

Anselmo Baganha Raposo Júnior

SOBRE NORMAS DE FORMAS UNIMODULARES
EM ESPAÇOS DE SEQUÊNCIAS

João Pessoa-PB
2022

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

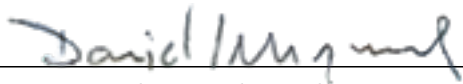
Universidade Federal da Paraíba
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Anselmo Baganha Raposo Júnior

SOBRE NORMAS DE FORMAS UNIMODULARES
EM ESPAÇOS DE SEQUÊNCIAS

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMat) da UFPB como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Este exemplar corresponde a versão final da tese defendida pelo aluno Anselmo Baganha Raposo Júnior e aprovada pela comissão julgadora.



Daniel Marinho Pellegrino
(Orientador)

João Pessoa-PB
2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R219s Raposo Júnior, Anselmo Baganha.

Sobre normas de formas unimodulares em espaços de
sequências / Anselmo Baganha Raposo Júnior. - João
Pessoa, 2022.

98 f. : il.

Orientação: Daniel Marinho Pellegrino.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Formas multilíneas. 2. Desigualdade KSZ. 3.
Desigualdade de Bennett. 4. Métodos determinísticos. 5.
Dominação das constantes. 6. Jogo das luzes
desbalanceadas. I. Pellegrino, Daniel Marinho. II.
Título.

UFPB/BC

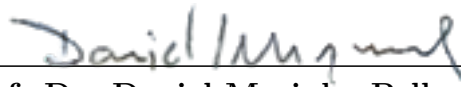
CDU 512.647(043)

Universidade Federal da Paraíba
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

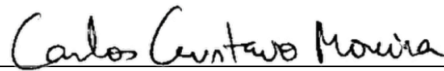
Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMat) da UFPB como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 04 de julho de 2022



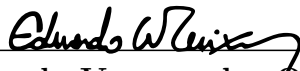
Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino
Orientador
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)



Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira
Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)



Prof. Dr. Domingo García Rodríguez
Universidade de Valencia (UV-Espanha)



Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira
University of Central Florida (UCF-EUA)



Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

AOS MEUS QUATRO PONTOS CARDEAIS

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Agradecimentos

A Deus.

Aos meus pais, Anselmo e Maria Francisca, professores, responsáveis pelos valores que carregou. Fizeram tudo ao seu alcance para que eu e meus irmãos tivéssemos acesso a educação de qualidade. Nos ensinaram que é preciso conhecer, conhecer-se, reconhecer e reconhecer-se. Nos ensinaram a diferença entre ceticismo e negacionismo, entre ter fé e ser besta. Nos ensinaram que não aceitar qualquer resposta é normal, mas ser terraplanista e antivacina não.

Aos meus irmãos Armando, Artur (pai da minha afilhada linda, a Sofia) e Diogo (este último de outros pais; um presente da vida). Meus primeiros amigos e uma parte imensa de tudo o que sou. Ao lado de vocês eu cresci. Ao lado de vocês eu hei de permanecer.

Aos meus filhos João Pedro, Heitor, Lucas e Bernardo (ou Junaba, Heitoka, Luketa e Bê, que é como carinhosamente se chamam). Vocês são o meu bem mais precioso. É por vocês que eu levanto. É por vocês que eu luto. É por vocês que eu não desisto. Meus filhos, papai os ama muito e se fiquei longe, se estive ausente, foi para que vocês pudessem ter orgulho do pai que têm.

À Aléxia, minha esposa, minha amiga, minha companheira. Seu apoio, sua doação e sua crença em mim e em nós permitiram que tudo isso fosse possível. Você cuidou de mim e dos nossos meninos, sozinha em boa parte do tempo, acumulando funções para que eu pudesse me dedicar aos estudos. Sabemos que não foi fácil. Mas nós conseguimos. Sim... NÓS. Essa etapa que se encerra é uma conquista tão minha quanto sua.

Aos meus irmãos mais novos, Álvaro (o pequeno gafanhoto) e Alice (a feiosa do olho de vidro que não toma banho), a quem enxergo como filhos. Espero de todo o coração deixar um bom exemplo. Espero que vocês se orgulhem de seu irmão mais velho.

Ao meu avô, Benedito Raposo. O senhor é o motivo de eu ter estudado Matemática. Vê-lo em sua cadeira de balanço com caneta e papel sempre em mãos em frente à sua estante, rabiscando contas que eu não entendia, primeiro me deixou curioso. Depois, crescer ouvindo as histórias peculiares e divertidas a respeito de um professor de Matemática magnífico, idolatrado por seus alunos por conta de sua genialidade e simplicidade me fizeram desejar ser como o senhor.

À tia Renilde (minha segunda mãe) e Delmiro (Sensei Neto), pais da minha afilhada linda, a Vivi, por ajudarem na minha criação e de meus irmãos e por simplesmente se fazerem presentes na minha vida.

Aos primos Alvinho, Brian, Dheko, Gilsinho, Jaqueline, Julica, Mateus e Zé Maria por todo carinho, apoio, respeito e torcida pelo meu sucesso.

À “tia” Kallynne e Cesinha, pais do Bento, pelo carinho, admiração e respeito que temos uns pelos outros. Agradeço a fé que sempre tiveram em mim.

À Josy, por todo carinho, cuidado e amizade dispensados a mim e à minha família. Serei eternamente grato por tudo que fizeste por todos nós ao longo de todos esses anos, principalmente pelos bolos.

À Lilica, pela forma amável, gentil, respeitosa, serena e calorosa que entrou em nossas vidas. Obrigado por estar ao lado de mamãe, principalmente quando não pudemos estar lá.

Aos amigos maravilhosos que o doutorado me deu. Em especial, agradeço a André, Cícero, Danilo, Edu, Elizabeth, Glayson, Geivison, Ginaldo, Ivan (cabrita), Janiely e Lindinês. Com vocês os dias difíceis... continuaram difíceis, mas pelo menos tínhamos um ao outro pra ter certeza que ninguém estava se lascando sozinho kkkkkkkk. Vocês são pessoas incríveis, mesmo os flamenguistas.

Aos ex-alunos, e hoje amigos, Aldivan, Alvimar, Anacleto, Arnaldo, Clenilton, Denison, Gabriela, Laécio. As histórias incríveis de superação de vocês foram, com toda certeza, inspiração para que eu escrevesse a minha própria história de superação. Agradeço todo o carinho e toda a torcida pelo meu sucesso. Desejo ser pra vocês o melhor professor que eu puder ser.

Ao professor Cleber, aquele que me preparou pra chegar até aqui. Aquele que primeiro me abriu os olhos sobre as “verdades que a Matemática traz”. Aquele a quem devo o início do meu amadurecimento na ciência mãe e com quem hoje tenho o privilégio de dividir o mesmo gabinete e chamar de amigo.

Ao meu irmão(zão) José Marão, aquele que compartilha comigo da admiração pelo seu Biné, o ser humano e o profissional em que muito me espelho pelo compromisso, pelo trabalho duro, por “botar a mão na massa” pra ver as coisas acontecendo e que tem uma generosidade que não cabe nos dois metros de altura que tem.

Agradeço imensamente ao amigo e orientador Daniel Pellegrino pelo profissionalismo, extrema competência, pela dedicação e pela valorosa contribuição à minha formação enquanto matemático. A crença no meu potencial, as palavras de incentivo e os puxões de orelha me mantiveram motivado durante todo o tempo. Embora ele seja flamenguista, quando eu crescer, quero ser como ele.

Aos professores e técnicos do PPGMat-UFPB pela pós-graduação de excelência que fornecem e conduzem.

Sua espada só reflete medo. Quando você desvia do meu ataque, você tem medo de ser cortado. Quando você ataca, tem medo de cortar. Quando você protege alguém, você tem medo de deixar morrer. Sim, sua espada só me fala de um absurdo medo. Não é assim. Numa batalha, nada do que você fizer pode vir do medo. Se você desviar, você não será cortado. Se você proteger, não vai deixar morrer. E se você atacar... você vai cortar!

Urahara (Bleach)

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Resumo

O estudo das formas multilineares $A: \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 (ou matrizes com entradas ± 1) possui importantes aplicações em vários ramos da Matemática e tem sido explorado por diversos autores em diferentes contextos desde o final do século XIX. As ideias que norteiam este tópico repousam na busca por formas multilineares unimodulares, isto é, formas multilineares com coeficientes ± 1 , de menor norma possível. Pelo uso de métodos probabilísticos, uma família de desigualdades que fornecem formas multilineares unimodulares com “norma pequena” emerge: são as chamadas desigualdades de Kahane–Salem–Zygmund (por simplicidade, desigualdades KSZ). Para o caso de formas bilineares, uma desigualdade do tipo KSZ foi tratada independentemente por Bennett em 1977 em um contexto mais geral que permite dimensões diferentes nos espaços que compõem o domínio da forma bilinear. Ocorre que a abordagem não-determinística, embora muito efetiva no que diz respeito a estabelecer a otimalidade dos expoentes envolvidos nestas desigualdades, fornece constantes imprecisas. Por meio de resultados analíticos, provamos que as constantes são, em alguns casos, dominadas assintoticamente por 1. Além disso, fornecemos estimativas universais melhores do que as conhecidas até então. Os resultados e técnicas provenientes dessa investigação são aplicados ao jogo das luzes desbalanceadas de Gale–Berlekamp e permitem melhorar algumas das estimativas conhecidas, quanto às soluções do jogo. Em contrapartida, as melhores estimativas para o jogo das luzes desbalanceadas são utilizadas para que uma dominação universal mais precisa das constantes na desigualdade de Bennett seja apresentada.

Palavras-chave: formas multilineares, desigualdade KSZ, desigualdade de Bennett, métodos determinísticos, dominação das constantes, jogo das luzes desbalanceadas de Gale–Berlekamp.

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Abstract

The study of multilinear forms $A: \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \rightarrow \mathbb{K}$ with coefficients ± 1 (or matrices with ± 1 entries) has several applications in various branches of mathematics and has been investigated by several authors in different contexts since the end of the 19th century. The ideas that guide this topic rest on the search for unimodular multilinear forms, that is, multilinear forms with coefficients ± 1 , with the lowest possible norm. By using probabilistic methods, a family of inequalities that yield unimodular multilinear forms with “small norm” emerges: these are the so-called Kahane–Salem–Zygmund inequalities (KSZ inequalities for short). For the case of bilinear forms, an inequality of KSZ type was independently obtained by Bennett in 1977 in a more general setting that allows different dimensions for the spaces that form the domain of the bilinear form. It occurs that the non-deterministic approach, although very effective with regard to establishing the optimality of the exponents involved in these inequalities, provides very imprecise constants. By means of analytical results we prove that the constants are, in some cases, asymptotically dominated by 1. In addition, we provide more accurate estimates of universal domination for these cases previously known. The results and techniques from this investigation are applied to the Gale–Berlekamp switching game and allow us to improve some known estimates regarding the solutions of the game. In contrast, the best estimates for Gale–Berlekamp switching game are used to present a more accurate universal domination of the constants in the Bennett inequality.

Key-words: multilinear forms, KSZ inequality, Bennett inequality, deterministic methods, constants domination, Gale–Berlekamp switching game.

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Sumário

Notação e terminologia	1
Introdução	3
1 Dominação assintótica das constantes nas desigualdades KSZ e de Bennett	7
1.1 Constantes da desigualdade KSZ	8
1.2 Constantes da desigualdade de Bennett	14
1.3 Algumas considerações	22
2 Dominação universal das constantes nas desigualdades KSZ e de Bennett	23
2.1 Resultados preliminares	23
2.2 As constantes da desigualdade de Bennett são dominadas por $\sqrt{8/5}$	27
2.3 Dominação superior para as constantes da KSZ	29
3 O jogo das luzes desbalanceadas de Gale-Berlekamp	37
3.1 Sobre o jogo	37
3.2 Melhores estimativas para R_n	41
3.3 Constantes da desigualdade de Bennett para $p_1 = p_2 = \infty$	45
3.4 Algumas considerações em dimensões mais altas	46
A Matrizes de Hadamard e densidade assintótica	49
B O Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin	58
C Pontos extremos em espaços de dimensão finita	67
Referências Bibliográficas	77

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Notação e terminologia

Em todo o trabalho os símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotam, respectivamente, o conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$ dos inteiros positivos, o corpo dos números reais e o corpo dos números complexos. O símbolo $\mathbb{K}$ denotará, de forma indistinta, os corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ e a sequência $(e_j)_{j=1}^n$ denotará a base canônica de $\mathbb{K}^n$.

Se $p \in [1, \infty]$, então a função $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, & \text{se } p = \infty, \end{cases}$$

define uma norma comumente chamada de **p -norma**. Nestas condições, utilizaremos a notação ℓ_p^n para denotar o par $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$. Escreveremos ainda $\ell_p^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ quando for necessária a distinção $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Como de costume, a bola fechada de centro na origem e raio 1 em um espaço vetorial normado E será denotada por B_E . Assim,

$$B_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

Se $E_1, \dots, E_m, E$ são espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, então uma aplicação $A: E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow E$ será dita um **operador m -linear** (ou **multilinear**) se é linear em cada uma de suas m variáveis. Mais precisamente, a aplicação A será um operador m -linear quando para todo $k = 1, \dots, m$, vale a igualdade

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_{k-1}, \mu x_k + \lambda x'_k, x_{k+1}, \dots, x_m) &= \mu A(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \\ &\quad + \lambda A(x_1, \dots, x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \dots, x_m), \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m), (x_1, \dots, x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \in E_1 \times \dots \times E_m$ e $\mu, \lambda \in \mathbb{K}$. Quando $E = \mathbb{K}$ o operador m -linear A será dito uma **forma m -linear**. Quando $E_1, \dots, E_m, E$ são normados e o operador m -linear A for contínuo, sua norma será o número real

$$\|A\| = \sup \{\|A(x_1, \dots, x_m)\| : x_k \in B_{E_k}, \text{ para todo } k = 1, \dots, m\}.$$

Em particular, devemos lembrar que, se $E_1, \dots, E_m$ são espaços vetoriais de dimensão finita, então todo operador m -linear $A: E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow E$ é contínuo.

Convencionamos aqui que $1/\infty = 0$ e $1/0 = \infty$. Neste caso, o conjugado de Lebesgue de $p \in [1, \infty]$ será o único elemento p^* de $[1, \infty]$ tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1,$$

isto é,

$$p^* = \frac{p}{p-1}.$$

Quando o espaço vetorial E é munido de produto interno, este será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e, sempre que $E = \mathbb{K}^n$, ficará subentendido que o produto interno em questão é o produto interno euclidiano

$$\langle x, y \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j},$$

onde $\overline{y_j}$ denota o complexo conjugado de y_j .

A notação

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n$$

indicará sempre o somatório múltiplo

$$\sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n.$$

Sejam $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$. Uma função $f: \{1, \dots, n_1\} \times \cdots \times \{1, \dots, n_m\} \rightarrow \mathbb{K}$ será dita uma **m -matriz** ou **matriz de dimensão m** . A imagem de uma m -upla $(j_1, \dots, j_m)$ por f será denotada por $a_{j_1 \dots j_m}$ e, seguindo a notação matricial, indicaremos a m -matriz f por $(a_{j_1 \dots j_m})_{n_1 \times \cdots \times n_m}$. Quando $n_1 = \cdots = n_m = n$, diremos que $(a_{j_1 \dots j_m})_{n \times \cdots \times n}$ é uma **m -matriz de ordem n** .

Sejam $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ funções. Escreveremos $f(n) = O(g(n))$ se existe uma constante positiva C tal que, para todo n suficientemente grande, temos

$$f(n) \leq Cg(n).$$

Equivalentemente, dizer que $f(n) = O(g(n))$ significa que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty.$$

As demais notações e terminologias serão apresentadas em momento oportuno no decorrer do texto.

Introdução

O estudo das formas bilineares e, mais geralmente, das formas multilineares $A: \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 possui importantes aplicações em vários ramos da Matemática. Essa linha de investigação tem sido explorada por diversos autores em diferentes contextos desde o final do século XIX. Por exemplo, a desigualdade 4/3 de Littlewood estabelece que, dados $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e uma forma bilinear $A: \ell_\infty^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} |A(e_i, e_j)|^{4/3} \right)^{3/4} \leq \sqrt{2} \|A\|$$

e o expoente 4/3 nesta desigualdade é ótimo no sentido de que, se $p > 0$ é tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} |A(e_i, e_j)|^p \right)^{1/p} \leq C \|A\|,$$

para todo par (n_1, n_2) de números naturais, toda forma bilinear $A: \ell_\infty^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ e alguma constante positiva C , então $p \geq 4/3$. Tanto a otimalidade da constante $\sqrt{2}$ (para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), quanto a do expoente 4/3 são provadas por meio de formas unimodulares. A forma bilinear $A_0: \ell_\infty^2 \times \ell_\infty^2 \rightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$A_0(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2$$

garante a otimalidade da constante $\sqrt{2}$ e a otimalidade do expoente 4/3 é obtida pela consideração de formas bilineares unimodulares definidas por uma classe especial de matrizes com entradas ± 1 .

As ideias que norteiam este tópico repousam na busca por formas multilineares unimodulares com normas relativamente pequenas, isto é, considerar, dentre as formas multilineares com coeficientes 1 e -1 (por vezes, números complexos de módulo 1), as de menor norma possível. Em 1931, H. Bohnenblust e E. Hille (vide [13]) construíram uma forma m -linear $A_n: \ell_\infty^n \times \cdots \times \ell_\infty^n \rightarrow \mathbb{C}$ com coeficientes complexos de módulo 1 satisfazendo

$$\|A_n\| \leq n^{(m+1)/2}$$

e mostraram que o expoente $(m+1)/2$ é ótimo, ou seja, ele não pode ser substituído por um expoente menor, mesmo se multiplicarmos o segundo membro da desigualdade por uma constante positiva. Contudo, em muitas ocasiões, argumentos determinísticos

não estão disponíveis e métodos probabilísticos são utilizados. Entretanto, provar desigualdades ótimas por meio de argumentos combinatórios é, geralmente, uma tarefa difícil. Uma abordagem poderosa e comumente utilizada nessas situações consiste em construir um espaço de probabilidade adequado e mostrar que a probabilidade de existir um elemento com certas propriedades neste espaço é positiva. Esta abordagem foi cunhada por Paul Erdős (vide [4, Prefácio] para um tratamento completo) e é denominada de “Método Probabilístico”. O Método Probabilístico, apesar de efetivo em muitos aspectos, é fortemente não construtivo. Nas décadas de 1970 e 1980, vários autores seguiram esta linha (vide, por exemplo, [8, 16, 25, 30, 40]) e, hoje em dia, estas abordagens probabilísticas são exploradas em diferentes linhas de pesquisa (vide [4, 6, 10, 11, 12, 14, 18, 19, 20, 32, 35] e suas respectivas referências). Em geral, os argumentos probabilísticos são suficientes para fornecer expoentes ótimos, mas as constantes envolvidas não são precisas.

Estas desigualdades que garantem a existência de formas multilineares unimodulares (e polinômios) com norma pequena por meio de métodos probabilísticos são geralmente chamadas de desigualdades de Kahane–Salem–Zygmund (por simplicidade, desigualdades KSZ). Recentemente, importantes abstrações destas desigualdades foram desenvolvidas, inicialmente, por M. Mastyło e R. Szvedek em [32] e, posteriormente, por A. Defant e M. Mastyło em [20].

Neste trabalho estamos interessados nas versões multilineares das desigualdades KSZ (em [1, Lema 6.1] e [3, 35] elas são obtidas seguindo a abordagem de H. Boas em [11, Teorema 4]; vide também [30, Teoremas 1.1 e 1.2]). Aplicações destas desigualdades podem ser encontradas, por exemplo, em [2, 12, 16, 37, 40]. Para o caso de formas bilineares, uma desigualdade do tipo KSZ foi provada independentemente por G. Bennett [9] em 1977 (vide também [8]), de forma bastante completa.

A desigualdade KSZ para formas multilineares estabelece em [30] e [2] (este último segundo a abordagem de Boas em [11]) que dados $m, n \in \mathbb{N}$ e $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$, existe uma forma m -linear $A_n: \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_n(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

tal que

$$\|A_n\| \leq C_m n^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}} + \sum_{k=1}^m \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\right\}, \quad (1)$$

com

$$C_m = \sqrt{32m \log(6m)} \sqrt{m!}. \quad (2)$$

Para o caso de formas bilineares, a abordagem de Bennett (vide [9, Proposição 3.2]) é mais geral, permitindo dimensões diferentes no domínio das formas bilineares. Mais precisamente, a desigualdade de Bennett afirma que existe uma constante $C \geq 1$ tal que, para quaisquer $p_1, p_2 \in [1, \infty]$ e quaisquer inteiros positivos n_1, n_2 , existe uma forma bilinear $A_{n_1, n_2}: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ com coeficientes ± 1 satisfazendo

$$\|A_{n_1, n_2}\| \leq C \max \left\{ n_1^{1/p_1^*} n_2^{\max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, 0\right\}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}, 0\right\}} \right\}. \quad (3)$$

A desigualdade KSZ foi recentemente estendida por N. Albuquerque e L. Rezende em [3] e D. Pellegrino, D. Serrano-Rodríguez e J. Silva em [35] às formas m -lineares (conforme a

abordagem de Bennett) como segue: sejam $m, n_1, \dots, n_m$ inteiros positivos e $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$. Existem uma constante C_m e uma forma m -linear $A_{n_1, \dots, n_m} : \ell_{p_1}^{n_1} \times \dots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_{n_1, \dots, n_m}(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

tais que

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq C_m \left(\sum_{k=1}^m n_k \right)^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}} \prod_{k=1}^m \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\right\}. \quad (4)$$

Para generalizações recentes e de amplo espectro, vide [20].

É evidente que (4) é equivalente a escrever

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq D_m \max_{k=1, \dots, m} \left\{ n_k^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}} \right\} \prod_{k=1}^m \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\right\} \quad (5)$$

para alguma constante $D_m \geq C_m$. Um cálculo direto mostra que, quando $m = 2$ e $p_1, p_2 \in [2, \infty]$, a desigualdade (5) recupera (3). A prova feita em [3] das desigualdades (4) e (5) segue as linhas da demonstração de (1) e as constantes C_m e D_m são, essencialmente, as constantes que aparecem em (2).

O expoente de n em (1) é ótimo (vide [35]; de fato, este resultado foi provado anteriormente com outras técnicas por A. Mantero e A. Tonge em [30, Teorema 1.2]) e, quando $p_1, \dots, p_m \in [2, \infty]$, todos os expoentes de $n_1, \dots, n_m$ em todas as expressões acima são também ótimos (vide [3]). Por outro lado, os valores exatos das constantes C , C_m e D_m são desconhecidos; as abordagens de Bennett, Boas e Mantero e Tonge ([9, 11, 30]) são não-construtivas e dependem de argumentos fortemente não-determinísticos, não fornecendo uma pista precisa dos valores exatos das constantes envolvidas.

O Capítulo 1 foi publicado em

[33] D. Pellegrino, A. Raposo Jr, *Constants of the Kahane–Salem–Zygmund inequality asymptotically bounded by 1*, J. Funct. Anal. **282** (2022), 109293, 21pp.

Nele, as constantes das desigualdades KSZ para o caso $p_1 = \dots = p_m = \infty$ e de Bennett são abordadas do ponto de vista assintótico. Mais precisamente, mostramos no Teorema 1.2 que, dados um inteiro positivo m e $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que, para quaisquer $n_1, \dots, n_m > N$, existe uma forma m -linear $A_{n_1, \dots, n_m} : \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_{n_1, \dots, n_m}(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

satisfazendo

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq (1 + \varepsilon) \max\left\{n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2}\right\} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2}.$$

Verificamos ainda que o mesmo tipo de dominação ocorre em vários casos da desigualdade de Bennett (de fato, pouquíssimos casos restaram abertos). Finalizamos este capítulo ressaltando que, seguindo as linhas dos argumentos probabilísticos de Mantero e Tonge em [30, Teorema 1.1], é possível melhorar as constantes de (4) e (5) no caso em que $p_1, \dots, p_m \in [2, \infty]$. Mais precisamente, verificamos que é possível substituir as constantes de (4) e (5) por

$$2^{m+1} \sqrt{(2m+1) \log(1+4m)}$$

no caso de escalares complexos e por

$$2\sqrt{(2m+1)\log(1+4m)}$$

no caso de escalares reais.

O Capítulo 2, que é baseado em nosso preprint

[34] D. Pellegrino, A. Raposo Jr, *Upper bounds for the constants of Bennett's Inequality and the Gale-Berlekamp switching game*, preprint (2022), 20 pp. arXiv:2111.00445v2,

prossegue com a investigação iniciada no capítulo anterior e contempla resultados de dominação universal das constantes nas desigualdades KSZ e de Bennett. Verificamos aqui que a constante C em (3) satisfaz a estimativa

$$C \leq (8/5)^{1/2}$$

em diversos casos e que a constante C_m em (4) satisfaz

$$C_m \leq 2^{(m+1)/2}$$

quando $p_1 = \dots = p_m = \infty$. Provamos ainda que essa estimativa pode ser melhorada para $(8/5)^{(m-1)/2}$ quando nos restringimos ao caso particular $n_1 = \dots = n_m = n$.

O Capítulo 3 traz uma aplicação dos resultados obtidos nos dois primeiros capítulos: o jogo das luzes desbalanceadas de Gale-Berlekamp. Aqui, a dinâmica do jogo do ponto de vista de um modelo matemático e sua relação com as formas multilineares de coeficientes ± 1 é descrita e os resultados e técnicas apresentados nos capítulos que o precedem são utilizados para fornecer, analiticamente, uma melhora nas estimativas conhecidas das soluções do jogo em alguns casos específicos. O caminho inverso também é feito e as estimativas obtidas no jogo das luzes desbalanceadas são utilizadas para melhorar um caso especial de dominação universal na desigualdade de Bennett. Discutimos ainda uma generalização do jogo para dimensões mais altas.

Os apêndices têm a finalidade de deixar o texto autossuficiente. Em todo o trabalho as matrizes de Hadamard desempenham um papel fundamental e, portanto, o Apêndice A traz o essencial sobre o assunto para que o texto seja melhor compreendido. O Apêndice B traz uma versão sob medida do Teorema de Interpolação de Riesz–Thorin baseada em [23, Teorema 6.27]. O Apêndice C versa sobre a teoria de pontos extremos em espaços de dimensão finita servindo como ponte entre o jogo das luzes desbalanceadas de Gale–Berlekamp e a desigualdade de Bennett.

Ao contrário da abordagem de Boas, nosso estudo não se debruça sobre as formas multilineares simétricas visto que, sempre que possível, desejamos permitir dimensões diferentes para os espaços que determinam o domínio das formas multilineares consideradas e, neste contexto, não faz sentido falarmos em simetria.

Capítulo 1

Dominação assintótica das constantes nas desigualdades KSZ e de Bennett

Lembremos que a desigualdade KSZ para formas multilineares afirma que, dados $m, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ e $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$, existem uma constante $C_m > 0$ e uma forma m -linear $A_{n_1, \dots, n_m} : \ell_{p_1}^{n_1} \times \dots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_{n_1, \dots, n_m} (z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

tais que

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq C_m \left(\sum_{k=1}^m n_k \right)^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}} \prod_{k=1}^m \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\right\}. \quad (1.1)$$

Obviamente, (1.1) é equivalente a escrever

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq D_m \max_{k=1, \dots, m} \left\{ n_k^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}} \prod_{k=1}^m \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\right\} \right\} \quad (1.2)$$

para alguma constante $D_m \geq C_m$. O caso bilinear da desigualdade KSZ, devido a Bennett, estabelece que existe uma constante $C \geq 1$ tal que, para quaisquer $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e quaisquer $p_1, p_2 \in [1, \infty]$, existe uma forma bilinear $A_{n_1, n_2} : \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ com coeficientes ± 1 satisfazendo

$$\|A_{n_1, n_2}\| \leq C \max \left\{ n_1^{1/p_1^*} n_2^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}, 0\}} \right\}. \quad (1.3)$$

Vale frisar que a desigualdade de Bennett em (1.3) fornece estimativas mais precisas para o caso bilinear do que (1.2). Mais precisamente, (1.2) não recupera (1.3) quando $\{p_1, p_2\} \cap [1, 2) \neq \emptyset$, com $p_1 \neq p_2$.

A coleção das formas multilineares $A : \ell_{p_1}^{n_1} \times \dots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_m}^{(m)}$$

será denotada por $\mathcal{A}_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m}$. Observemos que este conjunto é o mesmo independentemente da escolha de $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$.

Dados $m > 2$, $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$ e $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, seja

$$C_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m} := \frac{\min \{ \|A\| : A \in \mathcal{A}_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m} \}}{\max_{k=1, \dots, m} \left\{ n_k^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\}}}. \quad (1.4)$$

Neste caso, como $\mathcal{A}_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m}$ é finito, segue que $C_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m}$ é a menor das constantes positivas para as quais existe uma forma m -linear satisfazendo uma desigualdade como (1.2). No caso de formas bilineares, utilizando a desigualdade de Bennett, definimos

$$C_{p_1, p_2; n_1, n_2} := \frac{\min \{ \|A\| : A \in \mathcal{A}_{p_1, p_2; n_1, n_2} \}}{\max \left\{ n_1^{1/p_1^*} n_2^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}, 0\}} \right\}}. \quad (1.5)$$

Como $\mathcal{A}_{p_1, p_2; n_1, n_2}$ é finito, segue que $C_{p_1, p_2; n_1, n_2}$ é a menor das constantes positivas para as quais existe uma forma bilinear satisfazendo uma desigualdade como (1.3).

No presente capítulo, veremos que as constantes $C_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m}$, em alguns casos, são assintoticamente dominadas por 1 no sentido de que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$C_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m} \leq 1 + \varepsilon$$

sempre que $n_1, \dots, n_m \geq N$. Vale observar que a dominação assintótica por 1 das constantes $C_{\infty, \infty; n, n}$ (e apenas destas) está presente de modo implícito no trabalho de Brown e Spencer (vide [14, página 166]). Em suma, encoberto pelo manto do jogo das luzes desbalanceadas de Gale–Berlekamp, Brown e Spencer mostram por meio de um argumento diferente do que apresentamos aqui que

$$C_{\infty, \infty; n, n} \leq 1 + o(1),$$

ou seja, seu trabalho fornece dominação assintótica por 1 das constantes na desigualdade de Bennett apenas no caso de formas bilineares unimodulares definidas sobre $\ell_\infty^n \times \ell_\infty^n$.

De modo geral, este capítulo e o próximo deixarão claro que as constantes obtidas pelos métodos probabilísticos são bastante imprecisas.

Sejam $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$ e $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$. É fácil ver que, se $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \dots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma forma m -linear com coeficientes ± 1 e $A_0: \ell_{p_1}^{n_1}(\mathbb{R}) \times \dots \times \ell_{p_m}^{n_m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$, então $\|A_0\| \leq \|A\|$. Diante deste fato, em algumas ocasiões será suficiente estabelecermos a validade de um resultado no contexto de escalares complexos para que tenhamos garantida a sua validade no contexto de escalares reais.

1.1 Constantes da desigualdade KSZ

Nesta seção, nosso objetivo principal é mostrar a dominação assintótica por 1 das constantes em (1.1) e (1.2) quando $p_1 = \dots = p_m = \infty$.

Lema 1.1 *Sejam $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m$ inteiros positivos tais que, para todo $k = 2, \dots, m$, existe uma matriz de Hadamard $\mathbf{H}_{n_k} = [h_{ij}^{(k)}]_{n_k \times n_k}$. Então, a forma m -linear $A: \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ definida por*

$$A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m h_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^m x_{i_s}^{(s)} \right)$$

é tal que

$$\|A\| \leq n_m^{1/2} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2}.$$

Demonstração: Para cada $\mu = 2, \dots, m$, seja $u_i^{(\mu)}$, $i = 1, \dots, n_\mu$, a i -ésima linha de $\mathbf{H}_{n_\mu}$; então

$$\langle u_i^{(\mu)}, u_j^{(\mu)} \rangle = n_\mu \delta_{ij}. \quad (1.6)$$

Consideremos as matrizes quadradas de ordem n_m definidas por

$$\left[\mathfrak{h}_{ij}^{(\mu)} \right]_{n_m \times n_m} := \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{n_\mu} & \mathbf{0}_{n_\mu \times (n_m - n_\mu)} \\ \mathbf{0}_{(n_m - n_\mu) \times n_\mu} & \mathbf{0}_{(n_m - n_\mu) \times (n_m - n_\mu)} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

para cada $\mu = 2, \dots, m$. Para cada $k = 1, \dots, m$, dado $x^{(k)}$ em $\mathbb{S}_{\ell_\infty^{n_k}}$, façamos

$$y^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}_{\ell_\infty^{n_m}}.$$

Daí, usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} & |A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| \\ &= \left| \sum_{i_1=1}^{n_m} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^m y_{i_s}^{(s)} \right) \right| \\ &\leq \sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1=1}^{n_m} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \right) \right| |y_{i_m}^{(m)}| \\ &\leq \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} |y_{i_m}^{(m)}|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1=1}^{n_m} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \right) \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq n_m^{1/2} \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1=1}^{n_m} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \right) \right|^2 \right)^{1/2} \\ &= n_m^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_m=1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \mathfrak{h}_{i_{m-1}i_m}^{(m)} \mathfrak{h}_{j_{m-1}i_m}^{(m)} \left(\prod_{r=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & |A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| \\ &\leq n_m^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \sum_{i_m=1}^{n_m} \mathfrak{h}_{i_{m-1}i_m}^{(m)} \mathfrak{h}_{j_{m-1}i_m}^{(m)} \right)^{1/2} \\ &= n_m^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \sum_{i_m=1}^{n_m} h_{i_{m-1}i_m}^{(m)} h_{j_{m-1}i_m}^{(m)} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$= n_m^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{m-1} h_{i_{r-1}i_r}^{(r)} h_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \langle u_{i_{m-1}}^{(m)}, u_{j_{m-1}}^{(m)} \rangle \right)^{1/2}. \quad (1.8)$$

Observemos que, se $m \geq 3$, então para todo $t \in \{3, \dots, m\}$, de (1.6) e (1.7), temos

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{t-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{t-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{t-1} h_{i_{r-1}i_r}^{(r)} h_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{t-1} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \langle u_{i_{t-1}}^{(t)}, u_{j_{t-1}}^{(t)} \rangle \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{t-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{t-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{t-1} h_{i_{r-1}i_r}^{(r)} h_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{t-1} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) n_t \delta_{i_{t-1}j_{t-1}} \\ &= n_t \sum_{\substack{i_{t-1}=1 \\ j_{t-1}=1}}^{n_m} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{t-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{t-2}=1}}^{n_m} h_{i_{t-2}i_{t-1}}^{(t-1)} h_{j_{t-2}j_{t-1}}^{(t-1)} \left(\prod_{r=2}^{t-2} h_{i_{r-1}i_r}^{(r)} h_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{t-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) |y_{i_{t-1}}|^2 \\ &\leq n_t \sum_{\substack{i_{t-1}=1 \\ j_{t-1}=1}}^{n_m} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{t-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{t-2}=1}}^{n_m} h_{i_{t-2}i_{t-1}}^{(t-1)} h_{j_{t-2}j_{t-1}}^{(t-1)} \left(\prod_{r=2}^{t-2} h_{i_{r-1}i_r}^{(r)} h_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{t-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \\ &= n_t \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{t-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{t-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{t-2} h_{i_{r-1}i_r}^{(r)} h_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{t-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \sum_{i_{t-1}=1}^{n_m} h_{i_{t-2}i_{t-1}}^{(t-1)} h_{j_{t-2}j_{t-1}}^{(t-1)} \\ &= n_t \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{t-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{t-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{t-2} h_{i_{r-1}i_r}^{(r)} h_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{t-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \sum_{i_{t-1}=1}^{n_{t-1}} h_{i_{t-2}i_{t-1}}^{(t-1)} h_{j_{t-2}j_{t-1}}^{(t-1)} \\ &= n_t \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{t-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{t-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{t-2} h_{i_{r-1}i_r}^{(r)} h_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{t-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \langle u_{i_{t-2}}^{(t-1)}, u_{j_{t-2}}^{(t-1)} \rangle, \end{aligned} \quad (1.9)$$

ficando subentendido que $\left(\prod_{r=a}^b \alpha_r \beta_r \right) = 1$ se $b < a$. Fazendo uso recursivo de (1.9) em (1.8), obtemos

$$\begin{aligned} |A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| &\leq n_m^{1/2} \prod_{j=3}^m n_j^{1/2} \left(\sum_{i_1, j_1=1}^{n_m} y_{i_1}^{(1)} \overline{y_{j_1}^{(1)}} \langle u_{i_1}^{(2)}, u_{j_1}^{(2)} \rangle \right)^{1/2} \\ &= n_m^{1/2} \prod_{j=3}^m n_j^{1/2} \left(\sum_{i_1, j_1=1}^{n_m} y_{i_1}^{(1)} \overline{y_{j_1}^{(1)}} n_2 \delta_{i_1 j_1} \right)^{1/2} \\ &= \left(n_m^{1/2} \prod_{j=3}^m n_j^{1/2} \right) n_2^{1/2} \left(\sum_{i_1=1}^{n_m} |y_{i_1}^{(1)}|^2 \right)^{1/2} \\ &= n_m^{1/2} \prod_{j=2}^m n_j^{1/2} \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} |x_{i_1}^{(1)}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(n_m^{1/2} \prod_{j=2}^m n_j^{1/2} \right) n_1^{1/2} = n_m^{1/2} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2}. \end{aligned}$$

Se $m = 2$, então o procedimento recursivo é evitado e a desigualdade acima é obtida diretamente. De todo modo, concluímos que

$$\|A\| = \sup_{\|x^{(1)}\|_\infty = \dots = \|x^{(m)}\|_\infty = 1} |A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| \leq n_m^{1/2} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2},$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema 1.2 *Sejam m um inteiro positivo e $\varepsilon > 0$ dados. Existe um inteiro positivo N tal que, para quaisquer $n_1, \dots, n_m > N$, existe um forma m -linear $A_{n_1, \dots, n_m} : \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A_{n_1, \dots, n_m}(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

satisfazendo

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq (1 + \varepsilon) \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2}.$$

Demonstração: Sabemos da Observação A.12 que o conjunto das ordens de Hadamard é assintoticamente denso em $\mathbb{N}$ e, portanto, para

$$\delta = (1 + \varepsilon)^{\frac{2}{m+1}} - 1 > 0,$$

existe um inteiro positivo N tal que, para todo $k = 1, \dots, m$, sempre que $n_k > N$ é um inteiro, existe uma ordem de Hadamard t_k satisfazendo

$$n_k \leq t_k < (1 + \delta) n_k.$$

Observemos que, sem perda de generalidade, podemos supor $t_1 \leq \dots \leq t_m$. Do Lema 1.1, considerando os inteiros $t_1, \dots, t_m$, existe uma forma m -linear $A_0 : \ell_\infty^{t_1} \times \dots \times \ell_\infty^{t_m} \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 tal que

$$\|A_0\| \leq t_m^{1/2} \prod_{k=1}^m t_k^{1/2}.$$

Se $n_k = t_k$ para todo k , basta fazer $A_{n_1, \dots, n_m} = A_0$. Caso contrário, consideramos a forma m -linear

$$A_{n_1, \dots, n_m} : \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$$

definida por

$$\begin{aligned} & A_{n_1, \dots, n_m} \left(\left(z_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^{n_1}, \dots, \left(z_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^{n_m} \right) \\ &= A_0 \left(\left(z_1^{(1)}, \dots, z_{n_1}^{(1)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{t_1 - n_1 \text{ zeros}} \right), \dots, \left(z_1^{(m)}, \dots, z_{n_m}^{(m)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{t_m - n_m \text{ zeros}} \right) \right). \end{aligned}$$

Então, dado $x^{(k)} \in B_{\ell_\infty^{n_k}}$, $k = 1, \dots, m$, temos

$$\begin{aligned}
& \left| A_{n_1, \dots, n_m} \left(\left(x_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^{n_1}, \dots, \left(x_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^{n_m} \right) \right| \\
&= \left| A_0 \left(\left(x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}, 0, \dots, 0 \right), \dots, \left(x_1^{(m)}, \dots, x_{n_m}^{(m)}, 0, \dots, 0 \right) \right) \right| \\
&\leq \|A_0\| \leq t_m^{1/2} \prod_{j=1}^m t_j^{1/2} \\
&\leq (1 + \delta)^{1/2} n_m^{1/2} \prod_{j=1}^m (1 + \delta)^{1/2} n_j^{1/2} \\
&\leq (1 + \delta)^{\frac{m+1}{2}} \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2} \\
&= (1 + \varepsilon) \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2}
\end{aligned}$$

e isso finaliza a prova. ■

Como uma consequência imediata, temos a mesma dominação assintótica para (1.2) no caso em que $n_1 = \dots = n_m = n$:

Corolário 1.3 *Sejam m um inteiro positivo e $\varepsilon > 0$ dados. Existe um inteiro positivo N tal que, para todo $n > N$, existe uma forma m -linear $A_n: \ell_\infty^n \times \dots \times \ell_\infty^n \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A_n(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

satisfazendo

$$\|A_n\| \leq (1 + \varepsilon) n^{\frac{m+1}{2}}.$$

OBSERVAÇÃO 1.4 Uma famosa conjectura de Hadamard sugere que todo inteiro positivo múltiplo de 4 é uma ordem de Hadamard. Se isso for verdade ou, pelo menos, se a distância entre duas ordens de Hadamard consecutivas for limitada por uma constante universal, uma modificação direta de nossa demonstração mostra que existe uma forma m -linear $A_n: \ell_\infty^n \times \dots \times \ell_\infty^n \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_n(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

tal que

$$\|A_n\| \leq (1 + O(n^{-1/2})) n^{\frac{m+1}{2}}.$$

De fato, suponhamos que a distância entre duas ordens de Hadamard consecutivas seja limitada por $r \in \mathbb{N}$. Fixado $n \in \mathbb{N}$, seja t a maior ordem de Hadamard tal que

$$t \leq n.$$

Neste caso, existe $0 \leq s \leq r$ tal que $t + s \geq n$ também é ordem de Hadamard. Do Lema 1.1, existe uma forma m -linear $A_0: \ell_\infty^{t+s} \times \dots \times \ell_\infty^{t+s} \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 tal que

$$\|A_0\| \leq (t + s)^{(m+1)/2}.$$

Se $n = t$, então basta tomar $s = 0$ e fazer $A_n = A_0$. Caso contrário, consideramos a forma m -linear

$$A_n: \ell_\infty^n \times \cdots \times \ell_\infty^n \rightarrow \mathbb{K}$$

definida por

$$\begin{aligned} A_n & \left(\left(z_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^n, \dots, \left(z_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^n \right) \\ & = A_0 \left(\left(z_1^{(1)}, \dots, z_n^{(1)}, 0, \dots, 0 \right), \dots, \left(z_1^{(m)}, \dots, z_n^{(m)}, 0, \dots, 0 \right) \right). \end{aligned}$$

Então, dado $x^{(k)} \in B_{\ell_\infty^n}$, $k = 1, \dots, m$, temos

$$\begin{aligned} & \left| A_n \left(\left(x_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^n, \dots, \left(x_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^n \right) \right| \\ & = \left| A_0 \left(\left(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, 0, \dots, 0 \right), \dots, \left(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, 0, \dots, 0 \right) \right) \right| \\ & \leq \|A_0\| \leq (t + s)^{\frac{m+1}{2}} \\ & \leq (n + r)^{\frac{m+1}{2}} \\ & = \left[1 + \left(\left(1 + \frac{r}{n} \right)^{\frac{m+1}{2}} - 1 \right) \right] n^{\frac{m+1}{2}}. \end{aligned}$$

Definindo $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \left[\left(1 + \frac{r}{x} \right)^{\frac{m+1}{2}} - 1 \right] x^{1/2},$$

temos

$$\|A_n\| \leq \left[1 + \left(\left(1 + \frac{r}{n} \right)^{\frac{m+1}{2}} - 1 \right) \right] n^{\frac{m+1}{2}} = [1 + f(n)n^{-1/2}] n^{\frac{m+1}{2}} \quad (1.10)$$

Fazendo $u = (1 + r/x)^{1/2}$, observamos que $x = r/(u^2 - 1)$ e que $u \rightarrow 1^+$ quando $x \rightarrow \infty$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) & = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{r}{x} \right)^{\frac{m+1}{2}} - 1 \right] x^{1/2} \\ & = \lim_{u \rightarrow 1^+} (u^{m+1} - 1) \frac{r^{1/2}}{(u^2 - 1)^{1/2}} \\ & = \lim_{u \rightarrow 1^+} r^{1/2} \left(\frac{(u^{m+1} - 1)(u^{m+1} - 1)}{u^2 - 1} \right)^{1/2} \\ & = \lim_{u \rightarrow 1^+} r^{1/2} \left(\frac{(u - 1)(u^m + u^{m-1} + \dots + 1)(u^{m+1} - 1)}{(u - 1)(u + 1)} \right)^{1/2} \\ & = \lim_{u \rightarrow 1^+} r^{1/2} \left(\frac{(u^m + u^{m-1} + \dots + 1)(u^{m+1} - 1)}{u + 1} \right)^{1/2} \\ & = 0. \end{aligned}$$

Concluimos daqui que a sequência $(f(n))_{n=1}^\infty$ converge para zero sendo, portanto, limitada. Seja $C > 0$ tal que $f(n) \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, de (1.10) segue que

$$\|A_n\| \leq [1 + f(n)n^{-1/2}] n^{\frac{m+1}{2}} \leq (1 + Cn^{-1/2}) n^{\frac{m+1}{2}}.$$

1.2 Constantes da desigualdade de Bennett

Na seção anterior garantimos a dominação assintótica por 1 das constantes na desigualdade KSZ relativamente às formas m -lineares com coeficientes ± 1 definidas sobre $\ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m}$ sempre que $p_1 = \cdots = p_m = \infty$. Nesta seção mostraremos que o mesmo tipo de dominação ocorre no caso de formas bilineares com coeficientes ± 1 definidas sobre $\ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2}$ para quaisquer $p_1, p_2 \in [1, \infty]$, com algumas poucas exceções a depender do par (n_1, n_2) (vide Figura 1.1). Veremos também que as constantes na desigualdade de Bennett (1.3) são “uniformemente” assintoticamente limitadas por 1 quando $p_1, p_2 \in [2, \infty]$. Além disso, a constante 1 se revelará ótima no caso em que $n_1 = n_2 = n$ e $p_1, p_2 \in [1, 2]$.

Lema 1.5 *Sejam $2 \leq p \leq q \leq \infty$ e $x \in \mathbb{K}^n$. Se $x \in B_{\ell_q^n}$ e $z = n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}x$, então $z \in B_{\ell_p^n}$.*

Demonstração: O resultado é evidente se $p = q$. Suponhamos então $2 \leq p < q \leq \infty$. Se $q = \infty$, então

$$\|z\|_p = n^{-1/p} \|x\|_p = n^{-1/p} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \leq n^{-1/p} (n \|x\|_\infty^p)^{1/p} = \|x\|_\infty = 1.$$

Se $q < \infty$, da desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \|z\|_p &= n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|x\|_p = n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \\ &\leq n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^q \right)^{p/q} \left(\sum_{j=1}^n 1^{q/(q-p)} \right)^{1-\frac{p}{q}} \right]^{1/p} \\ &= n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\|x\|_q^p n^{1-\frac{p}{q}} \right]^{1/p} \\ &= \|x\|_q \leq 1. \end{aligned}$$

■

OBSERVAÇÃO 1.6 Sabemos que, se $1 \leq p \leq q$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $B_{\ell_p^n} \subset B_{\ell_q^n}$. Sejam $A_1: \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ e $A_2: \ell_{q_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{q_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ formas m -lineares definidas pela mesma regra. Neste caso, se $p_k \leq q_k$ para todo $k = 1, \dots, m$, fazendo

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{ |A_1(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| : (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in B_{\ell_{p_1}^{n_1}} \times \cdots \times B_{\ell_{p_m}^{n_m}} \right\}, \\ B_2 &= \left\{ |A_2(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| : (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in B_{\ell_{q_1}^{n_1}} \times \cdots \times B_{\ell_{q_m}^{n_m}} \right\}, \end{aligned}$$

temos $B_1 \subset B_2$ e, consequentemente,

$$\|A_1\| = \sup B_1 \leq \sup B_2 = \|A_2\|.$$

O próximo lema servirá a múltiplos propósitos e também será usado na próxima seção. Por questões de simplicidade, utilizamos a notação $\mathbb{N}_k$ para representar o conjunto $\{k, k+1, k+2, \dots\}$.

Lema 1.7 *Sejam $k, m \in \mathbb{N}$ e seja $f: \mathbb{N}_k \rightarrow [0, \infty)$ uma função crescente. Se para todo $n \in \mathbb{N}_k$ existe uma forma m -linear $A_0: \ell_2^n \times \cdots \times \ell_2^n \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 tal que*

$$\|A_0\| \leq f(n),$$

então, para quaisquer $p_1, \dots, p_m \in [2, \infty]$ e quaisquer $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}_k$ existe uma forma m -linear $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 tal que

$$\|A\| \leq \max \{f(n_1), \dots, f(n_m)\} n_1^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}} \cdots n_m^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_m}}.$$

Demonstração: Seja $n = \max \{n_1, \dots, n_m\}$. Por hipótese, existe uma forma m -linear $A_0: \ell_2^n \times \cdots \times \ell_2^n \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n \pm x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_m}^{(m)}$$

tal que

$$\|A_0\| \leq f(n).$$

Consideremos a forma m -linear $A_1: \ell_2^{n_1} \times \cdots \times \ell_2^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$A_1(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = A_0\left(\left(x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}, 0, \dots, 0\right), \dots, \left(x_1^{(m)}, \dots, x_{n_m}^{(m)}, 0, \dots, 0\right)\right).$$

É claro que

$$\|A_1\| \leq \|A_0\| \leq f(n) = \max \{f(n_1), \dots, f(n_m)\}. \quad (1.11)$$

Agora, definamos $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = A_1(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}).$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x^{(k)}\|_{p_k} \leq 1} \left| \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_m}^{(m)} \right| \\ &= n_1^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}} \cdots n_m^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_m}} \sup_{\|x^{(k)}\|_{p_k} \leq 1} \left| \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm \frac{x_{i_1}^{(1)}}{n_1^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}}} \cdots \frac{x_{i_m}^{(m)}}{n_m^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_m}}} \right|. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Para todo $k = 1, \dots, m$, seja $z^{(k)} = n_k^{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{2}} x^{(k)}$. Do Lema 1.5, como $\|x^{(k)}\|_{p_k} \leq 1$, temos $\|z^{(k)}\|_2 \leq 1$. Segue de (1.11) e (1.12) que

$$\begin{aligned} \|A\| &\leq n_1^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}} \cdots n_m^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_m}} \sup_{\|z^{(k)}\|_2 \leq 1} \left| \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \cdots z_{i_m}^{(m)} \right| \\ &= \|A_1\| n_1^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}} \cdots n_m^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_m}} \\ &\leq \max \{f(n_1), \dots, f(n_m)\} n_1^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}} \cdots n_m^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_m}}, \end{aligned}$$

como desejado. ■

Agora, provaremos um outro lema que desempenhará um papel fundamental nesta seção.

Lema 1.8 *Seja $\varepsilon > 0$. Existe um inteiro positivo N (que depende apenas de ε) tal que, sempre que $n > N$, existe uma forma bilinear $A: \ell_2^n \times \ell_2^n \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A(z^{(1)}, z^{(2)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pm z_i^{(1)} z_j^{(2)},$$

satisfazendo

$$\|A\| \leq (1 + \varepsilon) n^{1/2}.$$

Demonstração: É suficiente considerarmos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Seja $[h_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz de Hadamard de ordem n . É fácil ver que a forma bilinear $A_0: \ell_2^n \times \ell_2^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$A_0(z^{(1)}, z^{(2)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} z_i^{(1)} z_j^{(2)}, \quad (1.13)$$

tem norma

$$\|A_0\| \leq n^{1/2}.$$

Com efeito, se $x^{(1)}, x^{(2)} \in B_{\ell_2^n}$, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} |A_0(x^{(1)}, x^{(2)})| &\leq \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n h_{ij} x_i^{(1)} \right| |x_j^{(2)}| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j^{(2)}|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n h_{ij} x_i^{(1)} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i,k=1}^n h_{ij} h_{kj} x_i^{(1)} \overline{x_k^{(1)}} \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i,k=1}^n x_i^{(1)} \overline{x_k^{(1)}} n \delta_{ik} \right)^{1/2} \\ &\leq n^{1/2}. \end{aligned}$$

Mostraremos que, para outros valores de n , temos a mesma desigualdade, com o acréscimo do “fator assintótico” $(1 + \varepsilon)$.

Sabemos da Observação A.12 que, dado $\delta > 0$, existe um inteiro positivo N tal que, sempre que $n > N$, existe uma ordem de Hadamard t satisfazendo

$$n \leq t \leq n(1 + \delta). \quad (1.14)$$

Agora, consideremos uma matriz de Hadamard $[h_{ij}]_{t \times t}$ de ordem t . Seja $A_0: \ell_2^t \times \ell_2^t \rightarrow \mathbb{C}$ como em (1.13). Logo,

$$\|A_0\| \leq t^{1/2}.$$

Se $n = t$, basta considerarmos $A = A_0$. Se $n < t$, definimos

$$A: \ell_2^n \times \ell_2^n \rightarrow \mathbb{C},$$

por

$$A\left(\left(z_i^{(1)}\right)_{i=1}^n, \left(z_j^{(2)}\right)_{j=1}^n\right) = A_0\left(\left(z_1^{(1)}, \dots, z_n^{(1)}, 0, \dots, 0\right), \left(z_1^{(2)}, \dots, z_n^{(2)}, 0, \dots, 0\right)\right).$$

Então, dados $x^{(1)}, x^{(2)} \in B_{\ell_2^n}$, por (1.14), temos

$$\begin{aligned} \left| A \left(\left(x_i^{(1)} \right)_{i=1}^n, \left(x_j^{(2)} \right)_{j=1}^n \right) \right| &= \left| A_0 \left(\left(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, 0, \dots, 0 \right), \left(x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, 0, \dots, 0 \right) \right) \right| \\ &\leq \|A_0\| \leq t^{1/2} \leq (1 + \delta)^{1/2} n^{1/2} \end{aligned}$$

e a prova está completa. ■

Para fins meramente didáticos, os resultados que seguem serão sempre escritos na forma de (1.3) mesmo que saibamos precisar quanto vale

$$\max \left\{ n_1^{1/p_1^*} n_2^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}, 0\}} \right\}.$$

Combinando o resultado acima com o Lema 1.7, obtemos o resultado principal desta seção:

Teorema 1.9 *Sejam $\varepsilon > 0$ e $p_1, p_2 \in [2, \infty]$. Existe um inteiro positivo N (que depende apenas de ε) tal que, sempre que $\max\{n_1, n_2\} > N$, existe uma forma bilinear $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A(z^{(1)}, z^{(2)}) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm z_i^{(1)} z_j^{(2)},$$

satisfazendo

$$\|A\| \leq (1 + \varepsilon) \max \left\{ n_1^{1/p_1^*} n_2^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}, 0\}} \right\}.$$

Demonstração: Segue do Lema 1.8 que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ (que depende apenas de ε) tal que, sempre que $n > N$, existe uma forma bilinear $A_0: \ell_2^n \times \ell_2^n \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 satisfazendo

$$\|A_0\| \leq (1 + \varepsilon) n^{1/2}.$$

Seja $f: \mathbb{N}_{N+1} \rightarrow [0, \infty)$ a função definida por

$$f(n) = (1 + \varepsilon) n^{1/2}.$$

Como f é claramente crescente, segue do Lema 1.7 que, se $\max\{n_1, n_2\} > N$ e $p_1, p_2 \in [2, \infty]$, então existe uma forma bilinear $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 tal que

$$\begin{aligned} \|A\| &\leq \max \{f(n_1), f(n_2)\} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} \\ &= \max \left\{ (1 + \varepsilon) n_1^{1/2}, (1 + \varepsilon) n_2^{1/2} \right\} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} \\ &= (1 + \varepsilon) \max \left\{ n_1^{1/p_1^*} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} \right\} \\ &= (1 + \varepsilon) \max \left\{ n_1^{1/p_1^*} n_2^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}, 0\}} \right\}, \end{aligned}$$

como desejado. ■

Provamos, agora, três corolários que, essencialmente, cobrem a maioria dos casos não contemplados pelo teorema anterior (vide Figura 1.1).

Corolário 1.10 *Sejam $\varepsilon > 0$ e $1 \leq p_1 < 2 \leq p_2$ ($1 \leq p_2 < 2 \leq p_1$). Existe um inteiro positivo N (que depende apenas de ε) tal que, sempre que $n_2 > N$ e $n_1 \leq n_2$ ($n_1 > N$ e $n_2 \leq n_1$), existe uma forma bilinear $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm x_i y_j,$$

tal que

$$\|A\| \leq (1 + \varepsilon) \max \left\{ n_1^{1/p_1^*} n_2^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}, 0\}} \right\}.$$

Demonstração: Suponhamos que $1 \leq p_1 < 2 \leq p_2$ e que $n_1 \leq n_2$. Notemos que, neste caso,

$$\max \left\{ n_1^{1/p_1^*} n_2^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}, 0\}} \right\} = n_2^{1/p_2^*}.$$

Do Teorema 1.9, dado $\varepsilon > 0$, existe N (que depende apenas de ε) tal que, se $n_2 > N$, existe uma forma bilinear $A_1: \ell_2^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_1(z^{(1)}, z^{(2)}) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm z_i^{(1)} z_j^{(2)},$$

satisfazendo

$$\|A_1\| \leq (1 + \varepsilon) n_2^{1/p_2^*}. \quad (1.15)$$

Agora, definamos $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ fazendo

$$A(x, y) = A_1(x, y).$$

Da Observação 1.6 e de (1.15),

$$\|A\| \leq \|A_1\| \leq (1 + \varepsilon) n_2^{1/p_2^*}.$$

O caso em que $1 \leq p_2 < 2 \leq p_1$ e $n_2 \leq n_1$ é análogo. ■

Corolário 1.11 *Sejam $\varepsilon > 0$ e $p \in [1, \infty]$. Existe um inteiro positivo N (que depende apenas de ε) tal que, sempre que $\max\{n_1, n_2\} > N$, existe uma forma bilinear $A: \ell_p^{n_1} \times \ell_p^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A(z^{(1)}, z^{(2)}) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm z_i^{(1)} z_j^{(2)},$$

tal que

$$\|A\| \leq (1 + \varepsilon) \max \left\{ n_1^{1/p^*} n_2^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}, 0\}}, n_2^{1/p^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}, 0\}} \right\}.$$

Demonstração: Basta considerarmos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Além disso, é suficiente tratarmos o caso em que $p \in [1, 2)$, pois o caso $p \in [2, \infty]$ já foi investigado no Teorema 1.9. Segue do Corolário 1.10 que existe um inteiro positivo N (que depende apenas de ε) tal que, se $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ são tais que $\max\{n_1, n_2\} > N$, então existe uma forma bilinear $A_2: \ell_2^{n_1} \times \ell_2^{n_2} \rightarrow \mathbb{C}$ com coeficientes ± 1 tal que

$$\|A_2\| \leq (1 + \varepsilon) \max\left\{n_1^{1/2}, n_2^{1/2}\right\}.$$

Seja $A_1: \ell_1^{n_1} \times \ell_1^{n_2} \rightarrow \mathbb{C}$ a forma bilinear definida por

$$A_1(z^{(1)}, z^{(2)}) = A_2(z^{(1)}, z^{(2)}).$$

É evidente que $\|A_1\| = 1$. Seja $A_p: \ell_p^{n_1} \times \ell_p^{n_2} \rightarrow \mathbb{C}$ a forma bilinear definida por

$$A_p(z^{(1)}, z^{(2)}) = A_2(z^{(1)}, z^{(2)}).$$

Tomando $\theta = 2(1 - 1/p) = 2/p^*$, como $1 \leq p < 2$, segue do Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin (Teorema B.4) que

$$\begin{aligned} \|A_p\| &\leq \|A_1\|^{1-\theta} \|A_2\|^\theta = \|A_2\|^\theta \\ &\leq \left[(1 + \varepsilon) \max\left\{n_1^{1/2}, n_2^{1/2}\right\}\right]^{2/p^*} \\ &= (1 + \varepsilon)^{2/p^*} \max\left\{n_1^{1/p^*}, n_2^{1/p^*}\right\} \\ &\leq (1 + \varepsilon) \max\left\{n_1^{1/p^*}, n_2^{1/p^*}\right\} \\ &= (1 + \varepsilon) \max\left\{n_1^{1/p^*} n_2^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}, 0\}}, n_2^{1/p^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}, 0\}}\right\} \end{aligned}$$

e isto encerra a prova. ■

Corolário 1.12 *Sejam $\varepsilon > 0$ e $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq 2$ ($1 \leq p_2 \leq p_1 \leq 2$). Existe um inteiro positivo N , que depende apenas de ε , tal que, sempre que $n_2 > N$ ($n_1 > N$) e $n_1 \leq n_2$ ($n_2 \leq n_1$), existe uma forma bilinear $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A(z^{(1)}, z^{(2)}) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm z_i^{(1)} z_j^{(2)},$$

tal que

$$\|A\| \leq (1 + \varepsilon) \max\left\{n_1^{1/p_1^*} n_2^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}, 0\}}\right\}.$$

Demonstração: Se $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq 2$ e $n_1 \leq n_2$, então

$$\max\left\{n_1^{1/p_1^*} n_2^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}, 0\}}\right\} = n_2^{1/p_2^*}.$$

Do Corolário 1.11, dado $\varepsilon > 0$, existe N (que depende apenas de ε) tal que, se $n_2 > N$, existe uma forma bilinear $A_1: \ell_{p_2}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_1(z^{(1)}, z^{(2)}) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm z_i^{(1)} z_j^{(2)},$$

satisfazendo

$$\|A_1\| \leq (1 + \varepsilon) n_2^{1/p_2^*}. \quad (1.16)$$

Definindo $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$A(x, y) = A_1(x, y),$$

segue da Observação 1.6 e de (1.16) que

$$\|A\| \leq \|A_1\| \leq (1 + \varepsilon) n_2^{1/p_2^*}.$$

■

OBSERVAÇÃO 1.13 Vale mencionar que existem ainda alguns poucos casos em aberto acerca do comportamento assintótico das constantes da desigualdade de Bennett. Nossa abordagem não cobre formas bilineares $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ com $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq 2$ ($1 \leq p_2 \leq p_1 \leq 2$) e $n_1 > n_2$ ($n_2 > n_1$).

Como um corolário final, mostramos que a constante assintótica 1 é ótima quando $n_1 = n_2$ e $p_1, p_2 \in [1, 2]$:

Corolário 1.14 *Sejam $p_1, p_2 \in [1, \infty]$ e $\varepsilon > 0$. Existe um inteiro positivo N (que depende apenas de ε) tal que, sempre que $n > N$, existe uma forma bilinear $A: \ell_{p_1}^n \times \ell_{p_2}^n \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A(z^{(1)}, z^{(2)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pm z_i^{(1)} z_j^{(2)}, \quad (1.17)$$

satisfazendo

$$\|A\| \leq (1 + \varepsilon) \max \left\{ n^{1/p_1^*} n^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, 0\}}, n^{1/p_2^*} n^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}, 0\}} \right\}$$

e a constante 1 é ótima sempre que $p_1, p_2 \in [1, 2]$.

Demonstração: Para a primeira afirmação, basta considerarmos $n_1 = n_2 = n$ no Teorema 1.9 e nos Corolários 1.10 e 1.12. Assim, tudo o que nos resta mostrar é a otimalidade da constante assintótica 1. Mostremos que 1 não pode ser substituído por uma constante menor quando $p_1, p_2 \in [1, 2]$. Sem perda de generalidade, suponhamos $p_2 = \max\{p_1, p_2\}$. Sabemos que a correspondência

$$\varphi \in (\ell_{p_2}^n)^* \mapsto (\varphi_j)_{j=1}^n = (\varphi(e_j))_{j=1}^n \in \ell_{p_2^*}^n$$

estabelece um isomorfismo isométrico entre $(\ell_{p_2}^n)^*$ e $\ell_{p_2^*}^n$. Sejam $A: \ell_{p_1}^n \times \ell_{p_2}^n \rightarrow \mathbb{K}$ como em (1.17) e $\psi \in (\ell_{p_2}^n)^*$ o funcional linear definido por

$$\psi(x) = A(e_1, x).$$

Então, por um lado,

$$\left(\sum_{j=1}^n |A(e_1, e_j)|^{p_2^*} \right)^{1/p_2^*} = n^{1/p_2^*}$$

e, por outro,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n |A(e_1, e_j)|^{p_2^*} \right)^{1/p_2^*} &= \left\| (\psi(e_j))_{j=1}^n \right\|_{p_2^*} = \|\psi\| = \sup_{\|x\|_{p_2} \leq 1} |\psi(x)| \\ &= \sup_{\|x\|_{p_2} \leq 1} |A(e_1, x)| \leq \sup_{\|x\|_{p_2} \leq 1} \|A\| \|e_1\|_{p_1} \|x\|_{p_2} = \|A\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|A\| \geq n^{1/p_2^*} = \max \left\{ n^{1/p_1^*} n^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, 0\}}, n^{1/p_2^*} n^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}, 0\}} \right\},$$

e a prova está feita. ■

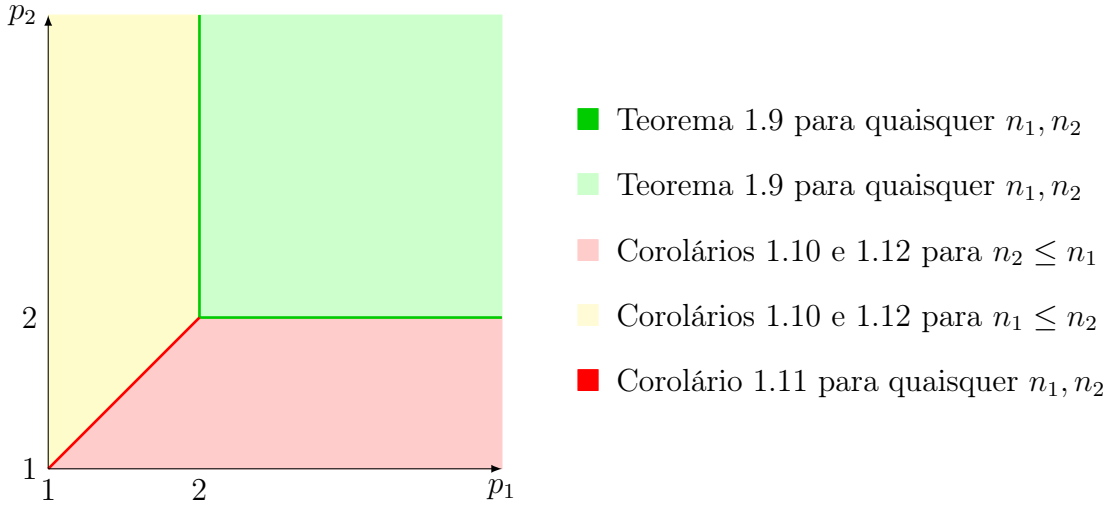


Figura 1.1: O comportamento assintótico uniforme das constantes da desigualdade de Bennett.

OBSERVAÇÃO 1.15 Observamos que, seguindo a linha do que estabelece o Teorema 1.9, podemos reescrever o Teorema 1.2 de forma ligeiramente mais relaxada. De fato, sua demonstração garante que, dados um inteiro positivo m e $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ para o qual, sempre que $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ satisfazem

$$\max_{i=1, \dots, m} \{\min \{n_j : j \neq i\}\} > N,$$

existe uma forma m -linear $A_{n_1, \dots, n_m} : \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_{n_1, \dots, n_m}(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \pm z_{j_1}^{(1)} \dots z_{j_m}^{(m)},$$

tal que

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq (1 + \varepsilon) \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2}.$$

1.3 Algumas considerações

Foge do escopo deste trabalho o tratamento da desigualdade KSZ via métodos probabilísticos. Contudo, vale a pena observar que as técnicas probabilísticas utilizadas na prova das desigualdades clássicas de KSZ melhoram as estimativas obtidas por Albuquerque e Rezende em [3] para os casos não cobertos nas seções anteriores. De fato, combinando os argumentos de Mantero e Tonge em [30, Teorema 1.1] para $p_1 = \dots = p_m = 2$ com o Lema 1.7 conseguimos melhorar as constantes de (1.1) e (1.2) no caso em que $n_1 = \dots = n_m = n$ e $p_1, \dots, p_m \in [2, \infty]$. Mais precisamente, seguindo as linhas de [30, Teorema 1.1] e fazendo uso do Lema 1.7, podemos substituir as constantes de (1.1) e (1.2) por

$$2^{m+1} \sqrt{(2m+1) \log(1+4m)}$$

no caso de escalares complexos e, no caso de escalares reais, podemos evitar o fator 2^m e obter

$$2 \sqrt{(2m+1) \log(1+4m)},$$

quando nos atemos apenas à mesma dimensão nos espaços que compõem o domínio das formas m -lineares e tomamos $p_1, \dots, p_m \in [2, \infty]$. Ainda permanece aberto o problema de se obter constantes assintoticamente dominadas por 1 nestes casos.

S. Dineen e R.M. Timoney afirmam em [21, Lema 3.3] que é possível garantir, utilizando os argumentos de Mantero e Tonge em [30, Teorema 1.1], que, dados os inteiros positivos $m, n \geq 2$, existe uma forma unimodular simétrica A tal que

$$\|A\| \leq 2^{m+1} \sqrt{m \log(1+4m)} n^{(m+1)/2} + 1.$$

Contudo, Boas mostra em [12, Observações 2 e 3] que esta afirmação é falsa e um dos motivos é o fato de que os argumentos de Mantero e Tonge não se aplicam diretamente às formas simétricas.

Finalizamos esta seção observando que o vão aparente quanto ao que estabelecem os Teoremas 1.2 e 1.9 é, de alguma forma, justificado pelo seguinte teorema cuja prova segue exatamente as mesmas linhas da demonstração do Teorema 1.2:

Teorema 1.16 *Sejam m um inteiro positivo, $p_1, p_m \in [2, \infty]$, $p_2 = \dots = p_{m-1} = \infty$ e $\varepsilon > 0$. Existe um inteiro positivo N tal que, para qualquer escolha de inteiros positivos $n_1, \dots, n_m > N$, com $n_1 = \min \{n_1, \dots, n_m\}$ e $n_m = \max \{n_1, \dots, n_m\}$, existe uma forma m -linear $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \times \dots \times \ell_{p_{m-1}}^{n_{m-1}} \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

satisfazendo

$$\|A\| \leq (1 + \varepsilon) n_m^{1/2} \prod_{k=1}^m n_k^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}}.$$

O resultado acima é o máximo que conseguimos vislumbrar com as técnicas aqui apresentadas de modo que completá-lo, no sentido de estabelecer o que ocorre quando permitimos, mais geralmente, que $p_2, \dots, p_{m-1} \in [2, \infty]$, parece ser um problema aberto interessante.

Dominação universal das constantes nas desigualdades KSZ e de Bennett

Para cada $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$, seja

$$C_{p_1, \dots, p_m} := \sup \{C_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m} : n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}\}, \quad (2.1)$$

onde $C_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m}$ é como em (1.4) se $m > 2$ e como em (1.5) se $m = 2$. As desigualdades KSZ e de Bennett garantem, então, que o supremo em (2.1) é finito.

Continuando a investigação iniciada no capítulo anterior, neste capítulo, entre outros resultados, mostramos que

$$C_{p_1, p_2} \leq \sqrt{8/5} \quad (2.2)$$

sempre que $p_1, p_2 \in [2, \infty]$ ou $p_1 = p_2 = p \in [1, \infty]$. Além disso, também fornecemos novas cotas superiores universais para as constantes na desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund para formas m -lineares $A: \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 (isto é, cotas superiores que não dependem das dimensões $n_1, \dots, n_m$ dos espaços que compõem o domínio de A) e obtemos estimativas melhores ainda para elas no caso particular em que $n_1 = \dots = n_m = n$.

2.1 Resultados preliminares

É evidente que, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, as constantes $C_{p_1, p_2; n_1, n_2}$ e C_{p_1, p_2} são menores do que ou iguais às respectivas constantes para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nesta seção, provamos alguns resultados preliminares que nos auxiliarão na prova de (2.2) para os casos de escalares reais e complexos.

Proposição 2.1 *Se $p_1, p_2 \in [2, \infty]$, então*

$$C_{p_1, p_2} \leq C_{p, p}$$

sempre que $2 \leq p \leq \min \{p_1, p_2\}$ e, em particular,

$$C_{p, p} \leq C_{2, 2}$$

sempre que $2 \leq p$.

Demonstração: Sejam $2 \leq p \leq \min \{p_1, p_2\}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $A_0: \ell_p^{n_1} \times \ell_p^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear do tipo

$$A_0(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm x_i y_j$$

satisfazendo

$$\|A_0\| \leq C_{p,p;n_1,n_2} \max \left\{ n_1^{1/p^*} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}, n_2^{1/p^*} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \right\}.$$

Seja $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ a forma bilinear definida por

$$A(x, y) = A_0(x, y).$$

Notemos que

$$\|A\| = n_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}} \sup_{\|x\|_{p_1}, \|y\|_{p_2} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm n_1^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} n_2^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}} x_i y_j \right|. \quad (2.3)$$

Fazendo $z = n_1^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} x$ e $w = n_2^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}} y$, segue do Lema 1.5 que $\|z\|_p, \|w\|_p \leq 1$ sempre que $\|x\|_{p_1}, \|y\|_{p_2} \leq 1$. Portanto, de (2.3),

$$\begin{aligned} \|A\| &\leq n_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}} \sup_{\|z\|_p, \|w\|_p \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm z_i w_j \right| \\ &= n_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}} \|A_0\| \\ &\leq n_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}} C_{p,p;n_1,n_2} \max \left\{ n_1^{1/p^*} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}, n_2^{1/p^*} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \right\} \\ &= C_{p,p;n_1,n_2} \max \left\{ n_1^{1/p_1^*} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} \right\}. \end{aligned}$$

Isto mostra que, para quaisquer $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, temos

$$C_{p_1,p_2;n_1,n_2} \leq C_{p,p;n_1,n_2}$$

e, portanto,

$$C_{p_1,p_2} \leq C_{p,p},$$

como desejado. ■

Proposição 2.2 Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então $C_{p,p} \leq C_{2,2}$ para todo $p \in [1, \infty]$.

Demonstração: Se $p \in [2, \infty]$, a Proposição 2.1 assegura que $C_{p,p} \leq C_{2,2}$. Supondo, então, $p \in [1, 2)$, seja $A_2: \ell_2^{n_1} \times \ell_2^{n_2} \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma bilinear do tipo

$$A_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm x_i y_j$$

tal que

$$\|A_2\| \leq C_{2,2;n_1,n_2} \max \left\{ n_1^{1/2}, n_2^{1/2} \right\}$$

É óbvio que, se a forma bilinear $A_1: \ell_1^{n_1} \times \ell_1^{n_2} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida pela mesma regra que define A_0 , então $\|A_1\| = 1$. Tomando $\theta = 2(1 - 1/p) = 2/p^*$, segue do Teorema de Riesz-Thorin (Teorema B.4) que, se a forma bilinear $A_p: \ell_p^{n_1} \times \ell_p^{n_2} \rightarrow \mathbb{C}$ é também definida pela mesma regra que define A_2 , então

$$\begin{aligned} \|A_p\| &\leq \|A_1\|^{1-\theta} \|A_2\|^\theta = \|A_2\|^\theta \\ &\leq \left(C_{2,2;n_1,n_2} \max \left\{ n_1^{1/2}, n_2^{1/2} \right\} \right)^{2/p^*} \\ &= C_{2,2;n_1,n_2}^{2/p^*} \max \left\{ n_1^{1/p^*}, n_2^{1/p^*} \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, como $C_{2,2} \geq 1$ (pois $C_{2,2} \geq C_{2,2;1,1} = 1$) e $2/p^* \leq 1$, concluímos que

$$C_{p,p} := \sup \{ C_{p,p;n_1,n_2} : n_1, n_2 \in \mathbb{N} \} \leq \sup \left\{ C_{2,2;n_1,n_2}^{2/p^*} : n_1, n_2 \in \mathbb{N} \right\} \leq C_{2,2}^{2/p^*} \leq C_{2,2}.$$

■

Proposição 2.3 *Se*

(i) $1 \leq p_1 < 2 \leq p_2$ e $n_1 \leq n_2$ ou

(ii) $1 \leq p_2 < 2 \leq p_1$ e $n_1 \geq n_2$,

então

$$C_{p_1,p_2;n_1,n_2} \leq C_{2,2}.$$

Demonstração: Provemos (i); a prova de (ii) é análoga. Como $1 \leq p_1 < 2 \leq p_2$, temos

$$\begin{aligned} \max \left\{ n_1^{1/p_1^*} n_2^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}, 0\}} \right\} &= \max \left\{ n_1^{1/p_1^*} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}, n_2^{1/p_2^*} \right\} \\ &= \max \left\{ \left(n_1^{1/p_1^*} / n_2^{1/2} \right) n_2^{1/p_2^*}, n_2^{1/p_2^*} \right\}. \end{aligned}$$

Notemos também que $1/p_1^* < 1/2$ e, sendo assim, como $n_1 \leq n_2$, temos

$$\frac{n_1^{1/p_1^*}}{n_2^{1/2}} \leq \frac{n_1^{1/2}}{n_2^{1/2}} = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{1/2} \leq 1,$$

o que nos fornece

$$\frac{n_1^{1/p_1^*}}{n_2^{1/2}} n_2^{1/p_2^*} \leq n_2^{1/p_2^*},$$

ou seja,

$$\max \left\{ n_1^{1/p_1^*} n_2^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}, 0\}} \right\} = n_2^{1/p_2^*}.$$

Seja $A_0: \ell_2^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear do tipo

$$\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm x_i y_j$$

tal que

$$\|A_0\| \leq C_{2,p_2;n_1,n_2} \max \left\{ n_1^{1/2} n_2^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 0\}} \right\} = C_{2,p_2;n_1,n_2} n_2^{1/p_2^*}.$$

Definamos $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ por $A(x, y) = A_0(x, y)$. Sabemos da Observação 1.6 que $\|A\| \leq \|A_0\|$ e, da Proposição 2.1, temos

$$\|A_0\| \leq C_{2,p_2;n_1,n_2} n_2^{1/p_2^*} \leq C_{2,p_2} n_2^{1/p_2^*} \leq C_{2,2} n_2^{1/p_2^*},$$

o que encerra a prova. ■

Proposição 2.4 *Se*

(i) $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq 2$ e $n_1 \leq n_2$ ou

(ii) $1 \leq p_2 \leq p_1 \leq 2$ e $n_1 \geq n_2$,

então

$$C_{p_1,p_2;n_1,n_2} \leq C_{2,2}.$$

Demonstração: Mais uma vez, provaremos apenas (i). É fácil perceber que, nas condições fornecidas em (i),

$$\max \left\{ n_1^{1/p_1^*} n_2^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}, 0\}} \right\} = n_2^{1/p_2^*}.$$

Seja $A_0: \ell_{p_2}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear do tipo

$$A_0(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm x_i y_j$$

tal que

$$\|A_0\| \leq C_{p_2,p_2;n_1,n_2} n_2^{1/p_2^*}. \quad (2.4)$$

Definamos $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ por $A(x, y) = A_0(x, y)$. Da Observação 1.6 e de (2.4), temos

$$\|A\| \leq \|A_0\| \leq C_{p_2,p_2;n_1,n_2} n_2^{1/p_2^*} \leq C_{p_2,p_2} n_2^{1/p_2^*}. \quad (2.5)$$

De (2.5) e da Proposição 2.2, concluímos que

$$C_{p_1,p_2;n_1,n_2} \leq C_{p_2,p_2} \leq C_{2,2},$$

como desejado. ■

Uma consequência imediata das Proposições 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 é:

Corolário 2.5 *Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então*

$$C_{2,2} \geq \begin{cases} C_{p_1,p_2}, & \text{se } p_1, p_2 \in [2, \infty], \\ C_{p,p}, & \text{se } p \in [1, \infty]. \\ C_{p_1,p_2;n_1,n_2}, & \text{se } p_1, p_2, n_1, n_2 \text{ são como nas Proposições 2.3 ou 2.4.} \end{cases}$$

2.2 As constantes da desigualdade de Bennett são dominadas por $\sqrt{8/5}$

Nesta seção mostramos que $C_{p_1, p_2} \leq \sqrt{8/5}$ sempre que $p_1, p_2 \in [2, \infty]$ ou $p_1 = p_2 = p \in [1, \infty]$, e que a cota superior $\sqrt{8/5}$ domina universalmente a maioria dos casos que surgem no estudo da desigualdade de Bennett.

Lema 2.6 *Para cada $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, seja r uma ordem de Hadamard tal que $\max\{n_1, n_2\} \leq r$. Então,*

$$C_{2,2;n_1,n_2} \leq \left(\frac{r}{\max\{n_1, n_2\}} \right)^{1/2}.$$

Demonstração: Seja $[h_{ij}]_{r \times r}$ uma matriz de Hadamard de ordem r . Seja $A: \ell_2^{n_1} \times \ell_2^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ a forma bilinear definida por

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} h_{ij} x_i y_j.$$

Sejam $x = (x_1, \dots, x_{n_1}) \in B_{\ell_2^{n_1}}$ e $y = (y_1, \dots, y_{n_2}) \in B_{\ell_2^{n_2}}$. Se

$$\begin{cases} u = (u_1, \dots, u_r) = (x_1, \dots, x_{n_1}, 0, \dots, 0), \\ v = (v_1, \dots, v_r) = (y_1, \dots, y_{n_2}, 0, \dots, 0), \end{cases}$$

então, $u, v \in B_{\ell_2^r}$ e, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} |A(x, y)| &= \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} h_{ij} x_i y_j \right| = \left| \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r h_{ij} u_i v_j \right| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^r |v_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^r \left| \sum_{i=1}^r h_{ij} u_i \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^r \sum_{i,k=1}^r h_{ij} h_{kj} u_i \overline{u_k} \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i,k=1}^r u_i \overline{u_k} r \delta_{ik} \right)^{1/2} \\ &= r^{1/2} \left(\sum_{i=1}^r |u_i|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq r^{1/2} = \left(\frac{r}{\max\{n_1, n_2\}} \right)^{1/2} \max\{n_1^{1/2}, n_2^{1/2}\}, \end{aligned}$$

encerrando a demonstração. ■

OBSERVAÇÃO 2.7 Sejam n_1, n_2 inteiros positivos. Se $n = \max\{n_1, n_2\}$, então $C_{2,2;n_1,n_2} \leq C_{2,2;n,n}$ e, conseqüentemente,

$$\sup\{C_{2,2;n,n} : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{C_{2,2;n_1,n_2} : n_1, n_2 \in \mathbb{N}\} = C_{2,2}. \quad (2.6)$$

Com efeito, seja $A: \ell_2^n \times \ell_2^n \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear do tipo

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pm x_i y_j$$

tal que

$$\|A\| \leq C_{2,2;n,n} n^{1/2}.$$

Considerando a forma bilinear $A_0: \ell_2^{n_1} \times \ell_2^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$A_0(x, y) = A((x_1, \dots, x_{n_1}, 0, \dots, 0), (y_1, \dots, y_{n_2}, 0, \dots, 0))$$

é evidente que

$$\|A_0\| \leq \|A\| \leq C_{2,2;n,n} n^{1/2} = C_{2,2;n,n} \max \{n_1^{1/2}, n_2^{1/2}\}.$$

Logo, $C_{2,2;n_1,n_2} \leq C_{2,2;n,n}$ e, como $\{C_{2,2;n,n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \{C_{2,2;n_1,n_2} : n_1, n_2 \in \mathbb{N}\}$, a igualdade (2.6) segue.

Estamos aptos agora a estabelecer o resultado principal desta seção.

Teorema 2.8 *Se $p_1, p_2, p \in [1, \infty]$, então*

$$\sqrt{8/5} \geq \begin{cases} C_{p_1,p_2}, & \text{se } p_1, p_2 \in [2, \infty], \\ C_{p,p}, & \text{se } p \in [1, \infty]. \\ C_{p_1,p_2;n_1,n_2}, & \text{se } p_1, p_2, n_1, n_2 \text{ são como nas Proposições 2.3 ou 2.4.} \end{cases}$$

Demonstração: Segue do Corolário 2.5 e da Observação 2.7 que é suficiente mostrarmos que $C_{2,2;n,n} \leq \sqrt{8/5}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. É óbvio que $C_{2,2;1,1} = 1$ e, do Lema 2.6, sabemos que

$$\begin{cases} C_{2,2;2,2} \leq 1, \\ C_{2,2;3,3} \leq (4/3)^{1/2} \approx 1.15, \\ C_{2,2;4,4} \leq 1. \end{cases}$$

É sabido que, para todo $k = 1, \dots, 166$, $4k$ é uma ordem de Hadamard (vide [27] para mais detalhes). Assim, para $n = 5, \dots, 664$, do Lema 2.6 temos $C_{2,2;n,n} \leq 1$ sempre que $n = 4k$ e, se $4k + 1 \leq n \leq 4k + 3$, temos

$$C_{2,2;n,n} \leq \left(\frac{4(k+1)}{n} \right)^{1/2} \leq \left(\frac{4(k+1)}{4k+1} \right)^{1/2}.$$

É fácil ver que o valor máximo de $\left(\frac{4(k+1)}{4k+1} \right)^{1/2}$ é atingido quando $k = 1$, o que nos dá

$$C_{2,2;n,n} \leq \sqrt{8/5}$$

para todo $n = 1, 2, \dots, 664$.

De agora em diante, utilizaremos a propriedade multiplicativa estabelecida no Teorema A.6: se p e q são ordens de Hadamard, então pq também o é. Assim, para cada $p \in \{1, \dots, 166\}$ e $r \in \mathbb{N}$, sabemos que $2^r \cdot 4p$ é uma ordem de Hadamard.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada $k \in \{8, \dots, 63\}$, seja

$$A_{m,k} := \{8^m k + 1, \dots, 8^m (k + 1)\}.$$

Como $8^m (k + 1) = 2^{3m-2} \cdot 4 (k + 1)$ é uma ordem de Hadamard, do Lema 2.6, se $n \in A_{m,k}$, temos

$$C_{2,2;n,n} \leq \left(\frac{8^m (k + 1)}{n} \right)^{1/2} \leq \left(\frac{8^m (k + 1)}{8^m k} \right)^{1/2} = \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{1/2} \leq \left(1 + \frac{1}{8} \right)^{1/2} < \sqrt{8/5}.$$

Resta mostrar que, se $n \geq 665$, então $n \in A_{m,k}$ para algum par (m, k) em $\mathbb{N} \times \{8, \dots, 63\}$. Pois bem, se $n \geq 665$, existe $m \geq 3$ tal que

$$8^{m-1} \cdot 8 = 8^m < n \leq 8^{m+1} = 8^{m-1} \cdot 64,$$

ou seja, $n \in A_{m-1,8} \cup \dots \cup A_{m-1,63}$. Portanto,

$$\mathbb{N} = \{1, \dots, 664\} \cup \bigcup_{m=2}^{\infty} \left(\bigcup_{k=8}^{63} A_{m,k} \right)$$

e a prova está feita. ■

2.3 Dominação superior para as constantes da KSZ

Como dito antes, a desigualdade de Bennett é parte de uma família de desigualdades não-determinísticas semelhantes que emergiram nos anos 1970 (vide [25, 30, 40]). Contudo, exceto pelo resultado de Bennett, as outras abordagens lidavam apenas com $n_1 = \dots = n_m$ e só muito recentemente a abordagem m -linear com $n_1, \dots, n_m$ arbitrários surgiu com o trabalho de Albuquerque e Rezende (vide [3]): existe uma constante C_m tal que, dados $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$ e $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, existe uma forma m -linear $A_{n_1, \dots, n_m} : \ell_{p_1}^{n_1} \times \dots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_{n_1, \dots, n_m} (z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

tal que

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq C_m \left(\sum_{k=1}^m n_k \right)^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}} \prod_{k=1}^m n_k^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\}}.$$

Obviamente, isto significa que existe uma constante $D_m \geq C_m$ satisfazendo

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq D_m \max_{k=1, \dots, m} \left\{ n_k^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\}}.$$

Em [3], as constantes C_m satisfazem

$$C_m \leq \sqrt{32m \log(6m)} \sqrt{m!} \quad (2.7)$$

e, no capítulo anterior, mostramos que, dados $\varepsilon > 0$ e um inteiro positivo m , se $p_1 = \dots = p_m = \infty$, existe um inteiro positivo N tal que

$$D_m < 1 + \varepsilon$$

se consideramos $n_1, \dots, n_m > N$ (e, *a fortiori*, $C_m < 1 + \varepsilon$ para $n_1, \dots, n_m > N$). O próximo resultado melhora a estimativa (2.7) para o caso $p_1 = \dots = p_m = \infty$ sem restrições sobre $n_1, \dots, n_m$:

Teorema 2.9 *Para cada inteiro positivo m existe uma forma m -linear $A_{n_1, \dots, n_m} : \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A_{n_1, \dots, n_m}(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

satisfazendo

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq 2^{\frac{m+1}{2}} \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{1/2}.$$

Demonstração: Notemos que, sem perda de generalidade, podemos supor $n_1 \leq \dots \leq n_m$. Para cada $k = 1, \dots, m$, seja t_k o único inteiro tal que

$$2^{t_k} < n_k \leq 2^{t_k+1}.$$

Segue do Lema 1.1 que existe uma forma m -linear $A_0 : \ell_\infty^{2^{t_1+1}} \times \dots \times \ell_\infty^{2^{t_m+1}} \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 tal que

$$\|A_0\| \leq (2^{t_m+1})^{1/2} \prod_{k=1}^m (2^{t_k+1})^{1/2}$$

Se $n_k = 2^{t_k+1}$ para todo $k = 1, \dots, m$, basta considerarmos $A_{n_1, \dots, n_m} = A_0$. Caso contrário, definimos $A_{n_1, \dots, n_m} : \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ fazendo

$$\begin{aligned} & A_{n_1, \dots, n_m} \left(\left(z_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^{n_1}, \dots, \left(z_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^{n_m} \right) \\ &= A_0 \left(\left(z_1^{(1)}, \dots, z_{n_1}^{(1)}, 0, \dots, 0 \right), \dots, \left(z_1^{(m)}, \dots, z_{n_m}^{(m)}, 0, \dots, 0 \right) \right). \end{aligned}$$

Então, dado $x^{(k)}$ em $B_{\ell_\infty^{n_k}}$, $k = 1, \dots, m$, temos

$$\begin{aligned} & \left| A_{n_1, \dots, n_m} \left(\left(x_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^{n_1}, \dots, \left(x_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^{n_m} \right) \right| \\ &= \left| A_0 \left(\left(x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}, 0, \dots, 0 \right), \dots, \left(x_1^{(m)}, \dots, x_{n_m}^{(m)}, 0, \dots, 0 \right) \right) \right| \\ &\leq \|A_0\| \leq (2^{t_m+1})^{1/2} \prod_{k=1}^m (2^{t_k+1})^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2^{t_m+1})^{1/2} \prod_{k=1}^m (2^{t_k+1})^{1/2}}{\max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{1/2}} \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2} \\
&\leq \frac{(2^{t_m+1})^{1/2} \prod_{k=1}^m (2^{t_k+1})^{1/2}}{(2^{t_m})^{1/2} \prod_{j=1}^m (2^{t_k})^{1/2}} \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2} \\
&= 2^{\frac{m+1}{2}} \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2}
\end{aligned}$$

e isto encerra a demonstração. ■

Agora, mostraremos que, se considerarmos apenas o caso particular em que $n_1 = \dots = n_m = n$, as estimativas fornecidas pelo Teorema 2.9 podem ser melhoradas para $\sqrt{(8/5)^{m-1}}$. Para tanto, adaptamos alguns argumentos e técnicas das seções anteriores.

Lema 2.10 *Sejam m um inteiro positivo e $f: \mathbb{N}^m \rightarrow [0, \infty)$ uma função. Se para cada $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ existe uma forma m -linear $A_0: \ell_2^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \times \dots \times \ell_\infty^{n_{m-1}} \times \ell_2^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_m}^{(m)} \quad (2.8)$$

satisfazendo

$$\|A_0\| \leq f(n_1, \dots, n_m),$$

então, para cada $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$, existe uma forma m -linear $A: \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ como em (2.8) tal que

$$\|A\| \leq (n_1 n_m)^{1/2} f(n_1, \dots, n_m).$$

Demonstração: Seja $A: \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ a forma m -linear definida por

$$A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sup_{\|x^{(1)}\|_\infty, \dots, \|x^{(m)}\|_\infty \leq 1} \left| \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_m}^{(m)} \right| \\
&= (n_1 n_m)^{1/2} \sup_{\|x^{(1)}\|_\infty, \dots, \|x^{(m)}\|_\infty \leq 1} \left| \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm n_1^{-1/2} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_{m-1}}^{(m-1)} n_m^{-1/2} x_{i_m}^{(m)} \right|.
\end{aligned} \quad (2.9)$$

Para $k \in \{1, m\}$, seja $z^{(k)} = n_k^{-1/2} x^{(k)}$. Da desigualdade de Hölder, como $x^{(k)} \in B_{\ell_\infty^{n_k}}$, temos $z_2^{(k)} \in B_{\ell_2^{n_k}}$ e, portanto, de (2.9),

$$\begin{aligned}
\|A\| &\leq (n_1 n_m)^{1/2} \sup_{\|z^{(1)}\|_2, \|x^{(2)}\|_\infty, \dots, \|x^{(m-1)}\|_\infty, \|z^{(m)}\|_2 \leq 1} \left| \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_{m-1}}^{(m-1)} z_{i_m}^{(m)} \right| \\
&= (n_1 n_m)^{1/2} \|A_0\| \\
&\leq (n_1 n_m)^{1/2} f(n_1, \dots, n_m),
\end{aligned}$$

como desejado. ■

Proposição 2.11 *Sejam $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ tais que $n_1 = \min \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$. Então*

$$C_{\infty, \dots, \infty; n_1, \dots, n_m} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m}.$$

Demonstração: Seja $f: \mathbb{N}^m \rightarrow [0, \infty)$ a função definida por

$$f(n_1, \dots, n_m) = C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m} \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{k=2}^{m-1} n_k^{1/2}.$$

Sabemos que, neste caso, para cada $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$, existe uma forma m -linear $A_0: \ell_2^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \times \dots \times \ell_\infty^{n_{m-1}} \times \ell_2^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_m}^{(m)}$$

tal que

$$\|A_0\| = C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m} \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{k=2}^{m-1} n_k^{1/2}.$$

Do Lema 2.10, existe uma forma m -linear $A_1: \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 tal que

$$\begin{aligned} \|A_1\| &\leq (n_1 n_m)^{1/2} C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m} \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{k=2}^{m-1} n_k^{1/2} \\ &= C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m} \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{1/2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Mas, da definição de $C_{\infty, \dots, \infty; n_1, \dots, n_m}$, é evidente que

$$C_{\infty, \dots, \infty; n_1, \dots, n_m} \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{1/2} \leq \|A_1\|. \quad (2.11)$$

Portanto, de (2.10) e (2.11), obtemos

$$C_{\infty, \dots, \infty; n_1, \dots, n_m} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m}$$

e o resultado segue. ■

Proposição 2.12 *Sejam $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ tais que $n_1 = \min \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$, $n_m = \max \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ e, para cada $k = 2, \dots, m$, existe uma matriz de Hadamard $\mathbf{H}_k = [h_{ij}^{(k)}]_{n_k \times n_k}$ de ordem n_k . Então, a forma m -linear*

$$A_0: \ell_2^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \times \dots \times \ell_\infty^{n_{m-1}} \times \ell_2^{n_m} \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} h_{i_1 i_2}^{(2)} h_{i_2 i_3}^{(3)} \dots h_{i_{m-1} i_m}^{(m)} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_m}^{(m)}$$

é tal que

$$\|A_0\| \leq n_m^{1/2} \prod_{k=2}^{m-1} n_k^{1/2} = \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{k=2}^{m-1} n_k^{1/2}.$$

Demonstração: Para cada $k = 2, \dots, m$, seja $u_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, n_k$, a i -ésima linha de $\mathbf{H}_k$. Logo,

$$\langle u_i^{(k)}, u_j^{(k)} \rangle = n_k \delta_{ij}. \quad (2.12)$$

Consideremos as matrizes quadradas de ordem n_m definidas por

$$\left[\mathfrak{h}_{ij}^{(k)} \right]_{n_m \times n_m} := \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k & \mathbf{0}_{n_k \times (n_m - n_k)} \\ \mathbf{0}_{(n_m - n_k) \times n_k} & \mathbf{0}_{(n_m - n_k) \times (n_m - n_k)} \end{bmatrix}$$

para cada $k = 2, \dots, m$. Dado $x^{(k)} \in \ell_{p_k}^{n_k}$, onde $p_k = 2$ se $k \in \{1, m\}$ e $p_k = \infty$ se $k \in \{2, \dots, m-1\}$, denotemos

$$y^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}, 0, \dots, 0) \in \ell_{p_k}^{n_m}.$$

Definamos

$$A_0: \ell_2^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \times \dots \times \ell_\infty^{n_{m-1}} \times \ell_2^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$$

por

$$\begin{aligned} A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m h_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^m x_{i_k}^{(k)} \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^m y_{i_k}^{(k)} \right). \end{aligned}$$

Supondo $x^{(k)} \in B_{\ell_{p_k}^{n_k}}$ para $k = 1, \dots, m$, temos $y^{(k)} \in B_{\ell_{p_k}^{n_m}}$ para cada $k = 1, \dots, m$ e, da desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} |A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| &= \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^m y_{i_k}^{(k)} \right) \right| \\ &\leq \sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \right) \right| |y_{i_m}^{(m)}| \\ &\leq \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \right) \right|^2 \right)^{1/2} \|y^{(m)}\|_2 \\ &\leq \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \right) \right|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \sum_{j_1, \dots, j_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \mathfrak{h}_{i_{m-1}i_m}^{(m)} \mathfrak{h}_{j_{m-1}i_m}^{(m)} \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

ficando subentendido que $\left(\prod_{r=a}^b \alpha_r \beta_r\right) = 1$ se $b < a$. Logo,

$$\begin{aligned} |A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| &\leq \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \sum_{i_m=1}^{n_m} \mathfrak{h}_{i_{m-1}i_m}^{(m)} \mathfrak{h}_{j_{m-1}i_m}^{(m)} \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \langle u_{i_{m-1}}^{(m)}, u_{j_{m-1}}^{(m)} \rangle \right)^{1/2} \end{aligned}$$

e, de (2.12), temos

$$\begin{aligned} |A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| &\leq \left(\sum_{\substack{i_{m-1}=1 \\ i_1, \dots, i_{m-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-2}=1}}^{n_m} \sum_{\substack{i_{m-1}=1 \\ i_1, \dots, i_{m-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-2} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-2} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \mathfrak{h}_{i_{m-2}i_{m-1}}^{(m-1)} \mathfrak{h}_{j_{m-2}i_{m-1}}^{(m-1)} |y_{i_{m-1}}^{(m-1)}|^2 n_m \right)^{1/2} \\ &\leq n_m^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-2} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-2} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \mathfrak{h}_{i_{m-2}i_{m-1}}^{(m-1)} \mathfrak{h}_{j_{m-2}i_{m-1}}^{(m-1)} \right)^{1/2} \\ &= n_m^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-2} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-2} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \langle u_{i_{m-2}}^{(m-1)}, u_{j_{m-2}}^{(m-1)} \rangle \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-2} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-2} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \langle u_{i_{m-2}}^{(m-1)}, u_{j_{m-2}}^{(m-1)} \rangle \right)^{1/2} \\ &= n_{m-1}^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_{m-2}=1 \\ i_1, \dots, i_{m-3}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-3}=1}}^{n_m} \sum_{\substack{i_{m-2}=1 \\ i_1, \dots, i_{m-3}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-3} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-3} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \mathfrak{h}_{i_{m-3}i_{m-2}}^{(m-2)} \mathfrak{h}_{j_{m-3}i_{m-2}}^{(m-2)} |y_{i_{m-2}}^{(m-2)}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq n_{m-1}^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_{m-2}=1 \\ i_1, \dots, i_{m-3}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-3}=1}}^{n_m} \sum_{\substack{i_{m-2}=1 \\ i_1, \dots, i_{m-3}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-3} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-3} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \mathfrak{h}_{i_{m-3}i_{m-2}}^{(m-2)} \mathfrak{h}_{j_{m-3}i_{m-2}}^{(m-2)} \right)^{1/2} \\ &= n_{m-1}^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-3}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-3} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-3} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \sum_{i_{m-2}=1}^{n_m} \mathfrak{h}_{i_{m-3}i_{m-2}}^{(m-2)} \mathfrak{h}_{j_{m-3}i_{m-2}}^{(m-2)} \right)^{1/2} \\ &= n_{m-1}^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-3}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-3}=1}}^N \left(\prod_{k=2}^{m-3} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-3} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \langle u_{i_{m-2}}^{(m-2)}, u_{j_{m-2}}^{(m-2)} \rangle \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} & |A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| \\ & \leq n_m^{1/2} n_{m-1}^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-3}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-3} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-3} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \langle u_{i_{m-2}}^{(m-2)}, u_{j_{m-2}}^{(m-2)} \rangle \right)^{1/2} \end{aligned}$$

e, repetindo este procedimento, inferimos finalmente que

$$\begin{aligned} |A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| & \leq n_m^{1/2} n_{m-1}^{1/2} \cdots n_2^{1/2} \left(\sum_{i_1=1}^{n_m} |y_{i_1}^{(1)}|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq n_m^{1/2} \prod_{k=2}^{m-1} n_k^{1/2} \end{aligned}$$

e a prova está completa. ■

Corolário 2.13 *Sejam $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ tais que $n_1 = \min \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ e $n_m = \max \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$. Seja $r_1 = n_1$ e, para cada $k = 2, \dots, m$ seja $r_k \geq n_k$ uma ordem de Hadamard, com $r_m = \max \{r_1, \dots, r_m\}$. Então,*

$$C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m} \leq (r_m/n_m)^{1/2} \prod_{k=2}^{m-1} (r_k/n_k)^{1/2}.$$

Demonstração: Segue da Proposição 2.12 que existe uma forma m -linear $A: \ell_2^{r_1} \times \ell_\infty^{r_2} \times \dots \times \ell_\infty^{r_{m-1}} \times \ell_2^{r_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{r_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{r_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \cdots z_{i_m}^{(m)}$$

tal que

$$\|A\| \leq r_m^{1/2} \prod_{k=2}^{m-1} r_k^{1/2}.$$

Se A_0 é a restrição de A a $\ell_2^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \times \dots \times \ell_\infty^{n_{m-1}} \times \ell_2^{n_m}$ então $\|A_0\| \leq \|A\|$ e o resultado segue. ■

Teorema 2.14 *Para cada $m \in \mathbb{N}$, vale*

$$C_{\infty, \dots, \infty, n, \dots, n} \leq (8/5)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Demonstração: É evidente que $C_{\infty, \dots, \infty; 1, \dots, 1} = 1$. Além disso, da Proposição 2.11 e do Corolário 2.13, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{\infty, \dots, \infty; 2, \dots, 2} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty; 2, \dots, 2} \leq 1, \\ C_{\infty, \dots, \infty; 3, \dots, 3} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty; 2; 3, \dots, 3} \leq (4/3)^{\frac{m-1}{2}}, \\ C_{\infty, \dots, \infty; 4, \dots, 4} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty; 2; 4, \dots, 4} \leq 1. \\ C_{\infty, \dots, \infty; 5, \dots, 5} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty; 2; 5, \dots, 5} \leq (8/5)^{\frac{m-1}{2}} \\ C_{\infty, \dots, \infty; 6, \dots, 6} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty; 2; 6, \dots, 6} \leq (8/6)^{\frac{m-1}{2}} \\ C_{\infty, \dots, \infty; 7, \dots, 7} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty; 2; 7, \dots, 7} \leq (8/7)^{\frac{m-1}{2}} \\ C_{\infty, \dots, \infty; 8, \dots, 8} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty; 2; 8, \dots, 8} \leq 1 \end{array} \right.$$

Para $9 \leq n \leq 64$, seja k o único inteiro positivo tal que

$$4k < n \leq 4(k+1). \quad (2.13)$$

Da Proposição 2.11 e do Corolário 2.13, bem como de (2.13),

$$\begin{aligned} C_{\infty, \dots, \infty; n, \dots, n} &\leq C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n, \dots, n} \leq \left(\frac{4(k+1)}{n} \right)^{\frac{m-1}{2}} \\ &= \left(\frac{4(k+1)}{4k} \right)^{\frac{m-1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{\frac{m-1}{2}} \leq (3/2)^{\frac{m-1}{2}} \end{aligned}$$

Se $n \geq 65$, fazendo uso dos conceitos e notações estabelecidos no Teorema 2.8, existe um par (t, k) em $\mathbb{N} \times \{8, \dots, 63\}$ tal que $n \in A_{t,k}$, ou seja,

$$8^t k < n \leq 8^t (k+1), \quad (2.14)$$

para algum $t \in \mathbb{N}$ e algum $8 \leq k \leq 63$. Da Proposição 2.11 e do Corolário 2.13, bem como de (2.14),

$$\begin{aligned} C_{\infty, \dots, \infty; n, \dots, n} &\leq C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n, \dots, n} \leq \left(\frac{8^t (k+1)}{n} \right)^{\frac{m-1}{2}} \\ &= \left(\frac{8^t (k+1)}{8^t k} \right)^{\frac{m-1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{\frac{m-1}{2}} \leq (9/8)^{\frac{m-1}{2}}. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova. ■

O jogo das luzes desbalanceadas de Gale-Berlekamp

O jogo das luzes desbalanceadas (unbalancing lights) ou jogo dos interruptores de Gale–Berlekamp (Gale–Berlekamp switching game) é um jogo de natureza combinatória proposto entre os anos de 1966 e 1971 de modo independente pelos matemáticos americanos David Gale e Elwyn Berlekamp. Neste capítulo, descrevemos sua dinâmica e como se relaciona com as formas bilineares de coeficientes ± 1 quando descrito por um modelo matemático. Nesta perspectiva, os resultados e técnicas desenvolvidos nos capítulos anteriores relativos à desigualdade de Bennett são utilizados para melhorar algumas das estimativas obtidas J. Carlson e D. Stolarski em [17]. O caminho inverso também é contemplado: os dados conhecidos relativos ao jogo das luzes desbalanceadas são utilizados para que a estimativa concernente à dominação universal das constantes $C_{\infty, \infty; n, n}$ da desigualdade de Bennett seja melhorada em alguns casos.

3.1 Sobre o jogo

O jogo das luzes desbalanceadas de Gale-Berlekamp, também conhecido como jogo dos interruptores (vide [4, Seção 2.5] e [39, Capítulo 6]), consiste em n^2 lâmpadas distribuídas em uma placa de modo a formarem uma matriz quadrada de ordem n . Para cada $i = 1, \dots, n$ existe um interruptor L_i que, ao ser acionado, inverte o estado de todas as lâmpadas da i -ésima linha, ligando aquelas que estavam desligadas e desligando as que estavam ligadas e, do mesmo modo, para cada $j = 1, \dots, n$, existe um interruptor C_j que, quando acionado, é responsável por inverter o estado de todas as lâmpadas da j -ésima coluna. Dada uma configuração inicial Θ_n de lâmpadas ligadas e desligadas, seja $i(\Theta_n)$ o menor número de lâmpadas ligadas que pode ser obtido a partir de Θ_n pelo acionamento dos interruptores $L_1, \dots, L_n, C_1, \dots, C_n$. O objetivo é encontrar o valor R_n de $i(\Theta_n^{(0)})$ onde $\Theta_n^{(0)}$ é uma pior configuração inicial possível, no sentido de que $i(\Theta_n^{(0)}) \geq i(\Theta_n)$ para todo Θ_n . Assim,

$$R_n := \max\{i(\Theta_n) : \Theta_n \text{ é uma configuração inicial das } n \times n \text{ lâmpadas}\}.$$

Algumas vezes o problema é posto do seguinte modo: desejamos encontrar a diferença máxima entre o número de lâmpadas desligadas e ligadas, assim como antes, a partir de

uma pior configuração inicial possível. Este valor será denotado por G_n . Observemos que, nestas circunstâncias,

$$G_n = (n^2 - R_n) - R_n = n^2 - 2R_n,$$

de onde extraímos que

$$R_n = \frac{1}{2} (n^2 - G_n). \quad (3.1)$$

A determinação dos valores exatos de R_n parece ser concebível apenas para valores pequenos de n , dado o envolvimento de argumentos de natureza combinatória. Os valores exatos de R_n para $n = 1, 2, \dots, 12$ foram obtidos por J. Carlson e D. Stolarski ([17]; ver também [14, 22]).

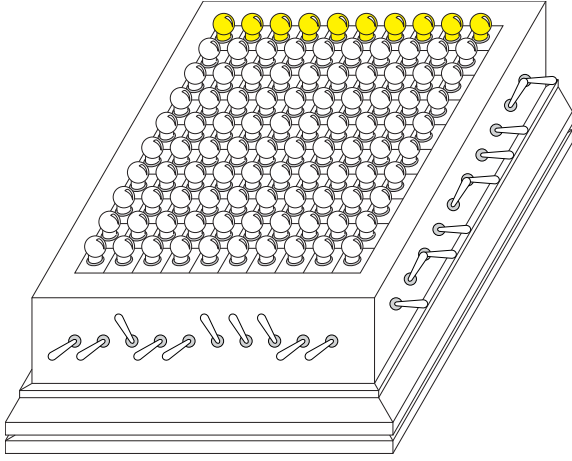


Figura 3.1: Uma matriz de lâmpadas de tamanho 10×10 em uma configuração inicial Θ_{10} tal que $i(\Theta_{10}) = 0$.

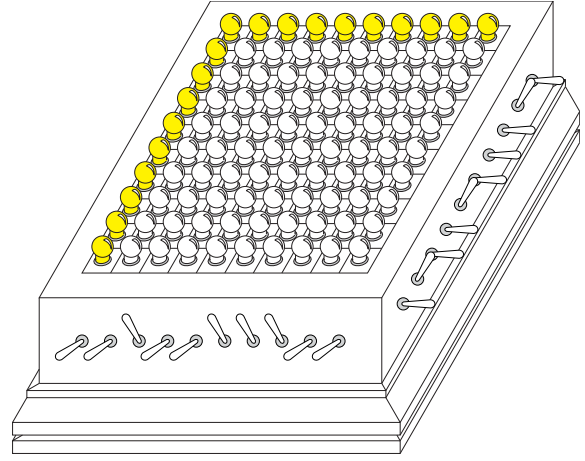


Figura 3.2: Uma matriz de lâmpadas de tamanho 10×10 em uma configuração inicial Θ_{10} tal que $i(\Theta_{10}) = 1$.

A abordagem natural para modelarmos o jogo das luzes desbalanceadas é identificar cada configuração Θ_n com uma matriz $(a_{ij})_{n \times n}$ com $a_{ij} \in \{-1, 1\}$ de modo que, dizer que $a_{ij} = 1$ significa dizer que a lâmpada da i -ésima linha e j -ésima coluna está ligada e, analogamente, dizer que $a_{ij} = -1$ significa dizer que a lâmpada da i -ésima linha e j -ésima coluna está desligada. Deste modo, fazer uso dos interruptores $L_1, \dots, L_n$ é equivalente a considerar um produto de matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_1 & \cdots & a_{1n}x_1 \\ a_{21}x_2 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_n & a_{n2}x_n & \cdots & a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

onde $x_i \in \{-1, 1\}$ para todo i , de modo que $x_i = 1$ significa dizer que o interruptor L_i não foi acionado, ao passo que dizer que $x_i = -1$ significa dizer que o interruptor L_i foi acionado. Do mesmo modo, fazer uso dos interruptores $C_1, \dots, C_n$ é equivalente a

considerar um produto de matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}y_1 & a_{12}y_2 & \cdots & a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1 & a_{22}y_2 & \cdots & a_{2n}y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}y_1 & a_{n2}y_2 & \cdots & a_{nn}y_n \end{bmatrix}$$

onde $y_i \in \{-1, 1\}$ para todo j , de modo que $y_j = 1$ significa dizer que o interruptor C_j não foi acionado, ao passo que dizer que $y_j = -1$ significa dizer que o interruptor C_j foi acionado.

Sejam

$$\Theta_n^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta_n^{(2)} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

duas configurações do jogo das luzes desbalanceadas. Diremos que $\Theta_n^{(1)}$ e $\Theta_n^{(2)}$ são **configurações equivalentes** se existem $(x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^n \in \{-1, 1\}^n$ tais que

$$\Theta_n^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \times \Theta_n^{(1)} \times \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Em verdade, é fácil ver que (3.2) define de modo natural uma relação de equivalência. A reflexividade é evidente. A transitividade decorre da associatividade do produto de matrizes bem como do fato de que o produto de matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix}, \quad (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \quad (3.3)$$

produz uma matriz do mesmo tipo. A simetria é garantida pelo fato de que cada matriz da forma (3.3) possui a si própria como inversa. Dito de outro modo, as configurações $\Theta_n^{(1)}$ e $\Theta_n^{(2)}$ são equivalentes se é possível chegar em uma delas tendo a outra como ponto de partida apenas pelo uso dos interruptores $L_1, \dots, L_n, C_1, \dots, C_n$. Fica evidente que, se $\Theta_n^{(1)}$ e $\Theta_n^{(2)}$ são configurações equivalentes, então $i(\Theta_n^{(1)}) = i(\Theta_n^{(2)})$.

Observemos que cada uma das matrizes

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$$

em (3.2) pode ser escolhida de 2^n formas diferentes. Notemos que, se $\Theta_n^{(1)}$ é uma configuração dada, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{z}$ representam acionamentos dos interruptores $L_1, \dots, L_n$ e $\mathbf{y}$ e $\mathbf{w}$ representam acionamentos dos interruptores $C_1, \dots, C_n$, então

$$\mathbf{x} \times \Theta_n^{(1)} \times \mathbf{y} = \mathbf{z} \times \Theta_n^{(1)} \times \mathbf{w} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{z} \\ \text{e} \\ \mathbf{y} = \mathbf{w} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \mathbf{x} = -\mathbf{z} \\ \text{e} \\ \mathbf{y} = -\mathbf{w} \end{cases}$$

e, conseqüentemente, cada classe de equivalência possui 2^{2n-1} elementos (pois cada elemento da classe que contém $\Theta_n^{(1)}$ é da forma $\mathbf{x} \times \Theta_n^{(1)} \times \mathbf{y}$). Como a configuração inicial $\Theta_n^{(1)}$ pode ser escolhida de 2^{n^2} formas distintas, temos um total de 2^{n^2-2n+1} classes de equivalência.

Exemplo 3.1 Para $n = 2$, temos as seguintes classes de equivalência de configurações iniciais:

$$\mathcal{I}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$\mathcal{I}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Daqui, percebemos claramente que

$$i(\Theta_2) = \begin{cases} 0, & \text{se } \Theta_2 \in \mathcal{I}_1, \\ 1, & \text{se } \Theta_2 \in \mathcal{I}_2, \end{cases}$$

de onde segue que $R_2 = 1$.

Agora, observemos que, se $(\varepsilon_{ij})_{n \times n}$ é tal que $\varepsilon_{ij} \in \{-1, 1\}$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$, então

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} \right|$$

corresponde à diferença em módulo entre o número de entradas iguais a -1 e o número de entradas iguais a 1 . Deste modo, fica claro que, se $\Theta_n = (a_{ij})_{n \times n}$ é uma configuração inicial do jogo das luzes desbalanceadas, então

$$\max_{(x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^n \in \{-1, 1\}^n} \left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j \right|$$

corresponde à diferença máxima que se pode obter entre o número de lâmpadas desligadas e o número de lâmpadas ligadas a partir de Θ_n apenas pelo uso dos interruptores $L_1, \dots, L_n, C_1, \dots, C_n$. Assim, obtemos

$$G_n = \min \left\{ \max_{(x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^n \in \{-1, 1\}^n} \left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j \right| : a_{ij} = -1 \text{ ou } +1 \right\}.$$

Do ponto de vista da teoria de operadores multilineares, a aplicação que a cada configuração inicial $\Theta_n = (a_{ij})_{n \times n}$ do jogo das luzes desbalanceadas associa a forma bilinear $A: \ell_\infty^n \times \ell_\infty^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \sum_{i,j=1}^n \pm x_i y_j \quad (3.4)$$

define, claramente, uma correspondência biunívoca entre o conjunto das configurações iniciais do jogo das luzes desbalanceadas e a coleção das formas bilineares definidas sobre $\ell_\infty^n \times \ell_\infty^n$ com coeficientes ± 1 . Do Exemplo C.2 e do Corolário C.14,

$$\max_{(x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^n \in \{-1, 1\}^n} \left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j \right| = \max_{(x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^n \in \text{ext}(B_{\ell_\infty^n})} \left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j \right| = \|A\|,$$

ou seja,

$$G_n = \min \{ \|A\| : A: \ell_\infty^n \times \ell_\infty^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ é uma forma bilinear como em (3.4)} \}$$

e, de (1.5),

$$G_n = C_{\infty, \infty; n, n} n^{3/2} \quad (3.5)$$

Uma aplicação imediata da desigualdade 4/3 de Littlewood (vide [5, Teorema 3.1]) mostra que

$$n^{3/2} \leq \sqrt{2} G_n. \quad (3.6)$$

3.2 Melhores estimativas para R_n

De (3.5) e (3.6), observamos que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{G_n}{n^{3/2}} = C_{\infty, \infty; n, n}.$$

Do que vimos no Capítulo 1, segue que, dado $\varepsilon > 0$, se n é suficientemente grande, então

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{G_n}{n^{3/2}} \leq 1 + \varepsilon,$$

de onde segue que G_n é dominado assintoticamente por $n^{3/2}$. Por outro lado, do Teorema 2.8, obtemos a seguinte estimativa para $G_n/n^{3/2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{G_n}{n^{3/2}} \leq \sqrt{8/5} \quad (3.7)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nesta seção melhoramos a cota superior $\sqrt{8/5}$ em (3.7) bem como fornecemos estimativas mais precisas para R_n e G_n do que as apresentadas em [17] quando $n = 15, 17, 18, 19$.

Sabemos do Lema 1.1 que $G_n \leq n^{3/2}$ sempre que n é uma ordem de Hadamard e, portanto, de (3.1),

$$R_n \geq \frac{1}{2} (n^2 - n\sqrt{n}) \quad (3.8)$$

para toda ordem de Hadamard n . (A desigualdade acima também aparece em [14, página 168].) No próximo teorema, utilizamos as técnicas da Seção 2.2 para obtermos uma extensão de (3.8) e fornecer estimativas para os casos $n = 15, 17, 18, 19$ que melhoram as respectivas estimativas da Tabela 3.1 abaixo.

Tabela 3.1: Estimativas para R_n .

n	Brown-Spencer, 1971	Fishburn-Sloane, 1989	Carlson-Stolarski, 2004
1	= 0	= 0	= 0
2	= 1	= 1	= 1
3	= 2	= 2	= 2
4	= 4	= 4	= 4
5	= 7	= 7	= 7
6	—	= 11	= 11
7	—	= 16	= 16
8	≥ 22	= 22	= 22
9	—	= 27	= 27
10	≥ 32	—	= 35
11	—	—	= 43
12	—	—	= 54
13	—	—	≥ 60
14	—	—	≥ 71
15	≥ 72	—	≥ 82
16	≥ 96	—	≥ 94
17	—	—	≥ 106
18	—	—	≥ 120
19	—	—	≥ 132
20	≥ 156	—	≥ 148

Teorema 3.2 $R_{15} \geq 83$, $R_{17} \geq 107$, $R_{18} \geq 122$, $R_{19} \geq 139$.

Demonstração: Dado $n \in \mathbb{N}$, seja k_n a menor ordem de Hadamard tal que

$$n \leq k_n.$$

Se $[h_{ij}]_{k_n \times k_n}$ é uma matriz de Hadamard, então, obviamente,

$$G_n \leq \max_{x_i, y_j \in \{-1, 1\}} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} x_i y_j \right|. \quad (3.9)$$

Sejam $z = (z_1, \dots, z_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \ell_2^n$ tais que $\|z\|_2, \|w\|_2 \leq 1$. Procedendo exatamente como no Lema 2.6, concluímos que

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} z_i w_j \right| \leq \sqrt{k_n}.$$

Logo, considerando a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(n) = \sqrt{k_n}$, segue do Lema 1.7 que

$$\max_{x_i, y_i \in \{-1, 1\}} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} x_i y_j \right| \leq n \sqrt{k_n}. \quad (3.10)$$

Definindo $G_{2,n} := n\sqrt{k_n}$ e combinando (3.9) e (3.10), temos

$$G_n \leq G_{2,n}.$$

Da desigualdade acima e de (3.1), para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$R_n \geq \frac{1}{2} (n^2 - G_{2,n}). \quad (3.11)$$

Como

$$\begin{aligned} G_{2,15} &= 15\sqrt{16} = 60, \\ G_{2,17} &= 17\sqrt{20} \approx 76.02, \\ G_{2,18} &= 18\sqrt{20} \approx 80.49, \\ G_{2,19} &= 19\sqrt{20} \approx 84.97, \end{aligned}$$

concluímos de (3.11) que

$$R_{15} \geq 83, \quad R_{17} \geq 107, \quad R_{18} \geq 122, \quad R_{19} \geq 139,$$

como desejado. ■

Tabela 3.2: Novas estimativas para R_n quando $n = 15, 17, 18, 19$

n	15	17	18	19
R_n	≥ 83	≥ 107	≥ 122	≥ 139

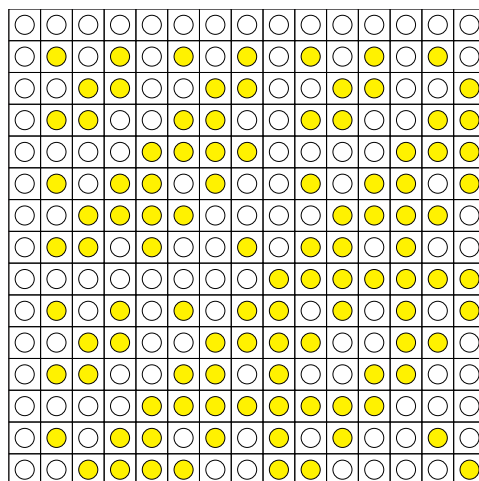


Figura 3.3: Configuração inicial do jogo das luzes gerando $R_{15} \geq 83$.

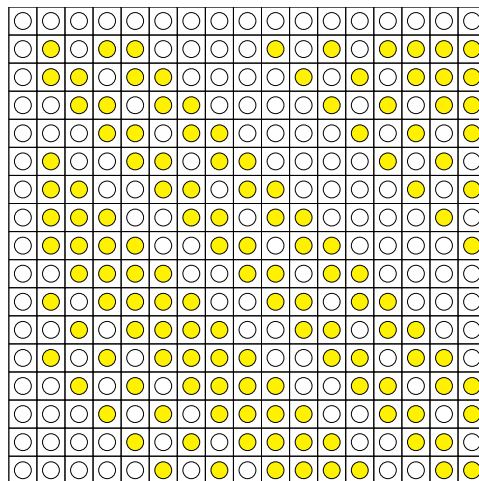


Figura 3.4: Configuração inicial do jogo das luzes gerando $R_{17} \geq 107$.

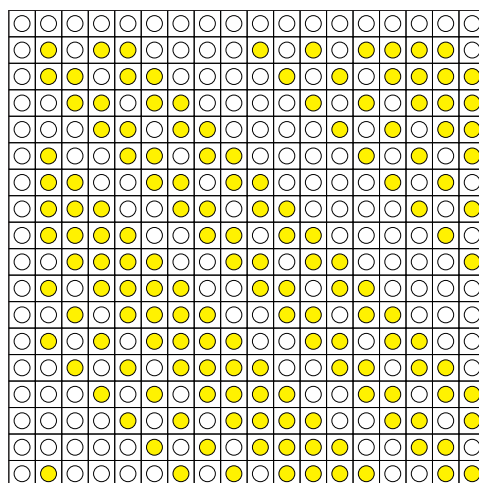
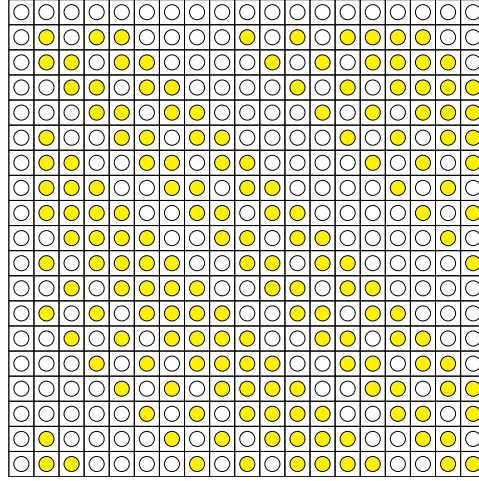


Figura 3.5: Configuração inicial do jogo das luzes gerando $R_{18} \geq 122$.

Figura 3.6: Configuração inicial do jogo das luzes gerando $R_{19} \geq 139$.

3.3 Constantes da desigualdade de Bennett para $p_1 = p_2 = \infty$

Agora, combinamos os resultados da seção anterior e da Seção 2.2 para melhorar a estimativa (3.7) e fornecer melhores constantes para a desigualdade de Bennett quando $p_1 = p_2 = \infty$ e $n_1 = n_2 = n$.

Segue de (3.1) que

$$G_n = n^2 - 2R_n.$$

Sabemos da Proposição 2.1 que

$$C_{\infty, \infty; n, n} \leq C_{2, 2; n, n}, \quad (3.12)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, usando as Tabelas 3.1 e 3.2, (3.12) e o Lema 2.6 (ou a parte inicial da prova do Lema 1.8), temos

Tabela 3.3: Cotas superiores para $C_{\infty, \infty; n, n}$ com $1 \leq n \leq 20$.

n	R_n	G_n	$C_{\infty, \infty; n, n} = G_n/n^{3/2}$	n	R_n	G_n	$C_{\infty, \infty; n, n} = G_n/n^{3/2}$
1	= 0	= 1	= 1	11	= 43	= 35	= $35/11^{3/2} < 0.96$
2	= 1	= 2	= $2/2^{3/2} < 0.71$	12	= 54	= 36	= $36/12^{3/2} < 0.87$
3	= 2	= 5	= $5/3^{3/2} < 0.97$	13	≥ 60	≤ 49	$\leq 49/13^{3/2} < 1.05$
4	= 4	= 8	= $8/4^{3/2} = 1$	14	≥ 71	≤ 54	$\leq 54/14^{3/2} < 1.04$
5	= 7	= 11	= $11/5^{3/2} < 0.99$	15	≥ 83	≤ 59	$\leq 59/15^{3/2} < 1.02$
6	= 11	= 14	= $14/6^{3/2} < 0.96$	16	—	—	≤ 1
7	= 16	= 17	= $17/7^{3/2} < 0.92$	17	≥ 107	≤ 75	$\leq 75/17^{3/2} < 1.08$
8	= 22	= 20	= $20/8^{3/2} < 0.89$	18	≥ 122	≤ 80	$\leq 80/18^{3/2} < 1.05$
9	= 27	= 27	= $27/9^{3/2} = 1$	19	≥ 139	≤ 83	$\leq 83/19^{3/2} < 1.01$
10	= 35	= 30	= $30/10^{3/2} < 0.95$	20	—	—	≤ 1

Teorema 3.3 *Para todo n , temos*

$$0.70 \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{G_n}{n^{3/2}} \leq 75/17^{3/2} \approx 1.07.$$

Demonstração: Tudo que nos resta fazer é estabelecer a estimativa superior. Segue da Tabela 3.3 que é suficiente considerarmos o caso em que $n > 20$, uma vez que o limite superior fornecido por ela para $n = 1, \dots, 20$ é $75/17^{3/2}$. Se $21 \leq n \leq 664$, seja $k \in \{5, \dots, 165\}$ tal que $4k < n \leq 4(k+1)$. Assim, de (3.12) e do Lema 2.6, temos

$$\frac{G_n}{n^{3/2}} = C_{\infty, \infty; n, n} \leq C_{2, 2; n, n} \leq \left(\frac{4(k+1)}{n} \right)^{1/2} \leq \left(\frac{4(k+1)}{4k+1} \right)^{1/2} \leq \sqrt{\frac{24}{21}}.$$

Agora, para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada $k \in \{8, \dots, 63\}$ seja $A_{m,k}$ como no Teorema 2.8, isto é,

$$A_{m,k} := \{8^m k + 1, \dots, 8^m (k+1)\}.$$

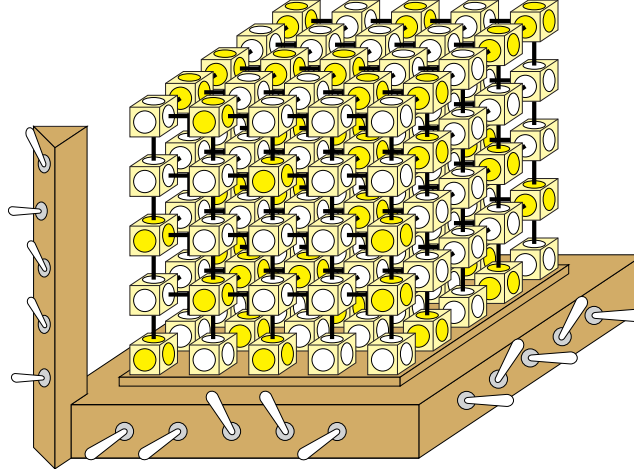
Fixado $n \geq 665$, sabemos que existe $(m, k) \in \mathbb{N} \times \{8, \dots, 63\}$ tal que $n \in A_{m,k}$ e, portanto, de (3.12) e do Lema 2.6, obtemos

$$\frac{G_n}{n^{3/2}} = C_{\infty, \infty; n, n} \leq C_{2, 2; n, n} \leq \left(\frac{8^m (k+1)}{n} \right)^{1/2} < \left(\frac{8^m (k+1)}{8^m k} \right)^{1/2} \leq \sqrt{\frac{9}{8}}.$$

Como $\sqrt{24/21}$ e $\sqrt{9/8}$ são menores do que $75/17^{3/2}$, a prova está completa. ■

3.4 Algumas considerações em dimensões mais altas

O jogo das luzes desbalanceadas de Gale–Berlekamp possui diversas variantes naturais (vide, por exemplo, [7, 15, 36] e suas referências); indicamos também a leitura de [26] para um resultado correlato recente. Estamos interessados em sua generalização a dimensões mais altas (vide [5]). Seja $m \geq 2$ um inteiro e seja $(a_{j_1 \dots j_m})_{n \times \dots \times n}$ uma m -matriz de lâmpadas de ordem n . Assim como no caso bidimensional, $a_{j_1 \dots j_m} = 1$ indicará uma lâmpada ligada e $a_{j_1 \dots j_m} = -1$ indicará uma lâmpada desligada. Suponhamos também que, para cada $k = 1, \dots, m$ e cada $j_k = 1, \dots, n$ existe um interruptor $x_{j_k}^{(k)}$ que, ao ser acionado, inverte o estado de todas as lâmpadas $a_{j_1 \dots j_m}$ com j_k fixo, ligando as que estavam ligadas e desligando as que estavam desligadas. Mais uma vez, escrever $x_{j_k}^{(k)} = 1$ indicará que este interruptor não foi acionado e escrever $x_{j_k}^{(k)} = -1$ indicará que o mesmo foi acionado. O objetivo é maximizar a diferença entre o número de lâmpadas ligadas e o número de lâmpadas desligadas.


 Figura 3.7: Versão tridimensional do jogo das luzes para $n = 5$.

Assim como no caso bidimensional, maximizar a diferença entre o número de lâmpadas ligadas e desligadas é equivalente a determinar

$$S_{m,n} = \min \left\{ \max_{(x_{j_1}^{(1)})_{j_1=1}^n, \dots, (x_{j_m}^{(m)})_{j_m=1}^n \in \{-1,1\}^n} \left| \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n a_{j_1 \dots j_m} x_{j_1}^{(1)} \cdots x_{j_m}^{(m)} \right| : a_{j_1 \dots j_m} = \pm 1 \right\},$$

Mais uma vez, a aplicação que a cada configuração $(a_{j_1 \dots j_m})_{n \times \dots \times n}$ associa a forma m -linear $A_{m,n}: \ell_\infty^n \times \dots \times \ell_\infty^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$A_{m,n}(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n a_{j_1 \dots j_m} x_{j_1}^{(1)} \cdots x_{j_m}^{(m)} = \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n \pm x_{j_1}^{(1)} \cdots x_{j_m}^{(m)} \quad (3.13)$$

é uma correspondência biunívoca. Do Exemplo C.2 e do Corolário C.14,

$$\begin{aligned} \|A_{m,n}\| &= \max_{(x_{j_1}^{(1)})_{j_1=1}^n, \dots, (x_{j_m}^{(m)})_{j_m=1}^n \in \text{ext}(B_{\ell_\infty^n})} \left| \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n a_{j_1 \dots j_m} x_{j_1}^{(1)} \cdots x_{j_m}^{(m)} \right| \\ &= \max_{(x_{j_1}^{(1)})_{j_1=1}^n, \dots, (x_{j_m}^{(m)})_{j_m=1}^n \in \{-1,1\}^n} \left| \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n a_{j_1 \dots j_m} x_{j_1}^{(1)} \cdots x_{j_m}^{(m)} \right| \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$S_{m,n} = \min \{ \|A_{m,n}\| : A_{m,n} \text{ é uma forma } m\text{-linear como em (3.13)} \}. \quad (3.14)$$

Para ilustrar como as estimativas das constantes da desigualdade KSZ são associadas a este contexto, notemos que, combinando (3.14) e o Lema 1.1, obtemos $G_{16} \leq 64$ de onde segue que $R_{16} \geq 96$, melhorando a estimativa $R_{16} \geq 94$ fornecida em [16, Teorema 8].

Como de costume, a notação $o(1)$ significa que, na variável n , temos $\lim_{n \rightarrow \infty} o(1) = 0$. O Teorema 1.2 garante que

$$S_{m,n} \leq (1 + o(1)) n^{\frac{m+1}{2}}$$

e, combinando nossas estimativas com as que são fornecidas em [5, Teorema 3.2] e [4, Teorema 2.5.1], obtemos

$$2^{-\frac{1}{2}\psi(m)-\frac{1}{2}\gamma} \prod_{k=2}^m \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3k-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right)^{\frac{k}{2k-2}} + o(1) \leq \frac{S_{m,n}}{n^{\frac{m+1}{2}}} \leq 1 + o(1),$$

onde ψ é a função digamma e γ é a constante de Euler-Mascheroni. Por exemplo, para $m \in \{2, 3\}$ temos

$$\begin{aligned} 0.797 + o(1) &\leq \frac{S_{2,n}}{n^{3/2}} \leq 1 + o(1), \\ 0.694 + o(1) &\leq \frac{S_{3,n}}{n^2} \leq 1 + o(1). \end{aligned}$$

No que diz respeito à dominação universal, o Teorema 2.14 garante que

$$S_{m,n} \leq (8/5)^{\frac{m-1}{2}} n^{\frac{m+1}{2}}$$

quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$.

Apêndice A

Matrizes de Hadamard e densidade assintótica

Uma matriz quadrada $\mathbf{H} = [h_{ij}]_{n \times n}$ é dita uma **matriz de Hadamard** se $h_{ij} \in \{-1, 1\}$ para todo i e todo j e

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^\top = n\mathbf{I}_n,$$

onde $\mathbf{H}^\top$ denota a transposta de $\mathbf{H}$ e $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n .

Exemplo A.1 As matrizes

$$[1], \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

são de Hadamard.

Observamos que, se $\mathbf{H}$ é uma matriz quadrada de ordem n e $u_1, \dots, u_n$ são seus vetores linha (coluna), então $\mathbf{H}$ é uma matriz de Hadamard se, e somente se

$$\langle u_i, u_j \rangle = n\delta_{ij}$$

para todo i e todo j , onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Isto nos revela que, em particular, os vetores linha (coluna) de uma matriz de Hadamard de ordem n são dois a dois ortogonais e possuem norma euclidiana $n^{1/2}$. Neste caso, por um lado, $|\det(H)|$ é claramente um número inteiro positivo e, por outro, é o volume do n -cubo determinado por $u_1, \dots, u_n$ (vide [29, Capítulo 19]), isto é,

$$|\det(\mathbf{H})| = \|u_1\| \cdots \|u_n\| = n^{n/2}.$$

Assim, a fim de que $n^{n/2}$ seja inteiro, n precisa ser, necessariamente, um quadrado perfeito ou um número par. Isso mostra que não existem matrizes de Hadamard de todas as ordens. Portanto, se n é um inteiro positivo para o qual existe uma matriz de Hadamard de ordem n , então n será dito um **inteiro de Hadamard** ou uma **ordem de Hadamard**.

É evidente que quando permutamos duas linhas (ou colunas) quaisquer de uma matriz de Hadamard, a matriz obtida por este processo é ainda uma matriz de Hadamard. Além disso, é claro que se $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ e $\mathbf{H} = [h_{ij}]_{n \times n}$ é uma matriz de Hadamard, então

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 h_{11} & \varepsilon_1 h_{12} & \cdots & \varepsilon_1 h_{1n} \\ \varepsilon_2 h_{21} & \varepsilon_2 h_{22} & \cdots & \varepsilon_2 h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_n h_{n1} & \varepsilon_n h_{n2} & \cdots & \varepsilon_n h_{nn} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{H} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 h_{11} & \varepsilon_2 h_{12} & \cdots & \varepsilon_n h_{1n} \\ \varepsilon_1 h_{21} & \varepsilon_2 h_{22} & \cdots & \varepsilon_n h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1 h_{n1} & \varepsilon_2 h_{n2} & \cdots & \varepsilon_n h_{nn} \end{bmatrix}$$

também o são. Logo, se n é uma ordem de Hadamard, é sempre possível exibir uma matriz de Hadamard $\mathbf{H} = [h_{ij}]_{n \times n}$ do tipo

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix}$$

na qual todas as entradas da primeira linha e da primeira coluna são iguais a 1. Uma matriz de Hadamard nestas condições será dita uma matriz de Hadamard **normalizada**.

Teorema A.2 *Se n é uma ordem de Hadamard, então*

$$n \in \{1, 2\} \cup \{4k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstração: Já sabemos do Exemplo A.1 que existem matrizes de Hadamard de ordens 1 e 2. Portanto, seja $n > 2$ uma ordem de Hadamard e $\mathbf{H} = [h_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz de Hadamard normalizada. Seja u_i o i -ésimo vetor linha de $\mathbf{H}$. Como $u_1 = (1, 1, \dots, 1)$ e u_1 e u_i são linearmente independentes sempre que $i \neq 1$ (pois, se $i \neq 1$, então $u_1 \perp u_i$), u_i deve ter pelo menos uma entrada igual a -1 , pois, caso contrário, deveríamos ter $u_i = u_1$ (o que, evidentemente, é um absurdo). Deste modo, para $i \neq 1$, sejam x_i e y_i , respectivamente, a quantidade de entradas iguais a 1 e a quantidade de entradas iguais a -1 de u_i . Observemos inicialmente que $x_i \neq 0$ pois a primeira entrada de u_i é sempre 1 e $y_i \neq 0$ pelo que acabamos de ver. Além disso, notemos que

$$\begin{cases} x_i + y_i = n \\ x_i - y_i = \langle u_1, u_i \rangle = 0 \end{cases}$$

de onde vem que

$$x_i = y_i = n/2.$$

sempre que $i \neq 1$. Segue daqui que, em particular, n é par. Reordenando as colunas de $\mathbf{H}$, se necessário, podemos, sem perda de generalidade, supor que

$$u_2 = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n/2 \text{ entradas}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n/2 \text{ entradas}}).$$

Notemos que essa reordenação não afeta u_1 . Observemos agora que encontramos entradas 1 e -1 nas $n/2$ primeiras entradas de u_3 e o mesmo vale para as suas últimas $n/2$ entradas pois, caso contrário, como u_2 e u_3 possuem exatamente $n/2$ entradas iguais a 1 e $n/2$ entradas iguais a -1 , teríamos $u_2 = \pm u_3$, contrariando o fato de que u_2 e u_3 são linearmente independentes (dado que $u_2 \perp u_3$). Assim, reordenando separadamente as $n/2$ primeiras colunas e as $n/2$ últimas colunas de $\mathbf{H}$ se necessário (e observando que isso não afeta u_1 e u_2), podemos supor

$$u_3 = (\underbrace{1, \dots, 1, -1, \dots, -1}_{n/2 \text{ entradas}}, \underbrace{1, \dots, 1, -1, \dots, -1}_{n/2 \text{ entradas}}).$$

Em suma, sem perda de generalidade, podemos supor que as três primeiras linhas de $\mathbf{H}$ são dadas por

$$\begin{array}{cccccccccccc} u_1: & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ u_2: & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & -1 \\ u_3: & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{x \text{ colunas}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{y \text{ colunas}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{z \text{ colunas}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{w \text{ colunas}}$

Daqui, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} n = x + y + z + w \\ 0 = \langle u_1, u_2 \rangle = x + y - z - w \\ 0 = \langle u_1, u_3 \rangle = x - y + z - w \\ 0 = \langle u_2, u_3 \rangle = x - y - z + w \end{cases},$$

cujas solução é

$$x = y = z = w = n/4.$$

Como $n/4$ deve ser um número inteiro, concluímos a prova. ■

Um problema que permanece aberto é a validade da recíproca deste resultado. Mais precisamente, não se sabe se todo múltiplo de 4 é uma ordem de Hadamard.

Teorema A.3 (Sylvester) *Se $\mathbf{H}$ é uma matriz de Hadamard de ordem n , então*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H} & -\mathbf{H} \end{bmatrix}$$

é uma matriz de Hadamard de ordem $2n$.

Demonstração: Sejam $u_1, \dots, u_n$ os vetores linha de $\mathbf{H}$. Então,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H} & -\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H} & -\mathbf{H} \end{bmatrix}^\top &= \begin{bmatrix} u_1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & u_n \\ u_1 & -u_1 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & -u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & \cdots & u_n & -u_1 & \cdots & -u_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2\langle u_1, u_1 \rangle & \cdots & 2\langle u_1, u_n \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2\langle u_n, u_1 \rangle & \cdots & 2\langle u_n, u_n \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2\langle u_1, u_1 \rangle & \cdots & 2\langle u_1, u_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2\langle u_n, u_1 \rangle & \cdots & 2\langle u_n, u_n \rangle \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n \end{bmatrix} = 2n\mathbf{I}_{2n}.
 \end{aligned}$$

■

Exemplo A.4 Segue do Teorema de Sylvester que, para todo $t \in \mathbb{N}$, existe uma matriz de Hadamard de ordem 2^t . Com efeito, basta considerar a sequência definida recursivamente por

$$\mathbf{H}_1 = [1] \quad e \quad \mathbf{H}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_n & \mathbf{H}_n \\ \mathbf{H}_n & -\mathbf{H}_n \end{bmatrix},$$

cujos quatro primeiros termos são apresentados no Exemplo A.1.

Definição A.5 Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times m}$ uma matriz de ordem m com entradas escalares. Se $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m$ são matrizes de ordem n com entradas escalares então o **produto de Kronecker** (ou **produto direto**) $\mathbf{A} \otimes [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m]$ é a matriz quadrada de ordem mn definida por

$$\mathbf{A} \otimes [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m] := \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B}_1 & a_{12}\mathbf{B}_1 & \cdots & a_{1m}\mathbf{B}_1 \\ a_{21}\mathbf{B}_2 & a_{22}\mathbf{B}_2 & \cdots & a_{2m}\mathbf{B}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B}_m & a_{m2}\mathbf{B}_m & \cdots & a_{mm}\mathbf{B}_m \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Quando $\mathbf{B}_1 = \cdots = \mathbf{B}_m = \mathbf{B}$, escreveremos simplesmente $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = [a_{ij}\mathbf{B}]$.

Por exemplo, a construção de Sylvester apresentada no Teorema A.3 é dada pelo produto de Kronecker

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{H},$$

onde $\mathbf{H}$ é uma matriz de Hadamard de ordem n .

O próximo resultado estende de modo natural o Teorema de Sylvester.

Teorema A.6 *Sejam $\mathbf{H}_1 = [h_{ij}^{(1)}]_{m \times m}$ e $\mathbf{H}_2 = [h_{ij}^{(2)}]_{n \times n}$ matrizes de Hadamard de ordens m e n , respectivamente. Então $\mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{H}_2$ é uma matriz de Hadamard de ordem mn .*

Demonstração: Para cada $i \in \{1, 2, \dots, mn\}$, seja u_i a i -ésima linha de $\mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{H}_2$. Sejam $i, j \in \{1, 2, \dots, mn\}$ e r_1 e r_2 , respectivamente, os restos na divisão de i e j por n . Definamos

$$r = \begin{cases} n, & \text{se } r_1 = 0, \\ r_1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad s = \begin{cases} n, & \text{se } r_2 = 0, \\ r_2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Finalmente, sejam p, q os únicos inteiros positivos tais que $(p-1)n < i \leq pn$ e $(q-1)n < j \leq qn$. Então,

$$\begin{aligned} u_i &= (h_{p1}^{(1)}h_{r1}^{(2)}, \dots, h_{p1}^{(1)}h_{rn}^{(2)}, \dots, h_{pm}^{(1)}h_{r1}^{(2)}, \dots, h_{pm}^{(1)}h_{rn}^{(2)}) \\ u_j &= (h_{q1}^{(1)}h_{s1}^{(2)}, \dots, h_{q1}^{(1)}h_{sn}^{(2)}, \dots, h_{qm}^{(1)}h_{s1}^{(2)}, \dots, h_{qm}^{(1)}h_{sn}^{(2)}) \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_j \rangle &= h_{p1}^{(1)}h_{r1}^{(2)}h_{q1}^{(1)}h_{s1}^{(2)} + \dots + h_{p1}^{(1)}h_{rn}^{(2)}h_{q1}^{(1)}h_{sn}^{(2)} \\ &\quad + \dots + h_{pm}^{(1)}h_{r1}^{(2)}h_{qm}^{(1)}h_{s1}^{(2)} + \dots + h_{pm}^{(1)}h_{rn}^{(2)}h_{qm}^{(1)}h_{sn}^{(2)} \\ &= h_{p1}^{(1)}h_{q1}^{(1)} \left(h_{r1}^{(2)}h_{s1}^{(2)} + \dots + h_{rn}^{(2)}h_{sn}^{(2)} \right) + \dots + h_{pm}^{(1)}h_{qm}^{(1)} \left(h_{r1}^{(2)}h_{s1}^{(2)} + \dots + h_{rn}^{(2)}h_{sn}^{(2)} \right) \\ &= \left(h_{p1}^{(1)}h_{q1}^{(1)} + \dots + h_{pm}^{(1)}h_{qm}^{(1)} \right) \left(h_{r1}^{(2)}h_{s1}^{(2)} + \dots + h_{rn}^{(2)}h_{sn}^{(2)} \right) \\ &= (m\delta_{pq})(n\delta_{rs}). \end{aligned}$$

Observemos agora que, se $i \neq j$, então ou $p \neq q$ ou $r \neq s$. Logo, $\delta_{pq} = 0$ ou $\delta_{rs} = 0$ e, em todo caso, teremos $\langle u_i, u_j \rangle = 0$. Se $i = j$, então $p = q$ e $r = s$. Neste caso, $\delta_{pq} = 1 = \delta_{rs}$ e $\langle u_i, u_j \rangle = mn$. Isso mostra que $\mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{H}_2$ é uma matriz de Hadamard. ■

Exemplo A.7 Como

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

são matrizes de Hadamard, segue do Teorema A.6 que, dados $i, j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, existe uma matriz de Hadamard de ordem $4^i 12^j$.

O próximo resultado pode ser encontrado em [31, Observação 3.6] e, no que segue, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor do que ou igual a x .

Teorema A.8 (Teorema da Aproximação de Dirichlet) *Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então*

$$\{m + n\alpha : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$.

Demonstração: Mostraremos que dados $x_0 \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}$, existem $m, n \in \mathbb{Z}$, tais que

$$m + n\alpha \in [x_0 - 1/N, x_0 + 1/N].$$

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

Para cada $i = 1, \dots, N+1$, $f(i\alpha) \in [0, 1]$ e, portanto, do Princípio das Casas de Pombo, existem $i, j \in \{1, \dots, N+1\}$ tais que

$$0 < f(i\alpha) - f(j\alpha) < 1/N$$

ou seja, tais que

$$0 < (\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor) + (i - j)\alpha < 1/N.$$

Denotemos $m_0 = \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$ e $n_0 = i - j$. Como $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, temos

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k(m_0 + n_0\alpha), (k+1)(m_0 + n_0\alpha)]$$

e, conseqüentemente, existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$k_0(m_0 + n_0\alpha) \leq x_0 \leq (k_0 + 1)(m_0 + n_0\alpha).$$

Fazendo $m = k_0 m_0$ e $n = k_0 n_0$, obtemos

$$0 \leq x_0 - (m + n\alpha) \leq m_0 + n_0\alpha \leq 1/N$$

e a prova está concluída. ■

Corolário A.9 *Sejam $\alpha > 0$ um número irracional e $\varepsilon > 0$. Existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, sempre que $x \geq n_\varepsilon$, existem $a, b \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ satisfazendo*

$$0 < a + b\alpha - x < \varepsilon.$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, seja $0 < \varepsilon < 1$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ seja $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$. Segue do Teorema da Aproximação de Dirichlet que existem $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$0 < a_0 + b_0\alpha < \varepsilon. \quad (\text{A.2})$$

É evidente que a_0 e b_0 não podem ser simultaneamente negativos. Dividiremos nosso estudo em três casos.

• **Caso I:** $a_0, b_0 \geq 0$. Fixado $x_0 > 0$, seja k o único inteiro não-negativo tal que

$$(k-1)(a_0 + b_0\alpha) < f(x_0) \leq k(a_0 + b_0\alpha). \quad (\text{A.3})$$

Então, de (A.3) e (A.2), segue que

$$0 \leq k(a_0 + b_0\alpha) - f(x_0) < a_0 + b_0\alpha < \varepsilon. \quad (\text{A.4})$$

Seja $n_\varepsilon = 1$. Se $\lfloor x_0 \rfloor \geq n_\varepsilon$, fazendo $a = \lfloor x_0 \rfloor + ka_0$ e $b = kb_0$, observamos que $a, b \geq 0$ e que

$$a + b\alpha - x_0 = \lfloor x_0 \rfloor + ka_0 + kb_0\alpha - x_0 = k(a_0 + b_0\alpha) - f(x_0). \quad (\text{A.5})$$

De (A.5) e (A.4) concluímos que

$$0 \leq a + b\alpha - x_0 < \varepsilon,$$

com a e b inteiros não-negativos.

• **Caso II:** $a_0 < 0$ e $b_0 \geq 0$. Seja m o menor inteiro não-negativo tal que $m(a_0 + b_0\alpha) \geq 1$. Fixado $x_0 > 0$, seja k o único inteiro não-negativo tal que

$$(k-1)(a_0 + b_0\alpha) < f(x_0) \leq k(a_0 + b_0\alpha). \quad (\text{A.6})$$

Então, de (A.6) e (A.2), segue que

$$0 \leq k(a_0 + b_0\alpha) - f(x_0) < a_0 + b_0\alpha < \varepsilon. \quad (\text{A.7})$$

Como $f(x_0) < 1$, temos

$$m(a_0 + b_0\alpha) \geq 1 > f(x_0) > (k-1)(a_0 + b_0\alpha)$$

e, conseqüentemente, $m \geq k$. Seja $n_\varepsilon = -ma_0$. Se $\lfloor x_0 \rfloor \geq n_\varepsilon$, fazendo $a = \lfloor x_0 \rfloor + ka_0$ e $b = kb_0$, lembrando que $m \geq k$, observamos que $a, b \geq 0$ e que

$$a + b\alpha - x_0 = \lfloor x_0 \rfloor + ka_0 + kb_0\alpha - x_0 = k(a_0 + b_0\alpha) - f(x_0). \quad (\text{A.8})$$

De (A.8) e (A.7) concluímos que

$$0 \leq a + b\alpha - x_0 < \varepsilon,$$

com a e b inteiros não-negativos.

• **Caso III:** $a_0 \geq 0$ e $b_0 < 0$. Seja m o maior inteiro não negativo tal que $1 - m(a_0 + b_0\alpha) \geq 0$. Fixado $x_0 > 0$, seja k o único inteiro não-negativo tal que

$$1 - (k + 1)(a_0 + b_0\alpha) < f(x_0) \leq 1 - k(a_0 + b_0\alpha). \quad (\text{A.9})$$

Então, de (A.9) e (A.2), segue que

$$0 \leq 1 - k(a_0 + b_0\alpha) - f(x_0) < a_0 + b_0\alpha < \varepsilon. \quad (\text{A.10})$$

Como $1 - k(a_0 + b_0\alpha) \geq 0$, temos $m \geq k$. Seja $n_\varepsilon = ma_0$. Se $\lfloor x_0 \rfloor \geq n_\varepsilon$, fazendo $a = \lfloor x_0 \rfloor + 1 - ka_0$ e $b = -kb_0$, lembrando que $m \geq k$, observamos que $a, b \geq 0$; além disso,

$$\begin{aligned} a + b\alpha - x_0 &= \lfloor x_0 \rfloor + 1 - ka_0 - kb_0\alpha - x_0 \\ &= 1 - ka_0 - kb_0\alpha - (x_0 - \lfloor x_0 \rfloor) \\ &= 1 - k(a_0 + b_0\alpha) - f(x_0). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, de (A.11) e (A.10) concluímos que

$$0 \leq a + b\alpha - x_0 < \varepsilon,$$

com a e b inteiros não-negativos. ■

Definição A.10 Um subconjunto infinito $\mathbb{N}_0$ de números naturais é dito **assintoticamente denso** em $\mathbb{N}$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geq n_\varepsilon$ então existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$m \leq n \leq (1 + \varepsilon)m.$$

Lema A.11 O conjunto $\{4^i 12^j : i, j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}\}$ é assintoticamente denso em $\mathbb{N}$.

Demonstração: Observemos inicialmente que $\log_4 3$ é irracional. De fato, se $\log_4 3$ fosse racional, então existiriam inteiros positivos p e q tais que $3 = 4^{p/q}$ e, em particular, 3 seria um divisor de 4^p o que, evidentemente, seria um absurdo. Logo, segue do Corolário A.9, com $\alpha = 1 + \log_4 3$, que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, sempre que $m \geq 4^{n_\varepsilon}$, existem $i, j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ tais que

$$0 \leq i + j(1 + \log_4 3) - \log_4 m \leq \log_4 (1 + \varepsilon),$$

ou, equivalentemente, tais que

$$\log_4 m \leq i + j(1 + \log_4 3) \leq \log_4 (1 + \varepsilon) + \log_4 m = \log_4 ((1 + \varepsilon)m).$$

Mas

$$\begin{aligned} i + j(1 + \log_4 3) &= i + j + j \log_4 3 \\ &= (i + j) \log_4 4 + j \log_4 3 \\ &= \log_4 4^{i+j} 3^j = \log_4 4^i 12^j \end{aligned}$$

e, sendo assim, existem $i, j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ tais que

$$\log_4 m \leq \log_4 4^i 12^j \leq \log_4 ((1 + \varepsilon)m)$$

sempre que $m \geq 4^{n_\varepsilon}$. Consequentemente, existem $i, j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ tais que

$$m \leq 4^i 12^j \leq (1 + \varepsilon)m,$$

sempre que $m \geq 4^{n_\varepsilon}$. ■

OBSERVAÇÃO A.12 Segue diretamente do Exemplo A.7 e do Lema A.11 que o conjunto das ordens de Hadamard é assintoticamente denso em $\mathbb{N}$.

O Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin

Iniciemos esta seção observando que, se $a > 0$ e $z = x + iy \in \mathbb{C}$, então,

$$|a^z| = |a^{x+iy}| = |a|^x |a^{iy}| = |a|^x \left| (e^{\ln(a)})^{iy} \right| = a^x |e^{iy \ln(a)}| = a^x = a^{\operatorname{Re}(z)}. \quad (\text{B.1})$$

No que segue, se $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função complexa, então $|F|$ denota a correspondência $z \mapsto |F(z)|$.

Para o próximo resultado, lembramos que o Princípio do Módulo Máximo estabelece que, se $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica sobre um aberto conexo limitado D e contínua sobre seu fecho $\overline{D}$, então $\max \{|F(z)| : z \in \overline{D}\}$ é atingido em algum ponto z da fronteira de D .

Teorema B.1 (Princípio de Phragmén-Lindelöf) *Seja $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica sobre a faixa aberta*

$$S = \{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \operatorname{Re}(z) < \pi/2\}$$

e contínua sobre a faixa fechada

$$\overline{S} = \{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \pi/2\}.$$

Suponhamos que $|F| \leq 1$ sobre as retas verticais $\operatorname{Re}(z) = -\pi/2$ e $\operatorname{Re}(z) = \pi/2$ e que existam $\alpha, C > 0$ tais que

$$|F(z)| \leq C e^{\alpha|z|}$$

sempre que $z \in \overline{S}$. Então, $|F| \leq 1$ sobre $\overline{S}$.

Demonstração: Seja $0 < \beta < 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, definamos

$$g_\varepsilon(z) := F(z) e^{-2\varepsilon \cos(\beta z)}.$$

Denotando $z = \theta + it$, notemos que

$$\begin{aligned} \cos(\beta z) &:= \frac{e^{i\beta z} + e^{-i\beta z}}{2} = \frac{e^{i\beta\theta - \beta t} + e^{-i\beta\theta + \beta t}}{2} = \frac{e^{-\beta t} e^{i\beta\theta} + e^{\beta t} e^{-i\beta\theta}}{2} \\ &= \frac{1}{2} [e^{-\beta t} (\cos(\beta\theta) + i \operatorname{sen}(\beta\theta)) + e^{\beta t} (\cos(\beta\theta) - i \operatorname{sen}(\beta\theta))] \\ &= \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} \cos(\beta\theta) - i \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \operatorname{sen}(\beta\theta), \end{aligned}$$

de onde segue que

$$2 \operatorname{Re}(\cos(\beta z)) = (e^{\beta t} + e^{-\beta t}) \cos(\beta \theta).$$

Como $0 < \beta < 1$, existe $c > 0$ tal que $\cos(\beta \theta) \geq c$, para todo $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Assim, fica claro que

$$\alpha |z| - 2\varepsilon \operatorname{Re}(\cos(\beta z)) = \alpha \sqrt{\theta^2 + t^2} - \varepsilon (e^{\beta t} + e^{-\beta t}) \cos(\beta \theta) \rightarrow -\infty$$

quando $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \bar{S}$. Consequentemente, de (B.1), temos

$$\begin{aligned} |g_\varepsilon(z)| &= |F(z) e^{-2\varepsilon \cos(\beta z)}| \\ &= |F(z)| e^{-2\varepsilon \operatorname{Re}(\cos(\beta z))} \\ &\leq C e^{\alpha|z|} e^{-2\varepsilon \operatorname{Re}(\cos(\beta z))} \\ &= C e^{\alpha|z| - 2\varepsilon \operatorname{Re}(\cos(\beta z))} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \bar{S}$. Logo, existe $K_0 > 0$ tal que, sempre que $K \geq K_0$, temos $|g_\varepsilon(\theta \pm iK)| \leq 1$, para todo $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Como $|F| \leq 1$ sobre as retas verticais $\operatorname{Re}(z) = -\pi/2$ e $\operatorname{Re}(z) = \pi/2$ é imediato que $|g_\varepsilon| \leq 1$ sobre estas mesmas retas. Portanto, do Princípio do Módulo Máximo, se $K \geq K_0$, então $|g_\varepsilon(z)| \leq 1$ sempre que z pertence ao retângulo

$$\{\theta + it \in \mathbb{C} : -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ e } -K \leq t \leq K\}.$$

Fazendo $K \rightarrow \infty$, concluímos que $|g_\varepsilon(z)| \leq 1$ sobre $\bar{S}$, de onde segue que

$$|F(z)| \leq e^{2\varepsilon \operatorname{Re}(\cos(\beta z))}, \quad (\text{B.2})$$

para todo $z \in \bar{S}$ e todo $\varepsilon > 0$. Fixando $z_0 \in \bar{S}$ e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ em (B.2), concluímos que

$$|F(z_0)| \leq 1.$$

Tendo sido z_0 escolhido arbitrariamente em $\bar{S}$, inferimos que $|F| \leq 1$ sobre $\bar{S}$. ■

Corolário B.2 *Seja $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica sobre a faixa aberta*

$$S = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re}(z) < b\}$$

e contínua sobre a faixa fechada

$$\bar{S} = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b\}.$$

Suponhamos que $|F| \leq M_1$ sobre a reta vertical $\operatorname{Re}(z) = a$, $|F| \leq M_2$ sobre a reta vertical $\operatorname{Re}(z) = b$, com $M_1, M_2 > 0$, e que existam $\alpha, C > 0$ tais que

$$|F(z)| \leq C e^{\alpha|z|}$$

sempre que $z \in \bar{S}$. Então, $|F| \leq \max\{M_1, M_2\}$ sobre $\bar{S}$.

Demonstração: Sejam $\varphi, G: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ as funções definidas, respectivamente, por

$$\varphi(z) = \varphi(\theta + it) = \left(\frac{b-a}{\pi} \theta + \frac{b+a}{2} \right) + it$$

e

$$G(z) = \frac{(F \circ \varphi)(z)}{\max\{M_1, M_2\}}$$

Notemos que G é analítica sobre a faixa aberta

$$S_0 = \{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \operatorname{Re}(z) < \pi/2\},$$

contínua sobre a faixa fechada

$$\overline{S_0} = \{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \pi/2\},$$

que $|G| \leq 1$ sobre as retas $\operatorname{Re}(z) = -\pi/2$ e $\operatorname{Re}(z) = \pi/2$ e que φ define uma correspondência biunívoca entre $\overline{S_0}$ e $\overline{S}$. Notemos que

$$\begin{aligned} |G(z)| &= |G(\theta + it)| \\ &= \frac{\left| F\left(\frac{b-a}{\pi}\theta + \frac{b+a}{2} + it\right) \right|}{\max\{M_1, M_2\}} \\ &\leq \frac{C}{\max\{M_1, M_2\}} e^{\alpha \left| \frac{b-a}{\pi}\theta + \frac{b+a}{2} + it \right|} \\ &= \frac{C}{\max\{M_1, M_2\}} e^{\alpha \left| \left(\frac{b-a}{\pi}\theta + \frac{b+a}{2} - \theta\right) + (\theta + it) \right|} \\ &\leq \frac{C}{\max\{M_1, M_2\}} e^{\alpha \left| \frac{b-a}{\pi}\theta + \frac{b+a}{2} - \theta \right|} e^{\alpha |\theta + it|} \\ &= \frac{C}{\max\{M_1, M_2\}} e^{\alpha \left| \frac{b-a-\pi}{\pi}\theta + \frac{b+a}{2} \right|} e^{\alpha |z|}. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Além disso, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(\theta) = \frac{C}{\max\{M_1, M_2\}} e^{\alpha \left| \frac{b-a-\pi}{\pi}\theta + \frac{b+a}{2} \right|}$$

é claramente contínua e, portanto, existe $\theta_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que

$$\frac{C}{\max\{M_1, M_2\}} e^{\alpha \left| \frac{b-a-\pi}{\pi}\theta + \frac{b+a}{2} \right|} = f(\theta) \leq f(\theta_0) = C_0, \tag{B.4}$$

para todo $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Consequentemente, de (B.3) e (B.4), temos

$$|G(z)| \leq C_0 e^{\alpha |z|},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Logo, do Princípio de Phragmén-Lindelöf, $|G| \leq 1$ sobre $\overline{S_0}$ e, portanto,

$$|F| \leq \max\{M_1, M_2\}$$

sobre $\overline{S}$. ■

Teorema B.3 (Teorema das Três Linhas) *Seja $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica sobre a faixa aberta*

$$S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$$

e limitada e contínua sobre a faixa fechada

$$\overline{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}.$$

Se

$$|F(it)| \leq M_1 \quad e \quad |F(1+it)| \leq M_2, \quad M_1, M_2 > 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, então

$$|F(\theta + it)| \leq M_1^{1-\theta} M_2^\theta$$

para todo $0 \leq \theta \leq 1$ e todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Sejam $G: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a função definida por

$$G(z) = M_1^{z-1} M_2^{-z} F(z)$$

e $M \geq \max\{M_1, M_2\}$ tal que $|F| \leq M$ sobre $\overline{S}$. É evidente que G é analítica sobre S e contínua sobre $\overline{S}$. Além disso, de (B.1), se $z = \theta + it \in \overline{S}$, então

$$|G(z)| = |G(\theta + it)| = \left| M_1^{(\theta-1)+it} M_2^{-\theta-it} F(z) \right| = M_1^{\theta-1} M_2^{-\theta} |F(z)|.$$

Segue daqui que, $|G| \leq 1$ sobre as retas verticais $\operatorname{Re}(z) = 0$ e $\operatorname{Re}(z) = 1$ e que, de modo geral,

$$|G(z)| \leq M_1^{\theta-1} M_2^{-\theta} M$$

sobre $\overline{S}$. Notemos que,

$$M_1^{\theta-1} M_2^{-\theta} M \leq \frac{M}{\min\{M_1, M_2\}} := C$$

para todo $\theta \in [0, 1]$. Logo, como $e^{|z|} = e^{\operatorname{Re}(z)} \geq 1$ para todo $z \in \overline{S}$, temos

$$|G| \leq C e^{|z|},$$

sempre que $z \in \overline{S}$. Do Corolário B.2,

$$M_1^{\theta-1} M_2^{-\theta} |F(\theta + it)| = |G(\theta + it)| \leq 1,$$

para todo $\theta \in [0, 1]$ e todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$|F(\theta + it)| \leq M_1^{1-\theta} M_2^\theta,$$

para todo $\theta \in [0, 1]$ e todo $t \in \mathbb{R}$. ■

Teorema B.4 (Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin) *Sejam*

$$T: \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_m} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

uma forma m -linear e

$$r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_m, q_1, q_2 \in [1, \infty].$$

Consideremos as formas m -lineares $T_1: \ell_{r_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{r_m}^{n_m} \rightarrow \ell_{q_1}^n$ e $T_2: \ell_{s_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{s_m}^{n_m} \rightarrow \ell_{q_2}^n$ definidas por

$$T_1(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = T_2(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = T(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}).$$

Fixado $0 < \theta < 1$, sejam

$$\frac{1}{p_k} = \frac{1-\theta}{r_k} + \frac{\theta}{s_k}, \quad k = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}.$$

A forma m -linear $T_0: \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \ell_q^n$ definida por

$$T_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = T(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$$

satisfaz

$$\|T_0\| \leq \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^\theta.$$

Demonstração: Para cada $k = 1, \dots, m$, fixemos

$$a^{(k)} = \left(a_{j_k}^{(k)} \right)_{j_k=1}^{n_k} = \left(\left| a_{j_k}^{(k)} \right| e^{i\theta_{j_k}^{(k)}} \right)_{j_k=1}^{n_k} \in \mathbb{C}^{n_k}.$$

Fixemos também

$$b = (b_j)_{j=1}^n = (|b_j| e^{i\beta_j})_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n.$$

Para cada $z \in \mathbb{C}$, façamos

$$\frac{1}{p_k(z)} := \frac{1-z}{r_k} + \frac{z}{s_k} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q^*(z)} := \frac{1-z}{q_1^*} + \frac{z}{q_2^*},$$

com $k = 1, \dots, m$. Observemos que

$$p_k(0) = r_k, \quad p_k(\theta) = p_k \quad \text{e} \quad p_k(1) = s_k,$$

e que

$$q^*(0) = q_1^*, \quad q^*(\theta) = q^* \quad \text{e} \quad q^*(1) = q_2^*.$$

Para todo $z \in \mathbb{C}$ e todo $k = 1, \dots, m$ definamos

$$a^{(k,z)} = \left(a_{j_k}^{(k,z)} \right)_{j_k=1}^{n_k} := \begin{cases} \left(a_{j_k}^{(k)} \right)_{j_k=1}^{n_k}, & \text{se } p_k = \infty, \\ \left(\left| a_{j_k}^{(k)} \right|^{\frac{p_k}{p_k(z)}} e^{i\theta_{j_k}^{(k)}} \right)_{j_k=1}^{n_k}, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

e

$$b^{(z)} = \left(b_j^{(z)}\right)_{j=1}^n := \begin{cases} (b_j)_{j=1}^n, & \text{se } q = 1, \\ \left(|b_j|^{\frac{q^*}{q^*(z)}} e^{i\beta_j}\right)_{j=1}^n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, seja $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a função definida por

$$F(z) := \sum_{j=1}^n \left(T(a^{(1,z)}, \dots, a^{(m,z)})\right)_j \cdot b_j^{(z)},$$

onde, para todo $j = 1, \dots, n$, $(T(a^{(1,z)}, \dots, a^{(m,z)}))_j$ é a j -ésima coordenada de $T(a^{(1,z)}, \dots, a^{(m,z)}) \in \mathbb{C}^n$. Suponhamos $1 \leq p_k < \infty$ para todo k e $q \neq 1$. Notemos que, para todo $k = 1, \dots, m$ e todo $j_k = 1, \dots, n_k$, temos

$$\begin{aligned} \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{\frac{p_k}{p_k(z)}} &= \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{p_k \left(\frac{1-z}{r_k} + \frac{z}{s_k}\right)} \\ &= \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{p_k \left[\frac{1}{r_k} + z \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{r_k}\right)\right]} \\ &= \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{\frac{p_k}{r_k}} \left(\left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{p_k \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{r_k}\right)}\right)^z \end{aligned}$$

e, do mesmo modo,

$$|b_j|^{\frac{q^*}{q^*(z)}} = |b_j|^{\frac{q^*}{q_1^*}} \left(|b_j|^{q^* \left(\frac{1}{q_2^*} - \frac{1}{q_1^*}\right)}\right)^z.$$

Logo,

$$\begin{aligned} &|b_j|^{\frac{q^*}{q^*(z)}} \cdot \prod_{k=1}^m \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{\frac{p_k}{p_k(z)}} \\ &= \left(|b_j|^{\frac{q^*}{q_1^*}} \cdot \prod_{k=1}^m \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{\frac{p_k}{r_k}}\right) \left(|b_j|^{q^* \left(\frac{1}{q_2^*} - \frac{1}{q_1^*}\right)} \cdot \prod_{k=1}^m \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{p_k \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{r_k}\right)}\right)^z. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Denotando por $(e_{j_k}^{(k)})_{j_k=1}^{n_k}$ a base canônica de $\mathbb{C}^{n_k}$, sejam

$$\alpha_{j_1, \dots, j_m, j} = |b_j|^{\frac{q^*}{q_1^*}} \cdot \left(\prod_{k=1}^m \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{\frac{p_k}{r_k}}\right) e^{i(\theta_{j_1}^{(1)} + \dots + \theta_{j_m}^{(m)} + \beta_j)} \left(T(e_{j_1}^{(1)}, \dots, e_{j_m}^{(m)})\right)_j, \quad (\text{B.6})$$

e

$$\mu_{j_1, \dots, j_m, j} = |b_j|^{q^* \left(\frac{1}{q_2^*} - \frac{1}{q_1^*}\right)} \cdot \prod_{k=1}^m \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{p_k \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{r_k}\right)} \quad (\text{B.7})$$

Deste modo, das definições de $a^{(k,z)}$ e $b^{(z)}$, da multilinearidade de T , de (B.5), de (B.6) e

de (B.7), temos

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \sum_{j=1}^n \left(T(a^{(1,z)}, \dots, a^{(m,z)}) \right)_j \cdot b_j^{(z)} \\
 &= \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m} \sum_{j=1}^n b_j^{(z)} \left(\prod_{k=1}^m a_{j_k}^{(k,z)} \right) \left(T(e_{j_1}^{(1)}, \dots, e_{j_m}^{(m)}) \right)_j \\
 &= \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m} \sum_{j=1}^n |b_j|^{\frac{q^*}{q^*(z)}} \left(\prod_{k=1}^m \left| a_{j_k}^{(k)} \right|^{\frac{p_k}{p_k(z)}} \right) e^{i(\theta_{j_1}^{(1)} + \cdots + \theta_{j_m}^{(m)} + \beta_j)} \left(T(e_{j_1}^{(1)}, \dots, e_{j_m}^{(m)}) \right)_j \\
 &= \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m} \sum_{j=1}^n \alpha_{j_1, \dots, j_m, j} \mu_{j_1, \dots, j_m, j}^z.
 \end{aligned}$$

Isto mostra que F é uma combinação linear finita de funções do tipo $f(z) = a^z$ com $a > 0$ e, por conseguinte, mostra também que F é analítica sobre $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ e contínua sobre $\bar{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$. Portanto, se $a > 0$ e $z \in \bar{S}$, segue de (B.1) que

$$|a^z| = a^{\operatorname{Re}(z)} \leq \max\{1, a\}$$

e, em particular, F é limitada sobre $\bar{S}$. Sendo assim, do Teorema das Três Linhas,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F(\theta + it)| \leq \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |F(it)| \right)^{1-\theta} \cdot \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |F(1 + it)| \right)^{\theta}. \quad (\text{B.8})$$

Devemos estimar $|F(it)|$ e $|F(1 + it)|$. Da desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
 |F(it)| &= \left| \sum_{j=1}^n \left(T(a^{(1,it)}, \dots, a^{(m,it)}) \right)_j \cdot b_j^{(it)} \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \left(T(a^{(1,it)}, \dots, a^{(m,it)}) \right)_j \right| |b_j^{(it)}| \\
 &\leq \|T(a^{(1,it)}, \dots, a^{(m,it)})\|_{q_1} \|b^{(it)}\|_{q_1^*} \leq \|T_1\| \|b^{(it)}\|_{q_1^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k,it)}\|_{r_k}
 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

e, do mesmo modo,

$$\begin{aligned}
 |F(1 + it)| &\leq \|T(a^{(1,1+it)}, \dots, a^{(m,1+it)})\|_{q_2} \|b^{(1+it)}\|_{q_2^*} \\
 &\leq \|T_2\| \|b^{(1+it)}\|_{q_2^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k,1+it)}\|_{s_k}.
 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Percebamos agora que

$$\frac{p_k}{p_k(it)} = p_k \left(\frac{1 - it}{r_k} + \frac{it}{s_k} \right) = \frac{p_k}{r_k} + ip_k \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{r_k} \right) t. \quad (\text{B.11})$$

Assim, da definição de $a^{(k,it)}$, de (B.1) e de (B.11), para todo $k = 1, \dots, m$, temos

$$\begin{aligned}
 \|a^{(k,it)}\|_{r_k}^{r_k} &= \sum_{j_k=1}^{n_k} \left| \left| a_{j_k}^{(k)} \right|^{\frac{p_k}{p_k(it)}} \right|^{r_k} \\
 &= \sum_{s=1}^{n_k} |a_s^{(k)}|^{\operatorname{Re}\left(\frac{p_k}{p_k(it)}\right) r_k} \\
 &= \sum_{s=1}^{n_k} |a_s^{(k)}|^{\frac{p_k}{r_k} r_k} \\
 &= \sum_{s=1}^{n_k} |a_s^{(k)}|^{p_k} = \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k}.
 \end{aligned}$$

De modo análogo verificamos que

$$\|a^{(k,1+it)}\|_{s_k}^{s_k} = \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k} \quad \text{e} \quad \|b^{(it)}\|_{q_1^*}^{q_1^*} = \|b^{(1+it)}\|_{q_2^*}^{q_2^*} = \|b\|_{q^*}^{q^*}.$$

Logo, de (B.9) e (B.10), bem como das identidades acima,

$$|F(it)| \leq \|T_1\| \|b\|_{q^*}^{q^*/q_1^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k/r_k} \quad (\text{B.12})$$

e

$$|F(1+it)| \leq \|T_2\| \|b\|_{q^*}^{q^*/q_2^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k/s_k}, \quad (\text{B.13})$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. De (B.8), (B.12) e (B.13), concluímos que

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(\theta + it)| &\leq \left(\|T_1\| \|b\|_{q^*}^{q^*/q_1^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k/r_k} \right)^{1-\theta} \left(\|T_2\| \|b\|_{q^*}^{q^*/q_2^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k/s_k} \right)^{\theta} \\ &= \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^{\theta} \|b\|_{q^*}^{q^* \left(\frac{1-\theta}{q_1^*} + \frac{\theta}{q_2^*} \right)} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k \left(\frac{1-\theta}{r_k} + \frac{\theta}{s_k} \right)} \\ &= \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^{\theta} \|b\|_{q^*}^{q^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k}. \end{aligned}$$

Em particular, fazendo $t = 0$ e observando que $a^{(k,\theta)} = a^{(k)}$ para todo $k = 1, \dots, n$, temos

$$\left| \sum_{j=1}^n (T(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}))_j \cdot b_j \right| = |F(\theta)| \leq \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^{\theta} \|b\|_{q^*}^{q^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k}$$

e, daí,

$$\begin{aligned} \|T(a^{(1)}, \dots, a^{(n)})\|_q &= \sup_{\|b\|_{q^*} \leq 1} \left| \sum_{j=1}^n (T(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}))_j \cdot b_j \right| \\ &\leq \sup_{\|b\|_{q^*} \leq 1} \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^{\theta} \|b\|_{q^*}^{q^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k} \\ &= \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^{\theta} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|T_0\| &= \sup_{\|a^{(1)}\|_{p_1}, \dots, \|a^{(m)}\|_{p_m} \leq 1} \|T(a^{(1)}, \dots, a^{(n)})\|_q \\ &\leq \sup_{\|a^{(1)}\|_{p_1}, \dots, \|a^{(m)}\|_{p_m} \leq 1} \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^{\theta} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k} \\ &= \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^{\theta}. \end{aligned}$$

O caso em que $p_k = \infty$ para todo k em um subconjunto não-vazio de $\{1, \dots, m\}$ e/ou $q = 1$ é feito de modo semelhante. De fato, basta observar que, se $p_{k_0} = \infty$, então $r_{k_0} = s_{k_0} = \infty$ e, neste caso,

$$\|a^{(k_0, it)}\|_{\infty} = \|a^{(k_0, 1+it)}\|_{\infty} = \|a^{(k)}\|_{\infty}$$

e, se $q = 1$, então $q_1 = q_2 = 1$ e, neste caso, $q_1^* = q_2^* = q^* = \infty$, de onde vem que

$$\|b^{(it)}\|_\infty = \|b^{(1+it)}\|_\infty = \|b\|_\infty.$$

■

Pontos extremos em espaços de dimensão finita

Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e C um subconjunto convexo de E . Diremos que $x \in C$ é um **ponto extremo** de C se

$$x \notin \{tx_1 + (1-t)x_2 : 0 < t < 1\} \quad (\text{C.1})$$

quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in C$, com $x_1 \neq x_2$, ou seja, quando x não pertence ao interior de $[x_1, x_2]$ com $x_1, x_2 \in C$, $x_1 \neq x_2$. O conjunto dos pontos extremos de C é denotado por $\text{ext}(C)$. Notemos que, equivalentemente, x será um ponto extremo de C se, sempre que $x_1, x_2 \in C$, tivermos

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x. \quad (\text{C.2})$$

De fato, é óbvio que a validade de (C.1) para $x_0 \in C$ implica na ocorrência de (C.2) para x_0 . Reciprocamente, admitindo que ocorre (C.2) para $x_0 \in C$, suponhamos que existam $x_1, x_2 \in C$, com $x_1 \neq x_2$ e $0 < t_0 < 1$ tais que $x_0 = t_0x_1 + (1-t_0)x_2$. Fixando $0 < \varepsilon < \min\{t_0, 1-t_0\}$, sejam

$$x_3 = (t_0 - \varepsilon)x_1 + [1 - (t_0 - \varepsilon)]x_2 \quad \text{e} \quad x_4 = (t_0 + \varepsilon)x_1 + [1 - (t_0 + \varepsilon)]x_2.$$

É evidente que $x_3, x_4 \in C$ e $x_3 \neq x_4$. No entanto,

$$\frac{x_3 + x_4}{2} = x_0$$

e isto é, flagrantemente, uma contradição.

Exemplo C.1 Em vermelho destacamos os pontos extremos de algumas regiões convexas planas:

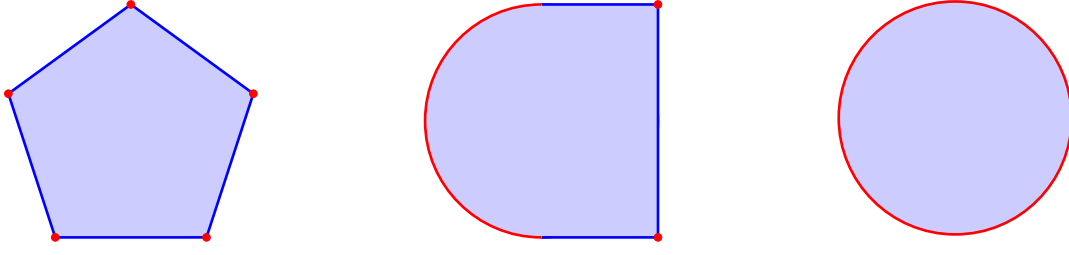


Figura C.1: Pontos extremos de algumas regiões planas.

Exemplo C.2 Seja $\ell_\infty^n = \ell_\infty^n(\mathbb{R})$. Vejamos que $\text{ext}(B_{\ell_\infty^n}) = \{-1, 1\}^n$. Se $(x_1, \dots, x_n) \in B_{\ell_\infty^n} \setminus \{-1, 1\}^n$, então

$$|x_i| < 1$$

para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Seja $\varepsilon = \min\{1 - x_i, 1 + x_i\}$. Neste caso,

$$-1 \leq x_i - \varepsilon < x_i + \varepsilon \leq 1$$

e, conseqüentemente,

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

são elementos distintos de $B_{\ell_\infty^n}$. Contudo,

$$(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n) + \frac{1}{2}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

o que significa que $(x_1, \dots, x_n) \notin \text{ext}(B_{\ell_\infty^n})$ e, portanto,

$$\text{ext}(B_{\ell_\infty^n}) \subset \{-1, 1\}^n.$$

Agora, sejam $z = (z_1, \dots, z_n) \in \{-1, 1\}^n$ e $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \ell_\infty^n$, com $x \neq y$, tais que

$$z = \frac{x + y}{2}.$$

Como $x \neq y$, então, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, temos $x_i \neq y_i$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $x_i < y_i$. Então

$$x_i < z_i = \frac{x_i + y_i}{2} < y_i$$

de onde concluímos que

$$\begin{cases} x_i < -1, & \text{se } z_i = -1, \\ y_i > 1, & \text{se } z_i = 1. \end{cases}$$

De todo modo, isso significa que $\{x, y\} \not\subset B_{\ell_\infty^n}$. Conseqüentemente, $z \in \text{ext}(B_{\ell_\infty^n})$ e

$$\{-1, 1\}^n \subset \text{ext}(B_{\ell_\infty^n}).$$

Exemplo C.3 Seja C um subconjunto convexo de um espaço vetorial E . Fixemos $a \in E$. Então $\text{ext}(a + C) = a + \text{ext}(C)$, ou seja, $x_0 \in \text{ext}(C)$ se, e somente se, $a + x_0 \in \text{ext}(a + C)$. De fato, se $x_0 \in \text{ext}(C)$, então

$$\begin{aligned} a + x_0 &= \frac{(a + x_1) + (a + x_2)}{2}, \quad x_1, x_2 \in C \Leftrightarrow x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x_1, x_2 \in C \\ &\Leftrightarrow x_0 = x_1 = x_2 \\ &\Leftrightarrow a + x_0 = a + x_1 = a + x_2, \end{aligned}$$

ou seja, $a + x_0 \in \text{ext}(a + C)$. A recíproca é análoga.

Proposição C.4 *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $A \subset E$. O conjunto*

$$\text{co}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j : x_j \in A, n \in \mathbb{N}, \lambda_j \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\},$$

*denominado a **envoltória convexa** de A , é o menor subconjunto convexo de E que contém A , ou seja, se B é convexo e $A \subset B$, então $A \subset \text{co}(A) \subset B$.*

Demonstração: Vejamos inicialmente que $\text{co}(A)$ é convexo. Sejam $x, y \in \text{co}(A)$. Neste caso, existem $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in A$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{K}$, com $\alpha_j, \beta_k > 0$ para todo $j = 1, \dots, n$ e todo $k = 1, \dots, m$ e $\sum_{j=1}^n \alpha_j = \sum_{k=1}^m \beta_k = 1$, tais que

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \quad \text{e} \quad y = \sum_{k=1}^m \beta_k y_k.$$

Devemos mostrar que $z = (1 - \lambda)x + \lambda y \in \text{co}(A)$, qualquer que seja $\lambda \in [0, 1]$. A afirmação é trivialmente verificada se $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Suponhamos então $\lambda \in (0, 1)$. Neste caso, se $\lambda_j = (1 - \lambda)\alpha_j$, para $j = 1, \dots, n$, e $\lambda_{n+k} = \lambda\beta_k$, para $k = 1, \dots, m$, é evidente que $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, m + n$ e que $\sum_{i=1}^{m+n} \lambda_i = 1$. Assim, fazendo $z_j = x_j$, para $j = 1, \dots, n$, e $z_{n+k} = y_k$, para $k = 1, \dots, m$, concluímos que

$$z = \sum_{i=1}^{m+n} \lambda_i z_i \in \text{co}(A).$$

Seja, agora, B um subconjunto convexo de E que contém A . Para verificar que $\text{co}(A) \subset B$, mostraremos, fazendo indução em n , que todas as **combinações lineares convexas** de elementos de A , isto é, combinações lineares da forma $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$ com $x_j \in A$,

$\lambda_j > 0$ e $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, pertencem a B . A afirmação é trivialmente verificada para $n = 1$ ou $n = 2$. Supondo sua validade para um certo $n \geq 2$, mostremos que ainda é válida para $n + 1$. Sejam $x_1, \dots, x_{n+1} \in A$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$, com $\lambda_j > 0$ para todo $j = 1, \dots, n + 1$ e $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1$. Desejamos mostrar que $x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j \in B$. Notemos que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 - \lambda_{n+1}$$

e, conseqüentemente, se $\alpha_j = \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_{n+1}}$, então $\alpha_j > 0$ e $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$. Assim, se $x_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$, segue da hipótese de indução que $x_0 \in B$. Observando que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ &= (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_{n+1}} x_j + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ &= (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ &= (1 - \lambda_{n+1}) x_0 + \lambda_{n+1} x_{n+1} \end{aligned}$$

segue da convexidade de B que $x \in B$ e o resultado desejado é obtido. ■

OBSERVAÇÃO C.5 *Seja $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de subconjuntos convexos de um espaço vetorial E . Se $x, y \in \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$, então $x, y \in C_\alpha$ para todo $\alpha \in I$ e, como cada C_α é convexo, $(1 - \lambda)x + \lambda y \in C_\alpha$ para todo $\alpha \in I$ sempre que $\lambda \in [0, 1]$. Logo, sempre que $\lambda \in [0, 1]$, $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$. Da arbitrariedade de $x, y \in \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ segue então que $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ é convexo. Isso mostra que a interseção arbitrária de conjuntos convexos é também um conjunto convexo e nos permite caracterizar $\text{co}(A)$ como sendo a interseção de todos os subconjuntos convexos de E que contém A . Além disso, essa caracterização nos permite concluir facilmente que, se A e B são subconjuntos de um espaço vetorial E e $A \subset B$, então $\text{co}(A) \subset \text{co}(B)$.*

OBSERVAÇÃO C.6 *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $A \subset E$. É fácil ver que*

$$\text{co}(a + A) = a + \text{co}(A)$$

para todo $a \in E$. De fato:

$$\begin{aligned} \text{co}(a + A) &= \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j (a + x_j) : x_j \in A, n \in \mathbb{N}, \lambda_j \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\} \\ &= \left\{ \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \right) a + \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j : x_j \in A, n \in \mathbb{N}, \lambda_j \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\} \\ &= \left\{ a + \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j : x_j \in A, n \in \mathbb{N}, \lambda_j \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\} \\ &= a + \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j : x_j \in A, n \in \mathbb{N}, \lambda_j \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\} \\ &= a + \text{co}(A). \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO C.7 *Sejam E_1 e E_2 espaços vetoriais normados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ e de mesma dimensão finita n . Lembremos que se $T: E_1 \rightarrow E_2$ é um isomorfismo então T leva aberto em aberto, fechado em fechado, compacto em compacto e convexo em convexo.*

Como em espaços de dimensão finita quaisquer duas normas são equivalentes e, portanto, geram a mesma topologia, no que segue, $\mathbb{R}^n$ é sempre considerado munido da norma euclidiana. Lembremos ainda que, em $\mathbb{R}^n$, a topologia proveniente da norma euclidiana (e, portanto, de qualquer norma) tem os paralelepípedos da forma $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, onde (a_i, b_i) é um intervalo aberto, limitado e não-degenerado, como sub-base.

Lembremos que se E é um espaço vetorial real, dizemos que $V \subset E$ é uma **variedade afim** se, dados $x_1, x_2 \in V$, então a reta que passa por x_1 e x_2 está contida em V . Dito de outro modo, $V \subset E$ é uma variedade afim se, dados $x_1, x_2 \in V$, temos $(1-t)x_1 + tx_2 \in V$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição C.8 *Sejam E um espaço vetorial real e $A \subset E$. A **envoltória afim** de A é o conjunto*

$$\text{aff}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in A \text{ para todo } i = 1, \dots, n \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

É fácil ver que, se $A \subset E$, então $\text{aff}(A)$ é uma variedade afim que contém A . De fato, sejam $y_1 = \sum_{j=1}^{n_1} \mu_j x_j^{(1)}, y_2 = \sum_{k=1}^{n_2} \eta_k x_k^{(2)}$ com $x_j^{(1)}, x_k^{(2)} \in A$ para todo $j = 1, \dots, n_1$ e todo $k = 1, \dots, n_2$ e $\sum_{j=1}^{n_1} \mu_j = \sum_{k=1}^{n_2} \eta_k = 1$, elementos de $\text{aff}(A)$. Se

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}\} \cup \{x_1^{(2)}, \dots, x_{n_2}^{(2)}\},$$

fazendo

$$\alpha_i = \begin{cases} \mu_j, & \text{se } x_i = x_j^{(1)} \text{ para algum } j, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta_i = \begin{cases} \eta_k, & \text{se } x_i = x_k^{(2)} \text{ para algum } k, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

observamos que

$$y_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \text{e} \quad y_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i.$$

Deste modo, dado $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} (1-t)y_1 + ty_2 &= (1-t) \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + t \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^n [(1-t)\alpha_i + t\beta_i] x_i \end{aligned}$$

e, como

$$\sum_{i=1}^n [(1-t)\alpha_i + t\beta_i] = (1-t) \sum_{i=1}^n \alpha_i + t \sum_{i=1}^n \beta_i = (1-t) + t = 1,$$

concluimos que $(1-t)y_1 + ty_2 \in \text{aff}(A)$ e $\text{aff}(A)$ é uma variedade afim. Por outro lado, se $V \subset E$ é uma variedade afim que contém A , então usando indução em n verificamos facilmente que todas as combinações lineares $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ com $x_i \in A$ para todo $i = 1, \dots, n$

e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ pertencem a V , ou seja, que $\text{aff}(A) \subset V$. Logo, $\text{aff}(A)$ é a menor variedade afim em E que contém A .

Se V é uma variedade afim de um espaço vetorial real E e $a \in V$, então é evidente que $-a + V$ é um subespaço de E . Além disso, se $b \in V$ e $v \neq a$, então

$$-a + V = -b + V.$$

De fato, seja $x \in (-a + V)$. Neste caso, existe $v \in V$ tal que $x = -a + v$. No entanto, como $(-b + v), (-b + a) \in (-b + V)$ e $(-b + V)$ é subespaço, temos

$$x = -a + v = (-b + v) - (-b + a) \in (-b + V),$$

ou seja, $(-a + V) \subset (-b + V)$. A inclusão contrária é análoga. Deste modo, se V é uma variedade afim, então a **dimensão** de V é a dimensão do subespaço $-a + V$, onde a é qualquer elemento fixado de V .

Diremos que um subconjunto compacto e convexo K de um espaço vetorial normado E possui dimensão m se

$$\dim(\text{aff}(K)) = m.$$

Evidentemente, se $0 \in K$, então $\text{aff}(K) = \text{span}(K)$.

Seja E um espaço vetorial real. Se $a \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então as novas operações de soma e multiplicação por escalar dadas por

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\mapsto x_1 + x_2 - a \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x + (1 - \lambda)a \end{aligned}$$

fazem de E um espaço vetorial com origem em a . Tal espaço será denotado por $a + E$. É fácil ver que o operador

$$\begin{aligned} T_a: a + E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x - a \end{aligned}$$

é linear e biunívoco e que, se E é um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|$, então a correspondência

$$x \mapsto \|x - a\|$$

define uma norma sobre $a + E$. Observemos ainda que, se V é uma variedade afim de E e $a \in V$, então V é um subespaço de $a + E$.

Teorema C.9 (Teorema do Interior Relativo) *Seja K um subconjunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$. Se $L = \text{aff}(K)$ então o interior de K relativamente a L , que denotamos por $\text{int}_L(K)$, é não-vazio.*

Demonstração: Sejam $a \in K$ e $T_a: a + \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o operador linear definido por $T_a(x) = x - a$. Como T_a é uma isometria, da Observação C.7, segue que, se K é compacto e convexo, então $K_0 = T_a(K)$ também o é e

$$\text{int}_L(K) \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{int}_M(K_0) \neq \emptyset,$$

onde $M = T_a(L) = -a + L = \text{span}(K_0)$. Seja m a dimensão de K_0 e sejam $v_1, \dots, v_m \in K_0$ vetores linearmente independentes. Seja $T: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ um isomorfismo tal que $T(v_i) = e_i$. Da Observação C.7, sabemos que

$$\text{int}_M(K_0) \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{int}_{\mathbb{R}^m}(T(K_0)) \neq \emptyset.$$

Logo, tudo o que precisamos fazer é concluir que $\text{int}_{\mathbb{R}^m}(T(K_0)) \neq \emptyset$. Para tanto, mostraremos que o m -cubo $[0, 1/2^{m-1}]^m$ está contido em $T(K_0)$. Seja $(a_1, \dots, a_m) \in [0, 1/2^{m-1}]^m$. Se $a_1 = \dots = a_m = 0$ é claro $(a_1, \dots, a_m) \in T(K_0)$. Suponhamos então que $(a_1, \dots, a_m) \neq 0$. Notemos que

$$\sum_{j=1}^m a_j \leq m \cdot \frac{1}{2^{m-1}} \leq 1$$

e, portanto, fazendo

$$u_i = \left(\sum_{j=1}^m a_j \right) e_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

como $0 \in T(K_0)$ e $T(K_0)$ é convexo, observamos que

$$u_i = \left(\sum_{j=1}^m a_j \right) e_i + \left(1 - \left(\sum_{j=1}^m a_j \right) \right) 0 \in T(K_0),$$

qualquer que seja $i = 1, \dots, m$. Além disso, como $T(K_0)$ é convexo, temos

$$(a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^m \frac{a_i u_i}{a_1 + \dots + a_m} \in \text{co}(T(K_0)) = T(K_0)$$

e, consequentemente,

$$[0, 1/2^{m-1}]^m \subset T(K_0).$$

Isto encerra a demonstração. ■

Lema C.10 *Seja K um subconjunto compacto e convexo de um espaço vetorial normado E de dimensão finita. Então $\text{ext}(K) \neq \emptyset$.*

Demonstração: Como E tem dimensão finita, podemos supor que a norma $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ é proveniente de um produto interno. Como K é compacto e $\|\cdot\|$ é sabidamente uma função contínua, existe $x_0 \in K$ tal que $\|x\| \leq \|x_0\|$ para todo $x \in K$. Sejam $x_1, x_2 \in K$ tais que

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \|x_0\|^2 &\leq \frac{1}{4} (\|x_1\| + \|x_2\|)^2 = \frac{1}{4} (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + 2\|x_1\|\|x_2\|) \\ &\leq \frac{1}{4} (\|x_0\|^2 + \|x_0\|^2 + 2\|x_0\|\|x_0\|) = \|x_0\|^2 \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\|x_0\| = \frac{1}{2} (\|x_1\| + \|x_2\|). \quad (\text{C.3})$$

De (C.3) e do fato de que $\|x_1\|, \|x_2\| \leq \|x_0\|$ concluímos que

$$\|x_1\| = \|x_2\| = \|x_0\|.$$

Da Lei do Paralelogramo, temos

$$\left\| \frac{x_1 - x_2}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) - \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\|^2 = \|x_0\|^2 - \|x_0\|^2 = 0$$

ou seja, $x_1 = x_2 = x_0$, donde $x_0 \in \text{ext}(K)$. ■

Lema C.11 *Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Se $C_1, \dots, C_m$ são subconjuntos convexos de $E_1, \dots, E_m$, respectivamente, então*

$$\text{ext}(C_1 \times \dots \times C_m) = \text{ext}(C_1) \times \dots \times \text{ext}(C_m).$$

Demonstração: É claro que é suficiente estabelecermos o caso $m = 2$. Como C_1 e C_2 são subconjuntos convexos de E_1 e E_2 , respectivamente, então $C_1 \times C_2$ é sabidamente um subconjunto convexo de $E_1 \times E_2$. Se $(x_0, y_0) \in C_1 \times C_2$, dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C_1 \times C_2$, observamos que

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &\in \text{ext}(C_1 \times C_2) \\ &\Leftrightarrow \left[(x_0, y_0) = \frac{1}{2} ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) = (x_0, y_0) \right] \\ &\Leftrightarrow \left[x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ e } y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_0 \text{ e } y_1 = y_2 = y_0 \right] \\ &\Leftrightarrow x_0 \in \text{ext}(C_1) \text{ e } y_0 \in \text{ext}(C_2) \\ &\Leftrightarrow (x_0, y_0) \in \text{ext}(C_1) \times \text{ext}(C_2) \end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

Seja C um subconjunto convexo de um espaço vetorial real E . Sejam $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear não-nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$. Diremos que o hiperplano $H = f^{-1}(\alpha)$ de E é um **hiperplano suporte em** $x_0 \in C$ se $x_0 \in H$ e

$$\alpha = f(x_0) = \sup_{x \in C} f(x).$$

Diremos também que um hiperplano H é um **hiperplano suporte de** C se H é um hiperplano suporte em algum ponto $x_0 \in C$.

Lema C.12 *Seja C um subconjunto convexo de um espaço vetorial real E . Se $H \subset E$ é um hiperplano suporte de C , então*

$$\text{ext}(C \cap H) = \text{ext}(C) \cap H.$$

Demonstração: Seja $x_0 \in \text{ext}(C \cap H)$. Então, em particular, $x_0 \in C \cap H$. Logo, para verificarmos a inclusão $\text{ext}(C \cap H) \subset \text{ext}(C) \cap H$, é suficiente mostrarmos que $x_0 \in \text{ext}(C)$. Pois bem: sejam $x_1, x_2 \in C$ tais que

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (\text{C.4})$$

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear não-nulo tais que $H = f^{-1}(\alpha)$. Como $x_0 \in C \cap H$, sabemos que H é um hiperplano suporte em x_0 . Logo,

$$f(x_0) = \sup_{x \in C} f(x) = \alpha.$$

Portanto $f(x_1), f(x_2) \leq \alpha$ e, de (C.4) temos

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \alpha,$$

e, conseqüentemente,

$$f(x_1) = f(x_2) = \alpha. \quad (\text{C.5})$$

Mas (C.5) garante que $x_1, x_2 \in H$. Portanto, $x_1, x_2 \in C \cap H$ e, como $x_0 \in \text{ext}(C \cap H)$, de (C.4) temos $x_1 = x_2 = x_0$, de onde segue $x_0 \in \text{ext}(C)$.

Reciprocamente, sejam $x_0 \in \text{ext}(C) \cap H$ e $x_1, x_2 \in C \cap H$. Neste caso, em particular,

$$x_0 \in \text{ext}(C) \quad \text{e} \quad x_0 \in C \cap H$$

e, conseqüentemente,

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_0,$$

isto é, $x_0 \in \text{ext}(C \cap H)$. ■

Teorema C.13 (Carathéodory-Minkowski) *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto convexo e compacto. Então,*

$$K = \text{co}(\text{ext}(K)).$$

Demonstração: Procedamos por indução com respeito à dimensão de K . O caso em que $\dim(K) = 0$ é trivial. Supondo a validade do resultado para todo compacto convexo de dimensão menor do que ou igual a m , seja K um compacto convexo de dimensão $m + 1$. Seja $L = \text{aff}(K)$. Do Teorema do Interior Relativo sabemos que $\text{int}_L(K) \neq \emptyset$. Denotemos por $\partial_L K$ a fronteira de K com respeito a L . Como

$$K = \text{int}_L(K) \cup \partial_L K$$

e essa reunião é disjunta, fixado $x_0 \in K$, temos duas situações possíveis:

- (i) Se $x_0 \in \partial_L(K)$, como $\{x_0\}$ e $\text{int}_L(K)$ são convexos e disjuntos e $\text{int}_L(K)$ é aberto em L , uma das formas geométricas de Hahn-Banach garante a existência de um hiperplano suporte $H \subset L$ de K em x_0 . Se

$$K_1 := K \cap H,$$

então K_1 é um subconjunto de L que é convexo, pois é a interseção de dois conjuntos convexos, e compacto, pois é a interseção do compacto K com o fechado H , tal que $\dim(K_1) \leq m$, pois $\text{aff}(K_1) \subset H$ e $\dim(H) = m$. Assim, como $x_0 \in K_1$, da hipótese de indução, do Lema C.12 e da Observação C.5, temos

$$x_0 \in \text{co}(\text{ext}(K_1)) = \text{co}(\text{ext}(K) \cap H) \subset \text{co}(\text{ext}(K)).$$

(ii) Se $x_0 \in \text{int}_L(K)$, então existem $x_1, x_2 \in \partial_L K$ tais que $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, para algum $0 < \lambda < 1$. De (i), $x_1, x_2 \in \text{co}(\text{ext}(K))$ e, portanto, $x_0 \in \text{co}(\text{ext}(K))$.

Fica então estabelecido que $K \subset \text{co}(\text{ext}(K))$ e, como a inclusão contrária é óbvia, a igualdade desejada é obtida. ■

Corolário C.14 *Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços vetoriais reais normados e de dimensão finita. Para cada $i = 1, \dots, m$, seja $K_i \subset E_i$ compacto e conexo. Se $T: E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow \mathbb{R}$ é um operador m -linear e $K = K_1 \times \dots \times K_m$, então existe $(x_1, \dots, x_m) \in \text{ext } K_1 \times \dots \times \text{ext } K_m$ tal que*

$$|T(x_1, \dots, x_m)| = \max \{|T(z_1, \dots, z_m)| : (z_1, \dots, z_m) \in K\}.$$

Demonstração: A compacidade e a convexidade de cada K_i garante que K é um subconjunto compacto e convexo de $E_1 \times \dots \times E_m$ (relativamente à topologia produto). Assim, como $|T|$ é uma função contínua, existe $(a_1, \dots, a_m) \in K$ tal que

$$|T(a_1, \dots, a_m)| = \max \{|T(z_1, \dots, z_m)| : (z_1, \dots, z_m) \in K\}.$$

O Lema C.10 e o Teorema de Carathéodory-Minkowski garantem que

$$\text{ext}(K) \neq \emptyset \text{ e que } K = \text{co}(\text{ext}(K)).$$

Neste caso, existem $n \in \mathbb{N}$, $(x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}), \dots, (x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \in \text{ext}(K)$ e $0 < \lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 1$ tais que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad \text{e} \quad (a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_1^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_1^{(i)}, \dots, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_m^{(i)} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} |T(a_1, \dots, a_m)| &= \left| T \left(\sum_{i_1=1}^n \lambda_{i_1} x_1^{(i_1)}, \dots, \sum_{i_m=1}^n \lambda_{i_m} x_m^{(i_m)} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_m} T(x_1^{(i_1)}, \dots, x_m^{(i_m)}) \right| \\ &\leq \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_m} |T(x_1^{(i_1)}, \dots, x_m^{(i_m)})| \\ &\leq \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_m} |T(a_1, \dots, a_m)| = |T(a_1, \dots, a_m)| \end{aligned}$$

e, consequentemente, $|T(x_1^{(i_1)}, \dots, x_m^{(i_m)})| = |T(a_1, \dots, a_m)|$ para todo $(i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, n\}^m$, ou seja, o máximo de $|T|$ em K é atingido em um elemento de $\text{ext}(K)$. O Lema C.11 assegura o resultado. ■

Referências Bibliográficas

- [1] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino, J. Seoane-Sepúlveda, *Sharp generalizations of the multilinear Bohnenblust-Hille inequality*. J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 6, 3726–3740.
- [2] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino, J. Seoane-Sepúlveda, *Optimal Hardy-Littlewood type inequalities for polynomials and multilinear operators*. Israel J. Math. **211** (2016), no. 1, 197–220.
- [3] N. Albuquerque, L. Rezende, *Asymptotic estimates for unimodular multilinear forms with small norms on sequence spaces*, Bull. Braz. Math. Soc. **52** (2021), 23–39.
- [4] N. Alon, J.H. Spencer, *The probabilistic method*, 4th edition, Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2016. xiv+375 pp.
- [5] G. Araújo, D. Pellegrino, *A Gale-Berlekamp permutation-switching problem in higher dimensions*. European J. Combin. **77** (2019), 17–30. Appl. **460** (2014), 81–96.
- [6] F. Bayart, *Maximum modulus of random polynomials*. Q. J. Math. **63** (2012), no. 1, 21–39.
- [7] J. Beck, J. Spencer, *Balancing matrices with line shifts*. Combinatorica **3** (1983), 299–304.
- [8] G. Bennett, V. Goodman, C.M. Newman, *Norms of random matrices*. Pacific J. Math. **59** (1975), no. 2, 359–365.
- [9] G. Bennett, *Schur multipliers*. Duke Math. J. **44** (1977), no. 3, 603–639.
- [10] H.P. Boas, *The football player and the infinite series*. Notices Amer. Math. Soc. **44** (1997), no. 11, 1430–435.
- [11] H.P. Boas, *Majorant series. Several complex variables* (Seoul, 1998). J. Korean Math. Soc. **37** (2000), no. 2, 321–337.
- [12] H.P. Boas, D. Khavinson, *Bohr’s power series theorem in several variables*. Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 10, 2975–2979.

- [13] H.F. Bohnenblust and E. Hille, *On the absolute convergence of Dirichlet series*, Ann. of Math. **32** (1931), 600–622.
- [14] T.A. Brown, J.H. Spencer, *Minimization of ± 1 matrices under line shifts*, Colloq. Math. **23** (1971), 165–171.
- [15] R.A. Brualdi, S.A. Meyer, *A Gale-Berlekamp permutation-switching problem*. European J. Combin. **44** (2015), part A, 43–56. (2017), 4151–4159.
- [16] B. Carl, B. Maurey, J. Puhl, *Grenzordnungen von absolut-(r, p)-summierenden Operatoren*. (German) Math. Nachr. **82** (1978), 205–218.
- [17] J. Carlson, D. Stolarski, *The correct solution to Berlekamp’s switching game*, Discrete Math. **287** (2004), 145–150.
- [18] A. Defant, D. García, M. Maestre, *Maximum moduli of unimodular polynomials*. Satellite Conference on Infinite Dimensional Function Theory. J. Korean Math. Soc. **41** (2004), no. 1, 209–229.
- [19] A. Defant, D. García, M. Maestre, P. Sevilla-Peris, *Dirichlet series and holomorphic functions in high-dimensions*, New Mathematical Monographs: 37, Cambridge University Press (2019).
- [20] A. Defant, M. Mastyło, *Subgaussian Kahane–Salem–Zygmund inequalities in Banach spaces*, preprint (2020), 47 pp. arXiv:2008.00429.
- [21] S. Dineen, R.M. Timoney, *Absolute bases, tensor products and a theorem of Bhor*, Studia Math. **94** (1989), 227–234, MR **91e**:46006
- [22] P.C. Fishburn, N.J.A. Sloane, *The solution to Berlekamp’s switching game*, Discrete Math. **74** (1989), 263–290.
- [23] G.B. Folland, *Real Analysis: modern techniques and their applications*, 2nd ed, Pure and Applied Mathematic, Wiley-Interscience Publications (1999).
- [24] K.J. Horadam, *Hadamard matrices and their applications*, Princeton University Press (2007).
- [25] J.-P. Kahane, *Some random series of functions*, second ed., Cambridge University Press (1985).
- [26] G. Kalai, L.J. Schulman, *Quasi-random multilinear polynomials*. Israel J. Math. **230** (2019), no. 1, 195–211.
- [27] H. Kharaghani and B. Tayfeh-Rezaie, *A Hadamard matrix of order 428*, J. Combin. Des. **13** (2005), 435–440.
- [28] S. Lang, *Complex Analysis*, 4th edition, Graduate Texts in Mathematics 103, Springer (1999).
- [29] E.L. Lima, *Álgebra Linear*, 8ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA (2014).

- [30] A. Mantero, A. Tonge, *The Schur multiplication in tensor algebras*, *Studia Math.* **68** (1980), no. 1, 1–24.
- [31] F.E.B. Martinez, C.G.T.A. Moreira, N.C. Saldanha, E. Tengan, *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, 5ª edição, Projeto Euclides, IMPA (2018).
- [32] M. Mastyło, R. Szwedek, *Kahane-Salem-Zygmund polynomial inequalities via Rademacher processes*. *J. Funct. Anal.* **272** (2017), no. 11, 4483–4512.
- [33] D. Pellegrino, A. Raposo Jr, *Constants of the Kahane-Salem-Zygmund inequality asymptotically bounded by 1*, *J. Funct. Anal.* **282** (2022), 109293, 21pp.
- [34] D. Pellegrino, A. Raposo Jr, *Upper bounds for the constants of Bennett’s Inequality and the Gale-Berlekamp switching game*, preprint (2022), 20 pp. arXiv:2111.00445v2.
- [35] D. Pellegrino, D. Serrano-Rodríguez, J. Silva, *On unimodular forms with small norms on sequence spaces*, *Linear Algebra Appl.* **595** (2020), 24–32.
- [36] D. Pellegrino, J. Silva, E. Teixeira, *On a continuous Gale-Berlekamp switching game*, to appear in *An. Acad. Brasil. Ciênc.*
- [37] J. Santos, T. Velanga, *On the Bohnenblust-Hille inequality for multilinear forms*. *Results Math.* **72** (2017), no. 1-2, 239–244.
- [38] J.H. Spencer, *Discrete Ham Sandwich Theorems*, *Europ. J. Combinatorics* **2** (1981), 291–298.
- [39] J.H. Spencer, *Ten lectures on the probabilistic method*. Second edition. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 64. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994.
- [40] N.Th. Varopoulos, *On an inequality of von Neumann and an application of the metric theory of tensor products to operators theory*. *J. Funct. Anal.* **16** (1974), 83–100.

Índice Remissivo

- combinação linear convexa, 69
- conjunto assintoticamente denso, 56
- envoltória
 - afim, 71
 - convexa, 69
- forma m -linear, 1
- operador m -linear, 1
- Gale-Berlekamp, 37
- hiperplano suporte, 74
- inteiro de Hadamard, 49
- jogo das luzes, 37
- m -matriz, 2
- matriz de dimensão m , 2
- matriz de Hadamard, 49
 - normalizada, 50
- ordem de Hadamard, 49
- p -norma, 1
- ponto extremo, 67
- Princípio de Phragmén-Lindelöf, 58
- produto de Kronecker, 52
- Teorema
 - da Aproximação de Dirichlet, 54
 - das Três Linhas, 61
 - de Carathéodory-Minkowski, 75
 - de Interpolação de Riesz-Thorin, 62
 - de Sylvester, 51
 - do Interior Relativo, 72
- variedade afim, 71