Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Desigualdades do Tipo Trudinger-Moser e Existência de Soluções para Equações Elípticas em $\mathbb{R}^2$

Maria Raiza Rodrigues Pereira

João Pessoa – PB
Dezembro de 2021

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Desigualdades do Tipo Trudinger-Moser e Existência de Soluções para Equações Elípticas em $\mathbb{R}^2$

por

Maria Raiza Rodrigues Pereira

sob a orientação da

Profª. Drª. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

João Pessoa – PB
Dezembro de 2021

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

P436d Pereira, Maria Raiza Rodrigues.
Desigualdades do tipo Trudinger-Moser e existência de soluções para equações elípticas em R2 / Maria Raiza Rodrigues Pereira. - João Pessoa, 2021.
66 f.

Orientação: Elisandra de Fátima Gloss Moraes.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Desigualdade de Trudinger-Moser. 3. Crescimento subcrítico. 4. Funções radiais. I. Moraes, Elisandra de Fátima Gloss. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por Larissa Silva Oliveira de Mesquita - CRB-15/746

Desigualdades do Tipo Trudinger-Moser e Existência de Soluções para Equações Elípticas em $\mathbb{R}^2$

por

Maria Raiza Rodrigues Pereira

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtençãao do título de mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada em 16 de Dezembro de 2021.

Banca Examinadora:

Elisandra F. Gloss de Moraes

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes – UFPB
(Orientadora)

Francisco Sibério B. Albuquerque

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque – UEPB

Uberlandio Batista Severo.

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo – UFPB

"Somente a Deus a glória".

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus. A minha família pelo apoio de sempre. Aos meus companheiros de curso que compartilharam os desafios e me ajudaram muito a ser uma estudante melhor, em especial, Raoni, Ranieri, Jessica, João, Joana e Graziele. À professora e orientadora Elisandra pelas importantes contribuições a este trabalho e por ter proporcionado uma excelente preparação para encarar os desafios deste trabalho. A todos os professores que contribuíram com meu desenvolvimento tanto na graduação quanto no mestrado. Enfim, ao CNPq e à Capes pelo importante apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho abordaremos uma classe de desigualdades do tipo Trudinger-Moser em subespaços de funções radiais com pesos logarítmicos definidos na bola unitária de $\mathbb{R}^2$. Como aplicação destas desigualdades, usando o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, provaremos a existência de soluções para uma classe de equações elípticas não homogêneas envolvendo não linearidade com crescimento subcrítico exponencial do tipo Trudinger-Moser. Posteriormente, ainda usando métodos variacionais, estudaremos problemas elípticos envolvendo termos não lineares subcríticos e definidos em todo o espaço $\mathbb{R}^2$.

Palavras-chave: Desigualdade de Trudinger-Moser, Crescimento subcrítico, Subespaço de funções radiais.

Abstract

In this work we will approach a class of inequalities of the Trudinger-Moser type in subspaces of radial functions with logarithmic weights defined in the unit ball of $\mathbb{R}^2$. As an application of these inequalities, using the Lagrange Multipliers Theorem, we will prove the existence of solutions for a class of non-homogeneous elliptic equations involving nonlinearity with subcritical exponential growth of the Trudinger-Moser type. Later, still using variational methods, we will study elliptic problems involving subcritical nonlinear terms, defined in whole space $\mathbb{R}^2$.

Keywords: Trudinger-Moser inequality, Subcritical growth, Radial function subspace.

Sumário

Introdução

Neste trabalho vamos estudar algumas desigualdades do tipo Trudinger-Moser e usaremos essas desigualdades para garantir algumas imersões dos espaços de Sobolev com peso. Esses resultados nos permitirão tratar de soluções para alguns problemas elípticos.

Inicialmente, com base no artigo de M. Calanchi e B. Ruf (veja [1]), vamos estudar uma classe de desigualdades do tipo Trudinger-Moser em subespaços de funções radiais com pesos logarítmicos na bola unitária B do $\mathbb{R}^2$, da forma

$$\sup_{||u||_{w,rad}\leq 1} \int_B e^{\alpha |u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx < \infty, \tag{1}$$

quando, $\alpha \leq \alpha_\beta = 2[2\pi(1-\beta)]^{\frac{1}{1-\beta}}$, onde $\beta \in [0,1)$ e w é um peso logarítmico. Esse tipo de desigualdades, começou a ser estudada por Trudinger [12], Yudovich [13], Pohozaev [11], onde consideraram $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado, $H_0^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev usual, e mostraram que a função $f(t) = e^{|t|^{\frac{N}{N-1}}}$ é a função com crescimento máximo de modo que

$$\int_\Omega f(u)dx < \infty, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Este resultado foi melhorado por Moser que provou o seguinte:

Teorema 0.1. *Seja $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ com*

$$\int_\Omega |\nabla u|^N dx \leq 1.$$

Então, existe uma constante C tal que

$$\int_\Omega e^{\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}} dx \leq C|\Omega|, \quad \alpha \leq \alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}, \tag{2}$$

onde ω_{N-1} é a medida de superfície (N-1)-dimensional da esfera unitária a integral é finita para qualquer α positivo, mas α_N é ótimo no sentido de que $\alpha > \alpha_N$ então (2) pode ser grande por escolhas adequadas de u.

Depois de provarmos a desigualdade apresentada em (1), vamos investigar a existência de soluções para equações da forma

$$\begin{cases} -div\,(w(x)\nabla u) = \frac{u^{\gamma-1}e^{\alpha u^{\gamma}}}{\int_B u^{\gamma}e^{\alpha u^{\gamma}}}, & \text{em B,} \\ \qquad\qquad\qquad u > 0 & \text{em B,} \\ \qquad\qquad\qquad u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \tag{3}$$

onde consideramos dois tipos de pesos logarítmicos.

Por fim, baseados no trabalho de J. M. do Ó, E. Medeiros e U. Severo (veja [2]), aplicaremos métodos variacionais em busca de existência e multiplicidade de soluções para problemas elípticos não homogêneos da forma

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) + h(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{4}$$

onde o termo não linear $f(s)$ tem um crescimento subcrítico por meio das desigualdades de Trudinger-Moser.

Nosso trabalho está dividido em três capítulos. No **Capítulo 1** estabeleceremos alguns resultados de imersão envolvendo espaços de Sobolev com peso logarítmico e algumas desigualdades do tipo Trudinger-Moser em tais espaços. Para isso, faz-se necessário a prova de um Lema Radial. Na sequência, provaremos os seguintes resultados:

Teorema 0.2. *Seja* $\beta \in [0,1)$ *e* $w = w_0(x) = \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{\beta}$ *ou* $w = w_1(x) = \left(\log \frac{e}{|x|}\right)^{\beta}$*. Então,*

a) $\displaystyle\int_B e^{|u|^{\gamma}}dx < \infty$ *para todo* $u \in H^1_{0,rad}(B,w)$ *se, e somente se,* $\gamma \leq \overline{\gamma} = \frac{2}{1-\beta}$*.*

b) $\displaystyle\sup_{||u||_{w,rad}\leq 1} \int_B e^{\alpha|u|^{\frac{2}{1-\beta}}}dx < \infty$ *se, e somente se,* $\alpha \leq \alpha_\beta = 2[2\pi(1-\beta)]^{\frac{1}{1-\beta}}$*.*

Proposição 0.1. *Seja* $\beta > 1$*. Então temos a seguinte imersão*

$$H^1_{0,rad}(B,w_1) \hookrightarrow L^{\infty}(B).$$

No **Capítulo 2** buscaremos soluções para equação (3). Para garantirmos a existência da solução para o problema, iremos mostrar que

$$S_{\alpha,\gamma} := \sup_{u\in H^1_{0,rad}(B,w);||u||_w\leq 1} \int_B \left(e^{\alpha|u|^{\gamma}} - 1\right)dx,$$

é atingido por uma função radial, nos casos em que onde $\gamma = \overline{\gamma}$ e $\alpha \in (0,\alpha_\beta]$ ou $\gamma < \overline{\gamma}$ e $\alpha > 0$. Ou seja, estamos considerando o caso subcrítico com relação à desigualdade do tipo Trudinger-Moser. Em seguida, usaremos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para obter a solução desejada.

Por fim, no **Capítulo 3** estudaremos a existência e multiplicidade de soluções para o problema elíptico não homogêneo (4). Para isso, iremos supor que o termo não linear $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, com uma condição adequada na origem, que satisfaz a condição de Ambrosetti e Rabinowitz e que tem crescimento subcrítico exponencial. Supomos que a função $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua, tem ínfimo positivo e $[V(x)]^{-1}$ está em L^1. Com essas condições do termo f e da função V, o funcional associado ao problema possui a geometria do Passo da Montanha. Com isso, para $||h||_{H^{-1}}$ suficientemente pequena, o problema possui uma solução de energia positiva e, usando o Princípio Variacional de Ekeland, chegamos à existência de uma solução com energia negativa. Portanto, garantimos a multiplicidade da solução para $||h||_{H^{-1}}$ pequena.

Capítulo 1

Desigualdades do tipo Trudinger-Moser em espaços de Sobolev com peso logarítmico

Neste capítulo, baseado no artigo de Calanchi e Ruf (veja [1]), iremos estabelecer alguns resultados de imersão envolvendo espaços de Sobolev com peso e algumas desigualdades do tipo Trudinger-Moser em tais espaços. Para isso, será necessário fazermos algumas considerações iniciais. Sejam $H_0^1(B,w)$ o espaço de Sobolev com o peso w, onde $B = B_1(0)$ e sua norma é dada por

$$||u||_w = \left(\int_B |\nabla u|^2\, w(x)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

e $H^1_{0,rad}(B,w)$ o subespaço correspondente das funções radiais. Ao longo deste e do próximo capítulo, o peso w considerado será

$$w_0(x) = \left(\log\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)^{\beta}, \quad 0 \leq \beta < 1.$$

ou

$$w_1(x) = \left(\log\left(\frac{e}{|x|}\right)\right)^{\beta}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Começamos o estudo provando um lema radial, Lema 1.1. Depois disso, no Teorema 1.1 veremos que

$$\int_B e^{|u|^\gamma} dx < \infty, \quad \text{para todo} \quad u \in H^1_{0,rad}(B,w),$$

para cada $\beta \in [0,1)$ e $\gamma \leq \overline{\gamma} = \frac{2}{1-\beta}$. Além disso, sob certas condições adicionais, obtemos uma estimativa uniforme. Considerando $\beta > 1$ e $w = w_1$, na Proposição 1.1 mostraremos que

$$H^1_{0,rad}(B,w_1) \hookrightarrow L^\infty(B).$$

Para $\beta = 1$, no Teorema 1.2 veremos que é possível obter um crescimento duplo exponencial. Mais precisamente,

$$\int_B e^{e^{|u|^2}} dx < \infty, \quad \text{para todo} \quad u \in H^1_{0,rad}(B, w_1).$$

Também obtemos uma estimativa uniforme neste caso.

1.1 Lema Radial

Esta seção será dedicada à prova de um lema radial, que nos permite estimar o módulo $|u(x)|$ em função do peso w e da norma $||u||_w$ para funções simétricas em $u \in C^1_0(B)$.

Lema 1.1. *Seja $u \in C^1_0(B)$ uma função radialmente simétrica. Então,*

i) *Se $w = w_0(x) = |\log|x||^\beta$, com $0 \leq \beta < 1$ tem-se:*

$$|u(x)| \leq \frac{|\log|x||^{\frac{1-\beta}{2}}}{\sqrt{2\pi(1-\beta)}} ||u||_w, \qquad \forall x \in B.$$

ii) *Se $w = w_1(x) = \left|\log\left(\frac{e}{|x|}\right)\right|^\beta$, com $\beta \neq 1$ tem-se:*

$$|u(x)| \leq \frac{|[\log\left(\frac{e}{|x|}\right)]^{1-\beta} - 1|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi|1-\beta|}} ||u||_w, \qquad \forall x \in B.$$

iii) *Se $w = w_1(x) = \left|\log\left(\frac{e}{|x|}\right)\right|$, ou seja, $\beta = 1$, tem-se:*

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \log^{\frac{1}{2}}\left(\log\left(\frac{e}{|x|}\right)\right) ||u||_w, \ \ \forall x \in B.$$

Demonstração. Seja $u \in C^1_0(B)$ uma função radialmente simétrica. Temos $u(x) = v(|r|)$ para alguma função $v \in C^1([0,1])$ com $v(1) = 0$, onde $r(x) = |x| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$. Daí

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{|x|}.$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = v'(r(x))\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = v'(|x|)\frac{x_i}{|x|},$$

o que nos dá,

$$|\nabla u(x)|^2 = (v'(|x|))^2 \frac{1}{|x|^2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) = (v'(r))^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} ||u||_w^2 &= \int_B |\nabla u|^2 |\log|x||^\beta dx = \int_0^1 \left(\int_{\partial B_r(0)} |\nabla u|^2 |\log|x||^\beta dS \right) dr \\ &= \int_0^1 (v'(r))^2 |\log r|^\beta \left(\int_{\partial B_r(0)} dS \right) dr \\ &= 2\pi \int_0^1 v'(r)^2 |\log r|^\beta r dr. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Com isso em mente, vamos à prova do lema.

i) Para $\beta < 1$ e $w = w_0(x) = |\log|x||^\beta$, temos

$$\begin{aligned} |u(x)| &= |v(|x|) - v(1)| = \left| \int_1^{|x|} v'(t)dt \right| \leq \int_{|x|}^1 |v'(t)|dt \\ &= \int_{|x|}^1 |v'(t)| t^{\frac{1}{2}} |\log t|^{\frac{\beta}{2}} t^{-\frac{1}{2}} |\log t|^{-\frac{\beta}{2}} dt \\ &\leq \left(\int_{|x|}^1 |v'(t)|^2 t |\log t|^\beta dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|x|}^1 \frac{1}{t} \frac{1}{|\log t|^\beta} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(2\pi \int_0^1 (v'(t))^2 t |\log t|^\beta dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|x|}^1 \frac{1}{t} \frac{1}{|\log t|^\beta} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz (ver Proposição A.5 no Apêndice). Uma vez que

$$\int_{|x|}^1 \frac{1}{t} \frac{1}{|\log t|^\beta} dt = \int_{\log|x|}^0 \frac{1}{|u|^\beta} du = \int_{\log|x|}^0 |u|^{-\beta} du = \frac{|\log|x||^{1-\beta}}{1-\beta},$$

usando (1.1) concluímos que

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{|\log|x||^{1-\beta}}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{2}} ||u||_w \leq \frac{|\log|x||^{\frac{1-\beta}{2}}}{\sqrt{2\pi(1-\beta)}} ||u||_w.$$

ii) Agora, consideremos $\beta \neq 1$ e o peso $w = w_1(x) = \left|\log\left(\frac{e}{|x|}\right)\right|^\beta$. De modo análogo ao que vimos em **i)**, para $x \in B$ temos

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= |v(|x|) - v(1)| = \left| \int_1^{|x|} v'(t)dt \right| \leq \int_{|x|}^1 |v'(t)|dt \\
&= \int_{|x|}^1 |v'(t)| t^{\frac{1}{2}} \left| \log\left(\frac{e}{t}\right) \right|^{\frac{\beta}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \left| \log\left(\frac{e}{t}\right) \right|^{\frac{-\beta}{2}} dt \\
&\leq \left(\int_{|x|}^1 |v'(t)|^2 t \left| \log\left(\frac{e}{t}\right) \right|^{\beta} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|x|}^1 \frac{1}{t} \frac{1}{|\log(\frac{e}{t})|^{\beta}} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||u||_w \left[\left(\frac{|\log(\frac{e}{t})|^{1-\beta}}{|1-\beta|} \right)_1^{|x|} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{|[\log(\frac{e}{|x|})]^{1-\beta} - 1|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi|1-\beta|}} ||u||_w.
\end{aligned}$$

iii) Para $\beta = 1$ e $w = w_1(x) = \left|\log\left(\frac{e}{|x|}\right)\right|^{\beta}$, como em **ii)** vemos que

$$|u(x)| \leq \left(\int_{|x|}^1 |v'(t)|^2 t \left| \log\left(\frac{e}{t}\right) \right| dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|x|}^1 \frac{1}{t} \frac{1}{|\log(\frac{e}{t})|} dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Desse modo,

$$\left(\int_{|x|}^1 \frac{1}{t} \frac{1}{|\log(\frac{e}{t})|} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(- \int_{\log\left(\frac{e}{|x|}\right)}^1 \frac{1}{|u|} du \right)^{\frac{1}{2}} = \left([\log|u|]_1^{\log\left(\frac{e}{|x|}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} = \log^{\frac{1}{2}} \left(\log\left(\frac{e}{|x|}\right) \right).$$

Consequentemente,

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||u||_w \log^{\frac{1}{2}} \left(\log\left(\frac{e}{|x|}\right) \right), \quad \forall x \in B,$$

como afirmamos. ∎

1.2 Desigualdades para $\beta \in [0, 1)$

O primeiro resultado que apresentamos aqui trata da integral da exponencial de potências de funções de $H^1_{0,rad}(B, w)$ para $\beta \in [0, 1)$.

Teorema 1.1. *Seja $\beta \in [0,1)$ e $w = w_0(x) = \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{\beta}$ ou $w = w_1(x) = \left(\log \frac{e}{|x|}\right)^{\beta}$. Então,*

a) $\displaystyle\int_B e^{|u|^{\gamma}} dx < \infty$ *para todo $u \in H^1_{0,rad}(B, w)$ se, e somente se, $\gamma \leq \overline{\gamma} = \frac{2}{1-\beta}$.*

b) $\displaystyle\sup_{||u||_{w,rad} \leq 1} \int_B e^{\alpha|u|^{\frac{2}{1-\beta}}} dx < \infty$ *se, e somente se, $\alpha \leq \alpha_{\beta} = 2[2\pi(1-\beta)]^{\frac{1}{1-\beta}}$.*

Demonstração. Considere inicialmente o caso $w = w_0(x) = |\log|x||^{\beta}$ e $u \in C^1_{0,rad}(B)$. Por densidade, vemos que o resultado vale para $u \in H^1_{0,rad}(B)$. Assumiremos $u \geq 0$, caso contrário, usaremos $|u|$. Seja t a variável dada por

$$|x| = e^{-\frac{t}{2}}.$$

Como u é radial, temos $u(x) = v(r)$ e vale (1.1). Considere a mudança de variáveis,

$$\psi(t) = 2^{\frac{1-\beta}{2}}[2\pi(1-\beta)]^{\frac{1}{2}}u(x), \quad |x| = e^{-\frac{t}{2}}. \tag{1.3}$$

Tomando $C_\beta = 2^{\frac{1-\beta}{2}}[2\pi(1-\beta)]^{\frac{1}{2}}$, temos

$$\psi(t) = C_\beta u(x) = C_\beta v(r(x)) = C_\beta v(|x|) = C_\beta v(e^{-\frac{t}{2}}). \tag{1.4}$$

Logo,

$$\psi'(t) = C_\beta v'\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)e^{-\frac{t}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{C_\beta v'\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)e^{-\frac{t}{2}}}{2}. \tag{1.5}$$

Note que de (1.5), temos

$$v'\left(e^{-\frac{t}{2}}\right) = -\frac{2\psi'(t)}{C_\beta e^{-\frac{t}{2}}} = -\frac{2\psi'(t)e^{\frac{t}{2}}}{C_\beta}.$$

Daí,

$$\left(v'\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)\right)^2 = \frac{4(\psi'(t))^2e^t}{C_\beta^2}.$$

Observe que

$$r = e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow \log(r) = -\frac{t}{2} \Rightarrow |\log r|^{\beta} = \frac{t^{\beta}}{2^{\beta}} \qquad e \qquad dr = -\frac{e^{\frac{-t}{2}}}{2}dt.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} ||u||_w^2 &= 2\pi\int_0^1 v'(r)^2|\log r|^{\beta}rdr = -\frac{8\pi}{2C_\beta^2 2^{\beta}}\int_\infty^0 (\psi'(t))^2e^t t^{\beta}e^{-\frac{t}{2}}e^{-\frac{t}{2}}dt \\ &= \frac{4\pi}{C_\beta^2 2^{\beta}}\int_0^\infty (\psi'(t))^2t^{\beta}dt = \int_0^\infty \frac{(\psi'(t))^2t^{\beta}}{(1-\beta)}dt. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Por outro lado, usando a mudança de variáveis $r = e^{-\frac{t}{2}}$ como acima, obtemos

$$\begin{aligned} \int_B e^{\alpha|u(x)|^{\gamma}}dx &= \int_0^1\left(\int_{\partial B_r} e^{\alpha|v(r)|^{\gamma}}dS\right)dr = \int_0^1 e^{\alpha|v(r)|^{\gamma}}\left(\int_{\partial B_r}dS\right)dr \\ &= \int_0^1 e^{\alpha|v(r)|^{\gamma}}2\pi rdr = 2\pi\int_0^1 e^{\alpha|v(r)|^{\gamma}}rdr \\ &= \pi\int_0^\infty e^{\frac{\alpha}{C_\beta^{\gamma}}|\psi|^{\gamma}-t}dt. \end{aligned} \tag{1.7}$$

a) Considerando $\alpha = 1$ e os conjuntos

$$X = \{x \in B; 0 \leq u(x) < 1\} \;\; e \;\; Y = \{x \in B; u(x) \geq 1\},$$

temos

$$\int_B e^{|u(x)|^\gamma} dx = \int_{B\cap X} e^{|u(x)|^\gamma} dx + \int_{B\cap Y} e^{|u(x)|^\gamma} dx \leq \pi e + \int_B e^{|u(x)|^{\overline{\gamma}}} dx.$$

Com isso, basta estimar a integral com $\gamma = \overline{\gamma}$. Denotando $\overline{\alpha} = 1/C_\beta^{\overline{\gamma}}$ e usando (1.6)-(1.7) , precisamos mostrar que

$$\int_0^\infty e^{\overline{\alpha}|\psi(t)|^{\overline{\gamma}} - t} dt < \infty,$$

para toda ψ tal que $\int_0^\infty (\psi'(t))^2 t^\beta dt < \infty$, para garantirmos a condição suficiente do item a). Uma vez que $\int_0^\infty (\psi'(t))^2 t^\beta dt < \infty$, dado $\epsilon > 0$ existe $T = T(\epsilon)$ tal que

$$\int_T^\infty \frac{(\psi'(t))^2 t^\beta}{(1-\beta)} dt < \epsilon^2.$$

Logo, usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \psi(T) + \int_T^t \psi'(s) ds = \psi(T) + \int_T^t \psi'(s) s^{\frac{\beta}{2}} s^{-\frac{\beta}{2}} ds \\
&\leq \psi(T) + \left(\int_T^t |\psi'(s)|^2 s^\beta ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_T^t s^{-\beta} ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \psi(T) + \left(\int_T^t \frac{|\psi'(s)|^2 s^\beta}{1-\beta} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(t^{1-\beta} - T^{1-\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \psi(T) + \epsilon \left(t^{1-\beta} - T^{1-\beta} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad .
\end{aligned}$$

para todo $t \geq T$. Isso implica que existe $\overline{T} \geq T$ tal que $\overline{\alpha}\psi^{\frac{2}{1-\beta}}(t) < t/2$ para todo $t \geq \overline{T}$.

Então,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{\overline{\alpha}|\psi|^{\frac{2}{1-\beta}} - t} dt &= \int_0^{\overline{T}} e^{\overline{\alpha}|\psi|^{\frac{2}{1-\beta}} - t} dt + \int_{\overline{T}}^\infty e^{\overline{\alpha}|\psi|^{\frac{2}{1-\beta}} - t} dt \\
&< \int_0^{\overline{T}} e^{\overline{\alpha}|\psi|^{\frac{2}{1-\beta}} - t} dt + \int_{\overline{T}}^\infty e^{\frac{t}{2} - t} dt \\
&= \int_0^{\overline{T}} e^{\overline{\alpha}|\psi|^{\frac{2}{1-\beta}} - t} dt + \int_{\overline{T}}^\infty e^{-\frac{t}{2}} dt \\
&= \int_0^{\overline{T}} e^{\overline{\alpha}|\psi|^{\frac{2}{1-\beta}} - t} dt + 2e^{-\frac{\overline{T}}{2}} \\
&< \int_0^{\overline{T}} e^{\overline{\alpha}|\psi|^{\frac{2}{1-\beta}} - t} dt + C < \infty. \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Portanto, a integral é finita e com isso provamos a condição suficiente do item a).

Reciprocamente, suponhamos que $\gamma = \overline{\gamma} + \epsilon$ com $\epsilon > 0$. Lembremos que $\overline{\gamma} = 2/(1-\beta)$. Considere a seguinte função

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{\overline{\gamma}}-\eta} & \text{se} \quad t \geq 1, \\ t, & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

onde $\eta > 0$ é escolhido de modo que

$$\overline{\eta} := (\overline{\gamma} + \epsilon)\left(\frac{1}{\overline{\gamma}} - \eta\right) - 1 > 0. \tag{1.9}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (\varphi'(t))^2 t^\beta dt &= \int_0^1 (\varphi'(t))^2 t^\beta dt + \int_1^\infty (\varphi'(t))^2 t^\beta dt \\ &= \int_0^1 t^\beta dt + \frac{(1-\beta-2\eta)^2}{4} \int_1^\infty t^{-1-\beta-2\eta} t^\beta dt \\ &= \int_0^1 t^\beta dt + \frac{(1-\beta-2\eta)^2}{4} \int_1^\infty t^{-1-2\eta} dt \\ &= \frac{1}{(1+\beta)} + \frac{(1-\beta-2\eta)^2}{8\eta} < \infty. \end{aligned}$$

Observe que de (1.9) temos que $\overline{\alpha} t^{\gamma(\frac{1}{\overline{\gamma}}-\eta)} - t = \overline{\alpha} t^{1+\overline{\eta}} - t = t(\overline{\alpha} t^{\overline{\eta}} - 1)$. Já que $\overline{\eta} > 0$, existe $T > 1$ suficientemente grande, de modo que

$$\overline{\alpha} t^{\overline{\eta}} - 1 \geq \overline{\alpha} T^{\overline{\eta}} - 1 \geq 1, \quad \forall t \geq T.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{\overline{\alpha}\varphi^\gamma - t} dt &> \int_T^\infty e^{\overline{\alpha} t^{\gamma\left(\frac{1}{\overline{\gamma}}-\eta\right)} - t} dt = \int_T^\infty e^{\overline{\alpha} t^{1+\overline{\eta}} - t} dt \\ &= \int_T^\infty e^{t(\overline{\alpha} t^{\overline{\eta}} - 1)} dt > \int_T^\infty e^t dt = \infty. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Com isso, usando (1.6) e (1.7), vemos que a função u associada a φ através de (1.3) tem $||u||_w < \infty$ mas $\int e^{|u(x)|^\gamma} dx = \infty$, onde $\gamma > \overline{\gamma}$. Concluímos assim o item a) para $w = w_0$.

b) Com argumentos similares aos usados no início da prova do item a) vemos que é suficiente provar o caso em que $\gamma = \overline{\gamma}$. Note que pelo Lema Radial 1.1, se $||u||_w \leq 1$, temos

$$|u(x)| \leq \frac{|\log|x||^{\frac{1-\beta}{2}}}{\sqrt{2\pi(1-\beta)}} ||u||_w \leq \frac{|\log|x||^{\frac{1-\beta}{2}}}{\sqrt{2\pi(1-\beta)}} \leq \frac{|\log|x||^{\frac{1-\beta}{2}}}{[2\pi(1-\beta)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Daí, lembrando que ψ é dada por (1.3), temos

$$\begin{aligned}
0 \leq \psi(t) &\leq C_\beta |u(x)| \leq C_\beta \frac{|\log|x||^{\frac{1-\beta}{2}}}{[2\pi(1-\beta)]^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq 2^{\frac{1-\beta}{2}} |\log|x||^{\frac{1-\beta}{2}} = |2\log|e^{-\frac{t}{2}}||^{\frac{1-\beta}{2}} \\
&= |\log(e^{-t})|^{\frac{1-\beta}{2}} = t^{\frac{1-\beta}{2}}, \quad \forall t \geq 0. \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

Consequentemente, para $\overline{\gamma} = 2/(1-\beta)$ e $\alpha < \alpha_\beta$, tomando $\overline{\alpha} = \alpha/C_\beta^{\overline{\gamma}}$, ou seja, $\overline{\alpha} = (\alpha/\alpha_\beta) < 1$, concluímos que

$$\int_0^\infty e^{\overline{\alpha}\psi^{\overline{\gamma}} - t} dt \leq \int_0^\infty e^{\overline{\alpha}t - t} dt = \frac{1}{1-\overline{\alpha}} < \infty.$$

Com isso, usando (1.11), temos a condição suficiente do item $b)$ se $\alpha < \alpha_\beta$. Para o caso $\alpha = \alpha_\beta$, o que nos dá $\overline{\alpha} = 1$, precisamos mostrar que existe $M > 0$ tal que

$$\int_0^\infty \frac{|\psi'|^2 t^\beta}{1-\beta} dt \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty e^{-t+\psi^\gamma} dt \leq M.$$

Para isso, considere as seguintes mudanças de variáveis

$$t = s^{\frac{1}{1-\beta}} \qquad \rho(s) = \psi(s^{\frac{1}{1-\beta}}). \qquad (1.12)$$

Consequentemente, queremos mostrar que existe $C > 0$ tal que

$$\forall \rho : \int_0^\infty |\rho'(s)|^2 ds \leq 1 \Rightarrow \int_0^\infty e^{-s^{\frac{1}{1-\beta}} + \rho^\gamma(s)} d\mu(s) \leq M,$$

onde $d\mu$ é a medida induzida por $\mu(s) = s^{\frac{1}{1-\beta}}$, ou seja, $d\mu(s) = \left(s^{\frac{1}{1-\beta}}\right)' ds$. Para $\lambda > 0$, consideramos $E_\lambda = \{s \in [0,\infty) : e^{-s^{\frac{1}{1-\beta}} + \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s)} > \lambda\}$. Note que

$$\begin{aligned}
E_\lambda &= \{s \in [0,\infty) : e^{-s^{\frac{1}{1-\beta}} + \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s)} > \lambda\} \\
&= \{s \in [0,\infty) : -s^{\frac{1}{1-\beta}} + \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s) > \log(\lambda)\} \\
&\subset \{s \in [0,\infty) : s^{\frac{1}{1-\beta}} - \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s) \leq -\log(\lambda)\}. \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Observe que para $t = s^{\frac{1}{1-\beta}}$, temos por (1.11) que

$$\psi\left(s^{\frac{1}{1-\beta}}\right) \leq \left(s^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{\frac{1-\beta}{2}} \Rightarrow \rho(s) \leq s^{\frac{1}{2}} \Rightarrow -s^{\frac{1}{1-\beta}} + \rho(s)^{\frac{2}{1-\beta}} \leq 0 \Rightarrow e^{-s^{\frac{1}{1-\beta}} + \rho(s)^{\frac{2}{1-\beta}}} \leq 1, \quad \forall s \geq 0.$$

Ou seja, $E_\lambda = \emptyset$ para $\lambda \geq 1$ pois, se $\lambda > 1$ não vai existir s que satisfaça $e^{-s^{\frac{1}{1-\beta}} + \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s)} > \lambda$.

Consideramos $\lambda \in (0,1)$ e $s_1, s_2 \in E_\lambda$ arbitrários com $s_2 \geq s_1$. Por (1.13) temos

$$\max_{j=1,2}[s_j^{\frac{1}{1-\beta}} - \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s_j)] \leq -\log(\lambda).$$

Pelo Lema 1.2 (resultado que apresentaremos a seguir), existe $M > 0$, independente de $s_1, s_2 \in E_\lambda$, tal que se $s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \geq M(-\log\lambda)$, então

$$s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \leq M(-\log\lambda). \tag{1.14}$$

Agora, escrevendo $m = -\log(\lambda)$, observe que

$$\begin{aligned}
\mu(E_\lambda) &= \int_{E_\lambda} d\mu(s) = \int_{E_\lambda\cap\{s<(Mm)^{1-\beta}\}} d\mu(s) + \int_{E_\lambda\cap\{s\geq(Mm)^{1-\beta}\}} d\mu(s)\\
&\leq \int_0^{(Mm)^{1-\beta}} d\mu(s) + \int_{E_\lambda\cap\{s\geq(Mm)^{1-\beta}\}} d\mu(s)\\
&= Mm + \int_{E_\lambda\cap\{s\geq(Mm)^{1-\beta}\}} d\mu(s). \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

Se $E_\lambda \cap \{s^{\frac{1}{1-\beta}} \geq Mm\} \neq \emptyset$, para quaisquer $s_2 \geq s_1$ deste conjunto, temos

$$0 \leq s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s^{\frac{1}{1-\beta}} \leq Mm \ \Rightarrow\ s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \leq s_2^{\frac{1}{1-\beta}} \leq Mm + s_1^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Isso garante que

$$I \leq s^{\frac{1}{1-\beta}} \leq Mm + I, \quad \forall s \in E_\lambda \cap \{s \geq (Mm)^{1-\beta}\}.$$

Onde $I = inf\left(E_\lambda \cap \{s \geq (Mm)^{1-\beta}\}\right)$. Consequentemente,

$$\int_{E_\lambda\cap\{s\geq(Mm)^{1-\beta}\}} d\mu(s) \leq \int_{I^{1-\beta}}^{(Mm+I)^{1-\beta}} d\mu(s) = \mu((Mm+I)^{1-\beta}) - \mu((I)^{1-\beta}) = Mm.$$

Por (1.15), concluímos que

$$\mu(E_\lambda) \leq Mm + Mm = 2M(-\log\lambda).$$

Logo,

$$\int_0^\infty e^{-s^{\frac{1}{1-\beta}}+\rho^\gamma(s)} d\mu(s) = \int_0^1 \mu(E_\lambda)d\lambda \leq 2M\int_0^1 (-\log\lambda)d\lambda \leq 2M,$$

Como queríamos. Assim, a condição necessária está provada.

Resta mostrar a condição suficiente. Para isso, relembremos que $\psi(t) = 2^{\frac{1-\beta}{2}}[2\pi(1-\beta)]^{\frac{1}{2}}u(x)$

e $|x| = e^{-\frac{t}{2}}$. Considere, a família de funções dada por

$$a_k(t) = \begin{cases} \frac{t^{1-\beta}}{k^{\frac{1-\beta}{2}}} & \text{se} \quad t \leq k, \\ k^{\frac{1-\beta}{2}}, & \text{se} \quad t \geq k. \end{cases}$$

Suponhamos que $\alpha > 2[2\pi(1-\beta)]^{\frac{1}{1-\beta}}$, ou seja, $\overline{\alpha} > 1$. Segue que,

$$\int_0^\infty e^{\overline{\alpha}|a_k|^\gamma - t}dt \geq \int_k^\infty e^{\overline{\alpha}|a_k|^\gamma - t}dt = \int_k^\infty e^{\overline{\alpha}k - t}dt = e^{\overline{\alpha}k}\int_k^\infty e^{-t}dt = e^{-t}e^{-k} = e^{(\overline{\alpha}-1)k}.$$

Fazendo $k \to \infty$, concluímos que $\int_0^\infty e^{\overline{\alpha}|a_k|^\gamma - t}dt \to \infty$.

Agora para $w_1 = (\log(e/|x|))^\beta$, note que

$$H_0^1(B, w_1) \hookrightarrow H_0^1(B, w_0),$$

pois,

$$||u||_{w_0}^2 = \int_B |\nabla u|^2 w_0(x)dx \leq \int_B |\nabla u|^2 w_1(x)dx = ||u||_{w_1}^2.$$

Dessa forma, se $||u||_{w_1} \leq 1$, então $||u||_{w_0} \leq 1$, logo a afirmação vale para $u \in H_0^1(B, w_1)$ com $||u||_{w_1} \leq 1$. Agora, falta mostrar que a limitação uniforme implica que $\alpha \leq \alpha_\beta$. Suponhamos que $\alpha > \alpha_\beta$, isto é, $\overline{\alpha} > 1$. Consideremos, a família de funções dada por

$$b_k(t) = \begin{cases} \frac{t^{1-\beta} - 2^{1-\beta}}{\left((k+2)^{1-\beta} - 2^{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}}, & \text{se} \quad 2 \leq t \leq k+2, \\ \left((k+2)^{1-\beta} - 2^{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{se} \quad t \geq k+2. \end{cases}$$

Logo, para $\overline{\alpha} > 1$

$$\int_0^\infty e^{\overline{\alpha}|b_k|^\gamma - t}dt \geq e^{\overline{\alpha}[(k+2)^{1-\beta} - 2^{1-\beta}]^{\frac{1}{1-\beta}}} \int_{k+2}^\infty e^{-t}dt = e^{\overline{\alpha}[(k+2)^{1-\beta} - 2^{1-\beta}]^{\frac{1}{1-\beta}} - (k+2)}.$$

Fazendo $k \to \infty$, concluímos que $\int_0^\infty e^{\overline{\alpha}|b_k|^\gamma - t}dt \to \infty$. ∎

Usando as notações e definições do teorema anterior, temos:

Lema 1.2. *Sejam $\lambda \in (0,1)$, $s_1, s_2 \in E_\lambda$, com $s_2 \geq s_1$ e $m > 0$ tais que*

$$\max_{j=1,2}[s_j^{\frac{1}{1-\beta}} - \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s_j)] \leq m,$$

para $\rho(s)$ dado em (1.12). Existe uma constante universal $C > 0$, tal que se $s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \geq Cm$, então

$$s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \leq Cm.$$

Demonstração. Iremos fazer a demonstração em duas etapas:

Etapa 1: $s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \geq 6m \Rightarrow s_2 \leq 4s_1$.

Como $\rho(s) = \psi(s^{\frac{1}{1-\beta}})$ e $\psi(t) = C_\beta u(x)$ com $|x| = e^{-\frac{t}{2}}$ e $u|_{\partial B} \equiv 0$, temos $\rho(0) = 0$. Daí,

$$m \geq s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s_1) \Rightarrow s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m \ \leq \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s_1) \leq \left(\int_0^{s_1} \rho'(s)ds\right)^{\frac{2}{1-\beta}}.$$

Pela Desigualdade de Hölder (ver Proposição A.2), temos

$$s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m \leq \left[\left(\int_0^{s_1} 1ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{s_1} |\rho'(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{1-\beta}} \leq s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\int_0^{s_1} |\rho'(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Por hipotése, $\int_0^\infty |\rho'(s)|^2 ds \leq 1$, ou seja, $\int_0^{s_1} |\rho'(s)|^2 ds + \int_{s_1}^\infty |\rho'(s)|^2 ds \leq 1$. Daí, concluímos que

$$s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m \leq s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \left(1 - \int_{s_1}^\infty |\rho'(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{1-\beta}}. \tag{1.16}$$

Como estamos supondo $s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \geq 6m$, em particular, temos $s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m \geq 0$. Dividindo (1.16) por $s_1^{\frac{1}{1-\beta}}$ obtemos

$$0 \leq 1 - \frac{m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}} \leq \left(1 - \int_{s_1}^\infty |\rho'(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{1-\beta}}. \tag{1.17}$$

Como $\beta \in [0, 1)$ temos $\frac{1}{1-\beta} \geq 1$ e daí $q^{\frac{1}{1-\beta}} \leq q$, para todo $q \in [0, 1]$. Consequentemente,

$$\int_{s_1}^\infty |\rho'(s)|^2 ds \leq \frac{m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}. \tag{1.18}$$

Note que, para todo $a, b \geq 0$, temos

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \ \ \Rightarrow \ \ a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geq 0 \Rightarrow a - b \leq 2\sqrt{a}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right). \tag{1.19}$$

Ainda por (1.17) e (1.19), segue que

$$\int_{s_1}^{\infty} |\rho'(s)|^2 ds \leq 1 - \left(1 - \frac{m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}\right)^{1-\beta} \leq 2\left[1 - \left(1 - \frac{m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}\right)^{\frac{1-\beta}{2}}\right]. \tag{1.20}$$

Se $s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \geq \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s_2)$, temos por hipótese

$$s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \geq 6m \geq 6(s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s_2)) \geq 6(s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}}),$$

e daí

$$\left(\frac{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}{6} + s_1^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{1-\beta} \geq s_2 \ \Rightarrow\ \left(s_1^{\frac{1}{1-\beta}}\left(\frac{1}{6}+1\right)\right)^{1-\beta} \geq s_2 \ \Rightarrow\ \left(\frac{7}{6}\right)^{1-\beta} s_1 \geq s_2.$$

Em particular, $4s_1 \geq s_2$. Suponhamos agora que $s_1^{\frac{1}{1-\beta}} < \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s_2)$. Uma vez que, $\sqrt{s_j} \geq \rho(s_j)$ onde $j = 1, 2$, temos $s_j^{\frac{1}{1-\beta}} \geq \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s_j)$. Daí, $\rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s_1) \leq s_1^{\frac{1}{1-\beta}} < \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s_2) < s_2^{\frac{1}{1-\beta}}$. Considere a função $G(\xi) = \xi^{\frac{2}{1-\beta}}$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\overline{\xi} \in (\sqrt{s_1}, \sqrt{s_2})$ e $\overline{\rho} \in (\rho(s_1), \rho(s_2))$ tais que

$$s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} = G'(\overline{\xi})(\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1})$$

$$\rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s_2) - \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s_1) = G'(\overline{\rho})(\rho(s_2) - \rho(s_1)).$$

Como $\beta \in [0, 1)$, temos que $2/(1-\beta) > 2$ e assim G é uma função convexa. Pela Proposição A.4 temos G' é crescente. Como $\overline{\xi} \geq \overline{\rho}$ temos que $G'(\overline{\xi}) \geq G'(\overline{\rho})$. Logo,

$$\begin{aligned} G'(\overline{\xi})(\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}) &= s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \ \leq\ m + \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s_2) - \rho^{\frac{2}{1-\beta}}(s_1) \\ &\leq m + G'(\overline{\rho})(\rho(s_2) - \rho(s_1)) \ \leq\ m + G'(\overline{\xi})(\rho(s_2) - \rho(s_1)). \end{aligned}$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a Desigualdade de Hölder, temos

$$G'(\overline{\xi})(\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}) \leq m + G'(\overline{\xi})\left(\int_{s_1}^{s_2} \rho'(s) ds\right) \leq m + G'(\overline{\xi})\left(\int_{s_1}^{\infty} |\rho'(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{s_1}^{s_2} 1 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por (1.18),

$$G'(\overline{\xi})(\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}) \leq m + G'(\overline{\xi})\left(\frac{m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{s_2 - s_1}.$$

Graças à desigualdade numérica (1.19),

$$s_2 - s_1 \leq 2\sqrt{s_2}(\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}) \ \Rightarrow\ \sqrt{s_2 - s_1} \leq \sqrt{2}\sqrt[4]{s_2}\sqrt{\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}}.$$

Segue que

$$G'(\overline{\xi})(\sqrt{s_2}-\sqrt{s_1}) \leq m + G'(\overline{\xi})\left(\frac{m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}\sqrt[4]{s_2}\sqrt{\sqrt{s_2}-\sqrt{s_1}}.$$

Pela Desigualdade de Young (ver Proposição A.1 no Apêndice), obtemos

$$G'(\overline{\xi})(\sqrt{s_2}-\sqrt{s_1}) \leq m + G'(\overline{\xi})\left\{\frac{m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}\sqrt{s_2}+\frac{1}{2}(\sqrt{s_2}-\sqrt{s_1})\right\}.$$

Dividindo a desigualdade acima por $G'(\overline{\xi})$ que é um número positivo, vemos que

$$(\sqrt{s_2}-\sqrt{s_1}) \leq \frac{m}{G'(\overline{\xi})}+\frac{m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}\sqrt{s_2}+\frac{1}{2}(\sqrt{s_2}-\sqrt{s_1}) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}(\sqrt{s_2}-\sqrt{s_1}) \leq \frac{m}{G'(\overline{\xi})}+\frac{m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}\sqrt{s_2}.$$

Note que, para $\overline{\xi} \in (\sqrt{s_1}, \sqrt{s_2})$, vale

$$\frac{G(\sqrt{s_1})}{\sqrt{s_1}} = \frac{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}{s_1^{\frac{1}{2}}} = s_1^{\frac{1+\beta}{2(1-\beta)}} \leq \overline{\xi}^{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \leq \frac{2}{1-\beta}\overline{\xi}^{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = G'(\overline{\xi}).$$

Segue daí, que

$$\frac{1}{2}(\sqrt{s_2}-\sqrt{s_1}) \;\leq\; \frac{m}{G'(\overline{\xi})}+\frac{m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}\sqrt{s_2} \;\leq\; \frac{m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}\sqrt{s_1}+\frac{m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}\sqrt{s_2}.$$

Consequentemente,

$$\sqrt{s_2}\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}\right) \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}\right)\sqrt{s_1}. \tag{1.21}$$

Multiplicando (1.21) por 6 e usando a hipotése de que $s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \geq 6m$, concluímos

$$2\sqrt{s_2} \leq \sqrt{s_2}\left(\frac{6}{2}-\frac{6m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}\right) \leq \left(\frac{6}{2}+\frac{6m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}\right)\sqrt{s_1} \leq 4\sqrt{s_1}.$$

Assim, $s_2 \leq 4s_1$ e com isso provamos a Etapa 1.

Etapa 2: $s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \geq 33m \Rightarrow s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \leq 33m.$

Usando os argumentos iniciais da etapa anterior temos

$$\begin{aligned} s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} &\leq m + G'(\bar{\xi})(\rho(s_2) - \rho(s_1)) = m + \frac{s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}{\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}}(\rho(s_2) - \rho(s_1)) \\ &\leq m + \frac{s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}{\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}} \left(\int_{s_1}^{\infty} |\rho'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{s_1}^{s_2} 1 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Por (1.20), temos

$$s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \leq m + \frac{s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}{\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}} 2 \left[1 - \left(1 - \frac{m}{s_1^{\frac{1}{1-\beta}}} \right)^{\frac{1-\beta}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{s_2} \sqrt{\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}}.$$

Multiplicando por $\sqrt[4]{s_1}/\sqrt[4]{s_1}$ o último termo do lado direito da equação, obtemos

$$s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \leq m + \frac{s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}{\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}} 2 \left[\sqrt{s_1} - \left(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m \right)^{\frac{1-\beta}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{\frac{s_2}{s_1}} \sqrt{\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}}.$$

Como $s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \geq 33m > 6m$, segue da Etapa 1 que $s_2 \leq 4s_1$. Daí

$$s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \leq m + \frac{s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}{\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}} 2\sqrt{2} \left[\sqrt{s_1} - \left(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m \right)^{\frac{1-\beta}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}}.$$

Pela Desigualdade de Young, com $a = 2\sqrt{2} \left[\sqrt{s_1} - \left(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m \right)^{\frac{1-\beta}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$ e $b = \sqrt{\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}}$

$$s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \leq m + \frac{s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}}}{\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}} 4 \left[\sqrt{s_1} - (s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m)^{\frac{1-\beta}{2}} \right] + \frac{1}{2}(s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}}).$$

Segue que

$$s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \leq 2m + 8(s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}}) \frac{\left[\sqrt{s_1} - (s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m)^{\frac{1-\beta}{2}} \right]}{\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}}.$$

Suponhamos, por contradição, que $s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \geq 33m$, ou seja, $\sqrt{s_2} \geq (33m + s_1^{\frac{1}{1-\beta}})^{\frac{1-\beta}{2}}$. Teríamos

$$s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \leq 2m + 8(s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}}) \frac{\sqrt{s_1} - (s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m)^{\frac{1-\beta}{2}}}{(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} + 33m)^{\frac{1-\beta}{2}} - \sqrt{s_1}}.$$

Estimando o quociente do lado direito, e considerando a função $H(x) = x^{\frac{1-\beta}{2}}$, temos

$$\frac{\sqrt{s_1} - (s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m)^{\frac{1-\beta}{2}}}{(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} + 33m)^{\frac{1-\beta}{2}} - \sqrt{s_1}} = \frac{H(s_1^{\frac{1}{1-\beta}}) - H(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m)}{H(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} + 33m) - H(s_1^{\frac{1}{1-\beta}})}.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Médio existem $\theta_1 \in (s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m, s_1^{\frac{1}{1-\beta}})$ e $\theta_2 \in (s_1^{\frac{1}{1-\beta}}, s_1^{\frac{1}{1-\beta}} + 33m)$ tais que

$$\frac{H(s_1^{\frac{1}{1-\beta}}) - H(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m)}{H(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} + 33m) - H(s_1^{\frac{1}{1-\beta}})} = \frac{H'(\theta_1)m}{H'(\theta_2)33m} = \frac{H'(\theta_1)}{33H'(\theta_2)}.$$

Como a função $H'(x) = \frac{1-\beta}{2}x^{\frac{-1-\beta}{2}}$ é não crescente, temos

$$\frac{H'(\theta_1)}{H'(\theta_2)} \leq \frac{H'(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m)}{H'(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} + 33m)} = \frac{(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} + 33m)^{\frac{1+\beta}{2}}}{(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m)^{\frac{1+\beta}{2}}}.$$

Com isso,

$$\frac{\sqrt{s_1} - (s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m)^{\frac{1-\beta}{2}}}{(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} + 33m)^{\frac{1-\beta}{2}} - \sqrt{s_1}} \leq \frac{1}{33}\frac{(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} + 33m)^{\frac{1+\beta}{2}}}{(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m)^{\frac{1+\beta}{2}}}.$$

Como por hipotése $s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \geq 33m$, vejamos que

$$\frac{1}{33}\frac{(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} + 33m)^{\frac{1+\beta}{2}}}{(s_1^{\frac{1}{1-\beta}} - m)^{\frac{1+\beta}{2}}} \leq \frac{1}{16}. \tag{1.23}$$

De fato, tomando $A = \left(\frac{33}{16}\right)^{\frac{2}{1+\beta}}$ temos $A > \frac{33}{16}$ pois $2/(1+\beta) > 1$ para $0 \leq \beta < 1$. Note que (1.23) equivale a

$$s_1^{\frac{1}{1-\beta}} + 33m \leq As_1^{\frac{1}{1-\beta}} - Am.$$

Daí,

$$(A-1)s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \geq (33 + A)m.$$

Segue,

$$s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \geq \frac{(33 + A)}{33(A-1)}33m. \tag{1.24}$$

Agora, veja que $\frac{33+A}{33(A-1)} < 1$ pois, $33+A < 33A-33$ o que implica $A > \frac{33}{16}$. Logo, para $s_1^{\frac{1}{1-\beta}} > 33m$ temos que (1.24) é válida e, consequentemente, (1.23) é satisfeta. Então

$$s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \leq 2m + 8(s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}})\frac{1}{16} \Rightarrow s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \leq 4m$$

o que é um absurdo, pois estamos supondo que $s_2^{\frac{1}{1-\beta}} - s_1^{\frac{1}{1-\beta}} \geq 33m$. Esta contradição conclui a

Etapa 2, e com isso temos a prova do lema, com $C = 33$. ■

1.3 Resultados de imersão para $H^1_{0,rad}(B, w_1)$, com $\beta \geq 1$

Nessa seção, trataremos do peso $w = w_1(x)$ para $\beta \geq 1$. O primeiro resultado que apresentaremos garante a imersão de $H^1_{0,rad}(B, w_1)$ em $L^\infty(B)$ quando $\beta > 1$.

Proposição 1.1. *Seja $\beta > 1$. Então, temos a seguinte imersão*

$$H^1_{0,rad}(B, w_1) \hookrightarrow L^\infty(B).$$

Demonstração. Para $u \in C^1_{0,rad}(B)$, devido ao Lema 1.1 temos

$$|u(x)| \leq \frac{|[log(\frac{e}{|x|})]^{1-\beta} - 1|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi|1-\beta|}}||u||_w = \frac{\left|\frac{1}{log(e/|x|)^{\beta-1}} - 1\right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi|\beta-1|}}||u||_w \leq \frac{||u||_w}{\sqrt{\pi|\beta-1|}}, \quad \forall\, |x| \in (0,1).$$

Seja agora $u \in H^1_{0,rad}(B, w_1)$. Existe $(u_m) \subset C^\infty_0(B)$, com u_m radialmente simétrica, tal que $u_m \to u$ em $H^1_0(B, w_1)$. Logo $u_m \to u$ em $H^1_0(B)$. Note que, para u_m vale

$$|u_m(x)| \leq \frac{||u_m||_w}{\sqrt{\pi|1-\beta|}}, \quad \forall x \in B.$$

Como $u_m \to u$ em $H^1_0(B)$, $u_m \to u$ q.t.p em B. Dessa forma, fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$|u(x)| \leq \frac{||u||_w}{\sqrt{\pi|1-\beta|}}, \quad q.t.p \quad em \quad B,$$

como desejado. ■

Agora, considerando $\beta = 1$, obtemos um crescimento do tipo duplo exponencial.

Teorema 1.2. *Seja $w(x) = log\left(\frac{e}{|x|}\right)$. Então,*

a) $\displaystyle\int_B e^{e^{u^2}} dx < \infty$ *para todo $u \in H^1_{0,rad}(B, w)$.*

b) $\displaystyle\sup_{||u||_w \leq 1, rad} \int_B e^{\alpha e^{2\pi u^2}} dx < \infty$ *se, e somente se, $\alpha \leq 2$.*

Demonstração. Considere $w(x) = log\left(\frac{e}{|x|}\right)$. Assumiremos $u \geq 0$, caso contrário, usaremos $|u|$. Seja t a variável dada por

$$|x| = e^{-t}.$$

Como u é radialmente simétrica, temos $u(x) = v(r)$ onde $r = r(x) = |x|$. Daí

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = v'(r(x))\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = v'(r(x))\frac{x_i}{r},$$

o que nos dá, $|\nabla u|^2 = (v'(r))^2$. Considere a mudança de variáveis

$$\psi(t) = \sqrt{2\pi}u(x), \quad |x| = e^{-t}. \tag{1.25}$$

Temos,

$$\psi(t) = \sqrt{2\pi}u(x) = \sqrt{2\pi}v(r(x)) = \sqrt{2\pi}v(|x|) = \sqrt{2\pi}v(e^{-t}). \tag{1.26}$$

Logo,

$$\psi'(t) = \sqrt{2\pi}v'\left(e^{-t}\right)e^{-t}(-1) = -\sqrt{2\pi}v'\left(e^{-t}\right)e^{-t}. \tag{1.27}$$

Pela Proposição A.6 segue

$$\begin{aligned} ||u||_{w_1} &= \int_B |\nabla u|^2 \left|\log\left(\frac{e}{|x|}\right)\right| dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\partial B_r(0)} |\nabla u|^2 \left|\log\left(\frac{e}{|x|}\right)\right| dS\right) dr \\ &= \int_0^1 (v'(r))^2 \,|\log(e) - \log(r)| \left(\int_{\partial B_r(0)} dS\right) dr \\ &= 2\pi \int_0^1 v'(r)^2 |1 - \log r| r dr. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Note que de (1.27) temos,

$$v'\left(e^{-t}\right) = -\frac{\psi'(t)}{\sqrt{2\pi}e^{-t}}.$$

Daí,

$$\left(v'\left(e^{-t}\right)\right)^2 = \frac{(\psi'(t))^2}{2\pi e^{-2t}}.$$

Observe que,

$$r = e^{-t} \Rightarrow \log(r) = -t \quad e \quad dr = -e^{-t}dt.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} ||u||_{w_1} &= 2\pi \int_0^1 (v'(r))^2 |1 - \log r| r dr = -2\pi \int_\infty^0 \left(v'(e^{-t})\right)^2 (1+t)e^{-2t}dt \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{(\psi'(t))^2}{2\pi e^{-2t}}(1+t)e^{-2t}dt = \int_0^\infty (\psi'(t))^2(1+t)dt. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Por outro lado, vemos que

$$
\begin{aligned}
\int_B e^{\alpha e^{2\pi u^2}} dx &= \int_0^1 \left(\int_{\partial B_r} e^{\alpha e^{2\pi u^2}} dS \right) dr = 2\pi \int_0^1 e^{\alpha e^{2\pi u^2}} r dr \\
&= 2\pi \int_0^\infty e^{\alpha e^{\psi^2(t)} - 2t} dt.
\end{aligned} \tag{1.30}
$$

Usando essas mudanças acima, vejamos as provas dos itens $a)$ e $b)$.

a) Para garantirmos o item $a)$, basta estimar a integral (1.30) com $\alpha = 1$, ou seja, queremos mostrar que

$$
\int_0^\infty e^{e^{\psi^2(t)} - 2t} dt < \infty,
$$

para toda ψ tal que $\int_0^\infty (\psi'(t))^2 (1+t) dt < \infty$. A finitude desta última integral nos diz que, dado $\epsilon > 0$ existe $T = T(\epsilon)$ tal que

$$
\int_T^\infty (\psi'(t))^2 (1+t) dt < \epsilon^2.
$$

Logo, usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$
\begin{aligned}
\psi(t) &= \psi(T) + \int_T^t \psi'(s) ds = \psi(T) + \int_T^t \psi'(s)(s+1)^{\frac{1}{2}}(s+1)^{-\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \psi(T) + \left(\int_T^t |\psi'(s)|^2 (1+s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_T^t (1+s)^{-1} ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \psi(T) + \left(\int_T^t |\psi'(s)|^2 (s+1) ds \right)^{\frac{1}{2}} (\ln(1+t) - \ln(1+T))^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \psi(T) + \epsilon \left(\ln(1+t) - \ln(1+T) \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall t \geq T.
\end{aligned}
$$

Isso implica que existe $\overline{T} \geq T$ tal que $e^{\psi^2(t)} < t$ para todo $t \geq \overline{T}$ e daí

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{e^{\psi^2(t)} - 2t} dt &= \int_0^{\overline{T}} e^{e^{\psi^2(t)} - 2t} dt + \int_{\overline{T}}^\infty e^{e^{\psi^2(t)} - 2t} dt \\
&< \int_0^{\overline{T}} e^{e^{\psi^2(t)} - 2t} dt + \int_{\overline{T}}^\infty e^{t - 2t} dt \\
&= \int_0^{\overline{T}} e^{e^{\psi^2(t)} - 2t} dt + \int_{\overline{T}}^\infty e^{-t} dt < \infty.
\end{aligned} \tag{1.31}
$$

Portanto, a integral é finita.

b) Note que, pelo Lema Radial, Lema 1.1, para $\beta = 1$ e $||u||_{w_1} \leq 1$ obtemos

$$
|u(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \log^{\frac{1}{2}} \left(\log \left(\frac{e}{|x|} \right) \right) ||u||_{w_1} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \log^{\frac{1}{2}} (1+t). \tag{1.32}
$$

Ou seja,

$$\frac{|\psi(t)|}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \log^{\frac{1}{2}}(1+t) \Rightarrow |\psi(t)| \leq \log^{\frac{1}{2}}(1+t) \Rightarrow \psi^2(t) \leq \log(1+t). \tag{1.33}$$

Para $\alpha < 2$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{\alpha e^{\psi^2(t)}-2t} dt &= \int_0^\infty e^{\alpha e^{\log(1+t)}-2t} dt = \int_0^\infty e^{\alpha+(\alpha-2)t} dt \\ &= e^\alpha \int_0^\infty e^{(\alpha-2)t} dt = \frac{1}{(2-\alpha)} \int_{-\infty}^0 e^s ds < \infty. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Agora para $\alpha = 2$, queremos provar que existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^\infty e^{2e^{\psi^2(t)}-2t} dt < C \text{ para toda } \psi \text{ com } \int_0^\infty (\psi'(t))^2(1+t)dt \leq 1. \tag{1.35}$$

Seja $G(t) = 2t + 2 - 2e^{\psi^2(t)}$. Observe que, $G(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$, pelo Lema Radial pois, $\psi^2(t) \leq \log(1+t)$. Seja $E_\lambda = \{t \geq 0 : G(t) \leq \lambda\}$. A afirmação acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\int_0^\infty |E_\lambda| e^{-\lambda} d\lambda < C. \tag{1.36}$$

Para mostrar a desigualdade (1.36) é suficiente provar que existem $S, M > 0$ tal que, se $x, y \in E_\lambda$, com $y + 1 \geq x + 1 \geq S\lambda$ então $|y - x| \leq M\lambda$ (em particular $|E_\lambda| \leq (S + M)\lambda$). Suponhamos $\lambda \geq 2$. Sejam $x, y \in E_\lambda$, com $y + 1 \geq x + 1 \geq S\lambda$ (S será escolhido mais tarde). Considere,

$$m = max\left\{x + 1 - e^{\psi^2(x)}, y + 1 - e^{\psi^2(y)}, 1\right\}.$$

Logo,

$$x + 1 - e^{\psi^2(x)} \leq m \Rightarrow x + 1 - m \leq e^{\psi^2(x)}.$$

Aplicando a função log na desigualdade acima, obtemos

$$\log[(x+1) - m] \leq \psi^2(x) = \left|\int_0^x \psi'(s)ds\right|^2 \leq \int_0^x |\psi'(s)|^2 (s+1)(s+1)^{-1} ds.$$

Pela desigualdade de Hölder temos,

$$\log[(x+1) - m] \leq \int_0^x |\psi'(s)|^2\big(s+1)ds \int_0^x \frac{1}{(s+1)} ds = \log(x+1) \int_0^x |\psi'(s)|^2\big(s+1)ds.$$

Por hipotése, $\int_0^\infty |\psi'(s)|^2(1+s)ds \leq 1$, ou seja, $\int_0^x |\psi'(s)|^2(1+s)ds + \int_x^\infty |\psi'(s)|^2(1+s)ds \leq 1$.

Daí, concluímos que

$$\log[(x+1)-m] \leq \log(x+1)\left[1-\int_x^{\infty}|\psi'(s)|^2(1+s)ds\right]. \tag{1.37}$$

Dividindo (1.37) por $\log(x+1)$, obtemos

$$\int_x^{\infty}|\psi'(s)|^2(1+s)ds \leq 1-\frac{\log[(x+1)-m]}{\log(x+1)}. \tag{1.38}$$

Etapa 1: Provaremos que se $x, y \in E_\lambda$, tal que $y+1 \geq x+1 \geq 11m$, então

$$\frac{\log(y+1)}{\log(x+1)} < 2. \tag{1.39}$$

Como vimos anteriormente,

$$\log[(y+1)-m] \leq \psi^2(y) \Rightarrow \log[(y+1)-m] \leq \left[\psi(x)+\int_x^y \psi'(s)ds\right]^2.$$

Sabemos pelo Lema Radial que $\psi^2(x) \leq \log(x+1)$, isso implica que $\psi(x) \leq \log^{\frac{1}{2}}(1+x)$. Daí,

$$\log[(y+1)-m] \leq \left[\log^{\frac{1}{2}}(x+1)+\int_x^y \psi'(s)(1+s)^{\frac{1}{2}}(s+1)^{-\frac{1}{2}}ds\right]^2.$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\log[(y+1)-m] \leq \left[\log^{\frac{1}{2}}(x+1)+\left(\int_x^y|\psi'(s)|^2(1+s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_x^y\frac{1}{(s+1)}ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.$$

Consequentemente,

$$\log[(y+1)-m] \leq \left[\log^{\frac{1}{2}}(x+1)+\log^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y+1}{x+1}\right)\left(\int_x^{\infty}|\psi'(s)|^2(1+s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.$$

Usando a equação (1.38), temos

$$\begin{aligned}
\log[(y+1)-m] &\leq \left[\log^{\frac{1}{2}}(x+1)+\log^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y+1}{x+1}\right)\left(1-\frac{\log[(x+1)-m]}{\log(x+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\
&\leq \left[\log^{\frac{1}{2}}(x+1)+\log^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y+1}{x+1}\right)\left(1-\frac{\log[(x+1)-m]}{\log(x+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o quadrado perfeito,

$$\begin{aligned}
\log[(y+1)-m] &\leq \log(x+1)+\log\left(\frac{y+1}{x+1}\right)\left(1-\frac{\log[(x+1)-m]}{\log(x+1)}\right)\\
&+ 2\log^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y+1}{x+1}\right)\log^{\frac{1}{2}}(x+1)\left(1-\frac{\log[(x+1)-m]}{\log(x+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \log(x+1)+\log\left(\frac{y+1}{x+1}\right)\left(1-\frac{\log[(x+1)-m]}{\log(x+1)}\right)\\
&+ 2\log^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y+1}{x+1}\right)\log^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(1+x)}{[(x+1)-m]}\right). \qquad (1.40)
\end{aligned}$$

Note que, por hipótese $x+1 \geq 11m$ onde $m \geq 1$, logo

$$\frac{\log[(x+1)-m]}{\log(x+1)} \geq \frac{\log(10m)}{\log(11m)} \geq \frac{1}{2}.$$

Daí,

$$1-\frac{\log[(x+1)-m]}{\log(x+1)} \leq \frac{1}{2}.$$

Consequentemente,

$$\log[(y+1)-m] \leq \log(x+1)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{y+1}{x+1}\right)+2\log^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y+1}{x+1}\right)\log^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(1+x)}{[(x+1)-m]}\right). \qquad (1.41)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\{[\log(x+1)-\log[(x+1)-m]]^{\frac{1}{2}}+[\log(y+1)-\log(x+1)]^{\frac{1}{2}}\}^2 = \log(x+1)-\log[(x+1)-m]\\
+&\ \log(y+1)-\log(x+1)+2[\log(x+1)-\log[(x+1)-m]]^{\frac{1}{2}}[\log(y+1)-\log(x+1)]^{\frac{1}{2}}\\
=&\ \log(x+1)-\log[(x+1)-m]+\frac{1}{2}[\log(y+1)-\log(x+1)]+\frac{1}{2}[\log(y+1)-\log(x+1)]\\
+&\ 2[\log(x+1)-\log[(x+1)-m]]^{\frac{1}{2}}\\
=&\ -\log[(x+1)-m]+\frac{1}{2}[\log(y+1)-\log(x+1)]+\log(x+1)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{y+1}{x+1}\right)\\
+&\ 2[\log(x+1)-\log[(x+1)-m]]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade (1.41),

$$\begin{aligned}
&\{[\log(x+1)-\log[(x+1)-m]]^{\frac{1}{2}}+[\log(y+1)-\log(x+1)]^{\frac{1}{2}}\}^2 \geq\\
&\log[(y+1)-m]-\log[(x+1)-m]+\frac{1}{2}[\log(y+1)-\log(x+1)]. \qquad (1.42)
\end{aligned}$$

Considere, $\tau(t) = \log(t-m) - \log(t)$ para $t \geq 0$ e $m \geq 1$. Observe que τ é crescente pois,

$$\tau'(t) = \frac{1}{(t-m)} - \frac{1}{t} = \frac{m}{t(t-m)} > 0. \quad \text{se} \quad t > m.$$

Como $y+1 \geq x+1 \geq 11m$ e τ é crescente temos, $\tau(y+1) \geq \tau(x+1)$, ou seja,

$$\log[(y+1)-m] - \log[(x+1)-m] \geq \log(y+1) - \log(x+1). \tag{1.43}$$

Usando a desigualdade (1.43) em (1.42),

$$\begin{aligned}\{[\log(x+1) - \log[(x+1)-m]]^{\frac{1}{2}} + [\log(y+1) - \log(x+1)]^{\frac{1}{2}}\}^2 \quad &\geq \quad (\log(y+1) - \log(x+1)) \\ &+ \quad \frac{1}{2}(\log(y+1) - \log(x+1)).\end{aligned}$$

O que mostra que

$$[\log(x+1) - \log[(x+1)-m]]^{\frac{1}{2}} + [\log(y+1) - \log(x+1)]^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}[\log(y+1) - \log(x+1)]^{\frac{1}{2}}.$$

Usando a hipotése que $x+1 \geq 11m$ e sendo τ crescente, obtemos

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right)[\log(y+1) - \log(x+1)]^{\frac{1}{2}} \leq \log^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+1}{(x+1)-m}\right) \leq \log^{\frac{1}{2}}\left(\frac{11m}{10m}\right).$$

Segue, então

$$\log\left(\frac{y+1}{x+1}\right) \leq \frac{\log\frac{11}{10}}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right)^2} < 2.$$

Portanto,

$$\log(y+1) < 2 + \log(x+1) \Rightarrow \frac{\log(y+1)}{\log(x+1)} < \left(1 + \frac{2}{\log(x+1)}\right) < 2,$$

para $y+1 > x+1 > 11m$.

Etapa 2: Agora provaremos que existem $A(\geq 11)$ e $B(> 4)$ tais que, se $y+1 \geq x+1 \geq Am$, então

$$|y-x| \leq Bm.$$

Suponhamos que $|y-x| \geq Bm$. Considere a função $h(s) = e^{s^2}$. Podemos reescrever $y - x = h\left(\log^{\frac{1}{2}}(y+1)\right) - h\left(\log^{\frac{1}{2}}(x+1)\right)$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in \left(\log^{\frac{1}{2}}(x+1), \log^{\frac{1}{2}}(y+1)\right)$ e $\eta \in (\psi(x), \psi(y))$ tais que

$$y - x = h'(x)\left(\log^{\frac{1}{2}}(y+1) - \log^{\frac{1}{2}}(x+1)\right)$$

e

$$e^{\psi^2(y)} - e^{\psi^2(x)} = h'(\eta)(\psi(y) - \psi(x)).$$

Note que h é uma função convexa. Pela Proposição A.4 temos h' é crescente. Como $\xi \geq \eta$ pela propsição A.7 temos que $h'(\xi) \geq h'(\eta)$. Logo,

$$\begin{aligned} h'(x)\left(\log^{\frac{1}{2}}(y+1) - \log^{\frac{1}{2}}(x+1)\right) &= y - x \leq m + e^{\psi^2(y)} - e^{\psi^2(x)} \\ &\leq m + h'(\eta)(\psi(y) - \psi(x)) \leq m + h'(\xi)(\psi(y) - \psi(x)). \end{aligned}$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a desigualdade de Holder, temos

$$\begin{aligned} h'(x)\left(\log^{\frac{1}{2}}(y+1) - \log^{\frac{1}{2}}(x+1)\right) &\leq m + h'(\xi)\left(\int_x^y \psi'(s)ds\right) \\ &= m + h'(\xi)\left(\int_x^y \psi'(s)(s+1)^{\frac{1}{2}}(s+1)^{-\frac{1}{2}}ds\right) \\ &\leq m + h'(\xi)\left(\int_x^y (\psi'(s))^2(s+1)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_x^y \frac{1}{s+1}ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq m + h'(\xi)\left(\int_x^\infty \psi'(s)(s+1)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\log\left(\frac{y+1}{x+1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por (1.38),

$$h'(x)\left(\log^{\frac{1}{2}}(y+1) - \log^{\frac{1}{2}}(x+1)\right) \leq m + h'(\xi)\left(\frac{\log(x+1) - \log[(x+1)-m]}{\log(x+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\log\left(\frac{y+1}{x+1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando a primeira estimativa da Proposição A.8 nos dois últimos termos da desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} h'(x)\left(\log^{\frac{1}{2}}(y+1) - \log^{\frac{1}{2}}(x+1)\right) &\leq m + \frac{\sqrt{2}h'(\xi)\log^{\frac{1}{4}}(x+1)}{\log^{\frac{1}{2}}(x+1)}\left[\log^{\frac{1}{2}}(x+1) - \log^{\frac{1}{2}}[(x+1)-m]\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad [\log(y+1) - \log(x+1)]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq m + 2h'(\xi)\left[\log^{\frac{1}{2}}(x+1) - \log^{\frac{1}{2}}[(x+1)-m]\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left[\log^{\frac{1}{2}}(y+1) - \log^{\frac{1}{2}}(x+1)\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\log^{\frac{1}{4}}(y+1)}{\log^{\frac{1}{4}}(x+1)}. \end{aligned}$$

Logo, por (1.39),

$$\begin{aligned} h'(x)\left(\log^{\frac{1}{2}}(y+1) - \log^{\frac{1}{2}}(x+1)\right) &\leq m + 2\sqrt[4]{2}h'(\xi)\left[\log^{\frac{1}{2}}(x+1) - \log^{\frac{1}{2}}[(x+1)-m]\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left[\log^{\frac{1}{2}}(y+1) - \log^{\frac{1}{2}}(x+1)\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Agora, usando a segunda estimativa da Proposição A.8 na desigualdade (1.44)

$$\begin{aligned} h'(x)\left(\log^{\frac{1}{2}}(y+1)-\log^{\frac{1}{2}}(x+1)\right) &\leq m+2\sqrt{2}h'(\xi)\left[\log^{\frac{1}{2}}(x+1)-\log^{\frac{1}{2}}[(x+1)-m]\right] \\ &+ \frac{h'(\xi)}{2}\left[\log^{\frac{1}{2}}(y+1)-\log^{\frac{1}{2}}(x+1)\right]. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Como

$$h'(\xi)=\frac{y-x}{\log^{\frac{1}{2}}(y+1)-\log^{\frac{1}{2}}(x+1)},$$

temos, por (1.45),

$$y-x\leq 2m+4\sqrt{2}(y-x)\frac{\log^{\frac{1}{2}}(x+1)-\log^{\frac{1}{2}}[(x+1)-m]}{\log^{\frac{1}{2}}(y+1)-\log^{\frac{1}{2}}(x+1)}.$$

Suponhamos $y+1>x+1+Bm$, para que possamos mostrar que isso é impossivel para B grande. Assim,

$$y-x\leq 2m+4\sqrt{2}(y-x)\frac{\log^{\frac{1}{2}}(x+1)-\log^{\frac{1}{2}}[(x+1)-m]}{\log^{\frac{1}{2}}(x+1+Bm)-\log^{\frac{1}{2}}(x+1)}. \tag{1.46}$$

Tomando $\ell=\frac{x+1}{m}$, podemos reescrever a estimativa (1.46) da seguinte forma:

$$y-x\leq 2m+4\sqrt{2}(y-x)\frac{\log^{\frac{1}{2}}(\ell m)-\log^{\frac{1}{2}}((\ell-1)m)}{\log^{\frac{1}{2}}(\ell+B)m)-\log^{\frac{1}{2}}(\ell m)}. \tag{1.47}$$

Agora, provaremos que existe B e $\overline{\ell}=\overline{\ell}(B)$ onde $\ell\geq\overline{\ell}$ tal que

$$4\sqrt{2}\frac{\log^{\frac{1}{2}}(\ell m)-\log^{\frac{1}{2}}((\ell-1)m)}{\log^{\frac{1}{2}}(\ell+B)m)-\log^{\frac{1}{2}}(\ell m)}\leq\frac{1}{2}.$$

Seja

$$k_{\ell,B}(m)=\frac{\log^{\frac{1}{2}}(\ell m)-\log^{\frac{1}{2}}((\ell-1)m)}{\log^{\frac{1}{2}}(\ell+B)m)-\log^{\frac{1}{2}}(\ell m)}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existem $\xi\in((\ell-1)m,\ell m)$ e $\eta\in(\ell m,(\ell+B)m)$ tais que

$$k_{\ell,B}(m)=\frac{m}{\xi\log^{\frac{1}{2}}(\xi)}\frac{\eta\log^{\frac{1}{2}}(\eta)}{Bm}\leq\frac{(\ell+B)}{(\ell-1)}\frac{\log^{\frac{1}{2}}((\ell+B)m)}{\log^{\frac{1}{2}}((\ell-1)m)}.$$

Como $\frac{\log^{\frac{1}{2}}((\ell+B)m)}{\log^{\frac{1}{2}}((\ell-1)m)}$ é não crescente com relação a m em $[1,\infty)$, obtemos

$$k_{\ell,B}(m)\leq\frac{(\ell+B)}{(\ell-1)B}\frac{\log^{\frac{1}{2}}(\ell+B)}{\log^{\frac{1}{2}}(\ell-1)}.$$

Considere
$$f(t) = \frac{(\ell+t)^2}{(\ell-1)^2t^2}\frac{\log(\ell+t)}{\log(\ell-1)}$$
para $t \geq 1$ e tomando $\overline{\ell} = 2t+2$ com $\ell \geq \overline{\ell}$, temos
$$f(t) \;\leq\; \frac{(3t+2)^2}{(2t+1)^2t^2}\frac{\log(3t+2)}{\log(2t+1)}.$$
Observe que $3t+2 \leq 4t+2 = 2(2t+1)$. Logo,
$$\frac{(3t+2)^2}{(2t+1)^2} \;\leq\; \frac{2^2(2t+1)^2}{(2t+1)^2} \leq 4.$$
Usando o mesmo argumento,
$$\frac{\log(3t+2)}{\log(2t+1)} \;\leq\; \frac{\log(2(2t+1))}{\log(2t+1)} \;=\; \frac{\log(2)+\log(2t+1)}{\log(2t+1)}. \tag{1.48}$$
Note que $2 < 2t+1$ onde $t \geq 1$ e, por (1.48),
$$\frac{\log(3t+2)}{\log(2t+1)} \;\leq\; \frac{2\log(2t+1)}{\log(2t+1)} \leq 2.$$
Daí,
$$k_{\ell,B}(m) \leq \sqrt{f(t)} = \frac{\sqrt{8}}{t}.$$
Podemos escolher t_0 suficientemente grande tal que
$$k_{\ell,B}(m) \leq \frac{(\ell+B)}{(\ell-1)}\frac{\log^{\frac{1}{2}}(\ell+B)}{\log^{\frac{1}{2}}(\ell-1)} \leq \frac{1}{8\sqrt{2}},$$
com $B = t_0$ grande e $\ell \geq \overline{\ell} = 2t_0+2$. Em particular, podemos escolher $B = 24$, $\overline{\ell} = 50$, $S = 25$ e $M = 12$. Consequentemente, por (1.47),
$$y-x \leq 2m + \frac{1}{2}(y-x) \;\Rightarrow\; y-x \leq 4m.$$
Em particular, $|E_\lambda| \leq 37\lambda$. Portanto,
$$\int_0^\infty |E_\lambda|e^{-\lambda}d\lambda \;\leq\; 37\int_0^\infty \frac{\lambda}{e^\lambda}d\lambda \;\leq 37.$$
Suponhamos $\alpha > 2$. Consideremos, a família de funções dada por
$$w_k(t) = \begin{cases} \frac{\log(1+t)}{\log^{\frac{1}{2}}(1+k)}, & \text{se} \quad 0 \leq t \leq k, \\ \log^{\frac{1}{2}}(1+k), & \text{se} \quad t \geq k. \end{cases}$$

Sabemos que,

$$\int_0^\infty |\psi'(t)|^2(1+t)dt = 1.$$

Além disso,

$$\int_0^\infty e^{\alpha e^{\psi_k^2(t)}} e^{-2t}dt \geq \int_k^\infty e^{\alpha+\alpha k}e^{-2t}dt = e^{\alpha+\alpha k}\int_k^\infty e^{-2t}dt = \frac{e^{\alpha+\alpha k-2k}}{2} \to \infty,$$

quando $k \to \infty$. ■

1.4 Quebra de simetria

Agora iremos considerar todas as funções em $H_0^1(B,w)$. No caso supercrítico em relação à desigualdade de Moser, veremos que o supremo no espaço inteiro $H_0^1(B,w)$ será infinito.

Proposição 1.2. *Suponha que $\alpha > 4\pi$. Então,*

$$\sup_{u\in H_0^1(B,w);||u||_w\leq 1}\int_B e^{\alpha|u|^2}dx = \infty.$$

Demonstração. Primeiro, vamos analisar o funcional

$$\int_B e^{\alpha|u|^2}dx$$

em um conjunto de funções obtidas por uma translação e dilatação adequadas das funções de Moser em uma região de B longe da origem e longe da fronteira de B, de modo que $|1-\log|x||^\beta$ pode ser desprezado. Considere a seguinte família de funções

$$z_{k,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{cases} \sqrt{\log k} \quad, & \text{se} \quad |x-x_a| < \frac{a}{k}, \\ \frac{\log\left(\frac{a}{|x-x_a|}\right)}{\sqrt{\log k}}, & \text{se} \quad \frac{a}{k} \leq |x-x_a| < a, \\ 0, & \text{se} \quad |x-x_a| \geq a. \end{cases}$$

Onde $x_0 = (1-a,0)$, $0 < a < \frac{1}{2}$ e $k > 2$.

Seja $w_1(x) = \left(\log\frac{e}{|x|}\right)^\beta$. Se $\alpha > 4\pi$ podemos reescrevê-lo como $\alpha = 4\pi(1+\delta)^\beta$ com $\delta > 0$.

$$u_{a,k}(x) = \left|\log\left(\frac{e}{1-2a}\right)\right|^{-\frac{\beta}{2}} z_{k,a}(x). \tag{1.49}$$

Sendo $x_0 = (1-a,0)$ e $x \in B_a(x_0)$ com $0 < a < \frac{1}{2}$ pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} ||x|-|x_0|| \leq |x-x_0| < a \quad &\Rightarrow |x| \geq 1-2a \Rightarrow -\log(|x|) \leq -\log(1-2a) \\ &\Rightarrow 1-\log(|x|) \leq 1-\log(1-2a) \Rightarrow \tfrac{1-\log(|x|)}{1-\log(1-2a)} \leq 1. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Logo, por (1.49)

$$\left(\int_B |\nabla u_{a,k}(x)|^2 |1-\log|x||^\beta dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{B_a(x_0)} |\nabla z_{k,a}(x)|^2 \left|\frac{1-\log|x|}{1-\log(1-2a)}\right|^\beta dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pela desigualdade (1.50),

$$\left(\int_B |\nabla u_{a,k}(x)|^2 |1-\log|x||^\beta dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{B_a(x_0)} |\nabla z_{k,a}(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Note que, para $\frac{a}{k} \leq |x-x_0| < a$, $r(x) = \frac{1}{a}|x-x_0| = \frac{1}{a}\left[(x_1-x_1^0)+x_2^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Daí,

$$\frac{\partial z_{k,a}}{\partial x_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\log k}\sqrt{2\pi}} \frac{x_1-1+a}{|x-x_0|^2},$$

$$\frac{\partial z_{k,a}}{\partial x_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\log k}\sqrt{2\pi}} \frac{x_2}{|x-x_0|^2}.$$

Logo,

$$|\nabla z_{k,a}(x)|^2 = \frac{1}{\log k}\frac{1}{|x-x_0|^2}\frac{1}{2\pi}, \quad \text{se} \quad \frac{a}{k} \leq |x-x_0| < a.$$

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,a)} |\nabla z_{k,a}(x)|^2 \, dx &= \frac{1}{2\pi \log k} \int_{B(x_0,a)\setminus B[x_0,a/k)} \frac{1}{|x-x_0|^2} dx \\ &= \frac{1}{2\pi \log k} \int_{\frac{a}{k}}^{a} \left(\int_{\partial B_R(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|^2} ds\right) dR \\ &= \frac{1}{2\pi \log k} \int_{\frac{a}{k}}^{a} \frac{1}{R^2} 2\pi R dR \\ &= \frac{1}{\log k}\left[\log(a) - \log\left(\frac{a}{k}\right)\right] = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Avaliando o funcional $\int_B e^{\alpha|u|^2} dx$ na sequência $u_{a,k}$ obtemos,

$$\int_B e^{4\pi(1+\delta)^\beta u_{a,k}^2} dx = \int_B e^{4\pi(1+\delta)^\beta \left|\log\left(\frac{e}{1-2a}\right)\right|^{-\beta} z_{k,a}^2} dx.$$

Considerando $0 < a < \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^\delta}$ concluímos,

$$\frac{1}{e^\delta} < 1-2a \Rightarrow 1+\delta \geq 1-\log(1-2a) \Rightarrow \frac{1+\delta}{1-\log(1-2a)} \geq 1.$$

Portanto, pondo $k \to \infty$

$$\int_B e^{4\pi(1+\delta)^\beta u_{a,k}^2} dx = \int_B e^{4\pi(1+\delta)^\beta z_{k,a}^2} dx \to \infty,$$

pois

$$\begin{aligned}\int_B e^{4\pi(1+\delta)^\beta z_{k,a}^2}\mathrm{d}x &\geq \int_{|x-x_0|<\frac{a}{k}} e^{4\pi(1+\delta)^\beta z_{k,a}^2}\mathrm{d}x\\ &= \int_{|x-x_0|<\frac{a}{k}} k^{(1+\delta)^\beta} dx\\ &= 2ak^{(1+\delta)^\beta-1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty\end{aligned}$$

Agora consideremos a seguinte família de funções

$$w_{k,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{cases}\sqrt{\log k} &, \ \text{se} \quad |x-x_0| < \frac{a}{k},\\ \frac{\log\left(\frac{a}{|x-x_0|}\right)}{\sqrt{\log k}}, & \text{se} \quad \frac{a}{k} \leq |x-x_0| < a,\\ 0, & \text{se} \quad |x-x_0| \geq a,\end{cases}$$

onde $x_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $a < \frac{1}{2}$. Seja $w(x) = \left(\log\frac{1}{|x|}\right)^\beta$. Se $\alpha > 4\pi$ podemos reescrevê-lo como $\alpha = 4\pi(1+\delta)^\beta$ com $\delta > 0$. Seja

$$u_{a,k}(x) = \left|\log\left(\frac{1}{2} - a\right)\right|^{-\frac{\beta}{2}} w_{k,a}(x).$$

Usando analogamente os argumentos anteriores obtemos,

$$\left(\int_B |\nabla u_{a,k}(x)|^2 |\log|x||^\beta dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{B_a(x_0)} |\nabla w_{k,a}(x)|^2 \frac{|\log|x||^\beta}{\left|\log\left(\frac{1}{2}-a\right)\right|^\beta} dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

Avaliando o funcional $\int_B e^{\alpha|u|^2}dx$ na sequência $u_{a,k}$ obtemos,

$$\int_B e^{4\pi(1+\delta)^\beta u_{a,k}^2} dx = \int_B e^{4\pi(1+\delta)^\beta \left|\log\left(\frac{1}{2}-a\right)\right|^{-\beta} w_{k,a}} dx.$$

Observe que para $0 < a < \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{1+\delta}}$ temos,

$$e^{-(1+\delta)} > \frac{1}{2} - a \Rightarrow 1+\delta > -\log\left(\frac{1}{2} - a\right) \Rightarrow \frac{1+\delta}{\left|\log\left(\frac{1}{2}-a\right)\right|} > 1.$$

Logo, pondo $k \to \infty$

$$\int_B e^{4\pi(1+\delta)^\beta u_{a,k}^2} dx \geq \int_{B_{\frac{a}{k}}(x_0)} e^{4\pi w_{k,a}^2} dx = \pi a^2 k^{2\bar{\xi}} \to \infty,$$

como afirmamos. ∎

Capítulo 2

Existência de solução para uma equação elíptica envolvendo peso logarítmico

Neste capítulo, estudaremos soluções para equações da forma

$$\begin{cases} -div\,(w(x)\nabla u) = \frac{u^{\gamma-1}e^{\alpha u^{\gamma}}}{\int_B u^{\gamma}e^{\alpha u^{\gamma}}}, & \text{em B,} \\ u > 0 & \text{em B,} \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $B = B_1(0)$ é a bola unitária de $\mathbb{R}^2$ e $w = w(x)$ é um peso logarítmico. Para isso, iremos trabalhar com subespaço de funções radiais para obtermos um crescimento subcrítico. Utilizaremos pesos adequados que nos permitam um aumento no crescimento máximo para integrabilidade.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 2.1. *Seja $\beta \in [0,1)$, $w_1(x) = \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{\beta}$ ou $w_2(x) = \left(\log \frac{e}{|x|}\right)^{\beta}$ e assuma que*

$$\gamma < \frac{2}{1-\beta} \text{ com } \alpha > 0$$

ou

$$\gamma = \frac{2}{1-\beta} \text{ com } 0 < \alpha < \alpha_{\beta} = 2[2\pi(1-\beta)]^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Então, o problema (2.1) admite solução radial.

O próximo resultado é crucial para provarmos que existe solução para o Problema (2.1).

Proposição 2.1. *$H^1_{0,rad}(B,w) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(B)$, para todo $q \geq 1$.*

Demonstração. Seja $w = \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{\beta}$ e $\alpha \in (0, \alpha_{\beta})$ com $\beta \in [0,1)$. Dado $q \geq 1$, existe $c > 0$ tal que $|t|^q \leq ce^{\alpha t^2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como no capítulo 1, usaremos a mudança de variáveis

$$|x| = e^{-\frac{t}{2}} \qquad\qquad \psi(t) = C_\beta u(x)$$

onde $C_\beta = 2^{\frac{1-\beta}{2}}[2\pi(1-\beta)]^{\frac{1}{2}} = \alpha_\beta^{\frac{1}{\overline{\gamma}}}$ com $\alpha_\beta = 2[2\pi(1-\beta)]^{\frac{1}{1-\beta}}$ e $\overline{\gamma} = \frac{2}{1-\beta}$. Considerando

$$Q^n = B \setminus B_{\frac{n-1}{n}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \frac{n-1}{n} \leq |x| < 1 \right\},$$

vemos que

$$\begin{aligned}
\int_{Q^n} e^{\alpha|u|^{\overline{\gamma}}} dx &= \int_{B \setminus B_{\frac{n-1}{n}}(0)} e^{\alpha|u|^{\overline{\gamma}}} dx \\
&= \int_{\frac{n-1}{n}}^1 \left(\int_{\partial B_r(0)} e^{\alpha|u|^{\overline{\gamma}}} dS \right) dr \\
&= \int_{\frac{n-1}{n}}^1 e^{\alpha|u|^{\overline{\gamma}}} 2\pi r dr \\
&= \pi \int_{\frac{n-1}{n}}^1 e^{\alpha|u|^{\overline{\gamma}}} 2r dr.
\end{aligned}$$

Como $r = e^{-\frac{t}{2}}$ temos que $t = 2\log\left(\frac{1}{r}\right)$ e $dr = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}dt$. Daí,

$$\int_{Q^n} e^{\alpha|u|^{\overline{\gamma}}} dx = -\pi \int_{2\log\left(\frac{n}{n-1}\right)}^0 e^{\frac{\alpha}{\alpha_\beta}|\psi(t)|^{\overline{\gamma}}} e^{-t} dr = \pi \int_0^{2\log\left(\frac{n}{n-1}\right)} e^{\overline{\alpha}|\psi(t)|^{\overline{\gamma}} - t} dr, .$$

onde $\overline{\alpha} = \alpha/\alpha_\beta \in (0,1)$. Sendo u radial, com $||u||_w \leq 1$, pelo Lema Radial 1.1 tem-se $|\psi(t)|^{\overline{\gamma}} \leq t$ para todo $t \geq 0$ (veja (1.11)). Assim,

$$\int_{Q^n} e^{\alpha|u|^{\overline{\gamma}}} dx \leq \pi \int_0^{2\log\left(\frac{n}{n-1}\right)} e^{\overline{\alpha} t^{\overline{\gamma}} - t} dr = -\frac{\pi}{1-\overline{\alpha}} \left[e^{-(1-\overline{\alpha})\left[\log\left(\frac{n}{n-1}\right)\right]^2} - 1 \right].$$

Então, existe $C = C_{q,\alpha,\beta} > 0$ tal que,

$$\begin{aligned}
\sup_{u \in H^1_{0,rad}(B,w); ||u||_w \leq 1} ||u||_{L^q(Q^n)} &\leq C \sup_{u \in H^1_{0,rad}(B,w); ||u||_w \leq 1} \left(\int_{Q^n} e^{\alpha|u|^{\overline{\gamma}}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C \left(\frac{\pi}{1-\overline{\alpha}} \right)^{\frac{1}{q}} \left[1 - e^{-(1-\overline{\alpha})\left[\log\left(\frac{n}{n-1}\right)\right]^2} \right]^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \sup_{u \in H^1_{0,rad}(B,w); ||u||_w \leq 1} ||u||_{L^q(Q^n)} \right\} = 0.$$

Então, dado $\epsilon > 0$, tomando $\epsilon_1 = \epsilon^{\frac{1}{q}}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||u||_{L^q(Q^n)} \leq \epsilon_1$ para todo $n \geq n_0$, e $u \in H^1_{0,rad}(B,w)$ com $||u||_w \leq 1$. Sendo $u \in H^1_{0,rad}(B,w)$ tal que $u \neq 0$, considere $\overline{u} = \frac{u}{||u||_w}$. Daí

$$\frac{1}{||u||_w}||u||_{L^q(Q^n)} = ||\overline{u}||_{L^q(Q^n)} \leq \epsilon_1.$$

Donde,

$$||u||^q_{L^q(Q^n)} \leq \epsilon ||u||^q_w \qquad \forall n \geq n_0, \;\; \forall u \in H^1_{0,rad}(B,w)$$

Consideremos agora $Q_n = B_{\frac{n-1}{n}}(0)$. Pelo que vimos acima, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||u||^q_{L^q(B)} = \int_{Q^n} |u|^q dx + \int_{Q_n} |u|^q dx \leq \epsilon ||u||^q_w + ||u||^q_{L^q(Q_n)},$$

para todo $n \geq n_0$ e $u \in H^1_{0,rad}(B,w)$ e $q = 2$. Note que, devido ao Teorema 1.1, tem-se

$$\int_B u^2 dx \leq C \int_B e^{\alpha |u|^{\overline{\gamma}}} dx \leq C', \quad \forall u \in H^1_{0,rad}(B,w) \;\; \text{com} \quad ||u||_w \leq 1.$$

Logo, para $u \in H^1_{0,rad}(B)$ com $u \neq 0$,

$$\frac{1}{||u||^2_w}||u||^2_{L^2(B)} = \left|\left|\frac{u}{||u||_w}\right|\right|^2_{L^2(B)} \leq C'.$$

Donde,

$$||u||_{L^2(Q_n)} \leq ||u||_{L^2(B)} \leq \overline{C}||u||_w, \qquad \forall u \in H^1_{0,rad}(B,w), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, para $n_0 \in \mathbb{N}$, $|x| \leq \frac{n_0-1}{n_0}$ temos que, $w(x) \geq \left|\log \frac{n_0}{n_0-1}\right|^\beta = M_0$. Logo,

$$\int_{Q_{n_0}} |\nabla u|^2 w(x) dx \geq M_0 \int_{Q_{n_0}} |\nabla u|^2 dx \quad \text{para todo} \quad u \in H^1_{0,rad}(B,w).$$

Ou seja,

$$||u||^2_{L^2(Q_{n_0})} + ||\nabla u||^2_{L^2(Q_{n_0})} \leq \left(C' + M_0^{-1}\right)||u||^2_w, \qquad \forall u \in H^1_{0,rad}(B,w).$$

Seja $\{u_n\}_n$ uma sequência limitada em $H^1_{0,rad}(B,w)$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\epsilon_1 \in (0, \epsilon^q/((2C)^q + 1))$ onde $||u_n||_w \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por 2.2, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||u||^q_{L^q(B)} \leq ||u||^q_{L^q(Q_{n_0})} + \epsilon_1 ||u||^q_w \quad \text{para todo} \quad u \in H^1_{0,rad}(B,w).$$

Para este n_0, por (2.2) temos que $u_n \in H^1(Q_{n_0})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$||u_n||^2_{H^1(Q_{n_0})} \leq (C' + M_0^{-1})||u_n||^2_{w(B)} \leq C^2(C' + M_0^{-1}) = C_2, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(Q_{n_0}$. Uma vez que $H^1(Q_{n_0}) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(Q_{n_0})$ para todo $q \geq 1$, segue que $\{u_n\}$ possui uma subsequência convergente $\{u_{n_k}\}$ em $L^q(Q_{n_0})$. Em particular, $\{u_{n_k}\}$ é sequência de Cauchy em $L^q(Q_{n_0})$. Então, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||u_{n_j} - u_{n_k}||^q_{L^q(Q_{n_0})} \leq \epsilon_1 \quad \text{para todo} \quad k, j \geq k_0.$$

Logo, para $k, j \geq k_0$ temos,

$$\begin{aligned} ||u_{n_j} - u_{n_k}||_{L^q(B)} &\leq ||u_{n_j} - u_{n_k}||^q_{L^q(Q_{n_0})} + \epsilon_1 ||u_{n_j} - u_{n_k}||^q_w \\ &< \epsilon_1 + \epsilon_1 (2C)^q = \epsilon_1(1 + (2C)^q) < \epsilon^q. \end{aligned}$$

Ou seja, $\{u_{n_k}\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^q(B)$. Como $L^q(B)$ é completo, temos que $\{u_{n_k}\}$ é convergente em $L^q(B)$. Com isso, vemos que toda sequência limitada $\{u_n\}$ de $H^1_{0,rad}(B, w)$ possui subsequência convergente em $L^q(B)$. Portanto,

$$H^1_{0,rad}(B, w) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(B).$$

Agora, para $w(x) = \left(\log \frac{e}{|x|}\right)^\beta$ vemos que,

$$|x| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} \geq 1 \Rightarrow \left(\log \frac{e}{|x|}\right)^\beta \geq (\log(e))^\beta = 1.$$

Assim,

$$\int_B |\nabla u|^2 w(x) dx \geq \int_B |\nabla u|^2 dx \quad \text{para todo} \quad u \in H^1_{0,rad}(B, w).$$

Além disso, como $|t|^2 \leq c e^{\alpha t^{\overline{\gamma}}}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que

$$\int_B u^2 dx \leq c \int_B e^{\alpha |u|^{\overline{\gamma}}} dx \leq C', \quad \text{para todo} \quad u \in H^1_{0,rad}(B, w) \quad \text{com} ||u||_w \leq 1.$$

para todo $u \in H^1_{0,rad}(B, w)$ com $||u||_w \leq 1$, graças ao Teorema 1.1. Consequentemente,

$$\int_B u^2 dx \leq C' ||u||^2_w \quad \text{para todo} \quad u \in H^1_{0,rad}(B, w),$$

o que nos dá

$$||u||_{H^1(B)} \leq \sqrt{C' + 1} ||u||_w \quad \text{para todo} \quad u \in H^1_{0,rad}(B, w).$$

Em outras palavras,

$$H^1_{0,rad}(B, w) \hookrightarrow H^1_0(B) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(B), \quad \text{para todo} \quad 1 \leq q < \infty,$$

como desejado. ■

2.1 Prova do resultado principal

Considerando o resultado de imersão que acabamos de mostrar, estamos aptos para provar o Teorema 2.1, principal resultado deste capítulo.

Demonstração do Teorema 2.1. Considere,

$$S_{\alpha,\gamma} := \sup_{u \in H^1_{0,rad}(B,w); ||u||_w \leq 1} \int_B \left(e^{\alpha|u|^\gamma} - 1\right) dx.$$

Seja $\{u_n\}_n$ uma sequência maximizante, isto é, $u_n \in H^1_{0,rad}(B,w)$ e

$$\int_B \left(e^{\alpha|u_n|^\gamma} - 1\right) dx \to S_{\alpha,\gamma} \quad \text{com} \quad ||u_n||_w = 1. \tag{2.2}$$

Sendo $\{u_n\}_n$ limitada em $H^1_{0,rad}(B,w)$ então existe $u \in H^1_0(B,w)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1_{0,rad}(B,w), \qquad u_n \to u \text{ em } L^1(B) \quad \text{ e } \quad u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p }, \quad n \to \infty.$$

De fato, como $H^1_{0,rad}(B,w)$ é espaço de Hilbert com ambos os pesos, pela Proposição A.10 $H^1_{0,rad}(B,w)$ é reflexivo, ou seja, toda sequência limitada admite uma subsequência que converge fraco. Pela Proposição 2.1 garantimos a convergência em $L^1(B)$ e a convergência q.t.p decorre da Proposição A.11.
Seja $F(t) = e^{\alpha|t|^\gamma} - 1$. Observe que, pela condição (subcritica) da não linearidade temos,

$$\frac{e^{\alpha|t|^\gamma} - 1}{e^{\alpha_\beta|t|^{\frac{2}{1-\beta}}}} \leq \frac{e^{\alpha|t|^\gamma}}{e^{\alpha_\beta|t|^{\frac{2}{1-\beta}}}} = e^{\alpha|t|^\gamma - \alpha_\beta|t|^{\frac{2}{1-\beta}}}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\lim_{|t|\to\infty} e^{\alpha|t|^\gamma - \alpha_\beta|t|^{\frac{2}{1-\beta}}} = \lim_{|t|\to\infty} e^{-|t|^\gamma(\alpha_\beta - \alpha)} = 0, \quad \text{para } \gamma = \frac{2}{1-\beta} \text{ e } 0 < \gamma < \alpha_\beta.$$

ou

$$\lim_{|t|\to\infty} e^{\alpha|t|^\gamma - \alpha_\beta|t|^{\frac{2}{1-\beta}}} = \lim_{|t|\to\infty} e^{-|t|^\gamma\left(\alpha_\beta|t|^{\frac{2}{1-\beta}-\gamma} - \alpha\right)} = 0 \quad \text{para } \gamma < \frac{2}{1-\beta} \quad e \quad \alpha > 0.$$

Usando argumentos similares ao anterior e a regra de L'Hopital temos, para $s = |t|$

$$\frac{s\left(e^{\alpha s^\gamma} - 1\right)}{e^{\alpha_\beta s^{\frac{2}{1-\beta}}}} \leq \frac{s e^{\alpha s^\gamma}}{e^{\alpha_\beta s^{\frac{2}{1-\beta}}}} = \frac{s}{e^{\alpha_\beta s^{\frac{2}{1-\beta}} - \alpha s^\gamma}}$$

e

$$\lim_{s\to\infty} \frac{s}{e^{\alpha_\beta s^{\frac{2}{1-\beta}} - \alpha s^\gamma}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{\alpha_\beta s^{\frac{2}{1-\beta}} - \alpha s^\gamma}\left(\frac{2\alpha_\beta}{1-\beta} s^{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - \gamma\alpha s^{\gamma-1}\right)} = 0.$$

Uma vez que

$$t \mapsto \frac{F(t)}{e^{\alpha_\beta |t|^{\frac{2}{1-\beta}}}} \qquad \text{e} \qquad t \mapsto \frac{|t|F(t)}{e^{\alpha_\beta |t|^{\frac{2}{1-\beta}}}}$$

são funções contínuas vemos que existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|F(t)| \leq C_1 e^{\alpha_\beta |t|^{\frac{2}{1-\beta}}} \qquad \text{e} \qquad |tF(t)| \leq C_2 e^{\alpha_\beta |t|^{\frac{2}{1-\beta}}}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Note que $|t||F(t)|\left(e^{\alpha_\beta |t|^{\frac{2}{1-\beta}}} - 1\right) \leq |t||F(t)|e^{\alpha_\beta |t|^{\frac{2}{1-\beta}}}$. Logo,

$$F(u_n) \in L^1 \quad \int_B |F(u_n)u_n| \leq C_2 \int_B \left(e^{\alpha_\beta |u_n|^{\frac{2}{1-\beta}}} - 1\right) \leq C.$$

Pelo Proposição A.9 obtemos,

$$\int_B F(u_n)dx \to \int_B F(u)dx \qquad n \to \infty.$$

Segue de (2.2) que $\int_B F(u)dx = S_{\alpha,\gamma}$.
Como $u \neq 0$ e pela semi-continuidade inferior temos $||u||_w \leq 1$. Se $0 < ||u||_w < 1$, tomando $v = \frac{u}{||u||_w}$ temos

$$S_{\alpha,\gamma} = \int_B \left(e^{\alpha|u|^\gamma} - 1\right) dx = \int_B \left(e^{\alpha||u||_w^\gamma |v|^\gamma} - 1\right) dx < \int_B \left(e^{\alpha|v|^\gamma} - 1\right) dx \leq S_{\alpha,\gamma},$$

o que é impossivel. Logo devemos ter $||u||_w = 1$ e daí $S_{\alpha,\gamma}$ é atingido por u. Então, segue do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (ver proposição A.18) que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varphi \in H_0^1(B, w)$ temos,

$$\int_B \nabla u \nabla \varphi w dx = \lambda \int_B |u|^{\gamma-1} e^{\alpha|u|^\gamma} \varphi dx.$$

Tomando $\varphi = u$, obtemos $\lambda = \left(\int_B |u|^\gamma e^{\alpha|u|^\gamma} dx\right)^{-1}$. Com isso, concluímos a demonstração do teorema.

Capítulo 3

Um problema elíptico não homogêneo no plano

Neste capítulo estudaremos a existência e multiplicidade de soluções para problemas elípticos não homogêneo da forma

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) + h(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{3.1}$$

onde o termo não linear $f(s)$ tem um crescimento subcrítico por meio das desigualdades de Trudinger-Moser. Iremos supor que:
(V_1) $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz

$$V(x) \geq V_0 > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

(V_2) A função $[V(x)]^{-1}$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$.
Para aplicarmos os métodos variacionais, consideremos o subespaço de $H^1(\mathbb{R}^2)$

$$E = \left\{ u \in H^1\left(\mathbb{R}^2\right) : \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 dx < \infty \right\}.$$

E por fim, suponhamos que o termo não linear $f(s)$ satisfaz as seguintes condições:
(f_0) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e

$$L := \lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1,$$

onde

$$\lambda_1 = \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} \left[|\nabla u|^2 + V(x)u^2 \right] dx}{\int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx};$$

(f_1) Existem $\theta > 2$ e $s_1 > 0$ tal que para todo $|s| \geq s_1$,

$$0 < \theta F(s) = \theta \int_0^s f(t)dt \leq sf(s);$$

(f_2) Para todo $\alpha > 0$ tem-se

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = 0.$$

Observe que E é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$< u, v >= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\, dx, \quad u, v \in E,$$

e norma dada por $||u|| =< u, u >^{\frac{1}{2}}$. Denotaremos $H^1(\mathbb{R}^2)$ o espaço usual de Sobolev com a seguinte norma

$$||u||_{H^1} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dizemos que $u \in E$ é uma solução fraca do Problema (3.1), quando satisfaz a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u)vdx - \int_{\mathbb{R}^2} hvdx = 0, \quad \forall v \in E.$$

Observe que as soluções fracas de (3.1) são pontos críticos do funcional

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u)dx - \int_{\mathbb{R}^2} hudx. \tag{3.2}$$

3.1 Propriedades da não linearidade

Precisaremos encontrar resultados da nossa não linearidade para podermos mostrar as propriedades desejadas do funcional I.

Proposição 3.1. *Suponha que V satisfaz (V_1)-(V_2). Então vale a seguinte imersão compacta*

$$E \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^2\right), \quad \forall q \in [1, \infty).$$

Demonstração. Assumindo (V_1) temos que $V(x)/V_0 \geq 1\ \forall x \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} ||u||_{H^1}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + \frac{V(x)u^2}{V_0}\right) dx \\ &\leq \max\left\{1, \frac{1}{V_0}\right\} \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx \\ &= k||u||^2, \quad \forall u \in E, \end{aligned}$$

para $k = \max\left\{1, \frac{1}{V_0}\right\}$. Ou seja, a imersão $E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ é contínua. Pelo Corolário A.13, temos $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ é compacta para todo $q \geq 2$. Consequentemente, $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 2$.

Usando a desigualdade de Holder, graças a (V_2), obtemos,

$$\begin{aligned} ||u||_1 &= \int_{\mathbb{R}^2} |u(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^2} V(x)^{\frac{1}{2}} |u(x)| \frac{1}{V(x)^{\frac{1}{2}}} dx \\ &\leq \left(= \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{V(x)} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} (V(x))^{-1} dx\right]^{\frac{1}{2}} ||u||, \quad \forall u \in E. \end{aligned}$$

Com isso temos $E \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^2)$. Daí, usando a desigualdade de interpolação vemos que $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$, $\forall q \in [1, 2]$. Portanto,

$$E \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^2\right), \quad \forall q \in [1, \infty).$$

■

Note que, por definição,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx} \geq \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx} \\ &\geq \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{V_0 \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx} = V_0 > 0. \end{aligned}$$

Lema 3.1. *Suponha que (f_0)-(f_2) valem. Então:*

a) Para cada $\alpha > 0$ existem $b_1 \in (0, \lambda_1)$ e $b_2 > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq b_1|s| + b_2\left(e^{\alpha s^2} - 1\right), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

b) Para cada $q > 2$, existe $b_3 > 0$ tal que

$$|F(s)| \leq \frac{b_1}{2}s^2 + b_3|s|^q\left(e^{\alpha s^2} - 1\right), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

c) Existem $b_4, b_5 > 0$ tais que

$$|F(s)| \geq b_4 s^\theta - b_5, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Demonstração. *a)* A partir de (f_0) e $f(s)$ vemos que, para todo $\alpha > 0$, existem $b_1, b_2 > 0$ tais que

$$|f(s)| \leq b_1|s| + b_2\left(e^{\alpha s^2} - 1\right), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

De fato, como $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = 0$, em particular, $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{e^{\alpha s^2} - 1} = 0$ pois, $f(s)\left(e^{\alpha s^2} - 1\right) \leq f(s)e^{\alpha s^2}$. Daí, para $\epsilon = 1 > 0$ existe $a_1 > 0$ tal que

$$\frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2} - 1} \leq 1, \quad \text{ou seja,} \quad |f(s)| \leq e^{\alpha s^2} - 1, \quad \forall |s| \geq a_1.$$

Agora, de (f_0) temos que $L = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{f(s)}{s} < \lambda_1$. Tomando $\epsilon = \frac{\lambda_1 - L}{2} > 0$, existe $a_2 > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(s)}{s} - L\right| \leq \frac{\lambda_1 - L}{2}, \quad \forall\, 0 < |s| < a_2.$$

Aplicando a desigualdade triangular obtemos,

$$|f(s)| \leq \frac{\lambda_1 + L}{2}|s|, \quad \forall\, 0 < |s| < a_2.$$

Para $s \in [a_2, a_1]$, como f é contínua, existe $M > 0$ tal que $[|f(s)|/\left(e^{\alpha s^2} - 1\right)] \leq M$, ou seja,

$$|f(s)| \leq M\left(e^{\alpha s^2} - 1\right), \quad \forall a_2 \leq |s| \leq a_1.$$

Considerando $b_1 = \frac{\lambda_1 + L}{2}$ e $b_2 = max\{1, M\}$, vemos que a desigualdade (3.3) é satisfeita.
b) Por (f_0) temos

$$\lim_{s\to 0} \frac{2F(s)}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{2f(s)}{2s} = \lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s} = L < \lambda_1.$$

Então, para $\overline{\epsilon} = \frac{\lambda_1 - L}{2} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{2F(s)}{s^2} - L\right| < \frac{\lambda_1 - L}{2}, \quad \forall\, 0 < |s| < \delta.$$

Consequentemente,

$$\frac{2|F(s)|}{s^2} < \frac{\lambda_1 + L}{2} = \lambda_1 - \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_1 + L}{2}\right) = \lambda_1 - \epsilon, \quad \forall\, 0 < |s| < \delta,$$

onde $\epsilon = \lambda_1 - \frac{\lambda_1 + L}{2}$. Daí,

$$|F(s)| < \frac{\lambda_1 - \epsilon}{2} s^2, \quad \forall\, 0 < |s| < \delta. \tag{3.6}$$

Note que, de (f_1) temos,

$$\frac{|F(s)|}{|s|^q\left(e^{\alpha s^2}-1\right)} \leq \frac{|f(s)|}{\theta|s|^{q-1}\left(e^{\alpha s^2}-1\right)} \leq \frac{1}{\theta s_1^{q-1}} \frac{|f(s)|}{\left(e^{\alpha s^2}-1\right)}, \quad \forall|s| \geq s_1.$$

Observe que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}-1} = \lim_{|s|\to\infty} \frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}} \frac{e^{\alpha s^2}}{e^{\alpha s^2}-1}$$

e, pela regra de L'Hospital

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{e^{\alpha s^2}}{e^{\alpha s^2}-1} = \lim_{|s|\to\infty} \frac{e^{\alpha s^2}}{e^{\alpha s^2}} = 1.$$

Logo, por (f_2),

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}-1} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Pelo Lema A.14 concluímos que, para $q > 2$ existe $C = C(q, \delta) > 0$ tal que

$$\frac{|F(s)|}{|s|^q\left(e^{\alpha s^2}-1\right)} \leq C, \quad \forall|s| \geq \delta. \tag{3.7}$$

Pelas desigualdades (3.6) e (3.7), segue que

$$|F(s)| < \frac{\lambda_1 - \epsilon}{2} s^2 + C|s|^q\left(e^{\alpha s^2}-1\right), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

para cada $s \in \mathbb{R}$ e $q > 2$. Considerando $b_1 = \lambda_1 - \epsilon$ e $b_3 = C$ temos a equação (3.3).

c) Por (f_1) temos

$$\theta F(s) \leq s f(s) \Rightarrow \frac{\theta}{s} \leq \frac{f(s)}{F(s)},$$

para $s \geq s_1$ temos

$$\int_{s_1}^{s} \frac{\theta}{t} dt \leq \int_{s_1}^{s} \frac{f(t)}{F(t)} dt \Rightarrow \theta \log\left(\frac{s}{s_1}\right) \leq \log\left(\frac{F(s)}{F(s_1)}\right) \Rightarrow F(s) \geq \frac{F(s_1)}{s_1^\theta} s^\theta. \tag{3.9}$$

Analogamente, para $s \leq -s_1$ obtemos

$$F(s) \geq \frac{F(-s_1)}{s_1^\theta}(-s)^\theta. \tag{3.10}$$

Para $|s| \leq s_1$ temos

$$F(s) \geq -2C, \quad C > 0, \tag{3.11}$$

pois, F é contínua e está definida num compacto, ou seja, atinge o mínimo. Tomando $m =$

$\min\{F(s_1), F(-s_1)\}$ temos por (3.9), (3.10) e (3.11)

$$F(s) \geq \frac{m}{s_1^\theta}|s|^\theta - 2C \Rightarrow F(s) \geq \frac{1}{\max\left\{\frac{m}{C}, 1\right\}} \frac{m}{s_1^\theta}|s|^\theta - 2C, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Basta tomar $b_4 = \frac{1}{\max\left\{\frac{m}{C},1\right\}} \frac{m}{s_1^\theta}$ e $b_5 = 2C$. ■

O próximo resultado é crucial para nossos argumentos e sua prova pode ser vista em [14]

Lema 3.2. *Sejam $\alpha > 0$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u^2} - 1\right) dx < \infty.$$

Além disso, se $||\nabla u||_2^2 \leq 1, ||u||_2 \leq M < \infty$ e $\alpha < 4\pi$, então existe constante $C = C(M, \alpha) > 0$ de modo que,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u^2} - 1\right) dx \leq C(M, \alpha).$$

Usando o Lema 3.2 veremos um resultado de imersão.

Lema 3.3. *Sejam $\beta > 0$ e $r > 1$. Então, para cada $\alpha > r$ existe uma constante positiva $C = C(\alpha)$ tal que,*

$$\left(e^{\beta s^2} - 1\right)^r \leq C\left(e^{\alpha\beta s^2} - 1\right), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Em particular, se $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ então $\left(e^{\alpha\beta s^2} - 1\right)^r$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Queremos provar que $\left(e^{\beta s^2} - 1\right)^r / \left(e^{\alpha\beta s^2} - 1\right)$ é limitado, para $\alpha > r > 1$. Pela regra de L'Hospital temos

$$\lim_{s \to 0} \frac{\left(e^{\beta s^2} - 1\right)^r}{\left(e^{\alpha\beta s^2} - 1\right)} = \lim_{s \to 0} \frac{r\left(e^{\beta s^2} - 1\right)^{r-1} e^{\beta s^2}}{\alpha e^{\alpha\beta s^2}} = 0.$$

Além disso,

$$\lim_{|s| \to \infty} \frac{\left(e^{\beta s^2} - 1\right)^r}{\left(e^{\alpha\beta s^2} - 1\right)} = \lim_{|s| \to \infty} \frac{e^{r\beta s^2}\left(1 - e^{-\beta s^2}\right)^r}{e^{\alpha\beta s^2}\left(1 - e^{-\alpha\beta s^2}\right)} = \lim_{|s| \to \infty} \frac{\left(1 - e^{-\beta s^2}\right)^r}{e^{(\alpha - r)\beta s^2}\left(1 - e^{-\alpha\beta s^2}\right)} = 0.$$

Portanto, o quociente é limitado por uma constante positiva. ■

Lema 3.4. *Sejam $v \in E$, $\beta > 0$, $q > 0$ e $||v|| \leq M$ tais que $\beta M^2 < 4\pi$. Então existe $C = C(\beta, M, q, V_0) \geq 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\beta v^2} - 1\right) |v|^q dx \leq C||v||^q.$$

Demonstração. Considere $r > 1$ próximo de 1 tal que $r\beta M^2 < 4\pi$ e $sq \geq 1$ onde $s = r/(r-1)$. Pela desigualdade de Hölder com $1/r + 1/s = 1$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\beta v^2} - 1\right) |v|^q \mathrm{d}x \leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\beta v^2} - 1\right)^r \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v|^{sq} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\beta v^2} - 1\right)^r \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{r}} \|v\|_{qs}^q.$$

Tomando $\alpha > r$ próximo de r tal que $\alpha\beta M^2 < 4\pi$, o Lema 3.3 garante que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\beta v^2} - 1\right) |v|^q \mathrm{d}x \leq C_1 \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha\beta v^2} - 1\right) \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{r}} \|v\|_{qs}^q.$$

Note que,

$$\int_{\mathbb{R}^2} v^2(x) dx \leq \frac{1}{V_0} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) v^2(x) dx \leq \frac{1}{V_0} M^2 \Rightarrow ||v||_2 \leq \frac{M}{\sqrt{V_0}}.$$

Usando o Lema 3.2 obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\beta v^2} - 1\right) |v|^q \mathrm{d}x \leq C_1 \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha\beta M^2 \frac{v^2}{\|\nabla v\|_2^2}} - 1\right) \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{r}} \|v\|_{qs}^q \leq C_2 \|v\|_{qs}^q.$$

Portanto, como $E \hookrightarrow L^{sq}(\mathbb{R}^2)$ é contínua (ver Proposição 3.1), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\beta v^2} - 1\right) |v|^q \mathrm{d}x \leq C \|v\|^q,$$

para todo $v \in E$. ■

3.2 Resultados sobre o funcional I

Iremos provar que o funcional associado I satisfaz a condição de Palais-Smale que nos permite obter pontos críticos para o funcional.

Lema 3.5. *Se f satisfaz (f_2), existem $\eta > 0$ e $v \in E$ com $\|v\| = 1$ tal que $I(tv) < 0$ para todo $0 < t < \eta$. Em particular,*

$$\inf_{\|u\| \leq \eta} I(u) < 0.$$

Demonstração. Fixe $h \in H^{-1}$ com $h \neq 0$. Considere $\varphi \colon E \to \mathbb{R}$ o funcional dado por

$$\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}^2} hu\mathrm{d}x \quad \forall u \in E.$$

Note que φ é linear e contínua (pois $|\varphi(u)| \leq \|h\|_{H^{-1}} \|u\|$). Pelo Teorema da Representação de Riesz (Proposição A.20), existe único $v \in H$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x) uv) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} hu\mathrm{d}x, \quad \forall u \in H.$$

Logo

$$\int_{\mathbb{R}^2} hv\mathrm{d}x = \|v\|^2 > 0.$$

Pela regra da cadeia, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$\frac{d}{dt}I(tv) = I'(tv)v = t\|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(tv)v\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} hv\mathrm{d}x = (t-1)\|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(tv)v\mathrm{d}x. \tag{3.12}$$

Como $f(0) = 0$ e f é contínua, existe $\eta > 0$ de modo que se $0 < t < \eta$ tem-se $|f(tv)| \leq \frac{\|v\|}{4C}$, onde $C > 0$ é tal que $\|u\|_1 \leq C\|u\|$ para todo $u \in E$. Diminuindo $\eta > 0$, caso necessário, podemos supor $\eta \leq \frac{1}{2}$. De (3.12), para todo $0 < t < \eta$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(tv) &\leq (\eta - 1)\|v\|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} |f(tv)||v|\mathrm{d}x \\
&\leq \left(\frac{1}{2} - 1\right)\|v\|^2 + \frac{\|v\|}{4C}\|v\|_1 \\
&= -\frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{\|v\|}{4}\|v\| \\
&= -\frac{\|v\|^2}{4} < 0.
\end{aligned}$$

Usando que $I(0) = 0$ temos o resultado. ■

Lema 3.6. *Assuma $(f_0) - (f_2)$. Seja $\{u_n\}_n$ em E tal que, $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$. Então, existe $C > 0$ tal que $||u_n|| \leq C$,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(u_n)u_n|\,dx \leq C$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} |F(u_n)|\,dx \leq C.$$

Demonstração. Temos que

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n\mathrm{d}x = I(u_n)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2\right]\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n\mathrm{d}x = I'(u_n)u_n \leq \|I'(u_n)\|\|u_n\|.$$

Multiplicando a primeira equação por θ e subtraindo da segunda tem-se

$$\left(\frac{\theta}{2} - 1\right)\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \left[\theta F(u_n) - f(u_n)u_n\right]\mathrm{d}x = (\theta - 1)\int_{\mathbb{R}^2} hu_n\mathrm{d}x + \theta I(u_n) - I'(u_n)u_n.$$

Pela hipótese, (f_1) e denotando $\varepsilon_n = \|I'(u_n)\| \to 0$ temos que

$$\left(\frac{\theta}{2}-1\right)\|u_n\|^2 - \int_{\{x\colon |u_n(x)|<s_1|\}} [\theta F(u_n) - f(u_n)u_n]\,\mathrm{d}x \leq C + \varepsilon_n\|u_n\|.$$

Usando que $|sf(s) - F(s)| \leq C_1|s|$ para todo $|s| \leq s_1$ obtemos que

$$C + \varepsilon_n\|u_n\| \geq \left(\frac{\theta}{2}-1\right)\|u_n\|^2 - C_1\|u_n\|.$$

Essa desigualdade implica que (u_n) é limitada, pois caso $\|u_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ então

$$0 \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} \frac{C}{\|u_n\|} + \varepsilon_n \geq \left(\frac{\theta}{2}-1\right)\|u_n\| - C_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Essa contradição mostra que existe $C > 0$ tal que $\|u_n\| \leq C$. Mostremos apenas que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |F(u_n)|\mathrm{d}x \leq C,$$

pois a outra desigualdade é totalmente análoga usando (3.3) ao invés de (3.4). Fixe $r > 1$ com $\alpha r < 4\pi$. Além disso, fixe $t > r$ tal que $\alpha t < 4\pi$. Por (3.4) e Hölder ($\frac{1}{r} + \frac{r-1}{r} = 1$) temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |F(u_n)|\mathrm{d}x &\leq \frac{b_1}{2}\|u_n\|_{L^2}^2 + b_3\int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^q\left(e^{\alpha|u_n|^2}-1\right)\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{b_1}{2}\|u_n\|_{L^2}^2 + b_3\|u_n\|^q_{L^{\frac{qr}{r-1}}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left(e^{\alpha|u_n|^2}-1\right)^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

Usando a imersão $E \hookrightarrow L^{\widetilde{q}}$ para qualquer $\widetilde{q} \in [1,\infty)$ e o Lema 3.3 temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |F(u_n)|\mathrm{d}x \leq \frac{b_1}{2}C_2^2 C + b_3 C_3^q C\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left(e^{\alpha t|u_n|^2}-1\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Por fim, como $\alpha t < 4\pi$, o Lema 3.2 temos o resultado. ∎

Lema 3.7. *Assuma (f_0) e (f_2). Então existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo $h \in H^{-1}$ com $||h||_{H^{-1}} < \delta_1$, existe $\rho_h > 0$ tal que*

$$I(u) > 0 \quad \textit{se} \quad ||u|| = \rho_h.$$

Além disso, ρ_h pode ser escolhido de modo que,

$$\rho_h \to 0 \quad \textit{quando} \quad ||h||_{H^{-1}} \to 0.$$

Demonstração. Devido a (3.8) e (3.3) obtemos,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u)dx - \int_{\mathbb{R}^2} hudx \\ &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^2} |F(u)|\, dx - ||h||_{H^{-1}}||u|| \\ &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda_1 - \epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2\, dx - C\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q \left| e^{\alpha u^2} - 1 \right| dx - ||h||_{H^{-1}}||u||. \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 = \inf\limits_{u \in E\setminus\{0\}} \dfrac{||u||^2}{||u||_2^2}$ isso implica que, $||u||_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}||u||^2$ e pelo Lema 3.4,

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda_1 - \epsilon}{2}||u||_2^2 - C||u||^q - ||h||_{H^{-1}}||u|| \\ &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda_1 - \epsilon}{\lambda_1 2}||u||^2 - C||u||^q - ||h||_{H^{-1}}||u|| \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1 - \epsilon}{\lambda_1}\right)||u||^2 - C||u||^q - ||h||_{H^{-1}}||u|| \\ &= ||u||\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1 - \epsilon}{\lambda_1}\right)||u|| - C||u||^{q-1} - ||h||_{H^{-1}}\right]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Tomemos $\rho_0 > 0$ pequeno tal que, para $q > 2$,

$$2\delta(\rho) := \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1 - \epsilon}{\lambda_1}\right)\rho - C\rho^{q-1} = \rho\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1 - \epsilon}{\lambda_1}\right) - C\rho^{q-2}\right] > 0, \quad \forall \rho \in (0, \rho_0]. \tag{3.14}$$

Portanto, para $||h||_{H^{-1}} < \delta$ e $||u|| = \rho$ tem-se

$$I(u) \geq \rho\frac{1}{2}\delta = \frac{\delta\rho}{2} > 0,$$

como desejado. ∎

Lema 3.8. *Suponha que f satisfaz (f_1). Então existe $e \in E$ com $\|e\| > \rho$ tal que $I(e) < 0$.*

Demonstração. Fixe $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\begin{cases} u \equiv s_1 & \text{em } B_1(0), \\ u \equiv 0 & \text{em } B_2(0)^c, \\ u \geq 0. \end{cases}$$

Note que, usando (3.5),

$$\begin{aligned}
I(tu) &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(tu)\mathrm{d}x - t\int_{\mathbb{R}^2} hu\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - Ct^\theta \int_{B_1(0)} |u|^\theta \mathrm{d}x - C_1|B_2(0)| - t\int_{\mathbb{R}^2} hu\mathrm{d}x \\
&= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - Ct^\theta s_1^\theta |B_1(0)| - C|B_2(0)| - t\int_{\mathbb{R}^2} hu\mathrm{d}x \\
&= t^2\left(\frac{\|u\|^2}{2} - Ct^{\theta-2}s_1^\theta|B_1(0)| - C\frac{|B_2(0)|}{t^2} - \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^2} hu\mathrm{d}x\right) \\
&\overset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.
\end{aligned}$$

Fixando t_0 suficientemente grande tal que $I(t_0u) \leq 0$ e $t_0u \notin B_\rho(0)$, e tomando $e = t_0u$, concluímos a demonstração. ■

Lema 3.9. *O funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência (P.S) pelo Lema 3.6 (u_n) é limitada. Passando à subsequência, se necessário, temos que $u_n \rightharpoonup u$ em E, $u_n \to u_0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$ (ver Proposição A.19) e $u_n(x) \to u_0(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^2$. Queremos provar que para $n \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(f(u_n) - f(u_0)\right)\left(u_n - u_0\right) dx \to 0.$$

Usando (3.3), para $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}
|f(u_n) - f(u_0)| &\leq |f(u_n)| + |f(u_0)| \\
&= b_1|u_n| + b_2\left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right) + b_1|u_0| + b_2\left(e^{\alpha u_0^2} - 1\right) \\
&\leq C_1\left[|u_n| + |u_0| + \left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right) + \left(e^{\alpha u_0^2} - 1\right)\right].
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|f(u_n) - f(u_0)||u_n - u_0| \leq C_1\left[|u_n| + |u_0| + \left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right) + \left(e^{\alpha u_0^2} - 1\right)\right]|u_n - u_0|.$$

Desenvolvendo e aplicando integral em $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |f(u_n) - f(u_0)||u_n - u_0|dx &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |u_n||u_n - u_0|dx + \int_{\mathbb{R}^2} |u_0||u_n - u_0|dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right)|u_n - u_0|dx + \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u_0^2} - 1\right)|u_n - u_0|dx.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |f(u_n) - f(u_0)||u_n - u_0|dx &\leq |u_n||_2||u_n - u_0||_2 + ||u_0||_2||u_n - u_0||_2 \\
&+ ||e^{\alpha u_0^2} - 1\|_2||u_n - u_0||_2 + \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right)|u_n - u_0|dx.
\end{aligned}
$$

Como $||u_n|| \leq C$ e $||u_n - u_0||_2 \to 0$ quando $n \to \infty$, concluímos

$$
\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |f(u_n) - f(u_0)||u_n - u_0|dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right)|u_n - u_0|dx. \tag{3.15}
$$

Agora, fixando $t > 1$ tal que $t\alpha < 4\pi$ e aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$
\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right)|u_n - u_0|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right)^t dx\right)^{\frac{1}{t}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_n - u_0|^{\frac{t}{t-1}} dx\right)^{\frac{t-1}{t}}.
$$

Tomando $r > t$ tal que $r\alpha < 4\pi$ e aplicando os Lemas 3.3 e 3.4, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right)^t dx\right)^{\frac{1}{t}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_n - u_0|^{\frac{t}{t-1}} dx\right)^{\frac{t-1}{t}} &\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{r\alpha u_n^2} - 1\right) dx\right)^{\frac{1}{t}} ||u_n - u_0||_{L^{\frac{t}{t-1}}(\mathbb{R}^2)} \\
&\leq C_2 ||u_n - u_0||_{L^{\frac{t}{t-1}}(\mathbb{R}^2)} \to 0, \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

quando $n \to \infty$. Logo, pelas desigualdades (3.15) e (3.16), temos

$$
\int_{\mathbb{R}^2} |f(u_n) - f(u_0)||u_n - u_0|dx \to 0, \quad n \to \infty.
$$

Pelo Lema 3.2 temos que a primeira integral do lado direito é limitada e a outra vai para 0, isto é, a integral do lado esquerdo vai para 0. Agora vejamos que

$$
||u_n - u_0||^2 = \langle I'(u_n) - I'(u_0), u_n - u_0\rangle + \int_{\mathbb{R}^2} (f(u_n) - f(u_0)|(u_n - u_0)dx.
$$

De fato, temos

$$
\begin{aligned}
\langle I'(u_n) - I'(u_0), u_n - u_0\rangle &= I'(u_n)(u_n - u_0) - I'(u_n)(u_n - u_0) \\
&= I'(u_n)u_n - I'(u_n)u_0 - (I'(u_0)u_n - I'(u_0)u_0).
\end{aligned}
$$

Observe que,

$$
\begin{aligned}
I'(u_n)u_n - I'(u_n)u_0 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_n^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n \\
&- \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla u_0 + \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_0 - \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_n u_0 + \int_{\mathbb{R}^2} hu_0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I'(u_0)u_n - I'(u_0)u_0 &= -\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_0|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_0^2 + \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)u_0 + \int_{\mathbb{R}^2} hu_0 \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla u_0 - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)u_n + \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_n u_0 - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, vemos que

$$
\begin{aligned}
I'(u_n)u_n - I'(u_n)u_0 - (I'(u_0)u_n - I'(u_0)u_0) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2\right] dx + \int_{\mathbb{R}^2} \left[|\nabla u_0|^2 + V(x)u_0^2\right] dx \\
&- 2\left(\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla u_0 + \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_n u_0\right) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)(u_n - u_0) - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_n - u_0). \\
&= ||u_n||^2 - 2 < u_0, u_n > + ||u_0||^2 \\
&- \int_{\mathbb{R}^2} \left[(f(u_n) - f(u_0)|\right] (u_n - u_0). \\
&= ||u_n - u_0||^2 - \int_{\mathbb{R}^2} (f(u_n) - f(u_0)|(u_n - u_0).
\end{aligned}
$$

O que conclui o que queríamos. Como $I'(u_n) \to 0$, temos que $I'(u_n) - I'(u_0) \to I'(u_0)$. Como $u_n - u_0 \rightharpoonup 0$, pela Proposição A.17, temos que

$$\langle I'(u_n) - I'(u_0), u_n - u_0 \rangle \to 0.$$

Portanto, $||u_n - u_0||^2 \to 0$ e $u_n \to u_0$ em E. ∎

3.3 Existência de solução

Agora estamos em condições de estabelecer nosso primeiro resultado de existência de solução para a Equação (3.1).

Proposição 3.2. *Existe $\eta_1 > 0$ tal que, se $||h||_{H^{-1}} \leq \eta_1$ então o funcional I possui um ponto crítico u_M no nível*

$$c_M = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t)),$$

onde $\Gamma = \{g \in C([0,1], E) : g(0) = 0, I(g(1)) < 0\}$.

Demonstração. Pelos Lemas (3.7) e (3.8) estamos nas condições do Teorema do Passo da Montanha (A.12), logo o resultado segue do mesmo. ∎

Proposição 3.3. *Para cada $h \in H^{-1}$ com $h \neq 0$, a equação (3.1) possui uma solução minimal u_0 com $I(u_0) = c_0 < 0$ onde $c_0 = \inf_{||u|| \leq \eta} I(u) < 0$ e η é dado no Lema 3.5.*

Demonstração. Defina
$$c_0 = \inf_{||u|| \leq \eta} I(u).$$
Note que c_0 está bem definido pela equação (3.13), pois
$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1 - \epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|^2 - C\|u\|^q - \|h\|_{H^{-1}}\|u\| \\ &\geq -C\eta^q - \eta\|h\|_{H^{-1}} \quad \forall \|u\| \leq \eta. \end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema 3.5 temos que $c_0 < 0$. Seja (v_n) em $\overline{B_{\rho_h}}$ (onde ρ_h é dado no Lema 3.7) tal que
$$I(v_n) \leq c_0 + \frac{1}{2n},$$
Para cada (v_n) tome $\epsilon = \frac{1}{n}$ e $\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}$ no Príncipio Variacional de Ekeland (ver Proposição A.15) para obter $u_n \in \overline{B}_{\rho_h}$ tal que

i) $I(u_n) \leq I(v_n)$;

ii) $||u_n - v_n|| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$;

iii) $I(u_n) < I(u) + \frac{1}{\sqrt{n}}||u - u_n||, \quad \forall u \in \overline{B}_{\rho_h},\ u \neq u_n$.

Por *i)* tem-se $I(u_n) \to c_0$. Para (u_n) ser uma sequência $(PS)_{c_0}$ basta mostrarmos que
$$||I'(u_n)||_{E'} \to 0.$$

Dados $w \in E$ com $||w|| = 1$ e $t > 0$, tomando $u = u_n + tw$ para $0 < |t| << 1$, temos $u \in \overline{B}_\rho(0)$ pois $||u_n|| < \rho$. Por *iii)* tem-se
$$I(u_n) < I(u_n + tw) + \frac{1}{\sqrt{n}}||tw|| \Rightarrow \frac{I(u_n + tw) - I(u_n)}{t} > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Passando limite quando $t \to 0^+$, obtemos
$$I'(u_n)w \geq -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Trocando w por $-w$ obtemos
$$I'(u_n)w \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Uma vez que
$$||I'(u_n)||_{E'} = \sup_{w \in E, ||w||=1} |I'(u_n)w|,$$
pondo $n \to \infty$ obtemos
$$||I'(u_n)||_{E'} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Ou seja, concluímos que (u_n) é uma sequência $(PS)_{c_0}$ para I. Segue do Lema 3.9 que u_n possui subsequência convergente. Já que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, concluímos que

$$c_0 = \lim_{n \to \infty} I(u_n) = I(u_0)$$

e

$$0 = \lim_{n \to \infty} ||I'(u_n)||_{E'} = ||I'(u_0)||_{E'}.$$

Portanto, u_0 é um ponto crítico para I no nível c_0. ■

Teorema 3.1. *Suponha que V satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e que f satisfaz $(f_0) - (f_2)$. Então, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < ||h||_{H^{-1}} < \delta_1$ a Equação (3.10) possui duas soluções fracas, uma com energia positiva e a outra com energia negativa.*

Demonstração. Tomemos $\delta_1 = \eta_1$, dado pela Proposição 3.2. Então, para $||h||_{H^{-1}} \leq \delta_1$, temos pelo Lema (3.7) uma solução para equação 3.1 com energia positiva. Pela Proposição 3.3, para cada $0 < ||h||_{H^{-1}} \leq \delta_1$ temos uma solução de energia negativa. ■

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Apresentamos aqui alguns resultados clássicos que foram usados ao longo do trabalho, juntamente com referências indicando onde podem ser encontrados para que o leitor interessado possa ver suas demonstrações.

Definição A.1. Dois números reais $p, p' \in (1, \infty)$ são ditos expoentes conjugados se

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Proposição A.1 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $a, b \geq 0$ e um par de expoentes conjugados $p > 1$ e $p' > 1$. Então, temos*

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

valendo a igualdade se, e somente se, $a^p = b^{p'}$.

Proposição A.2 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $p > 1$ e $p' > 1$ expoentes conjugados. Dadas duas funções mensuravéis f e g temos*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_{p'}.$$

Proposição A.3 (Teorema do Valor Médio)**.** *Suponha que f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no aberto (a, b). Então, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proposição A.4. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Então f é convexa se, e somente se, f' é crescente em (a, b).*

Proposição A.5 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Consideremos duas funções integráveis*

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Então,

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposição A.6. *(ver [8, Corolário 2.4.1]) Seja $f : \overline{B} \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $\overline{B}$. Se*

$$f(x) = f(|x|) = f(r) \quad r = |x|,$$

(f é radialmente simétrica), então

$$\int_B f(x)dx = w_n \int_0^1 r^{n-1} f(r)dr,$$

onde $w_n = \int_{S^n} d\sigma$.

Proposição A.7. *Seja $R_f(x,y) = [f(x) - f(y)]/[x-y]$ para $x \neq y$. A função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa se, somente se, para todo $x, y, z \in I$ distintos, com $y < z$ se satisfaz*

$$R_f(x,y) \leq R_f(x,z).$$

Proposição A.8. *Se $t, s \geq 0$, então,*

$$t - s \leq 2\sqrt{t}(\sqrt{t} - \sqrt{s}) \quad \text{e} \quad ts \leq \frac{1}{2}(s^2 + t^2). \tag{A.1}$$

Proposição A.9. *Seja $\{u_n\}_n$ uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ convergindo para u em $L^1(\Omega)$. Assumemos que $F(u_n(x))$ e $F(u(x))$ também são funções de L^1. Se*

$$\int_\Omega |F(u_n(x))u_n(x)| \leq C.$$

Então, $F(u_n(x))$ converge para $F(u(x))$ em L^1.

Proposição A.10 (Kakutani). *(ver [4, Teorema 6.4.5]) Um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, a bola unitária fechada B_E é compacta na topologia fraca.*

Proposição A.11. *Sejam (u_n) uma sequência em L^p e $u \in L^p$ tal que $||u_n - u||_p \to 0$. Então, existe uma subsequência (u_{n_k}) tal que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω.*

Proposição A.12 (Passo da Montanha). *(ver [9, Teorema 2.2]) Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ que satisfaz (PS). Suponhamos que $I(0) = 0$ e*

a) Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $I\, |_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;

b) Existe $e \in E \setminus B_\rho(0)$ tal que $I(e) \leq 0$.

Então I possui um valor crítico $c \geq \alpha$. Além disso, c pode ser caracterizado como

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in (g[0,1])} I(u).$$

Onde $\Gamma = \{g \in C([0,1], E) | g(0) = 0, g(1) = e\}$.

Proposição A.13. *Temos* $W^{1,2}(\mathbb{R}^2) \subset L^q(\mathbb{R}^2)$, *para todo* $q \in [2, \infty)$.

Proposição A.14. *Seja* $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *contínua, com* $a \leq b$. *Se existem* $\lim_{x \to a^+} g(x)$ *e* $\lim_{x \to b^-} g(x)$. *Então, g é limitada.*

Proposição A.15 (Princípio Variacional de Ekeland)**.** *(ver [7, Teorema 4.2]) Sejam X um espaço métrico completo e $\phi \colon X \to \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente e limitada inferiormente. Sejam $\varepsilon > 0$ e $\overline{u} \in X$ tais que*

$$\phi(\overline{u}) \leq \inf_X \phi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, dado $\lambda > 0$ existe $u_\lambda \in X$ tal que

i) $\phi(u_\lambda) \leq \phi(\overline{u})$;

ii) $d(u_\lambda, \overline{u}) \leq \lambda$;

iii) $\phi(u_\lambda) < \phi(u) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u_\lambda, u)\ \forall u \neq u_\lambda$.

Proposição A.16. *O funcional I está bem definido e é de classe C^1.*

Demonstração: De fato, primeiramente, vamos mostrar que I está bem definido, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |hu| dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^2} |F(u)| dx < \infty. \tag{A.2}$$

Logo, $\int_{\mathbb{R}^2} |hu| dx \leq ||h||_{H^{-1}} ||u||$ é finita. Vejamos que a segunda integral também é. Para isso, usaremos (3.4) para obtermos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |F(u)| dx \leq \frac{b_1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx + b_2 \int_{\mathbb{R}^2} |u|^q \left(e^{\alpha u^2} - 1\right) dx.$$

Fixando $t > 1$ de modo que $t\alpha < 4\pi$ e $r > t$ com $r\alpha < 4\pi$ pelos Lemas 3.2 e 3.3, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q \left(e^{\alpha u^2} - 1\right) dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{tq} dx\right)^{\frac{1}{t}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{r\alpha u^2} - 1\right) dx\right)^{\frac{1}{t}} < \infty.$$

Agora mostraremos que I é diferenciavél com

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u \nabla v + V(x) uv\right) \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} f(u) v \ \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} hv \ \mathrm{d}x, \quad \forall u, v \in E,$$

onde $I'(u)v$ é o termo

$$\lim_{t\to 0} = \frac{I(u+tv)-I(u)}{t},$$

caso o limite exista. Temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{I(u+tv)-I(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}\langle u+tv,u+tv\rangle\right] - \int_{\mathbb{R}^2}F(u+tv)dx - \int_{\mathbb{R}^2}h(u+tv)dx \\
&- \frac{1}{2}\langle u,u\rangle + \int_{\mathbb{R}^2}F(u)dx + \int_{\mathbb{R}^2}hudx \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[t\langle u,v\rangle + t^2||v||^2 - \int_{\mathbb{R}^2}\left(F(u+tv)dx - F(u)\right)dx - t\int_{\mathbb{R}^2}hv\right] \\
&= \langle u,v\rangle + \lim_{t\to 0}t^2||v||^2 - \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{F(u+tv)-F(u)}{t}dx - \int_{\mathbb{R}^2}hvdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\nabla u\nabla vdx + \int_{\mathbb{R}^2}V(x)uvdx - \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}F(u+tv)dx\right]_{t=0} - \int_{\mathbb{R}^2}hvdx.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{t\to 0}\frac{I(u+tv)-I(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^2}\nabla u\nabla vdx + \int_{\mathbb{R}^2}V(x)uvdx - \int_{\mathbb{R}^2}f(u)vdx - \int_{\mathbb{R}^2}hvdx.$$

Portanto, $I'(u)v$ existe e é dado pela expressão acima. Resta ver que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$, ou seja, $I'(u_n) \to I'(u)$ para toda $u_n \to u$ em E. Note que, dado $v \in E\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}
\left[I'(u_n)-I'(u)\right]v &= I'(u_n)v - I'(u)v \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\nabla u_n\nabla vdx + \int_{\mathbb{R}^2}V(x)u_nvdx - \int_{\mathbb{R}^2}f(u_n)vdx - \int_{\mathbb{R}^2}hvdx \\
&- \int_{\mathbb{R}^2}\nabla u\nabla vdx - \int_{\mathbb{R}^2}V(x)uvdx + \int_{\mathbb{R}^2}f(u)vdx + \int_{\mathbb{R}^2}hvdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\left(\nabla u_n - \nabla v\right)\nabla vdx + \int_{\mathbb{R}^2}u(x)(u_n-u)vdx - \int_{\mathbb{R}^2}\left(f(u_n)-f(u)\right)vdx \\
&= \langle u_n-u,v\rangle - \int_{\mathbb{R}^2}\left(f(u_n)-f(u)\right)vdx \\
&\leq ||u_n-u||||v|| - ||v||\int_{\mathbb{R}^2}\left(f(u_n)-f(u)\right)\frac{v}{||v||}dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2}\left(f(u_n)-f(u)\right)\frac{v}{||v||}dx.
\end{aligned}$$

Tomando

$$a_n = \int_{\mathbb{R}^2}\left(f(u_n)-f(u)\right)\frac{v}{||v||}dx,$$

com $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Então

$$|I'(u_n)-I'(u)| \leq ||u_n-u|| + a_n \to 0,$$

quando $n \to \infty$. ∎

Proposição A.17. *(ver [5, Teorema 4.9]) Seja* (u_n) *uma sequência em* E. *Se* $u_n \rightharpoonup u$ *fracamente em* $\sigma(E, E')$ *e* $f_n \to f$ *fortemente em* E', *então*

$$\langle f_n, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle .$$

Proposição A.18 (Multiplicadores de Lagrange)**.** *Seja* E *espaço de Banach,* $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ *e um conjunto de vínculo* $S = \{v \in E; J(v) = 0\}$, *onde para todo* $u \in S$ *temos* $J'(u) \neq 0$. *Seja* $F \in C^1(E, \mathbb{R})$ *(C' em* S *ou numa vizinhança de* S*) e suponhamos que* $u_0 \in S$ *é tal que* $F(u_0) = \sup\limits_{v \in S} F(v)$, *então existe* λ *tal que*

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Proposição A.19 (Teorema de Rellich-Kondrachow)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^1. *Então as seguintes imersões são compactas:*
a) Se $p < n, W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *para todo* $q \in [1, \frac{np}{n-p})$;
b) Se $p = n, W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *para todo* $q \in [1, \infty)$;
c) Se $p < n, W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, *para todo* $\alpha \in (0, 1 - n/p)$.

Proposição A.20. *(Teorema da Representação de Riesz, veja [5, Theorem 5.5]) Seja* $(H, \langle , \rangle)$ *um espaço de Hilbert. Dado um funcional* $\varphi \colon H \to \mathbb{R}$ *linear e contínuo, existe único* $v \in H$ *tal que*

$$\phi(u) = \langle u, v \rangle, \quad \forall u \in H.$$

Referências Bibliográficas

[1] Calanchi, M., Ruf B., *On Trudinger–Moser type inequalities with logarithmic weights* . Journal of Differential Equations, **258** (2015) 1967-1989.

[2] do Ó, J.M., Medeiros, E., Severo U., *A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two* .J. Math. Anal. Appl. **345** (2008) 286-304.

[3] Evans, Lawrence C., *Partial differential equations.* Graduate studies in mathematics, Segunda Edição **v.19** (1949).

[4] Botelho, G. M. A.; Pellegrino, D. M.; Teixeira, E. V. O., *Fundamentos da Análise Funcional.* Primeira Edição, SBM (2012).

[5] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* (2010).

[6] Freire, F. R., *Simetria de extremais para desigualdades de Trudinger-Moser com peso do tipo Hénon.* (2020).

[7] Figueiredo, G. D., *The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours.* (1989).

[8] Rocha, L. J., *Integrais de Superfícies.* (2012).

[9] Rabinowitz, Paul H., *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations.* (1984).

[10] Moser, J., *A sharp form of an inequality by N. Trudinger.* Indiana University Mathematics Journal, **20**. (1971), 1077-1092.

[11] Pohozaev, S. I., *The Sobolev embedding in the case* $pl = n$*.* Proceedings of the technical scientific conference on advances of scientific research, (1964), 158-170.

[12] Trudinger, N. S., *On the embedding into Orlicz spaces and some aplications.* J. Math. Mech, **17**. (1967), 473-484.

[13] Yudovich, V. I., *Some estimates connected with integral operators and with solutions of elliptic equations.* Doklady Akademii Nauk, **138**. (1961), 805-808.

[14] Cao, D. M., *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$, *Comm. Partial Differential Equations.* **17**. (1992), 407-435.