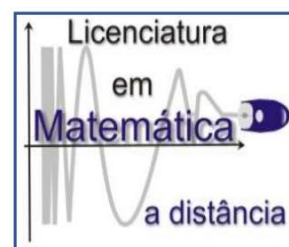




UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA
NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA



MÁRIO JOSÉ RODRIGUES BEZERRA

O PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET: TRATAMENTO E
PROBLEMAS PARA O ENSINO MÉDIO

JOÃO PESSOA

2022

MÁRIO JOSÉ RODRIGUES BEZERRA

**O PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET: TRATAMENTO E
PROBLEMAS PARA O ENSINO MÉDIO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora do Departamento de matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Nacib Gurgel Albuquerque / UFPB.

JOÃO PESSOA

2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

B574p Bezerra, Mário José Rodrigues.

O princípio das gavetas de Dirichlet: tratamento e problemas para o ensino médio / Mário José Rodrigues Bezerra. - João Pessoa, 2022.

33 f. : il.

Educação à Distância, UFPB.

Orientação: Nacib Gurgel Albuquerque.

TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Princípio de Dirichlet. 2. Resolução de problemas matemáticos. 3. Ensino de matemática. I. Albuquerque, Nacib Gurgel. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

MÁRIO JOSÉ RODRIGUES BEZERRA

O PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET: TRATAMENTO E PROBLEMAS PARA
O ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora do Departamento de matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

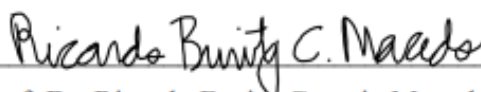
Aprovada em: 15 / 06 / 2022.

BANCA EXAMINADORA



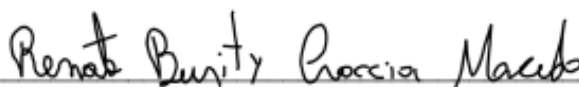
Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque
(Orientador)

Universidade Federal da Paraíba (UFPB)



Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo

Universidade Federal da Paraíba (UFPB)



Prof. Me. Renato Burity Croccia Macedo

À minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Muito obrigado, meu Deus, por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

À minha querida avó Maria da Glória, pelo carinho, compreensão, amor, e por me acolher em sua casa quando eu tinha apenas sete anos de idade e cuidar de mim como um filho e me fazer o homem que sou hoje.

A meu avô Abílio por ter me pego no colo quando criança e fazendo-me um de seus filhos, com o senhor aprendi o necessário para ser um homem de caráter.

Ao meu pai José Mário, sua presença significou segurança e a certeza de que não estou sozinho nessa caminhada e, apesar de todas as dificuldades, me fortaleceu; você é e será, em todos os momentos da minha vida, o meu maior mestre.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque, pelo apoio, confiança e empenho dedicado à elaboração deste trabalho, pelas suas correções e incentivo.

A todos os professores e funcionários da Universidade Federal da Paraíba, e do Polo de Alagoa Grande-PB que oportunizaram a janela de onde hoje vislumbro um horizonte mais amplo e cheio de oportunidades.

Aos meus amigos que conquistei no curso (aqui não comento o nome de todos para não correr o risco de esquecer algum), por todos os momentos que passamos juntos ao longo dessa vida acadêmica. A experiência adquirida com vocês foi única.

À minha esposa Fabia Cordeiro, obrigado pela paciência e compreensão durante todos esses semestres, obrigado por sua capacidade de me trazer paz na correria do dia a dia, com você tenho encontrado o verdadeiro significado do amor.

“O oposto de uma afirmação correta é uma afirmação falsa. Mas o oposto de uma verdade profunda pode ser outra verdade profunda”.

Niels Bohr.

RESUMO

O Princípio de Dirichlet é muito conhecido como o Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas e pode ser apresentado como uma ferramenta importante no processo de ensino e aprendizagem de alunos do ensino médio, buscando despertar nos alunos o interesse pelos estudos e assim os projetarem para um futuro acadêmico, contribuindo socialmente com suas pesquisas. O Princípio das Gavetas é simples e intuitivo, o que possibilita que este princípio tenha uma funcionalidade didática em sala de aula na resolução de problemas matemáticos. Podemos mencionar que o Princípio de Dirichlet, apesar de ter uma fácil compreensão, é possível, a partir dele, resolver problemas de alta complexidade. Tal Princípio é uma ferramenta que possibilita a resolução problemas matemáticos de vários níveis de dificuldade, contudo o que veremos nesse trabalho é a utilização do mesmo utilizado como objeto didático no ensino médio.

Palavras-chaves: Princípio de Dirichlet; Resolução de problemas; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

The Dirichlet Principle is well known as the Pigeonhole Principle or Drawer Principle and can be presented as an important tool in the teaching and learning process of high school students and from this Principle seek to arouse in students an interest in studies and thus projecting them to an academic future and contributing socially with their research. The Drawer Principle is simple and intuitive, which makes it possible for this principle to have a didactic functionality in the classroom in solving mathematical problems. We can mention that the Dirichlet Principle, despite having an easy understanding, it is possible, from it, to solve problems of high complexity. In other words, The Pigeonhole Principle is a tool that makes it possible to solve mathematical problems of various levels of difficulty, however what we will see in this work is the use of Dirichlet's Principle of Drawers used as a didactic object in high school.

Keywords: Dirichlet's Principle; Problem solving; Teaching Mathematics.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	11
2. DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO	12
3. O PRINCÍPIO DE DIRICHLET.....	15
3.1 O PRINCÍPIO DE DIRICHLET USADO COMO OBJETO DIDÁTICO	15
3.2 O PRINCIPIO DE DIRICHLET	16
3.3 APLICAÇÕES E PROBLEMAS PROPOSTOS	19
4. PROBLEMAS PROPOSTOS PARA SALA DE AULA	25
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	33
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	34

1- INTRODUÇÃO

É baseado na história que muitos fatos são explicados a sociedade e é por meio desta ciência que, na maioria das vezes, a matemática se fundamenta para explicar a forma a qual uma determinada teoria foi construída. Deste modo, a História da Matemática é muito importante, pois surge da necessidade que o homem tem em resolver alguns problemas do seu dia a dia, e usada como ferramental metodológico, tem um alto potencial para ajudar no processo de ensino e aprendizagem daqueles que desejam aprender Matemática. Segundo D'Ambrósio (1996), a História da Matemática utilizada como objeto no processo de ensino de Matemática possibilita que os envolvidos tenham um entendimento de como surgiram e se desenvolveram os assuntos em matemática, como exemplo, O Princípio da Casa dos Pombos de Dirichlet.

Diante do que se mencionou acima busca-se responder as seguintes perguntas: Como a História da Matemática pode ajudar a entender o Princípio das Gavetas de Dirichlet? Como o Princípio das Gavetas de Dirichlet pode ser utilizado no ensino de Matemática para desenvolver as habilidades dos alunos em resolução de problemas?

O princípio das gavetas de Dirichlet, a priori, é considerado como um Princípio que apresenta nível médio de dificuldade de compreensão, mas é necessário mencionar, que na verdade o princípio de Dirichlet não é tão complexo como se parece. Além disso, tudo está relacionado com o princípio das Gavetas é apresentado. Visto que o Princípio de Dirichlet pode ser abordado de forma mais didática, o que favorece seu entendimento, já que esse Princípio pode ser trabalhado utilizando problemas relacionados ao dia a dia das pessoas. Dessa forma é possível que professores do ensino básico possam inserir o ensino do Princípio das Casas dos Pombos, não sendo considerado como um mero conteúdo trabalhado em sala de aula e que compõe o plano de curso, mas sim como um objeto didático para a resolução de problemas ligados a diversas áreas da Matemática. E, assim, buscando o despertar nos alunos o interesse pelas aulas de Matemática e os engajando nos estudos e os motivando para investir cada vez mais no universo dos estudos e da investigação. Por fim, deve-se entender que o Princípio de Dirichlet ajuda o desenvolvimento do indivíduo usando as mais diversas situações problemas do cotidiano e tudo isso sem o uso restrito de fórmulas.

2. DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO

A princípio vale ressaltar a importância de entender-se todo o processo de desenvolvimento do Princípio da Casa dos Pombos, esse princípio foi mencionado pela primeira vez, indiretamente, no livro *Selectae Propositiones*, escrito em latim datado de 1622 pelo jesuíta francês Jean Leurechonem na frase que dizia: “Necesse est, duos hominum, habere totidem número pilos, aureos, & similia.”, que traduzindo: “É necessário, para dois de homens, tendo o mesmo número de cabelos, com moedas ouro e semelhantes”, (LEURECHON , 1622).

Em 1624 o Princípio das gavetas foi citado no livro *Recreation mathematicque*; composee de plusieurs problemes plaisants et facetieux; “en faict d'arithmeticque geometrie, mechanicque, opticque, et autres parties de ces belles sciences”, que traduzindo temos: Recreação matemática; composta de vários problemas agradáveis e facetas; na verdade, da geometria, mecânica, óptica e outras partes dessas belas ciências (HANZLET,1624).

Já em 1625 o livro *La Vérité des sciences* escrito por Marin Mersenne, trouxe diversas proposições de aritmética, incluindo o Princípio das Gavetas. Há registro do Princípio no ano de 1737, na obra “*Ouvrages de morale et de politique*”, escrita por Charles-Irénée, neste livro o princípio da Casa de Pombos apareceu dentro de um contexto não matemático, de acordo com Charles irénée o trecho diz: “eu disse a ele que um dia eu poderia apostar e provar que havia pelo menos dois habitantes em Paris que tinham até um certo número de cabelos, embora eu não pudesse identificar quem eram esses dois homens,” vale salientar que quando foi mencionado O Princípio das Gavetas anteriormente, não se tinha o conhecimento do conceito que se conhece hoje, isto é, não havia uma nomenclatura específica para se referir o tal Princípio.

Consonante com Silva (2020, p.59), o conceito do Princípio da casa dos Pombos aparecia nas obras de maneira isolada e não tinha ligação um com o outro, deve-se ficar claro que não se sabe quem foi o criador do Princípio das Gavetas, esse Princípio não tinha um nome específico. Com o passar dos tempos, os trabalhos de Dirichlet tomavam referência para o Princípio da Casa dos Pombos, lembrando que é possível dizer que Dirichlet não foi o primeiro a tratar do tema. Mas quem foi Dirichlet? Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet foi um matemático Alemão que nasceu no dia 13 de fevereiro de 1805

em Düren, região que pertencia ao império francês e atualmente pertence à Alemanha. Como mencionado anteriormente, ele é considerado o criador do Princípio da Casa dos Pombos. Suas primeiras contribuições para matemática se deram em 1825, mas não foi com O Princípio das Gavetas.

De acordo com Silva (2020, p.219), deve-se chamar atenção para o fato que o princípio das Gavetas de Dirichlet já era utilizado a pelo menos 2 séculos antes de Dirichlet como comprovamos nas obras de Jean Leurechon. Outro fato interessante é que o Princípio das Gavetas aparecia nos livros, mas não tinha um nome específico e nem era tratado como uma teoria matemática, ou seja, o Princípio das Gavetas em algumas situações não se relacionava ao contexto matemático, como exemplo, no trecho do livro de moralidade e política de Saint-Pierre. No entanto, foi Dirichlet que formalizou matematicamente O Princípio na construção da teoria dos números, tendo como principal trabalho o desenvolvimento das equações diofantinas, ainda assim, o tal princípio ainda não possuía uma denominação própria que o caracterizasse. Seu nome só apareceu em 1940 na obra de Robinson, em que o princípio foi chamado de Pigeonhole Principle, que em tradução, significa, “Casa dos Pombos”. De modo geral, as “casas dos pombos” citadas, são pequenos compartimentos para guardar papéis ou cartas, como visto na figura 1.



Figura 1, imagem de um pigeonhole. Fonte: Google

Consoante com Silva (2020, p.219), acredita-se que O Princípio das Gavetas recebeu esse nome porque o pai de Dirichlet trabalhava nos correios e os móveis em que as cartas ficam são compartimento ou gavetas.

Em uma breve revisão literária constatou-se que O Princípio de Dirichlet foi utilizado em diversos contextos. É visto que Dirichlet utilizou esse princípio na teoria dos números, não podendo esquecer que esse princípio foi utilizado em um contexto totalmente diferente do que Dirichlet propôs, como visto nas entrelinhas do livro escrito em latim datado de 1622 pelo jesuíta francês Jean Leurechon, onde afirmou: “desnecessário será dizer que dois homens têm o mesmo número de cabelos, moedas de ouro e similares”. Esse princípio ainda foi visto na obra de Jean Appier Hanzelet no livro de Recreação matemática que trazia diversos problemas agradáveis e facetas. Por fim, Dirichlet aprofunda seus estudos a aplicando O Princípio das Gavetas na teoria das formas quadráticas relacionando-o com os números complexos e cada vez mais a generalizando (SILVA, 2020).

3. O PRINCÍPIO DE DIRICHLET

3.1 O PRINCÍPIO DE DIRICHLET USADO COMO OBJETO DIDÁTICO

Devemos chamar a atenção para um ponto muito importante, durante toda educação básica, mais precisamente no ensino fundamental II e o ensino médio, é bastante comum se trabalhar em sala de aula o conteúdo Análise Combinatória. Por outro lado, dificilmente o Princípio de Dirichlet é apresentado no ensino médio. Partindo dessa observação poderíamos levantar o seguinte questionamento: seria possível trabalhar o Princípio de Dirichlet em sala de aula no ensino médio. Inicialmente é necessário compreendermos a diferença entre a Análise combinatória e o Princípio de Dirichlet. De acordo com Carvalho (2006) a Análise Combinatória pode ser chamada de "arte de contar", e é tida como uma área da matemática que causa temor ou desagrado aos alunos do ensino médio. De modo geral é muito conhecida como combinatória, esse ramo da Matemática trata de diversas questões fascinantes cujos enunciados são extremamente simples, mas que exigem, por vezes, para sua solução, raciocínios complexos. Já o Princípio da Casa Dos Pombos, ou também, conhecido por princípio de Dirichlet é um princípio básico da Combinatória que possui diversas aplicações. Embora se trate de uma um conceito extremamente elementar, tal princípio é bastante útil para resolver problemas que, pelo menos à primeira vista, não são imediatos. Para aplicá-lo, devemos identificar, na situação dada, quem faz o papel dos pombos e quem faz o papel das casas.

Como o objetivo desse trabalho é abordar O Princípio da Casa dos Pombos em sala de aula como objeto didático, devemos entender como se dá o processo de ensino e aprendizagem utilizando a resolução de problemas. A priori, a resolução de problemas durante muito tempo é alvo de estudos e pesquisas. E sem dúvida a resolução de problemas é metodologia de ensino muito utilizada, analisando-se a relação entre ensino de Matemática e resolução de problemas. Dessa forma, é visto na literatura que existe três modos diferentes de abordar essa temática: ensinar sobre resolução de problemas; ensinar a resolver problemas e ensinar por meio da resolução de problemas (ONUChic, 1999).

O primeiro modelo citado, aborda a forma de ensinar sobre resolução de problemas e consiste em evidenciar o estudo sobre os modelos e procedimentos utilizados para a resolução de problemas, esse modelo tem como base a estrutura de resolução de problemas de Polya, que consiste em: compreender o problema; construir um plano de ação; executar o plano e rever a resolução. Vamos resolver um problema par exemplificar

a utilização do processo de resolução de problemas pelo método de Polya. Vejamos o exemplo:

Num sítio há vacas e galinhas num total de 35 animais e 100 patas (pés dos animais). Quantas são as vacas e quantas são as galinhas?

Solução. Pelo método de Polya devemos identificar inicialmente as incógnitas, logo, temos que nossas incógnitas é o número de vacas (x) e números de galinhas (y) que existe no sítio, sabendo que $x + y = 37$ e que $4x + 2y = 100$. Segundo passo é construir um plano de ação, que neste caso, devemos utilizar a técnica de resolução de sistema de equação do primeiro grau. Já que temos duas incógnitas e duas equações. Terceiro passo, é a execução do plano traçado anteriormente. Ou sejam, resolver o sistema de equações do primeiro grau. Mas antes, é necessário multiplicar $x + y = 35$ por -2, dessa forma vamos obter.

$$\begin{cases} -2x - 2y = -70 \\ 4x + 2y = 100 \end{cases}$$

Em seguida basta somar as duas equações, com isso, temos $2x=30$; $x=15$. Substituindo o valor de x na segunda equação teremos $4 \cdot (15) + 2y = 100$; $2y = 100-60$; $y=20$. O quarto e último passo é rever a resolução do problema. Neste caso, basta substituir os valores encontrados em uma das equações. Vamos escolher a equação 2. Do passo 3 temos que $x = 15$ e $y = 20$, substituindo, teremos $4 \cdot (15) + 2 \cdot (20) = 60+40=100$. Com esse resultado podemos concluir que os passos tomados estavam certos.

No segundo modelo, ensinar a resolver problemas, o professor se concentra nas formas como os problemas matemáticos podem ser resolvidos e como chegar à sua resposta. Concentra-se o processo no ato de ensinar a resolver corretamente os problemas e como utilizar processos, procedimentos e conhecimentos matemáticos para isso. Já no ensino por meio da resolução de problemas, estes são vistos não só como ponto de partida para a aprendizagem da Matemática, mas também, como o meio principal de fazê-lo.

Nessa perspectiva, o ensino de determinado conteúdo matemático começa com uma situação problema e, a partir dela, são desenvolvidas discussões que levam à elaboração daquele conteúdo pelos alunos. Como exemplos, se um pedreiro vai colocar

cerâmica em um quarto que tem 6 metros de comprimento e 3 metros de largura. Quantos metros quadrados são necessários para revestir esse piso? essa aprendizagem pode ser entendida como um movimento onde se parte de um problema do mundo real, para sua posterior aplicação.

3.2 O PRINCÍPIO DE DIRICHLET

Pode-se dizer que o Princípio das Gavetas de Dirichlet é um resultado simples e intuitivo. Salientamos que tal princípio trata de com números inteiros e positivos. Simplificadamente esse princípio é enunciado da seguinte maneira, usando a analogia da “casa dos Pombos”:

“Se tivermos $n+1$ pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter dois pombos.”

Genericamente, basta distribuir os $n+1$ pombos nas n casas que está disponível, obviamente percebe-se que em uma das casas ficará com um pombo a mais. Formalmente podemos enunciar o resultado no formato a seguir. Para tanto, uma terminologia é útil: seja X um conjunto arbitrário. A partição disjunta de X é qualquer coleção P de subconjuntos não vazios de X que satisfaça a seguinte propriedade:

“todo elemento de X deve pertencer a um e apenas um dos elementos de P .”

Logo, uma coleção de conjuntos $P = \{A_i\}_{i \in I}$ é uma partição disjunta do conjunto X , se as seguintes condições forem simultaneamente satisfeitas:

(i) $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$ e $A_i \subset X$;

(ii) $X = \bigcup_{i \in I} A_i$;

(iii) $\{A_i\}$ é uma família mutuamente disjunta, i.e., $A_{i_1} \cap A_{i_2} = \emptyset$ sempre que $i_1 \neq i_2$, com $i_1, i_2 \in I$.

Exemplo 1. Seja $X = \{1, 3, 7\}$, então a partição disjunta de X é dada por $P = \{\{1\}, \{3\}, \{7\}\}$, como $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{3\}$ e $A_3 = \{7\}$. É fácil notar que $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, igualmente visto na condição 3 anunciada anterior mente.

Exemplo 2. Dado $X = \{1, 2, \dots, 10\}$, então a coleção $\{A_1, \dots, A_{10}\}$, com $A_n = \{n\}$ para $n = 1, 2, \dots, 10$, é uma partição disjunta de X .

Exemplo 3. $X = \mathbb{R}$, e $\{A_i\}_{i \in \mathbb{R}}$ com $A_i = \{i\}$, é uma partição disjunta de $\mathbb{R}$.

Teorema (Princípio de Dirichlet). Sejam $n \in \mathbb{N}$ e X um conjunto com $n+1$ elementos. Se $\{A_1, \dots, A_n\}$ é uma partição disjunta de X , então existe algum subconjunto não vazio (de X) A_j com 2 elementos.

É possível buscar demonstrar esse princípio de várias formas. Neste trabalho apresentaremos apenas uma das diversas formas possíveis de demonstrações do resultado. Mas antes de provarmos o Princípio da Casa dos Pombos uma definição é importante.

O método da indução finita é um procedimento matemático para provar propriedades que são verdadeiras para uma sequência de objetos. É um método bastante utilizado em teoria dos números, geometria, análise combinatória etc. Mas trata-se de um tipo de demonstração que pode aparecer em qualquer domínio da Matemática. De modo geral, Seja $P(n)$ um enunciado que descreve uma propriedade sobre um número natural n maior ou igual a um número natural n_0 fixado. Logo, se pudermos provar que valem as duas condições:

Condição 1. $P(n_0)$ é verdadeira (ou seja, vale a propriedade para n_0);

Condição 2. É verdadeira a implicação $P(n) \rightarrow P(n+1)$ para todo $n \geq n_0$. Então podemos afirmar que a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

No uso prático, para provar um teorema por indução finita devemos assim mostrar que as duas condições do princípio acima estão satisfeitas. Isso nos garante a validade da propriedade para a infinidade de casos aos quais o teorema faça referência. Abaixo iremos provar o Princípio da casa dos Pombos pelo Métodos da Indução Finita.

Prova (Indução). Vamos provar este Princípio por Indução Matemática sobre o número n de gavetas. Para $n = 1$, o resultado é óbvio pois, se temos mais de um objeto e uma só gaveta, teremos que acomodar nesta gaveta mais de um objeto. Suponha então o resultado válido para um certo número n de gavetas e consideremos a situação de termos $n+1$ gavetas e $m > n+1$ objetos. Queremos mostrar que o resultado vale também neste caso, para aplicar a Indução Matemática e concluir que vale para todo número natural n . Depois de acomodar todos os objetos nas $n+1$ gavetas, escolha uma gaveta ao acaso. Se nesta gaveta há mais de um objeto, a nossa asserção está provada. Se nesta gaveta não há

nenhum objeto, nas n gavetas restantes estão acomodados $m > n + 1 > n$ objetos, o que, pela hipótese de indução, acarreta que em uma das gavetas há mais de um objeto. Se na gaveta escolhida há um objeto, logo, nas n gavetas restantes, estão distribuídos $m - 1 > n$ objetos, o que, novamente, pela hipótese de indução, acarreta que em uma das gavetas há mais de um objeto (HEFEZ, 2007, p. 69).

Há versões mais gerais do Princípio das Gavetas. Apresentaremos duas versões generalizadas, segundo PACÍFICO, a seguir.

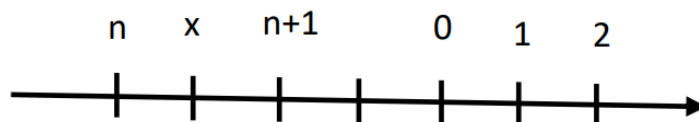
Proposição 1 (Princípio de Dirichlet Generalizado 1). Sejam k e N inteiros positivos. Se distribuirmos $kN+1$ objetos em N gavetas, então em alguma gaveta temos pelo menos $k+1$ objetos.

Demonstração. Denotemos por x_i o número de objetos contidos na gaveta i , com i pertencente ao conjunto $\{1, 2, 3, \dots, N\}$. Mesmo não sabendo do valor inicial de x_i , sabe-se que o valor da soma $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N = kN+1$. Suponhamos que não temos mais do que k objetos em cada uma das N gavetas. Com isso, obteríamos

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N \leq kN < kN+1,$$

o que contradiz o fato de termos da soma $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N)$ ser igual à $kN+1$ objetos. Portanto, uma das gavetas irá conter pelo menos $k+1$ objetos. Como queríamos demonstrar.

Para apresentarmos a próxima versão generalizada do princípio, necessitamos recordar as seguintes notações e definições. Para um $x \in \mathbb{R}$, $[x] = n \in \mathbb{Z}$, tal que $n \leq x < n+1$. Onde $[x] \leq x$. Dessa forma, se $x \leq y$ teremos $[x] \leq [y]$. Como na imagem abaixo.



Note que:

$$[x] = n$$

$$[x] = n+1$$

Proposição 2 (Princípio de Dirichlet Generalizado 2). Sejam k e N inteiros positivos. Se k objetos são colocados em N gavetas, então alguma gaveta deve conter ao menos $\left\lfloor \frac{k-1}{N} \right\rfloor + 1$ objetos.

Demonstração. suponhamos que em cada uma das N gavetas, temos no máximo $\left\lfloor \frac{k-1}{N} \right\rfloor$ objetos, logo o total de objetos é dado por

$$N \cdot \left\lfloor \frac{k-1}{N} \right\rfloor \leq N \cdot \left(\frac{k-1}{N} \right) = k-1 < k,$$

o que é uma contradição. Como queríamos demonstrar.

Após a generalização do princípio das gavetas de Dirichlet podemos observar algumas aplicações bem interessantes.

3.3 APLICAÇÕES E PROBLEMAS PROPOSTOS

Problema 1. Caso tenha um grupo de 13 pessoas, então, com certeza, duas delas fazem aniversário no mesmo mês.

Solução. Pelo princípio da casa dos pombos, se houvesse mais pessoas (13) do que meses (12) é certo que pelo menos duas pessoas terão nascido no mesmo mês.

Problema 2. (Média Aritmética): Se $\bar{x}$ é a média aritmética de uma lista de números, então, mostre que pelo menos um desses números é maior que ou igual a $\bar{x}$, assim como, pelo menos um deles é menor que ou igual a $\bar{x}$.

Solução. Para iniciarmos a resolução desse problema devemos saber que a média aritmética é considerada uma medida de tendência central e é muito utilizada no cotidiano. Surge do resultado da divisão do somatório dos números dados pela quantidade de números somados. Como exemplo, vamos determinar a média dos números 3, 12, 23, 15, 2. Logo, Média Aritmética = $(3+12+23+15+2) / 5 = 55 / 5$ Ma = 11.

Vale lembrar que a média não pode ser maior que todos os números e que também não pode ser menos que todos os números. Ou seja, a média deve estar entre o menor e o maior número ou pode ser igual a todos eles. Como exemplo, a média destas sequencias

$$\frac{1+2+3+6+8}{5} = 4.$$

e

$$\frac{4+4+4+4+4}{5} = 4.$$

Consideremos que $x_1 < \bar{x}$, $x_2 < \bar{x}$, $x_3 < \bar{x}$, ..., $x_n < \bar{x}$. Somando todos os termos dessa desigualdade temos $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n < n \cdot \bar{x}$, sendo n um número inteiro positivo. Agora vamos dividir a igualdade por n . Dessa forma, temos: $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} < \bar{x}$. Sendo que a parte esquerda da igualdade é igual a $\bar{x}$. Logo temos que $\bar{x} < \bar{x}$ o que é um absurdo. De forma análoga provamos que existem pelo menos um número maior que ou igual a média.

Problema 3. Sejam O e G dois conjuntos finitos com m e n elementos respectivamente. Mostre pelo Princípio de Dirichlet que se $m > n$, então não existe uma função injetora de O em G .

Solução. Dizemos que uma função, $f : O \rightarrow G$ é injetora se elementos diferentes de O são transformados por f em elementos diferentes em G , isto é, se $o_1, o_2 \in O$, são tais que $o_1 \neq o_2$, então $f(o_1) \neq f(o_2)$. Dessa forma é possível utilizar essa proposição igualmente no contexto do Princípio das Gavetas. De modo geral, uma função é injetora se temos uma única e exclusiva gaveta para cada objeto. Portanto, isso só é possível se o número de objetos for menor ou igual ao número de gavetas, pois, caso contrário, alguma gaveta necessariamente irá ter mais de um objeto. Dessa forma teremos pelo menos dois objetos $o_1, o_2 \in O$, $o_1 \neq o_2$, que estão na mesma gaveta, ou seja, $f(o_1) = f(o_2)$.

Problema 4. Se d for o mdc de dois números naturais não nulos a e b , mostre então que existem números inteiros x e y tais que $d = ax + by$.

Solução. Antes de mais nada devemos saber que o máximo divisor comum de dois números inteiros a e b , denotado por $\text{mdc}(a, b)$, é o maior número inteiro que divide ambos. Assim, $\text{mdc}(a, b) = \max\{d \mid d \text{ divide } m \text{ e } k \text{ divide } n\}$.

Para demonstrar a resolução desse problema iremos utilizar o teorema de Bézout. Observemos que $d = ax + by$ se, e somente se $1 = \left(\frac{a}{d}\right)x + \left(\frac{b}{d}\right)y$. Logo, sem perda de generalidade, podemos supor que $d = 1$, ou seja, que a e b são primos entre si, ou seja, dois números são chamados de primos entre si, quando o seu único divisor em comum é a unidade. Desta definição resulta que o mdc (Máximo Divisor Comum) entre esses dois números é o número 1. Assim, dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $\text{mdc}(a, b) = 1$, queremos mostrar que existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $ax + by = 1$. Levemos em consideração os subconjuntos, $A =$

$\{a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, \dots, ba\}$ e $R = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{N}; 2 \leq z \leq b-1\}$. Se em A não existe um elemento que deixe resto 1 quando dividido por b , temos que os restos da divisão dos elementos de A por b estão em R . Assim, considerando os elementos de A como objetos e os elementos de R como gavetas, de modo geral, um elemento de A está na gaveta $k \in R$ se quando dividido por b deixar resto k , pelo Princípio das Gavetas Dirichlet, teremos que pelo menos dois elementos de A estarão na mesma gaveta. Logo existem $ia, ja \in A$, tais que $1 \leq i < j \leq b$ e $ia = q_1 b + r, ja = q_2 b + r$, para únicos $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ e $r \in R$.

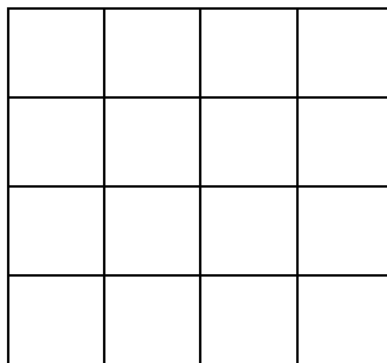
Por fim, obtemos, $ja - ia = (q_1 - q_2)b = K \cdot b$, para algum $K \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, b é um divisor de $(j-i)a$ e, como a e b são primos entre si, temos que necessariamente b é um divisor de $j-i$, o que é uma contradição, pois $b > j-i > 0$. Portanto, algum dos elementos de A deixa resto 1 quando dividido por b , ou seja, se xa for este elemento, temos que $xa = qb + 1$, para algum $q \in \mathbb{Z}$. Assim, $1 = xa - qb = xa + yb$, com $y = -q \in \mathbb{Z}$.

Problema 5. Ao escolher 101 números dentre os elementos do conjunto $A = \{1, 2, \dots, 200\}$. Mostre que, entre os números escolhidos, há dois números tais que um deles é divisível pelo outro.

Solução. Inicialmente devemos lembrar que todo número inteiro n pode ser escrito da seguinte forma $n = 2^k \cdot b$, onde k é um número inteiro não negativo e b é um número inteiro ímpar. Por exemplo, $2 = 2^1 \cdot 1, 3 = 2^0 \cdot 3, 4 = 2^2 \cdot 1$ e assim por diante. Desse modo suponha que n pertence ao conjunto A e que b é um número ímpar: $1, 3, 5, 7, \dots, 199$. É importante lembrarmos que de 1 até 10 existem 5 números ímpares, de 11 até 20 também existem 5 números ímpares, logo é possível perceber que de 1 até 200, ou seja, no conjunto A , existem 100 números ímpares. Afirmamos que ao escolhermos 101 números do conjunto A , dois terão partes ímpares iguais. Isto é consequência do Princípio da Casa dos Pombos. De fato, vamos considerar 100 gavetas, os ímpares de 1 a 199, em que cada gaveta "guarda" números com a mesma "parte ímpar" de 1 a 199. Por exemplo, $30 = 2 \cdot 15$ e $60 = 4 \cdot 15$ estão na gaveta 15. Portanto, pelo Princípio das casas dos pombos, qualquer que seja a forma de selecionar 101 números de 1 a 200, há dois números com a mesma parte ímpar. Sejam n_1 e n_2 estes números, ou seja, $n_1 = 2^{k_1} \cdot b$ e $n_2 = 2^{k_2} \cdot b$. Se $k_1 < k_2$, logo n_1 divide n_2 , já que $\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_2 = 2^{k_2} \cdot b}{n_1 = 2^{k_1} \cdot b} = 2^{k_2 - k_1}$. Se considerarmos $k_2 < k_1$, a prova acontece de forma análoga, neste caso n_1 divide n_2 . Isso era o que queríamos demonstrar.

Problema 6. Se escolhermos 17 pontos aleatoriamente dentro de um quadrado de área 16, então existem ao menos 2 pontos cuja distância de um para o outro é menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução. Observe que queremos provar a existência de certo subconjunto dos pontos (2 pontos) cujos elementos estão em uma certa relação (distam um do outro de no máximo $\sqrt{2}$). Vamos considerar P como sendo o conjunto dos pontos e C como sendo o conjunto dos quadrados unitários desenhados dentro do quadrado de área 16:



Do enunciado temos que o número de pontos (pombos) é igual a 17 e considerando que a quantidade de quadrados unitários (casas) é igual a 16, temos que, pelo menos, dois pontos devem ficar no mesmo quadrado unitário e sabendo que a diagonal do quadrado unitário mede $\sqrt{2}$, concluímos que existem ao menos dois pontos que estão a uma distância menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Problema 7. Se uma urna contém 4 bolas vermelhas, 7 bolas verdes, 9 bolas azuis e 6 bolas amarelas, qual é o menor número de bolas que devemos retirar (sem olhar) para que possamos ter certeza de termos tirado pelo menos 3 bolas de uma mesma cor?

Solução. Considere como casas as $n = 4$ cores diferentes. Como desejamos ter certeza de retirar pelo menos 3 bolas da mesma cor, consideramos $k+1 = 3$, logo $k = 2$, então se fizermos $Nk+1 = 9$ retiradas, teremos certeza de que tiramos pelo menos 3 bolas de uma mesma cor. Dessa forma esse é o menor valor possível.

Problema 8. Em Porto Alegre há pelo menos duas mulheres com a mesma quantidade de fios de cabelo na cabeça.

Solução. Cientificamente é observado que uma pessoa tem, no máximo, 500 mil fios

de cabelo na cabeça, assim temos as gavetas $0, 1, 2, \dots, 500000$. Como em Porto Alegre tem mais de 500001 mulheres, pelo princípio de Dirichlet, certamente existem duas mulheres que possuem a mesma quantidade de cabelos na cabeça.

Problema 9. São dados dois discos A e B, cada um deles dividido em 200 setores iguais, os quais estão pintados de azul e vermelho. No disco A há 100 setores azuis e 100 vermelhos, mas não sabem em que ordem. No setor não sabemos quantos são azuis e nem quantos são vermelhos. Colocamos o disco A sobre o B, de modo que os setores de A fiquem exatamente sobre os setores de B. Então é possível, girando o disco A, obter uma posição na qual pelo menos 100 setores de A tenham a mesma cor que os correspondentes de B.

Solução. Coloquemos o disco A sobre B e seja a_1 a quantidade de setores sobrepostos que têm cores iguais. Gire A de um setor, ou seja, $360/200^\circ$ deixando B fixo e seja a_2 o número de setores sobrepostos com cores coincidentes. Faça esse processo e obtenha $a_3, a_4, \dots, a_{200}$. Assim a quantidade de coincidência após 200 giros é igual a $a_1 + a_2 + \dots + a_{200}$ e esse valor é igual a 100×200 . De fato, se fixarmos um setor do disco B, digamos que seja azul, haverá 100 posições em que a cor dele coincidirá com algum de A. Logo a quantidade de coincidências é igual a 100 vezes o número de setores de B e assim

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{200}}{200} = 100 > 99.$$

Se a média aritmética dos a_i é maior que 99, então pelo menos um deles deverá ser maior ou igual a 100. Portanto em algum momento o número de coincidências é maior ou igual a 100.

4. PROBLEMAS PROPOSTOS PARA SALA DE AULA

Neste capítulo iremos propor alguns exercícios para serem trabalhados em salas de aulas do ensino médio e a partir deles, buscar que os alunos consigam desenvolver uma aprendizagem significativa, além de tentar promover interesse deles pelos conteúdos matemáticos. Devemos ter conhecimento que o Princípio da Casa dos Pombos normalmente não é um conteúdo trabalhado no médio, ficando restrito ao Ensino Superior e cursos preparatórios para concursos. A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2022) não prevê a abordagem desse conteúdo em nenhum ano específico do Ensino Médio. Porém, sugere que o desenvolvimento das habilidades dos alunos ocorra gradativamente ano a ano, e assim, aumentando a complexidade das situações problemas aos poucos, para esse aumento progressivo das dificuldades é necessário a utilização de novas ferramentas de ensino. Nesse sentido, o Princípio da Casa dos Pombos pode ser utilizado como um objeto didático eficaz.

É visto também na BNCC que é competência da disciplina de matemática o desenvolvimento do raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de argumentação. Tais habilidades podem ser desenvolvidas através do Princípio da Casa dos Pombos e da Resolução de Problemas. Para buscar a melhor forma da abordagem do Princípio da Casa dos Pombos em sala de aula, vamos sistematizar as resoluções dos exercícios em três partes, primeiro determinando as incógnitas em cada exercícios (devemos saber quem são as “caixas” e quem são os “pombos”), segundo entendendo o problema e por fim aplicando o Princípio da Casa dos Pombos.

O primeiro problema a ser trabalhado usará o conceito de média aritmética utilizado no problema de aplicação número 2.

Problema 1. Considere um grupo de 90 torcedores, distribuídos entre os seguintes times: Fluminense, Botafogo, Flamengo e Vasco. Mostre que nesse grupo há pelo menos 23 torcedores de um mesmo time.

Solução.

- 1) *Encontrando as incógnitas:* neste problema $k = 90$ (torcedores/Objetos) e $N = 4$ (times/caixas). Vale lembrar que quando nos referimos a objetos é o mesmo que nos referimos a “pombos”.

- 2) *Entendo o problema:* Devemos saber que o número da média de torcedores por time é dado por; $N = \frac{90}{4} = 22,5$. Devemos lembrar o que ao calcularmos a média aritmética de uma sequência de números, seguramente, termos pelo menos um que é maior que ou igual a essa média. O que nos leva termos a certeza que deve haver um número maior ou igual a essa média (22,50), mas como estamos tratando de pessoas é impossível que tenhamos 22,5. Sendo $[22,5]=22$.
- 3) *Aplicando o Princípio de Dirichlet:* para resolver este problema usaremos a proposição 2, que é dada por: Se k objetos são colocados em N gavetas, então alguma gaveta deve conter ao menos $\left\lfloor \frac{k-1}{N} \right\rfloor + 1$ objetos. Logo,

$$\left\lfloor \frac{90-1}{4} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{89}{4} \right\rfloor + 1 = 22 + 1 = 23$$

Problema 2. Em uma gaveta há 12 meias brancas e 12 meias pretas. Faltou luz na casa de Maria e ela não consegue enxergar a cor das meias que estão na gaveta. Quantas meias Maria deve retirar da gaveta, no mínimo, para ter certeza de que conseguirá vestir um par de meias com a mesma cor?

Solução.

- 1) *Encontrando as incógnitas:* Do enunciado temos que $N=2$ (as cores/ gavetas). O número de objetos é o que queremos determinar. Pelo Princípio de Dirichlet deve haver uma gaveta com $k+1$, que deste caso deveremos ter um par de meias, ou seja, $k+1=2$; $k=2-1$; $k=1$.
- 2) *Entendo o problema:* A primeira meia que Maria irá retirar da gaveta pode ser branca ou preta. A segunda se tiver sorte, será da mesma cor da primeira. Nesta hipótese são retiradas duas meias e a condição é satisfeita. Mas o que pode acontecer é que a segunda meia retirada pode não ser da mesma cor que a primeira, então a terceira meia deverá ser da mesma cor da primeira ou da mesma cor da segunda, já que são apenas duas possibilidades de cores. Neste caso, também há formação de um par com a mesma cor, satisfazendo a condição do problema. Portanto são necessárias, no mínimo, três meias para se ter certeza de que Maria terá um par da mesma cor para vestir. Resolvendo dessa forma pode parecer que

o exemplo proposto não tem relação com o Princípio da Casa dos Pombos. A seguir apresentaremos solução usando a terminologia da Proposição 1.

- 3) *Aplicando o Princípio de Dirichlet*: sendo $N = n^\circ$ de cores = 2 (que representam as caixas). Neste caso cada caixa separa as meias por cores. A Proposição 1 informa que se $kN+1$ de objetos (meias) são distribuídos em N caixas, então há alguma caixa com ao menos $k+1$ meias (objetos). Como devemos ter uma caixa com 1 par de meias da mesma cor, ou seja, 2 meias, $2=k+1$. Logo $k=1$, usando a proposição 1, teremos:

$$Nk+1=2.1+1=3.$$

Portanto, é necessário que Maria tire 3 meias no mínimo.

Problema 3. Um professor de São Paulo foi dar uma palestra para alunos em uma escola em Campo Grande, MG. Em certo momento, o professor diz: “Eu não conheço nenhum de vocês, mas posso ter certeza, que aqui existem pelo menos 5 alunos que fazem aniversário no mesmo mês”. Qual o número mínimo de alunos que havia na sala?

Solução.

- 1) *Encontrando as incógnitas*: Neste problema $N=12$ (meses/caixas) e o $k=5$ (pessoas/objetos).
- 2) *Entendo o problema*: Temos que pelo menos cinco alunos fazem aniversário no mesmo mês. De modo geral, basta encontrarmos o número total de objetos de modo que em uma das gavetas (meses) tenha 5 pessoas, ou seja, $k+1=5$; $k=5-1$; $k=4$.
- 3) *Aplicando o Princípio de Dirichlet*: usando a proposição 1, teremos

$$Nk+1=$$

$$12.4+1=$$

$$48+1=49.$$

Dessa forma, para quem tenhamos ao menos uma sala de aula com 5 alunos fazendo aniversário no mesmo mês é necessário que tenha 49 alunos, no mínimo.

Problema 4. Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos dois deles deram exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

Solução.

- 1) *Encontrando as incógnitas:* Do enunciado temos que $N = 9765625$ (gavetas) e que número de objetos = 2.
- 2) *Entendo o problema:* Do enunciado temos que o número de gavetas será o número de possibilidades de gabaritos diferentes para a prova. Como cada questão pode ser respondida de 5 formas diferentes, pelo princípio fundamental da contagem teremos $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{10} = 9765625$ possibilidades diferentes de se responder a prova, ou seja, teremos 9765625 possibilidades de gabaritos diferentes, em nosso caso será o $N = 9765625$. como a questão exige que ao menos dois candidatos tenham o mesmo gabarito, logo $k+1=2$; $k=2-1$; $k=1$.
- 3) *Aplicando o Princípio de Dirichlet:* Para resolver esse problema iremos utilizar a proposição 1, que é dado por:

$$\begin{aligned} N_{k+1} &= \\ 9765625 \cdot 1 + 1 &= \\ 9765625 + 1 &= 9765626. \end{aligned}$$

Problema 5. Vinte e cinco engradados de maçãs foram entregues em uma loja. As maçãs são de três tipos diferentes, mas todas as maçãs em cada engradado são do mesmo tipo. Mostre que pelo menos nove engradados contém o mesmo tipo de maçã.

Solução.

- 1) *Encontrando as incógnitas:* temos que $N = 3$; devemos mostrar que $k=9$.
- 2) *Entendo o problema:* Nesse caso, os tipos de maçãs representam as casas e os pombos correspondem aos engradados onde as maçãs são colocadas.
- 3) *Aplicando o Princípio de Dirichlet:* Para resolver essa questão utilizaremos a proposição 1, dada por:

$$\begin{aligned} N_{k+1} &= 25, \text{ com } N=3. \\ 3 \cdot k + 1 &= 25 \\ 3k &= 24 \\ k &= 24/3 \\ k &= 9 \end{aligned}$$

Problema 6. Jorge guarda suas blusas em uma das gavetas do seu armário. Estão na gaveta, cinco blusas pretas, sete amarelas, quatro verdes, uma rosa, três vermelhas e quatro azuis. Certa noite, no escuro, Jorge retira algumas blusas da gaveta. Qual o número mínimo de blusas a serem pegadas por Jorge a fim de ter certeza de que foram retiradas ao menos duas blusas da mesma cor?

- a) 4;
- b) 5;
- c) 6;
- d) 7;
- e) 8.

Solução.

- 1) *Encontrando as incógnitas:* Neste caso $N=6$ (cores) e o $k=1$.
- 2) *Entendo o problema:* Do enunciado podemos observar que existem 6 cores diferentes de camisa que são: preta, amarela, verde, rosa, vermelha e azul. Mas o problema exige que Jorge retire no mínimo duas camisas da mesma cor, ou seja, $k+1=2$; $k=1$.
- 3) *Aplicando o Princípio de Dirichlet:* para resolver esse problema utilizaremos a proposição 1 dada por:

$$Nk+1=$$

$$6.1+1=$$

$$6+1= 7$$

Logo, para que Jorge retire ao menos duas camisas da mesma cor é necessário que ele retire 7 camisas.

Problema 7. Alguns amigos de colégio resolveram marcar um jantar de reencontro depois de 10 anos sem se ver. Compareceram ao jantar 13 pessoas. Sobre essas pessoas, podemos afirmar com certeza que:

- a) Pelo menos 3 são mulheres.
- b) Todos são homens.

c) Pelo menos 2 fazem aniversário no mesmo mês.

d) Pelo menos 2 têm altura inferior a 1,6 metros.

e) Nenhuma das alternativas.

Solução.

1) *Encontrando as incógnitas:* $N=12$ e $k=13$

2) *Entendo o problema:* Do enunciado temos que 13 pessoas compareceram ao jantar, de início não podemos ter certeza de que dessas 13 pessoas 3 são mulheres, como cita a alternativa “a”. Da mesma forma que a alternativa “b” também é refutada, pois existe a possibilidade de todos serem homens, mas a questão exige que tenhamos certeza. Por esse fato a alternativa “b” não satisfaz a questão; a alternativa “c” é a que satisfaz a questão uma vez que se temos 13 pessoas termos com toda certeza duas fazendo aniversário no mesmo mês. Como essa questão apresenta apenas uma questão correta, por eliminação temos que a alternativa “d” está errada. Mas é fácil perceber que não tem condições de termos certeza que pelo menos 2 pessoas têm estatura inferior a 1,6 m.

3) *Aplicando o Princípio de Dirichlet:* Como já vimos a alternativa correta é a “c”, agora vamos aplicar a proposição 2, dada por:

$$\left\lfloor \frac{k-1}{N} \right\rfloor + 1 =$$

$$\left\lfloor \frac{13-1}{12} \right\rfloor + 1 =$$

$$\left\lfloor \frac{12}{12} \right\rfloor + 1 =$$

$$1+1=2$$

Problema 8. O número mínimo de pessoas de um grupo para que se garanta que, necessariamente, haja 7 delas que fazem aniversário no mesmo mês do ano é:

a) 73

b) 83

c) 13

d) 43

e) 23

Solução.

- 1) *Encontrando as incógnitas:* $N=12$ e $k=6$.
- 2) A pior hipótese para esse caso é que tenhamos uma pessoa fazendo aniversário para cada mês do ano. Neste caso teremos um total de 12 pessoas, ou seja, $N=12$. O que a questão quer é que 7 pessoas desse grupo aniversariem no mesmo mês, ou seja, $k+1=7$; $k=7-1$; $k=6$.
- 3) *Aplicando o Princípio de Dirichlet:* Para resolver essa questão, utilizaremos a proposição 1. Dada por:

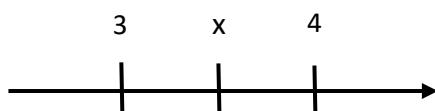
$$\begin{aligned}Kk+1 &= \\12.6+1 &= \\72+1 &= 73.\end{aligned}$$

Problema 9. Em uma escola, há uma e somente uma turma de cada uma das séries do ensino fundamental (1º ao 9º ano). Em cada turma, temos 40 ou mais alunos. Todos os alunos dessas turmas – e apenas dessas turmas – estão no pátio. Qual o número mínimo de alunos que, escolhidos aleatoriamente, garante a escolha de, pelo menos, 4 alunos de uma mesma turma?

- A) 22 alunos sorteados
- B) 25 alunos sorteados
- C) 27 alunos sorteados
- D) 28 alunos sorteados
- E) 37 alunos sorteados

Solução.

- 1) *Encontrando as incógnitas:* $N=9$ e o k é o que procuramos.
- 2) *Entendo o problema:* Veja que temos 9 turmas ao todo (do 1º ao 9º ano). Todos os alunos dessas turmas estão no pátio. O nosso objetivo é escolher pelo menos 4 alunos da mesma turma.
- 3) *Aplicando o Princípio de Dirichlet:* Nesta resolução iremos usar a proposição 2, dada por: $\left\lfloor \frac{k-1}{N} \right\rfloor + 1$. Do enunciado temos que $\left\lfloor \frac{k-1}{9} \right\rfloor + 1 = 4$; $\left\lfloor \frac{k-1}{9} \right\rfloor = 3$, dessa forma, devemos perceber que $\left\lfloor \frac{k-1}{9} \right\rfloor = x$, de modo que o x esteja entre 3 e 4. Veja



Logo,

$$3 \leq \frac{k-1}{9} < 4$$

Multiplicando a inequação por 9, chegaremos em:

$$27 \leq k-1 < 36$$

Somando 1 a inequação, obtemos o seguinte resultado,

$$28 \leq k < 37$$

Como a questão exige o número mínimo de alunos, o resultado que satisfaz nossa questão é $k=28$.

Problema 10. Qual deve ser o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que nele tenha no mínimo 3 pessoas nascidas no mesmo dia da semana?

Solução.

- 1) *Encontrando as incógnitas:* Temos que $N=7$ e $k=2$
- 2) *Entendo o problema:* Do enunciado temos que determinar o número de pessoas em um grupo para que pelo menos 3 aniversariem no mesmo dia da semana, ou seja, $k+1=3$; $k=2$. Como elas devem fazer aniversário no mesmo dia da semana, temos que $N=7$.
- 3) *Aplicando o Princípio de Dirichlet:* Para resolver essa questão usaremos a proposição 1. Dada por: $Nk+1$. Logo,

$$7 \cdot 2 + 1 =$$

$$14 + 1 = 15.$$

Assim, devemos ter um grupo de no mínimo 15 pessoas para que 3 delas façam aniversário no mesmo dia da semana.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir desse trabalho esperamos que nosso esforço possa atingir seu principal objetivo que é motivar e despertar o interesse dos alunos a partir da abordagem de problemas matemáticos utilizando o Princípio das Gavetas de Dirichlet como objeto didático, ou seja, utilizar as características intrínsecas do resultado matemático e dos problemas que sugerem o seu uso para desenvolver este e outros conceitos matemáticos poucos trilhados nos currículos no ensino médio e que assim os alunos possam ir mais a fundo no magnífico universo matemático.

Que alunos e professores consigam usufruir da simplicidade dos resultados e que a partir deles, percebam a grande oportunidade de que resolver problemas matemáticos vai além de regras que os alunos devem apenas decorar, e que possam desenvolver competências e habilidades associadas matemática, como exemplo, o raciocínio lógico, técnicas de argumentação, interpretação etc. Algo que vem se percebendo na prática do ensino é que essas técnicas estão sendo pouco desenvolvidas na escola, e assim fazendo com que as aulas se tornem monótonas.

6- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARVALHO, J. B. P.; MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, P. C. P. e FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade. (9.ed.)**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 2006.

CASTEL DE SAINT-PIERRE, C. I. **Ouvrajes de morale et de politique**, Rotterdam, J. Berman; et Paris, Briasson, 1737.

COSTA, A. L. B. **O ensino do princípio das casas dos pombos No Ensino Básico**, trabalho de conclusão de curso, Rio de Janeiro, 2013.

D'AMBROSIO, U. **História da Matemática e Educação**. In: Cadernos CEDES 40. História e Educação Matemática. 1ª ed. Campinas, SP: Papirus, 1996, p.7-17.

HEFEZ, A. **Indução Matemática**. Programa de Iniciação Científica da OBMEP, 2007. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

LEURECHON, J. **Selectæ Propositiones in Tota Sparsim Mathematica Pulcherrimæ**. Gasparem Bernardum1622. Disponível em: <<https://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-10537>>. Acesso em: 11 nov. 2021.

MEC. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20/05/2022.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.(Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.199 - 220.

PACIFICO, T. M. **O princípio das Gavetas de Dirichlet**, Dissertação de mestrado, Orientador Ires Dias, São Carlos – SP, 2019.

POLYA, G. Sobre a resolução de problemas na high school. In: KRULIK, S; REYS, R. E. (Org.) **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

SILVA, A. L. F. **História da Matemática, tecnologias digitais e investigação matemática no ensino de unidades temáticas de matemática da BNCC para o 8º ano**, Alison Luan Ferreira da Silva, 2020. 247f.: il.