

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

UM ESTUDO CONCISO  
DA TEORIA DOS  
SEMIGRUPOS  
DE OPERADORES LINEARES

*por*

HARLLEN ARAÚJO DE SENA

JOÃO PESSOA  
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

UM ESTUDO CONCISO  
DA TEORIA DOS  
SEMIGRUPOS  
DE OPERADORES LINEARES<sup>†</sup>

*por*

HARLLEN ARAÚJO DE SENA

*sob orientação do*

PROF. DR. FÁGNER DIAS ARARUNA

JOÃO PESSOA  
2022

<sup>†</sup>. Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq.

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

S474e Sena, Harllen Araujo de.

Um estudo conciso da teoria dos semigrupos de operadores lineares / Harllen Araujo de Sena. - João Pessoa, 2022.  
108 f.

Orientação: Fágner Dias Araruna.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Teoria dos semigrupos. 3. Operadores lineares. 4. Análise funcional. I. Araruna, Fágner Dias. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

# *Um Estudo Conciso da Teoria dos Semigrupos de Operadores Lineares*

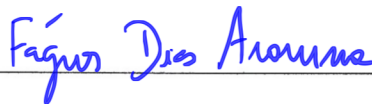
*por*

HARLLEN ARAÚJO DE SENA

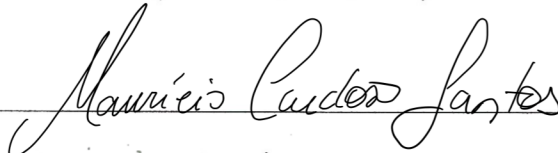
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

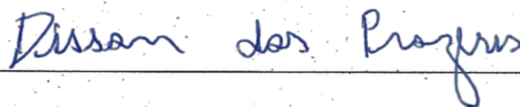
Banca examinadora:



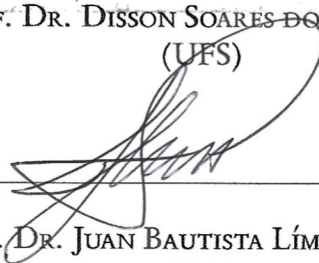
PROF. DR. FÁGNER DIAS ARARUNA  
(PRESIDENTE - UFPB)



PROF. DR. MAURÍCIO CARDOSO SANTOS  
(UFPB)



PROF. DR. DISSON SOARES DOS PRAZERES  
(UFS)



PROF. DR. JUAN BAUTISTA LÍMACO FERREL  
(UFF)

Dissertação aprovada em 25/02/2022.

*Dedico este trabalho aos meus pais e aos indivíduos e instituições que me ajudaram direta e indiretamente em sua produção.*

## RESUMO

O presente texto compreende a um estudo breve da teoria dos semigrupos de operadores. Começamos expondo a teoria preliminar, prosseguindo com o conceito de semigrupo propriamente dito, desenvolvemos suas propriedades elementares e expusemos alguns dos principais resultados da teoria *e.g.* o Teorema de *E. Hille-K. Yosida-R. S. Phillips* e o Teorema de *G. Lumer-R. S. Phillips*. Finalizamos o trabalho com a aplicação da teoria ao estudo de alguns problemas de valor inicial.

**Palavras-chave:** Teoria dos Semigrupos; Operadores Lineares; Análise Funcional.

## ABSTRACT

The present text comprehends to a brief study of the theory of semigroups of operators. We start exposing the preliminar theory, proceeding with the concept of semigroup proper, we developed its elementary properties and exposed some of the main results of the theory *e.g.* the *E. Hille-K. Yosida-R. S. Phillips* Theorem and *G. Lummer-R. S. Phillips* Theorem. We finish the work with the application of the theory to the study of some initial value problems.

**Keywords:** Theory of Semigroups; Linear Operators; Functional Analysis.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Fágner por todo o auxílio fornecido seja ele intelectual, mental ou burocrático. Agradeço aos professores do departamento de matemática que dentro do possível responderam minhas dúvidas e atuaram de forma precisa e respeitosa durante o tempo que estive presente no programa de pós-graduação, aproveito a oportunidade para me desculpar caso haja algum desentendimento. Por último e não menos importante, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

# SUMÁRIO

|                                                           |            |
|-----------------------------------------------------------|------------|
| <b>Lista de símbolos</b>                                  | <b>10</b>  |
| <b>I Conceitos preliminares</b>                           | <b>13</b>  |
| I.1 Alguns resultados sobre convergência . . . . .        | 13         |
| I.2 Álgebra de Banach . . . . .                           | 20         |
| I.3 Função exponencial em álgebras de Banach . . . . .    | 20         |
| I.4 Transformações lineares . . . . .                     | 22         |
| I.5 Espaço de Hilbert . . . . .                           | 27         |
| I.6 Integração vetorial . . . . .                         | 33         |
| I.7 Alguns resultados auxiliares . . . . .                | 41         |
| <b>II Teoria básica dos semigrupos</b>                    | <b>45</b>  |
| II.1 Semigrupos . . . . .                                 | 46         |
| II.2 $C_0$ -semigrupos . . . . .                          | 48         |
| II.3 Geração de semigrupos . . . . .                      | 58         |
| II.4 Operadores dissipativos . . . . .                    | 68         |
| II.5 $C_0$ -grupos . . . . .                              | 72         |
| II.6 Pseudorresolventes . . . . .                         | 75         |
| II.7 Semigrupos adjuntos . . . . .                        | 78         |
| <b>III Aplicações</b>                                     | <b>86</b>  |
| III.1 O problema homogêneo de valor inicial . . . . .     | 86         |
| III.2 O problema não homogêneo de valor inicial . . . . . | 100        |
| III.3 Problema semilinear de valor inicial . . . . .      | 105        |
| <b>Referências Bibliográficas</b>                         | <b>109</b> |
| <b>Índice Remissivo</b>                                   | <b>110</b> |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                          |                                                                                      |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $B^A$                    | Conjunto das funções definidas em $A$ com imagens em $B$ .                           |
| $\mathfrak{D}(f)$        | Domínio da aplicação $f$ .                                                           |
| $\mathfrak{I}(f)$        | Imagem da aplicação $f$ .                                                            |
| $\ker(f)$                | Núcleo do aplicação linear $f$ .                                                     |
| $\mathfrak{h}(A, x)$     | Problema homogêneo de valor inicial para $A$ com dado inicial $x$ .                  |
| $\lim_{t \uparrow a}$    | Limite à esquerda ou por baixo de $a$ .                                              |
| $\lim_{t \downarrow a}$  | Limite à direita ou por cima de $a$ .                                                |
| $\mathfrak{nh}(A, f, x)$ | Problema não homogêneo de valor inicial para $A$ com dado inicial $x$ e função $f$ . |
| $\mathfrak{sI}(A, f, x)$ | Problema semilinear de valor inicial para $A$ com dado inicial $x$ e função $f$ .    |

## PRÓLOGO

Segundo E. Hille e R. S. Phillips. [7] a literatura dos semigrupos de operadores tem suas origens devido a M. H. Stone, o qual em 1930 descobriu um teorema de representação para grupos de operadores limitados em espaços de Hilbert. Para ser preciso os operadores envolvidos eram operadores unitários  $U_t$  e, constituíam uma família de operadores definida por meio de uma extensão obtida a partir da decomposição espectral de um operador unitário  $U$  dado previamente. A família de operadores digamos  $\{U_t : t \in \mathbb{R}\}$  possuía as seguintes propriedades

$$U_0 = I, \quad U_s U_t = U_{s+t},$$

para  $s, t \in \mathbb{R}$  <sup>†</sup>.

No que concerne à teoria propriamente dita, deve-se precipuamente a E. Hille, sendo ele responsável pelo teorema de representação para semigrupos de operadores limitados adjuntos. Uma das aplicações mais notáveis da teoria dos semigrupos encontra-se no estudo do problema de Cauchy abstrato (PCA), estudado, sobretudo, pelos matemáticos proeminentes Einar Hille, Ralph S. Phillips e Kôzaku Yosida, tendo eles dedicado uma série de trabalhos relevantes sobre o problema, com destaque especial para o trabalho [7] produzido pelos dois primeiros. Neste último trabalho é possível notar que as aplicações não se restringem somente ao PCA, temos e.g. a aplicação ao problema de Matrizes de probabilidade e aos processos estocásticos.

Como o próprio nome sugere, o presente trabalho trata-se de um estudo resumido da teoria dos semigrupos. É reconhecido que este pertence ao domínio da análise funcional e, como tal, exige pré-requisitos pertencentes a esta. Na realidade, a teoria é em si uma aplicação da análise funcional e encontramos geralmente no final de textos que tratam do assunto, como se pode notar em N. Dunford e J. Schwartz [5], W. Rudin [12] e K. Yosida [14].

O estudo que vamos desenvolver se fundamenta em operadores lineares definidos em espaços de Banach e exponenciais envolvendo estes. Por este motivo, é de suma importância precisar estes conceitos, bem como apresentar resultados relacionados, preferencialmente sobre uma perspectiva um tanto mais geral do que aquela necessária. Este é o objetivo principal das primeiras seções do primeiro capítulo. Mais adiante apresentaremos um resultado devido a M. H. Stone cuja premissa envolve o conceito espaço de Hilbert, desta forma dedicamos uma seção para tratar estes espaços e resultados relativos imprescindíveis doravante. No decorrer da apresentação, será necessária uma teoria de integração, que ao menos justifique a manipulação de equações integrais. Existem várias teorias que podem ser usadas para este fim, contudo escolhemos uma que nos permita tratar minimalmente de maneira satisfatória argumentos que envolvam noções de medida, mesmo que o texto não exija de maneira obrigatória estas noções. A justificativa de tal escolha se justifica pela simplicidade na manipulação de integrais, na generalidade e pelo uso na literatura como em feito [10]. Para tanto, dedicamos uma seção que trata a integral de Bochner, um análogo da integral Lebesguiana para funções tomando

---

\*A definir, *vide* Definição II.1.1.

<sup>†</sup>Stone obteve uma recíproca deste resultado, i.e., dada uma família de operadores  $\{U_t : t \in \mathbb{R}\}$  unitários contínua em um certo sentido, é sempre possível determinar uma representação integral *cf.* [4].

valores em um espaço de Banach. Finalizamos o primeiro capítulo com um apanhado de resultados relacionados à continuidade, derivação e integração de funções comuns do texto.

No segundo capítulo tratamos o objeto principal do nosso estudo. Começamos definindo semigrupos em um objeto de caráter mais geral do que vamos trabalhar, a saber em álgebras de Banach, percorrendo algumas propriedades e resultados, finalizando com um resultado de representação, aqui os elementos podem ser enxergados como transformações lineares limitadas ao invés de elementos em uma álgebra de Banach. Seguimos com os semigrupos fortemente contínuos. Uma justificativa de se estudar este objeto reside na natureza ilimitada dos operadores diferenciais presentes em problemas de EDP. Após precisar o conceito de semigrupos, prosseguimos com um resultado de geração de semigrupos, onde tratamos condições necessárias e suficientes para que um operador possuindo certas propriedades produza um semigrupo fortemente contínuo. Os resultados protuberantes desta seção são o Teorema de *E. Hille-K. Yosida-R. S. Phillips* e o Teorema de *G. Lumer-R. S. Phillips* apresentado sob a forma de corolário por razões de apresentação e não como produto de generalizações. As próximas duas seções são auxiliares para a última seção de semigrupos adjuntos a qual será coroada com o referido teorema de M. H. Stone. Finalizaremos o presente estudo com o terceiro capítulo onde trataremos as aplicações dentre as quais encontram-se os problemas homogêneo, não homogêneo e semilinear de valor inicial.

## CAPÍTULO I

# CONCEITOS PRELIMINARES

## SUMÁRIO

Neste capítulo apresentamos os fundamentos e conceitos que serão usados doravante. Começamos com os resultados gerais de convergência, determinando, assim, um artifício para as provas das propriedades da função exponencial em álgebras de Banach e na aplicação de limites de sequências generalizadas. A justificativa de se introduzir álgebras de Banach é, precipuamente o fato de espaços de transformações lineares contínuas entre espaços de Banach constituírem uma tal álgebra.

O restante do capítulo trata-se de um epítome de alguns dos principais resultados da análise funcional, dentre os quais destacamos o célebre Teorema de *Banach-Steinhaus* usado para provar que a álgebra das transformações lineares limitadas é fechada relativa a certos limites de operadores. Relizaremos também uma breve passagem em alguns resultados concernentes aos espaços de Hilbert e operadores adjuntos.

Faremos amplo uso de argumentos envolvendo equações integrais e, para isto, carecemos uma teoria que abarque este propósito. É preferível introduzir uma teoria de integração ao estilo Lebesguiano, i.e., uma teoria remanescente da integração de Lebesgue para funções reais. Uma das teorias de integração que cumpre este papel é a desenvolvida por Bochner. Por este motivo fizemos uma breve revisão desta teoria neste capítulo.

Finalizamos com alguns resultados de continuidade, derivação e integração que serão amplamente usados adiante.

### §I.1 ALGUNS RESULTADOS SOBRE CONVERGÊNCIA

No texto que segue sempre quando fizermos referência a  $\mathfrak{R}$  estamos tacitamente admitindo que  $\mathfrak{R} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ , cada um de seus membros é chamado de escalar ou número.

**DEFINIÇÃO I.1.1.** *Um espaço de Banach  $\mathfrak{X}$  (ou B-espaço) é um espaço vetorial topológico sobre o corpo  $\mathfrak{R}$ , munido de uma topologia induzida por uma norma, que será denotada por  $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$  (ou simplesmente por  $\|\cdot\|$  quando não houver risco de confusão), o qual munido com esta é um espaço completo, i.e., toda sequência de Cauchy em  $\mathfrak{X}$  é convergente.*

**DEFINIÇÃO I.1.2.** *Seja  $\{x_n\}$  uma sequência em um espaço vetorial normado  $\mathfrak{X}$ . Diremos que a*

série cujo termo geral é  $x_n$  converge na norma se, e somente se, a série  $\sum_n x_n$

$$\sum_n \|x_n\|_{\mathfrak{X}}$$

convergir.

PROPOSIÇÃO I.1.3. Se  $x_n$  é uma sequência em um  $B$ -espaço  $\mathfrak{X}$  e a série com termo geral  $x_n$  é convergente na norma, então tal série é convergente em  $\mathfrak{X}$  e seu limite é denotado por  $\sum_n x_n$ .

PROVA. A prova se baseia no critério de Cauchy. Se  $\sum_n x_n$  é convergente na norma, então  $\sum_{k=1}^n \|x_k\|$  é uma sequência de Cauchy. Da subaditividade de  $\|\cdot\|$  podemos inferir que a sequência  $\sum_{k=1}^n x_k$  também o será. Como  $\mathfrak{X}$  é Banach, esta última deve convergir.  $\square$

Em certas ocasiões precisamos generalizar a noção de sequência usual, para isto iremos considerar sequências generalizadas, é o que trataremos a seguir.

DEFINIÇÃO I.1.4. I. Seja  $\Delta$  um conjunto parcialmente ordenado segundo a relação ' $\leq$ '. Diremos que  $\Delta$  é um conjunto direcionado quando todo conjunto finito admite cota superior;

II. A toda função em  $\mathfrak{X}^\Delta$  ( $\mathfrak{X}$  desprovido de estrutura) nomearemos sequência generalizada (ou direcionada). Por simplicidade, denotaremos tal sequência por  $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$  ou simplesmente por  $\{x_\delta\}$ , quando não houver risco de ambiguidade em relação ao conjunto  $\Delta$ . Quando  $\mathfrak{X}$  dispor de uma estrutura topológica, diremos que o limite de  $\{x_\delta\}$  é  $x$ , quando para toda vizinhança  $V_x$  de  $x$ , existir  $\delta_0$ , tal que  $x_\delta \in V_x$ , para todo  $\delta \geq \delta_0$ . Quando for o caso simbolizaremos por  $x = \lim_\delta x_\delta$ ;

III. Supondo que  $(\mathfrak{X}, \varrho)$  seja um espaço métrico, diremos que a sequência  $\{x_\delta\}$  é uma sequência de Cauchy generalizada, quando para todo  $\varepsilon > 0$ , existir  $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) \in \Delta$  tal que  $\varrho(x_\gamma, x_\delta) < \varepsilon$ , para quaisquer  $\gamma, \delta \geq \delta_0$ ;

IV. Seja  $\{x_\delta\}$  uma sequência generalizada em um espaço topológico  $\mathfrak{X}$ . Diremos que  $x \in \mathfrak{X}$  é um ponto de acumulação de  $\{x_\delta\}$  quando para toda vizinhança  $V_x$  de  $x$  e todo  $\delta_0 \in \Delta$ , existir  $\delta \in \Delta$  tal que  $\delta \geq \delta_0$  e  $x_\delta \in V_x$ .

PROPOSIÇÃO I.1.5. Um espaço topológico satisfaz o Axioma de Hausdorff  $[^\dagger]$  se, e somente se, toda sequência generalizada convergente admite um único limite.

PROVA. Suponha que  $\mathfrak{X}$  seja um espaço topológico Hausdorff. Suponhamos, por redução ao absurdo, que  $\{x_\delta\}$  seja uma sequência generalizada convergente, possuindo dois limites distintos  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ). Da hipótese, existem vizinhanças disjuntas  $V_i$  dos respectivos  $x_i$ . Não obstante da definição, existem respectivos  $\delta_i$  tais que

$$x_\delta \in V_i \quad (\delta \geq \delta_i).$$

\* Aqui a simbologia é indiferente quanto ao início da sequência  $\{x_n\}$ . Em geral temos que o símbolo se refere à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_{\mathfrak{X}},$$

não obstante convenientemente denotaremos uma série genérica conforme a Definição I.1.2.

$^\dagger$  O Axioma de Hausdorff trata-se de uma propriedade de uma topologia. Sejam  $\mathcal{T}$  uma topologia sobre um conjunto dado  $\mathfrak{X}$  e  $x_i \in \mathfrak{X}$  ( $i = 1, 2$ ), dizemos que  $\mathcal{T}$  satisfaz o Axioma de Hausdorff ou simplesmente que  $\mathfrak{X}$  é Hausdorff quando existirem vizinhanças disjuntas  $V_i$  de  $x_i$ , respectivamente, em outros termos é sempre possível separa dois pontos.

Tomando  $\delta_0$  uma cota superior do conjunto  $\{\delta_1, \delta_2\}$ , temos necessariamente que se  $\delta \geq \delta_0$ , então

$$x_\delta \in V_1 \cap V_2 = \emptyset,$$

o que é um absurdo.

Reciprocamente, suponhamos que toda sequência convergente de  $\mathfrak{X}$  admita um único limite. Suponhamos, por redução ao absurdo, que  $\mathfrak{X}$  não seja *Hausdorff*. Necessariamente devem existir  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) distintos tal que toda vizinhança de um é vizinhança do outro. Concebamos o conjunto de todas estas vizinhanças, digamos  $\Delta$ . Certamente, tal conjunto é direcionado pela relação recíproca da relação de inclusão, i.e.,

$$\gamma \leq \delta \quad \text{se, e somente se,} \quad \delta \subseteq \gamma.$$

De fato, seja um conjunto de índices finito  $I \subseteq \Delta$ . Em conformidade com a definição  $\delta = \bigcap I$  é tal que  $\delta \geq \iota$ , para todo  $\iota \in I$ . Consequentemente,  $\Delta$  é um conjunto direcionado. Seguidamente, consideremos a sequência generalizada  $\{x_\delta\}$ , tal que  $x_\delta \in \delta \in \Delta$ , seja  $\delta_0$  uma vizinhança arbitrária em  $\Delta$  observe que

$$x_\delta \in \delta_0 \quad (\delta \geq \delta_0).$$

Isto prova que  $\{x_\delta\}$  converge para  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ), o que contradiz a nossa suposição.  $\square$

**DEFINIÇÃO I.1.6.** *Sejam  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  espaços topológicos, com  $\mathfrak{Y}$  satisfazendo o Axioma de Hausdorff<sup>‡</sup> e  $f \in \mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$ . Diremos que  $f(x)$  converge a  $\ell$ , quando  $x$  converge para  $a$ , e escreveremos*

$$(I.1) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ell,$$

*quando, para toda vizinhança  $V_\ell$  de  $\ell$ , existir uma vizinhança  $V_a$  de  $a$  tal que*

$$f(x) \in V_\ell \quad (x \in V_a).$$

**PROPOSIÇÃO I.1.7.** *Sejam  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  como na definição I.1.6,  $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{X}$  e  $a$  um ponto limite<sup>§</sup> de  $\mathcal{E}$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  se, e somente se,  $\lim_\delta f(x_\delta) = \ell$ , para toda sequência generalizada  $\{x_\delta\}$  tal que  $\lim_\delta x_\delta = a$ , cujos termos sejam distintos de  $a$ .*

**PROVA.** Suponha que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  e  $\lim_\delta x_\delta = a$ , concebamos uma vizinhança  $V_\ell$  de  $\ell$ . Da definição, existe uma vizinhança  $V_a$  de  $a$ , tal que

$$f(x) \in V_\ell \quad (x \in V_a).$$

Do limte  $\lim_\delta x_\delta = a$ , decorre que para a vizinhança  $V_a$  de  $a$  existe  $\delta_0 \in \Delta$  tal que  $x_\delta \in V_a$ , para todo  $\delta \geq \delta_0$ , *a fortiori* existe  $\delta_0 \in \Delta$ , tal que  $f(x_\delta) \in V_\ell$ , para todo  $\delta \geq \delta_0$ . Em consequência  $\lim_\delta f(x_\delta) = \ell$ . Pela arbitrariedade da sequência  $\{x_\delta\}$  podemos inferir uma condicional.

Provemos a outra condicional. Suponha, por redução ao absurdo, que para toda sequência generalizada  $\{x_\delta\} \subseteq \mathfrak{X} \setminus \{a\}$  tal que  $\lim_\delta x_\delta = a$  vale  $\lim_\delta f(x_\delta) = \ell$  e, não ocorra  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ . Pela definição, deve existir uma vizinhança  $V_\ell$  de  $\ell$ , tal que para toda vizinhança  $\delta$  de  $a$  existe  $x_\delta \in \delta \setminus \{a\}$  tal que  $f(x_\delta) \notin V_\ell$ . A família  $\Delta$  das vizinhanças  $\delta$  de  $a$  é conspicuamente um conjunto direcionado pela relação recíproca da relação de inclusão. Portanto  $\{x_\delta\}$  é uma sequência generalizada e, por construção,  $\lim_\delta x_\delta = a$  e  $\lim_\delta f(x_\delta) = \ell$  não ocorre, o que contradiz a nossa suposição. Isto prova  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .  $\square$

<sup>‡</sup>Considera-se esta hipótese a fim de eliminar a ambiguidade do limite e, portanto tornar significativa a definição em (I.1).

<sup>§</sup>Dizemos que  $a$  é um ponto limite de  $\mathcal{E}$  quando para toda vizinhança  $V_a$  de  $a$ , valer  $\mathcal{E} \cap V_a \setminus \{a\} \neq \emptyset$ .

PROPOSIÇÃO I.1.8. *Sejam  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  como na definição I.1.6,  $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{X}$  e  $a \in \mathcal{E}$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , então  $\lim_{\delta} f(x_{\delta}) = \ell$ , para toda sequência generalizada  $\{x_{\delta}\}$  tal que  $\lim_{\delta} x_{\delta} = a$ .*

PROVA. É análoga à Proposição I.1.7.  $\square$

COROLÁRIO I.1.9. *Sejam  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  como na definição I.1.6 e  $a \in \mathfrak{X}$ . Então  $f \in \mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$  é contínua se, e somente se,  $\lim_{\delta} f(x_{\delta}) = f(a)$ , para toda sequência generalizada  $\{x_{\delta}\}$  cujo limite é  $a$ .*

PROVA. É suficiente observar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  e usar a Proposição I.1.8.  $\square$

LEMA I.1.10. *Se  $(\mathfrak{X}, \varrho)$  é um espaço métrico completo e  $\{x_{\delta}\}$  uma sequência de Cauchy generalizada, então  $\{x_{\delta}\}$  é convergente.*

PROVA. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , podemos tomar  $\delta(n) \in \Delta$  tal que

$$(I.2) \quad \varrho(x_{\gamma}, x_{\delta}) < n^{-1} \quad (\gamma, \delta \geq \delta(n)).$$

Em seguida, seja  $\beta_n$  uma cota superior do conjunto  $\{\delta(i) : 1 \leq i \leq n\}$ . Concebamos a sequência  $\{x_n\}$  cujos termos sejam dados por  $x_n = x_{\beta_n}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N > \varepsilon^{-1}$ . Temos, assim, que se  $n, m \geq N$ , então por (I.2) temos que

$$(I.3) \quad \varrho(x_n, x_m) = \varrho(x_{\beta_n}, x_{\beta_m}) < N^{-1} < \varepsilon,$$

pois  $\beta_n, \beta_m \geq \beta_N$ . Portanto provamos que  $\{x_n\}$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathfrak{X}$ . Sendo este último completo  $\{x_n\}$  é convergente, Digamos  $x = \lim_n x_n$ . Agora, dado  $\varepsilon > 0$ , tome um natural  $N^{-1} > \varepsilon$ . Da hipótese de que  $\{x_{\delta}\}$  é Cauchy generalizada decorre

$$\varrho(x_{\gamma}, x_{\delta}) < N^{-1} < \varepsilon \quad (\gamma, \delta \geq \delta_0 = \delta(N)).$$

Logo, se  $n \geq N$ , então

$$\varrho(x_n, x_{\delta}) = \varrho(x_{\beta_n}, x_{\delta}) < \varepsilon \quad (\delta \geq \delta_0),$$

que por sua vez acarreta

$$\varrho(x, x_{\delta}) = \lim_n \varrho(x_n, x_{\delta}) < \varepsilon \quad (\delta \geq \delta_0),$$

o que prova  $\lim_{\delta} x_{\delta} = x$ .  $\square$

PROPOSIÇÃO I.1.11. *Sejam  $\mathfrak{X}$  um conjunto,  $\mathfrak{Y}$  um B-espaço,  $\{f_{\delta}\}$  uma sequência generalizada de funções em  $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$ . Então  $\{f_{\delta}\}$  converge uniformemente a uma função  $f \in \mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$  se, e somente se,  $\{f_{\delta}\}$  converge uniformemente Cauchy, i.e., para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta_{\varepsilon} \in \Delta$ , tal que*

$$(I.4) \quad \|f_{\gamma}(x) - f_{\delta}(x)\| < \varepsilon \quad (\gamma, \delta \geq \delta_{\varepsilon}, x \in \mathfrak{X}).$$

PROVA. Se  $\{f_{\delta}\}$  converge uniformemente a  $f$  em  $\mathfrak{X}$ , então para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta_{\varepsilon} \in \Delta$ , tal que

$$\|f(x) - f_{\gamma}(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (x \in \mathfrak{X}, \gamma \geq \delta_{\varepsilon}).$$

Logo, se  $\gamma, \delta \geq \delta_{\varepsilon}$ , então

$$\|f_{\gamma}(x) - f_{\delta}(x)\| \leq \|f_{\gamma}(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_{\delta}(x)\| < \varepsilon \quad (x \in \mathfrak{X}),$$

i.e., vale (I.4).

Reciprocamente, suponha que  $\{f_\delta\}$  seja uniformemente Cauchy. Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta_\varepsilon$ , tal que

$$(I.5) \quad \|f_\gamma(x) - f_\delta(x)\| < \varepsilon \quad (\delta, \gamma \geq \delta_\varepsilon, x \in \mathfrak{X}).$$

Desta forma, para cada  $x \in \mathfrak{X}$ , a sequência  $\{f_\delta(x)\}$  é uma sequência de Cauchy generalizada em  $\mathfrak{X}$ . Como este último é completo, decorre do Lema I.1.10 que  $\{f_\delta(x)\}$  convergirá. Logo faz sentido a definição

$$(I.6) \quad f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta} f_\delta(x).$$

Da continuidade de  $\|\cdot\|$ , do Corolário I.1.9, de (I.5) e (I.6) podemos concluir

$$\lim_{\gamma} \|f_\gamma(x) - f_\delta(x)\| = \|f(x) - f_\delta(x)\| \leq \varepsilon \quad (\delta \geq \delta_\varepsilon, x \in \mathfrak{X}),$$

o que prova a convergência uniforme. □

**COROLÁRIO I.1.12 (K. WIERSTRASS).** *Sejam  $\mathfrak{X}$  um espaço topológico,  $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$  um B-espaço e  $\{f_n\}$  uma sequência de funções em  $\mathfrak{Y}^{\mathcal{E}}$ . Se  $\|f_n(x)\| \leq M_n$ , para todo  $(x, n) \in \mathcal{E} \times \mathbb{N}$  e a série  $\sum_n M_n$  convergir, então  $\sum_n f_n$  convergirá uniformemente.*

**PROVA.** Se  $\sum_n M_n$  convergir, então dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{k=m}^n M_k < \varepsilon \quad (n \geq m \geq N(\varepsilon)),$$

assim

$$\sum_{k=m}^n \|f_k(x)\| \leq \sum_{k=m}^n M_k < \varepsilon \quad (n \geq m \geq N(\varepsilon), x \in \mathcal{E}),$$

que segundo a Proposição I.1.11 podemos inferir o requerido. □

**LEMA I.1.13 (E. H. MOORE.).** *Sejam  $\Gamma, \Delta$  conjuntos direcionados e, suponha que  $\Gamma \times \Delta$  seja direcionado segundo a relação de ordem parcial*

$$(\alpha, \beta) \leq (\gamma, \delta) \quad \text{se, e somente se,} \quad \alpha \leq \beta \text{ e } \gamma \leq \delta.$$

*Suponha que  $\{x_{(\gamma, \delta)} : (\gamma, \delta) \in \Gamma \times \Delta\}$  seja uma sequência generalizada no espaço métrico  $\mathfrak{X}$ . Se*

I.  $\lim_{\gamma} x_{(\gamma, \delta)} = x_\delta$  existe para todo  $\delta \in \Delta$ ;

II.  $\lim_{\delta} x_{(\gamma, \delta)} = x_\gamma$  existe uniformemente para todo  $\gamma \in \Gamma$ ;

Então

$$\lim_{\delta} x_\delta = \lim_{(\gamma, \delta)} x_{(\gamma, \delta)} = \lim_{\gamma} x_\gamma.$$

PROVA. Dado  $\varepsilon > 0$ , de II, decorre que existe  $\delta_0 \in \Delta$ , tal que

$$\varrho(x_{(\gamma,\delta)}, x_\delta) < 8^{-1} \varepsilon \quad (\delta \geq \delta_0).$$

Isto implica

$$(I.7) \quad \varrho(x_{(\gamma,\delta)}, x_{(\gamma,\delta_0)}) < 4^{-1} \varepsilon \quad (\delta \geq \delta_0).$$

De (I.7), existe  $\gamma_0 = \gamma_0(\delta_0) \in \Gamma$ , tal que

$$\varrho(x_{(\gamma,\delta_0)}, x_{\delta_0}) < 8^{-1} \varepsilon \quad (\gamma \geq \gamma_0).$$

Analogamente

$$(I.8) \quad \varrho(x_{(\gamma,\delta_0)}, x_{(\gamma_0,\delta_0)}) < 4^{-1} \varepsilon \quad (\gamma \geq \gamma_0).$$

Combinando (I.7) e (I.8) vem

$$\varrho(x_{(\gamma,\delta)}, x_{(\gamma_0,\delta_0)}) < 2^{-1} \varepsilon \quad ((\gamma, \delta) \geq (\gamma_0, \delta_0)).$$

Portanto

$$\varrho(x_{(\alpha,\beta)}, x_{(\gamma,\delta)}) \quad ((\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \geq (\gamma_0, \delta_0)).$$

Consequentemente,  $\{x_{(\gamma,\delta)}\}$  é uma sequência de Cauchy generalizada. Como  $\mathfrak{X}$  é completo decorre do Lema I.1.10 que existe  $x = \lim_{(\gamma,\delta)} x_{(\gamma,\delta)}$ . Proseguindo, dado  $\varepsilon > 0$ , do que foi provado existe  $(\gamma_0, \delta_0) \in \Gamma \times \Delta$ , tal que

$$(I.9) \quad \varrho(x_{(\gamma,\delta)}, x) < \varepsilon \quad ((\gamma, \delta) \geq (\gamma_0, \delta_0)).$$

Logo

$$\varrho(x_\gamma, x) = \lim_{\delta} \varrho(x_{(\gamma,\delta)}, x) \leq \varepsilon \quad (\gamma \geq \gamma_0)$$

e

$$\varrho(x_\delta, x) = \lim_{\gamma} \varrho(x_{(\gamma,\delta)}, x) \leq \varepsilon \quad (\delta \geq \delta_0),$$

o que prova

$$\lim_{\delta} x_\delta = \lim_{(\gamma,\delta)} x_{(\gamma,\delta)} = \lim_{\gamma} x_\gamma.$$

□

PROPOSIÇÃO I.1.14. *Sejam  $\mathfrak{X}$  um espaço topológico,  $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{X}$ ,  $a$  um ponto limite de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathfrak{Y}$  um  $B$ -espaço e  $f, f_\delta \in \mathfrak{Y}^{\mathcal{E}}$ , tais que  $\{f_\delta\}$  converge uniformemente a  $f$  em  $\mathcal{E}$ . Suponha que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f_\delta(x) = v_\delta \in \mathfrak{Y}.$$

*Então  $\{v_\delta\}$  converge e vale:*

$$(I.10) \quad \lim_{x \rightarrow a} \lim_{\delta} f_\delta(x) = \lim_{\delta} \lim_{x \rightarrow a} f_\delta(x).$$

PROVA. Seja  $\{x_\gamma\}$  uma sequência generalizada arbitrária cujo limite é  $a$ .

Em seguida observemos que

I.  $\lim_{\gamma} f_\delta(x_\gamma) = v_\delta \in \mathfrak{Y}$ , i.e., o limite existe;

II.  $\lim_{\delta} f_\delta(x_\gamma) = f(x_\gamma)$  uniformemente para todo  $\gamma \in \Gamma$ .

Recorrendo ao Lema I.1.13 e a Proposição I.1.7 podemos inferir a tese da proposição. □

**COROLÁRIO I.1.15.** *Sejam  $\mathfrak{X}$  um espaço topológico,  $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{X}$ ,  $a \in \mathcal{E}$ ,  $\mathfrak{Y}$  um  $B$ -espaço e  $f, f_\delta \in \mathfrak{Y}^{\mathcal{E}}$ , tais que  $\{f_\delta\}$  converge uniformemente a  $f$  em  $\mathcal{E}$ . Então se  $\{f_\delta\}$  é uma sequência de funções contínuas em  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$ .*

**PROVA.** Evidentemente  $\lim_{x \rightarrow a} f_\delta(x) = f_\delta(a) \in \mathfrak{Y}$ , que conforme a Proposição I.1.14 vale

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{\delta} f_\delta(x) = \lim_{\delta} \lim_{x \rightarrow a} f_\delta(x) = \lim_{\delta} f_\delta(a) = f(a).$$

□

**LEMA I.1.16.** *Um espaço topológico  $\mathfrak{X}$  é compacto [† se, e somente se, toda sequência generalizada em  $\mathfrak{X}$  admite um ponto de acumulação.*

**PROVA.** Suponhamos que  $\mathfrak{X}$  seja compacto e consideremos uma sequência generalizada arbitrária  $\{x_\delta\}$  em  $\mathfrak{X}$ . Para cada  $\delta \in \Delta$ , concebamos a família de conjuntos fechados  $\{F_\delta\}$  cujos membros sejam dados por

$$F_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \overline{A_\delta}, \quad A_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \{f(\delta') \in \mathfrak{X} : \delta' \geq \delta\}.$$

Considerando um conjunto finito de índices  $I \subseteq \Delta$ , a família correspondente  $\{F_\iota : \iota \in I\}$  é tal que  $\bigcap_{\iota \in I} F_\iota \neq \emptyset$ . Com efeito, sendo  $\Delta$  um conjunto direcionado, tomemos  $\delta$  uma cota superior de  $\{\iota : \iota \in I\}$ . É aparente que  $f(\delta) \in F_\iota$ , para todo  $\iota \in I$ . Por maior razão  $f(\delta) \in \bigcap_{\iota \in I} F_\iota$ . Agora, usando a nossa suposição, necessariamente existe  $x \in \bigcap_{\delta} F_\delta$ . Tomando uma vizinhança arbitrária  $V_x$  de  $x$ , em virtude de  $x \in \bigcap_{\delta} F_\delta$ , temos que  $V_x \cap A_\delta \neq \emptyset$ , para todo  $\delta \in \Delta$ , o que prova que  $x$  é um ponto de acumulação de  $\{x_\delta\}$  (*vide* Definição I.1.4).

Reciprocamente suponha que toda sequência generalizada em  $\mathfrak{X}$  admite um ponto de acumulação. Consideremos uma família arbitrária  $\mathcal{F}$  de conjunto fechados com a propriedade da interseção finita. Concebamos a família  $\Delta$  constituída de intersecções finitas de membros de  $\mathcal{F}$ . Conspicuamente  $\Delta$  tem a propriedade da intersecção finita e  $\Delta$  é um conjunto direcionado pela relação recíproca da relação de inclusão. Agora, admitindo o Axioma de Zermelo (Axioma da escolha) podemos conceber uma sequência generalizada  $\{x_\delta\}$  cujos termos verificam a condição  $x_\delta \in \delta$ . Da nossa suposição,  $\{x_\delta\}$  admite um ponto de acumulação digamos  $x$ . Provemos que  $x \in \bigcap \Delta$ . Para tanto seja  $V_x$  uma vizinhança arbitrária de  $x$ . Dado qualquer  $\delta$ , existe  $\varepsilon \in \Delta$ , tal que  $\delta \leq \varepsilon$  e  $x_\varepsilon \in V_x$ . Em conformidade  $x_\varepsilon \in V_x \cap \varepsilon$ , i.e.,  $V_x \cap \varepsilon \neq \emptyset$ . Da definição de ' $\leq$ ', temos que  $V_x \cap \varepsilon \subseteq V_x \cap \delta$  e, consequentemente, que  $V_x \cap \delta \neq \emptyset$ . Como  $V_x$  é arbitrária, necessariamente  $x \in \overline{\delta} = \delta$ , pois  $\delta$  é um conjunto fechado de  $\mathfrak{X}$  e, como  $\delta$  é arbitrário, podemos inferir a pertinência  $x \in \bigcap \Delta$ . Finalmente basta notar que  $\emptyset \neq \bigcap \Delta \subseteq \bigcap \mathcal{F}$ , o que prova que  $\mathfrak{X}$  é compacto. □

**DEFINIÇÃO I.1.17.** *Seja  $\{x_\delta\}$  uma sequência generalizada em um reticulado completo  $\mathcal{R}$ , i.e., um conjunto parcialmente ordenado tal que todo subconjunto não vazio admite ínfimo e supremo. Definimos*

$$\liminf_{\delta} x_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\gamma} \inf_{\delta \geq \gamma} x_\delta \quad \text{e} \quad \limsup_{\delta} x_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\gamma} \sup_{\delta \geq \gamma} x_\delta.$$

†Existem várias maneiras de se definir um espaço topológico compacto, no Lema I.1.16 consideramos um espaço como sendo compacto, aquele tal que toda família de fechados com a propriedade da intersecção finita, admite intersecção não vazia.

## §I.2 ÁLGEBRA DE BANACH

DEFINIÇÃO I.2.1. Diremos que um conjunto  $\mathfrak{B}$  é uma álgebra de Banach sobre  $\mathfrak{K}$  (ou  $B$ -álgebra) se

I.  $\mathfrak{B}$  é um  $B$ -espaço sobre  $\mathfrak{K}$ ;

II. Existe uma aplicação  $\mathfrak{K}$ -bilinear  $\mathfrak{m} : \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}$  tal que a norma  $\|\cdot\|$  em  $\mathfrak{B}$ , satisfaz

$$\|\mathfrak{m}(u, v)\| \leq \|u\| \|v\| \quad (u, v \in \mathfrak{B}).$$

Daremos à aplicação  $\mathfrak{m}$  o nome de multiplicação e por simplicidade denotaremos  $\mathfrak{m}(u, v)$  por  $u \cdot v$ , ou simplesmente por  $uv$ . Chamaremos de unidade o elemento denotado por  $1_{\mathfrak{B}}$  com a propriedade  $1_{\mathfrak{B}} \cdot u = u \cdot 1_{\mathfrak{B}} = u$ , para todo  $u \in \mathfrak{B}$ . Como usual, os elementos  $u$  tais que existe um  $v \in \mathfrak{B}$  satisfazendo  $u \cdot v = v \cdot u = 1_{\mathfrak{B}}$ , serão chamados de inversíveis (ou regulares). A classe constituída de tais elementos será denotada por  $\mathfrak{B}^{-1}$ .

A seguir, determinaremos uma condição suficiente para a inversibilidade de elementos de uma  $B$ -álgebra com unidade.

PROPOSIÇÃO I.2.2. Sejam  $\mathfrak{B}$  uma  $B$ -álgebra com unidade  $1_{\mathfrak{B}}$  e  $u \in \mathfrak{B}$ . Se  $\|u\| < 1$ , então  $1_{\mathfrak{B}} - u \in \mathfrak{B}^{-1}$ .

PROVA. Primeiramente notemos que  $\sum_{k=1}^n u^k$  é convergente na norma, pois

$$\sum_n \|u^n\| \leq \sum_n \|u\|^n = \frac{1}{1 - \|u\|}.$$

Como consequência, faz sentido escrever  $\sum_n u^n$  e, também vale

$$0 \leq \lim_n \|u^n\| \leq \lim_n \|u\|^n = 0,$$

i.e.,

$$\lim_n u^n = 0,$$

Conformemente

$$(1_{\mathfrak{B}} - u) \cdot \sum_n u^n = (1_{\mathfrak{B}} - u) \cdot \lim_n \sum_{k=0}^n u^k = \lim_n (1_{\mathfrak{B}} - u^{n+1}) = 1_{\mathfrak{B}}.$$

□

## §I.3 FUNÇÃO EXPONENCIAL EM ÁLGEBRAS DE BANACH

DEFINIÇÃO I.3.1. Seja  $\mathfrak{B}$  uma  $B$ -álgebra. Definimos a função exponencial  $\exp : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}$  por  $\|$

$$\exp(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} v^k.$$

---

$\|$  Em que o símbolo de somatória deve ser interpretado como um limite, i.e.,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} v^k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} v^k.$$

PROPOSIÇÃO I.3.2. *A aplicação  $\exp$  está bem definida.*

PROVA. Isto decorre da Proposição I.1.3, pois

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|v\|^k}{k!} = e^{\|v\|}.$$

□

PROPOSIÇÃO I.3.3. *Suponhamos que  $\mathfrak{B}$  seja uma  $B$ -álgebra e  $u, v \in \mathfrak{B}$ . Se  $uv = vu$ , então*

$$\exp(u + v) = \exp(u) \exp(v) = \exp(v) \exp(u).$$

PROVA. Primeiramente, observe que se  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  são sequências em  $\mathfrak{B}$ , tais que  $\lim_n x_n = x$ ,  $\lim_n y_n = y$ , então  $\lim_n x_n y_n = xy$ . Conformemente temos

$$(I.11) \quad \exp(u) \exp(v) = \lim_n \left[ \left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} u^i \right) \left( \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} v^j \right) \right] = \lim_n \sum_{i,j=0}^n \frac{1}{i! j!} u^i v^j.$$

Em seguida note

$$(I.12) \quad \begin{aligned} \sum_{i,j=0}^n \frac{1}{i! j!} u^i v^j &= \sum_{i=0}^n \sum_{j \leq i} \frac{1}{i! j!} u^i v^j \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \frac{1}{j! (i-j)!} u^{i-j} v^j \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i \frac{i!}{j! (i-j)!} u^{i-j} v^j \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} (u + v)^i \end{aligned}$$

Substituindo (I.12) em (I.11) temos

$$\exp(u + v) = \exp(u) \exp(v).$$

Isto é suficiente, pois  $u + v = v + u$ .

□

PROPOSIÇÃO I.3.4. *Sejam  $\mathfrak{B}$  uma  $B$ -álgebra com unidade 1 e  $v \in \mathfrak{B}$  considere  $E : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{B}$  dada pela lei  $E(\gamma) = \exp(\gamma v)$ . Então vale*

$$\frac{d}{d\gamma} E(\gamma) = v \exp(\gamma v) = \exp(\gamma v) v \quad (\gamma \in \mathfrak{K}).$$

PROVA. Primeiramente notemos

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\exp((\gamma + \eta)v) - \exp(\gamma v)}{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \exp(\gamma v) \cdot \frac{\exp(\eta v) - 1}{\eta} \right) = \exp(\gamma v) \cdot \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\exp(\eta v) - 1}{\eta}.$$

Assim é suficiente provar

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\exp(\eta v) - 1}{\eta} = v.$$

Para tanto, observemos

$$\frac{\exp(\eta v) - 1}{\eta} = v + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\eta^{k-1}}{k!} v^k \quad (\eta \neq 0).$$

Definamos

$$S_n(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=2}^n \frac{\eta^{k-1}}{k!} v^k.$$

Como o limite é um conceito local, podemos nos restringir ao conjunto  $\{\eta : |\eta| \leq 1\}$ . Feito isto, temos

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left\| \frac{\eta^{k-1}}{k!} v^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|v\|^k}{k!} = e^{\|v\|} \quad (|\eta| \leq 1)$$

que, segundo o Corolário I.1.12, decorre que a sequência de funções  $\{S_n\}$  converge uniformemente para  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\eta^{k-1}}{k!} v^k$ . Consequentemente, segundo a Proposição I.1.14, temos

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\eta^{k-1}}{k!} v^k = \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_n S_n(\eta) = \lim_n \lim_{\eta \rightarrow 0} S_n(\eta) = 0.$$

□

#### §I.4 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

**DEFINIÇÃO I.4.1.** I. *Um conjunto  $\mathfrak{X}$  é um espaço vetorial topológico, quando for um espaço vetorial munido de uma topologia, segundo a qual as operações de soma vetorial e produto por escalar são contínuas;*

II. *Um conjunto  $L \subseteq \mathfrak{X}$  é limitado se, para toda vizinhança  $V$  de 0 existe um  $s_V > 0$  tal que*

$$L \subseteq tV \quad (t > s_V);$$

III. *Uma aplicação linear entre espaços vetoriais topológicos é limitada, quando a imagem de conjuntos limitados é um conjunto limitado.*

Vale salientar que qualquer subespaço vetorial de um espaço vetorial topológico não trivial é não limitado, consequentemente, a imagem de uma aplicação linear não identicamente nula — sendo esta um subespaço não trivial do contradomínio — deve ser necessariamente ilimitada.

**DEFINIÇÃO I.4.2.** *Se  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  são dois espaços vetoriais topológicos, denotaremos por  $\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ , o conjunto das aplicações lineares contínuas e limitadas definidas em  $\mathfrak{X}$  com imagens em  $\mathfrak{Y}$ . Quando  $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$  o denotaremos por  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ , ou simplesmente  $\mathcal{L}$  quando não houver risco de ambiguidade. Quando  $\mathfrak{Y} = \mathfrak{K}$ , denotaremos  $\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  por  $\mathfrak{X}^*$  e o chamaremos de dual de  $\mathfrak{X}$ .*

Quando  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  são espaços vetoriais normados o conjunto  $\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  é um espaço vetorial sobre  $\mathfrak{K}$ . Além disso, é um espaço vetorial normado segundo a norma

$$(I.13) \quad \|T\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\|Tx\|_{\mathfrak{Y}} : \|x\|_{\mathfrak{X}} \leq 1, x \in \mathfrak{X}\} \quad (T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})).$$

Esta é chamada norma da convergência uniforme.

DEFINIÇÃO I.4.3. Sejam  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  espaços vetoriais normados. Uma bijeção linear  $\Lambda \in \mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$  é chamada de isometria quando satisfizer

$$\|\Lambda x\|_{\mathfrak{Y}} = \|x\|_{\mathfrak{X}} \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Neste caso dizemos que os espaços  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  são isométricos, ou que existe uma isometria entre eles, Esta relação é usualmente denotada por  $\mathfrak{X} \approx \mathfrak{Y}$ .

LEMA I.4.4. Seja  $\mathfrak{X}$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathfrak{R}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Então  $\mathcal{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{X})$  é isométrico a  $\mathfrak{X}$ .

PROVA. Consideremos a aplicação  $\Lambda : \mathcal{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{X}) \longrightarrow \mathfrak{X}$  definida por  $\Lambda(T) = T(1)$ . Tal aplicação é linear, pois

$$\Lambda\left(\sum_i \alpha_i T_i\right) = \sum_i \alpha_i T_i(1) = \sum_i \alpha_i \Lambda(T_i) \quad (\alpha_i, T_i) \in \mathfrak{R} \times \mathcal{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{X}) \quad (i = 1, 2).$$

Agora seja  $x \in \mathfrak{X}$  e defina  $T_x \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{R}}$ , por

$$T_x(\kappa) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa x \quad (\kappa \in \mathfrak{R}).$$

Temos, que  $T_x$  assim definida é contínua, pois é limitada. Ademais

$$\Lambda(T_x) = T_x(1) = x,$$

i.e.,  $\Lambda$  é sobrejetiva. Suponhamos que  $T \in \ker(\Lambda)$ . Temos, necessariamente, que  $T(1) = 0$ . Consequentemente  $T \equiv 0$ . Portanto  $\ker(\Lambda) = \{0\}$  e  $\Lambda$  é injetiva, *a fortiori* bijetiva.

Por fim, é suficiente observar que

$$\|\Lambda(T)\| = \|T(1)\| = \sup_{|\kappa| \leq 1} \|T(\kappa)\| = \|T\| \quad (T \in \mathcal{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{X})).$$

Com isto, podemos inferir que  $\Lambda$  é uma isometria e, consequentemente,  $\mathfrak{X} \approx \mathcal{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{X})$ .  $\square$

PROPOSIÇÃO I.4.5. Sejam  $\mathfrak{X}$  um espaço vetorial normado e  $\mathfrak{Y}$  um  $B$ -espaço. Então  $\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  é um  $B$ -espaço.

PROVA. Consideremos uma sequência de Cauchy  $\{T_n\}$  em  $\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ . Decorre que  $\{T_n x\}$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathfrak{Y}$ . Como este, por sua vez, é completo, podemos definir a aplicação  $T \in \mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$  por

$$Tx = \lim_n T_n x.$$

Conspicuamente,

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= \lim_n T_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_n (\alpha T_n x + \beta T_n y) \quad (\alpha, \beta \in \mathfrak{R}, x, y \in \mathfrak{X}) \\ &= \alpha Tx + \beta Ty \end{aligned}$$

i.e.,  $T$  é linear. Seguidamente, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|T_m x - T_n x\| \leq \|T_m - T_n\| < \varepsilon \quad (m, n \geq N(\varepsilon), x \in \mathfrak{X}).$$

Fixando  $n$ , tomando o limite em  $m$  temos

$$\|Tx - T_n x\| \leq \varepsilon \quad (n \geq N(\varepsilon), x \in \mathfrak{X}),$$

o que prova que  $T$  é limite uniforme da sequência de aplicações lineares contínuas  $\{T_n\}$ . Do Corolário I.1.15  $T$  é contínua. Mais ainda, é limitada, pois é limitada na bola unitária fechada de  $\mathfrak{X}$ , o que finaliza a prova.  $\square$

PROPOSIÇÃO I.4.6.  $\mathcal{L}$  munido com (I.13) é uma  $B$ -álgebra.

PROVA. Basta fazer  $m$  igual a operação de composição, pois

$$\|m(T, S)\| \leq \|T\| \|S\| \quad (S, T \in \mathcal{L}),$$

o que finaliza a prova.  $\square$

LEMA I.4.7. Se  $T$  é um operador linear limitado com domínio  $\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{X}$  denso em  $\mathfrak{X}$ , então  $T$  admite uma extensão  $\overline{T}$  linear limitada em  $\mathfrak{X}$ .

PROVA. É natural definirmos para cada  $x \in \mathfrak{X}$

$$(I.14) \quad \overline{T}x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_n T x_n,$$

em que  $\{x_n\}$  é uma sequência arbitrária convergindo a  $x$ .

Primeiro provemos que (I.14) faz sentido, i.e., o limite existe, mas isto decorre da hipótese de  $T$  ser limitado. Com efeito, seja  $M > 0$  tal que  $\|Tx\| \leq M\|x\|$ , para todo  $x \in \mathfrak{D}(T)$ , a desigualdade

$$\|T x_m - T x_n\| \leq M\|x_m - x_n\| \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

acarreta que  $\{T x_n\}$  é Cauchy em no  $B$ -espaço  $\mathfrak{X}$ , em consequência convergente.

Agora, concebamos duas sequências  $\{x_n^{(i)}\}$  com  $i = 1, 2$ , tais que  $\lim_n x_n^{(i)} = x$ . De maneira homóloga ao raciocínio precedente, podemos concluir que  $\overline{T}x = \lim_n T x_n^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , o que prova que  $\overline{T} \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$ , está bem definida.

Em seguida, considerando  $\{x_n\}$  a sequência constante igual a  $x$ , podemos inferir  $\overline{T}$  é uma extensão de  $T$ .

Por fim, é suficiente observar que se  $x = \lim_n x_n$ , então vale a sentença

$$\|\overline{T}x\| \leq \lim_n \|T x_n\| \leq \lim_n M\|x_n\| \leq M\|x\| \quad (x \in \mathfrak{D}(T)),$$

i.e.,  $\overline{T}$  é limitada.  $\square$

LEMA I.4.8. Seja  $T$  um operador linear com domínio  $\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{X}$ . Então  $T$  é fechado se, e somente se,  $\mathfrak{D}(T)$  é um  $B$ -espaço segundo a norma  $\|\cdot\|_T$ , dada por

$$\|x\|_T \stackrel{\text{def}}{=} \|x\| + \|Tx\|.$$

PROVA. É aparente que  $\|\cdot\|_T$  é uma norma em  $\mathfrak{D}(T)$ . Primeiramente suponha que  $T$  seja fechado e consideremos uma sequência de Cauchy  $\{x_n\}$  no espaço métrico  $\mathfrak{D}(T)$  com a métrica  $\|\cdot\|_T$ . Isto implicará que  $\{x_n\}$  e  $\{Tx_n\}$  são ambas sequências de Cauchy em  $\mathfrak{X}$ . Como este último é um  $B$ -espaço, necessariamente existem  $x, y \in \mathfrak{X}$  tais que  $\lim_n \|x - x_n\| = \lim_n \|Tx_n - y\|_{\mathfrak{X}} = 0$ . Agora como  $T$  é fechado, podemos concluir que  $\lim_n \|Tx - Tx_n\| = 0$ . Em consequência,  $\lim_n \|x - x_n\|_T = 0$ , o que prova que  $\mathfrak{D}(T)$  é um  $B$ -espaço. Reciprocamente, suponhamos que  $\mathfrak{D}(T)$  seja completo segundo  $\|\cdot\|_T$ . Admitamos que  $\{x_n\}$  e  $\{Tx_n\}$  sejam tais que  $\lim_n \|x - x_n\| = \lim_n \|y - Tx_n\| = 0$ , com  $x, y \in \mathfrak{X}$ . Isto acarreta que  $\{x_n\}$  e  $\{Tx_n\}$  são sequências de Cauchy. Assim decorre que  $\{x_n\}$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathfrak{D}(T)$  segundo  $\|\cdot\|_T$ . Da hipótese,  $\{x_n\}$  converge para um  $z \in \mathfrak{D}(T)$ . Assim, necessariamente,  $x = z$  e  $y = \lim_n Tx_n = Tx$ , o que prova que  $T$  é fechado.  $\square$

Mais adiante faremos uso do *Teorema da limitação uniforme* ou Teorema de *Banach-Steinhaus*. Este teorema nos dá uma condição suficiente para inferirmos a equicontinuidade de uma família de aplicações lineares contínuas entre espaços vetoriais topológicos. As hipóteses deste teorema envolvem conceitos topológicos de categoria, entretanto para o que vamos trabalhar, nos limitaremos ao fato que espaços de Banach são de segunda categoria (não magros).

TEOREMA I.4.9 (S. BANACH- H. STEINHAUS). *Sejam  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  espaços vetoriais topológicos e,  $\mathcal{F}$  uma família de aplicações lineares contínuas entre  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$ . Se o conjunto  $L$  dos  $x$  cujas órbitas*

$$\mathcal{F}(x) = \{\Phi x : \Phi \in \mathcal{F}\} \quad (x \in \mathfrak{X})$$

*são limitadas em  $\mathfrak{Y}$  é de segunda categoria, então  $L = \mathfrak{X}$  e  $\mathcal{F}$  é equicontínua.*

PROVA. *vide* [12, pág. 44]. □

Assim temos o seguinte:

COROLÁRIO I.4.10. *Sejam  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  espaços de Banach e  $\mathcal{F}$  uma família de aplicações lineares contínuas entre  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$ . Se*

$$\sup_{\Phi \in \mathcal{F}} \|\Phi x\| < \infty \quad (x \in \mathfrak{X}),$$

*então existe  $M > 0$  tal que*

$$\|\Phi x\| \leq M \quad (\|x\| \leq 1, \Phi \in \mathcal{F}).$$

PROVA. Consideremos a bola aberta  $B_{\mathfrak{Y}}(0; 1)$  (vizinhança de 0 em  $\mathfrak{Y}$ ). Da equicontinuidade de  $\mathcal{F}$ , existe uma vizinhança  $V$  de 0, tal que

$$\Phi(V) \subseteq B_{\mathfrak{Y}}(0; 1) \quad (\Phi \in \mathcal{F}).$$

Como  $\bar{B}_{\mathfrak{X}}(0; 1)$  é limitado existe  $M > 0$  tal que  $\bar{B}_{\mathfrak{X}}(0; 1) \subseteq M \cdot V$ . Consequentemente

$$\Phi(\bar{B}_{\mathfrak{X}}(0; 1)) \subseteq M \cdot \Phi(V) \subseteq M \cdot B_{\mathfrak{Y}}(0; 1) \subseteq \bar{B}_{\mathfrak{Y}}(0; M).$$

Sinonimamente,

$$\|\Phi x\| \leq M \quad (\|x\| \leq 1, \Phi \in \mathcal{F}).$$

□

TEOREMA I.4.11. *Seja  $\{T_{\delta}\} \in \mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$  uma sequência generalizada de aplicações lineares entre  $F$ -espaços  $[**]$ . Se  $\lim_{\delta} T_{\delta}x$  existe para cada  $x$  em um conjunto fundamental e  $\{T_{\delta}x : \delta \in \Delta\}$  é limitado, para cada  $x \in \mathfrak{X}$ , então  $\{T_{\delta}x\}$  converge para cada  $x \in \mathfrak{X}$ . Ademais,*

$$Tx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta} T_{\delta}x \quad (x \in \mathfrak{X})$$

*define uma aplicação linear contínua.*

---

\*\*Espaço vetorial topológico munido de uma métrica invariante por translações que, segundo a qual, é completo.

PROVA. Primeiramente seja  $F$  o conjunto fundamental segundo o qual  $\{T_\delta x\}$  é convergente, para todo  $x \in F$ . Certamente  $\{T_\delta x\}$ , converge, para todo  $x \in [F]$  (o espaço vetorial gerado por  $F$ ) que, por definição, é denso em  $\mathfrak{X}$ . Como a família  $\{T_\delta x\}$  é limitada para todo  $x \in \mathfrak{X}$ , decorre do Teorema de Banach-Steinhaus que  $\{T_\delta\}$  é equicontínua e mais precisamente o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} T_\delta x$  é uniforme segundo  $\Delta$ . Portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\eta(\varepsilon) > 0$ , tal que

$$\varrho_{\mathfrak{Y}}(T_\delta x, 0) < \varepsilon \quad (\varrho_{\mathfrak{X}}(x, 0) < \eta, \delta \in \Delta).$$

Da densidade de  $[F]$  em  $\mathfrak{X}$ , temos que para  $x \in \mathfrak{X}$  arbitrário, existe  $y \in [F]$ , tal que  $\varrho_{\mathfrak{X}}(x, y) < \eta$  ou, equivalentemente,  $\varrho_{\mathfrak{X}}(x - y, 0) < \eta$ . Do limite  $\lim_\delta T_\delta y = T y$ , decorre que existe  $\delta(\varepsilon)$  tal que  $\varrho_{\mathfrak{Y}}(T_\alpha y, T_\beta y) < \varepsilon$ , para quaisquer  $\alpha, \beta \geq \delta(\varepsilon)$ . Concatenando todo o raciocínio anterior, temos

$$\varrho_{\mathfrak{Y}}(T_\alpha x, T_\beta x) \leq \varrho_{\mathfrak{Y}}(T_\alpha(x - y), 0) + \varrho_{\mathfrak{Y}}(T_\beta(y - x), 0) + \varrho_{\mathfrak{Y}}(T_\alpha y, T_\beta y) < 3\varepsilon,$$

para quaisquer  $\alpha, \beta \geq \delta(\varepsilon)$ , o que implica que  $\{T_\delta x\}$  é uma sequência de Cauchy generalizada para todo  $x \in \mathfrak{Y}$ . Como  $\mathfrak{Y}$  é completo  $\{T_\delta x\}$  converge (*vide* Lema I.1.10).

Sejam agora  $\kappa \in \mathfrak{K}$  e  $x, y \in \mathfrak{X}$ , temos

$$T(\kappa x + y) = \lim_\delta T_\delta(\kappa x + y) = \lim_\delta (\kappa T_\delta(x) + T_\delta(y)) = \kappa T(x) + T(y),$$

i.e.,  $T$  é linear. Por fim, provemos que  $T$  é contínua, para isto é suficiente recorrer ao Lema I.1.9 e observar que

I.  $\lim_\gamma T_\delta(x_\gamma) = T_\delta x$  existe para todo  $\delta \in \Delta$ ;

II.  $\lim_\delta T_\delta(x_\gamma) = T x_\gamma$  existe uniformemente para  $\gamma \in \Gamma$ ,

em que  $\{x_\gamma\}$  é uma sequência generalizada arbitrária tal que  $\lim_\gamma x_\gamma = 0$ . Concluimos que  $T$  é contínua em 0 e, consequentemente, é contínua em  $\mathfrak{X}$ .  $\square$

LEMA I.4.12. *Sejam  $\mathfrak{X}$  um espaço topológico,  $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{X}$ ,  $a$  um ponto limite de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathfrak{Y}$  um  $B$ -espaço e  $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y})^{\mathfrak{X}}$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)y$  existe para todo  $y \in \mathfrak{Y}$ , então existe uma vizinhança  $V$  de  $a$ , tal que  $\|f(x)\|$  é limitada superiormente.*

PROVA. Suponha, por redução ao absurdo que não exista uma tal vizinhança  $V$  de  $a$ . Podemos construir uma sequência  $\{x_n\}$  em  $\mathcal{E}$  tal que  $\lim_n x_n = a$  e  $\|f(x_n)\| \geq n$ . Pelo Teorema de Banach-Steinhaus, deve existir um  $y \in \mathfrak{Y}$  tal que  $\{\|f(x_n)y\|\}$  seja ilimitada. Suponha o contrário, i.e.,

$$\sup_n \|f(x_n)y\| < +\infty \quad (y \in \mathfrak{Y}).$$

Consequentemente, segundo o Corolário I.4.10,  $\{\|f(x_n)\|\}$  seria limitada, contradizendo a suposição  $\|f(x_n)\| \geq n$ . Não obstante, se  $\|f(x_n)y\|$  é ilimitada, então não poderíamos ter  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)y \in \mathfrak{Y}$ . Assim, deve existir uma vizinhança  $V$  de  $a$  tal que  $\|f(x)\|$  seja limitada superiormente em  $V \cap \mathcal{E}$ .  $\square$

LEMA I.4.13. *Sejam  $\mathfrak{X}$  um espaço topológico,  $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{X}$ ,  $a$  um ponto limite de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathfrak{Y}$  um  $B$ -espaço,  $f \in \mathfrak{Y}^{\mathcal{E}}$  e  $g \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y})^{\mathfrak{X}}$ , tais que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)y$  exista para todo  $y \in \mathfrak{Y}$ . Então verifica-se*

$$\lim_{x \rightarrow a} (g(x)f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \left[ g(x) \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \right].$$

PROVA. Do Lema I.4.12, existe uma vizinhança  $V$  de  $a$  tal que  $\|g(x)\| \leq M$ , para todo  $x \in V \cap \mathcal{E}$ , para algum  $M > 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , digamos que  $y = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , decorre que existe uma vizinhança  $U$  de  $a$  tal que

$$\|f(x) - y\| < \varepsilon \cdot M^{-1} \quad (x \in U \cap \mathcal{E}).$$

Desta forma, se  $x \in U \cap V \cap \mathcal{E}$ , então

$$\|g(x)f(x) - g(x)y\| \leq \|g(x)\| \cdot \|f(x) - y\| < \varepsilon.$$

□

TEOREMA I.4.14 (TEOREMA DO GRÁFICO FECHADO). *Suponha que as condições sejam validadas*

1.  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  sejam  $F$ -espaços;
2.  $\Lambda \in \mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$  é linear;
3.  $\{(x, \Lambda x) : x \in \mathfrak{X}\}$  seja fechado em  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ .

Então  $\Lambda$  é contínua.

PROVA. *vide* [12, pág. 51].

□

TEOREMA I.4.15 (S. BANACH-L. ALAOGU). *Seja  $\mathfrak{X}$  um  $B$ -espaço. Então a esfera unitária do dual  $\mathfrak{X}^*$  é compacta segundo a topologia fraca\* de  $\mathfrak{X}^*$ .*

PROVA. *vide* [5, pág. 424].

□

## §I.5 ESPAÇO DE HILBERT

DEFINIÇÃO I.5.1. *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial  $\mathfrak{H}$  sobre  $\mathfrak{R}$ , munido de um funcional  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  definido em  $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$  satisfazendo os seguintes axiomas:*

- I.  $\langle x, x \rangle = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ ;
- II.  $\langle x, x \rangle \geq 0$ , para qualquer  $x \in \mathfrak{H}$ ;
- III.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ , para quaisquer  $x, y \in \mathfrak{H}$ ;
- IV.  $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ;
- V. Se  $\{x_n\}$  é uma sequência em  $\mathfrak{H}$  tal que  $\lim_{m,n} \langle x_n - x_m, x_n - x_m \rangle = 0$ , então existe  $x \in \mathfrak{H}$  tal que  $\lim_n \langle x - x_n, x - x_n \rangle = 0$ .

Quando  $\mathfrak{R} = \mathbb{R}$ , é aparente que III equivale a simetria  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ . Doravante sempre quando nos referirmos a  $\mathfrak{H}$ , estamos a admitindo tacitamente que  $\mathfrak{H}$  é um espaço de Hilbert.

DEFINIÇÃO I.5.2. Ao funcional  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  daremos o nome de produto interno ou produto escalar em  $\mathfrak{H}$  e, ao número  $\langle x, y \rangle$  daremos o nome de produto interno ou produto escalar de  $x$  por  $y$ . Estipularemos de agora em diante  $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ . Diremos que  $x, y \in \mathfrak{H}$  são ortogonais quando  $\langle x, y \rangle = 0$  e, dois espaços lineares  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  são ortogonais (variedades ortogonais) quando  $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle = 0$ . Como é comum, representaremos simbolicamente tais asserções por  $x \perp y$  e  $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$ , respectivamente. Por fim, seja  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$ , o complemento ortogonal ou concisamente o ortocomplemento de  $\mathfrak{A}$  é o conjunto definido por

$$\mathfrak{A}^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \mathfrak{A} \rangle = 0\}.$$

Ocasionalmente quando se quer explicitar o espaço sobre o qual toma-se o complemento, escreve-se  $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{A}$ .

LEMA I.5.3. Para quaisquer  $x, y \in \mathfrak{H}$ , verifica-se:

(i) (Desigualdade de Cauchy-Schwarz):

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|;$$

(ii) (Desigualdade triangular):

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

(iii) (Condição de perpendicularismo):

$$\|\alpha x + y\| \geq \|y\|, \text{ para todo } \alpha \in \mathfrak{R} \text{ se, e somente se, } x \perp y.$$

PROVA. Primeiramente observemos que

$$(I.15) \quad 0 \leq \|\alpha x + y\|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(\alpha \langle y, x \rangle) \quad (\alpha \in \mathfrak{R}),$$

Se  $\langle x, y \rangle = 0$ , então (i) é trivialmente satisfeita. Portanto, suponhamos que  $\langle x, y \rangle \neq 0$ . Tomando

$$\alpha = \frac{-\langle x, y \rangle \cdot \|y\|}{\|x\|},$$

obtemos de (I.15) que

$$(I.16) \quad 0 \leq 2\|y\|^2 - 2|\langle x, y \rangle| \frac{\|y\|}{\|x\|} = \|\alpha x + y\|^2$$

o que acarreta (i). Ademais, se admitirmos que  $x \perp y$ , então à vista de  $|\alpha|^2 \|x\|^2 \geq 0$ , podemos concluir que  $\|\alpha x + y\| \geq \|y\|$ , para todo  $\alpha \in \mathfrak{R}$ . Por outro lado, se supormos a última consequente como premissa, a condição  $-2|\langle x, y \rangle| \|y\| \|x\|^{-1} \leq 0$  em (I.16) acarreta  $\langle x, y \rangle = 0$ , i.e.,  $x \perp y$ , a fortiori valida-se (iii). Por fim, lembrando que  $\Re(z) \leq |z|$ , para todo  $z \in \mathfrak{R}$ , podemos concluir (ii) com o auxílio de (i).  $\square$

COROLÁRIO I.5.4. O funcional  $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  é uma norma segundo a qual  $\mathfrak{H}$  é um B-espaço.

PROVA. Pelos resultados que agora dispomos, basta notar que o item V da definição I.5.1, implica que  $\mathfrak{H}$  é completo segundo esta norma.  $\square$

LEMA I.5.5. *Seja  $\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{H}$  um conjunto fechado convexo não vazio. Então existe um único  $x_0 \in \mathcal{K}$ , tal que*

$$(I.17) \quad \|x_0\| = \inf_{x \in \mathcal{K}} \|x\|.$$

PROVA. Estipulando que  $\eta = \inf_{x \in \mathcal{K}} \|x\|$ , escolhamos uma sequência  $\{x_n\}$  em  $\mathcal{K}$ , tal que  $\lim_n \|x_n\| = \eta$ . Da convexidade de  $\mathcal{K}$ , podemos concluir que  $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in \mathcal{K}$ , portanto  $\|x_n + x_m\|^2 \geq 4\eta^2$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , temos da identidade do paralelogramo a saber

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad (x, y \in \mathfrak{H}),$$

que

$$\|x_m - x_n\|^2 + 4\eta^2 \leq 4\eta^2 + \varepsilon$$

para  $m, n$  suficientemente grandes, em consequência  $\{x_n\}$  é uma sequência de Cauchy, como  $\mathfrak{H}$  é completo decorre que existe  $x_0 = \lim_n x_n \in \mathfrak{H}$ , da continuidade de  $\|\cdot\|$ , podemos inferir (I.17). Finalmente provemos a unicidade. Suponha por redução ao absurdo que exista  $x \in \mathcal{K}$  tal que  $\|x\| = \eta$ , é aparente que a sequência alternada  $\{y_n\}$  de termos  $x_0$  e  $x$  é tal que  $\lim_n \|y_n\| = \eta$ , pois  $\|x_0\| = \|x\| = \eta$ . Conforme vimos, o limite  $\lim_n \|x_n\|$  existe. Isto por sua vez implica  $x = x_0$ , porque caso contrário teríamos  $\|x_0\| \neq \|x\|$ , contradizendo a escolha de  $x$ .  $\square$

TEOREMA I.5.6. *Se  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$ , então  $\mathfrak{A}^\perp$  é um espaço linear fechado. Além disso, se  $\mathfrak{A}$  é um espaço linear fechado, então*

$$(I.18) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}^\perp.$$

PROVA. Concernente a primeira assertiva, a prova de que  $\mathfrak{A}^\perp$  é linear é imediata. Quanto a prova de que é fechado, decorre imediatamente do fato do produto escalar ser contínuo e, consequentemente,  $\mathfrak{A}^\perp$  é fechado.

Suponhamos, agora, que  $\mathfrak{A}$  seja subespaço linear fechado. Seja  $x \in \mathfrak{H}$ , inequivocadamente  $x - \mathfrak{A}$  é um conjunto convexo fechado trivialmente não vazio, pois  $\mathfrak{A}$  é um espaço linear. Conforme vimos, existe  $x_0 \in \mathfrak{A}$ , tal que  $\|x - x_0\| = \inf_{y \in \mathfrak{A}} \|x - y\|$ . Fazendo  $y_0 = x - x_0$  temos, necessariamente

$$\|y_0\| \leq \|y_0 - y\| \quad (y \in \mathfrak{A}).$$

Em conformidade com o Lema I.5.3, podemos inferir que  $y_0 \perp y$ , para todo  $y \in \mathfrak{A}$ . Portanto  $y_0 \in \mathfrak{A}^\perp$ , conformemente

$$x = x_0 + y_0 \in \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^\perp.$$

Por fim, se  $x \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^\perp$ , então da definição decorre que  $\langle x, x \rangle = 0$  que, por sua vez, acarreta  $x = 0$ . O que prova (I.18).  $\square$

TEOREMA I.5.7 (F. RIESZ-M. R. FRÉCHET). *Seja  $\varphi$  um funcional linear contínuo com domínio denso em  $\mathfrak{H}$ . Então existe um único  $y \in \mathfrak{D}(\varphi)$  tal que  $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$ , para todo  $x \in \mathfrak{D}(\varphi)$ .*

PROVA. Se  $\varphi \equiv 0$ , então basta tomar  $y = 0$ , caso contrário consideremos o conjunto  $\mathfrak{A} = \{\varphi = 0\}$ , em que

$$\{\varphi = 0\} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{H} : \varphi(x) = 0\}.$$

Necessariamente  $\mathfrak{A}^\perp \cap \mathfrak{D}(\varphi) \neq \{0\}$ , pois supondo por redução ao absurdo, i.e.,  $\mathfrak{D}(\varphi) \subseteq \mathfrak{A}$  ( $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}^\perp = \mathfrak{H}$ ), decorre que para cada  $x \in \mathfrak{D}(\varphi)$  existe uma sequência  $\{x_n\}$  em  $\{\varphi = 0\}$  tal que  $x = \lim_n x_n$ . Da continuidade de  $\varphi$ , podemos inferir que  $\varphi(x) = 0$ , o que acarreta

$\mathfrak{D}(\varphi) = \{\varphi = 0\}$  e, conseqüentemente,  $\varphi \equiv 0$ , o que contradiz a premissa. Conformemente, existe  $y_0 \in \mathfrak{A}^\perp \cap \mathfrak{D}(\varphi) \setminus \{0\}$ . Defina  $y = \alpha y_0$  com  $\bar{\alpha} = \varphi(y_0) \cdot \|y_0\|^{-2}$ , então

$$x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(y_0)} y_0 \in \mathfrak{A} \quad (x \in \mathfrak{D}(\varphi)),$$

pois

$$\varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(y_0)} y_0\right) = \frac{\varphi(x)\varphi(y_0) - \varphi(x)\varphi(y_0)}{\varphi(y_0)} = 0,$$

em conformidade

$$\langle x, y \rangle = \frac{\varphi(x)}{\varphi(y_0)} \langle y_0, y \rangle = \varphi(x).$$

Por fim, provemos a unicidade. Para isto, sejam  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ) tais que  $\varphi(x) = \langle x, y_i \rangle$ . Conformemente  $\langle y_1 - y_2, x \rangle = 0$ , para todo  $x \in \mathfrak{D}(\varphi)$ . Da densidade deste último, existe uma sequência  $\{x_n\}$  em  $\mathfrak{D}(\varphi)$  tal que  $y_1 - y_2 = \lim_n x_n$ . Assim

$$\|y_1 - y_2\|^2 = \lim_n \langle y_1 - y_2, x_n \rangle = 0,$$

o que acarreta  $y_1 = y_2$ .

□

Agora estamos em condições de definir o operador adjunto de um operador ilimitado em um espaço de Hilbert.

**DEFINIÇÃO I.5.8.** *Seja  $T$  um operador em  $\mathfrak{H}$  com domínio denso  $\mathfrak{D}(T)$ , definiremos o domínio de seu operador adjunto, como o conjunto que compreende aos elementos  $y \in \mathfrak{H}$ , tais que  $\langle Tx, y \rangle$  é contínuo.*

Conforme vimos, se estipularmos provisoriamente que  $\varphi_y \in \mathcal{L}(\mathfrak{D}(T), \mathfrak{R})$  seja definido por  $\varphi_y(x) = \langle Tx, y \rangle$ , para cada  $y \in \mathfrak{D}(T^*)$ , temos que existe um único  $y^* \in \mathfrak{D}(T)$  tal que  $\varphi_y(x) = \langle x, y^* \rangle$ . Convenientemente estipularemos  $T^*y = y^*$  e portanto vale

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad ((x, y) \in \mathfrak{D}(T) \times \mathfrak{D}(T^*)).$$

Em conformidade com a definição anterior, sempre quando fizermos referência ao adjunto de um operador  $T$  em um espaço de Hilbert  $\mathfrak{H}$ , estamos admitindo tacitamente que  $\mathfrak{D}(T)$  seja denso em  $\mathfrak{H}$ .

**LEMA I.5.9.** *Sejam  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ) os automorfismos em  $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ , definidos por*

$$A_i(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (y, (-1)^{i+1}x),$$

*e  $T$  uma transformação linear. Então*

$$A_1A_2 = -A_2A_1, \quad A_i^2 = (-1)^{i+1}I \quad \text{e} \quad \Gamma(T^*) = (A_2\Gamma(T))^\perp.$$

*Adicionalmente, se  $T$  é injetiva com imagem  $\mathfrak{I}(T)$ , então*

$$\Gamma(T^{-1}) = A_1\Gamma(T),$$

*em que  $\Gamma(S)$  denota o gráfico do operador  $S$ .*

PROVA. Seja  $(x, y) \in \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$  temos

$$A_1 A_2(x, y) = A_1(y, -x) = (-x, y) = A_2(-y, -x) = -A_2 A_1(x, y)$$

e

$$A_i^2(x, y) = ((-1)^{i+1}x, (-1)^{i+1}y) = (-1)^{i+1}I(x, y) \quad (i = 1, 2).$$

Da definição do operador adjunto, obtemos que  $(y, y^*) \in \Gamma(T^*)$  se, e somente se,

$$\langle A_2(x, Tx), (y, y^*) \rangle = \langle (Tx, -x), (y, y^*) \rangle = 0 \quad ((x, y) \in \mathfrak{D}(T) \times \mathfrak{D}(T^*)),$$

i.e., se, e somente se,  $(y, y^*) \in (A_2\Gamma(T))^\perp$ . Consequentemente  $\Gamma(T^*) = (A_2\Gamma(T))^\perp$ .

Finalmente supondo que  $T$  seja injetiva temos

$$\begin{aligned} \Gamma(T^{-1}) &= \{(y, T^{-1}y) : y \in \mathfrak{D}(T)\} \\ &= \{A_1(T^{-1}y, y) : y \in \mathfrak{D}(T)\} \\ &= \{A_1(x, Tx) : x \in \mathfrak{D}(T)\} \\ &= A_1\Gamma(T). \end{aligned}$$

□

LEMA I.5.10. Se  $T$  é um operador em  $\mathfrak{H}$ , então são válidas

- (i) Se  $\mathfrak{D}(T)$  é denso, então  $T^*$  é um operador linear fechado;
- (ii) Se  $T^{-1}$  tem domínio denso, então  $(T^*)^{-1}$  existe e  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ ;
- (iii) Se  $B$  é tal que  $\mathfrak{D}(B) = \mathfrak{H}$ , então

$$(T + B)^* = T^* + B^*, \quad (BT)^* = T^* B^*;$$

(iv)

$$\mathfrak{D}(T)^\perp = \ker(T^*).$$

PROVA. Começamos provando (i). É suficiente observar o Lema I.5.9 e o Teorema I.5.6, mais precisamente a identidade  $\Gamma(T^*) = (A_2\Gamma(T))^\perp$  e que ortocomplementos são obrigatoriamente fechados.

Prosseguindo, provemos o item (ii). Para provar que  $(T^*)^{-1}$  existe basta mostrar que  $\ker(T^*) = \{0\}$ . Para isto suponha que  $T^*y = 0$ . Da definição  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = 0$ , para todo  $x \in \mathfrak{D}(T)$ , como  $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T^{-1})$  é denso, decorre que  $y = 0$ , o que prova o requerido. Posteriormente provemos a identidade, para tanto observemos que

$$A_1\mathfrak{U}^\perp = (A_1\mathfrak{U})^\perp \quad (\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Gamma((T^*)^{-1}) &= A_1\Gamma(T^*) \\ &= A_1(A_2\Gamma(T))^\perp \\ &= (A_1A_2\Gamma(T))^\perp \\ &= (-A_2A_1\Gamma(T))^\perp \\ &= (A_2A_1\Gamma(T))^\perp \\ &= (A_2\Gamma(T^{-1}))^\perp \\ &= \Gamma((T^{-1})^*), \end{aligned}$$

que é suficiente para concluir a igualdade  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .

Em seguida, provemos (iii). Antes de tudo, observemos que faz sentido considerar  $B^*$  e  $(B + T)^*$ . Seja  $(x, y) \in \mathfrak{D}(T) \times \mathfrak{D}(T^*)$ , temos

$$\begin{aligned} \langle (B + T)x, y \rangle &= \langle Bx, y \rangle + \langle Tx, y \rangle \\ (I.19) \quad &= \langle x, B^*y \rangle + \langle x, T^*y \rangle \\ &= \langle x, (B^* + T^*)y \rangle \end{aligned}$$

Daí podemos inferir que o funcional  $\varphi_y(x) = \langle (B + T)x, y \rangle$  é contínuo e, portanto,  $y \in (B + T)^*$ . De (I.19) e da densidade de  $\mathfrak{D}(T)$ , decorre que  $B^* + T^* = (B + T)^*$ . Prova-se de forma análoga a identidade  $(BT)^* = T^*B^*$ .

Finalmente provemos (iv). Seja  $y \in \{T^* = 0\}$ . Temos

$$(I.20) \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = 0 \quad (x \in \mathfrak{D}(T)),$$

o que acarreta na pertinência  $y \in \mathfrak{Z}(T)^\perp$  e por maior razão a inclusão  $\{T^* = 0\} \subseteq \mathfrak{Z}(T)^\perp$ . Por outro lado, suponha que  $y \in \mathfrak{Z}(T)^\perp$ . Vale, portanto,  $\varphi_y(x) = \langle Tx, y \rangle = 0$ , para todo  $x \in \mathfrak{D}(T)$ . Desta maneira  $\varphi_y$  é contínua e *a fortiori*  $y \in \mathfrak{D}(T^*)$ . De (I.20) e da densidade de  $\mathfrak{D}(T)$ , podemos concluir que  $T^*y = 0$ , i.e.,  $y \in \{T^* = 0\}$ , o que prova a outra inclusão e finaliza a prova.  $\square$

**DEFINIÇÃO I.5.11.** *Seja  $\mathfrak{H}$  um espaço de Hilbert com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Diremos que um operador  $T$  é simétrico quando*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle y, Ty \rangle \quad (x, y \in \mathfrak{D}(T)).$$

*Quando  $T$  é densamente definido e  $T^* = T$ , diremos que  $T$  é autoadjunto. Se  $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  e  $U^* = U^{-1}$ , diremos que  $U$  é unitário. Sempre quando nos referirmos a operadores unitários e não houver menção explícita ao seu domínio, estamos admitindo tacitamente que  $U$  é um operador em um espaço de Hilbert  $\mathfrak{H}$ .*

**LEMA I.5.12.** *Um operador  $U$  é unitário se, e somente se, for sobrejetivo e uma isometria.*

**PROVA.** Se  $U$  é unitário, a fim de provar que  $U$  é sobrejetivo é suficiente provar que  $\mathfrak{D}(U^*) = \mathfrak{H}$ . Para tanto, provemos que  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D}(U^*)$ . Suponha que  $y \in \mathfrak{H}$ . Temos

$$|\langle Ux, y \rangle| \leq \|U\| \|x\| \|y\| \quad (x \in \mathfrak{H})$$

e, em consequência,  $\langle Ux, y \rangle$  é contínua para todo  $y \in \mathfrak{H}$ , o que prova por sua vez a inclusão requerida.

Para provarmos que  $U$  é uma isometria é suficiente observarmos

$$\langle Ux, Ux \rangle = \langle x, U^*Ux \rangle = \langle x, x \rangle \quad (x \in \mathfrak{H}).$$

Reciprocamente, suponhamos que  $U$  seja sobrejetora e uma isometria. Desta última suposição decorrerá que  $U$  preserva produto interno e, será evidentemente injetiva. Ademais, da sobrejetividade acarreta que será bijetiva, assim

$$\langle Ux, y \rangle = \langle Ux, UU^{-1}y \rangle = \langle x, U^{-1}y \rangle \quad ((x, y) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}),$$

o que prova  $U^* = U^{-1}$ , i.e.,  $U$  é unitário.  $\square$

## §I.6 INTEGRAÇÃO VETORIAL

No texto que segue sempre quando fizermos referência à  $\mathfrak{X}$ ,  $S$ ,  $\Sigma$ ,  $\mu$  estamos considerando um  $B$ -espaço  $\mathfrak{X}$ ,  $S$  um conjunto,  $\Sigma$  uma  $\sigma$ -álgebra em  $S$  e  $\mu$  uma medida contavelmente aditiva em  $\Sigma$ , i.e.,  $(S, \Sigma, \mu)$  é um espaço de medida.

DEFINIÇÃO I.6.1. I. Uma função  $\varphi \in \mathfrak{X}^S$  é simples se existir uma coleção finita de subconjuntos disjuntos aos pares  $\Sigma$ -mensuráveis  $\{A_i\}_{i \in I}$  ( $I$  finito), todos de medida finita e uma coleção finita de elementos  $\{x_i\}_{i \in I}$  em  $\mathfrak{X}$  tais que

$$\varphi = \sum_{i \in I} \chi_{A_i} x_i$$

com  $\chi_{A_i}$  sendo a função característica do conjunto  $A_i$ . Sua integral é definida por

$$\int \varphi \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in I} \mu(A_i) x_i;$$

II. Uma função  $f \in \mathfrak{X}^S$  é fortemente  $\Sigma$ -mensurável quando for limite forte de uma sequência de funções simples  $\varphi_n$   $\mu$ -q.s. ( $\mu$ -quase sempre), i.e.,

$$\lim_n \varphi_n(s) = f(s) \quad \mu\text{-q.s.}$$

III. Uma função  $f \in \mathfrak{X}^S$  é fracamente  $\Sigma$ -mensurável quando  $x^* f$  for  $\Sigma$ -mensurável para todo  $x^* \in \mathfrak{X}^*$  (dual de  $\mathfrak{X}$ ).

LEMA I.6.2. Se  $E$  é um conjunto enumerável, então o conjunto

$$\mathfrak{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in E^{\mathbb{N}} : \text{card} \{\varphi \neq 0\} < \aleph_0\}$$

é enumerável.

PROVA. Definindo

$$\mathfrak{F}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in E^{\mathbb{N}} : \text{card} \{\varphi \neq 0\} = n\},$$

temos

$$\mathfrak{F} = \bigcup_n \mathfrak{F}_n.$$

Em seguida, seja  $\varphi \in \mathfrak{F}_n$ . O conjunto  $\{\varphi \neq 0\} \subset \mathbb{N}$  pode ser ordenado naturalmente, nomeadamente pela ordem induzida dos naturais. Esta ordenação, por sua vez, nos fornece um único elemento  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  satisfazendo  $\alpha_i < \alpha_j$  se  $i < j$ . Em seguida tomando  $\beta \in E^n$  tal que  $\beta_i = \varphi(\alpha_i)$ , construíamos  $\Psi : \mathfrak{F}_n \rightarrow \mathbb{N}^n \times E^n$  dada por  $\Psi(\varphi) = (\alpha, \beta)$ . A própria construção de  $\Psi$  implica na sua boa definição.

Posteriormente provemos que  $\Psi$  é injetiva. Para este fim, consideremos  $\varphi, \psi \in \mathfrak{F}_n$  tais que  $\Psi(\varphi) = \Psi(\psi) = (\alpha, \beta)$ . A fim de provar que  $\varphi = \psi$ , provemos inicialmente que

$$(I.21) \quad A \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \neq 0\} = \{\psi \neq 0\}.$$

Seja  $n \in \{\varphi \neq 0\}$ , decorre que existe um  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $n = \alpha_i$ . Em virtude de  $\Psi(\psi) = (\alpha, \beta)$ , temos que  $\psi(n) = \psi(\alpha_i) \neq 0$ , i.e.,  $n \in \{\psi \neq 0\}$ . Em consequência,  $\{\varphi \neq 0\} \subseteq \{\psi \neq 0\}$ . Com um argumento simétrico, prova-se a outra inclusão e, consequentemente,

vale (I.21). Agora, seja  $n \in A$ , existe, portanto,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , tal que  $n = \alpha_i$ . Da igualdade  $\Psi(\varphi) = \Psi(\psi) = (\alpha, \beta)$ , vale

$$\varphi(\alpha_i) = \beta_i = \psi(\alpha_i),$$

Por conseguinte,  $\varphi = \psi$ .

Por fim, para provar que  $\Psi$  é sobrejetiva, consideremos  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times E^n$ , basta definir  $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $\varphi(n) = 0$ , para todo  $n \notin \{\alpha_i\}$ . Assim  $\Psi$  é uma bijeção, como  $\Psi(\mathfrak{F}_n) \subset \mathbb{N}^n \times E^n$  e, sendo este último enumerável podemos inferir que  $\mathfrak{F}_n$  é enumerável, sabendo que reunião enumerável de enumeráveis ainda é enumerável podemos finalmente concluir a prova.  $\square$

**COROLÁRIO I.6.3.** *Seja  $\{x_n\}$  uma sequência em um  $B$ -espaço então a envoltória linear fechada  $[\dagger\dagger]$  (o fecho de todas combinações lineares finitas de elementos de  $\{x_n\}$ ) é um  $B$ -subespaço separável.*

**PROVA.** Com a mesma notação do Lema (I.6.2), tome  $E$  como sendo um conjunto enumerável denso em  $\mathfrak{R}$ , em seguida observemos que

$$\mathfrak{E} = \left\{ \sum_n \varphi(n)x_n : \varphi \in \mathfrak{F} \right\}$$

é enumerável e denso na envoltória linear fechada. De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $\sum_{\iota \in I} \alpha_\iota x_\iota$  uma combinação linear arbitrária de elementos da sequência  $\{x_n\}$ , com  $I$  um subconjunto finito de  $\mathbb{N}$ , para cada  $\iota \in I$ . Tomemos  $\beta_\iota \in E$ , tal que  $|\alpha_\iota - \beta_\iota| < \varepsilon \gamma^{-1} 2^\iota$ , com  $\gamma > \max_\iota \|x_\iota\|$ . Definamos

$$\varphi(n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \beta_n, & n \in I; \\ 0, & n \notin I, \end{cases}$$

logo

$$\left\| \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota x_\iota - \sum_n \varphi(n)x_n \right\| = \left\| \sum_{\iota \in I} (\alpha_\iota x_\iota - \varphi(\iota)x_\iota) \right\| \leq \sum_{\iota \in I} |\alpha_\iota - \beta_\iota| \|x_\iota\| < \gamma \sum_{\iota \in I} |\alpha_\iota - \beta_\iota| < \varepsilon.$$

Imediatamente observemos que qualquer elemento  $x$  na envoltória linear fechada, é um limite de combinações lineares dos elementos da sequência  $\{x_n\}$ . Estes, por sua vez, são limites de elementos de  $\mathfrak{E}$ , por conseguinte este último é denso na envoltória linear fechada. Para ver que  $\mathfrak{E}$  é enumerável, consideremos  $\mathfrak{M}$  um conjunto maximal  $[\dagger\dagger]$  de vetores linearmente independentes em  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ , com respeito aos escalares em  $E$ , i.e., nenhum deles pode se escrito como uma combinação linear dos termos da sequência com coeficientes em  $E$ . Se  $\mathfrak{M}$  for finito, então  $\mathfrak{E}$  estará contido em um espaço  $\mathfrak{E}'$  equivalente a  $E^n$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ , que por sua vez é enumerável. Caso contrário é suficiente considerar a subsequência  $\{x_{n_k}\}$  de  $\{x_n\}$  cujos termos estejam em  $\mathfrak{M}$  e, em seguida tome

$$\mathfrak{E}' = \left\{ \sum_k \varphi(k)x_{n_k} : \varphi \in \mathfrak{F} \right\}.$$

Certamente  $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{E}'$  e  $\text{card } \mathfrak{E}' = \text{card } \mathfrak{F} = \aleph_0$ , o que conclui a prova.  $\square$

$\dagger\dagger$  Também conhecida na literatura por variedade linear fechada.

$\dagger\dagger$  A existência de tal conjunto é garantida pelo axioma de Zorn, bastando para isto considerar a coleção de todos os conjunto linearmente independentes segundo  $E$ , constituído de membros da sequência  $\{x_n\}$  e ordenado pela relação de inclusão.

LEMA I.6.4. *Seja  $\mathfrak{X}$  um espaço vetorial normado e  $x \in \mathfrak{X}$ . Então existe um funcional linear  $\varphi \in \mathfrak{X}^*$  tal que  $\varphi(x) = \|x\|$ . Em particular se  $x \neq 0$ , então vale  $\|\varphi\| = 1$ .*

PROVA. Primeiramente, se  $x = 0$ , é suficiente considerar o funcional identicamente nulo, caso contrário concebamos  $\mathfrak{Y} = \{\alpha x : \alpha \in \mathfrak{R}\}$ . Evidentemente,  $\mathfrak{Y}$  é um subespaço vetorial de  $\mathfrak{X}$ . Defina o funcional linear  $\psi \in \mathfrak{Y}^*$ , por  $\psi(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \|x\|$ , de sorte que  $|\psi(y)| \leq \|y\|$ , para todo  $y \in \mathfrak{Y}$ . Segundo o Teorema de *Hahn-Banach*, podemos obter uma extensão  $\varphi \in \mathfrak{X}^*$  de  $\psi$  tal que  $|\varphi(x)| \leq \|x\|$ , para todo  $x \in \mathfrak{X}$ .

Por fim, observemos que

$$|\varphi(\|x\|^{-1}x)| = 1,$$

*a fortiori*  $\|\varphi\| = 1$ . □

LEMA I.6.5. *Sejam  $\mathfrak{X}$  um espaço vetorial normado,  $\mathcal{E}$  um conjunto denso em  $\mathfrak{X}$  e  $\{\varphi_n\}$  uma sequência em  $\mathfrak{X}^*$  tal que*

- I.  $\{\varphi_n\}$  é limitada;
- II.  $\{\varphi_n\}$  converge fortemente para  $\varphi \in \mathfrak{X}^*$  em  $\mathcal{E}$ .

*Então  $\{\varphi_n\}$  converge fortemente para  $\varphi$  em  $\mathfrak{X}$ .*

PROVA. Seja  $x \in \mathfrak{X}$ . Em consequência da densidade de  $\mathcal{E}$  em  $\mathfrak{X}$ , existe uma sequência  $\{x_n\}$  cujo limite é  $x$ . Notemos que

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| &\leq |\varphi_n(x) - \varphi_n(x_k)| + |\varphi_n(x_k) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \varphi(x)| \\ (I.22) \quad &\leq \|\varphi_n\| \cdot \|x - x_k\| + |\varphi_n(x_k) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \varphi(x)| \\ &\leq \sup_m \|\varphi_m\| \cdot \|x - x_k\| + |\varphi_n(x_k) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \varphi(x)|. \end{aligned}$$

Das premissas, podemos tomar  $k$  suficientemente grande tal que

$$\sup_m \|\varphi_m\| \cdot \|x - x_k\| + |\varphi(x_k) - \varphi(x)| < 2^{-1}\varepsilon.$$

Para tal  $k$ , podemos tomar  $n$  suficientemente grande tal que

$$|\varphi_n(x_k) - \varphi(x_k)| < 2^{-1}\varepsilon.$$

Combinando as duas últimas desigualdades com (I.22) e observando que  $x$  é arbitrário, podemos concluir a prova. □

DEFINIÇÃO I.6.6. *Sejam  $\mathfrak{X}$  um espaço vetorial normado e  $\Delta \subseteq \Lambda \subseteq \mathfrak{X}^*$ . Diremos que  $\Delta$  é fracamente denso em  $\Lambda$ , quando todo elemento de  $\Lambda$  for o limite forte de uma sequência em  $\Delta$ .*

LEMA I.6.7 (S. BANACH). *Se  $\mathfrak{X}$  seja um espaço normado separável, então todo subconjunto  $\Lambda \subseteq \mathfrak{X}^*$  admite um subconjunto  $E$  enumerável e fracamente denso em  $\Lambda$ .*

PROVA. Nos concentraremos inicialmente em provar o resultado para um conjunto  $\Lambda$  cujas normas dos funcionais sejam limitadas uniformemente, i.e., existe  $\lambda > 0$ , tal que

$$\Lambda = \{\varphi \in \Lambda : \|\varphi\| \leq \lambda\}.$$

Se  $\mathfrak{X}$  é separável então existe um conjunto enumerável denso  $\mathcal{E}$ . Assim, seus termos podem ser arrançados em uma sequência *viz.*  $\{x_n\}$ . Em seguida construímos a sequência de conjuntos  $\{P_n\}$ , cujos termos sejam dados por

$$P_n = \{(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \in \mathfrak{R}^n : \varphi \in \Lambda\}.$$

Como  $\mathfrak{R}^n$  é separável, podemos determinar um conjunto enumerável denso  $E'_n \subseteq P_n$ . Seguidamente concebemos a sequência  $\{E_n\}$ , com termos dados por

$$E_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in \Lambda : (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \in E'_n\}.$$

Por construção,  $E_n$  é enumerável *a fortiori*

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_n E_n$$

o será. Além disso, pela própria construção, fixada  $\varphi$  decorre que para cada  $n \in \mathbb{N}$  podemos determinar  $\varphi_n \in E_n$ , tal que

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\varphi(x_i) - \varphi_n(x_i)| < \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

o que prova que  $\varphi_n$  converge fortemente para  $\varphi$  em  $\mathcal{E}$ . Como  $\sup_n \|\varphi_n\| \leq \lambda$ , recorrendo ao Lema I.6.5, podemos inferir que  $\{\varphi_n\}$  converge fortemente para  $\varphi$  em  $\mathfrak{X}$ .

Agora consideremos o caso em  $\Lambda$  é tal que as normas dos seus funcionais não seja limitadas uniformemente. Certamente

$$\Lambda = \bigcup_n \Lambda_n, \quad \Lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in \Lambda : \|\varphi\| \leq n\}.$$

Em conformidade com o que provamos, temos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , podemos tomar um conjunto  $F_n$  que é enumerável e fracamente denso em  $\Lambda_n$ . O conjunto

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_n F_n$$

é evidentemente enumerável. Seja, agora,  $\varphi \in \Lambda$ . Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\|\varphi\| \leq n$ . Assim podemos determinar uma sequência  $\{\varphi_k\}$  em  $F_n$  que converge fortemente para  $\varphi$ . Como este último é arbitrário, podemos concluir que  $E$  é fracamente denso em  $\Lambda$ .  $\square$

**LEMA I.6.8.** *Se  $\mathfrak{X}$  é um B-espço separável e  $h \in \mathfrak{X}^S$  é uma função fracamente  $\Sigma$ -mensurável, então  $\|h(s)\|$  é  $\Sigma$ -mensurável.*

**PROVA.** Primeiramente, definamos para cada  $a \in \mathbb{R}_+$  e  $g \in \mathfrak{X}^*$ , os conjuntos

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{s : \|h(s)\| \leq a\} \quad \text{e} \quad A_g \stackrel{\text{def}}{=} \{s : |g(h(s))| \leq a\}.$$

Seguidamente, pelo Lema I.6.7, existe  $E \subseteq \mathfrak{X}^*$  enumerável e fracamente denso em  $\bar{B}_1(0) = \{g \in \mathfrak{X}^* : \|g\| \leq 1\}$ , que podemos arranjar-lo em uma sequência  $\{g_n\}$ . Nestas condições vale

$$(I.23) \quad A = \bigcap_{\|g\| \leq 1} A_g = \bigcap_n A_{g_n}.$$

Com efeito, seja  $s \in A$ . Decorre da definição que  $\|h(s)\| \leq a$ . Seja agora  $g \in \bar{B}_1(0)$ . Em conformidade, vale

$$|g(h(s))| \leq \|g\| \|h(s)\| \leq \|h(s)\| \leq a$$

e, por conseguinte  $s \in A_g$ . Da arbitrariedade de  $g$ , vale a inclusão  $A \subseteq \bigcap_{\|g\| \leq 1} A_g$ . Como a última interseção em (I.23) compreende a uma subcoleção de  $\bar{B}_1(0)$ , decorre a inclusão  $\bigcap_{\|g\| \leq 1} A_g \subseteq \bigcap_n A_{g_n}$ . Agora, suponha que  $s \in \bigcap_n A_{g_n}$ . Temos que  $|g_n(h(s))| \leq a$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Considere  $g \in \bar{B}_1(0)$ . Do fato de  $\{g_n\}$  ser fracamente densa em  $\bar{B}_1(0)$ , temos que existe uma subsequência  $\{g'_n\}$  tal que  $\lim_n g'_n = g$  em  $\mathfrak{X}$ , *a fortiori*

$$|g(h(s))| = \lim_n |g'_n(h(s))| \leq a,$$

o que prova a inclusão  $\bigcap_n A_{g_n} \subseteq A_g$ , para todo  $g \in \bar{B}_1(0)$ . Assim, podemos inferir a inclusão  $\bigcap_n A_{g_n} \subseteq \bigcap_{\|g\| \leq 1} A_g$ . Seguidamente seja  $s \in \bigcap_{\|g\| \leq 1} A_g$ . Do Lema I.6.4, existe  $g \in \mathfrak{X}^*$  tal que  $|g(h(s))| = \|h(s)\|$  e  $\|g\| = 1$ . Como  $s \in A_g$ , decorre que  $\|h(s)\| \leq a$  e, consequentemente,  $s \in A$ . Por fim, basta usar o fato de que  $h$  é fracamente mensurável, isto por sua vez implica que  $A_{g_n} \in \Sigma$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Em conformidade com o que foi obtido  $A \in \Sigma$ . Da arbitrariedade de  $a \in \mathbb{R}_+$ , podemos concluir que  $\|h(s)\|$  é mensurável.  $\square$

**TEOREMA I.6.9 (B. J. PETTIS).** *Uma função  $f \in \mathfrak{X}^S$  é fortemente  $\Sigma$ -mensurável se, e somente se, for fracamente  $\Sigma$ -mensurável e for separavelmente valorizada  $\mu$ -q.s. i.e., existe um conjunto  $N \in \Sigma$  de medida nula tal que  $f(N^c)$  é separável.*

**PROVA.** Suponhamos que  $f$  seja fortemente  $\Sigma$ -mensurável, então  $f$  é um limite forte de funções simples  $\varsigma_n \in \mathfrak{X}^S$  em  $N^c$  tal que  $\mu(N) = 0$ . Consequentemente,  $g \circ f$  é um limite de funções simples  $g \circ \varsigma_n$ , para todo  $g \in \mathfrak{X}^*$ . Desta forma,  $f$  é fracamente  $\Sigma$ -mensurável. Com a notação do Corolário I.6.3, considerando  $\{x_n\}$  uma enumeração  $[\S\S]$  de  $\bigcup_n \varsigma_n(S)$ , decorre que a envoltória linear fechada gerada pela união das imagens  $\varsigma_n(S)$  é separável e contem o conjunto  $f(N^c)$ . Assim, podemos inferir que  $f$  é separavelmente valorizada  $\mu$ -q.s.

Reciprocamente, suponhamos que  $f$  seja separavelmente valorizada  $\mu$ -q.s. e fracamente  $\Sigma$ -mensurável. Podemos sem perda de generalidade supor que  $f(S)$  seja separável. Para isso basta, redefinir  $f$  dentro de um conjunto de medida nula conveniente. Desta maneira, segundo o Corolário I.6.3, podemos supor que  $f(S)$  está contido em um subespaço separável  $\mathfrak{Y}$ . Cobrindo  $f(S)$  por bolas abertas em  $\mathfrak{Y}$  de raio  $1/n$  com centros nos elementos  $f(s)$ , temos, em virtude da separabilidade de  $\mathfrak{Y}$ , que tal cobertura admite uma subcobertura enumerável  $\{\mathfrak{Y}_{mn} : m \in \mathbb{N}\}$ . Se  $x_{mn}$  é o centro da bola  $\mathfrak{Y}_{mn}$ , então  $\|f(s) - x_{mn}\|$  é mensurável, pois  $f$  é fracamente mensurável. Logo  $f(s) - x_{mn}$  o será e, certamente  $f(S) - x_{mn} \subseteq \mathfrak{Y}$  que é por sua vez separável. Assim, o Lema I.6.8 corrobora a assertiva. Conformemente  $E_{mn} = f^{-1}(\mathfrak{Y}_{mn})$  é  $\Sigma$ -mensurável e  $S = \bigcup_m E_{mn}$ . Posteriormente, definamos  $\varphi_n(s) = x_{mn}$ , se  $s \in E'_{mn} = E_{mn} \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} E_{in}$ . Por construção, vale

$$\|f(s) - \varphi_n(s)\| < \frac{1}{n} \quad (s \in S).$$

Como cada  $\varphi_n$  é constante em cada membro de  $\{E'_{mn}\}_m$ , podemos inferir que  $\varphi_n$  é fortemente mensurável e, do fato de  $f$  ser o limite uniforme de  $\{\varphi_n\}$ , decorre que  $f$  será fortemente mensurável.  $\square$

<sup>§§</sup>O caso em que a união é finita pode ser tratado como um caso particular, bastando que todos os elementos daquela estejam na sequência ao menos uma vez.

COROLÁRIO I.6.10. *Seja  $S$  um espaço topológico separável e  $(S, \mathcal{B}(S), \mu)$  o espaço de medida Borel. Se  $f$  é contínua, então  $f$  é fortemente mensurável.*

PROVA. Usando o teorema anterior, é suficiente provar que  $f$  tenha sua imagem um conjunto separável e fracamente mensurável. Para este fim, seja  $E$  um subconjunto enumerável denso de  $S$ . Decorre que  $f(E)$  é enumerável e denso em  $f(S)$ . Com efeito, considere uma vizinhança  $V$  de  $f(s) \in f(S)$ . Da continuidade de  $f$ , decorre que  $f^{-1}(V)$  é uma vizinhança de  $s$ . Da suposição inicial vem  $E \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ . Consequentemente

$$\emptyset \neq f(E \cap f^{-1}(V)) \subseteq f(E) \cap V,$$

o que prova a assertiva. Finalmente seja  $x^* \in \mathfrak{X}^*$ . Claramente  $x^*f$  é contínua *a fortiori* mensurável, e, portanto,  $f$  é fracamente mensurável.  $\square$

DEFINIÇÃO I.6.11 (INTEGRAL DE S. BOCHNER). *Uma função  $f \in \mathfrak{X}^S$  é Bochner integrável quando existir uma sequência de funções simples  $\{\varphi_n\}$  convergindo fortemente para  $f$  tal que*

$$(I.24) \quad \lim_n \int \|f - \varphi_n\| d\mu = 0.$$

*Para todo conjunto  $\Sigma$ -mensurável  $E$  definimos integral de Bochner de  $f$  sobre o conjunto  $E$  por*

$$(I.25) \quad \int_E f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lim_n \int \chi_E \varphi_n d\mu.$$

Antes de prosseguirmos indaguemos se a definição é significativa, i.e., se o limite (I.25) existe e seja independente da sequência de funções  $\{\varphi_n\}$ . Primeiramente, averiguemos que  $\|f - \varphi_n\|$  é  $\Sigma$ -mensurável, pois é limite  $\mu$ -q.s. de uma sequência de funções reais simples *viz.*  $\{\|\varphi_m - \varphi_n\|\}_m$ . Em seguida, seja  $E \in \Sigma$ . Para assertarmos que o limite no lado esquerdo de (I.25) existe, é suficiente inferirmos que a sequência  $I_n$  dada por

$$I_n = \int \chi_E \varphi_n d\mu$$

é Cauchy, pois  $\mathfrak{X}$  é Banach. De fato, decorre de

$$\begin{aligned} \|I_m - I_n\| &= \left\| \int \chi_E \varphi_n d\mu - \int \chi_E \varphi_m d\mu \right\| \\ &= \left\| \int \chi_E (\varphi_n - \varphi_m) d\mu \right\| \\ &\leq \int \chi_E \|(\varphi_n - \varphi_m)\| d\mu \\ &\leq \int \|f - \varphi_n\| d\mu - \int \|f - \varphi_m\| d\mu \end{aligned}$$

e de (I.24).

Seguidamente, averiguemos que o limite é independente da sequência. Para tal, considere duas sequências  $\{\varphi_n\}$  e  $\{\phi_n\}$  satisfazendo as condições da Definição I.6.11. Temos

$$\begin{aligned} \left\| \int \chi_E \varphi_n d\mu - \int \chi_E \phi_n d\mu \right\| &= \left\| \int \chi_E (\varphi_n - \phi_n) d\mu \right\| \\ &\leq \int_E \|(\varphi_n - \phi_n)\| d\mu \\ &\leq \int \|f - \varphi_n\| d\mu + \int \|f - \phi_n\| d\mu \end{aligned}$$

e portanto a independência decorre de (I.24).

PROPOSIÇÃO I.6.12. *Seja  $f \in \mathfrak{X}^S$  uma função fortemente  $\Sigma$ -mensurável. Então  $f$  é Bochner integrável se, e somente se,  $\|f\|$  for Lebesgue integrável. Além disso, vale*

$$\left\| \int_E f \, d\mu \right\| \leq \int_E \|f\| \, d\mu \quad (E \in \Sigma).$$

PROVA. Seja  $\{\varphi_n\}$  uma sequência de funções simples satisfazendo as condições da definição I.6.11 e,  $E \in \Sigma$ . Temos, evidentemente,

$$\int_E \|f\| \, d\mu \leq \int_E \|f - \varphi_n\| \, d\mu + \int_E \|\varphi_n\| \, d\mu,$$

o que prova que  $\|f\|$  é  $\mu$ -integrável a Lebesgue. Logo faz sentido a desigualdade

$$\left| \int_E \|f\| \, d\mu - \int_E \|\varphi_n\| \, d\mu \right| \leq \int_E \|f - \varphi_n\| \, d\mu.$$

De (I.24) e da última desigualdade vem

$$\lim_n \int_E \|\varphi_n\| \, d\mu = \int_E \|f\| \, d\mu.$$

Em consequência,

$$\begin{aligned} \left\| \int_E f \, d\mu \right\| &= \left\| \lim_n \int \chi_E \varphi_n \, d\mu \right\| \\ &= \lim_n \left\| \int \chi_E \varphi_n \, d\mu \right\| \\ &\leq \lim_n \int_E \|\varphi_n\| \, d\mu \\ &= \int_E \|f\| \, d\mu, \end{aligned}$$

para todo  $E \in \Sigma$ . Reciprocamente, suponhamos que  $\|f\|$  seja Lebesgue integrável. Sejam  $\eta > 1$  e  $\{\varphi_n\}$  uma sequência de funções simples convergindo a  $f$   $\mu$ -q.s. Consideremos a sequência  $\{\psi_n\}$  cujos termos sejam dados por

$$\psi_n(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi_n(s), & \|\varphi_n(s)\| \leq \eta \|f(s)\|; \\ 0, & \|\varphi_n(s)\| > \eta \|f(s)\|. \end{cases}$$

Podemos afirmar que  $\lim_n \psi_n = f$   $\mu$ -q.s. De fato, se  $\lim_n \varphi_n = f$   $\mu$ -q.s. então existe um conjunto  $N \in \Sigma$  de medida nula, tal que  $\lim_n \varphi_n = f$  em  $N^c$ . Seja  $s \in N^c$ , decorre que para todo  $n$  suficientemente grande vale  $\|\varphi_n(s)\| \leq \eta \|f(s)\|$ , o que prova que  $\varphi_n(s) = \psi_n(s)$ , para todo  $n$  suficientemente grande, *a fortiori*

$$\lim_n \|f(s) - \psi_n(s)\| = \lim_n \|f(s) - \varphi_n(s)\| = 0.$$

Seja agora

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in S : \lim_n \|f(s) - \psi_n(s)\| = 0\},$$

o raciocínio previamente exposto nos permite inferir que  $N^c \subseteq R$ . Em consequência  $R^c \subseteq N$ . Que por sua vez, implica  $\mu(R^c) = 0$ . Conformemente,  $\lim_n \|f(s) - \psi_n(s)\| = 0$   $\mu$ -q.s. Imediatamente observemos que

$$\|f(s) - \psi_n(s)\| \leq (1 + \eta)\|f(s)\| \quad ((n, s) \in \mathbb{N} \times S).$$

Como  $\|f(s)\|$  é Lebesgue integrável e  $\lim_n \|\psi_n(s) - f(s)\| = 0$   $\mu$ -q.s. decorre do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_n \int \|f - \psi_n\| d\mu = 0.$$

Isto finaliza a prova. □

**PROPOSIÇÃO I.6.13.** *Seja  $T$  uma aplicação linear limitada entre espaços de Banach  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$ . Se  $f \in \mathfrak{X}^S$  é Bochner  $\mu$ -integrável, então  $Tf \in \mathfrak{Y}^S$  é Bochner  $\mu$ -integrável e*

$$\int_E Tf d\mu = T \int_E f d\mu \quad (E \in \Sigma).$$

**PROVA.** Seja  $\{\varphi_n\}$  uma sequência de funções simples convergindo fortemente para  $f$   $\mu$ -q.s. tal que

$$\lim_n \int \|f - \varphi_n\| d\mu = 0.$$

Em consequência,  $\{T\varphi_n\}$  é uma sequência de funções simples convergindo fortemente para  $Tf$   $\mu$ -q.s.. Além disso, vale

$$0 \leq \lim_n \int \|Tf - T\varphi_n\| d\mu \leq \|T\| \cdot \lim_n \int \|f - \varphi_n\| d\mu = 0,$$

o que prova que  $Tf$  é Bochner  $\mu$ -integrável. Decorre da continuidade de  $T$  (é limitada) e da definição da integral de Bochner que

$$\int Tf d\mu = \lim_n \int T\varphi_n d\mu = \lim_n T \int \varphi_n d\mu = T \int f d\mu.$$

Isto finaliza a prova. □

**COROLÁRIO I.6.14.** *Sejam  $\mathfrak{B}$  uma  $B$ -álgebra e  $v \in \mathfrak{B}$ . Se  $f \in \mathfrak{B}^S$  é Bochner  $\mu$ -integrável, então  $v \cdot f \in \mathfrak{B}^S$  é Bochner  $\mu$ -integrável e*

$$\int_E v \cdot f d\mu = v \cdot \int_E f d\mu \quad (E \in \Sigma).$$

**PROVA.** É suficiente observar que  $T \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}$  dada por  $Tu = v \cdot u$  é linear e limitada. □

**TEOREMA I.6.15.** *Sejam  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$   $B$ -espaços,  $T$  uma aplicação linear fechada com domínio  $\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{X}$  e com imagens em  $\mathfrak{Y}$ . Se  $f \in \mathfrak{D}(T)^S$  é tal que  $f$  e  $Tf$  são Bochner integráveis, então*

$$\int_E Tf d\mu = T \int_E f d\mu \quad (E \in \Sigma).$$

PROVA. Se  $f$  é integrável necessariamente deve ser fortemente mensurável, o que por sua vez acarreta que  $f$  deve ser separavelmente valorizada  $\mu$ -q.s. (*vide* Teorema I.6.9). Sem perda de generalidade, podemos admitir que ela o é sempre. Assim suponha que  $\mathfrak{F}(f) = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ . Temos, portanto,  $f = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k} x_k$ , em que  $\{A_k\}$  é a sequência de conjuntos disjuntos aos pares, cujos termos sejam dados por  $A_k = f^{-1}(x_k)$ , necessariamente mensuráveis.

Em seguida, notemos que a sequência de funções simples  $\{\varphi_n\}$ , com termos dados por  $\varphi_n = \sum_{k=0}^n \chi_{A_k} x_k$ , converge para  $f$  em toda parte. Além disso, como  $f$  é Bochner integrável, temos da Proposição I.6.12 que  $\|f\|$  é Lebesgue integrável. Portanto

$$\int \|f - \varphi_n\| d\mu \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) \|x_k\| \leq \int \|f\| d\mu < \infty, \quad (E \in \Sigma).$$

Fazendo  $n$  tender ao infinito, obtemos

$$\lim_n \int \|f - \varphi_n\| d\mu = 0.$$

Seguidamente, provemos que

$$(I.26) \quad \lim_n \int_E T \varphi_n d\mu = \int_E T f d\mu \quad (E \in \Sigma).$$

Usando a hipótese de que  $Tf$  é Bochner integrável e, consequentemente, que  $\|Tf\|$  é Lebesgue integrável, podemos deduzir que

$$\left\| \int_E T \varphi_n d\mu - \int_E T f d\mu \right\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) \|T x_k\| \leq \int \|T f\| d\mu < \infty \quad (E \in \Sigma).$$

Como anteriormente, fazendo  $n$  tender ao infinito, podemos inferir (I.26).

Finalmente, do que foi provado e da hipótese de que  $T$  é fechado, derivamos

$$\int_E T f d\mu = \lim_n \int_E T \varphi_n d\mu = T \left( \lim_n \int_E \varphi_n d\mu \right) = T \int_E f d\mu \quad (E \in \Sigma),$$

e o resultado segue.  $\square$

## §I.7 ALGUNS RESULTADOS AUXILIARES

Doravante estamos supondo que  $\mathfrak{X}$  é um  $B$ -espaço e que o intervalo  $[a, b]$  não seja degenerado, i.e.,  $a \neq b$ . Também suporemos durante todo o texto, a menos da menção explícita em contrário, que sempre quando for assertado que uma função  $f$  com imagens em um espaço de Banach é integrável, deve-se entender que será integrável no sentido de Bochner.

LEMA I.7.1. *Sejam  $S$  um espaço topológico,  $(S, \mathcal{B}(S), \mu)$  o espaço de medida Borel e  $f \in \mathfrak{X}^S$  fortemente mensurável limitada em  $E \in \mathcal{B}(S)$  de medida finita. Então  $f$  é integrável sobre  $E$ .*

PROVA. É suficiente observar que

$$\int_E \|f\| d\mu \leq \mu(E) \cdot \sup_{s \in E} \|f(s)\| < \infty$$

e a prova decorre da Proposição I.6.12.  $\square$

LEMA I.7.2. Se  $f \in \mathfrak{X}^{[a,b]}$  é contínua em  $c \in [a, b]$ , então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(s) d\mu(s) = f(c).$$

PROVA. Da continuidade de  $f$  em  $c$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|f(s) - f(c)\| < \varepsilon \quad (s \in B_\delta),$$

com

$$B_\delta \stackrel{\text{def}}{=} (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b].$$

Desta forma, se  $h \in \mathbb{R}$  é tal que  $c + h \in B_\delta$ , então

$$\left\| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(s) - f(c) d\mu(s) \right\| \leq \sup_{s \in B_\delta} \|f(s) - f(c)\| \leq \varepsilon,$$

provando o requerido. □

COROLÁRIO I.7.3. Se  $f \in \mathfrak{X}^{[a,b]}$  é contínua em  $c \in [a, b]$ , então  $g \in \mathfrak{X}^{[a,b]}$  dada por

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^t f(s) d\mu(s)$$

é tal que  $g'(c) = f(c)$ .

PROVA. É suficiente observar que para  $|h|$  suficientemente pequeno vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(s) d\mu(s) - f(c) &= \frac{1}{h} \int_a^{c+h} f(s) d\mu(s) - \frac{1}{h} \int_a^c f(s) d\mu(s) - f(c) \\ &= \frac{g(c+h) - g(c)}{h} - f(c). \end{aligned}$$

Fazendo  $h \rightarrow 0$  o resultado decorre do Lema anterior. □

LEMA I.7.4. Se  $f \in \mathfrak{X}^{[a,b]}$  é contínua e  $f'_+ \equiv 0$  em  $[a, b]$ , então  $f$  é constante em  $[a, b]$ .

PROVA. Sejam  $c \in [a, b]$  e  $\varepsilon > 0$ , desde que  $f'_+(c) = 0$ , existe  $m < b$ , tal que

$$(I.27) \quad \|f(t) - f(c)\| < \varepsilon(t - c) \quad (t \in [c, m)).$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que  $m$  seja o maior número menor que  $b$ , tal que (I.27) é válida. Necessariamente  $m = b$ . De fato, suponhamos, por redução ao absurdo, que  $m < b$ . De maneira análoga, existe  $n < b$  tal que

$$(I.28) \quad \|f(t) - f(m)\| < \varepsilon(t - m) \quad (t \in [m, n)).$$

Em virtude da continuidade de  $f$ , podemos inferir de (I.27) e (I.28) que, para  $t \in [m, n)$ , vale

$$\|f(t) - f(c)\| \leq \|f(t) - f(m)\| + \|f(m) - f(c)\| < \varepsilon(t - m) + \varepsilon(m - c) = \varepsilon(t - c),$$

o que contradiz a maximalidade de  $m$ . Em consequência,  $m = b$ , portanto,

$$(I.29) \quad \|f(t) - f(c)\| < \varepsilon(t - c) \quad (t \in [c, b)).$$

Da arbitrariedade de  $\varepsilon > 0$ , podemos concluir que  $f$  é constante em  $[c, b)$ . Ademais, da arbitrariedade de  $c \in [a, b)$ , podemos inferir que  $f$  é constante em  $(a, b)$ . Por fim, da continuidade de  $f$  em  $[a, b]$  podemos, finalmente, concluir a tese. □

COROLÁRIO I.7.5. Sejam  $f, F \in \mathfrak{X}^{[a,b]}$  tais que  $f$  é contínua e  $F$  diferenciável satisfazendo  $F' = f$ . Então

$$\int_a^b f(s) d\mu(s) = F(b) - F(a).$$

PROVA. Conforme o Corolário I.7.3 e o Lema I.7.4 podemos concluir que

$$(F - g)'_+ = F'_+ - g'_+ = f - f \equiv 0.$$

Usando o Lema I.7.4, segue que  $F - g$  é constante e, portanto,

$$F(b) - F(a) = g(b) - g(a) = \int_a^b f(s) d\mu(s),$$

concluindo a prova.  $\square$

COROLÁRIO I.7.6. Se  $f \in \mathfrak{X}^{[a,b]}$  é contínua e continuamente derivável à direita, então  $f$  é continuamente derivável.

PROVA. Consideremos  $g \in \mathfrak{X}^{[a,b]}$  dada por

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^t f'_+(s) d\mu(s).$$

Pelo Corolário I.7.3, sabemos que  $g'(t) = f'_+(t)$ , a fortiori  $g$  é continuamente derivável. Em virtude do Lema I.7.4 e do fato  $(f - g)'_+ = 0$ , podemos deduzir que  $f - g$  é constante, em consequência  $f$  é continuamente derivável.  $\square$

LEMA I.7.7. Sejam  $\mathfrak{X}$  um  $B$ -espaço e  $f \in \mathfrak{X}^{(a,b)}$  uma função continuamente diferenciável em  $(a, b)$ . Então o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t)$$

é uniforme em  $(a, b)$ .

PROVA. Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $t \in (a, b)$ . Da continuidade uniforme, temos que existe  $\delta > 0$ , tal que

$$\|f'(t+\eta) - f'(t)\| < \varepsilon \quad (|\eta| < \delta).$$

Logo

$$\left\| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - f'(t) \right\| \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|f'(t+\eta) - f'(t)\| d\mu(\eta) \leq \varepsilon,$$

para  $h$  tal que  $t+h \in (t-\delta, t+\delta) \cap (a, b)$ .  $\square$

Finalizemos esta seção com um comentário concernente a medidas definidas por integrais indefinidas de funções reais estendidas não negativas, i.e., funções em com imagens em  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Primeiro consideremos um espaço de medida  $(S, \Sigma, \mu)$  e  $f \in \overline{\mathbb{R}}_+$  Lebesgue integrável. Então a função de conjuntos  $\lambda \in \mathbb{R}_+^\Sigma$  definida por

$$\lambda(E) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E f d\mu \quad (E \in \Sigma)$$

é uma medida em  $\Sigma$ , absolutamente contínua com respeito a  $\mu$ , i.e.,  $\lambda(E) = 0$ , para todo  $E \in \Sigma$  tal que  $\mu(E) = 0$ . Isto, por sua vez, é equivalente (*vide* [1]) a afirmar que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta(\varepsilon) > 0$ , tal que

$$\lambda(E) < \varepsilon \quad (\mu(E) < \delta(\varepsilon)).$$

Baseando-se nisto, podemos inferir o

LEMA I.7.8. Se  $f \in \mathfrak{X}^{[a,b]}$  é integrável em  $S = [a, b]$ , então

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^t f \, d\mu \quad (t \in [a, b])$$

é uniformemente contínua em  $[a, b]$ .

PROVA. Dado  $\varepsilon > 0$ , em conformidade com o que foi dito anteriormente existe  $\delta(\varepsilon) > 0$ , tal que

$$\left\| \int_a^t f \, d\mu - \int_a^s f \, d\mu \right\| \leq \left\| \int_s^t f \, d\mu \right\| \leq \int_s^t \|f\| \, d\mu < \varepsilon$$

para quaisquer  $s, t \in E$ , tais que  $s < t$  e  $|s - t| < \delta(\varepsilon)$ . □

*Referências ao capítulo I.* Para as noções de convergência em espaços de Banach, espaços de Banach, álgebra de Banach e propriedades da função exponencial em álgebras de Banach *vide* [3]. Para os resultados de convergência envolvendo sequências generalizadas *vide* [5] e *cf.* [11]. No que diz respeito aos resultados relativos às transformações lineares *vide* [3], [5] e [12]. Para os resultados que dizem respeito aos espaços de Hilbert *vide* [6] e [12]. E, finalmente, para os resultados referentes à integral de Bochner e resultados suplementares de integração *vide* [1], [8], [9] e [14].

## CAPÍTULO II

# TEORIA BÁSICA DOS SEMIGRUPOS

### SUMÁRIO

O desenvolvimento da teoria dos semigrupos e a sua aplicação à teoria das equações diferenciais parciais deve-se principalmente ao estudo do problema de Cauchy, feito pelos matemáticos Einar Hille e Kôzaku Yosida, posteriormente generalizado pelo matemático Ralph S. Phillips. Neste momento, a teoria dos semigrupos encontra-se extensivamente generalizada, como por exemplo, os semigrupos equicontínuos de classe  $C_0$  em espaços localmente convexos, ou, os semigrupos de distribuições. Tal teoria é aplicável a várias outras áreas da matemática além do estudo de EDPs, como por exemplo semigrupos associados a processos estocásticos na teoria das probabilidades.

Neste trabalho, nos restringiremos ao estudo de semigrupos de operadores limitados em espaços de Banach. Começamos o presente capítulo com a definição de semigrupos em álgebras de Banach, em seguida trataremos o nosso objeto principal de estudo, prosseguimos com o estudo dos semigrupos fortemente contínuos. A razão de se considerar tais semigrupos é que quando, se trabalha na solução de um problema de Cauchy abstrato, os operadores presentes no problema são, em geral, ilimitados. Isto se deve ao fato que o domínio de tais operadores não compreender ao espaço adjacente sobre o qual está se trabalhando, ou melhor, porque seus domínios não são completos segundo a topologia induzida. A seguir, trataremos condições necessárias e suficientes para obtermos semigrupos do último tipo. Aqui, um teorema desempenha um papel fundamental, o famoso Teorema de *Hille-Yosida-Phillips*, descoberto independentemente por E. Hille e K. Yosida e, posteriormente melhorado por R.S. Phillips. Finalizaremos este capítulo com o estudo dos  $C_0$ -grupos, pseudoresolventes e semigrupos adjuntos. Isto irá nos fornecer um ferramental para as aplicações mais adiante.

A ideia por trás dos semigrupos de operadores limitados, talvez encontra inspiração na função exponencial  $\exp \in (0, \infty)^{\mathbb{R}}$  definida pela série de potências

$$\exp(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Como é bem sabido da análise, possui as seguintes propriedades:

(i)  $\exp(0) = 1$ ;

(ii)  $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ , para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$  (cf. Proposição I.3.3).

É por meio dela que determinamos uma solução para o problema clássico de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) = au(t), & t > 0; \\ u(0) = x. \end{cases}$$

A saber,  $u(t) = x \exp(at)$ , em que  $a, x \in \mathbb{R}$  são números dados.

Conforme veremos mais adiante, tomaremos as duas propriedades mencionadas da função exponencial como axiomas para os objetos que vamos estudar. Isto nos fornecerá um aparato que, segundo o qual, poderemos determinar uma solução para o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) = Au(t), & t > 0; \\ u(0) = x, \end{cases}$$

em que  $x$  é um elemento arbitrário de um  $B$ -espaço  $\mathfrak{X}$ ,  $A$  um operador não necessariamente limitado e  $u$  uma função de variáveis reais tomando valores no domínio de  $A$ .

## §II.1 SEMIGRUPOS

DEFINIÇÃO II.1.1. *Seja  $\mathfrak{B}$  uma  $B$ -álgebra com unidade  $1_{\mathfrak{B}}$ . Uma função  $T \in \mathfrak{B}^{\mathbb{R}_+}$  [\* é um semigrupo em  $\mathfrak{B}$  ( $\mathfrak{B}$ -semigrupo) se satisfizer os seguintes axiomas:*

I.  $T(0) = 1_{\mathfrak{B}}$ ;

II.  $T(s+t) = T(s)T(t)$ , para quaisquer  $s, t \in \mathbb{R}_+$  (axioma de semigrupo).

Quando  $\mathfrak{B} = \mathcal{L}(\mathfrak{X})$  ( $\mathfrak{X}$  é um  $B$ -espaço) a função  $T$  será chamada de semigrupo de operadores limitados sobre  $\mathfrak{X}$  (ou um semigrupo em  $\mathcal{L}$ ).

DEFINIÇÃO II.1.2. *Um semigrupo  $T$  em  $\mathcal{L}$  é uniformemente contínuo quando*

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - T(0)\| = 0.$$

Doravante, nesta seção, estamos admitindo que  $T$  seja um semigrupo uniformemente contínuo em uma  $B$ -álgebra  $\mathfrak{B}$  arbitrária.

LEMA II.1.3.  *$T$  é limitada em todo intervalo limitado de  $\mathbb{R}_+$ .*

PROVA. Dado  $\varepsilon > 0$ , decorre da continuidade de  $T$  à direita em 0 que existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|T(s)\| < \kappa \quad (s \in (0, \delta)),$$

com  $\kappa = \varepsilon + \|1_{\mathfrak{B}}\|$ . Agora dado  $t > 0$  existe segundo o postulado de Eudoxo, um  $n \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $t = n\kappa + \varrho$ , com  $\varrho \in (0, \delta)$ . Tomando  $\omega = \delta^{-1} \ln \kappa$ , obtemos

$$\omega t = \frac{t}{\delta} \ln \kappa = \ln \kappa^{t/\delta}.$$

Sabendo que

$$\frac{t}{\delta} = n + \frac{\varrho}{\delta} \geq n,$$

tem se

$$\|T(t)\| = \|T(n\kappa + \varrho)\| \leq \|T(n\kappa)\| \|T(\varrho)\| \leq \kappa^{n+1} = \kappa \kappa^n \leq \kappa \kappa^{t/\delta} = \kappa e^{\omega t},$$

o que é suficiente para concluir a prova. □

---

\*Ao definirmos semigrupo, poderíamos igualmente considerar um conjunto indexado por  $\mathbb{R}_+$ . Desta forma, é comum definir um semigrupo como uma família  $\{T(t) \in \mathfrak{B} : t \in \mathbb{R}_+\}$ .

PROPOSIÇÃO II.1.4.  $T$  é contínua, i.e.,

$$(II.1) \quad \lim_{t \rightarrow s} \|T(s) - T(t)\| = 0 \quad (s \in \mathbb{R}_+).$$

PROVA. Se  $s = 0$ , a continuidade é equivalente a continuidade à direita e, portanto, vale (II.1). Seja agora  $s > 0$ . Pelo axioma de semigrupo e da propriedade da norma relativa ao produto em  $\mathfrak{B}$ , temos

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(s+t) - T(s)\| \leq \lim_{t \downarrow 0} (\|T(s)\| \|T(t) - I\|) = 0.$$

Isto, por sua vez, implica

$$\lim_{t \downarrow s} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

Temos também

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(s-t) - T(s)\| \leq \lim_{t \downarrow 0} (\|T(s-t)\| \|T(t) - 1_{\mathfrak{B}}\|) = 0,$$

pois, conforme o Lema anterior,  $T(s-t)$  é limitada em toda vizinhança de 0. Equivalentemente,

$$\lim_{t \uparrow s} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

Em síntese,

$$\lim_{t \rightarrow s} \|T(s) - T(t)\| = 0,$$

o que encerra a prova.  $\square$

No que segue, vamos restringir a integração no espaço de medida  $(S, \mathcal{B}(S), \mu)$ , sendo  $S \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B}(S)$  a  $\sigma$ -álgebra Borel em  $S$  e  $\mu$  a medida de Lebesgue usual.

PROPOSIÇÃO II.1.5.  $T$  é integrável sobre todo compacto  $K \subseteq \mathbb{R}_+$ .

PROVA. Decorre do Lema I.7.1.  $\square$

PROPOSIÇÃO II.1.6. Vale o seguinte resultado de derivação:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\zeta}^{\zeta+t} T \, d\mu = T(\zeta) \quad (\zeta \in \mathbb{R}_+).$$

PROVA. Visto que  $T$  é uniformemente contínuo, a prova decorre do Lema I.7.2.  $\square$

Com base nos resultados anteriores obtemos o

TEOREMA II.1.7.  $T \in \mathfrak{B}^{\mathbb{R}_+}$  satisfaz

- (i)  $T(0) = 1_{\mathfrak{B}}$ ;
- (ii)  $T(s+t) = T(s)T(t)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ;
- (iii)  $\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - T(0)\| = 0$

se, e somente se, existir  $v \in \mathfrak{B}$ , tal que  $T(t) = \exp(tv)$ .

PROVA. Certamente, se  $T(t) = \exp(tv)$ , com  $v \in \mathfrak{B}$ , podemos inferir facilmente que os axiomas (i)–(iii) são satisfeitos, *vide* Seção I.3. Reciprocamente, suponha que  $T \in \mathfrak{B}^{\mathbb{R}_+}$  satisfaça (i)–(iii). Decorre da proposição imediatamente anterior (fazendo  $\varsigma = 0$ ) que podemos tomar  $\tau > 0$  tal que

$$\left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau T \, d\mu - 1_{\mathfrak{B}} \right\| < 1.$$

Segundo a Proposição I.2.2 podemos concluir que  $\int_0^\tau T \, d\mu \in \mathfrak{B}^{-1}$ . Do Corolário I.6.14 e do axioma de semigrupo obtemos

$$\begin{aligned} \frac{T(t) - 1_{\mathfrak{B}}}{t} \int_0^\tau T \, d\mu &= \frac{1}{t} \int_0^\tau T(s+t) \, d\mu(s) - \frac{1}{t} \int_0^\tau T(s) \, d\mu(s) \\ &= \frac{1}{t} \int_\tau^{\tau+t} T(s) \, d\mu(s) - \frac{1}{t} \int_0^t T(s) \, d\mu(s). \end{aligned}$$

Fazendo  $t \downarrow 0$  em ambos membros da última igualdade temos novamente da Proposição I.2.2 que

$$v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^+}{dt} T(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t) - 1_{\mathfrak{B}}}{t} = (T(\tau) - 1_{\mathfrak{B}}) \cdot \left( \int_0^\tau T \, d\mu \right)^{-1} \in \mathfrak{B}.$$

Agora, dado  $s > 0$ , temos

$$\frac{d^+}{dt} T(s) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(s+t) - T(s)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \left( \frac{T(t) - 1_{\mathfrak{B}}}{t} \cdot T(s) \right) = v \cdot T(s).$$

Analogamente

$$\frac{d^-}{dt} T(s) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(s) - T(s-t)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \left( \frac{T(t) - 1_{\mathfrak{B}}}{t} \cdot T(s-t) \right) = v \cdot T(s).$$

Portanto  $T$  é derivável em  $\mathbb{R}_+$ .

Finalmente, consideremos a função  $\varphi \in \mathfrak{B}^{\mathbb{R}_+}$  dada por  $\varphi(t) = \exp(-tv)T(t)$ . Temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \varphi(s) &= \left( \frac{d}{ds} \exp(-sv) \right) \cdot T(s) + \exp(-sv) \cdot \frac{d}{ds} T(s) \\ &= -\exp(-sv)vT(s) + \exp(-sv)vT(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Consequentemente,  $\varphi$  é constante e, em virtude de  $\varphi(0) = 1_{\mathfrak{B}}$  e  $\exp(-sv)^{-1} = \exp(sv)$ , podemos finalmente inferir que

$$T(t) = \exp(-tv)^{-1} \cdot 1_{\mathfrak{B}} = \exp(tv).$$

□

## §II.2 $C_0$ -SEMIGRUPOS

DEFINIÇÃO II.2.1. Um semigrupo  $T$  em  $\mathcal{L}$  é fortemente contínuo quando

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t)x - x\| = 0 \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Neste caso, o semigrupo  $T$  é dito ser de classe  $C_0$  (ou um  $C_0$ -semigrupo).

OBSERVAÇÃO II.2.2. Doravante, sempre quando não for deixado explícito a caracterização de  $\mathfrak{X}$ , estamos admitindo tacitamente que este é um  $B$ -espaço e, sempre quando nos referirmos ao símbolo  $\mathcal{L}$ , estamos considerando  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ .

Conforme foi visto na seção anterior, um semigrupo  $T$  em  $\mathcal{L}$  uniformemente contínuo admite uma notação exponencial, i.e., existe um operador  $A \in \mathcal{L}$  tal que

$$T(t) = \exp(tA).$$

Desta forma, por analogia ao caso escalar, é natural considerar — em certo sentido — um semigrupo  $T$  como uma função exponencial.

Para o caso em que o semigrupo é de classe  $C_0$ , o problema é um pouco mais delicado. Neste caso, podemos, em certo sentido, determinar uma representação exponencial por meio de um operador  $A$  nem sempre limitado. Vimos, para o caso uniformemente contínuo, que o operador  $A$  era dado pelo limite

$$\lim_{h \downarrow 0} A(h)$$

com

$$A(h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T(h) - I}{h}.$$

Em geral temos a

DEFINIÇÃO II.2.3. O gerador infinitesimal de um semigrupo em  $\mathcal{L}$  é definido por

$$(II.2) \quad Ax \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \downarrow 0} A(h)x \quad (x \in \mathfrak{D}(A)),$$

sendo  $\mathfrak{D}(A)$  o conjunto dos  $x \in \mathfrak{X}$  para os quais o limite em (II.2) existe, i.e., o domínio de  $A$ .

PROPOSIÇÃO II.2.4.  $\mathfrak{D}(A)$  é um subespaço vetorial de  $\mathfrak{X}$  e  $A$  é um operador linear.

PROVA. Decorre da própria definição. □

EXEMPLO II.2.5. Seja  $F \subseteq \overline{\mathbb{R}}_+$  um intervalo ilimitado à direita. Então a função  $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y})^{\mathbb{R}_+}$ , com  $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(F; \mathfrak{X})$ , definida por

$$T(t)f(s) \stackrel{\text{def}}{=} f(s+t) \quad ((s, t) \in F \times \mathbb{R}_+),$$

é um  $C_0$ -semigrupo em  $\mathfrak{Y}$ , cujo gerador infinitesimal  $A$  é o operador derivada, i.e.,  $Af = f'$ , para todo  $f \in \mathfrak{D}(A)$ .

PROVA.

I. Observemos, inicialmente, que

$$T(0)f(s) = f(s) \quad ((f, s) \in \mathfrak{Y} \times F).$$

Em particular,  $T(0) = I_{\mathfrak{Y}}$ ;

II. Para todo  $(f, s) \in \mathfrak{Y} \times F$ ,

$$T(t+u)f(s) = f(t+u+s) = T(t)T(u)f(s) \quad (t, u \in \mathbb{R}_+).$$

Por maior razão,  $T(t+u) = T(t)T(u)$ , para quaisquer  $u, t \in \mathbb{R}_+$ ;

III. Primeiramente observemos que  $F$  é compacto. Seja  $f \in \mathfrak{Y}$ , esta deve ser necessariamente uniformemente contínua em  $F$ . Portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que

$$\|f(s) - f(t+s)\|_{\mathfrak{X}} < \varepsilon \quad ((s, t) \in F \times [0, \delta)).$$

Daí vem

$$\|T(t)f - f\| \leq \varepsilon \quad (t \in [0, \delta))$$

e, da arbitrariedade de  $f \in \mathfrak{Y}$ , podemos concluir

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t)f - f\|_{\mathfrak{Y}} = 0 \quad (f \in \mathfrak{Y}).$$

Em seguida, seja  $A$  o gerador infinitesimal de  $T$  e  $f \in \mathfrak{D}(A)$ . Temos

$$\lim_{h \downarrow 0} \|Af - A(h)f\|_{\mathfrak{Y}} = 0.$$

Necessariamente,

$$\lim_{h \downarrow 0} \left\| Af(s) - \frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right\|_{\mathfrak{X}} = 0 \quad (s \in F)$$

e, em consequência,  $f'_+ = Af \in \mathfrak{Y}$ . Assim  $f'_+$  é contínua em cada intervalo compacto limitado  $[a, b] \subseteq F$ . Como  $f$  é contínua em  $F$ , o será em  $[a, b]$ . Invocando o Corolário I.7.6,  $f$  deve ser derivável em  $[a, b]$ . Como este último é arbitrário,  $f$  será derivável em  $F$  e, em particular,  $Af = f'_+ = f'$ .  $\square$

PROPOSIÇÃO II.2.6. *Todo  $C_0$ -semigrupo  $T$  é limitado em todo intervalo limitado contido em  $\mathbb{R}_+$ .*

PROVA. Em virtude do limite  $\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x$ , para todo  $x \in \mathfrak{X}$ , decorre do Lema I.4.12 que existem  $\eta, M > 0$  tais que  $\|T(t)\| \leq M$ , para todo  $t \in [0, \eta]$ . Do fato  $T(0) = 1$ , decorre que  $M \geq 1$ . Procedendo como no Lema II.1.3 existe  $\omega > 0$  tal que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

e isto é suficiente para concluirmos a prova.  $\square$

COROLÁRIO II.2.7. *Seja  $T$  um  $C_0$ -semigrupo. Então a função  $T_x \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}_+}$  dada por  $T_x(t) = T(t)x$  é contínua.*

PROVA. A prova procede analogamente à prova do Teorema II.1.4, trocando o limite uniforme pelo limite forte e usando a proposição imediatamente anterior.  $\square$

LEMA II.2.8 (E. HILLE). *Se  $f \in \mathbb{R}^{(a, +\infty)}$  ( $a \geq 0$ ) é subaditiva e limitada em todo intervalo limitado, então*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = \inf_{t > a} \frac{f(t)}{t}.$$

PROVA. Seja  $\alpha = \inf_{t > a} f(t)/t$ . Temos que  $\alpha \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ . Consideremos  $\nu > \alpha$ . Da definição de ínfimo, existe  $b \in (a, +\infty)$ , tal que  $f(b) < \nu b$ . Seja agora  $t \in (a, +\infty)$ . Decorre do postulado de Eudoxo que existe  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $t = nb + r$ ,  $r \in [0, b)$ . Temos, portanto,

$$(II.3) \quad \alpha \leq \frac{f(t)}{t} = \frac{f(bn + r)}{t} \leq \frac{f(b)}{b} + \frac{f(r)}{t} < \nu + \frac{f(r)}{t}.$$

Como  $f$  é limitada em todo intervalo limitado, decorre

$$\sup_{r \in [0, b)} f(r) < +\infty.$$

De (II.3), obtemos

$$\alpha \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} \leq \nu.$$

Por fim, da arbitrariedade de  $\nu \geq \alpha$ , inferimos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = \alpha.$$

□

**COROLÁRIO II.2.9.** *Se  $T$  é um  $C_0$ -semigrupo, então para todo  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\beta > \omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t},$$

*existe  $M_\beta \geq 1$ , tal que*

$$\|T(t)\| \leq M_\beta \cdot e^{\beta t} \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

**PROVA.** Antes de tudo façamos  $f(t) = \ln \|T(t)\|$ , temos para  $s, t \in \mathfrak{D}(f)$ , que

$$f(s+t) = \ln \|T(t+s)\| \leq \ln(\|T(t)\| \|T(s)\|) = \ln \|T(s)\| + \ln \|T(t)\| = f(s) + f(t).$$

Assim,  $f$  é subaditiva, e como  $\|T(t)\|$  é limitada em todo intervalo limitado em  $\mathbb{R}_+$ , *a fortiori*  $f$  o será. Portanto, as hipóteses do Lema anterior são validadas e, em conformidade vale a identidade

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \omega_0.$$

Seguidamente seja  $\beta > \omega_0$ . Da última igualdade, existe  $\delta > 0$  tal que

$$(II.4) \quad \frac{\ln \|T(t)\|}{t} < \beta \quad (t \in (\delta, +\infty)).$$

Temos também das hipóteses que

$$(II.5) \quad M_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in [0, \delta]} \|T(t)\| < +\infty.$$

Imediatamente, dado  $t \in \mathbb{R}_+$ , temos pelo postulado de Eudoxo que existe  $(n, r) \in \mathbb{Z}_+ \times [0, \delta)$ , tal que  $t = n\delta + r$ . Assim

$$\ln \|T(t)\| \leq \ln \|T(n\delta)\| + \ln \|T(r)\|.$$

Em consequência de (II.4) e (II.5), temos

$$\|T(t)\| \leq \|T(r)\| \cdot e^{\beta n\delta} \leq M_\beta \cdot e^{\beta t}.$$

□

Na notação do corolário anterior, o número  $\omega_0$  recebe o nome de *tipo do semigrupo*.

TEOREMA II.2.10. *Seja  $A$  o gerador infinitesimal de  $T$ .*

a) *Vale o seguinte resultado de derivação:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\varsigma}^{\varsigma+t} T(s)x \, d\mu(s) = T(\varsigma)x \quad ((\varsigma, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathfrak{X});$$

b) *Para todo  $x \in \mathfrak{X}$  verifica-se*

$$\int_0^{\varsigma} T(s)x \, d\mu(s) \in \mathfrak{D}(A) \quad e \quad A\left(\int_0^{\varsigma} T(s)x \, d\mu(s)\right) = T(\varsigma)x - x;$$

c)

$$\frac{d}{dt}T(\varsigma)x = AT(\varsigma)x = T(\varsigma)Ax \quad ((\varsigma, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathfrak{D}(A));$$

d) *Dados  $\varsigma, \tau \in \mathbb{R}_+$ , vale*

$$T(\tau)x - T(\varsigma)x = \int_{\varsigma}^{\tau} T(s)Ax \, d\mu(s) = \int_{\varsigma}^{\tau} AT(s)x \, d\mu(s) \quad (x \in \mathfrak{D}(A)).$$

PROVA.

a) Vimos que  $T_x$  é contínua para cada  $x \in \mathfrak{X}$  (*vide* Corolário II.2.7). Em consequência, a prova decorre do Lema I.7.2.

b) Se  $\varsigma = 0$ , as duas identidades são evidentes. Portanto, suponhamos que  $\varsigma > 0$ . Considerando  $t \in (0, \varsigma)$ , temos portanto

$$\begin{aligned} \frac{T(t) - I}{t} \int_0^{\varsigma} T(s)x \, d\mu(s) &= \frac{1}{t} \int_0^{\varsigma} T(s+t)x \, d\mu(s) - \frac{1}{t} \int_0^{\varsigma} T(s)x \, d\mu(s) \\ &= \frac{1}{t} \int_t^{t+\varsigma} T(s)x \, d\mu(s) - \frac{1}{t} \int_0^{\varsigma} T(s)x \, d\mu(s) \\ &= \frac{1}{t} \int_{\varsigma}^{t+\varsigma} T(s)x \, d\mu(s) + \int_t^{\varsigma} T(s)x \, d\mu(s) - \frac{1}{t} \int_0^{\varsigma} T(s)x \, d\mu(s) \\ &= \frac{1}{t} \int_{\varsigma}^{t+\varsigma} T(s)x \, d\mu(s) - \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, d\mu(s). \end{aligned}$$

Em seguida, fazendo  $t \downarrow 0$ , temos do item anterior que

$$A\left(\int_0^{\varsigma} T(s)x \, d\mu(s)\right) = T(\varsigma)x - x.$$

c) Seja  $x \in \mathfrak{D}(A)$ . Primeiramente notemos que

$$AT(\varsigma)x = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} T(\varsigma)x = \lim_{t \downarrow 0} T(\varsigma) \frac{T(t) - I}{t} x = T(\varsigma)Ax \quad (\varsigma \in \mathbb{R}_+),$$

o que prova que  $T(\varsigma)x \in \mathfrak{D}(A)$ . Em seguida, observemos que

$$\frac{d^+}{dt}T(\varsigma)x = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(\varsigma+t) - T(\varsigma)}{t}x = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t) - I}{t}T(\varsigma)x = AT(\varsigma)x \quad (\varsigma \in \mathbb{R}_+).$$

Em particular,

$$\frac{d}{dt}T(0) = Ax.$$

Agora, suponha  $\varsigma > 0$ . Para  $h$  suficientemente pequeno vale

$$\left\| \frac{T(\varsigma) - T(\varsigma-h)}{h}x - T(\varsigma)Ax \right\| \leq \|T(\varsigma-h)\| \left\| \frac{T(h) - I}{h}x - Ax \right\| + \|T(\varsigma-h)Ax - T(\varsigma)Ax\|.$$

Conforme vimos,  $\|T(\varsigma-h)\|$  é limitado em uma vizinhança de 0, fazendo  $t \downarrow 0$ , obtemos

$$\frac{d^-}{dt}T(\varsigma)x = T(\varsigma)Ax.$$

Consequentemente,

$$\frac{d}{dt}T(\varsigma)x = AT(\varsigma)x = T(\varsigma)Ax \quad (\varsigma \in \mathbb{R}_+).$$

d) Isto decorre do Teorema fundamental do cálculo, integrando a identidade do item anterior.

□

**COROLÁRIO II.2.11.** *Seja  $A$  o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $T$ . Então  $\mathfrak{D}(A)$  é denso em  $\mathfrak{X}$  e  $A$  é um operador fechado.*

**PROVA.** Do item b) e Teorema (II.2.10) vale a pertinência  $t^{-1} \int_0^t T(s) d\mu(s) \in \mathfrak{D}(A)$ , para todo  $x \in \mathfrak{X}$ . Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \int_0^t T(s)x d\mu(s) = x.$$

Por conseguinte,  $\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{X}$ . Para provarmos que  $A$  é fechado, consideremos uma sequência  $\{x_n\}$  em  $\mathfrak{D}(A)$  tal que

$$\lim_n x_n = x \quad \text{e} \quad \lim_n Ax_n = y,$$

Segundo o item d) do teorema anterior, segue que

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n d\mu(s).$$

Sabemos que existe  $\delta > 0$ , tal que  $\|T(s)\|$  é limitado em  $[0, \delta]$ . Portanto, para  $t \leq \delta$ , temos

$$\left\| \int_0^t T(s)Ax_n d\mu - \int_0^t T(s)y d\mu \right\| \leq \delta \cdot \|Ax_n - y\| \cdot \sup_{s \in [0, \delta]} \|T(s)\| \quad (t \leq \delta).$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , acarreta

$$\lim_n \int_0^t T(s)Ax_n d\mu = \int_0^t T(s)y d\mu \quad (t \leq \delta).$$

Posteriormente, observemos

$$T(t)x - x = \lim_n (T(t)x_n - x_n) = \lim_n \int_0^t T(s)Ax_n d\mu = \int_0^t T(s)y d\mu \quad (t \leq \delta),$$

Assim, podemos concluir

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} A(t)x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y d\mu = y.$$

□

**COROLÁRIO II.2.12.** *Um  $C_0$ -semigrupo  $T$  tem um gerador infinitesimal limitado se, e somente se, ele for uniformemente contínuo.*

**PROVA.** Certamente, se o semigrupo for uniformemente contínuo, então seu gerador infinitesimal é limitado. Agora, suponhamos que um semigrupo tenha um gerador infinitesimal limitado  $A$ . Seja  $x \in \mathfrak{X}$ . Da densidade de  $\mathfrak{D}(A)$  em  $\mathfrak{X}$ , existe uma sequência  $\{x_n\}$  em  $\mathfrak{X}$  tal que  $\lim_n x_n = x$ . Como  $A$  é limitado, existe  $M > 0$  tal que

$$\|A(x_n - x_m)\| \leq M\|x_n - x_m\|.$$

Decorre que  $\{Ax_n\}$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathfrak{X}$ . Logo, em virtude de  $\mathfrak{X}$  ser Banach e do fato de  $A$  ser um operador fechado, deriva-se a identidade  $\lim_n Ax_n = Ax$ . Por este motivo, podemos assertar que  $A$  está definido em todo  $\mathfrak{X}$ . Como  $\lim_{t \downarrow 0} A(h)x = x$ , para todo  $x \in \mathfrak{X}$ , temos do Lema I.4.12 que existem  $\delta, K > 0$ , tais que

$$(II.6) \quad \sup_{h \in [0, \delta]} \|A(h)\| < K.$$

Do fato de  $T$  ser fortemente contínuo, podemos inferir que para  $s \geq 0$ , existe  $M_\delta > 0$ , tal que

$$\|T(t)\| \leq M_\delta \quad (t \in \mathbb{R}_+ \cap (s - \delta, s + \delta)).$$

Assim,

$$(II.7) \quad \|T(t) - T(s)\| = \begin{cases} \|T(s)(T(t-s) - I)\|, & t > s; \\ \|T(t)(T(s-t) - I)\|, & s > t. \end{cases}$$

De (II.6), temos

$$\|A(|t-s|)\| = \left\| \frac{T(|t-s|) - I}{|t-s|} \right\| < K \quad (0 < |t-s| < \delta)$$

e, de (II.7), podemos concluir

$$\|T(t) - T(s)\| \leq M_\delta \cdot K \cdot |t-s| \quad (t \in \mathbb{R}_+ \cap (s - \delta, s + \delta)),$$

o que prova que  $T$  é um semigrupo uniformemente contínuo.

□

DEFINIÇÃO II.2.13. Sejam  $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathcal{E}$  e  $f \in \mathcal{L}^{\mathcal{E}}$ . Se  $f$  for derivável em  $a$  definimos

$$\left. \frac{d}{dt} f(t) \right|_{t=a} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)x - f(a)x}{h} = \Lambda(f'(a)),$$

em que  $\Lambda$  é a isometria entre  $\mathcal{L}(\mathbb{R}; \mathfrak{X})$  e  $\mathfrak{X}$  dada pelo Lema I.4.4.

LEMA II.2.14. Sejam  $\mathcal{E}, \mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}$  abertos,  $\varphi \in \mathcal{F}^{\mathcal{E}}$  e  $f \in \mathcal{L}^{\mathcal{F}}$ . Suponha que  $x \in \mathfrak{X}$  seja tal que a função  $F \in \mathfrak{X}^{\mathcal{E}}$  definida por  $F(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t)x$  seja derivável em  $\varphi(a)$  e  $\varphi$  seja derivável em  $a$ . Então vale

$$\left. \frac{d}{dt} (f \circ \varphi)(t)x \right|_{t=a} = \varphi'(a) \cdot \left. \frac{d}{dt} f(t)x \right|_{t=\varphi(a)}.$$

PROVA. Seja  $\Lambda$  a isometria entre  $\mathcal{L}(\mathbb{R}; \mathfrak{X})$  e  $\mathfrak{X}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (f \circ \varphi)(t) \right|_{t=a} &= \Lambda((f \circ \varphi)'(a)) \\ &= \Lambda(\varphi'(a) \cdot F'(\varphi(a))) \\ &= \varphi'(a) \cdot \Lambda(F'(\varphi(a))) \\ &= \varphi'(a) \cdot \left. \frac{d}{dt} f(t) \right|_{t=\varphi(a)}. \end{aligned}$$

□

COROLÁRIO II.2.15. Sejam  $\mathcal{E}, \mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}$  abertos,  $a \in \mathcal{E}$ ,  $\varphi, \gamma \in \mathcal{F}^{\mathcal{E}}$  deriváveis em  $a$ ,  $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})^{\mathcal{F}}$  e  $g \in \mathfrak{X}^{\mathcal{F}}$ , tais que  $t \mapsto f(t)x$  é contínua para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $t \mapsto f(t)g(\gamma(a))$  seja derivável em  $\varphi(a)$  e  $g$  derivável em  $\gamma(a)$ . Então vale a fórmula

$$\left. \frac{d}{dt} [(f \circ \varphi) \cdot (g \circ \gamma)](t) \right|_{t=a} = \varphi'(a) \cdot \left. \frac{d}{dt} f(t)g(\gamma(a)) \right|_{t=\varphi(a)} + \gamma'(a) \cdot f(\varphi(a)) \left. \frac{d}{dt} g(t) \right|_{t=\gamma(a)}.$$

PROVA. Pelo o que foi provado nos Lemas I.4.13 e II.2.14 é suficiente observar

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} [(f \circ \varphi) \cdot (g \circ \gamma)](t) \right|_{t=a} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(\varphi(a+h)) - f(\varphi(a))}{h} g(\gamma(a)) \right. \\ &\quad \left. + f(\varphi(a+h)) \frac{g(\gamma(a+h)) - g(\gamma(a))}{h} \right] \\ &= \varphi'(a) \cdot \left. \frac{d}{dt} f(t)g(\gamma(a)) \right|_{t=\varphi(a)} + \gamma'(a) \cdot f(\varphi(a)) \left. \frac{d}{dt} g(t) \right|_{t=\gamma(a)}. \end{aligned}$$

□

PROPOSIÇÃO II.2.16. Se  $T$  e  $S$  são dois  $C_0$ -semigrupos tendo o mesmo gerador infinitesimal  $A$ , então  $T = S$ .

PROVA. Seja  $x \in \mathfrak{D}(A)$ . Se  $s = 0$ , então conspicuamente  $S(s)x = T(s)x = x$ . Desta forma, admitamos que  $s > 0$ . Do Teorema II.2.10 e do Corolário II.2.15, decorre que a função

$$\varpi(t) \stackrel{\text{def}}{=} T(s-t)S(t)x$$

é tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varpi(t) &= \frac{d}{dt}\left(T(s-t)S(t)\right)x \\ &= T(s-t)\frac{d}{dt}S(t)x - \frac{d}{dt}T(s-t)(S(t)x) \\ &= T(s-t)AS(t)x - T(s-t)AS(t)x \\ &= 0,\end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Agora, do Lema I.7.4, decorre que  $\varpi$  é constante. Em consequência,

$$S(s)x = \varpi(s) = \varpi(0) = T(s)x \quad (x \in \mathfrak{D}(A)).$$

Seguidamente usando o fato de  $\mathfrak{D}(A)$  ser denso em  $\mathfrak{X}$ , existe uma sequência  $\{x_n\}$  em  $\mathfrak{X}$ , tal que  $\lim_n x_n = x$ . Por conseguinte, supondo  $s$  fixo e notando que  $S(s)$  e  $T(s)$  são limitados, podemos inferir a igualdade

$$T(s)x = \lim_n T(s)x_n = \lim_n S(s)x_n = S(s)x \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

□

A seguir apresentemos um resultado mais forte que o Corolário II.2.11. Para isto, enunciemos um dos corolários do Teorema de *Hahn-Banach*. Conforme estipulado (*vide* observação II.2.2), excepcionalmente admitamos que  $\mathfrak{X}$  no próximo lema não seja um  $B$ -espaço.

**LEMA II.2.17.** *Seja  $\mathfrak{Y}$  um subespaço vetorial de um espaço vetorial topológico localmente convexo  $\mathfrak{X}$ . Então se  $x$  não está no fecho de  $\mathfrak{Y}$ , então existe  $x^* \in \mathfrak{X}^*$ , tal que  $x^*(x) = 1$  e  $x^*(\mathfrak{Y}) = \{0\}$ .*

**PROVA.** *vide* [12, pág. 60].

□

**TEOREMA II.2.18.** *Seja  $A$  o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $T$ . Então  $\bigcap_n \mathfrak{D}(A^n)$  é denso em  $\mathfrak{X}$ .*

**PROVA.** Seja  $\mathcal{K}$  a classe de todas as funções em  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  com suporte compacto contido em  $(0, +\infty)$ . Para cada  $(x, \varphi) \in \mathfrak{X} \times \mathcal{K}$ , defina

$$(II.8) \quad x(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int \varphi(s)T(s)x \, d\mu(s),$$

em que a integração é feita sobre o conjunto  $S = \mathbb{R}_+$ . Antes de seguirmos, provemos que (II.8) faz sentido, de sorte devemos provar que a integral em (II.8) existe. Em virtude de toda função contínua ser fortemente mensurável (*vide* Corolário I.6.10), decorre em particular  $\psi \in \mathfrak{X}^S$  definida por

$$\psi(s) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(s)T(s)x \quad (s \in \mathbb{R}_+)$$

o será.

Seguidamente notando que

$$\int \|\psi(s)\| \, d\mu(s) = \int_{\text{supp } \varphi} \|\psi(s)\| \, d\mu(s) < +\infty,$$

recorrendo à Proposição I.6.12, podemos concluir que  $\psi$  é integrável, o que corrobora a boa definição de (II.8).

Imediatamente, observemos que, para  $h > 0$ , temos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h} \int \varphi(s) [T(s+h)x - T(s)x] d\mu(s) &= \frac{1}{h} \int \varphi(s) T(s+h)x d\mu(s) \\
 &\quad - \frac{1}{h} \int \varphi(s) T(s)x d\mu(s) \\
 &= \frac{1}{h} \int_h^\infty \varphi(s-h) T(s)x d\mu(s) \\
 &\quad \underbrace{\text{É nula, pois } \text{supp } \varphi \subseteq (0, +\infty).}_{\text{}} \\
 &\quad + \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(s-h) T(s)x d\mu(s) \\
 &\quad - \frac{1}{h} \int \varphi(s) T(s)x d\mu(s) \\
 &= \frac{1}{h} \int_0^\infty [\varphi(s-h) + \varphi(s)] T(s)x d\mu(s).
 \end{aligned}$$

Posteriormente, conceba a sequência  $\{\vartheta_n\}$  em  $\mathbb{R}^S$  cujos termos sejam dados por

$$\vartheta_n(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi(s - n^{-1}) - \varphi(s)}{n^{-1}} T(s)x$$

usando a Proposição I.1.11 podemos concluir que  $\vartheta_n$  converge uniformemente para  $-\varphi'(s)T(s)x$ . Seguidamente, seja  $s \notin \text{supp } \varphi$ . Sendo  $\text{supp } \varphi$  fechado, decorre que existe uma vizinhança  $V$  de  $s$ , tal que  $\varphi(V) = \{0\}$ . Provemos que  $s \notin \text{supp } \varphi'$ . Raciocinando por redução ao absurdo, suponhamos que  $s \in \text{supp } \varphi'$ . Então existe  $t \in \{\varphi' \neq 0\} \cap V$ , pois  $s$  é ponto de acumulação de  $\{\varphi' \neq 0\}$ . Entretanto, visto que  $\varphi(V) = \{0\}$ , obrigatoriamente  $\varphi'(V) = \{0\}$ , o que é uma contradição. Consequentemente,  $(\text{supp } \varphi)^c \subseteq (\text{supp } \varphi')^c$ .

Assim

$$\begin{aligned}
 Ax(\varphi) &= \lim_n \frac{T(n^{-1}) - I}{n} x(\varphi) \\
 &= \lim_n \int_{\text{supp } \varphi} \vartheta_n(s) d\mu(s) \\
 &= - \int_{\text{supp } \varphi} \varphi'(s) T(s)x d\mu(s) \\
 &= - \int_{\text{supp } \varphi'} \varphi'(s) T(s)x d\mu(s) \\
 &= - \int \varphi'(s) T(s)x d\mu(s).
 \end{aligned}$$

Pelo princípio de indução finita, prova-se

$$A^n x(\varphi) = (-1)^n \int \varphi^{(n)}(s) T(s)x d\mu(s) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

o que implica que

$$x(\varphi) \in I \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_n \mathfrak{D}(A^n).$$

Em seguida, consideremos a variedade linear  $\mathfrak{Y}$  gerada por  $\{x(\varphi) : (x, \varphi) \in \mathfrak{X} \times \mathcal{K}\}$ . Como  $I$  é um espaço vetorial, decorre que  $\mathfrak{Y} \subseteq I$ . Por esta razão, se  $\mathfrak{Y}$  for denso em  $\mathfrak{X}$ , então  $I$  o será, o que prova a asserção do teorema. Suponha, por redução ao absurdo, que exista  $x \in \mathfrak{X} \setminus \overline{\mathfrak{Y}}$ . Do lema imediatamente anterior existe,  $x^* \in \mathfrak{X}^*$ , tal que  $x^*(x) = 1$  e  $x^*(\overline{\mathfrak{Y}}) = \{0\}$ . Como todo  $x^* \in \mathfrak{X}^*$  é limitado, decorre da Proposição I.6.13 que

$$(II.9) \quad \int \varphi(s) x^*(T(s)x) d\mu(s) = x^*\left(\int \varphi(s) T(s)x d\mu(s)\right) = x^*(x(\varphi)) = 0.$$

A aplicação  $\psi \in \mathfrak{X}^S$  dada por

$$\psi(s) \stackrel{\text{def}}{=} x^*(T(s)x)$$

é notavelmente contínua.

Concebamos agora a aplicação  $\varrho \in \mathfrak{X}^S$  definida pela lei

$$\varrho(s) \stackrel{\text{def}}{=} \Re \psi(s).$$

Em virtude de  $\varrho(0) = 1$ , podemos escolher  $\tau > 0$  suficientemente pequeno tal que  $\varrho$  seja positiva em  $[0, \tau]$ . Posteriormente, consideremos  $\varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  dada por

$$\varphi(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{s(s-\tau)}\right) & s \in (0, \tau); \\ 0 & s \notin (0, \tau). \end{cases}$$

É conhecido que  $\varphi \in \mathcal{K}$ . Além disso, vale

$$\int \varphi \cdot \varrho d\mu = \int_0^\tau \varphi \cdot \varrho d\mu = \int_0^\tau e^{\frac{-1}{s(s-\tau)}} \cdot \varrho(s) d\mu(s) \geq \min_{s \in [0, \tau]} \varrho(s) \cdot \int_0^\tau e^{\frac{-1}{s(s-\tau)}} d\mu(s) > 0,$$

o que por sua vez implica

$$\int \varphi(s) x^*(T(s)x) d\mu = \int \varphi \cdot \psi d\mu \neq 0.$$

contradizendo (II.9). Esta contradição foi deduzida admitindo-se que  $\mathfrak{Y}$  não era denso em  $\mathfrak{X}$ , portanto  $\overline{\mathfrak{Y}} = \mathfrak{X}$ .  $\square$

### §II.3 GERAÇÃO DE SEMIGRUPOS

Nesta seção determinamos condições necessárias e suficientes para que um operador fechado com domínio denso, seja gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo. Antes do resultado principal, apresentamos dois lemas aplicáveis de maneira aparente à condição necessária e, em seguida, a finalizaremos com o Teorema de *Hille-Yosida-Phillips*.

**DEFINIÇÃO II.3.1.** *Seja  $T$  uma transformação linear com domínio  $\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{X}$ , sendo  $\mathfrak{X}$  um  $B$ -espaço sobre  $\mathbb{C}$ . Ao conjunto dos escalares  $\lambda$  tais que a transformação  $\lambda I - T$ , cujo domínio seja  $\mathfrak{D}(T)$ , admita inversa  $(\lambda I - T)^{-1}$  limitada com domínio  $\mathfrak{X}$ , será dado o nome de conjunto resolvente de  $T$  e será denotado por  $\varrho(T)$ . O conjunto  $\sigma(T) = \varrho(T)^c$  é chamado de spectrum (espectro) de  $T$ . Se  $\lambda \in \varrho(T)$ , então  $(\lambda I - T)^{-1}$  será denotada por  $R(\lambda; T)$  e será dada o nome de função resolvente de  $T$  em  $\lambda$  ou simplesmente resolvente de  $T$ .*

LEMA II.3.2. *Suponha  $T$  um operador fechado como na Definição II.3.1. Então vale*

$$(II.10) \quad R(\lambda; T)^n - R(\mu; T)^n = (\mu - \lambda) \sum_{k=0}^{n-1} R(\lambda; T)^{k+1} R(\mu; T)^{n-k} \quad (\lambda, \mu \in \varrho(T), n \in \mathbb{N}).$$

PROVA. Antes de tudo, façamos a seguinte estipulação tipográfica  $R(\kappa; T) = R_\kappa$  ( $\kappa \in \varrho(T)$ ). Provemos primeiramente a ‘fórmula do resolvente’ viz.

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu.$$

Para isto observe que  $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$ . Logo

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu I - T) R_\mu R_\lambda - (\lambda I - T) R_\lambda R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu.$$

Imediatamente, suponha por hipótese de indução, que para  $n$  valha a identidade em (II.10). Multiplicando esta última por  $R_\lambda$  obtemos

$$\begin{aligned} R_\lambda^{n+1} &= (\mu - \lambda) \sum_{k=0}^{n-1} R_\lambda^{k+2} R_\mu^{n-k} + R_\lambda R_\mu^n \\ &= (\mu - \lambda) \sum_{k=1}^n R_\lambda^{k+1} R_\mu^{n-k+1} + R_\lambda R_\mu^n. \end{aligned}$$

Em seguida, observemos

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda) \sum_{k=0}^n R_\lambda^{k+1} R_\mu^{n-k+1} &= (R_\mu^{-1} - R_\lambda^{-1}) \sum_{k=1}^n R_\lambda^{k+1} R_\mu^{n-k+1} \\ &\quad + R_\lambda R_\mu^n - R_\mu^{n+1} \\ &= R_\lambda^{n+1} - R_\mu^{n+1}. \end{aligned}$$

Assim, do princípio de indução finita, podemos inferir (II.10).  $\square$

LEMA II.3.3. *O conjunto resolvente  $\varrho(T)$  é aberto e a função  $R(\lambda; T)$  é analítica.*

PROVA. Suponhamos que  $\lambda \in \varrho(T)$  e seja  $\mu \in \mathbb{C}$ . Queremos determinar uma condição suficiente para que  $\lambda + \mu \in \varrho(T)$ . Para tal, façamos

$$(II.11) \quad S = I - R(\lambda; T)((\lambda + \mu)I + T).$$

Em seguida, notemos

$$S = R(\lambda; T)(\lambda I + T - ((\lambda + \mu)I + T)) = -\mu \cdot R(\lambda; T) \in \mathcal{L}.$$

Assim,

$$\|S\| \leq |\mu| \cdot \|R(\lambda; T)\|.$$

Escolhendo  $|\mu| < \|R(\lambda; T)\|^{-1}$ , podemos concluir que  $\|S\| < 1$ , decorre da Proposição que  $I - S$  é invertível e seu inverso é dado pela série  $\sum_{n=0}^{\infty} S^n$ .

Posteriormente, notando que

$$(I - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mu)^n R(\lambda; T)^n.$$

De (II.11) temos

$$(II.12) \quad R(\lambda + \mu; T) = ((\lambda + \mu)I + T)^{-1} = (I - S)^{-1}R(\lambda; T) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mu)^n R(\lambda; T)^{n+1}.$$

Por maior razão, desde que  $|\mu| < \|R(\lambda; T)\|^{-1}$ , podemos concluir que  $\lambda + \mu \in \varrho(T)$ . Em outros termos,

$$B_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{\nu \in \mathbb{C} : |\lambda - \nu| < \|R(\lambda; T)\|^{-1}\} \subseteq \varrho(T),$$

o que da arbitrariedade de  $\lambda$  podemos deduzir que  $\varrho(T)$  é aberto.

Por fim, de (II.12) podemos assertar que a função  $S \in \mathcal{L}^{B_\lambda}$  dada por  $S(\mu) = R(\lambda + \mu; T)$  é analítica em  $\mu = 0$ , o que por sua vez implica que  $R(\lambda; T)$  é analítica.  $\square$

LEMA II.3.4. *Sejam  $T$  um  $C_0$ -semigrupo e  $A$  seu gerador infinitesimal. Então existe  $\omega_0 \in \mathbb{R}_+$  tal que*

$$\{\Re > \omega_0\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) > \omega_0\} \subseteq \varrho(A)$$

e

$$(II.13) \quad R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, d\mu(s) \quad ((\lambda, x) \in \{\Re > \omega_0\} \times \mathfrak{X})$$

PROVA. Primeiramente, segundo o Corolário II.2.9 existe o limite

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(s)\|}{s}.$$

Em seguida suponha que  $\lambda \in \{\Re > \omega_0\}$  e seja  $\delta \in (\omega_0, \Re(\lambda))$ . Decorre também do Corolário II.2.9 que existe  $M_\delta > 0$  tal que

$$\|T(s)\| \leq M_\delta \cdot e^{\delta s} \quad (s \in \mathbb{R}_+).$$

Assim,

$$(II.14) \quad \int_0^\infty \|e^{-\lambda s} T(s)x\| \, d\mu(s) \leq \|x\| \cdot M_\delta \cdot \int_0^\infty e^{(\delta - \Re(\lambda))s} \, d\mu(s) = \frac{\|x\| \cdot M_\delta}{\Re(\lambda) - \delta}$$

e, portanto, a integral em (II.13) existe. Definindo

$$R(\lambda)x \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, d\mu \quad ((\lambda, x) \in \{\Re > \omega_0\} \times \mathfrak{X}),$$

decorre da linearidade do operador integral e do operador  $T(s)$  que  $R(\lambda)$  é um operador em  $\mathfrak{X}$ . Além disso, (II.14) prova que tal operador é limitado.

Seguidamente, observemos que

$$\begin{aligned}
 A(h)R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s+h)x \, d\mu(s) - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, d\mu(s) \\
 &= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} T(s)x \, d\mu(s) - \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, d\mu(s) \\
 &\quad - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} T(s)x \, d\mu(s) \\
 &= \frac{e^{h\lambda} - 1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, d\mu(s) - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} T(s)x \, d\mu(s).
 \end{aligned}$$

Fazendo  $h \rightarrow 0$ , obtemos

$$AR(\lambda)x = \lambda \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, d\mu(s) - x = \lambda R(\lambda)x - x,$$

o que prova que  $R(\lambda)x \in \mathfrak{D}(A)$  e  $(\lambda I - A)R(\lambda) = I$ . Para provarmos (II.13), devemos mostrar que

$$(II.15) \quad R(\lambda)(\lambda I - A)x = x \quad (x \in \mathfrak{D}(A)).$$

Para isto, é suficiente provar

$$AR(\lambda)x = R(\lambda)Ax \quad (x \in \mathfrak{D}(A)),$$

pois, admitindo esta última identidade,

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)Ax = \lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x = (\lambda I - A)R(\lambda)x = x,$$

para todo  $x \in \mathfrak{D}(A)$ . Para tanto, seja  $x \in \mathfrak{D}(A)$ . Conforme provamos,  $R(\lambda)x \in \mathfrak{D}(A)$  e, segundo o Teorema II.2.10, vale  $AT(s)x = T(s)Ax$ , para todo  $s \in \mathbb{R}_+$ . Conformemente, usando o Teorema I.6.15, podemos inferir

$$\begin{aligned}
 AR(\lambda)x &= A \left( \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, d\mu(s) \right) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} AT(s)x \, d\mu(s) \\
 &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)Ax \, d\mu(s) = R(\lambda)Ax,
 \end{aligned}$$

o que prova o requerido e finaliza a prova.  $\square$

LEMA II.3.5. *Sejam  $A$  um operador fechado com domínio denso e  $T$  um  $C_0$ -semigrupo tais que  $\{\Re > \omega\} \subseteq \varrho(A)$ ,*

$$\|T(s)\| \leq M e^{\omega s} \quad (s \in \mathbb{R}_+)$$

e

$$R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, d\mu(s) \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Então

$$(II.16) \quad \|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\Re(\lambda) - \omega)^n} \quad ((n, \lambda) \in \mathbb{N} \times \{\Re > \omega\})$$

PROVA. Provemos, inicialmente, a fórmula

$$(II.17) \quad R(\lambda; A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda s} s^{n-1} T(s) x \, d\mu(s) \quad ((n, \lambda, x) \in \mathbb{N} \times \{\Re > \omega\} \times \mathfrak{X}).$$

Do Lema II.3.2, temos a identidade

$$R(\lambda + \eta; A) - R(\lambda; A) = -\eta R(\lambda + \eta; A) R(\lambda; A),$$

válida para  $\eta$ , cujo módulo seja suficientemente pequeno, pois o conjunto resolvente é aberto (*vide* Lema II.3.3).

Agora fazendo  $\eta \rightarrow 0$ , da continuidade do operador resolvente, obtemos

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda; A) = -R(\lambda; A)^2.$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que valha

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}.$$

Como anteriormente, derivamos, de forma análoga, a identidade

$$(II.18) \quad \frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda + \eta; A) - \frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A) = (-1)^n n! (R(\lambda + \eta; A)^{n+1} - R(\lambda; A)^{n+1}).$$

Em seguida, usando novamente o Lema II.3.2, obtemos

$$(II.19) \quad R(\lambda + \eta; A)^{n+1} - R(\lambda; A)^{n+1} = -\eta \cdot \sum_{k=0}^n R(\lambda + \eta; A)^{k+1} R(\lambda; A)^{n+1-k}.$$

Combinando (II.18) e (II.19), usando a continuidade da função resolvente e fazendo  $\lambda \rightarrow 0$  obtemos

$$\frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}} R(\lambda; A) = (-1)^{n+1} (n+1)! R(\lambda; A)^{n+2}.$$

Pelo princípio de indução finita podemos concluir

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Consequentemente,

$$(II.20) \quad R(\lambda; A)^n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda; A) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Imediatamente calculemos  $d^{n-1}/d\lambda^{n-1} R(\lambda; A)$ . Para isto, fixemos  $\lambda \in \varrho(A)$ . Concebamos  $\delta \in (\omega, \Re(\lambda))$  e  $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+}$  dada por

$$f(\eta, s) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\lambda s} \cdot \frac{e^{-\eta s} - 1}{\eta}.$$

Temos

$$|f(\eta, s)| = e^{-\Re(\lambda)s} \cdot \left| \frac{e^{-\eta s} - 1}{\eta} \right| = e^{-\Re(\lambda)s} \cdot \left| \int_0^s e^{-\eta t} \, d\mu(t) \right| \leq e^{-\delta s} \cdot \int_0^s e^{-\Re(\eta)t} \, d\mu(t)$$

e, portanto,

$$\|f(\eta, s)s^n T(s)x\| \leq \|x\| \cdot M \cdot s^n \cdot e^{(\omega-\delta)s} \int_0^s e^{-\Re(\eta)t} d\mu(t) \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Em seguida, sejam  $\{\eta_k\}$  uma sequência em  $\mathbb{C}$  arbitrária convergindo a 0 e  $\gamma \in (0, \delta - \omega)$ . Para  $k$  suficientemente grande, temos

$$-\Re(\eta_k) \leq |\Re(\eta_k)| < \gamma.$$

Logo, considerando a sequência  $\{\varphi_k\}$  em  $\mathfrak{X}^S$  cujos termos sejam dados por

$$\varphi_k(s) \stackrel{\text{def}}{=} f(\eta_k, s)s^n T(s)x,$$

decorre, que para  $k$  suficientemente grande, vale

$$(II.21) \quad \|\varphi_k(s)\| \leq \|x\| M s^n e^{(\omega-\delta)s} \int_0^s e^{-\Re(\eta_k)t} d\mu(t) \leq \|x\| M s^n \gamma^{-1} e^{(\omega-\delta+\gamma)s} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Em virtude da nossa escolha  $\omega - \delta + \gamma < 0$ , o que implica por sua vez que a função no último membro da desigualdade (II.21) é integrável. Evidentemente, a sequência de funções  $\{\varphi_k\}$  converge  $\mu$ -q.s. para  $-s^{n+1}e^{-\lambda s}T(s)x$ . Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue vale

$$\lim_k \int_0^\infty \varphi_k d\mu = - \int e^{-\lambda s} s^{n+1} T(s)x d\mu(s).$$

Da arbitrariedade da sequência  $\{\eta_k\}$ , podemos finalmente inferir que

$$(II.22) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \int e^{-\lambda s} s^n T(s)x d\mu(s) &= \lim_k \left[ \frac{1}{\eta_k} \int_0^\infty e^{-(\eta_k+\lambda)s} s^n T(s)x d\mu \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\eta_k} \int_0^\infty e^{-\lambda s} s^n T(s)x d\mu \right] \\ &= \lim_k \int_0^\infty f(\eta_k, s)s^n T(s)x d\mu \\ &= \lim_k \int_0^\infty \varphi_k d\mu \\ &= - \int e^{-\lambda s} s^{n+1} T(s)x d\mu(s), \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Pelo que vimos, temos

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda; A)x = \frac{d}{d\lambda} \int e^{-\lambda s} T(s)x d\mu(s) = - \int e^{-\lambda s} T(s)x d\mu(s).$$

Agora, supondo, por hipótese de indução, que

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A)x = \int e^{-\lambda s} (-s)^n T(s)x d\mu(s),$$

temos de (II.22) que

$$\frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}} R(\lambda; A)x = \int e^{-\lambda s} (-s)^{n+1} T(s)x d\mu(s).$$

Pelo princípio de indução finita e (II.13) deduzimos

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A)x = \int e^{-\lambda s} (-s)^n T(s)x \, d\mu(s) \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Voltemos ao cálculo da fórmula (II.17), recorrendo à identidade (II.20) e por (II.20), obtemos

$$\begin{aligned} (II.23) \quad R(\lambda; A)^n x &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda; A)x \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int e^{-\lambda s} (-s)^{n-1} T(s)x \, d\mu(s) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int e^{-\lambda s} s^{n-1} T(s)x \, d\mu(s) \end{aligned}$$

Por fim, resta-nos o cálculo da estimativa (II.16). Para tanto, podemos inferir de (II.23) que

$$\begin{aligned} \|R(\lambda; A)^n x\| &\leq \frac{\|x\| \cdot M}{(n-1)!} \int e^{(\omega - \Re(\lambda))s} s^{n-1} \, d\mu(s) \\ &\leq \frac{\|x\| \cdot M}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{(\Re(\lambda) - \omega)^n} \\ &= \frac{\|x\| \cdot M}{(\Re(\lambda) - \omega)^n}, \end{aligned}$$

o que por sua vez acarreta

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\Re(\lambda) - \omega)^n}.$$

□

**TEOREMA II.3.6** (E. HILLE-K. YOSIDA-R. S. PHILLIPS). *Uma condição necessária e suficiente para que um operador fechado  $A$  com domínio denso em  $\mathfrak{X}$ , seja o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo é, que existam reais  $\omega$  e  $M$  tais que se  $\lambda > \omega$ , então  $\lambda \in \varrho(A)$  e*

$$(II.24) \quad \|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

**PROVA.** Considerando  $\omega_0 > \omega$  no contexto dos Lemas II.3.4 e II.3.5 concluímos que a condição é necessária. Para provarmos a suficiência, contruiremos um semigrupo  $T$ , como um limite semigrupos, cujo gerador infinitesimal seja  $A$ .

Primeiro, defina

$$B_\lambda = -\lambda(I - \lambda R(\lambda; A)) \quad (\lambda > \omega).$$

Temos

$$e^{tB_\lambda} = e^{-\lambda t I} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} R(\lambda; A)^n = e^{-\lambda t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} R(\lambda; A)^n$$

e de (II.24) obtemos

$$\begin{aligned}
 (II.25) \quad \|e^{tB_\lambda}\| &\leq e^{-\lambda t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} \|R(\lambda; A)^n\| \\
 &\leq e^{-\lambda t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \\
 &= e^{-\lambda t} M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda^2 t}{\lambda - \omega} \right)^n \\
 &= M \cdot \exp\left(\frac{\omega \lambda t}{\lambda - \omega}\right).
 \end{aligned}$$

Seguidamente, visto que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \omega \lambda \cdot (\lambda - \omega)^{-1} = \omega$ , tomando  $\omega_1 > \omega$ , decorre que, para  $\lambda$  suficientemente grande, vale  $\omega \lambda \cdot (\lambda - \omega) < \omega_1$  de (II.25) vem

$$(II.26) \quad \|e^{tB_\lambda}\| < M e^{t\omega_1}.$$

Posteriormente, provemos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda x = Ax \quad (x \in \mathfrak{D}(A)).$$

Para tanto, seja  $x \in \mathfrak{D}(A)$ . Temos da Definição II.3.1 que

$$R(\lambda; A)(\lambda I - A)x = x.$$

Equivalentemente,

$$(II.27) \quad \lambda R(\lambda; A)x - x = R(\lambda; A)Ax.$$

De (II.24),

$$\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| = \|R(\lambda; A)Ax\| \leq \|R(\lambda; A)\| \|Ax\| \leq \frac{M \cdot \|Ax\|}{(\lambda - \omega)}.$$

Em conformidade com a última desigualdade decorre que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x \quad (x \in \mathfrak{D}(A)).$$

Novamente (II.24) acarreta

$$\|\lambda R(\lambda; A)x\| \leq \frac{\lambda M}{(\lambda - \omega)} \|x\| \leq 2M \|x\| \quad (x \in \mathfrak{X}),$$

para  $\lambda$  suficientemente grande. Recorrendo ao Lema I.4.11, podemos inferir

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Particularmente, usando (II.27), podemos assertar

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda; A)Ax = Ax \quad (x \in \mathfrak{D}(A)).$$

Prosseguindo para cada  $t \in \mathbb{R}_+$  defina  $S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda}$ . Sabendo que, para quaisquer  $\lambda, \nu \in \varrho(A)$  vale  $B_\lambda B_\nu = B_\nu B_\lambda$ , *a fortiori*  $B_\nu$  comuta com os termos da série  $S_\lambda(t)$  e, portanto,  $B_\nu S_\lambda(t) = S_\lambda(t) B_\nu$ . Agora invocando a Proposição I.3.4, o Corolário I.7.5 e o Corolário II.2.15 temos que, para cada  $x \in \mathfrak{D}(A)$ , vale

$$\begin{aligned}
 S_\lambda(t)x - S_\nu(t)x &= \int_0^t \frac{d}{ds} [S_\nu(t-s)S_\lambda(s)]x \, d\mu(s) \\
 (II.28) \quad &= \int_0^t [-S_\nu(t-s)B_\nu S_\lambda(s)x + S_\nu(t-s)S_\lambda(s)B_\lambda x] \, d\mu(s) \\
 &= \int_0^t S_\nu(t-s)S_\lambda(s)(B_\lambda - B_\nu)x \, d\mu(s).
 \end{aligned}$$

para todo  $\mathbb{R}_+$ . Portanto, usando (II.26) e (II.28), decorre que, para  $\lambda$  suficientemente grande, que

$$(II.29) \quad \|S_\lambda(t)x - S_\nu(t)x\| \leq M^2 t e^{t\omega_1} \|B_\lambda x - B_\nu x\|.$$

Uma vez que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda x = Ax$ , decorre da desigualdade acima que  $\{S_\lambda(t)x\}_\lambda$  é uma sequência de Cauchy generalizada no  $B$ -espaço  $\mathfrak{X}$ . Do Lema I.1.10, podemos inferir que  $\{S_\lambda(t)x\}_\lambda$  converge. Além disso tal convergência é uniforme em todo intervalo limitado  $[0, \beta]$  ( $\beta \in \mathbb{R}_+$ ). De fato, consideremos a sequência de funções  $\{f_\lambda\}$  em  $\mathfrak{X}^{\mathbb{R}_+}$  cujos termos sejam dados por  $f_\lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} S_\lambda(t)x$ . Da desigualdade (II.29), obtemos

$$\|f_\lambda(t) - f_\nu(t)\| \leq M^2 e^{\beta\omega_1} \|B_\lambda x - B_\nu x\| \quad (t \in [0, \beta]).$$

Com o auxílio da Proposição I.1.11, podemos assertar que  $\{f_\lambda\}$  converge uniformemente em  $[0, \beta]$ . À vista de (II.26), temos

$$(II.30) \quad \|S_\lambda(t)x\| < M e^{t\omega_1} \|x\| \quad ((\lambda, x) \in \varrho(A) \times \mathfrak{X}).$$

Do fato de  $\mathfrak{D}(A)$  ser denso em  $\mathfrak{X}$ , podemos deduzir do Lema I.4.11 que, para cada  $t \in \mathbb{R}_+$ , existe  $T(t) \in \mathcal{L}$  definido pelo limite  $T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t)x$ . De (II.30), temos

$$\|T(t)x\| = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|S_\lambda(t)x\| \leq M e^{t\omega_1} \|x\| \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Ademais,  $T$  valida os axiomas de  $C_0$ -semigrupo. Com efeito, temos

$$T(0)x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda} S_\lambda(0)x = x \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Em seguida, sejam  $t, s \in \mathbb{R}_+$ . Usando o Lema I.4.13 (no contexto deste lema considere  $\mathfrak{X} = \overline{\mathfrak{X}}$ ), obtemos

$$T(s+t)x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda} S_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda} S_\lambda(t)S_\lambda(s)x = \lim_{\lambda} \left[ S_\lambda(t) \left( \lim_{\lambda} S_\lambda(s)x \right) \right] \stackrel{\text{def}}{=} T(s)T(t)x.$$

Agora, provemos o último axioma de  $C_0$ -semigrupo. Para tanto, consideremos uma sequência generalizada  $\{t_\delta\}$  ( $\delta \in \mathcal{A} = \mathbb{R}$ ) em  $(0, +\infty)$  convergindo a 0. Em virtude desta convergência, podemos supor que  $t_\delta \in [0, \beta]$ , para todo  $\delta \in \mathcal{A}$  e para  $\beta$  conveniente. Imediatamente observemos

$$I. \lim_{\delta} S_\lambda(t_\delta)x = S_\lambda(0)x = x, \text{ para todo } \lambda > \omega, \text{ pois } S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda} \text{ é contínua em } \mathbb{R}_+;$$

II.  $\lim_{\lambda} S_{\lambda}(t_{\delta})x = T(t_{\delta})x$ , pois conforme vimos  $\{S_{\lambda}(t)x\}$  converge uniformemente em  $[0, \beta]$ .

De I e II, da proposição I.1.7 e do Lema I.1.13 temos

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = \lim_{\delta} T(t_{\delta})x = \lim_{\delta} \lim_{\lambda} S_{\lambda}(t_{\delta})x = \lim_{\lambda} \lim_t S_{\lambda}(t_{\delta})x = x,$$

o que prova que  $T$  é um  $C_0$ -semigrupo.

Seguindo, dado  $x \in \mathfrak{D}(A)$ , observemos que

$$\begin{aligned} \|S_{\lambda}(s)B_{\lambda}x - T(s)Ax\| &\leq \|S_{\lambda}(s)(B_{\lambda}x - Ax)\| + \|(S_{\lambda}(s) - T(s))Ax\| \\ &\leq Me^{s\omega_1}\|B_{\lambda}x - Ax\| + \|(S_{\lambda}(s) - T(s))Ax\|, \end{aligned}$$

para todo  $(s, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathfrak{D}(A)$ . Conformemente,

$$\begin{aligned} (II.31) \quad \left\| \int_0^t S_{\lambda}(s)B_{\lambda}x \, d\mu(s) - \int_0^t T(s)Ax \, d\mu(s) \right\| &\leq \omega_1^{-1}M\|B_{\lambda}x - Ax\|(e^{\omega_1 t} - 1) \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^t \|S_{\lambda}(s) - T(s)Ax\| \, d\mu(s). \end{aligned}$$

Lembrando que  $\lim_{\lambda} S_{\lambda}(s)Ax = T(s)Ax$  uniformemente em  $[0, t]$ , decorre de (II.31) que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t S_{\lambda}(s)B_{\lambda}x \, d\mu(s) = \int_0^t T(s)Ax \, d\mu(s).$$

A Proposição I.3.4 acarreta  $\frac{d}{ds}S_{\lambda}(s)x = S_{\lambda}(s)B_{\lambda}x$  e, do Corolário I.7.5, obtemos

$$\int_0^t S_{\lambda}(s)B_{\lambda}x \, d\mu(s) = \int_0^t \frac{d}{ds}[S_{\lambda}(s)x] \, d\mu(s) = S_{\lambda}x - x.$$

Logo,

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (S_{\lambda}x - x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t S_{\lambda}(s)B_{\lambda}x \, d\mu(s) = \int_0^t T(s)Ax \, d\mu(s).$$

Chamando  $B$  o gerador infinitesimal de  $T$ , a última igualdade acarreta

$$Bx = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax \, d\mu(s) = Ax \quad (x \in \mathfrak{D}(A)).$$

Consequentemente,  $\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}(B)$ , i.e.,  $B$  é uma extensão de  $A$ . Ademais, se  $\lambda$  é suficientemente grande, então  $\lambda \in \varrho(A) \cap \varrho(B)$ . Em consequência

$$(\lambda I - B)\mathfrak{D}(A) = (\lambda I - A)\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{X} = (\lambda I - B)\mathfrak{D}(B)$$

podemos finalmente concluir que  $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(B)$ . Portanto  $A = B$ , o que prova que  $A$  é o gerador infinitesimal de  $T$ .  $\square$

A demonstração de *Hille-Yosida-Phillips* nos sugere uma fórmula exponencial para um  $C_0$ -semigrupo, é o que trataremos no

COROLÁRIO II.3.7. *Seja  $T$  um  $C_0$ -semigrupo e  $A$  seu gerador infinitesimal. Se*

$$B_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} -\lambda(I - \lambda R(\lambda; A)) \quad (\lambda > \omega > \omega_0),$$

com

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(s)\|}{s},$$

então

$$(II.32) \quad T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{tB_\lambda} x \quad (x \in \mathfrak{X})$$

e

$$(II.33) \quad \|T(s)\| \leq Me^{\omega t} \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

PROVA. Segundo o Teorema de *Hille-Yosida-Phillips* existem reais  $\omega$  e  $M$  tais que se  $\lambda > \omega$ , então  $\lambda \in \varrho(A)$  e

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Seguindo os passos da demonstração do referido teorema podemos inferir que  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $S$  tal que

$$S(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{tB_\lambda} x \quad (x \in \mathfrak{X}),$$

e

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|S(t)\| = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|e^{tB_\lambda}\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[ M \cdot \exp\left(\frac{\omega \lambda t}{\lambda - \omega}\right) \right] \leq Me^{\omega t} \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

recorrendo a Proposição II.2.16 podemos inferir que  $S = T$ , consequentemente valem (II.32) e (II.33).  $\square$

## §II.4 OPERADORES DISSIPATIVOS

DEFINIÇÃO II.4.1. *Seja  $T$  um  $C_0$ -semigrupo. Quando  $\|T(s)\| \leq 1$ , para todo  $s \in \mathbb{R}_+$ , diremos que  $T$  é um  $C_0$ -semigrupo de contrações.*

PROPOSIÇÃO II.4.2. *Uma condição necessária e suficiente para que um operador fechado  $A$  com domínio denso em  $\mathfrak{X}$ , seja o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações é que, se  $\lambda > 0$ , então  $\lambda \in \varrho(A)$  e  $\|R(\lambda; A)\| \leq \lambda^{-1}$ .*

PROVA. Seja  $A$  um gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $T$ . Analisando a prova do Lema II.3.4, podemos inferir que  $\{\Re > 0\} \subseteq \varrho(A)$  e

$$R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, d\mu(s) \quad ((\lambda, x) \in \{\Re > 0\} \times \mathfrak{X}).$$

Em virtude de  $\sup_{s \geq 0} \|T(s)\| \leq 1$ , do Lema II.3.5 inferimos que se  $\lambda > 0$ , então  $\lambda \in \varrho(A)$  e  $\|R(\lambda; A)\| \leq \lambda^{-1}$ .

Reciprocamente, tomando  $\omega = 0$  e  $M = 1$  no Teorema II.3.6 e observando que  $\|R(\lambda; A)\| \leq \lambda^{-1}$ , acarreta

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{1}{\lambda^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Do mesmo teorema, podemos concluir que  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $T > 0$ . Recorrendo ao Corolário II.3.7, podemos inferir

$$\|T(t)\| = \lim_{\lambda} \|e^{tB_\lambda}\| \leq 1 \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

i.e.,  $A$  é o gerador infinitesimal do  $C_0$ -semigrupo de contrações  $T$ .  $\square$

DEFINIÇÃO II.4.3. Diremos que um operador  $A$  é dissipativo quando

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\| \quad ((\lambda, x) \in (0, +\infty) \times \mathfrak{D}(A)).$$

Se além de dissipativo o operador  $A$  for tal que  $\lambda I - A$  seja sobrejetivo, para todo  $\lambda > 0$ , então  $A$  é chamado de maximalmente dissipativo, ou simplesmente  $m$ -dissipativo.

PROPOSIÇÃO II.4.4. Um operador  $A$  é  $m$ -dissipativo se, e somente se, for tal que se  $\lambda > 0$ , então  $\lambda \in \varrho(A)$  e  $\|R(\lambda; A)\| \leq \lambda^{-1}$ .

PROVA. Suponhamos que  $A$  seja  $m$ -dissipativo, provemos que  $A$  é um operador fechado. Para isto, basta observar que  $A$  é fechado se, e somente se,  $(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda; A)$  o for para algum  $\lambda > 0$ . Observe que faz sentido falar em  $R(\lambda; A)$ , pois os axiomas que definem um operador  $m$ -dissipativo garantem que  $\lambda I - A$  é uma bijeção de  $\mathfrak{D}(A)$  em  $\mathfrak{X}$ . Com efeito,  $\lambda I - A$  é sobrejetiva e, além disso,  $\lambda \|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\|$  acarreta que  $\lambda I - A$  seja injetiva, consequentemente bijetiva. Ademais, provamos que  $\lambda \in \varrho(A)$ , para todo  $\lambda > 0$ .

Para concluirmos a consequente, é suficiente notar que

$$(II.34) \quad \|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\| \quad (x \in \mathfrak{D}(A)),$$

acarreta

$$\|R(\lambda; A)y\| \leq \frac{1}{\lambda} \|y\| \quad (y \in \mathfrak{X}),$$

com  $y = (\lambda I - A)x$ , que por sua vez implica  $\|R(\lambda; A)\| \leq \lambda^{-1}$ . Da arbitrariedade de  $\lambda > 0$ , podemos concluir a tese.

Reciprocamente, vê-se que  $\|R(\lambda; A)\| \leq \lambda^{-1}$  implica (II.34) e  $(0, +\infty) \subseteq \varrho(A)$  acarreta que  $\lambda I - A$  é sobrejetora para todo  $\lambda > 0$ , o que finaliza a prova.  $\square$

Com base no que provamos podemos concluir imdiatamente o

COROLÁRIO II.4.5. Um operador é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações se, e somente se, for  $m$ -dissipativo com domínio denso.  $\square$

A fim de determinarmos uma caracterização mais simples de geradores infinitesimais de  $C_0$ -semigrupos de contrações, precisamos do

LEMA II.4.6. Seja  $A$  um operador linear dissipativo. Existe  $\lambda_0 > 0$ , tal que  $\lambda_0 I - A$  é sobrejetivo se, e somente se,  $A$  é  $m$ -dissipativo.

PROVA. Da Definição II.4.3 que se  $A$  é  $m$ -dissipativo, então existe um tal  $\lambda_0$ . Reciprocamente, suponhamos que exista um  $\lambda_0$  com as propriedades dadas na hipótese. Seguidamente definamos o conjunto

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbb{R}_+^* : \mathfrak{R}(\lambda I - A) = \mathfrak{X}\}.$$

Da nossa suposição,  $\lambda_0 \in \Lambda$  e, em consequência  $\Lambda \neq \emptyset$ . Consideremos  $\lambda \in \Lambda$ . Como  $A$  é dissipativo, obrigatoriamente  $\lambda I - A$  é uma injeção, *a fortiori* uma bijeção. Ademais, a dissipatividade garante que  $(\lambda I - A)^{-1}$  seja limitada, consequentemente  $\lambda \in \varrho(A)$ . Recorrendo ao Lema II.3.3, mais precisamente ao resultado de que  $\varrho(A)$  é aberto, temos que  $\varrho(A)$  contem uma vizinhança  $\lambda$ . A intersecção de tal vizinhança com a semirreta  $\mathbb{R}_+^*$  é um aberto relativo e, claramente é um subconjunto de  $\Lambda$ . Consequentemente  $\Lambda$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}_+^*$ .

Agora, suponha que  $\{\lambda_n\}$  seja uma sequência em  $\Lambda$  convergente em  $\mathbb{R}_+^*$ , digamos  $\lim_n \lambda_n = \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ . Provemos que  $\lambda \in \Lambda$ . Para este fim, consideremos arbitrariamente um  $y \in \mathfrak{X}$ . Da

definição de  $\Lambda$ , podemos inferir que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x_n \in \mathfrak{D}(A)$ , tal que  $\lambda_n x_n - Ax_n = y$ . Novamente, da dissipatividade de  $A$ , deduzimos

$$\begin{aligned}
 \|x_m - x_n\| &\leq \frac{1}{\lambda_m} \|\lambda_m(x_m - x_n) - A(x_m - x_n)\| \\
 &\leq \frac{1}{\lambda_m} \left\| \overbrace{-\lambda_m x_m + Ax_m}^{-y} + \overbrace{\lambda_m x_n - Ax_n}^{\lambda_n x_n - y} \right\| \\
 (II.35) \quad &= \frac{1}{\lambda_m} |\lambda_m - \lambda_n| \|x_n\| \\
 &\leq |\lambda_m - \lambda_n| \cdot \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} \|\lambda_n x_n - Ax_n\| \\
 &\leq \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} |\lambda_m - \lambda_n| \|y\|.
 \end{aligned}$$

Da nossa suposição de  $\{\lambda_n\}$  convergir para um número  $\lambda > 0$ , podemos concluir que  $\lambda_n^{-1}$  é convergente e portanto limitada. Além disso, deste último fato  $\{\lambda_n\}$  é Cauchy. Em consequência de (II.35), podemos inferir que  $\{x_n\}$  é Cauchy, como  $\mathfrak{X}$  é completo, aquela convergirá, digamos para  $x \in \mathfrak{X}$ . Assim temos  $\lim_n Ax_n = \lambda x - y$ . Como  $A$  é fechado, pois é dissipativo, devemos ter  $x \in \mathfrak{D}(A)$  e  $\lambda x - Ax = y$ . Da arbitrariedade de  $y$ , podemos inferir que  $\lambda I - A$  é sobrejetivo, por conseguinte  $\lambda \in \Lambda$  e, consequentemente  $\Lambda$  é fechado.

Seguidamente, sendo  $\Lambda$  aberto, fechado e não vazio e, sabendo que  $\mathbb{R}_+^*$  é conexo, necessariamente  $\Lambda = \mathbb{R}_+^*$ .

Finalmente da hipótese de  $A$  ser dissipativo e, conforme provamos,  $\lambda I - A$  é sobrejetivo para todo  $\lambda > 0$ , podemos concluir que  $A$  é m-dissipativo.  $\square$

**COROLÁRIO II.4.7** (G. LUMER-R. S. PHILLIPS). *Uma condição necessária e suficiente para que um operador linear  $A$  dissipativo com domínio denso seja o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações é, que exista um  $\lambda_0 > 0$ , tal que  $\lambda_0 I - A$  seja sobrejetivo.*

**PROVA.** *vide* Corolário II.4.5 e Lema II.4.6.  $\square$

A seguir, daremos uma outra caracterização para operadores dissipativos. Para este fim, primeiro precisamos fazer uma digressão. À vista do Lema I.6.4, podemos concluir que para todo  $x \in \mathfrak{X}$ , existe um funcional  $\varphi \in \mathfrak{X}^*$ , tal que  $\varphi(x) = \|x\|$  e

$$|\varphi(y)| \leq \|y\| \quad (y \in \mathfrak{X}).$$

Certamente  $\psi = \|x\|\varphi \in \mathfrak{X}^*$  é tal que  $\psi(x) = \|x\|^2$  e,

$$\|x\|^2 = |\psi(\|x\|^{-1}x)|^2 \leq \sup_{\|y\| \leq 1} |\psi(y)|^2 \leq \left( \sup_{\|y\| \leq 1} |\psi(y)| \right)^2 \leq \left( \|x\| \cdot \sup_{\|y\| \leq 1} |\varphi(y)| \right)^2 \leq \|x\|^2,$$

em consequência  $\|\psi\|^2 = \|x\|^2$ .

Isto dito, temos a

**DEFINIÇÃO II.4.8.** *Para cada  $x \in \mathfrak{X}$ , podemos conceber o conjunto não vazio*

$$D(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x^* \in \mathfrak{X}^* : x^*(x) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\},$$

*o qual será chamado de conjunto dualidade.*

TEOREMA II.4.9. *Um operador linear  $A$  é dissipativo se, e somente se, para todo  $x \in \mathfrak{D}(A)$ , existe  $x^* \in \mathfrak{D}(x)$ , tal que  $\Re x^* Ax \leq 0$ .*

PROVA. Suponha que para cada  $x \in \mathfrak{D}(A)$ , existe  $x^* \in \mathfrak{X}^*$ , tal que  $\Re x^* Ax \leq 0$ . Considere  $(\lambda, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathfrak{D}(A)$ , queremos provar a desigualdade  $\lambda \|x\| \leq \|\lambda x - Ax\|$ . Primeiramente observemos que para todo  $\lambda > 0$ , vale

$$\lambda \|x\|^2 \leq \lambda \|x\|^2 - \Re x^* Ax = \Re x^* (\lambda x - Ax) \leq |x^* (\lambda x - Ax)| \leq \|\lambda x - Ax\| \|x\|,$$

o que prova a desigualdade requerida.

Reciprocamente, suponhamos que  $A$  seja dissipativo e seja  $x \in \mathfrak{D}(A)$ . Se  $x = 0$ , basta tomar  $x^* \equiv 0$ . Caso contrário, conceba  $y_\lambda^* \in \mathfrak{D}(\lambda x - Ax)$  e faça  $z_\lambda^* = \|y_\lambda^*\|^{-1} \cdot y_\lambda^*$ . Disto, é conspícuo que  $\|z_\lambda^*\| = 1$ . Desta forma, temos para cada  $\lambda > 0$  que

$$\begin{aligned} \lambda \|x\| &\leq \|\lambda x - Ax\| \\ &= z_\lambda^* (\lambda x - Ax) \\ &= \lambda \Re z_\lambda^* x - \Re z_\lambda^* Ax \\ (II.36) \quad &\leq \lambda |z_\lambda^* x| - \Re z_\lambda^* Ax \\ &\leq \lambda \|z_\lambda^*\| \|x\| - \Re z_\lambda^* Ax \\ &= \lambda \|x\| - \Re z_\lambda^* Ax. \end{aligned}$$

Desse modo

$$\lambda \|x\| \leq \lambda \Re z_\lambda^* x - \Re z_\lambda^* Ax = \lambda \Re z_\lambda^* x + |\Re z_\lambda^* Ax| \leq \lambda \Re z_\lambda^* x + \|Ax\|$$

donde

$$(II.37) \quad \|x\| - \frac{1}{\lambda} \|Ax\| \leq \Re z_\lambda^* x.$$

Do Teorema I.4.15 a bola unitária de  $\mathfrak{X}^*$  é compacta, em consequência a sequência generalizada  $\{z_\lambda^*\}$  admite um ponto de acumulação  $z^* \in \mathfrak{X}^*$  (*vide* Lema I.1.16) tal que  $\|z^*\| \leq 1$ . De fato, seja  $\varepsilon > 0$ . Da Definição I.1.4, podemos deduzir que existe  $\lambda > 0$  tal que  $\|z^* - z_\lambda^*\| < \varepsilon$ . Portanto

$$\|z^*\| \leq \|z^* - z_\lambda^*\| + \|z_\lambda^*\| < \varepsilon + 1,$$

e a desigualdade requerida decorre da arbitrariedade de  $\varepsilon > 0$ . Ademais,

$$\begin{aligned} \Re z^* Ax - \Re z_\lambda^* Ax &\leq |z^* Ax - z_\lambda^* Ax| \\ &\leq |(z^* - z_\lambda^*) Ax| \\ &\leq \|z^* - z_\lambda^*\| \|Ax\| \\ &\leq \varepsilon \|Ax\| \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\Re z^* Ax \leq \Re z_\lambda^* Ax + \varepsilon \|Ax\| \leq \varepsilon \|Ax\|.$$

Novamente, da arbitrariedade de  $\varepsilon$ , podemos concluir que  $\Re z^* Ax \leq 0$ .

Do que já provamos, obtemos de (II.37) que

$$\Re z^* x \geq \lim_{\lambda} \left( \|x\| - \frac{1}{\lambda} \|Ax\| \right) = \|x\|.$$

Em consequência,

$$\|x\| \leq \Re(z^*(x)) \leq |z^*(x)| \leq \|x\|.$$

Logo  $|z^* x| = \|x\|$ .

Por fim, tomando  $x^* = \|x\| \cdot z^*$ , temos que  $x^* \in \mathfrak{D}(x)$  e  $\Re x^* Ax \leq 0$ , pois  $\Re z^* Ax \leq 0$  o que finaliza a prova.  $\square$

PROPOSIÇÃO II.4.10. Se  $\mathfrak{X}$  é um espaço de Hilbert, então para todo  $x \in \mathfrak{X}$ , o conjunto  $D(x)$  é unitário e seu único elemento é o funcional  $x^* \in \mathfrak{X}^*$  dado por

$$x^*(y) \stackrel{\text{def}}{=} \langle x, y \rangle \quad (y \in \mathfrak{Y}).$$

PROVA. Sejam  $x \in \mathfrak{X}$  e  $x^* \in D(x)$ . Do teorema I.5.7, decorre que existe  $v \in \mathfrak{X}$  tal que  $x^*(y) = \langle y, v \rangle$ , para todo  $y \in \mathfrak{X}$ . Disto, podemos inferir que  $\|x^*\| = \|v\|$ . Com efeito, da desigualdade de *Cauchy-Schwarz* obtemos

$$|x^*(y)| = |\langle y, v \rangle| \leq \|y\| \|v\| \leq \|v\| \quad (\|y\| \leq 1).$$

Além disso, se  $y = \|v\|^{-1}v$ , então  $|x^*(y)| = \|v\|$ , donde podemos concluir o requerido. Ademais, da própria definição temos

$$\langle x, v \rangle = \langle x, x \rangle = \langle v, v \rangle.$$

Em consequência,

$$\|x - v\|^2 = \langle x - v, x - v \rangle = \langle x, x \rangle + \langle v, v \rangle - \langle x, v \rangle - \langle v, x \rangle = 0$$

e, portanto,  $x = v$ , o que finaliza a prova.  $\square$

## §II.5 C<sub>0</sub>-GRUPOS

DEFINIÇÃO II.5.1. Diremos que uma função  $S \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}}$  é um C<sub>0</sub>-grupo em  $\mathcal{L}$  se, satisfizer os seguintes axiomas:

- I.  $S(0) = I$ ;
- II.  $S(s+t) = S(s)S(t)$ , para quaisquer  $s, t \in \mathbb{R}$ ;
- III.  $\lim_{t \rightarrow 0} \|S(s)x - x\| = 0$ .

Precipuamente, C<sub>0</sub>-semigrupos e C<sub>0</sub>-grupos diferenciam-se apenas no domínio de definição e que a continuidade forte agora é dada bilateralmente em 0.

Como no caso dos C<sub>0</sub>-semigrupos temos a

DEFINIÇÃO II.5.2. Seja  $S$  um C<sub>0</sub>-grupo. Seu gerador infinitesimal é o operador  $A$ , cujo domínio corresponde ao conjunto dos elementos  $x \in \mathfrak{X}$  tais que o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}$$

existe e, cuja lei de formação é

$$Ax \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}.$$

PROPOSIÇÃO II.5.3. Se  $S$  é um C<sub>0</sub>-grupos e  $A$  seu gerador infinitesimal, então as funções  $S_-$  e  $S_+$  dadas respectivamente por

$$S_-(t) \stackrel{\text{def}}{=} S|_{\mathbb{R}_-}(-t) \quad \text{e} \quad S_+(t) \stackrel{\text{def}}{=} S|_{\mathbb{R}_+}(+t) \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

são C<sub>0</sub>-semigrupos cujos geradores infinitesimais são  $-A$  e  $A$ , respectivamente.

PROVA. A prova de que  $S_-$  e  $S_+$  são  $C_0$ -semigrupos é imediata. Vamos nos concentrar, portanto, na asserção final. Sejam  $A_-$  e  $A_+$  os respectivos geradores infinitesimais de  $S_-$  e  $S_+$ . Temos assim

$$A_+x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \downarrow 0} \frac{S_+(t)x - x}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} = Ax \quad (x \in \mathfrak{D}(A) \cup \mathfrak{D}(A_+)),$$

o que conduz à conclusão  $A = A_+$ . Homologamente,

$$A_-x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \downarrow 0} \frac{S_-(t)x - x}{t} = -\lim_{t \downarrow 0} \frac{S(-t)x - x}{-t} = -Ax \quad (x \in \mathfrak{D}(-A) \cup \mathfrak{D}(A_-))$$

leva-nos a inferir que  $A_- = -A$ . □

TEOREMA II.5.4. *Seja  $A$  um operador linear. Então  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -grupo  $S$  satisfazendo*

$$\|S(t)\| \leq e^{\omega|t|} \quad (t \in \mathbb{R})$$

*se, e somente se,*

(i)  $A$  é fechado e densamente definido;

(ii) Se  $|\lambda| > \omega$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ), então  $\lambda \in \varrho(A)$  e

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(|\lambda| - \omega)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

PROVA. Conforme vimos, se  $S$  é um  $C_0$ -grupo, então  $S_-$  e  $S_+$  são  $C_0$ -semigrupos com gerador infinitesimal  $-A$  e  $A$ , respectivamente. Ademais,  $A$  é necessariamente fechado com domínio denso (*vide* Corolário II.2.11), em consequência vale (i). Das premissas temos

$$(II.38) \quad \omega_- \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|S_-(t)\| \leq \omega \quad \text{e} \quad \omega_+ \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|S_+(t)\| \leq \omega.$$

Em conformidade com o Lema II.3.4, podemos inferir que se  $\lambda > \omega$ , então  $\lambda \in \varrho(A) \cap \varrho(-A)$ . Efetivamente, se  $\lambda > \omega$ , então  $\lambda > \max\{\omega_-, \omega_+\}$  e assim, temos o requerido. Portanto, supondo que  $|\lambda| > \omega$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ), então  $\lambda \in \varrho(A)$ , pois se  $|\lambda| > \omega$ , então  $|\lambda| \in \varrho(A) \cap \varrho(-A)$ , o que implica, em qualquer caso, que  $\lambda \in \varrho(A)$ .

Supondo  $|\lambda| > \omega$ , temos dois casos a tratar. Primeiro admitamos que  $\lambda < -\omega$ . Decorre da nossa suposição e do que acabamos de ver que  $-\lambda \in \varrho(A)$ . Visto que  $R(-\lambda; A) = -R(\lambda; -A)$ , por conseguinte  $\lambda \in \varrho(-A)$ , podemos concluir do Lema II.3.5 que

$$(II.39) \quad \|R(\lambda; -A)^n\| \leq \frac{M}{(-\lambda - \omega)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Analogamente, de  $\lambda > \omega$  a inclusão  $\lambda \in \varrho(A)$  e, consequentemente, do Lema II.3.5 inferimos

$$(II.40) \quad \|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Tendo em vista (II.39) e (II.40) deduzimos que em qualquer caso vale

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Segue, portanto, o item (ii).

Reciprocamente, suponha que (i) e (ii) sejam válidas então  $-A$  e  $A$  estão sobre uma das sentenças do Teorema II.3.6 e, portanto, dão origem a dois  $C_0$ -semigrupos, os quais denotaremos por  $S_-$  e  $S_+$ , respectivamente. Em conformidade com o Corolário II.3.7 temos

$$S_-(t)x = \lim_{\lambda} e^{-B_\lambda t} x \quad \text{e} \quad S_+(t)x = \lim_{\lambda} e^{B_\lambda t} x \quad (x \in \mathfrak{X})$$

em que

$$B_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} -\lambda(I - \lambda R(\lambda; A)) \quad (\lambda > \omega \geq \max\{\omega_-, \omega_+\}),$$

com  $\omega_-$  e  $\omega_+$  definidos como em (II.38). Necessariamente vale (*vide* Lema I.4.13)

$$S_-(t)S_+(t)x = \lim_{\lambda} e^{-B_\lambda t} e^{B_\lambda t} x = \lim_{\lambda} e^{B_\lambda t} e^{-B_\lambda t} x = S_+(t)S_-(t)x \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Notemos que  $W = S_- S_+$  é um  $C_0$ -semigrupo. Com efeito,

- (a)  $W(0) = S_-(0)S_+(0) = I$ ;
- (b)  $W(s+t) = S_-(s)S_+(s)S_-(t)S_+(t) = S_-(s)S_-(t)S_+(s)S_+(t) = W(s)W(t) \quad (s, t \in \mathbb{R}_+)$ ;
- (c) Pelo Lema I.4.13, podemos deduzir

$$\lim_{t \downarrow 0} W(t)x = \lim_{t \downarrow 0} \left[ S_-(t) \left( \lim_{t \downarrow 0} S_+(t)x \right) \right] = x.$$

Assim, podemos conceber o gerador infinitesimal  $A_W$  do  $C_0$ -semigrupo  $W$ . Da sentença

$$A_W x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \downarrow 0} \frac{W(t)x - x}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \left[ S_-(t) \frac{S_+(t)x - x}{t} + \frac{S_-(t)x - x}{t} \right] = Ax - Ax = 0 \quad (x \in \mathfrak{D}(A)),$$

podemos inferir que  $\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}(A_W)$ . Além disso  $A_W(\mathfrak{D}(A)) = \{0\}$ .

Sabe-se que  $A_W$  é fechado e  $\mathfrak{D}(A)$  é denso. Ademais, para cada  $x \in \mathfrak{D}(A_W)$ , existe uma sequência  $\{x_n\}$  em  $\mathfrak{D}(A)$ , tal que  $x = \lim_n x_n$ . Portanto, como  $\{A_W x_n\}$  converge para zero,

$$A_W x = \lim_n A_W x_n = 0,$$

Desta maneira deduzimos que  $A_W \equiv 0$ . Em virtude de  $A_W$  ser densamente definido e limitado decorre que  $\mathfrak{D}(A_W) = \mathfrak{X}$ . Como se verifica facilmente  $S \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}_+}$  dado por  $S(t) = I$  é um  $C_0$ -semigrupo com gerador infinitesimal identicamente nulo. Em conformidade com a Proposição II.2.16, podemos inferir que  $W = S$ , que por sua vez acarreta  $S_-(t) = S_+(t)^{-1}$ , para todo  $t \geq 0$ .

Seguidamente provemos que

$$S(t) = \begin{cases} S_+(+t), & t \geq 0; \\ S_-(-t), & t \leq 0 \end{cases}$$

define um  $C_0$ -grupo, tal que

$$\|S(t)\| \leq e^{\omega|t|} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Para tanto, observemos

- (a)  $S(0) = S_-(0) = I$ ;

- (b)  $\lim_{t \downarrow 0} S(t)x = \lim_{t \downarrow 0} S_+(t)x = x = \lim_{t \uparrow 0} S_-(-t)x = \lim_{t \uparrow 0} S(t)x \quad (x \in \mathfrak{X});$
- (c) Para provarmos o axioma remanescente de semigrupo, consideremos  $s, t \in \mathbb{R}$ , tais que  $s \leq 0 < t$  e  $s + t > 0$ . Temos, assim,

$$S(s)S(t) = S_-(-s)S_+(t) = S_-(-s - t + t)S_+(t) = S_-(t)S_-(-s - t)S_+(t) = S(s + t).$$

Os outros casos são demonstrados de maneira análoga.

Para concluirmos consideremos  $t \in \mathbb{R}$ . Temos dois casos a considerar. Admitamos primeiramente que  $t < 0$ . Em consonância ao Corolário II.3.7 e a nossa escolha de  $\omega$  vale

$$\|S(t)\| = \|S_-(-t)\| \leq e^{\omega(-t)}.$$

Homologamente, se  $t \geq 0$

$$\|S(t)\| = \|S_+(t)\| \leq e^{\omega t}.$$

Desta forma, em qualquer caso, vale

$$\|S(t)\| \leq e^{\omega|t|}.$$

□

## §II.6 PSEUDORRESOLVENTES

Conforme observamos, podemos deduzir que um determinado operador linear fechado e densamente definido é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo, isto baseando-se nas propriedades que os seus operadores resolventes possuíam. A determinação de operadores semelhantes pode ser simplificada isolando uma propriedade dos operadores resolventes, este será o escopo desta seção.

Motivado pela identidade dos operadores resolvente (*vide* II.3.2) temos a

DEFINIÇÃO II.6.1. Uma aplicação  $J \in \mathcal{L}^\Lambda$  ( $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ) possuindo a propriedade

$$(II.41) \quad J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda)J(\lambda)J(\mu) \quad (\lambda, \mu \in \Lambda),$$

será chamada de pseudorresolvente em  $\Lambda$ .

Para o resto desta seção, sempre quando ocorrer os símbolos  $\Lambda$  e  $J$ , estes devem ser interpretados segundo a definição precedente.

LEMA II.6.2. Vale a propriedade comutativa

$$J(\mu)J(\lambda) = J(\lambda)J(\mu) \quad (\lambda, \mu \in \Lambda).$$

Além disso, para todo  $\lambda \in \Lambda$ , o conjunto  $\ker(J(\lambda))$  é fechado e, tanto  $\ker(J(\lambda))$  como  $\Im(J(\lambda))$  são independentes de  $\lambda$ , i.e., estes conjuntos são invariantes com  $\lambda$ .

PROVA. Sejam  $\lambda, \mu \in \Lambda$ . Se estes forem iguais decorrerá, diretamente de (II.41), que a comutatividade é validada. Caso contrário, verifica-se

$$J(\mu)J(\lambda) = (\mu - \lambda)^{-1}(J(\lambda) - J(\mu)) = (\lambda - \mu)^{-1}(J(\mu) - J(\lambda)) = J(\lambda)J(\mu).$$

Seguindo, em virtude de  $J(\lambda)$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) ser limitado, decorre que  $J(\lambda)$  será fechado e, em consequência  $\ker(J(\lambda))$  é fechado.

Provemos agora a independência, ou melhor a invariância referida. Para isto consideremos  $\lambda, \mu \in \Lambda$ . Temos de (II.41) que  $\ker(J(\mu)) = \ker(J(\lambda))$  e

$$J(\lambda) = J(\mu)[(\mu - \lambda)J(\lambda) + I]$$

Está última igualdade implica a inclusão  $\mathfrak{S}(J(\lambda)) \subseteq \mathfrak{S}(J(\mu))$ . Por um argumento simétrico, podemos inferir a inclusão oposta e, portanto, a igualdade  $\mathfrak{S}(J(\lambda)) = \mathfrak{S}(J(\mu))$ , o que finaliza a prova.  $\square$

**TEOREMA II.6.3.**  *$J$  define uma família de operadores resolventes de um único operador linear  $A$  fechado e densamente definido se, e somente se,  $\ker(J(\lambda)) = \{0\}$  e  $\overline{\mathfrak{S}(J(\lambda))} = \mathfrak{X}$ , para todo  $\lambda \in \Lambda$ .*

**PROVA.** Se, para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,  $J(\lambda)$  for o resolvente de um operador fechado densamente definido  $A$ , então vale a conjunção do enunciado.

Reciprocamente, dado  $\lambda \in \Lambda$  suponhamos que valha a sentença  $\ker(J(\lambda)) = \{0\}$  e  $\overline{\mathfrak{S}(J(\lambda))} = \mathfrak{X}$ , para todo  $\lambda \in \Lambda$ . Concebamos  $\lambda_0 \in \Lambda$ . Da suposição  $\ker(J(\lambda_0)) = \{0\}$  decorre que  $J(\lambda_0)$  é injetiva. Ademais, do fato de  $J(\lambda_0)$  ser limitado, em particular fechado, decorre que  $J(\lambda_0)^{-1}$  o será. Conformemente, o operador linear  $A$  tal que  $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{S}(J(\lambda_0))$ , definido pela lei

$$A = \lambda_0 I - J(\lambda_0)^{-1},$$

é fechado com domínio denso, pois por hipótese  $\overline{\mathfrak{S}(J(\lambda))} = \mathfrak{X}$ .

Seguidamente, seja  $\lambda \in \Lambda$ . Note que

$$J(\lambda)J(\lambda_0)^{-1} = I - (\lambda - \lambda_0)J(\lambda) = J(\lambda_0)^{-1}J(\lambda).$$

Em conformidade,

$$J(\lambda)(\lambda I - A) = J(\lambda)[(\lambda - \lambda_0)I + J(\lambda_0)^{-1}] = I = [(\lambda - \lambda_0)I + J(\lambda_0)^{-1}]J(\lambda) = (\lambda I - A)J(\lambda),$$

o que prova portanto que  $J(\lambda) = R(\lambda; A)$ , para todo  $\lambda \in \Lambda$ .  $\square$

**TEOREMA II.6.4.** *Se para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\mathfrak{S}(J(\lambda))$  for denso em  $\mathfrak{X}$  e existir uma sequência  $\{\lambda_n\}$  em  $\Lambda$  tal que  $\lim_n |\lambda_n| = +\infty$ , cujos termos satisfaçam*

$$(II.42) \quad \|\lambda_n J(\lambda_n)\| \leq M \quad (n \in \mathbb{N}),$$

*para algum  $M \in \mathbb{R}_+$ , então para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,  $J(\lambda)$  é o operador resolvente em  $\lambda$  de um único operador fechado densamente definido  $A$ .*

**PROVA.** Seja  $\lambda \in \Lambda$ . À vista do Teorema II.6.3, é suficiente provar que  $\ker(J(\lambda)) = \{0\}$ . De (II.42) e da condição concernente a sequência  $\{\lambda_n\}$ , podemos inferir que  $\lim_n \|J(\lambda_n)\| = 0$ . Assim, da identidade em (II.41) podemos deduzir

$$\lim_n \|(\lambda_n J(\lambda_n) - I)J(\lambda)\| = 0 \quad (\lambda \in \Lambda).$$

Com efeito, observemos que

$$\begin{aligned} (\lambda_n J(\lambda_n) - I)J(\lambda) &= (\lambda_n J(\lambda_n) - I)J(\lambda) + \lambda J(\lambda_n)J(\lambda) - \lambda J(\lambda_n)J(\lambda) \\ &= \lambda J(\lambda_n)J(\lambda) - [(\lambda_n - \lambda)J(\lambda_n) + I]J(\lambda) \\ &= J(\lambda_n)(\lambda J(\lambda) - I). \end{aligned}$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , podemos deduzir o requerido. Em consequência, se  $x \in \mathfrak{S}(J(\lambda))$ , então

$$\lim_n \lambda_n J(\lambda_n) x = x.$$

Agora faremos o uso da densidade de  $\mathfrak{S}(J(\lambda))$ . Para cada  $x \in \mathfrak{X}$ , temos que existe  $\{x_n\}$  em  $\mathfrak{S}(J(\lambda))$  tal que  $x = \lim_n x_n$ . Conformemente

$$(II.43) \quad \lim_n \lambda_n J(\lambda_n) x = \lim_n \lambda_n J(\lambda_n) (\lim_m x_m) = \lim_n \lim_m \lambda_n J(\lambda_n) x_m.$$

Em seguida, notemos que

$$(i) \quad \lim_n \lambda_n J(\lambda_n) x_m = x_m;$$

$$(ii) \quad \lim_m \lambda_n J(\lambda_n) x_m = \lambda_n J(\lambda_n) x \text{ existe uniformemente, pois}$$

$$\|J(\lambda_n) x - J(\lambda_n) x_m\| \leq M \|x - x_m\| \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Do Lema I.1.13, podemos inferir que

$$(II.44) \quad \lim_n \lim_m \lambda_n J(\lambda_n) x_m = \lim_m \lim_n \lambda_n J(\lambda_n) x_m = \lim_m x_m = x$$

Combinando (II.43) e (II.44), podemos deduzir

$$(II.45) \quad \lim_n \lambda_n J(\lambda_n) x = x \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Agora seja  $x \in \ker(J(\lambda))$ . Conforme vimos  $x \in \ker(J(\lambda_n))$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto  $\lambda_n J(\lambda_n) x = 0$ . De (II.45), podemos concluir que  $x = 0$ , dêsarte concluimos que  $\ker(J(\lambda)) = \{0\}$ .  $\square$

**COROLÁRIO II.6.5.** *Se existir uma sequência  $\{\lambda_n\}$  em  $\Lambda$ , tal que  $\lim_n |\lambda_n| = +\infty$  e*

$$(II.46) \quad \lim_n \lambda_n J(\lambda_n) x = x \quad (x \in \mathfrak{X}),$$

*então para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,  $J(\lambda)$  é o resolvente de um operador linear fechado densamente definido  $A$ .*

**PROVA.** Pautando-se na prova do Teorema II.6.4, podemos inferir que  $\ker(J(\lambda)) = \{0\}$ , para todo  $\lambda \in \Lambda$ . Para concluirmos, é suficiente provar as condições remanescentes do teorema anterior.

Primeiramente, observemos que (II.46) implica que a família  $\{\lambda_n J(\lambda_n)\}$  é tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\lambda_n J(\lambda_n) x\| < +\infty.$$

Pelo Teorema da *Banach-Steinhaus*, podemos deduzir que existe  $M > 0$ , tal que

$$\|\lambda_n J(\lambda_n)\| \leq M \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Segundamente, (II.46) também implica que  $\mathfrak{S}(J(\lambda))$  é denso, pois  $\lambda_n J(\lambda_n) x \in \mathfrak{S}(J(\lambda))$ . Isto porque  $\mathfrak{S}(J(\mu))$  independe de  $\mu \in \Lambda$  *vide* Lema II.6.2.

Por fim, recorrendo ao Teorema II.6.4, podemos deduzir o requerido.  $\square$

## §II.7 SEMIGRUPOS ADJUNTOS

Antes de prosseguirmos, faremos um breve comentário a respeito da notação que empregaremos adiante. Seja  $x^* \in \mathfrak{X}^*$  denotaremos  $x^*(x)$  por  $\langle x^*, x \rangle$ , para cada  $x \in \mathfrak{X}$  <sup>†</sup>, quando se trabalha em espaços de Hilbert.

**DEFINIÇÃO II.7.1.** *Seja  $S$  um operador linear densamente definido. O operador adjunto de  $S$  é definido como sendo o operador  $S^*$  cujo domínio compreenda ao conjunto dos elementos  $x^* \in \mathfrak{X}^*$  tais que existe  $y^* \in \mathfrak{X}^*$  satisfazendo a condição*

$$(II.47) \quad \langle x^*, Sx \rangle = \langle y^*, x \rangle \quad (x \in \mathfrak{D}(S)).$$

*Tal operador faz corresponder todo  $x^* \in \mathfrak{D}(S^*)$  ao elemento  $y^*$  satisfazendo (II.47), i.e.,  $S^*x^* = y^*$ . Assim, necessariamente temos que*

$$\langle S^*x^*, x \rangle = \langle x^*, Sx \rangle \quad (x \in \mathfrak{D}(S)).$$

A densidade de  $\mathfrak{D}(S)$  e a existência de  $y^*$  implicam na unicidade de tal elemento. Com efeito, suponha que  $y_i^* \in \mathfrak{X}^*$ , ( $i = 1, 2$ ) sejam tais que

$$\langle y_i^*, x \rangle = \langle x^*, Sx \rangle \quad (x \in \mathfrak{D}(S)).$$

Em virtude de  $\mathfrak{D}(S)$  ser denso, podemos determinar para cada  $x \in X$  uma sequência  $\{x_n\}$  em  $\mathfrak{D}(S)$  tal que  $x = \lim_n x_n$ . Da continuidade de  $y_i^* \in \mathfrak{X}^*$ , decorre a igualdade

$$\langle y_1^*, x \rangle = \lim_n \langle y_1^*, x_n \rangle = \lim_n \langle y_2^*, x_n \rangle = \langle y_2^*, x \rangle.$$

Como  $x \in \mathfrak{X}$  é arbitrário, podemos inferir  $y_1^* = y_2^*$ . Isto nos permite inferir a boa definição da aplicação  $S^*$ .

**LEMA II.7.2.** *Se  $S$  é um operador limitado, então  $S^*$  será um operador linear limitado com domínio  $\mathfrak{X}^*$ , tal que  $\|S^*\| = \|S\|$ .*

**PROVA.** Dado  $x^* \in \mathfrak{X}^*$ , é conspícuo que  $\langle x^*, Sx \rangle$  é um funcional linear limitado. Pela própria definição, podemos inferir que  $x^* \in \mathfrak{D}(S^*)$ . Em conformidade, podemos concluir a igualdade  $\mathfrak{D}(S^*) = \mathfrak{X}^*$ .

Sejam  $x_i^* \in \mathfrak{D}(S^*)$ , ( $i = 1, 2$ ) e  $\alpha \in \mathfrak{K}$ . Por definição, para  $x \in \mathfrak{D}(S)$ , temos

$$\begin{aligned} \langle S^*(\alpha x_1^* + x_2^*), Sx \rangle &= \langle \alpha x_1^* + x_2^*, Sx \rangle \\ &= \langle \alpha x_1^*, Sx \rangle + \langle x_2^*, Sx \rangle \\ &= \langle S^*\alpha x_1^*, x \rangle + \langle S^*x_2^*, x \rangle \\ &= \langle S^*\alpha x_1^* + S^*x_2^*, x \rangle. \end{aligned}$$

A unicidade do adjunto nos permite inferir a identidade que  $S^*\alpha x_1^* = \alpha S^*x_1^*$  e

$$S^*(\alpha x_1^* + x_2^*) = \alpha S^*x_1^* + S^*x_2^*.$$

o que prova a linearidade.

<sup>†</sup>Não confundir com a notação de produto interno. A justificativa desta notação encontra-se, talvez, na notação de produto interno que, em conformidade com o Teorema I.5.7, podemos considerar uma como sendo a outra e vice-versa.

Seguidamente, usando a hipótese de que  $\mathfrak{D}(S)$  é denso e que  $S$  é limitado, podemos deduzir

$$|\langle S^* x^*, x \rangle| \leq \|x^*\| \|S\| \|x\| \quad ((x, x^*) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}^*),$$

donde podemos inferir a desigualdade  $\|S^*\| \leq \|S\|$  e, *a fortiori*  $S^*$  é limitado.

Conforme já havíamos notado em outras ocasiões, para cada  $x \in \mathfrak{X}$ , com o auxílio do Teorema de *Hahn-Banach* podemos determinar  $x_x^* \in \mathfrak{X}^*$  tal que  $\langle x_x^*, Sx \rangle = \|Sx\|$  e  $\|x_x^*\| \leq 1$  (*vide* Lema I.6.4). Assim

$$\begin{aligned} \|S\| &= \sup\{\|Sx\| : \|x\| \leq 1, x \in \mathfrak{D}(S)\} \\ &= \sup\{|\langle x_x^*, Sx \rangle| : \|x\| \leq 1, x \in \mathfrak{D}(S)\} \\ &= \sup\{|\langle S^* x_x^*, x \rangle| : \|x\| \leq 1, x \in \mathfrak{D}(S)\} \\ &\leq \sup\{|\langle S^* x_x^*, x \rangle| : \|x\| \leq 1, x \in \mathfrak{X}\} \\ &\leq \sup\{|\langle S^* x_x^*, x \rangle| : \|x\|, \|x_x^*\| \leq 1, (x, x^*) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}^*\} \\ &= \|S^*\|, \end{aligned}$$

o que nos permite inferir  $\|S^*\| = \|S\|$ . □

LEMA II.7.3. *Seja  $\{A_k : k \in \{1, \dots, n\}\}$  uma família de operadores densamente definidos em  $\mathfrak{X}$ . Então vale*

$$(II.48) \quad \left( \sum_{k=1}^n A_k \right)^* = \sum_{k=1}^n A_k^*.$$

Além disso, para qualquer operador  $B$  densamente definido tal que  $\mathfrak{S}(B) \subseteq \mathfrak{D}(B)$ , verifica-se

$$(II.49) \quad [B^n]^* = [B^*]^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

PROVA. Notemos que para cada  $x \in \mathfrak{D}(A)$  temos

$$\begin{aligned} \langle (A+B)^* x^*, x \rangle &= \langle x^*, (A+B)x \rangle \\ &= \langle x^*, Ax \rangle + \langle x^*, Bx \rangle \\ &= \langle A^* x^*, x \rangle + \langle B^* x^*, x \rangle \\ &= \langle (A^* + B^*) x^*, x \rangle. \end{aligned}$$

Da densidade de  $\mathfrak{D}(A)$  em  $\mathfrak{X}$  e da unicidade do operador adjunto podemos concluir que a expressão vale para  $n = 2$ .

Suponha que valha (II.48) para uma família com  $n$  elementos. Consideremos, agora, uma família com  $n + 1$  elementos  $\{A_k : k \in \{1, \dots, n + 1\}\}$ . Temos necessariamente

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \sum_{k=1}^{n+1} A_k \right)^* x^*, x \right\rangle &= \left\langle x^*, \sum_{k=1}^{n+1} A_k x \right\rangle \\ &= \left\langle x^*, \sum_{k=1}^n A_k x \right\rangle + \langle x^*, A_{n+1} x \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n A_k^* x^*, x \right\rangle + \langle A_{n+1}^* x^*, x \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{n+1} A_k^* x^*, x \right\rangle, \end{aligned}$$

em que

$$(x, x^*) \in \bigcap_{k=1}^{n+1} \mathfrak{D}(A_k) \times \mathfrak{X}^*$$

Pelo princípio de indução finita, podemos concluir que (II.48) vale para qualquer família finita de operadores densamente definidos.

Por fim, suponhamos que valha (II.49) para  $n$ . Conformemente

$$\langle [B^{n+1}]^* x^*, x \rangle = \langle x^*, B^{n+1} x \rangle = \langle [B^*]^n x^*, Bx \rangle = \langle [B^*]^{n+1} x^*, x \rangle$$

o que pelo princípio de indução finita decorre o resultado requerido.  $\square$

LEMA II.7.4. Se  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ , então  $[\exp A]^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^*)$  e

$$[\exp A]^* = \exp A^*.$$

PROVA. Seja  $(x, x^*) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}^*$ . Temos

$$\begin{aligned} \langle x^*, \exp Ax \rangle &= \lim_n \left\langle x^*, \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k x \right\rangle \\ &= \lim_n \left\langle \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (A^k)^* x^*, x \right\rangle \\ &= \lim_n \left\langle \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (A^*)^k x^*, x \right\rangle \\ &= \langle \exp A^* x^*, x \rangle, \end{aligned}$$

A última identidade se deve do fato de  $A^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^*)$ .  $\square$

LEMA II.7.5. Seja  $A$  um operador linear densamente definido em  $\mathfrak{X}$ . Se  $\lambda \in \varrho(A)$ , então  $\lambda \in \varrho(A^*)$  e

$$(II.50) \quad R(\lambda; A)^* = R(\lambda; A^*).$$

PROVA. Se  $\lambda \in \varrho(A)$ , então  $R(\lambda; A)$  é limitado. Pelo Lema II.7.2,  $R(\lambda; A)^*$  será limitado com domínio  $\mathfrak{X}^*$ . Temos, assim,

$$\begin{aligned} \langle I_{\mathfrak{D}(A^*)} x^*, x \rangle &= \langle I_{\mathfrak{D}(A^*)} x^*, x \rangle \\ &= \langle x^*, (\lambda I - A) R(\lambda; A) x \rangle \\ &= \langle R(\lambda; A)^* (\lambda I - A)^* x^*, x \rangle, \end{aligned}$$

para todo  $(x, x^*) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{D}(A^*)$ .

Daí e da definição podemos inferir

$$R(\lambda; A)^* (\lambda I - A)^* = I_{\mathfrak{D}(A^*)}.$$

Temos também

$$\begin{aligned} \langle I^* x^*, x \rangle &= \langle x^*, x \rangle \\ &= \langle x^*, R(\lambda; A) (\lambda I - A) x \rangle \\ &= \langle R(\lambda; A)^* x^*, (\lambda I - A) x \rangle, \end{aligned}$$

para todo  $(x, x^*) \in \mathfrak{D}(A) \times \mathfrak{X}^*$ .

Analogamente,

$$(\lambda I - A)^* R(\lambda; A)^* = I^*.$$

em que fizemos  $I^* = I_{\mathfrak{D}(\mathfrak{X}^*)}$ . Logo podemos inferir  $R(\lambda; A)^* = ((\lambda I - A)^*)^{-1}$ .

Por fim, basta usar o Lema II.7.3 e concluir que  $(\lambda I - A)^* = \lambda I^* - A^*$ , conformemente podemos finalmente deduzir (II.50).  $\square$

**PROPOSIÇÃO II.7.6.** *Se  $S$  é um  $C_0$ -semigrupo, então a aplicação  $S^*$  definida por  $S^*(t) = S(t)^*$  é um semigrupo de operadores limitados em  $\mathfrak{X}^*$ , e será chamado de semigrupo adjunto.*

**PROVA.** Primeiro observemos que

$$\langle x^*, S(0)x \rangle = \langle I^* x^*, x \rangle \quad (x^* \in \mathfrak{X}^*).$$

Logo  $S^*(0) = S(0)^* = I^*$ . Em seguida,

$$\begin{aligned} \langle S(s+t)^* x^*, x \rangle &= \langle x^*, S(s+t)x \rangle \\ &= \langle x^*, S(s)S(t)x \rangle \\ &= \langle S(t)^* S(s)^* x^*, x \rangle \\ &= \langle S(t)^* S(s)^* x^*, x \rangle \end{aligned}$$

para todo  $(x, x^*) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}^*$ . Portanto, podemos deduzir que  $S(s+t)^* = S(s)^* S(t)^*$ , para quaisquer  $s, t \in \mathbb{R}_+$ .  $\square$

**DEFINIÇÃO II.7.7.** *Sejam  $S$  um operador linear em  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  um subespaço linear de  $\mathfrak{X}$ . Ao operador  $\tilde{S}$  cujo domínio é*

$$\mathfrak{D}(\tilde{S}) = \{s \in \mathfrak{D}(S) \cap \mathfrak{Y} : Sx \in \mathfrak{Y}\}$$

*e  $\tilde{S}x = Sx$  para  $x \in \mathfrak{D}(\tilde{S})$ , daremos o nome de parte  $S$  em  $\mathfrak{Y}$ .*

**TEOREMA II.7.8.** *Seja  $T$  um  $C_0$ -semigrupo em  $\mathfrak{X}$  com gerador infinitesimal  $A$  e seja  $T^*$  o seu semigrupo adjunto. Se  $A^*$  é o adjunto de  $A$  e  $\mathfrak{Y} = \overline{\mathfrak{D}(A^*)}$  em  $\mathfrak{X}^*$ , então  $S^*$  dado por*

$$S^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} T(t)^*|_{\mathfrak{Y}} \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

*é um  $C_0$ -semigrupo em  $\mathfrak{Y}^*$ . O gerador infinitesimal  $B^*$  de  $S^*$  é a parte de  $A^*$  em  $\mathfrak{Y}$ , i.e.,*

$$\mathfrak{D}(B^*) = \{x^* \in \mathfrak{D}(A^*) : A^* x^* \in \mathfrak{Y}\}$$

*e*

$$B^* x^* = A^* x^* \quad (x \in \mathfrak{D}(B^*)).$$

**PROVA.** À vista do Teorema de Hille-Yosida-Phillips (Teorema II.3.6), existem constantes  $\omega$  e  $M$ , tais que se  $\lambda > \omega$  então  $\lambda \in \varrho(A)$  e

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Pelo Lema II.7.5, podemos inferir que se  $\lambda > \omega$ , então  $\lambda \in \varrho(A^*)$  e

$$\|R(\lambda; A^*)^n\| = \|[R(\lambda; A)^*]^n\| = \|[R(\lambda; A)^n]^*\| = \|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

As duas últimas igualdades decorrem do Lema II.7.3 e Lema II.7.2, respectivamente.

Para cada  $\lambda > \omega$ , defina  $J(\lambda) = R(\lambda; A^*)|_{\mathfrak{Y}^*}$ . Desta forma,  $J$  é um pseudoresolvente em  $\Lambda = (\omega, +\infty)$  tal que

$$(II.51) \quad \|J(\lambda)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Agora, recorrendo ao Teorema de *Hille-Yosida-Phillips*, podemos inferir

$$\lim_{\lambda} \lambda R(\lambda; A^*)x^* = x^* \quad (x^* \in \mathfrak{X}^*).$$

Particularmente,

$$\lim_{\lambda} \lambda R(\lambda; A^*)y^* = y^* \quad (y^* \in \mathfrak{Y}),$$

que, segundo o Corolário II.6.5, podemos deduzir que  $J$  define uma família de operadores resolvente de um único operador  $B^*$  fechado densamente definido em  $\mathfrak{Y}$ . Da própria definição do pseudoresolvente  $J$ , prova-se que se  $\lambda > \omega$ , então  $\lambda \in \varrho(B^*)$ , porque o pseudoresolvente, ou melhor, neste caso o resolvente está definido.

Seguidamente, (II.51) acarreta

$$\|R(\lambda; B^*)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Recorrendo novamente ao Teorema de *Hille-Yosida-Phillips*, podemos concluir que  $B^*$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $S^*$  em  $\mathfrak{Y}$ .

Agora, usando o Lema II.7.4 e o Corolário II.3.7, obtemos

$$\begin{aligned} \langle x^*, T(t)x \rangle &= \lim_{\lambda} \langle x^*, \exp(\lambda t(\lambda R(\lambda; A) - I)x) \rangle \\ &= \lim_{\lambda} \langle \exp(\lambda t(\lambda R(\lambda; A^*) - I^*)x^*), x \rangle \\ &= \lim_{\lambda} \langle \exp(\lambda t(\lambda J(\lambda) - I^*)x^*), x \rangle \\ &= \lim_{\lambda} \langle \exp(\lambda t(\lambda R(\lambda; B^*) - I^*)x^*), x \rangle \\ &= \langle S(t)^*x^*, x \rangle, \end{aligned}$$

para todo  $(x, x^*) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ . Em consequência,

$$S^*(t) = T(t)^*|_{\mathfrak{Y}} \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Imediatamente provemos que  $B^*$  é a parte de  $A^*$  em  $\mathfrak{Y}^*$ , a qual denotaremos por  $\tilde{A}^*$ . Para tanto consideremos  $x^* \in \mathfrak{D}(\tilde{A}^*)$ , temos necessariamente que  $x^*$  é tal que  $x^* \in \mathfrak{Y}^* \cap \mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{D}(A^*)$  e  $A^*x \in \mathfrak{Y}^*$ . Se  $\lambda \in \varrho(A)$ , então  $(\lambda I^* - A^*)x^* \in \mathfrak{Y}^*$ . Em consequência,

$$(II.52) \quad R(\lambda; B^*)(\lambda I^* - A^*)x^* = x^* \in \mathfrak{D}(B^*).$$

Portanto vale a inclusão  $\mathfrak{D}(\tilde{A}^*) \subseteq \mathfrak{D}(B^*)$ . Por outro lado, suponha que  $x^* \in \mathfrak{D}(B^*)$ . Temos em conformidade

$$x^* = R(\lambda; B^*)(\lambda I^* - B^*)x^* = R(\lambda; A^*)(\lambda I^* - B^*)x^* \in \mathfrak{D}(A^*).$$

Conformemente  $\mathfrak{D}(\tilde{A}^*) = \mathfrak{D}(B^*)$ .

Por fim, de (II.52) podemos concluir que

$$(\lambda I^* - \tilde{A}^*)x^* = (\lambda I^* - B^*)x^* \quad (x^* \in \mathfrak{D}(B^*)),$$

donde podemos inferir que  $\tilde{A}^*x^* = B^*x^*$ , o que finaliza a prova.  $\square$

LEMA II.7.9. *Seja  $\mathfrak{X}$  um espaço de Banach reflexivo. Se  $S$  é um operador linear fechado densamente definido, então  $\mathfrak{D}(S^*)$  é denso em  $\mathfrak{X}^*$ .*

PROVA. Raciocinemos por redução ao absurdo. Suponhamos que  $\mathfrak{D}(S^*)$  não seja denso em  $\mathfrak{X}^*$  (equivalentemente  $\mathfrak{X}^* \neq \overline{\mathfrak{D}(S^*)}$ ). Seguidamente notemos que  $\mathfrak{X}^*$  é um  $B$ -espaço. Seja  $x_0 \notin \overline{\mathfrak{D}(S^*)}$ , pelo Teorema de *Hahn-Banach* <sup>‡</sup> podemos determinar  $x_0^{**} \in \mathfrak{X}^{**}$ , tal que  $\langle x_0^{**}, x_0 \rangle = 1$  e  $\langle x_0^{**}, x^* \rangle = 0$ , para todo  $x^* \in \mathfrak{D}(S^*)$ , mas como é conhecido da análise funcional existe uma isometria entre  $\mathfrak{X}$  e um subconjunto do seu bidual  $\mathfrak{X}^{**}$ . Ademais, tal isometria garante a existência de um  $x_0 \in \mathfrak{X}$  tal que

$$\langle x_0^{**}, x^* \rangle = \langle x^*, x_0 \rangle \quad (x^* \in \mathfrak{X}^*).$$

Particularmente, existe  $x_0$ , tal que

$$(II.53) \quad \langle x^*, x_0 \rangle = 0 \quad (x^* \in \mathfrak{D}(S^*)).$$

Agora, como  $S$  é um operador fechado, necessariamente seu gráfico  $\Gamma_S$  é um conjunto fechado em  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ . É conspícuo que  $(0, x_0) \notin \Gamma_S$  raciocinando analogamente existe  $\Xi \in (\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})^*$  tal que  $\Xi(0, x_0) = 1$  e  $\Xi(\Gamma_S) = \{0\}$ . Também é conhecido da análise funcional que  $(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})^*$  e  $\mathfrak{X}^* \times \mathfrak{X}^*$  são isométricos, uma isometria é dada por  $I : \mathfrak{X}^* \times \mathfrak{X}^* \rightarrow (\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})^*$  definida pela lei

$$I(x^*, y^*)(x, y) = \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, y \rangle \quad \left( ((x^*, y^*), (x, y)) \in (\mathfrak{X}^* \times \mathfrak{X}^*) \times (\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})^* \right)$$

Assim, existe  $(\xi_1^*, \xi_2^*) \in \mathfrak{X}^* \times \mathfrak{X}^*$ , tal que  $I(\xi_1^*, \xi_2^*) = \Xi$ . Em conformidade com II.53 e da escolha de  $\Xi$ , podemos deduzir

$$(II.54) \quad \langle \xi_2^*, x_0 \rangle = \langle \xi_1^*, 0 \rangle + \langle \xi_2^*, x_0 \rangle = 1 \neq 0$$

e

$$(II.55) \quad \langle \xi_1^*, x \rangle + \langle \xi_2^*, Sx \rangle = 0 \quad (x \in \mathfrak{D}(S)),$$

disto deduzimos que  $\langle \xi_2^*, x_0 \rangle \neq 0$  e  $\xi_2^* \neq 0$ . No entanto, de II.55,  $\xi_2^* \in \mathfrak{D}(S^*)$ . Agora, recorrendo a II.53 vem que  $\langle \xi_2^*, x_0 \rangle = 0$ , o que é uma contradição. Consequentemente  $\mathfrak{D}(S^*)$  é denso em  $\mathfrak{X}^*$ .  $\square$

COROLÁRIO II.7.10. *Sejam  $\mathfrak{X}$  um espaço de Banach reflexivo e  $T$  um  $C_0$ -semigrupo em  $\mathfrak{X}$  com gerador infinitesimal  $A$ . Então o semigrupo  $T^*$  é de classe  $C_0$  cujo gerador infinitesimal é o adjunto  $A^*$ .*

PROVA. Pelo Lema II.7.9,  $\mathfrak{D}(A^*)$  é denso, em conformidade  $\mathfrak{Y} = \overline{\mathfrak{D}(A^*)} = \mathfrak{X}^*$ , o que, pelo Teorema II.7.4, prova o requerido.  $\square$

<sup>‡</sup>cf. [12, pág. 60].

LEMA II.7.11. *Seja  $A$  um operador linear densamente definido. Se  $A$  e  $A^*$  são dissipativos, então  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações em  $\mathfrak{X}$ .*

PROVA. Provemos que  $I - A$  é sobrejetivo. De acordo com o Lema II.4.6 e do fato de  $A$  ser densamente definido, podemos concluir do Corolário II.4.5 que  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo. Devemos portanto provar  $\mathfrak{S}(I - A) = \mathfrak{X}$ . Para isto, raciocinemos por redução ao absurdo, i.e., suponhamos que  $\mathfrak{S}(I - A) \neq \mathfrak{X}$ . Conforme vimos,  $\mathfrak{S}(I - A)$  é fechado. Assim, temos pelo Teorema de *Hahn-Banach*, que existe  $x^* \in \mathfrak{X}^* \setminus 0$  tal que  $\langle x^*, (I - A)x \rangle = 0$ , para todo  $x \in \mathfrak{D}(A)$ . Isto, por sua vez, implica que  $x^* \in \mathfrak{D}(I^* - A^*)$  e  $(I^* - A^*)x^* = 0$ . No entanto, a dissipatividade de  $I^* - A^*$  implica que  $x^* \equiv 0$ , contradizendo a hipótese. Consequentemente  $\mathfrak{S}(I - A) = \mathfrak{X}$ .

Em seguida, provemos que  $A$  é fechado. Para tanto, suponhamos que  $\{(I - A)x_n\}$  seja uma sequência convergente, em particular de Cauchy. Da hipótese de  $A$  ser dissipativo podemos concluir que  $\{x_n\}$  é de Cauchy e, portanto, convergente, admitamos  $x = \lim_n x_n$ . Agora sabendo que  $A$  é fechado temos  $\lim_n (I - A)x_n = (I - A)x$ , o que prova que  $I - A$  é fechado.  $\square$

TEOREMA II.7.12 (M. H. STONE).  *$A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de operadores unitários em um espaço de Hilbert  $\mathfrak{H}$  se, e somente se,  $iA$  é autoadjunto.*

PROVA. Suponha que  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de operadores unitários. Pelo Teorema II.5.4, podemos concluir que  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo, em consequência  $A$  é densamente definido.

Imediatamente observemos que

$$-Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{U(-t)x - x}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{U^*(t)x - x}{t} = A^*x \quad (x \in \mathfrak{D}(A) \cup \mathfrak{D}(A^*))$$

assim  $A^* = -A$ , a partir daí provemos que  $(iA)^* = iA$ . Primeiro note que  $\mathfrak{D}((iA)^*) = \mathfrak{D}(iA)$ . De fato, vejamos que

$$(II.56) \quad \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{D}(\alpha A^*) = \mathfrak{D}((\beta A)^*) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}).$$

temos que  $\mathfrak{D}((iA)^*) = \mathfrak{D}(iA)$ .

Agora sejam  $x, y \in \mathfrak{D}(A)$ . Temos

$$\langle iAx, y \rangle = \langle x, -iAy \rangle = \langle x, iAy \rangle,$$

o que prova a identidade  $(iA)^* = iA$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $iA$  seja autoadjunto. Em virtude de (II.56), podemos inferir que  $\mathfrak{D}(-A^*) = \mathfrak{D}(A)$ . Seguidamente, notemos que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*x \rangle = -\langle x, Ax \rangle = -\overline{\langle Ax, x \rangle} \quad (x \in \mathfrak{D}(A)).$$

Logo,  $\Re \langle Ax, x \rangle = 0$ , para todo  $x \in \mathfrak{D}(A)$ . Assim, para todo  $x \in \mathfrak{D}(A)$  existe  $\varphi_x \in \mathfrak{X}^*$ , definido por

$$\varphi_x(y) \stackrel{\text{def}}{=} \langle y, x \rangle,$$

tal que

$$\Re \varphi_x(Ax) = \Re \langle Ax, x \rangle = 0.$$

Em conformidade com o Lema II.4.9, obtemos que  $A$  é dissipativo e da identidade  $A^* = -A$ , podemos deduzir de forma idêntica que  $A^*$  é dissipativo.

Agora, baseando-se no Lema II.7.11, podemos concluir que  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações e à vista de  $A^{**} = A$ , o mesmo ocorre para  $A^* = -A$ . Digamos que  $U_+$  e  $U_-$  são os  $C_0$ -semigrupos cujos respectivos geradores sejam  $A$  e  $-A$ . Observando a prova do Teorema II.5.4, podemos deduzir que  $U \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}_+}$ , dado por

$$U(t) = \begin{cases} U_+(+t), & t \geq 0; \\ U_-(-t), & t < 0, \end{cases}$$

é um  $C_0$ -grupo, visto que  $U(t)^{-1} = U_-(-t)$ . Decorre que  $\mathfrak{I}(U(t)) = \mathfrak{X}$ . Além disso,

$$\|x\| \leq \|U^{-1}(t)U(t)x\| \leq \|U(t)x\| \leq \|x\| \quad (x \in \mathfrak{X}),$$

i.e.,  $U(t)$  é uma isometria. Do Lema I.5.12  $U$  é um  $C_0$ -grupo de operadores unitários.  $\square$

*Referências ao capítulo II.* As duas referências principais para a confecção deste capítulo foram [5] e [10]. Outras referências foram [4] e [7].

## CAPÍTULO III

# APLICAÇÕES

### SUMÁRIO

Originalmente a noção do problema de Cauchy abstrato deve-se a Einar Hille. Inicialmente, estamos interessados em estabelecer condições necessárias e suficientes para determinarmos uma solução do referido problema. Na realidade, o que veremos é uma relação recíproca entre a unicidade das soluções para cada dado inicial e a determinação de um  $C_0$ -semigrupo em termos dessas soluções. O problema possuindo a propriedade de admitir soluções únicas para cada dado inicial, recebe o nome de problema *bem posto*. Na primeira seção deste capítulo trataremos o estudo do problema homogêneo de valor inicial e algumas aplicações elementares. Nas duas últimas seções faremos uma breve passagem no problema não homogêneo de valor inicial e no problema semilinear de valor inicial.

### §III.1 O PROBLEMA HOMOGÊNEO DE VALOR INICIAL

**DEFINIÇÃO III.1.1.** *Dados um operador  $A$  com domínio e imagem contidos em um  $B$ -espaço  $\mathfrak{X}$  e um elemento  $x \in \mathfrak{X}$  (dado inicial). O **problema de Cauchy abstrato** (ou **problema homogêneo de valor inicial**) para  $A$  com dado inicial  $x$ , trata-se do problema de determinar uma função  $u$ , tal que*

- i. é contínua em  $\mathbb{R}_+$ ;*
- ii. é continuamente diferenciável e  $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$ , para todo  $t > 0$ ;*
- iii. e satisfaz*

$$\mathfrak{h}(u; A, x) \quad \begin{cases} u'(t) = Au(t), & t > 0; \\ u(0) = x. \end{cases}$$

*Nestas condições  $u$  é chamada de **solução do problema de Cauchy abstrato**, também chamada de **solução clássica**. Doravante sempre quando ocorrer problema  $\mathfrak{h}(u; A, x)$ , ou simplesmente  $\mathfrak{h}(A, x)$ , estamos nos referindo ao problema dado na Definição III.1.1 para  $A$  com dado inicial  $x$  e, quando for conveniente explicitar que a função está associada ao dado  $x$ , escreve-se  $u(\cdot; x)$  no lugar de  $u$ .*

Em virtude da continuidade de  $u$  em  $\mathbb{R}_+$  e da hipótese  $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$ , para todo  $t > 0$ , sua imagem deve se acumular em  $\overline{\mathfrak{D}(A)}$ , i.e., limites tomados em relação ao parâmetro  $t$  estarão contidos em  $\overline{\mathfrak{D}(A)}$ . Em consequência,  $\lim_{t \downarrow 0} u(t) = u(0) = x \in \overline{\mathfrak{D}(A)}$ . Conformemente, se  $x \notin \overline{\mathfrak{D}(A)}$ , então o problema III.1.1, não admite solução.

**TEOREMA III.1.2.** *Se  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $S$  então, para cada  $x \in \mathfrak{D}(A)$ , o problema  $\mathfrak{h}(A, x)$  admite uma única solução continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}_+$ , dada por  $u(t) = S(t)x$ , para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ .*

PROVA. Provemos, inicialmente a, existência da solução. Dado  $x \in \mathfrak{D}(A)$ , considere  $u \in \mathfrak{X}^{\mathbb{R}_+}$ , definida por

$$u(t) \stackrel{\text{def}}{=} S(t)x \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Da hipótese de  $S$  ser um  $C_0$ -semigrupo, podemos inferir a continuidade de  $u$  em  $\mathbb{R}_+$ . À vista do item c) do Teorema II.2.10, podemos concluir

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Ademais, de  $AS(t)x = S(t)Ax$  e da continuidade forte de semigrupo, podemos concluir que  $u$  é continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}_+$ .

Em seguida provemos a unicidade. Para tanto, consideremos uma outra solução  $v$  associada ao dado inicial  $x \in \mathfrak{D}(A)$ . Concebamos  $t > 0$  e definamos  $\vartheta \in \mathfrak{D}(A)^{[0,t]}$  definida por  $\vartheta(s) = S(t-s)v(s)$ . Do Corolário II.2.15 e do item c) do Teorema II.2.10, podemos deduzir

$$\frac{d}{ds}\vartheta(s) = \frac{d}{ds}S(t-s)v(s) = S(t-s)Av(s) - AS(t-s)v(s) = 0 \quad (s \in [0, t]).$$

Do Lema I.7.4,  $\vartheta$  é constante em  $[0, t]$  e, conformemente

$$v(t) = \vartheta(t) = \vartheta(0) = S(t)x = u(t) \quad (t > 0).$$

Como  $v(0) = x = u(0)$ , temos que  $u = v$ , o que prova a unicidade da solução e conclui a demonstração do teorema.  $\square$

Em conformidade com o Teorema III.1.2 temos que uma condição suficiente para a unicidade da solução, é que  $x \in \mathfrak{D}(A)$ . Na realidade, a unicidade da solução decorre de condições mais gerais para dados iniciais  $x \in \mathfrak{X}$ , é o que veremos no próximo teorema. Antes, necessitamos do

LEMA III.1.3. *Sejam  $\mathfrak{X}$  um  $B$ -espaço,  $T \in \mathbb{R}_+$  e  $u \in \mathcal{C}([0, T], \mathfrak{X})$ . Se*

$$\left\| \int_0^T e^{ns} u(s) d\mu(s) \right\| \leq M \quad (n \in \mathbb{N}),$$

*então  $u \equiv 0$  em  $[0, T]$ .*

PROVA. Inicialmente concebamos  $x^* \in \mathfrak{X}^*$  e definamos  $\varphi \in \mathfrak{R}^{[0,T]}$  por  $\varphi(t) = \langle x^*, u(t) \rangle$ . Temos que  $\varphi$  é contínua, pois é uma composição de funções contínuas. Imediatamente observemos a desigualdade

$$\left| \int_0^T e^{ns} \varphi(s) d\mu(s) \right| = \left| \left\langle x^*, \int_0^T e^{ns} u(s) d\mu(s) \right\rangle \right| \leq \|x^*\| \cdot M \stackrel{\text{def}}{=} M_1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Em seguida, para cada  $n \in \mathbb{N}$  consideremos a função  $\Sigma_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  definida por

$$(III.1) \quad \Sigma_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{knt} = 1 - \exp(-e^{nt}).$$

Supondo  $t \in [0, T]$ , podemos deduzir da desigualdade

$$\left| \frac{1}{k!} (-e^{nt})^k \right| \leq \frac{1}{k!} (e^{nT})^k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

À vista do Corolário I.1.12, a série dada em (III.1) converge uniformemente em  $[0, T]$ . Em consequência das propriedades da integral de Lebesgue temos

$$\begin{aligned}
 (III.2) \quad \left| \int_0^T \Sigma_n(t - T + s) \varphi(s) \, d\mu(s) \right| &= \left| \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)} \varphi(s) \, d\mu(s) \right| \\
 &= \lim_m \left| \int_0^T \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)} \varphi(s) \, d\mu(s) \right| \\
 &\leq \lim_m \left| \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T)} \cdot \int_0^T e^{kns} \varphi(s) \, d\mu(s) \right| \\
 &\leq |\Sigma_n(t - T)| \cdot M_1
 \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T]$ . O último termo de (III.2) tende a 0, quando  $n$  tende ao infinito. Agora, usando (III.1), obtemos

$$\int_0^T \Sigma_n(t - T + s) \varphi(s) \, d\mu(s) = \int_0^{T-t} \Sigma_n(t - T + s) \varphi(s) \, d\mu(s) + \int_{T-t}^T \Sigma_n(t - T + s) \varphi(s) \, d\mu(s).$$

Notando que, se  $s \in [0, T - t]$ , então  $t - T + s < 0$ . E quanto que se  $s \in [T - t, T]$ , então  $t - T + s > 0$ . Agora, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$(III.3) \quad 0 = \left| \int_{T-t}^T \varphi(s) \, d\mu(s) \right| \quad (t \in [0, T]),$$

pois

$$\lim_n \Sigma_n(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s < 0; \\ 1, & \text{se } s > 0. \end{cases}$$

Lembrando que  $\varphi$  é contínua em  $[0, T]$ , podemos concluir de (III.3) que  $\varphi \equiv 0$  em  $[T - t, T]$ . Como  $t \in [0, T]$  é arbitrário, necessariamente  $\varphi \equiv 0$  em  $[0, T]$ . Lembrando também que  $\varphi(t) = \langle x^*, u(t) \rangle$  e  $x^* \in \mathfrak{X}^*$  é arbitrário, vale

$$(III.4) \quad \langle x^*, u(t) \rangle = 0 \quad ((x^*, t) \in \mathfrak{X} \times [0, T]).$$

À vista do Lema I.6.4, podemos concluir que  $u \equiv 0$  em  $[0, T]$ . De fato, suponhamos, por redução ao absurdo, que existe  $t \in [0, T]$  tal que  $u(t) \neq 0$ . Do Lema I.6.4, existe  $x^* \in \mathfrak{X}^*$ , tal que  $\langle x^*, u(t) \rangle = \|u(t)\|$ . Assim, (III.4) implica  $u(t) = 0$ , o que é uma contradição. Conformemente  $u \equiv 0$ , em  $[0, T]$ .  $\square$

**TEOREMA III.1.4.** *Seja  $A$  um operador densamente definido em um  $B$ -espaço  $\mathfrak{X}$  e  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ . Então se  $[\lambda_0, +\infty) \subseteq \varrho(A)$  e*

$$\limsup_{\lambda} \frac{\ln \|R(\lambda; A)\|}{\lambda} \leq 0,$$

*então o problema  $\mathfrak{h}(A, x)$  tem, no máximo, uma solução para cada  $x \in \mathfrak{X}$ .*

**PROVA.** Primeiramente, observemos que  $u$  é uma solução de  $\mathfrak{h}(A, x)$  se, e somente se,  $v(t) = e^{zt} u(t)$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) é uma solução de  $\mathfrak{h}(zI + A, x)$ . Com efeito, suponha que  $u$  seja solução de  $\mathfrak{h}(A, x)$ . Decorre do Corolário II.2.15 e da Proposição I.3.4 que

$$\frac{d}{dt} v(t) = z e^{zt} u(t) + e^{zt} A u(t) = z v(t) + A v(t) = (zI + A) v(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+^*)$$

e é conspícuo que  $v(0) = x$ .

Reciprocamente, suponha que  $v(t) = e^{zt}u(t)$  seja solução de  $\mathfrak{h}(zI + A, x)$ . Por um argumento simétrico,  $u(t) = e^{-zt}e^{zt}u(t) = e^{-zt}v(t)$  é solução de  $\mathfrak{h}(A, x)$ . Da hipótese temos que  $[\lambda_0, +\infty) \subseteq \varrho(A)$ . Provemos que  $[0, +\infty) \subseteq \varrho(A - \lambda_0 I)$ . Seja, portanto,  $\eta \in [0, +\infty)$ . Então  $\lambda = \eta + \lambda_0 \in [\lambda_0, +\infty)$ . Para finalizar basta notar que

$$\eta I - (A - \lambda_0 I) = (\lambda - \lambda_0)I - (A - \lambda_0 I) = \lambda I - A,$$

o que prova a pertinência  $\eta \in \varrho(A - \lambda_0 I)$ . Isto dito, podemos admitir, sem perda de generalidade, que  $A$  seja tal que  $[0, +\infty) \in \varrho(A)$ .

Sejam  $u, v$  duas soluções de  $\mathfrak{h}(A, x)$ . Pela linearidade do problema,  $w \stackrel{\text{def}}{=} u - v$  é um solução do problema  $\mathfrak{h}(A, 0)$ . A fim de provar a unicidade da solução de  $\mathfrak{h}(A, x)$ , é suficiente provar que  $w \equiv 0$  é a única. Para este fim, consideremos a aplicação  $t \mapsto R(\lambda; A)w(t)$  ( $\lambda > 0$ ). Como  $\mathbb{R}_+^* \subseteq \varrho(A)$ , temos

$$R(\lambda; A)(\lambda I - A) = I$$

e, portanto,

$$R(\lambda; A)A = \lambda R(\lambda; A) - I.$$

Se  $w$  é solução de  $\mathfrak{h}(A; 0)$ , então

$$\frac{d}{ds}R(\lambda; A)w(s) = R(\lambda; A)\frac{d}{ds}w(s) = R(\lambda; A)Aw(s) = \lambda R(\lambda; A)w(s) - w(s).$$

Notemos também

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}R(\lambda; A)e^{\lambda(t-s)}w(s) &= R(\lambda; A)\frac{d}{ds}(e^{\lambda(t-s)}w(s)) \\ &= R(\lambda; A)\left[e^{\lambda(t-s)}(Aw(s) - \lambda w(s))\right] \\ &= -R(\lambda; A)(\lambda I - A)e^{\lambda(t-s)}w(s) \\ &= -e^{\lambda(t-s)}w(s) \end{aligned}$$

Recorrendo ao Corolário I.7.5, temos da última identidade que

$$-\int_0^t e^{\lambda(t-s)}w(s) d\mu(s) = \left[R(\lambda; A)e^{\lambda(t-s)}w(s)\right]_{s=0}^t = R(\lambda; A)w(t),$$

pois  $w(0) = 0$ .

Agora, faremos o uso da hipótese

$$\limsup_{\lambda} \frac{\ln \|R(\lambda; A)\|}{\lambda} = \inf_{\eta} \sup_{\lambda \geq \eta} \frac{\ln \|R(\lambda; A)\|}{\lambda} \leq 0$$

(vide Definição I.1.17).

Dado  $\sigma > 0$ , da definição de ínfimo e em virtude de  $\beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\beta(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\lambda \geq \eta} \frac{\ln \|R(\lambda; A)\|}{\lambda}$$

é uma função crescente. Temos que para cada  $\lambda$  suficientemente grande, vale  $\beta(\eta) < \sigma/2$ . Em consequência,  $\lambda^{-1} \cdot \ln \|R(\lambda; A)\| < \sigma/2$ , para  $\lambda$  suficientemente grande. Assim,

$$\|R(\lambda; A)\|e^{-\sigma\lambda} < e^{\lambda(\frac{\sigma}{2}-\sigma)} = e^{-\lambda\frac{\sigma}{2}},$$

para  $\lambda$  suficientemente grande. Consequentemente,

$$(III.5) \quad \lim_{\lambda} \|R(\lambda; A)\| e^{-\sigma\lambda} = \lim_{\lambda} e^{-\lambda \frac{\sigma}{2}} = 0.$$

De (??) obtemos

$$-\int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-s)} w(s) d\mu(s) = e^{-\sigma\lambda} R(\lambda; A) w(t - \sigma).$$

Em consequência,

$$\left\| \int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-s)} w(s) d\mu(s) \right\| \leq e^{-\sigma\lambda} \|R(\lambda; A)\| \|w(t - \sigma)\|.$$

Com o auxílio de (III.5) concluímos

$$(III.6) \quad \lim_{\lambda} \int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-s)} w(s) d\mu(s) = 0.$$

Visto que

$$\int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-s)} w(s) d\mu(s) = \int_0^{t-\sigma} e^{\lambda s} w(t - \sigma - s) d\mu(s),$$

percebemos de (III.6) que

$$\lim_{\lambda} \int_0^{t-\sigma} e^{\lambda s} w(t - \sigma - s) d\mu(s) = 0.$$

Como consequência, a sequência de integrais

$$\int_0^{t-\sigma} e^{ns} w(t - \sigma - s) d\mu(s) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

é limitada. Além disso, a função  $\phi \in \mathfrak{X}^{[0, t-\sigma]}$  dada por  $\phi(t) = w(t - \sigma - s)$  é contínua. Com o auxílio do Lema III.1.3, podemos deduzir que  $\phi \equiv 0$  em  $[0, t - \sigma]$  e, portanto  $w \equiv 0$  em  $[0, t - \sigma]$ . Como  $t$  e  $\sigma$  são arbitrários, podemos deduzir que  $w \equiv 0$  em  $\mathbb{R}_+$  e, consequentemente que  $u = v$ . Portanto, sob aquelas condições o problema  $\mathfrak{h}(A, x)$  admite, no máximo, uma solução.  $\square$

Embora o Teorema III.1.4 assera a unicidade da solução, ele ainda é deficiente no quesito de fornecer condições para a existência da solução. A fim de determinar a existência, bem como a diferenciabilidade da solução para valores iniciais  $x \in \mathfrak{D}(A)$ , devemos assumir que  $A$  seja um gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo. Discutiremos isto com pormenores no

**TEOREMA III.1.5.** *Seja  $A$  um operador linear densamente definido com conjunto resolvente não vazio. O problema  $\mathfrak{h}(A, x)$  tem uma solução única continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}_+$ , para cada  $x \in \mathfrak{D}(A)$  se, e somente se,  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $S$ .*

**PROVA.** Uma das condicionais foi provada no Teorema III.1.2. Desta forma, provemos a recíproca. Para tanto, suponhamos que, para cada  $x \in \mathfrak{D}(A)$ , o problema  $\mathfrak{h}(A, x)$  tenha uma única solução continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}_+$ , que denotaremos por  $u(\cdot; x)$ . Das hipóteses, podemos considerar  $\lambda \in \varrho(A)$ . É sabido que  $A$  é fechado se, e somente se,  $R(\lambda; A)$  o for, que é o caso. Assim, como  $A$  é fechado, podemos, em virtude do Lema I.4.8, munir  $\mathfrak{D}(A)$

com a norma  $\|\cdot\|_A$  que, segundo a qual,  $\mathfrak{D}(A)$  é um  $B$ -espaço. No que segue, denotaremos  $\mathfrak{D}(A)$  munido com a topologia induzida de  $\|\cdot\|_A$  por  $[\mathfrak{D}(A)]$ .

Seguidamente, seja  $t_0 > 0$ . Definamos  $\mathfrak{X}_{t_0} = \mathcal{C}([0, t_0]; [\mathfrak{D}(A)])$ . Sabe-se que  $\mathfrak{X}_{t_0}$  é um  $B$ -espaço munido da norma

$$\|f\|_u \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in [0, t_0]} \|f(t)\|_A.$$

Posteriormente, concebamos  $S \in \mathfrak{X}_{t_0}^{[\mathfrak{D}(A)]}$  dada por  $Sx = u(\cdot; x)$ . A boa definição de  $S$  decorre da unicidade da solução de  $\mathfrak{h}(A, x)$ , para cada  $x \in \mathfrak{D}(A)$ . Além disso, pela linearidade do problema,  $S$  é necessariamente linear. Ademais, também é fechado. De fato, consideremos  $\{x_n\}$  uma sequência em  $\mathfrak{D}(A)$  tal que  $\lim_n x_n = x$  em  $[\mathfrak{D}(A)]$  e  $\lim_n Sx_n = v$  em  $\mathfrak{X}_{t_0}$ . Da hipótese de  $\{u(\cdot; x_n)\}$  ser uma sequência de soluções dos respectivos problemas  $\mathfrak{h}(A, x_n)$ , podemos inferir do Corolário I.7.5 que

$$(III.7) \quad u(t, x_n) = x_n + \int_0^t Au(s, x_n) d\mu(s) \quad ((t, n) \in [0, t_0] \times \mathbb{N})$$

Imediatamente, observemos que se  $\lim_n \|u(\cdot; x_n) - v\|_u = 0$ , então

$$\lim_n \sup_{t \in [0, t_0]} \|u(t; x_n) - v(t)\| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_n \sup_{t \in [0, t_0]} \|Au(t, x_n) - Av(t)\| = 0.$$

Portanto  $\{u(\cdot; x_n)\}$  converge uniformemente para  $v$  em  $[0, t_0]$ , bem como  $\{Au(\cdot; x_n)\}$  converge uniformemente para  $Av$  em  $[0, t_0]$ . Em consonância,  $\{\|u(\cdot; x_n)\|\}$  e  $\{\|Au(\cdot; x_n)\|\}$  são sequências de funções integráveis convergindo uniformemente para  $\|v\|$  e  $\|Av\|$ , respectivamente. Desta forma, à vista da Proposição I.6.12,  $v$  e  $Av$  são concomitantemente integráveis. Portanto de (III.7), da hipótese de  $A$  ser fechado e do Teorema I.6.15, vem

$$v(t) = x + \int_0^t Av d\mu \quad (t \in [0, t_0]).$$

Do corolário I.7.3, temos

$$\frac{d}{dt}v(t) = Av(t) \quad (t \in [0, t_0]).$$

Em conseqüência,  $v \in \mathcal{C}^1([0, t_0], \mathfrak{X})$ , pois  $Av \in \mathcal{C}([0, t_0], \mathfrak{X})$ .

Seguidamente, definamos  $\bar{v} \in \mathfrak{D}(A)^{R_+}$  por

$$\bar{v}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} v(t), & t \in [0, t_0]; \\ u(t - t_0; v(t_0)), & t \in [t_0, +\infty). \end{cases}$$

É aparente que

$$v'(t_0) = Av(t_0) = \frac{d}{dt}u(t - t_0; v(t_0)),$$

i.e., as derivadas laterais coincidem. Assim

$$\begin{aligned} \bar{v}'(t) &= \begin{cases} Av(t), & t \in [0, t_0]; \\ Au(t - t_0; v(t_0)), & t \in [t_0, +\infty). \end{cases} \\ &= A\bar{v}(t), \end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Adicionalmente  $v(0) = x$ . Da unicidade,  $v = u(\cdot, x)$  em  $[0, t_0]$ . Em conformidade, podemos concluir que  $Sx = u(\cdot, x) = v$  e, conseqüentemente, que  $S$  é fechado. Como seu domínio é um  $F$ -espaço, podemos concluir do Teorema I.4.14 que  $S$  é limitado. Portanto, existe  $M > 0$ , tal que

$$(III.8) \quad \sup_{t \in [0, t_0]} \|u(t; x)\|_A = \|Sx\|_u \leq M\|x\|_A.$$

Posteriormente, definamos  $T \in [\mathfrak{D}(A)]^{[\mathfrak{D}(A)]}$  por  $T(t)x = u(t; x)$ . Provemos que  $T$  satisfaz a propriedade de semigrupo. Para tanto, observemos que  $u(s+t; x)$  e  $u(s, u(t; x))$  são soluções do mesmo problema para  $t$  fixo. É aparente que

$$\frac{d}{ds}u(s+t; x) = Au(s+t; x) \quad \text{e} \quad \frac{d}{ds}u(s; u(t; x)) = Au(s; u(t; x))$$

e

$$u(0+t; x) = u(t; x) = u(0, u(t; x)),$$

o que prova o requerido. Ademais, da arbitrariedade de  $t$ , concluímos

$$T(s+t)x = u(s+t; x) = u(s; u(t; x)) = T(s)u(t; x) = T(s)T(t)x \quad (x \in \mathfrak{D}(A), s, t \in \mathbb{R}_+).$$

Verifica-se também que  $T$  é uniformemente limitado em  $[0, t_0]$ . Mais precisamente,

$$\|T(t)x\|_A \leq M \cdot \|x\|_A \quad ((t, x) \in [0, t_0] \times \mathfrak{D}(A)),$$

que, por sua vez, implica

$$\|T(t)\| \leq M \quad (t \in [0, t_0]).$$

Com um argumento semelhante à prova do Lema II.1.3 podemos determinar uma constante  $\omega > 0$  tal que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Imediatamente provemos

$$(III.9) \quad T(t)Ay = AT(t)y \quad (y \in \mathfrak{D}(A^2)).$$

Para este fim, consideremos  $y \in \mathfrak{D}(A^2)$  e definamos

$$v(t) \stackrel{\text{def}}{=} y + \int_0^t u(s; Ay) d\mu(s) \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Do Corolário I.7.5, vale

$$\begin{aligned} v'(t) &= u(t; Ay) = Ay + \int_0^t \frac{d}{ds}u(s; Ay) d\mu(s) \\ &= Ay + \int_0^t Au(s; Ay) d\mu(s) \\ &= A\left(y + \int_0^t Au(s; Ay) d\mu(s)\right) \\ &= Av(t), \end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ .

À vista de  $v(0) = y$ , decorre da unicidade da solução do problema que  $v = u(\cdot; y)$  e, em consequência,

$$Au(t; y) = v'(t) = u(t; Ay),$$

o que prova (III.9).

Em seguida, provemos que  $\mathfrak{D}(A^2)$  é denso em  $\mathfrak{X}$ . Para tanto, consideremos  $\lambda \in \varrho(A)$  ( $\varrho(A) \neq \emptyset$  por hipótese). É suficiente observar a inclusão

$$(III.10) \quad R(\lambda; A)\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}(A^2),$$

pois  $R(\lambda; A)$  é contínua e  $\mathfrak{D}(A)$  é denso. Todavia, (III.10) é equivalente à inclusão

$$AR(\lambda; A)\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}(A).$$

Porém, isto decorre de

$$AR(\lambda; A)\mathfrak{D}(A) \subseteq (\lambda R(\lambda; A) - I)\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}(A).$$

Além disso de (III.10) vem

$$(III.11) \quad \mathfrak{D}(A) \subseteq (\lambda I - A)\mathfrak{D}(A^2).$$

Temos que  $A\mathfrak{D}(A^2), \mathfrak{D}(A^2) \subseteq \mathfrak{D}(A)$ . Em consequência,

$$(\lambda I - A)\mathfrak{D}(A^2) \subseteq \mathfrak{D}(A).$$

De (III.11) inferimos

$$(\lambda I - A)\mathfrak{D}(A^2) = \mathfrak{D}(A),$$

*a fortiori*  $(\lambda I - A)\mathfrak{D}(A^2)$  é denso.

Sejam agora  $\lambda \in \varrho(A) \setminus \{0\}$  e  $y \in \mathfrak{D}(A^2)$ . Suponha que  $x = (\lambda I - A)y$ . De (III.9) deduz-se

$$(III.12) \quad T(t)x = T(t)(\lambda I - A)y = (\lambda I - A)T(t)y.$$

Temos, similarmente,

$$(III.13) \quad \begin{aligned} \|y\|_A &= \|y\| + \|Ay\| \\ &= \|R(\lambda; A)x\| + \|\lambda y - x\| \\ &= \|R(\lambda; A)x\| + \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| \\ &\leq (\|R(\lambda; A)\| + \|\lambda R(\lambda; A) - I\|)\|x\|. \end{aligned}$$

Desta forma, com o auxílio de (III.12) e (III.13), podemos concluir

$$(III.14) \quad \|T(t)x\| \leq M_1 e^{\omega t} \|x\| \quad (x \in \mathfrak{D}(A)),$$

pois  $x \in (\lambda I - A)\mathfrak{D}(A^2) = \mathfrak{D}(A)$ . Invocando o Lema I.4.7, para cada  $t \in \mathbb{R}_+$ , podemos estender  $T(t)$  a um operador linear limitado  $\overline{T}(t)$  em  $\mathfrak{X}$ . Provemos que a família  $\{\overline{T}(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  constitui um  $C_0$ -semigrupo em  $\mathcal{L}$ .

I. Seja  $\{x_n\}$  uma sequência em  $\mathfrak{D}(A)$  tal que  $\lim_n x_n = x$ , da própria definição, verifica-se

$$\overline{T}(0)x = \lim_n T(0)x_n = \lim_n x_n = x;$$

II. Sejam  $s, t \in \mathbb{R}_+$  e  $x \in \mathfrak{X}$ . Concebamos  $\{x_n\}$  em  $\mathfrak{D}(A)$ , tal que  $\lim_n x_n = x$ . Temos, em consonância,

$$\overline{T}(s+t)x = \lim_n T(s+t)x_n = \lim_n T(s)T(t)x_n = \overline{T}(s)\overline{T}(t)x,$$

pois da definição

$$\overline{T}(t)x = \lim_n T(t)x_n \quad \text{e} \quad \overline{T}(s)\overline{T}(t)x = \lim_n T(s)T(t)x_n.$$

III. Sejam  $\{t_\delta\}$  uma sequência generalizada arbitrária convergindo a 0 em  $(0, +\infty)$ ,  $x \in \mathfrak{X}$  e  $\{x_n\}$  uma sequência em  $\mathfrak{D}(A)$  cujo limite é  $x$ . Dispomos

i.  $\lim_\delta T(t_\delta)x_n$ ;

ii.  $\lim_n T(t_\delta)x_n = \overline{T}(t_\delta)x$ , uniformemente, pois à vista de (III.14) temos

$$\|T(t_\delta)x_n - T(t_\delta)x_m\| = \|T(t_\delta)(x_n - x_m)\| \leq M_1 e^{\omega t_\delta} \|x_n - x_m\| \quad (\delta \in \mathcal{A})$$

por continuidade concluímos

$$\|\overline{T}(t_\delta)x - T(t_\delta)x_m\| \leq M_1 e^{\omega t_\delta} \|x - x_m\| \quad (\delta \in \mathcal{A}).$$

Recorrendo ao Lema I.1.13, deduzimos

$$\lim_\delta \overline{T}(t_\delta)x = \lim_\delta \lim_n T(t_\delta)x_n = \lim_n \lim_\delta T(t_\delta)x_n = \lim_n x_n = x.$$

Fixado  $x$ , da arbitrariedade da sequência  $\{t_\delta\}$ , podemos concluir da Proposição I.1.7 que

$$\lim_{t \downarrow 0} \overline{T}(t)x = x.$$

Portanto, de I-III, concluímos que  $\overline{T}$  é um  $C_0$ -semigrupo em  $\mathcal{L}$ . Convenientemente, denotaremos  $\overline{T}$  por  $T$ .

Seja  $B$  o gerador infinitesimal de  $T$  e  $x \in \mathfrak{D}(A)$ . Da construção de  $T$  vale  $T(t)x = u(t; x)$  e, em consequência,

$$(III.15) \quad \frac{d}{dt} T(t)x = \frac{d}{dt} u(t; x) = Au(t; x) = AT(t)x \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

pois  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathfrak{D}(A))$ . Ademais, (III.15) acarreta

$$BT(t)x = AT(t)x \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

Por conseguinte, tomando  $t = 0$ , temos  $B \supseteq A$ . Por outro lado, seja  $x \in \mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}(B)$ . Segundo o Lema II.3.4, se

$$\Re(\lambda) > \omega_0 = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln \|S(t)\|,$$

então

$$BR(\lambda; B)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} BS(s)x \, d\mu(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} AS(s)x \, d\mu(s) = AR(\lambda; B)x.$$

Portanto,

$$AR(\lambda; B)x = BR(\lambda; B)x = \lambda R(\lambda; B)x - x \quad (x \in \mathfrak{D}(A)).$$

Agora, usando o fato de que  $\mathfrak{D}(A)$  é denso em  $\mathfrak{X}$  e  $AR(\lambda; B)$  limitado, podemos inferir

$$AR(\lambda; B)x = BR(\lambda; B)x = \lambda R(\lambda; B)x - x \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Como  $R(\lambda; B)(\mathfrak{X}) = \mathfrak{D}(B)$ , podemos deduzir que  $\mathfrak{D}(B) \subseteq \mathfrak{D}(A)$  e, portanto,  $A = B$ .  $\square$

DEFINIÇÃO III.1.6. Sejam  $\mathfrak{X}$  um  $B$ -espaço,  $T$  um  $C_0$ -semigrupo e  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ . Diremos que  $T$  é um semigrupo diferenciável para  $t > t_0$  (ou  $T$  é um semigrupo diferenciável em  $(t_0, +\infty)$ ), se para cada  $x \in \mathfrak{X}$  a função  $t \mapsto T(t)x$  for diferenciável para  $t > t_0$ . Quando  $t_0 = 0$  diremos simplesmente que  $T$  é um semigrupo diferenciável.

LEMA III.1.7. Sejam  $\mathfrak{X}$  um  $B$ -espaço,  $T$  um  $C_0$ -semigrupo e  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ . Então  $T$  é um semigrupo diferenciável em  $(t_0, +\infty)$  se, e somente se,  $T(t)\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{D}(A)$  para todo  $t > t_0$ .

PROVA. Se  $T$  é um semigrupo diferenciável em  $(t_0, +\infty)$ , então em conformidade com o Teorema II.2.10 dispomos

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x \quad (t > t_0),$$

ou equivalentemente

$$T(t)\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{D}(A) \quad (t > t_0).$$

Reciprocamente suponhamos que  $T(t)\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{D}(A)$  para todo  $t > t_0$ . Verifica-se

$$AT(t)x = \lim_{h \downarrow 0} A(h)T(t)x = \frac{d^+}{dt}T(t)x \quad (t > t_0).$$

Provemos que  $\varphi \in \mathfrak{X}^{(t_0, +\infty)}$  dada por  $\varphi(t) = AT(t)x$  é contínua. É aparente que  $T(t) \in \mathcal{L}$  e em particular, é um operador fechado, em virtude de  $A$  ser fechado (*vide* Corolário II.2.11). Decorre que  $AT(t)$  também o é. Como  $\mathfrak{D}(AT(t)) = \mathfrak{X}$ , podemos afirmar, com o auxílio do Teorema I.4.14, que  $AT(t)$  é contínua.

Posteriormente, concebamos  $s, t \in (t_0, +\infty)$ . Sem perda de generalidade suponhamos  $s < t$ . Conforme acabamos de provar, temos a desigualdade

$$(III.16) \quad \|\varphi(t+h) + \varphi(t)\| \leq \|AS(s)\| \|S(t+h-s)x + S(t-s)x\|.$$

Da continuidade forte de  $T$  e da arbitrariedade de  $t > t_0$ , podemos concluir de (III.16) que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(t+h) = \varphi(t) \quad (t > t_0),$$

o que prova que  $\varphi$  é contínua.

Agora recorrendo novamente a continuidade forte de  $T$  e a continuidade de  $\frac{d^+}{dt}T(t)x = \varphi(t) = AT(t)x$ , podemos concluir com o auxílio do Corolário I.7.6, que  $t \mapsto T(t)x$  é continuamente diferenciável em todo intervalo não degenerado  $[a, b] \subseteq (t_0, +\infty)$ , por conseguinte em  $(t_0, +\infty)$ .  $\square$

TEOREMA III.1.8. Se  $A$  é um gerador infinitesimal de um semigrupo diferenciável  $T$ , então o problema  $\mathfrak{h}(A, x)$  admite uma única solução. Ademais, se  $x \in \mathfrak{D}(A)$ , a solução é continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}_+$ .

PROVA. Seja  $x \in \mathfrak{X}$ . Definamos  $u \in \mathfrak{X}^{\mathbb{R}_+}$  por  $u(t) = S(t)x$ . Seguindo a prova da recíproca do Lema III.1.7, podemos inferir que  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*; \mathfrak{X})$ , e satisfaz as condições da Definição III.1.1 e é única. Com efeito, em razão da hipótese de  $A$  ser um gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo, tem-se do Teorema II.3.6 que existem  $M, \omega > 0$  tais que, se  $\lambda > \omega$ , então  $\lambda \in \varrho(A)$  e

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{\lambda - \omega}.$$

Daí vem

$$\frac{\ln \|R(\lambda; A)\|}{\lambda} \leq \frac{M}{\lambda(\lambda - \omega)},$$

pois  $\ln x < x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Em consequência,

$$\limsup_{\lambda} \frac{\ln \|R(\lambda; A)\|}{\lambda} = \lim_{\lambda} \frac{\ln \|R(\lambda; A)\|}{\lambda} = 0.$$

À vista do Teorema III.1.4, podemos concluir que  $u$  é a única solução.  $\square$

Em razão do grande volume de informação necessária para o entendimento completo ou parcial das aplicações, apresentaremos superficialmente a seguir alguns exemplos de problemas que podem ser solucionados com o auxílio da teoria construída até então.

Dentre os conceitos essenciais que transcendem o escopo do presente estudo, — fundamentais para uma boa compreensão — tem-se especialmente: limites indutivos de uma família de espaços lineares, as funções generalizadas (ou distribuições de L. Schwartz), derivadas generalizadas e suas propriedades, a transformada de Fourier e sua conexão com a resolução de EDPs, os espaços de Sobolev, em particular os espaços de Hilbert  $H_0^k$  e  $H^k$  e, principalmente os teoremas de imersão de Sobolev, que fornecem dados a respeito da regularidade das soluções de problemas envolvendo EDPs, i.e., determinam os espaços em que as soluções se encontram.

Doravante, consideremos  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio (aberto e conexo) limitado com fronteira  $\partial\Omega$  suave, i.e., localmente,  $\partial\Omega$  é o gráfico de uma função suave. Com suave queremos dizer que tal função seja  $k \geq 1$  vezes continuamente diferenciável.

EXEMPLO III.1.9 (EQUAÇÃO DO CALOR). *O problema*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{em } (0, +\infty) \times \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } (0, +\infty) \times \partial\Omega; \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

*admite uma única solução  $u$  continuamente diferenciável com respeito a  $t$  em  $\mathbb{R}_+$ , para cada dado inicial  $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ .*

PROVA. Em conformidade com a hipótese  $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , revela-se que o domínio apropriado para o operador  $\Delta$  é

$$\mathfrak{D}(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Com isto, o problema se reduz a

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{em } (0, +\infty) \times \Omega; \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

pois a condição

$$u = 0, \text{ sobre } (0, +\infty) \times \partial\Omega,$$

é redundante para os elementos de  $\mathfrak{D}(\Delta)$ .

É conhecido que  $\mathfrak{D}(\Delta)$  é denso em  $L^2(\Omega)$ . Ademais este último é um espaço de Hilbert segundo o produto interno

$$\langle u, v \rangle_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} uv \, d\mu \quad (u, v \in L^2(\Omega)).$$

Decorre da Proposição II.4.10 que, para cada  $u \in L^2(\Omega)$ , seu conjunto dualidade é unitário cujo o único elemento  $u^* \in D(u)$  é dado por

$$u^*(v) = \langle u, v \rangle_2 = \int_{\Omega} uv \, d\mu \quad (u \in L^2(\Omega)).$$

Seja agora  $u \in \mathfrak{D}(\Delta)$ . Decorre da fórmula de Green (para uma prova veja [2]) que

$$\int_{\Omega} u \Delta u \, d\mu = \underbrace{\int_{\partial\Omega} u \partial_{\nu} u \, d\Sigma}_{=0} - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mu \leq 0.$$

Consequentemente, vale

$$u^*(\Delta u) \leq 0 \quad (u^* \in D(u)).$$

Com o auxílio do Teorema II.4.9, deduzimos que o operador  $\Delta$  é dissipativo.

Posteriormente, fixemos  $\lambda_0 > 0$ , é sabido que, para cada  $f \in L^2(\Omega)$ , a equação

$$(\lambda_0 I - \Delta)u = f$$

admite uma única solução em  $u \in \mathfrak{D}(\Delta)$  (consulte por exemplo [8, pág. 155] ou [2, pág. 297]). Como consequência,  $\lambda_0 I - \Delta$  é sobrejetivo.

Agora, baseando-se no Corolário II.4.7, podemos inferir que  $\Delta$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações. Finalmente, basta usar o Teorema III.1.2 para concluir o requerido.  $\square$

**EXEMPLO III.1.10 (EQUAÇÃO DA ONDA).** Se  $x_0 = (u_0, v_0) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ , então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & \text{em } (0, +\infty) \times \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } (0, +\infty) \times \partial\Omega; \\ (u, \partial_t u)(0) = x_0, & \text{sobre } \Omega, \end{cases}$$

admite uma única solução. Ademais,

$$\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Na última expressão fizemos o seguinte abuso de notação:

$$(III.17) \quad \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i w|^2 \, d\mu \quad (w \in H_0^1(\Omega)).$$

**PROVA.** Raciocinaremos no sentido de escrever o presente problema sob a forma do problema de Cauchy III.1.1. Notemos inicialmente que

$$\begin{cases} v - \partial_t u = 0; & \text{em } (0, +\infty) \times \Omega; \\ \partial_t v - \Delta u = 0, & \text{em } (0, +\infty) \times \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } (0, +\infty) \times \partial\Omega; \\ (u, v)(0) = x_0, & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

Fazendo,

$$U(t) \stackrel{\text{def}}{=} (u(t, \cdot), v(t, \cdot)),$$

podemos reescrever o problema como sendo

$$\begin{cases} \partial_t U = AU, & \text{em } (0, +\infty); \\ U_1 = 0, & \text{sobre } (0, +\infty) \times \partial\Omega; \\ U(0) = x_0, \end{cases}$$

em que  $U_i$  ( $i = 1, 2$ ) é a projeção de  $U$  na  $i$ -ésima coordenada, e  $A$  é o operador tal que

$$\mathfrak{D}(A) \stackrel{\text{def}}{=} (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega).$$

O operador  $A$  possui a seguinte representação matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{bmatrix}.$$

Observemos que o domínio de  $A$  é escolhido de maneira a ser compatível com a hipótese  $x_0 \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ .

Em seguida, concebamos o funcional

$$\|u\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 d\mu \quad (u \in H_0^1(\Omega))$$

em virtude de  $\Omega$  ser limitado, decorre da desigualdade de Poincaré que para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  existe  $\kappa_i \in \mathbb{R}_+^*$ , tal que

$$\int_{\Omega} |u|^2 d\mu \leq \kappa_i \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 d\mu,$$

tomando  $\kappa = n^{-1} \cdot \max_i \kappa_i$ , temos

$$\int_{\Omega} |u|^2 d\mu \leq \kappa \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 d\mu = \kappa \|u\|_1.$$

Portanto,

$$\|u\|_1 \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_1 + \int_{\Omega} |u|^2 d\mu \leq (1 + \kappa) \|u\|_1 \quad (u \in H_0^1(\Omega)).$$

Isto prova que  $\|\cdot\|_1$  define uma norma em  $H_0^1(\Omega)$ , equivalente a  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ . Ademais, também prova que o funcional

$$\langle u, v \rangle_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \partial_i u \partial_i v d\mu \quad (u, v \in H_0^1(\Omega))$$

é um produto interno em  $H_0^1(\Omega)$ .

Assim, verifica-se que funcional dado por

$$\langle U_1, U_2 \rangle_{\mathfrak{H}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + v_1 v_2 d\mu \quad (U_i = (u_i, v_i) \in \mathfrak{H} \stackrel{\text{def}}{=} H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), i = 1, 2)$$

determina um produto interno em  $\mathfrak{H}$  e, conseqüentemente tornando-o em um espaço de Hilbert.

Seguidamente prova-se que  $A^* = -A$  (*vide* [13, pág. 51]). Isto por sua vez implica que  $iA$  é autoadjunto. Recorrendo ao Teorema II.7.12,  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de operadores unitários  $S$ , portanto  $A_+$  é o gerador do  $C_0$ -semigrupo  $S_+$ . Se  $U \in \mathfrak{H}$ , então  $U_1(\partial\Omega) = \{0\}$ , portanto a condição

$$U_1 = 0, \text{ em } (0, +\infty) \times \partial\Omega$$

é supérflua, por conseguinte o problema  $(O)$  é equivalente ao problema

$$\begin{cases} \partial_t U(t) = AU(t), & t \in \mathbb{R}_+^* \\ U(0) = x_0, \end{cases}$$

que conforme o Teorema III.1.2 possui uma única solução continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}_+$ , digamos  $U(t) = S_+(t)x_0$ . Assim

$$u(t, x) = U_1(t)(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

e

$$\partial_t u(t, x) = U_2(t)(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*; L^2(\Omega)).$$

Em síntese

$$u(t, x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*; L^2(\Omega)).$$

Agora, em virtude de  $S$  ser um  $C_0$ -semigrupo de operadores unitários, decorre do Lema I.5.12 que

$$\|U(t)\|_{\mathfrak{H}} = \|S(t)x_0\|_{\mathfrak{H}} = \|x_0\|_{\mathfrak{H}} \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Explicitamente

$$\int_{\Omega} \nabla u(t, \cdot) \cdot \nabla u(t, \cdot) d\mu + \int_{\Omega} v^2(t, \cdot) d\mu = \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla u_0 d\mu + \int_{\Omega} v_0^2 d\mu.$$

Lembrando que  $v = \partial_t u$ , obtemos de (III.17) a seguinte identidade

$$\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

□

EXEMPLO III.1.11 (EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER). A equação

$$\frac{1}{i} \partial_t u - \Delta u = \mathcal{V}u$$

admite uma única solução no espaço  $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$  continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}_+$ . Aqui  $\mathcal{V}$  é o operador com domínio

$$\mathfrak{D}(\mathcal{V}) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathfrak{H} : \mathcal{V}u \in \mathfrak{H}\},$$

i.e.,  $\mathcal{V}$  é um operador invariante dado por

$$\mathcal{V}u = Vu$$

chamado de potencial, com  $V$  uma função real em  $\mathfrak{H}$  com  $p > n/2$  e  $p \geq 2$ .

PROVA. Com o auxílio da teoria dos espaços de Sobolev e das propriedades da transformada de Fourier, é possível provar que  $i(\Delta - \mathcal{V})$  é autoadjunto, recorrendo ao Teorema II.7.12 concluímos que  $i(\Delta - \mathcal{V})$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de operadores unitários, por conseguinte pelo Teorema III.1.2 decorre que o problema referido admitirá uma única solução continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}_+$ , para uma prova completa veja [10] pág. 223. □

## §III.2 O PROBLEMA NÃO HOMOGÊNEO DE VALOR INICIAL

DEFINIÇÃO III.2.1. Sejam  $A$  um operador com domínio e imagem em um  $B$ -espaço  $\mathfrak{X}$ ,  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$  e  $f \in \mathfrak{X}^{[0,T]}$  escreveremos  $\mathfrak{nh}(u; A, f, x)$  para indicar que  $u$  satisfaz

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t > 0; \\ u(0) = x, \end{cases}$$

em que  $u$  é uma função adequada.

Diremos que uma função  $u \in \mathfrak{X}^{[0,T]}$  é uma solução (clássica) do problema não homogêneo de valor inicial para  $A$  em  $[0, t)$ , com dado  $x$ , se  $u$

- i. é contínua em  $[0, T)$ ;
- ii. é continuamente diferenciável e  $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$ , para todo  $t \in (0, T)$ ;
- iii. verifica  $\mathfrak{nh}(u; A, f, x)$  em  $[0, T)$ .

Daqui em diante por conveniência, a menos que seja dito explicitamente o contrário, sempre que ocorrer  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$ , estaremos nos referindo ao problema dado pela definição III.2.1.

PROPOSIÇÃO III.2.2. Sejam  $\mathfrak{X}$  um  $B$ -espaço e  $T$  o  $C_0$ -semigrupo gerado pelo gerador infinitesimal  $A$ . Se  $f \in \mathfrak{X}^{[0,T]}$  é integrável, então para cada  $x \in \mathfrak{X}$  o problema  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$  admite, no máximo, uma solução  $u$  dada por

$$(III.18) \quad u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s) d\mu(s).$$

PROVA. Suponhamos que  $u$  seja a solução de  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$  e  $t > 0$ . Verifica-se, com o auxílio do Teorema II.2.10 e do Corolário II.2.15 que

$$(III.19) \quad \begin{aligned} \frac{d}{ds} T(t-s)u(s) &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= T(t-s)(u'(s) - Au(s)) \\ &= T(t-s)f(s), \end{aligned}$$

para todo  $s \in [0, t]$ . Se  $f$  é integrável, então  $s \mapsto T(t-s)f(s)$  também o será. De fato, sendo  $T$  um  $C_0$ -semigrupo, decorre que existem  $M, \omega > 0$  (vide Lema II.1.3) tais que

$$\|T(s)\| \leq Me^{\omega s} \quad (s \in \mathbb{R}_+).$$

Conformemente, da Proposição I.6.12, deduzimos

$$\int_0^T \|T(t-s)f(s)\| d\mu(s) \leq Me^{\omega T} \int_0^T \|f(s)\| d\mu(s) < +\infty$$

e, assim podemos inferir que  $T(t-s)f(s)$  também é integrável.

Em vista de (III.19) e do Corolário I.7.5 deduzimos a expressão (III.18).  $\square$

Com o auxílio do Lema I.7.8, podemos concluir que o lado esquerdo de (III.18) define uma função contínua em  $[0, T]$ . Desta forma, em certo sentido, podemos pensar esta função como uma solução generalizada do problema  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$ . Isto porque não há garantias de sua diferenciabilidade e de que satisfaça  $\mathfrak{nh}(u; A, f, x)$ . Neste sentido temos a

DEFINIÇÃO III.2.3. Seja  $T$  o  $C_0$ -semigrupo gerado por um gerador infinitesimal  $A$  e  $f \in \mathfrak{X}^{[0,T]}$  integrável em  $[0, T]$ . Então a função  $u \in \mathcal{C}([0, T]; \mathfrak{X})$  dada por

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s) d\mu(s),$$

é dita solução suave do problema  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$  em  $[0, T]$ .

TEOREMA III.2.4. Sejam  $T$  um  $C_0$ -semigrupo gerado por  $A$ ,  $f$  integrável em  $[0, T]$  e contínua em  $(0, T]$  e  $v \in \mathfrak{X}^{[0,T]}$  definida por

$$(III.20) \quad v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s) d\mu(s).$$

Então o problema  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$  em  $[0, T]$  tem uma única solução para cada dado  $x \in \mathfrak{D}(A)$  se, e somente se, ao menos uma das seguintes condições é verificada

- i.  $v$  é continuamente diferenciável em  $[0, T]$ ;
- ii.  $v(t) \in \mathfrak{D}(A)$  e  $Av(t)$  é continuamente diferenciável, para  $t \in (0, T)$ .

Se  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$  tem uma solução em  $[0, T]$ , para algum  $x \in \mathfrak{D}(A)$ , então  $v$  verifica i e ii.

PROVA. Se o problema de valor inicial  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$  tem uma solução para algum  $x \in \mathfrak{D}(A)$ , então em virtude da Proposição III.2.2 ela é dada por

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s) d\mu(s).$$

Em conformidade com a Definição III.2.3  $u$  é continuamente diferenciável em  $(0, T)$  e, evidentemente  $T(t)Ax$  é diferenciável. Por maior razão,  $v \in \mathfrak{X}^{[0,T]}$  definida por

$$(III.21) \quad v(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(t) - T(t)x$$

é diferenciável em  $(0, T)$  e

$$v'(t) = u'(t) - S(t)Ax \quad (t > 0).$$

Portanto  $v \in \mathcal{C}^1((0, T); \mathfrak{X})$ , donde deduz-se o item i.

Agora à vista da hipótese  $x \in \mathfrak{D}(A)$ , temos do Teorema II.2.10 que  $S(t)x \in \mathfrak{D}(A)$ , para  $t \geq 0$  e, em consequência,  $v(t) \in \mathfrak{D}(A)$  para  $t > 0$ . Assim

$$Av(t) = Au(t) - AT(t)x = u'(t) - f(t) - T(t)Ax$$

é contínua em  $(0, T)$ , o que prova ii.

Seja  $t \in [0, T)$ , para  $h > 0$  suficientemente pequeno, vale

$$\begin{aligned}
 \frac{T(h) - I}{h} v(t) &= \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t S(t-s) f(s) d\mu(s) \\
 &= \frac{1}{h} \int_0^t S(t-s+h) f(s) d\mu(s) - \frac{1}{h} \int_0^t S(t-s) f(s) d\mu(s) \\
 &\quad + \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(t-s+h) f(s) d\mu(s) \\
 &\quad - \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(t-s) f(s) d\mu(s) \\
 &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(t-s+h) f(s) d\mu(s) - \frac{1}{h} \int_0^t S(t-s) f(s) d\mu(s) \\
 &\quad - \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(t-s) f(s) d\mu(s) \\
 &= \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(t-s) f(s) d\mu(s)
 \end{aligned}
 \tag{III.22}$$

Ulteriormente, reparemos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \lim_{\tau \rightarrow t} T(\sigma) f(\tau) = f(t)$$

Daí, dado  $\varepsilon > 0$ , determinemos  $\eta > 0$  tal que

$$\|T(\sigma) f(\tau) - f(t)\| < \varepsilon \quad (0 < \sigma, \tau - t < \eta).$$

Com isto, podemos concluir

$$\|T(t+h-s) f(s) - f(t)\| < \varepsilon \quad (0 < s - t < \eta).$$

Em consonância,

$$\sup_{s \in [t, t+h]} \|T(t+h-s) f(s) - f(t)\| \leq \varepsilon.$$

Sendo assim, desde que concebamos  $h \in (0, \eta)$ , obteremos

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(t+h-s) f(s) - f(t)\| d\mu(s) \leq \varepsilon,$$

o que prova

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s) f(s) d\mu(s) = f(t)
 \tag{III.23}$$

Supondo que  $i$  seja verificada, i.e.,  $v \in \mathcal{C}^1((0, T); \mathfrak{X})$ , (III.20) e (III.23) implicam concomitantemente

$$Av(t) = \lim_{h \downarrow 0} A(h)v(t) = v'(t) - f(t) \quad (t \in (0, T)),$$

o que, por sua vez, acarreta que  $v(t) \in \mathfrak{D}(A)$ , para todo  $t \in (0, T)$ .

Baseando-se na Definição III.2.1  $u \in \mathfrak{X}^{[0, T]}$  definida por  $u(t) = T(t)x + v(t)$  satisfaz os prerequisites que caracterizam uma solução de  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$ . Conformemente, com o auxílio da Proposição III.2.2  $u$  é a única solução de  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$ , com  $x \in \mathfrak{D}(A)$ .

Agora, suponhamos *ii*. Da hipótese  $v(t) \in \mathfrak{D}(A)$ , para todo  $t \in (0, T)$ , podemos com o auxílio de (III.23) concluir que  $v$  é diferenciável à direita em  $(0, T)$ . Com efeito,

$$(III.24) \quad \frac{d^+}{dt}v(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = Av(t) + f(t).$$

De III.24, da hipótese  $Av \in \mathcal{C}^1((0, T); \mathfrak{X})$  e  $f \in \mathcal{C}((0, T]; \mathfrak{X})$ , podemos concluir que  $v'_+$  é contínua em  $(0, T)$ . Ademais, da definição de  $v$  (III.21) e da hipótese de integrabilidade de  $f$ , Concluimos que  $s \mapsto S(t-s)f(s)$  também é integrável. Com o auxílio do Lema I.7.8, podemos concluir que  $v$  é contínua em  $(0, T)$ . Na realidade, o que concluimos é que  $v$  é contínua e continuamente derivável em  $(0, T)$  e, evidentemente  $v' = Av + f$  em  $(0, T)$ . Portanto,  $u \in \mathfrak{X}^{[0, T]}$  dada por  $u(t) = T(t)x + v(t)$ , é uma solução de  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$  com dado  $x \in \mathfrak{D}(A)$ .  $\square$

**COROLÁRIO III.2.5.** *Seja  $A$  o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $T$ . Se  $f \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathfrak{X})$ , então para cada  $x \in \mathfrak{D}(A)$ , o problema  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$  tem uma única solução.*

**PROVA.** Seja  $v \in \mathfrak{X}^{[0, T]}$  dada por

$$(III.25) \quad v(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t T(t-s)f(s) \, d\mu(s).$$

Averiguemos que

$$\begin{aligned} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(s)f(t-s+h) \, d\mu(s) - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)f(t-s) \, d\mu(s) \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(t-s+h) \, d\mu(s) - \frac{1}{h} \int_t^t T(s)f(t-s) \, d\mu(s) \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(t-s+h) \, d\mu(s) \\ &\quad + \int_0^t T(s) \frac{f(t-s+h) - f(t-s)}{h} \, d\mu(s). \end{aligned}$$

Imediatamente, recorrendo à hipótese  $f \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathfrak{X})$  e ao Lema I.7.7, obtemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{t+h} T(s) \frac{f(t-s+h) - f(t-s)}{h} \, d\mu(s) = \int_0^t T(s)f'(t-s) \, d\mu(s).$$

Podemos inferir de (III.25) e do que já foi provado no Teorema III.2.4 (*vide* (III.23)) que

$$v'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(s)f'(t-s) \, d\mu(s) \quad (t > 0)$$

e, portanto,  $v'$  é contínua em  $(0, T)$ . Recorrendo ao Teorema III.2.4 item *i*, podemos a prova do resultado.  $\square$

**COROLÁRIO III.2.6.** *Sejam  $\mathfrak{X}$  um  $B$ -espaço,  $T$  um  $C_0$ -semigrupo cujo gerador infinitesimal seja  $A$  e  $f$  integrável em  $[0, T]$  e contínua em  $(0, T)$ . Se  $f((0, T)) \subseteq \mathfrak{D}(A)$  e  $Af$  é integrável em  $[0, T]$ , então  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$  tem uma solução em  $[0, T]$ , para cada dado inicial  $x \in \mathfrak{X}$ .*

PROVA. Por um argumento semelhante à Proposição III.2.2, podemos deduzir, em virtude de  $Af$  ser integrável que,  $s \mapsto T(t-s)Af(s)$  é integrável. Ademais temos

$$At(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s) \quad (t > 0).$$

Em conformidade  $v \in \mathfrak{X}^{[0,T]}$  definida por

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s) \, d\mu(s).$$

é tal que  $v(t) \in \mathfrak{D}(A)$ , para  $t > 0$ , e

$$Av(t) = A \int_0^t T(t-s)f(s) \, d\mu(s) = \int_0^t T(t-s)Af(s) \, d\mu(s)$$

é contínua em  $(0, T)$  (*vide* Lema I.7.8). Com o recurso do Teorema III.2.4 item *ii*, podemos concluir o requerido.  $\square$

O próximo resultado atesta que, uma solução *suave* em  $[0, T]$  (*vide* Definição III.2.3) é, um limite uniforme em  $[0, \Theta]$  ( $\Theta < T$ ) de soluções *clássicas* (*vide* Definição III.2.1) do problema  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$ .

TEOREMA III.2.7. *Sejam  $\mathfrak{X}$  um  $B$ -espaço e  $f \in L^1(0, T; \mathfrak{X})$ . Se  $u$  é uma solução suave de  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$  em  $[0, T]$ , então para cada  $\Theta < T$ ,  $u$  é um limite uniforme em  $[0, \Theta]$  de soluções de  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$ .*

PROVA. Seja  $A$  o gerador infinitesimal de  $T$ . Da Proposição II.2.6 existem  $M, \omega > 0$ , tais que  $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$  ( $t \in \mathbb{R}_+$ ). Sendo  $\mathcal{C}^1([0, T]; \mathfrak{X})$  denso em  $L^1(0, T; \mathfrak{X})$ , existe uma sequência  $\{f_n\}$  em  $\mathcal{C}^1([0, T]; \mathfrak{X})$  convergindo uniformemente para  $f \in L^1(0, T; \mathfrak{X})$ . Do Corolário III.2.5, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o problema  $\mathfrak{nh}(A, f_n, x_n)$  admite uma solução  $u_n$  e, em consonância com a Proposição III.2.2, podemos assertar que tal solução é dada por

$$(III.26) \quad u_n(t) = T(t)x_n + \int_0^t T(t-s)f_n(s) \, d\mu(s) \quad (n \in \mathbb{N}, t \in [0, T]).$$

Da hipótese de  $u$  ser uma solução suave de  $\mathfrak{nh}(A, f, x)$  temos (*vide* Definição III.2.3)

$$(III.27) \quad u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s) \, d\mu(s) \quad (t \in [0, T]).$$

De (III.26) e (III.27) concluímos

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\| &\leq Me^{\omega t} \|x_n - x\| + \int_0^t Me^{\omega(t-s)} \|f_n(s) - f(s)\| \, d\mu(s) \\ &= Me^{\omega t} \left( \|x_n - x\| + \int_0^t e^{-\omega s} \|f_n(s) - f(s)\| \, d\mu(s) \right) \end{aligned}$$

para quaisquer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in [0, \Theta]$ . o que prova a convergência uniforme de  $\{u_n\}$  a  $u$  em  $[0, \Theta]$ .  $\square$

## §III.3 PROBLEMA SEMILINEAR DE VALOR INICIAL

LEMA III.3.1. *Sejam  $(\mathfrak{X}, \varrho)$  um espaço métrico completo,  $f \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$  e  $\kappa \in (0, 1)$ , tais que existe  $r \in \mathbb{N}$  satisfazendo*

$$\varrho(f^r(x), f^r(y)) < \kappa \cdot \varrho(x, y) \quad (x, y \in \mathfrak{X}).$$

*Então  $f$  admite um único ponto fixo.*

PROVA. Como  $\kappa \in (0, 1)$ , decorre que  $\sum_n \kappa^n$  é convergente. Em consequência, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , tal que  $\sum_{k=m}^n \kappa^k < \varepsilon$ , para  $n > m \geq n_\varepsilon$ . Por conseguinte, fazendo  $g = f^r$ , temos

$$\varrho(g^n(x), g^m(x)) \leq \varrho(g(x), x) \cdot \sum_{k=m}^n \kappa^k < \varepsilon \cdot \varrho(g(x), x),$$

para  $x \in \mathfrak{X}$  fixado arbitrariamente. Como consequência,  $\{g^n(x)\}$  é uma sequência de Cauchy que, por hipótese, é necessariamente convergente, pois  $\mathfrak{X}$  é completo. Representemos  $y = \lim_n g^n(x)$ . Da continuidade de  $g$  vem

$$g(y) = g(\lim_n g^n(x)) = \lim_n g^{n+1}(x) = y$$

i.e.,  $y$  é um ponto fixo de  $g$ .

Suponhamos, por redução ao absurdo, que exista um outro ponto fixo  $z$  de  $g$ , distinto de  $y$ . Temos, assim, que

$$\varrho(y, z) = \varrho(g(y), g(z)) < \kappa \cdot \varrho(y, z).$$

Como supomos que  $y \neq z$ , temos da última desigualdade que  $\kappa > 1$ , o que contradiz a hipótese  $\kappa \in (0, 1)$ . Por maior razão  $g$ , admite um único ponto fixo.

Seguidamente notemos

$$g(f(y)) = f^r(f(y)) = f(f^{r-1}(y)) = f(g(y)) = f(y),$$

i.e.,  $f(y)$  é um ponto fixo de  $g$ . Da unicidade do ponto fixo, devemos ter, necessariamente,  $f(y) = y$ . Agora se  $z$  é um ponto fixo  $f$ , então será um ponto fixo de  $g$ . Novamente, da unicidade, vem que  $z = y$ .  $\square$

DEFINIÇÃO III.3.2. *Sejam  $\mathfrak{X}$  um  $B$ -espaço,  $-A$  o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $T$  em  $\mathcal{L}$ ,  $t_0 \geq 0$ ,  $T > 0$ ,  $f \in \mathcal{C}([t_0, T] \times \mathfrak{X}; \mathfrak{X})$  que satisfaz uma condição de Lipchitz global em  $u$  e,  $u_0 \in \mathfrak{X}$ . O **problema semilinear de valor inicial** para  $A$  em  $[t_0, T)$  com dado  $u_0$ , consiste em determinar uma solução  $u$  adequada, satisfazendo adicionalmente  $\mathfrak{sl}(u; A, f, u_0)$ , i.e.,*

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t, u(t)), & t > t_0; \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Neste contexto diremos que  $u$  é **solução clássica** quando

- i. *é contínua em  $[t_0, T)$ ;*
- ii. *é continuamente diferenciável e  $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$ , para todo  $t \in (t_0, T)$ ;*
- iii. *verifica  $\mathfrak{sl}(u; A, f, u_0)$  em  $[t_0, T)$ .*

PROPOSIÇÃO III.3.3. *Nas condições da Definição III.3.2, se  $u$  é uma solução clássica de  $\mathfrak{sl}(A, f, u_0)$ , então*

$$(III.28) \quad u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^t T(t - s)f(s, u(s)) \, d\mu(s)$$

PROVA. Analogamente a prova da Proposição III.2.2, podemos deduzir que

$$(III.29) \quad \frac{d}{dt}T(t - s)u(s) = T(t - s)f(s, u(s))$$

Sabe-se que  $u$  é contínua em  $[t_0, T]$  e  $f$  é contínua  $[t_0, T] \times \mathfrak{X}$ , logo  $f(t, u(t))$  é contínua em  $[t_0, T]$ , *a fortiori* integrável em  $[t_0, T]$ . Disto, decorrerá, como na Proposição III.2.2, que  $s \mapsto T(t - s)f(s, u(s))$  é integrável. De (III.29) e da continuidade da última função, deduzimos, de acordo como o Corolário I.7.5, que

$$\begin{aligned} u(t) - T(t - t_0)u_0 &= T(t - t)u(t) - T(t - t_0)u_0 \\ &= \int_{t_0}^t T(t - s)f(s, u(s)) \, d\mu(s), \end{aligned}$$

donde inferimos (III.28). □

À vista da última proposição temos a

DEFINIÇÃO III.3.4. *Uma solução contínua da equação integral (III.28) é definida como sendo uma solução suave para o problema  $\mathfrak{sl}(A, f, u_0)$ .*

A seguir daremos condições suficientes para a unicidade e existência da solução suave do problema  $\mathfrak{sl}(A, f, u_0)$ .

TEOREMA III.3.5. *Seja  $f : [t_0, T] \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  contínua em  $t \in [t_0, T]$  e uniformemente Lipschitz contínua (com constante  $L$ ) em  $\mathfrak{X}$ . Se  $-A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo, então para cada  $u_0 \in \mathfrak{X}$ , o problema  $\mathfrak{sl}(A, f, u_0)$  admite um única solução suave  $u \in \mathcal{C}([t_0, T]; \mathfrak{X})$ . Ademais, a aplicação  $\Psi \in \mathcal{C}([t_0, T]; \mathfrak{X})^{\mathfrak{X}}$ , que associa o dado  $u_0$  do problema a sua única solução suave  $u$ , é Lipschitz contínua.*

PROVA. A estratégia de provar a existência é provar que a função  $F \in \mathcal{C}([t_0, T]; \mathfrak{X})^{\mathcal{C}([t_0, T]; \mathfrak{X})}$ , definida por

$$(III.30) \quad (Fu)(t) \stackrel{\text{def}}{=} T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^t T(t - s)f(s, u(s)) \, d\mu(s) \quad (t \in [t_0, T])$$

admite um único ponto fixo  $u \in \mathcal{C}([t_0, T]; \mathfrak{X})$ , i.e., a existência de um único  $u \in \mathcal{C}([t_0, T]; \mathfrak{X})$  tal que  $Fu = u$ , equivalentemente

$$u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^t T(t - s)f(s, u(s)) \, d\mu(s) \quad (t \in [t_0, T])$$

que, em conformidade com a Definição III.3.4, é uma solução suave do problema  $\mathfrak{sl}(A, f, u_0)$ .

Convenientemente, denotemos  $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}([t_0, T]; \mathfrak{X})$ , o qual é um  $B$ -espaço segundo a norma

$$\|u\|_{\mathfrak{Y}} = \sup_{t \in [t_0, T]} \|u(t)\|_{\mathfrak{X}}.$$

De (III.30), deduzimos

$$\begin{aligned} \|(Fu)(t) - (Fv)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|T(t-s)\| \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| d\mu(s) \\ &\leq ML(t-t_0) \|u - v\|_{\mathfrak{Y}}, \end{aligned}$$

em que  $M$  é um limite superior de  $\|T(t)\|$  em  $[t_0, T]$  (*vide* Proposição II.2.6). Suponhamos, agora, por hipótese de indução, que

$$\|(F^n u)(t) - (F^n v)(t)\| \leq \frac{[ML(t-t_0)]^n}{n!} \|u - v\|_{\mathfrak{Y}}.$$

Decorre de (III.30) que

$$\begin{aligned} \|(F^{n+1}u)(t) - (F^{n+1}v)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|T(t-s)\| \|f(s, F^n u(s)) - f(s, F^n v(s))\| d\mu(s) \\ &\leq ML \cdot \int_{t_0}^t \frac{[ML(t-t_0)]^n}{n!} \|u - v\|_{\mathfrak{Y}} d\mu(s) \\ &\leq \frac{[ML(t-t_0)]^{n+1}}{(n+1)!} \|u - v\|_{\mathfrak{Y}}, \end{aligned}$$

donde, pelo princípio de indução finita, podemos concluir

$$\|(F^n u)(t) - (F^n v)(t)\| \leq \frac{[ML(t-t_0)]^n}{n!} \|u - v\|_{\mathfrak{Y}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

o que, por sua vez, acarreta

$$(III.31) \quad \|F^n u - F^n v\|_{\mathfrak{Y}} \leq \frac{[ML(t-t_0)]^n}{n!} \|u - v\|_{\mathfrak{Y}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Agora, em virtude da convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(MLT)^n}{n!} = e^{MLT},$$

tem-se que

$$\lim_n \frac{(MLT)^n}{n!} = 0$$

Consequentemente, para  $n$  suficientemente grande vale  $(MLT)^n/n! < 1$ . Com isto, recorrendo ao Lema III.3.1, podemos inferir que  $F$  admite um único ponto fixo que, segundo nossa consideração inicial, é a solução procurada.

Posteriormente, consideremos  $v$  uma solução do problema  $sI(A, f, v_0)$  ( $v_0 \in \mathfrak{X}$ ). A existência é garantida pelo argumento anterior. Temos, conformemente,

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq \|T(t-t_0)u_0 - T(t-t_0)v_0\| \\ &\quad + \int_{t_0}^t \|T(t-s)(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\| d\mu(s) \\ &\leq M\|u_0 - v_0\| + ML \int_{t_0}^t \|u(s) - v(s)\| d\mu(s). \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall, podemos deduzir

$$\|u(t) - v(t)\| \leq M \cdot \|v_0 - u_0\| (1 + M e^{ML(t-t_0)})$$

e

$$\|u - v\|_{\mathfrak{Y}} \leq M \cdot \|v_0 - u_0\| (1 + M e^{ML(t-t_0)}),$$

o que prova a unicidade da solução para cada dado  $e$ , em consequência, a boa definição de  $\Psi$  e que a mesma verifica a condição de Lipschitz.  $\square$

*Referências ao capítulo III.* A construção deste capítulo foi pautada majoritariamente em [10], com o auxílio de [8] para algumas aplicações do problema homogêneo de valor inicial.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley & Sons, Inc, New York, 1966.
- [2] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2011.
- [3] Henri Cartan. *Differential Calculus*. Hermann, Paris, 1971.
- [4] F. Riesz e Béla Sz.-Nagy. *Functional Analysis*. Dover Publications, Inc, New York, 1990.
- [5] Nelson Dunford e Jacob T. Schwartz. *Linear Operators. Part I: General Theory*. Interscience Publishers, New York, 1958.
- [6] Nelson Dunford e Jacob T. Schwartz. *Linear Operators. Part II: Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space*. Interscience Publishers, New York, 1988.
- [7] Einar Hille e Ralph S. Phillips. *Functional Analysis and Semi-groups*. American Mathematical Society, Rhode Island, 1957.
- [8] Alvercio M. Gomes. *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*. Rio de Janeiro, 1999.
- [9] Carlos Isnard. *Introdução à medida e integração*. IMPA, Rio de Janeiro, 2018.
- [10] Amnon Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [11] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1964.
- [12] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [13] Dirk Hundertmark; Lars Machinek; Martin Meyries; Roland Schnaubelt. *Operator Semigroups and Dispersive Equations Lecture Notes*. Karlsruhe, Halle, 2013.
- [14] Kôsaku Yosida. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1965.

## ÍNDICE REMISSIVO

- Álgebra de *Banach*, 20
- $C_0$ -grupo, 72
- $C_0$ -semigrupo, 48
- Equação
  - da onda, 97
  - de *Schrödinger*, 99
  - do calor, 96
- Espaço
  - de *Banach*, 13
  - de *Hilbert*, 27
  - vetorial topológico, 22
- Gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo, 49
- Integral de *S. Bochner*, 38
- Operador
  - $m$ -dissipativo, 69
  - adjunto, 30
  - dissipativo, 69
  - maximalmente dissipativo, 69
- Ponto de acumulação de uma sequência generalizada, 14
- Problema
  - de *Cauchy* abstrato, 86
  - homogêneo de valor inicial, 86
  - não homogêneo de valor inicial, 100
  - semilinear de valor inicial, 105
- Pseudorresolvente, 75
- Semigrupo
  - Adjunto, 81
  - fortemente contínuo, 48
  - uniformemente contínuo, 46
- Solução
  - clássica do problema homogêneo, 100
  - clássica do problema semilinear, 105
  - suave do problema não homogêneo, 101
- Teorema
  - G. Lumer-R. S. Phillips*, 70
  - de *E. Hille-K. Yosida-R. S. Phillips*, 64
  - de *M. H. Stone*, 84
  - de *F. Riesz-M. R. Fréchet*, 29
  - de *S. Banach-H. Steinhaus*, 25
  - de *S. Banach-L. Alaoglu*, 27
  - do gráfico fechado, 27