite instável o sistema evolui para os estados dessincronizados. Caso contrário, condições iniciais fora do ciclo limite, o sistema tende para a sincronização.

Partindo do protocolo de contagem – seguindo as Refs. [25–27] como discutido nos capítulos anteriores – vamos obter as equações de Langevin para estudar as flutuações devidas ao número

finito de unidades. A variação do número de osciladores é

$$dN_i = \sum_{k=1}^{N_{i-1}} \theta(\Gamma_i dt - \zeta_{ik}) - \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_{i-1}+N_i} \theta(\Gamma_{i+1} dt - \zeta_{ik}) + \sum_{k=N_{i-1}+N_i+1}^{2N_{i-1}+N_i+N_{i+1}} \theta\left(\frac{k}{2} dt - \zeta_{ik}\right), \quad (5.5)$$

onde $\theta(x)$ é a função de Heaviside, $\zeta_k \in [0,1]$ são números aleatórios distribuídos uniformemente e dt é o passo de tempo infinitesimal. A primeira soma representa os osciladores no estado i vindos de $i-1$. A soma do meio conta os osciladores que deixam o estado i e vão para o estado $i+1$ e a última soma mostra o aumento no número de osciladores referente ao processo de nascimento.

Para N grande, nós podemos realizar a soma

$$\sum_{k=1}^N \theta(X - \zeta_k) = NX + \sqrt{NX(1-X)}\varepsilon, \quad (5.6)$$

baseada no teorema do limite central, onde ε é um número aleatório gaussiano com média zero e desvio padrão 1. Portanto, podemos escrever a Eq. (5.5) como

$$\begin{aligned} dN_1 &= \Gamma_1 N_3 dt + \sqrt{\Gamma_1 N_3 dt} \varepsilon_{13} - \Gamma_2 N_1 dt - \sqrt{\Gamma_2 N_1 dt} \varepsilon_{11} \\ &\quad + (N_2 + N_3) \frac{k}{2} dt + \sqrt{(N_2 + N_3) \frac{k}{2} dt} \varepsilon_1, \\ dN_2 &= \Gamma_2 N_1 dt + \sqrt{\Gamma_2 N_1 dt} \varepsilon_{21} - \Gamma_3 N_2 dt - \sqrt{\Gamma_3 N_2 dt} \varepsilon_{22} \\ &\quad + (N_1 + N_3) \frac{k}{2} dt + \sqrt{(N_1 + N_3) \frac{k}{2} dt} \varepsilon_2, \\ dN_3 &= \Gamma_3 N_2 dt + \sqrt{\Gamma_3 N_2 dt} \varepsilon_{32} - \Gamma_1 N_3 dt - \sqrt{\Gamma_1 N_3 dt} \varepsilon_{33} \\ &\quad + (N_1 + N_2) \frac{k}{2} dt + \sqrt{(N_1 + N_2) \frac{k}{2} dt} \varepsilon_3. \end{aligned} \quad (5.7)$$

As quantidades $\varepsilon_{i,j}$ e ε_i são diferentes números aleatórios gaussianos com média zero e variância 1. Devido ao fluxo de osciladores de um estado a outro no processo de migração, devemos ter $\varepsilon_{i,i} = \varepsilon_{i+1,i}$. Essa relação entre os números aleatórios é similar às Eqs. (4.13) e (4.14). Contudo, aqui as taxas Γ só permitem transições unidirecionais, enquanto que no caso do capítulo anterior as transições eram em ambos os sentidos. Para simplificar a notação, utilizamos a definição $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i,i}$. Definimos, também

$$\xi_i(t) = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{dt}} \quad \text{e} \quad \bar{\xi}_i(t) = \frac{\bar{\varepsilon}_i}{\sqrt{dt}}, \quad (5.8)$$

que são ruídos brancos gaussianos independentes, cujas propriedades de correlação são dadas por

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (5.9)$$

Temos, então

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= \Gamma_1 N_3 + \sqrt{\Gamma_1 N_3} \bar{\xi}_3 - \Gamma_2 N_1 - \sqrt{\Gamma_2 N_1} \bar{\xi}_1 + (N_2 + N_3) \frac{k}{2} + \sqrt{(N_2 + N_3) \frac{k}{2}} \xi_1, \\ \dot{N}_2 &= \Gamma_2 N_1 + \sqrt{\Gamma_2 N_1} \bar{\xi}_1 - \Gamma_3 N_2 - \sqrt{\Gamma_3 N_2} \bar{\xi}_2 + (N_1 + N_3) \frac{k}{2} + \sqrt{(N_1 + N_3) \frac{k}{2}} \xi_2, \\ \dot{N}_3 &= \Gamma_3 N_2 + \sqrt{\Gamma_3 N_2} \bar{\xi}_2 - \Gamma_1 N_3 - \sqrt{\Gamma_1 N_3} \bar{\xi}_3 + (N_1 + N_2) \frac{k}{2} + \sqrt{(N_1 + N_2) \frac{k}{2}} \xi_3.\end{aligned}\quad (5.10)$$

A soma das três equações acima dá

$$\dot{N} = kN + \sqrt{\frac{k}{2}} \left(\sqrt{N_2 + N_3} \xi_1 + \sqrt{N_1 + N_3} \xi_2 + \sqrt{N_1 + N_2} \xi_3 \right). \quad (5.11)$$

Desta forma, vemos que a população total cresce exponencialmente com a adição de um termo de ruído, como era esperado. Utilizando as Eqs. (5.10) e (5.11), podemos escrever as equações para a evolução temporal das densidades como

$$\begin{aligned}\dot{n}_1 &= \Gamma_1 n_3 + \sqrt{\Gamma_1 n_3} \frac{\bar{\xi}_3}{\sqrt{N}} - \Gamma_2 n_1 - \sqrt{\Gamma_2 n_1} \frac{\bar{\xi}_1}{\sqrt{N}} + (n_2 + n_3 - 2n_1) \frac{k}{2} \\ &\quad + \sqrt{(n_2 + n_3) \frac{k}{2}} \frac{\xi_1}{\sqrt{N}} - n_1 \frac{f_N}{\sqrt{N}}, \\ \dot{n}_2 &= \Gamma_2 n_1 + \sqrt{\Gamma_2 n_1} \frac{\bar{\xi}_1}{\sqrt{N}} - \Gamma_3 n_2 - \sqrt{\Gamma_3 n_2} \frac{\bar{\xi}_2}{\sqrt{N}} + (n_1 + n_3 - 2n_2) \frac{k}{2} \\ &\quad + \sqrt{(n_1 + n_3) \frac{k}{2}} \frac{\xi_2}{\sqrt{N}} - n_2 \frac{f_N}{\sqrt{N}}, \\ \dot{n}_3 &= \Gamma_3 n_2 + \sqrt{\Gamma_3 n_2} \frac{\bar{\xi}_2}{\sqrt{N}} - \Gamma_1 n_3 - \sqrt{\Gamma_1 n_3} \frac{\bar{\xi}_3}{\sqrt{N}} + (n_1 + n_2 - 2n_3) \frac{k}{2} \\ &\quad + \sqrt{(n_1 + n_2) \frac{k}{2}} \frac{\xi_3}{\sqrt{N}} - n_3 \frac{f_N}{\sqrt{N}},\end{aligned}\quad (5.12)$$

com os f_N dados por

$$f_N = \sqrt{\frac{k}{2}} \left(\sqrt{n_2 + n_3} \xi_1 + \sqrt{n_1 + n_3} \xi_2 + \sqrt{n_1 + n_2} \xi_3 \right). \quad (5.13)$$

Já que $n_1 + n_2 + n_3 = 1$, nós podemos eliminar uma das densidades, como realizado no capítulo anterior. Quando $N \rightarrow \infty$ na Eq. (5.12) nós retomamos o caso de campo médio dada pela Eq. (5.3).

O parâmetro de ordem é definido de maneira equivalente ao do MK com fases discretas [Eq. (4.1)]:

$$r = \left| \left\langle \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{2\pi(k_j(t)-1)/3} \right\rangle_t \right| = \left| \left\langle \sum_{j=1}^3 n_k(t) e^{2\pi(j-1)/3} \right\rangle_t \right|, \quad (5.14)$$

onde $k_j(t) = (1,2,3)$ é o estado do oscilador j no tempo t e $\langle \cdot \rangle_t$ indica a média temporal. Por definição, o parâmetro de ordem é a média das fases dos osciladores. A Eq. (5.14) apresenta

um somatório cujo número de parcelas é o número de estados 1, 2 e 3 associados às fases 0, $2\pi/3$ e $4\pi/3$, respectivamente. Notemos que a segunda igualdade é apenas uma outra maneira de escrever a primeira soma utilizando a definição $n_i = N_i/N$. Para o ponto fixo que surge na aproximação de campo médio ($n_1 = n_2 = n_3 = 1/3$), temos $r = 0$. Para o ciclo limite, $r > 0$.

5.3 Flutuações para população finita

Para avaliarmos as consequências que a população finita ocasiona nas flutuações, nós resolvemos numericamente as Eqs. (5.11) e (5.12) utilizando o método de Euler-Maruyama [36] na interpretação de Itô. Na seção sobre dinâmica estocástica vimos que a definição de Itô é a mais apropriada para sistemas com ruído interno, ou intrínseco, e este é o caso das equações de Langevin derivadas da dinâmica microscópica. Nós utilizamos nas simulações um passo de tempo igual a $e^a/100$, que é um centésimo da maior taxa Γ possível. Nossa principal consideração aqui são os diferentes tamanhos da população. Nós escolhemos três diferentes valores de população inicial, que foram $N_0 = 500, 5000$ e 50000 . Notemos que o crescimento exponencial da população total cria um problema numérico, uma vez que rapidamente $N(t)$ atinge valores que excedem a capacidade computacional. Para contornar isso, Yu e Wood propuseram reduzir o número total de unidades para N_0 sempre que $N(t)$ alcançar $10N_0$. Porém, na nossa concepção, as flutuações podem aumentar artificialmente ao utilizarmos esse procedimento, uma vez que as flutuações são inversamente proporcionais a $\sqrt{N}$, conforme Eq. (5.12). Podemos interpretar que ao reduzir a população para N_0 , um processo de morte foi adicionado ao sistema, algo que não é originalmente contemplado pelo modelo. Apesar disso, há motivações biológicas para um processo de morte, o qual pode ser útil para o estudo de certos sistemas bacterianos para os quais um mecanismo de morte é acionado sempre que um limiar da população é atingido [58]. Aqui, nós realizamos uma modificação onde $N(t)$ aumenta até atingir 10% do maior valor que o computador pode armazenar e a partir daí mantemos $N(t)$ constante. Observe que, para tal valor de $N(t)$, as flutuações já são numericamente nulas, portanto não introduzimos nenhum erro com esse procedimento além dos erros numéricos inerentes ao cálculo computacional. Além disso, o número total de osciladores afeta o termo de ruído na evolução de n_1 , n_2 e n_3 , para grande $N(t)$ o termo de ruído se torna desprezível. As variáveis N_1 , N_2 e N_3 também crescem indefinidamente, então a implementação desse problema só torna-se viável para a evolução das densidades n_1 , n_2 e n_3 . Por esse mesmo motivo, não podemos utilizar diretamente a Eq. (5.5) neste capítulo. Mas, a utilização das equações de Langevin acopladas é um método equivalente,

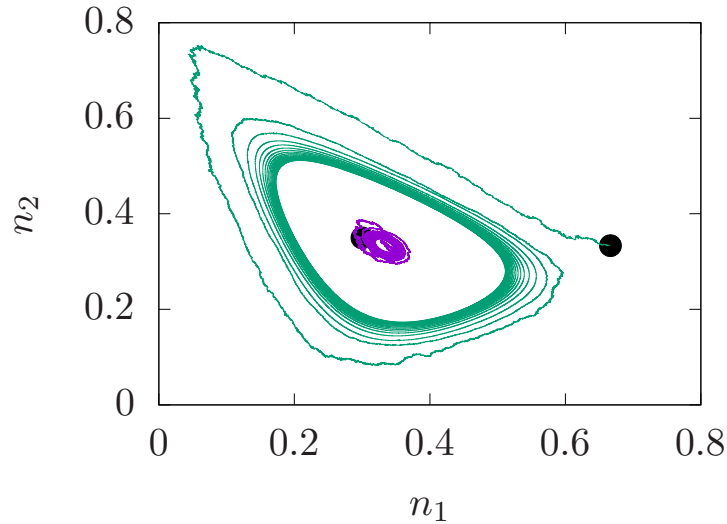


Figura 5.2: Trajetórias no espaço das densidades com as condições iniciais indicadas pelos círculos fechados em preto. As condições iniciais próximas ao ponto fixo se dirigem para ele, e as mais distantes do ponto fixo evoluem para o ciclo limite estável. Para esta figura o acoplamento foi $a = 6,75$, taxa de crescimento $k = 12,0$ e quantidade inicial de osciladores $N_0 = 500$.

conforme as Refs. [25–27].

Nós analisamos a evolução das densidades na região de biestabilidade para duas diferentes condições iniciais. Devido à natureza da bifurcação, nós escolhemos um valor próximo do ponto fixo, e outro fora do ciclo limite estável. Entre os dois atratores, ponto fixo e ciclo limite, há um ciclo limite instável. Quaisquer condições iniciais dentro dessa região de instabilidade tendem para o ponto fixo e, se as condições iniciais forem fora do ciclo instável, o sistema se encaminha para o ciclo limite estável. Como indicado na Fig. 5.2, onde $k = 12,0$, diferentes condições iniciais levam a diferentes estados estacionários, indicando a biestabilidade mesmo com as flutuações da população finita.

Na Fig. 5.3(a) nós mostramos a média do parâmetro de ordem como função de k . A média foi tomada sobre 10 amostras para diferentes populações iniciais $N_0 = 500, 5000$ e 50000 . Os primeiros 30000 passos de tempo foram descartados para o sistema se equilibrar, só a partir desse tempo as medidas foram realizadas. A simulação foi iniciada com valores pequenos de k , na região em que o ciclo limite é estável. Então, qualquer condição inicial dirige-se a este estado assintótico. Em seguida, nós aumentamos o valor de k mantendo o estado assintótico imediatamente anterior como condição inicial, mas utilizando ainda N_0 como número inicial de

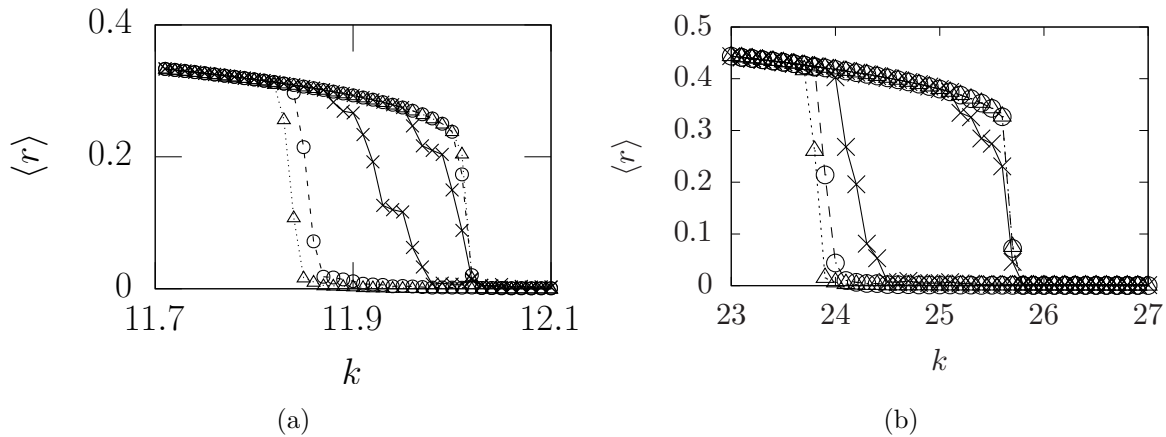


Figura 5.3: Média do parâmetro de ordem tomada sobre 10 amostras como função da taxa de crescimento k . O ciclo de histerese é consequência da biestabilidade. Nesta figura, a constante de acoplamento é $a = 6,75$ em (a) e $a = 8,0$ em (b). Os símbolos indicam os diferentes valores de N_0 : $N_0 = 500$ ($\times$), 5000 (círculos) e 50000 (triângulos).

osciladores. Esse procedimento se repetiu até k deixar a região de biestabilidade. Depois, nós realizamos o caminho inverso diminuindo k com a mesma premissa de utilizar o estado assintótico anterior como condição inicial. Ao plotarmos o gráfico da média do parâmetro de ordem é possível visualizar um ciclo de histerese, indicando que a biestabilidade ainda existe, apesar da presença da população finita e as suas devidas flutuações. A largura do ciclo de histerese aumenta quando aumentamos o valor de N_0 , indicando que a biestabilidade é maior quando N_0 aumenta. Isso é contrário aos resultados anteriores onde a população é constante [25–27], onde as flutuações devidas à população finita destruíram a biestabilidade e as flutuações não são diminuídas ao longo do processo. O crescimento exponencial do número de osciladores leva as flutuações a valores muito baixos. É evidente que esse comportamento pode não ser geral devendo ser testado em outros modelos com crescimento de população.

A Fig. 5.3(b) apresenta o mesmo procedimento para a obtenção do parâmetro de ordem discutido no parágrafo anterior. Contudo, o valor do acoplamento é $a = 8,0$. Podemos perceber que o acoplamento maior alarga o gráfico da histerese, indicando uma zona maior de biestabilidade. Neste caso, o número inicial de osciladores também alarga o ciclo de histerese conforme N_0 cresce.

Aqui, nós utilizamos um valor limite para o crescimento da população. Nós propusemos o maior valor que o computador pode armazenar. Depois de atingido esse teto, ele permanece constante até o final da simulação. Todavia, a proposta original utilizada no modelo de Yu é

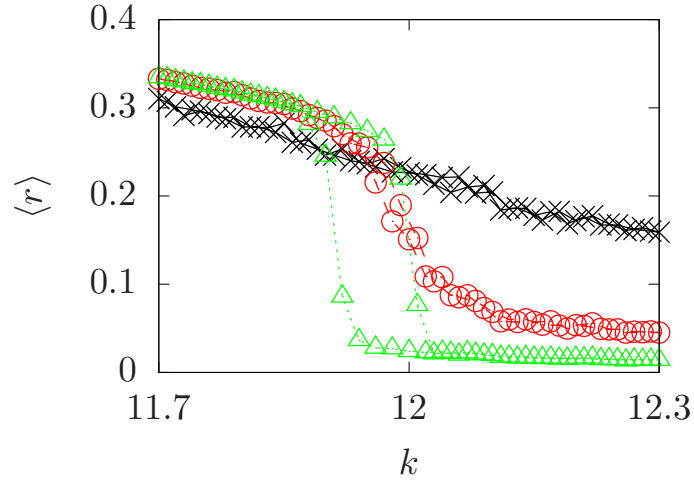


Figura 5.4: Média do parâmetro de ordem tomada sobre 10 amostras como função da taxa de crescimento k . O acoplamento tem intensidade $a = 6,75$. Os símbolos indicam os diferentes valores de N_0 : $N_0 = 500$ ($\times$, preto), 5000 (círculos, vermelho) e 50000 (triângulos, verde).

que, ao chegar ao valor de $10N_0$ a população retorna a N_0 . Já explicamos acima o motivo de não utilizarmos o mesmo procedimento. Mas, por motivos de comparação, realizamos simulações, como originalmente construída, da média do parâmetro de ordem em função de k , com a mesma quantidade de amostras do caso anterior e o mesmo acoplamento. A Fig. 5.4 foi obtida com o intuito de verificar se ocorre o ciclo de histerese. Como no caso anterior, partimos de valores pequenos de k , passando pela região de biestabilidade e indo até a região onde o ponto fixo é estável. Podemos perceber que, para $N_0 = 500$ não verificamos biestabilidade. Porém, para 5000 osciladores, o ciclo de histerese é quase imperceptível e para 50000 unidades, a histerese é bastante aparente [porém, menor do que o relatado na Fig. 5.3(a)]. Notamos que as flutuações são maiores por conta da variação do número de osciladores entre N_0 e $10N_0$. Neste caso, as flutuações são muito maiores, pois, além do teto da população ser menor elas regressam ao valor inicial instantaneamente.

5.4 Conclusões

Neste capítulo, a dinâmica de Langevin, obtida das equações microscópicas, Eq. (5.5), nos permitiu estudar o modelo de Yu para osciladores de três estados com crescimento de população. O modelo, estudado inicialmente na aproximação de campo médio, foi explorado com o intuito

de verificar se as flutuações, devidas à população finita, quebram a biestabilidade, conforme verificado em publicações anteriores [25–27]. Porém, nossos resultados mostraram que as flutuações não quebram a biestabilidade presentes no modelo de Yu. Em consequência disso, foi verificado um ciclo de histerese, cuja largura aumenta conforme aumentamos o número inicial de osciladores. Nossa conclusão é que o rápido crescimento no número de osciladores – crescimento exponencial – é responsável pela preservação da biestabilidade. Os principais resultados deste capítulo foram publicados na Ref. [59].

Capítulo 6

Considerações finais

Nesta tese nós apresentamos um estudo sobre o efeito de flutuações na sincronização de osciladores globalmente acoplados. As flutuações decorrem da quantidade finita de osciladores no sistema. Foram estudados dois problemas. O primeiro foi a versão do MK com as fases discretas e o segundo foi o modelo de Yu de três estados, onde há crescimento de população. Nós partimos da metodologia de obtenção de equações de Langevin proposta nas Refs. [25–27]. Essas equações acopladas possuem termos de flutuações proporcionais a $1/\sqrt{N}$, de modo que populações pequenas geram maiores flutuações. Quando $N \rightarrow \infty$, recuperam-se as equações na aproximação de campo médio.

Para o MK discretizado, nós comparamos os resultados a partir das novas equações microscópicas com os resultados anteriores em campo médio. Mesmo com os termos de flutuações e para diferentes quantidades do número de osciladores foram obtidos resultados satisfatórios. Em seguida, nós realizamos simulações do parâmetro de ordem e da susceptibilidade em função de K . Verificamos que o comportamento próximo ao ponto crítico K_c dessas grandezas obedece o comportamento padrão dos estudos de transições de fase. Ou seja, ao aumentar o número de unidades, r se aproxima de zero quando K se aproxima do ponto crítico e os picos da susceptibilidade se aproximam de K_c .

O comportamento crítico descrito acima nos incentivou a obter os expoentes críticos do comprimento de correlação, do parâmetro de ordem e da susceptibilidade. Por meio da teoria de escala de tamanho finito, nós calculamos os expoentes a partir dos dados das simulações para 4, 5 e 6 estados. Foram obtidos dois conjuntos de expoentes críticos, no primeiro utilizamos o acoplamento crítico teórico apresentados na Ref. [23], no segundo obtivemos o acoplamento crítico a partir do ponto em que as curvas do cumulante de Binder de quarta ordem se interceptam.

Os resultados obtidos por essas duas formas diferentes indicam que os expoentes pertencem à classe de universalidade mostrada nas Refs. [55–57].

No segundo modelo, de Yu, analisamos como as flutuações devidas à quantidade finita de osciladores influenciam a sincronização. Trabalhos anteriores mostraram que as flutuações quebram a biestabilidade descrita na aproximação de campo médio, para osciladores com dois ou três estados. A quebra de ergodicidade é apontada como responsável por esse comportamento [25–27]. Contudo, nós mostramos que, no caso em que há crescimento no número de unidades a biestabilidade permaneceu. O crescimento exponencial na população torna as flutuações desprezíveis, não destruindo a biestabilidade. Nós verificamos isso por meio do retrato de fases. Quando a condição inicial encontra-se próximo ao ponto fixo, a trajetória segue para ele. Caso a condição inicial esteja longe do ponto fixo, ela se dirige para o ciclo limite.

O parâmetro de ordem também mostra a biestabilidade, mesmo com a quantidade finita de unidades. O gráfico da média do parâmetro de ordem em função da taxa de crescimento apresenta ciclo de histerese. Quando o parâmetro de ordem, para cada valor de k , é obtido aumentando k a transição ocorre após o ponto crítico, porém, ao realizarmos o procedimento no sentido contrário a transição ocorre atrás do ponto crítico. Quanto maior o número de unidades maior é a largura do ciclo de histerese. Além disso, nós aumentamos o valor da intensidade do acoplamento levando ao aumento da largura do ciclo de histerese. Por fim, realizamos uma comparação entre a maneira de definir o número máximo de osciladores. Nós optamos por manter o número de unidades constante após o sistema alcançar o maior valor suportado pelo computador, já o proposto originalmente no modelo faz o número de osciladores retornar ao número inicial quando o sistema alcança $10N_0$, introduzindo artificialmente um processo de morte inexistente no modelo. Nossos resultados mostraram que a biestabilidade persiste para grandes valores de N_0 e ela não é presente quando N_0 é pequeno.

Então, nesta tese mostramos que um modelo com crescimento de população, as flutuações devidas à quantidade finita de osciladores não quebra a biestabilidade. Notemos que a persistência da biestabilidade foi observada para um crescimento exponencial da população, então seria interessante verificar o que ocorre em casos de crescimento mais lento. O mecanismo por trás da influência das flutuações em tais modelos permanece como um problema em aberto. Reforçamos, também, que esta pesquisa teórica apresenta possíveis realizações experimentais de forma similar às sugeridas nas referências [58, 60–62].

Referências Bibliográficas

- [1] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths e J. Kurths, *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge Nonlinear Science Series, Vol. 12 (Cambridge university press, 2001).
- [2] Y. Kuramoto, in *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, edited by H. Araki (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1975) pp. 420–422.
- [3] F. Grenier, I. Timofeev e M. Steriade, *Neocortical Very Fast Oscillations (Ripples, 80-200 Hz) During Seizures: Intracellular Correlates*, *Journal of Neurophysiology* **89**, 841 (2003).
- [4] I. Lima Dias Pinto e M. Copelli, *Oscillations and collective excitability in a model of stochastic neurons under excitatory and inhibitory coupling*, *Phys. Rev. E* **100**, 062416 (2019).
- [5] I. Segota, L. Boulet, D. Franck e C. Franck, *Spontaneous emergence of large-scale cell cycle synchronization in amoeba colonies*, *Physical Biology* **11**, 036001 (2014).
- [6] S. H. Strogatz, *Sync: How order emerges from chaos in the universe, nature, and daily life* (Hyperion, 2004).
- [7] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. Pérez Vicente, F. Ritort e R. Spigler, *The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena*, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 137 (2005).
- [8] S. H. Strogatz, *From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators*, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **143**, 1 (2000).
- [9] F. A. Rodrigues, T. K. D. Peron, P. Ji e J. Kurths, *The Kuramoto model in complex networks*, *Physics Reports* **610**, 1 (2016).
- [10] H. Sakaguchi, *Cooperative Phenomena in Coupled Oscillator Systems under External Fields*, *Progress of Theoretical Physics* **79**, 39 (1988).

-
- [11] N. Ahmadi, Y. Pei e M. Pechenizkiy, *Effect of linear mixing in EEG on synchronization and complex network measures studied using the Kuramoto model*, [Physica A: Statistical Mechanics and its Applications](#) **520**, 289 (2019).
- [12] Y. Sokolov e G. B. Ermentrout, *When is sync globally stable in sparse networks of identical Kuramoto oscillators?*, [Physica A: Statistical Mechanics and its Applications](#) **533**, 122070 (2019).
- [13] M. Zhou, X. Li, W. Xiong e H. Liao, *Coevolution of synchronization and cooperation in real networks*, [International Journal of Modern Physics C](#) **30**, 1940012 (2019).
- [14] T. Prager, B. Naundorf e L. Schimansky-Geier, *Coupled three-state oscillators*, [Physica A: Statistical Mechanics and its Applications](#) **325**, 176 (2003).
- [15] K. Wood, C. Van den Broeck, R. Kawai e K. Lindenberg, *Universality of Synchrony: Critical Behavior in a Discrete Model of Stochastic Phase-Coupled Oscillators*, [Phys. Rev. Lett.](#) **96**, 145701 (2006).
- [16] K. Wood, C. Van den Broeck, R. Kawai e K. Lindenberg, *Critical behavior and synchronization of discrete stochastic phase-coupled oscillators*, [Phys. Rev. E](#) **74**, 031113 (2006).
- [17] K. Wood, C. Van den Broeck, R. Kawai e K. Lindenberg, *Effects of disorder on synchronization of discrete phase-coupled oscillators*, [Phys. Rev. E](#) **75**, 041107 (2007).
- [18] K. Wood, C. Van den Broeck, R. Kawai e K. Lindenberg, *Continuous and discontinuous phase transitions and partial synchronization in stochastic three-state oscillators*, [Phys. Rev. E](#) **76**, 041132 (2007).
- [19] T. Prager, M. Falcke, L. Schimansky-Geier e M. A. Zaks, *Non-Markovian approach to globally coupled excitable systems*, [Phys. Rev. E](#) **76**, 011118 (2007).
- [20] N. Kouvaris, F. Müller e L. Schimansky-Geier, *Ensembles of excitable two-state units with delayed feedback*, [Phys. Rev. E](#) **82**, 061124 (2010).
- [21] F. Rozenblit e M. Copelli, *Collective oscillations of excitable elements: order parameters, bistability and the role of stochasticity*, [Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment](#) **2011**, P01012 (2011).
- [22] V. R. Assis e M. Copelli, *Collective behavior of coupled nonuniform stochastic oscillators*, [Physica A: Statistical Mechanics and its Applications](#) **391**, 1900 (2012).
-

-
- [23] D. Escaff, A. Rosas, R. Toral e K. Lindenberg, *Synchronization of coupled noisy oscillators: Coarse graining from continuous to discrete phases*, [Phys. Rev. E](#) **94**, 052219 (2016).
- [24] D. J. Jörg, *Stochastic Kuramoto oscillators with discrete phase states*, [Phys. Rev. E](#) **96**, 032201 (2017).
- [25] I. L. D. Pinto, D. Escaff, U. Harbola, A. Rosas e K. Lindenberg, *Globally coupled stochastic two-state oscillators: Fluctuations due to finite numbers*, [Phys. Rev. E](#) **89**, 052143 (2014).
- [26] A. Rosas, D. Escaff, I. L. D. Pinto e K. Lindenberg, *Globally coupled stochastic two-state oscillators: synchronization of infinite and finite arrays*, [Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical](#) **49**, 095001 (2016).
- [27] A. Rosas, D. Escaff e K. Lindenberg, *Synchronization in Discrete Models*, in [Emerging Frontiers in Nonlinear Science](#), edited by P. Kevrekidis, J. Cuevas-Maraver e A. Saxena, Nonlinear Systems and Complexity, vol 32 (Springer, 2020) pp. 305–322.
- [28] W. Yu e K. B. Wood, *Synchronization and phase redistribution in self-replicating populations of coupled oscillators and excitable elements*, [Phys. Rev. E](#) **91**, 062708 (2015).
- [29] D. Lemons, [An introduction to stochastic processes in physics: containing “On the theory of Brownian motion” by Paul Langevin, translated by Anthony Gythiel](#) (Johns Hopkins University Press, 2002).
- [30] P. Langevin, *Sur la théorie du mouvement brownien*, [Compt. Rendus](#) **146**, 530 (1908).
- [31] A. Einstein, *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, [Annalen der Physik](#) **322**, 549 (1905).
- [32] A. D. Fokker, *Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld*, [Annalen der Physik](#) **348**, 810 (1914).
- [33] M. Planck, *Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie*, [Sitzber. Preuß. Akad. Wiss.](#) **24**, 324 (1917).
- [34] H. Risken e T. Frank, [The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications](#), Springer Series in Synergetics (Springer Berlin Heidelberg, 1996).
- [35] T. Tomé e M. De Oliveira, *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*, 2nd ed. (EDUSP, 2014).
- [36] R. Toral e P. Colet, [Stochastic Numerical Methods: An Introduction for Students and Scientists](#), Physics textbook (Wiley, 2014).
-

-
- [37] N. G. Van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry* (North-Holland, 2007).
- [38] H. Jeffreys, B. Jeffreys e B. Swirles, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge Mathematical Library (Cambridge University Press, 1999).
- [39] S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Studies in Nonlinearity (Avalon Publishing, 2014).
- [40] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 3rd ed., Applied Mathematical Sciences 112 (Springer, 2004).
- [41] D. P. Landau e K. Binder, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*, 3rd ed. (Cambridge University Press, 2009).
- [42] M. Newman e G. Barkema, *Monte Carlo methods in statistical physics* (Oxford University Press: New York, USA, 1999).
- [43] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer Series in Synergetics (Springer Berlin Heidelberg, 2012).
- [44] H. Daido, *Discrete-Time Population Dynamics of Interacting Self-Oscillators*, *Progress of Theoretical Physics* **75**, 1460 (1986).
- [45] H. Daido, *Scaling behaviour at the onset of mutual entrainment in a population of interacting oscillators*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **20**, L629 (1987).
- [46] H. Daido, *Intrinsic Fluctuation and Its Critical Scaling in a Class of Populations of Oscillators with Distributed Frequencies*, *Progress of Theoretical Physics* **81**, 727 (1989).
- [47] H. Daido, *Intrinsic fluctuations and a phase transition in a class of large populations of interacting oscillators*, *Journal of Statistical Physics* **60**, 753 (1990).
- [48] S. H. Strogatz e R. E. Mirollo, *Stability of incoherence in a population of coupled oscillators*, *Journal of Statistical Physics* **63**, 613 (1991).
- [49] A. Mikhailov e V. Calenbuhr, *From Cells to Societies: Models of Complex Coherent Action*, Springer Series in Synergetics (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002).
- [50] Q. Yang, B. F. Pando, G. Dong, S. S. Golden, e A. van Oudenaarden, *Circadian gating of the cell cycle revealed in single cyanobacterial cells*, *Science* **327**, 1522 (2010).
-

-
- [51] Y. Emelianova, A. Kuznetsov, I. Sataev e L. Turukina, *Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators*, [Physica D: Nonlinear Phenomena](#) **244**, 36 (2013).
- [52] A. Rosas, J. Cisternas, D. Escaff, I. L. D. Pinto e K. Lindenberg, *Synchronization and fluctuations: Coupling a finite number of stochastic units*, [Phys. Rev. E](#) **101**, 062140 (2020).
- [53] P. D. Pinto, F. A. Oliveira e A. L. A. Penna, *Thermodynamics aspects of noise-induced phase synchronization*, [Phys. Rev. E](#) **93**, 052220 (2016).
- [54] P. D. Pinto, A. L. A. Penna e F. A. Oliveira, *Critical behavior of noise-induced phase synchronization*, [EPL \(Europhysics Letters\)](#) **117**, 50009 (2017).
- [55] N. Crokidakis e C. Anteneodo, *Role of conviction in nonequilibrium models of opinion formation*, [Phys. Rev. E](#) **86**, 061127 (2012).
- [56] S. Biswas, A. Chatterjee e P. Sen, *Disorder induced phase transition in kinetic models of opinion dynamics*, [Physica A: Statistical Mechanics and its Applications](#) **391**, 3257 (2012).
- [57] A. R. Vieira, A. F. Peralta, R. Toral, M. S. Miguel e C. Anteneodo, *Pair approximation for the noisy threshold q -voter model*, [Phys. Rev. E](#) **101**, 052131 (2020).
- [58] M. O. Din, T. Danino, A. Prindle, M. Skalak, J. Selimkhanov, K. Allen, E. Julio, E. Atolia, L. S. Tsimring, S. N. Bhatia, *et al.*, *Synchronized cycles of bacterial lysis for in vivo delivery*, [Nature](#) **536**, 81 (2016).
- [59] T. Moy, I. L. Pinto e A. Rosas, *Finite number fluctuations in a three-state model with growing population*, [Physica A: Statistical Mechanics and its Applications](#) **555**, 124745 (2020).
- [60] A. J. Mathijssen, J. Culver, M. S. Bhamla e M. Prakash, *Collective intercellular communication through ultra-fast hydrodynamic trigger waves*, [Nature](#) **571**, 560 (2019).
- [61] K. Ragkousi, K. Marr, S. McKinney, L. Ellington e M. C. Gibson, *Cell-cycle-coupled oscillations in apical polarity and intercellular contact maintain order in embryonic epithelia*, [Current Biology](#) **27**, 1381 (2017).
- [62] R. Sarfati, J. Hayes, É. Sarfati e O. Peleg, *Spatiotemporal reconstruction of emergent flash synchronization in firefly swarms via stereoscopic 360-degree cameras*, [bioRxiv](#) **10.1101/2020.03.19.999227** (2020).
-