

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Deformações lineares de funções analíticas e trivialidade topológica

Maria Beatriz Marim de Moura

JOÃO PESSOA – PB
AGOSTO DE 2022

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Deformações lineares de funções analíticas e trivialidade topológica

por

Maria Beatriz Marim de Moura

sob a orientação do

Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto

e coorientação da

Prof. Dr^a. Miriam da Silva Pereira

João Pessoa – PB
Agosto de 2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M929d Moura, Maria Beatriz Marim de.
Deformações lineares de funções analíticas e
trivialidade topológica / Maria Beatriz Marim de Moura.
- João Pessoa, 2022.
88 f. : il.

Orientação: Aurélio Menegon Neto.
Coorientação: Miriam da Silva Pereira.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Funções analíticas. 2. Família de funções. 3.
Deformações lineares. 4. Trivialidade topológica. I.
Menegon Neto, Aurélio. II. Pereira, Miriam da Silva.
III. Título.

UFPB/BC

CDU 517.54(043)

Deformações lineares de funções analíticas e trivialidade topológica

por

Maria Beatriz Marim de Moura

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria/Topologia

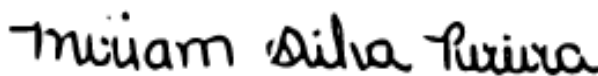
Aprovada em 04 de agosto de 2022.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto – UFPB

(Orientador)



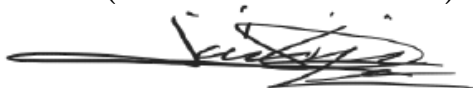
Prof^a. Dr^a. Miriam da Silva Pereira – UFPB

(Coorientadora)



Prof. Dr. Nivaldo de Goés Grulha Júnior – ICMC-USP

(Examinador Externo)



Prof. Dr. José Luis Cisneros-Molina – UNAM

(Examinador Externo)

*“Nunca se entregue, nasça
sempre com as manhãs/
Deixe a luz do sol brilhar
no céu do seu olhar!/ Fé na
vida, fé no homem, fé no
que virá!” (Gonzaguinha)*

*Ao lavrador que cultivou em
mim a mais importante se-
mente do amanhã, ao meu
pai!*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por todas as graças concedidas.

Agradeço à minha mãe, Maria da Penha, aos meus irmãos, Bruna, Tairone e Camila e, em especial, agradeço ao meu pai, Valdemar, o maior incentivador da minha carreira acadêmica.

Agradeço à grande amiga Thays, companheira de curso e de moradia, que muito me auxiliou nas disciplinas e que tornou minha estadia em João Pessoa muito mais divertida e leve.

Agradeço também aos colegas de mestrado Paulo e Alessandro por toda a ajuda com as disciplinas de Medida e Integração e Análise Funcional e aos colegas Hector, Renan e Joyce pelo apoio nos estudos de Álgebra Comutativa.

Agradeço a Joémerson, o rapaz mais lindo, mais atencioso e mais amigo que tive a oportunidade de conhecer durante o curso. Meu porto seguro nos momentos de desespero e maior companheiro nos estudos e na vida. Suportar todas as dificuldades do mestrado foi muito mais fácil com você!

Agradeço a Ramon, meu eterno professor e amigo. Seus conselhos foram de extrema valia para o curso e para a minha vida. Obrigada por confiar no meu potencial muito mais do que eu mesmo confiava.

Agradeço a Elisandra, Jacqueline, Márcio, Alexandre, Uberlândio e Ricardo, professores que, mesmo com as dificuldades impostas pela pandemia, contribuíram significativamente para o meu aprendizado.

Agradeço à direção e à coordenação da escola Eunice Maria de Sousa Freitas pelo apoio e compreensão no período em que eu conciliava a elaboração da dissertação com as aulas.

Agradeço também à professora Cidália, colega de trabalho que me apoiou durante os dias que precisei viajar para João Pessoa, e aos meus alunos, em especial, Kaeli e Ícaro.

Agradeço aos professores Nivaldo e José Luis por aceitarem o convite de compor a banca de defesa e pelas preciosas sugestões e correções feitas com o intuito de aprimorar esse trabalho.

Agradeço à professora Miriam por ter aceito coorientar o meu trabalho e por ter me introduzido na área de Teoria das Singularidades. Obrigada por ter sido um importante ponto de apoio e por todas as sugestões feitas durante a correção desse trabalho, nutro

por ti grande admiração.

Agradeço ao meu orientador, Aurélio, todo o apoio, disposição e compreensão. Nem nos meus maiores delírios pensei, um dia, conhecer um orientador que dispusesse seus sábados e feriados a serviço dos seus orientandos, como o vi fazer várias vezes. Obrigada também por me mostrar esse maravilhoso mundo da Topologia e por confiar no meu trabalho quando eu mesma já não confiava.

Por fim, agradeço à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro dado durante o meu primeiro ano de curso.

Resumo

Neste trabalho, discorremos sobre alguns aspectos importantes associados à trivialidade topológica em uma família de funções analíticas. Nesse sentido, apresentamos uma condição suficiente para que uma deformação linear de uma função analítica seja topologicamente trivial.

Palavras-chave: Funções Analíticas, Famílias de Funções, Deformações Lineares, Trivialidade Topológica.

Abstract

In this work, we discuss some important aspects associated with topological triviality in a family of analytic functions. In this sense, we present a sufficient condition for a linear deformation of an analytic function to be topologically trivial.

Keywords: Analytics Functions, Family of Functions, Linear Deformations, Topological Triviality.

Sumário

Introdução	2
1 Noções Preliminares	4
1.1 Variedades Suaves	4
1.1.1 Espaço Tangente	6
1.1.2 Forma Local das Imersões	10
1.1.3 Forma Local das Submersões	11
1.1.4 Transversalidade	14
1.1.5 Variedades com Fronteira	17
1.1.6 Campo de Vetores e Fluxo em Variedades Suaves	18
1.2 Fibrados Localmente Triviais	21
1.3 Noções Algébricas Preliminares	23
1.4 Conjuntos Analíticos e Germes de Funções	
Analíticas	25
2 Singularidades e Fibração de Milnor	27
2.1 Fatos Básicos sobre Conjuntos Algébricos	27
2.2 Lema de Seleção da Curva	37
2.3 Teorema da Fibração de Milnor	43
2.4 Topologia das Fibras de Milnor	45
3 Campo de Vetores de Kuo	47
4 Trivialidade Topológica em Famílias de Funções Analíticas do Tipo	
$f(x) + tg(x)$	56
4.1 Desigualdade do Tipo Łojasiewicz: Principais Desfechos	58
4.2 Trivialidade Topológica em Famílias de Funções do Tipo $f(x) + tg(x)$.	72
4.3 Trivialidade Topológica em Famílias μ - Constante de Hipersuperfícies	
com Singularidades Isoladas do Tipo $f(x) + tg(x)$	78
Referências Bibliográficas	80

Introdução

O estudo de propriedades associadas às famílias μ –constante de hipersuperfícies com singularidades isoladas é um dos temas de destaque da área de Teoria das Singularidades, inclusive, devido à existência de intrigantes problemas em aberto. Um dos enigmas atrelados ao estudo desse tipo de família se baseia numa conjectura introduzida por Tessier [23] que atrela μ –constância à invariância do tipo topológico, problema que, mais tarde, foi estudado por Lê e Ramanujam [8].

A respeito desse tema, Lê e Ramanujam [8] provaram, exceto para hipersuperfícies de dimensão dois, que em uma família analítica de hipersuperfícies com singularidade isolada na origem a invariância do número de Milnor implica a invariância do tipo topológico. Baseado nesse resultado, Parusinski [21] comenta que, com exceção das famílias de superfícies, famílias μ –constante de hipersuperfícies com singularidades isoladas são topologicamente triviais, mas que o caso mais geral ainda é um problema em aberto.

Um avanço feito na direção de desvendar a validade do caso mais geral foi introduzido pelo próprio Parusinski [21] que deu uma condição suficiente para que famílias do tipo $f(x) + tg(x)$ sejam topologicamente triviais e, a partir disso, provou, sem impor restrição para a dimensão, que deformações lineares μ –constante são topologicamente triviais.

Com base nisso, o principal objetivo desse trabalho é abordar alguns aspectos importantes associados à trivialidade topológica em famílias de deformações lineares, dentre eles, os resultados obtidos por Parusinski [21]. Com o intuito de tornar essa discussão mais efetiva nós subdividimos esse trabalho em quatro capítulos, cada qual com uma finalidade específica, conforme destacamos abaixo.

Ao longo do primeiro capítulo desse trabalho, discutimos algumas noções elementares que são importantes para o desenvolvimento e a compreensão de temas dos demais capítulos. Dentre esses conceitos definimos e apresentamos uma série de resultados associado às variedades suaves. Além disso, introduzimos também, limitando-se ao necessário, a noção de fibrado localmente trivial, bem como algumas noções básicas de álgebra e dos germes de funções analíticas.

No segundo capítulo, apresentamos o conceito de ponto singular de uma variedade algébrica, bem como alguns resultados importantes associados, entre os quais, o Teorema da Estrutura Cônica, o Lema de Seleção da Curva, Teorema da Fibrção de Milnor e o Teorema da Fibrção de Lê-Milnor. Além disso, discutimos também sobre a topologia das fibras de Milnor e a partir disso definimos o número de Milnor.

No terceiro capítulo, abordamos o Campo de Vetores de Kuo, uma ferramenta que, embora tenha aparecido em um contexto bastante restrito, é útil para a estruturação das deduções que são estabelecidas no quarto capítulo, que é, de fato, o capítulo central desse trabalho, no qual estudamos os resultados que Parasinski[21] obteve com relação à trivialidade topológica em deformações lineares de funções analíticas.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo discutimos uma série de noções e resultados que estruturam todo o nosso trabalho. Basicamente, todo o objeto de estudo dessa parte gira em torno de noções e resultados à respeito das variedades suaves, dos fibrados localmente triviais e dos conjuntos algébricos e analíticos. As principais referências para este capítulo são Pollack e Guillemin[20] e Lee[12]

1.1 Variedades Suaves

Nessa seção nos dedicamos a definir e apresentar alguns conceitos e resultados relacionados as variedades suaves que, de maneira geral, são espaços em que uma vizinhança de cada ponto pode ser vista como um espaço euclidiano. Nesse sentido, é natural tentar generalizar alguns dos fatos e noções desses espaços também para as variedades. Mas antes disso definimos que

Definição 1.1. [20] Uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é suave se cada função coordenada $f_1, f_2, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ possui as derivadas parciais de todas as ordens contínuas.

Se considerarmos o caso em que $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto arbitrário também definimos que

Definição 1.2. [20] Uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ é suave se, para cada $x \in X$, existir uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ e uma aplicação suave $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $F|_{U \cap X} = f$.

E, além disso, supondo agora que $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ são conjuntos arbitrários estabelecemos que

Definição 1.3. [20] Uma aplicação suave $f : X \rightarrow Y$ é um difeomorfismo se f é bijetora e $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é suave.

Partindo disso, definimos que

Definição 1.4. [20] $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade suave k -dimensional se é localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^k$, ou seja, se para cada $x \in X$ existe uma vizinhança V em X que é difeomorfo a um aberto $U \subset \mathbb{R}^k$. Além disso, o difeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ é denominado uma parametrização da vizinhança V .

Exemplo 1.1. O conjunto

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$$

é uma variedade 1-dimensional.

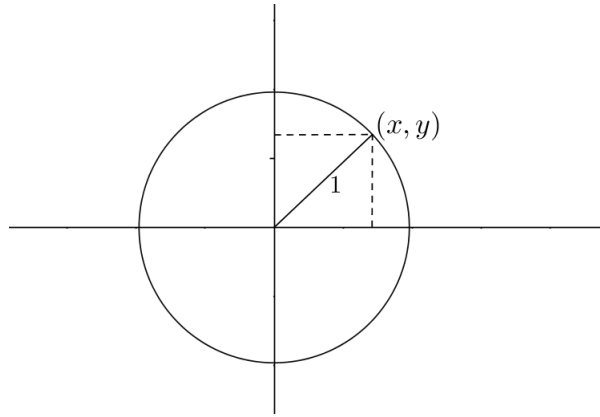


Figura 1.1: Representação Gráfica de S^1

De fato, tomemos $(x, y) \in S^1$, com $y > 0$ e

$$\begin{aligned} \phi_1 : (-1, 1) &\longrightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y > 0\} \\ x &\longmapsto (x, \sqrt{1 - x^2}) \end{aligned}$$

Observemos, primeiramente, que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\} \cap S^1$$

é um aberto de S^1 . E, notemos também que ϕ_1 é uma bijeção, pois é claramente injetiva, além de ser também sobrejetiva, já que dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $x^2 + y^2 = 1$ e $y > 0$, temos que $\phi_1(x) = (x, \sqrt{1 - x^2}) = (x, y)$.

Vejamos que ϕ_1 é suave, pois as funções coordenadas de ϕ_1 são naturalmente C^∞ . Além disso,

$$\begin{aligned} \phi_1^{-1} : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y > 0\} &\longrightarrow (-1, 1) \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

é também suave. Daí, concluímos que ϕ_1 é um difeomorfismo.

Agora, tomemos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $y < 0$. Então podemos considerar

$$\begin{aligned}\phi_2 : (-1, 1) &\longrightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y < 0\} \\ x &\longmapsto (x, -\sqrt{1 - x^2})\end{aligned}$$

e, por um raciocínio totalmente análogo, concluir que ϕ_2 é um difeomorfismo.

Com isso provamos que ϕ_1 e ϕ_2 são parametrizações de S^1 para quaisquer ponto, exceto para $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, e para esse caso tomaremos, respectivamente, as seguintes aplicações

$$\begin{aligned}\phi_3 : (-1, 1) &\longrightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, x > 0\} \\ y &\longmapsto (\sqrt{1 - y^2}, y)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\phi_3 : (-1, 1) &\longrightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, x < 0\} \\ y &\longmapsto (-\sqrt{1 - y^2}, y),\end{aligned}$$

ambas parametrizações para vizinhas que contém tais pontos. Disso, concluímos que S^1 é uma variedade 1-dimensional.

É muito comum a supressão do termo "suave" quando se deseja referir a esse tipo de variedade e, neste trabalho, também o suprimimos, salvo situações em que podem haver confusão. Deixado isso claro, é importante destacar que uma variedade X pode conter um conjunto Z que também é difeomorfo a um aberto de um espaço $\mathbb{R}^m$ e quando isso ocorre Z recebe uma nomenclatura especial, conforme definimos abaixo.

Definição 1.5. [20] Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade, então um conjunto $Z \subset X$ é uma subvariedade de X se é também uma variedade.

1.1.1 Espaço Tangente

Agora que já apresentamos cada um desses aspectos iniciais introduzimos a ao longo dessa seção a noção de espaço tangente, de grande importância ao longo deste e dos próximos capítulos. Nesse sentido, tomemos $X \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade diferenciável m -dimensional, $x \in X$ e $\phi : U \rightarrow U_1 \cap X$ uma parametrização de uma vizinhança de x tal que $\phi(0) = x$. Da diferenciabilidade de ϕ temos, para $u \in U$, que

$$\phi(u) = \phi(0) + d\phi_0(u) + r(u), \text{ com } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0.$$

Assim, é coerente estabelecer, tomando como base [20], uma aproximação linear para $\phi : U \rightarrow V \cap X$ pela aplicação

$$u \rightarrow \phi(0) + d\phi_0(u) = x + d\phi_0(u).$$

E, a partir disso, estabelecemos:

Definição 1.6. [20] O espaço tangente de X em x é a imagem do mapa $d\phi_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Começemos observando que essa definição está bem estabelecida. De fato, suponhamos que $\psi : V \rightarrow V_1 \cap X$ também seja uma parametrização para uma vizinhança de x que satisfaz $\psi(0) = x$, temos que $\phi(U') = \psi(V')$, para U' e V' abertos de $\mathbb{R}^m$ devidamente tomados contidos em U e V . Assim, consideremos os difeomorfismos

$$h_1 = \psi|_{V'}^{-1} \circ \phi|_{U'} : U' \rightarrow V' \text{ e } h_2 = \phi|_{U'}^{-1} \circ \psi|_{V'} : V' \rightarrow U'.$$

Como $\phi|_{U'} = dh_1 \circ d\psi|_{V'}$ e $\psi|_{V'} = dh_1 \circ d\phi|_{U'}$, temos que $d\phi|_{U'}(\mathbb{R}^m) \subset d\psi|_{V'}(\mathbb{R}^m)$ e $d\psi|_{V'}(\mathbb{R}^m) \subset d\phi|_{U'}(\mathbb{R}^m)$, assim, $d\psi|_{V'}(\mathbb{R}^m) = d\phi|_{U'}(\mathbb{R}^m)$. Mas $d\phi|_{U'}(\mathbb{R}^m) = d\phi(\mathbb{R}^m)$ e $d\psi|_{V'}(\mathbb{R}^m) = d\psi(\mathbb{R}^m)$, logo $d\psi(\mathbb{R}^m) = d\phi(\mathbb{R}^m)$ e, portanto, segue o resultado.

Definido desse modo, o espaço tangente de X em x , denotado por $T_x(X)$, é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ cuja translação paralela $x + T_x(X)$ é a aproximação plana (mais próxima) para X em x , conforme indicamos na figura abaixo e, nesse caso, um vetor tangente de $X \subset \mathbb{R}^n$ é um ponto $v \in \mathbb{R}^n$ que pertence $T_x(X)$.

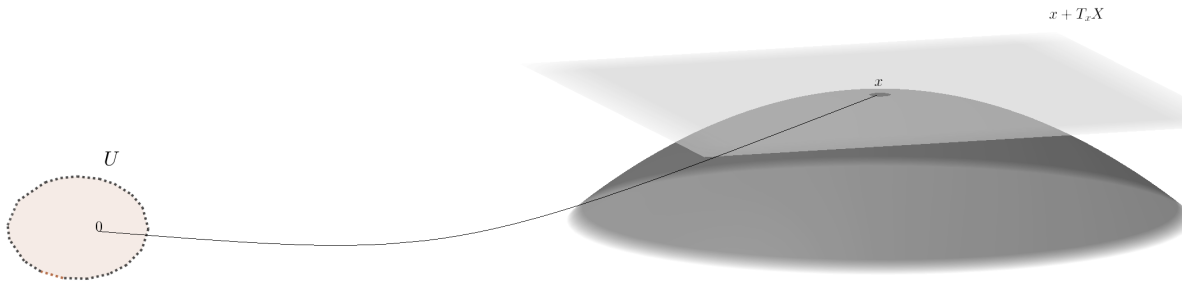


Figura 1.2: Translação de $T_x X$

Observemos também que a dimensão do espaço de vetores $T_x X$ é m , pois do fato de ϕ^{-1} ser suave, temos que existe uma aplicação suave $\Phi : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que estende ϕ^{-1} . Como $\Phi \circ \phi$ é a aplicação identidade, temos pela regra da cadeia que

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{d\phi_0} & T_x X & \xrightarrow{d\Phi_x} & \mathbb{R}^m \\ & & & \searrow & \\ & & & d(\Phi \circ \phi) & \end{array}$$

é a identidade, assim $d\phi_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow T_x X$ é invertível, donde segue que $d\phi_0$ é um isomorfismo e, portanto, $\dim T_x X = m$.

Agora, consideremos X e Y variedades de dimensões m e n , respectivamente, e uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ com $f(x) = y$.

Definição 1.7. [20] A derivada da aplicação f em x é uma transformação linear $df_x : T_x X \rightarrow T_y Y$.

Para concluirmos que essa definição está bem estabelecida basta observarmos que se $\phi : U \rightarrow U_1 \cap X$ é uma parametrização para uma vizinhança de x e $\psi : Y \rightarrow V_2 \cap X$ é uma parametrização para uma vizinhança de y que satisfazem $\phi(0) = x$ e $\psi(0) = y$, então temos, para U' suficientemente próximo da origem, que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \phi \uparrow & & \uparrow \psi \\ U' & \xrightarrow{h=\psi^{-1} \circ f \circ \phi} & V \end{array}$$

comuta, donde obtemos que

$$\begin{array}{ccc} T_x X & \xrightarrow{df_x} & T_y Y \\ d\phi_0 \uparrow & & \uparrow d\psi_0 \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{dh_0} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

comuta, e daí

$$df_x = d\psi_0 \circ dh_0 \circ d\phi_0^{-1}.$$

Como isso não depende das parametrizações ϕ e ψ , concluímos que df_x está bem definida.

Além disso, notemos que se $g : Y \rightarrow Z$ é outra aplicação suave entre variedades e $\nu : W \rightarrow W_1 \cap Z$ é uma parametrização para uma vizinhança de $z = g(y)$ com $\nu(0) = z$, então para U' e V' contidos em U e V o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \phi \uparrow & & \uparrow \psi & & \uparrow \nu \\ U' & \xrightarrow{h=\psi^{-1} \circ f \circ \phi} & V' & \xrightarrow{j=\nu^{-1} \circ g \circ \psi} & W \end{array}$$

comuta e dele obtemos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g \circ f} & Z \\ \phi \uparrow & & \uparrow \nu \\ U' & \xrightarrow{j \circ h} & W \end{array}$$

comuta. Assim,

$$\begin{aligned} d(g \circ f)_x &= d\nu_0 \circ d(j \circ h)_0 \circ d\phi_0^{-1} = d\nu_0 \circ dj_0 \circ dh_0 \circ d\phi_0^{-1} \\ &= (d\nu_0 \circ dj_0 \circ d\psi_0^{-1}) \circ (d\psi_0 \circ dh_0 \circ \phi_0^{-1}) \\ &= dg_y \circ df_x, \end{aligned}$$

o que prova o seguinte resultado:

Teorema 1.1 (Regra da Cadeia). [\[20\]](#) Se X, Y e Z são variedades suaves e $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são aplicações suaves, então

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$

Agora suponhamos que X e Y sejam duas variedades diferenciáveis de mesma dimensão.

Teorema 1.2. Dada $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave. Se $f(x) = y$ e f é um difeomorfismo local em x , então $df_x : T_x X \rightarrow T_y Y$ é um isomorfismo.

Demonstração: Sejam $U \cap X$ e $V \cap Y$ vizinhanças de x e y tais que $f : U \cap X \rightarrow V \cap Y$ é um difeomorfismo e consideremos a aplicação $f^{-1} : V \cap Y \rightarrow U \cap X$. Então, como $f^{-1} \circ f$ é a identidade, temos pela regra da cadeia que

$$\begin{array}{ccccc} T_x X & \xrightarrow{df_x} & T_y Y & \xrightarrow{df_y^{-1}} & T_x X \\ & & & \searrow & \nearrow \\ & & & d(f^{-1} \circ f)_x & \end{array}$$

é a identidade. Assim, $df_x : T_x X \rightarrow T_y Y$ é invertível e, portanto, df_x é um isomorfismo. ■

A recíproca desse resultado também é válida e isso garante, basicamente, uma generalização do Teorema da Aplicação Inversa para variedades suaves, conforme enunciaremos abaixo.

Teorema 1.3 (Teorema da Função Inversa). Suponhamos que $f : X \rightarrow Y$ seja uma aplicação suave cuja derivada df_x é um isomorfismo. Então f é um difeomorfismo local em x .

Demonstração: De fato, tomemos $\phi : U \rightarrow U_1 \cap X$ e $\psi : V \rightarrow V_1 \cap Y$ parametrizações para x e y , respectivamente, com $\phi(0) = x$ e $\psi(0) = y$ tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \phi \uparrow & & \uparrow \psi \\ U & \xrightarrow{h=\psi^{-1} \circ f \circ \phi} & V \end{array}$$

comute. Como df_x é um isomorfismo, temos que $dh_0 = \psi_0^{-1} \circ f_x \circ \phi_0$ é um isomorfismo, donde segue pelo Teorema da Aplicação Inversa para espaços $\mathbb{R}^n$ que existem abertos $U' \subset U$ e $V' \subset V$ tais que $h : U' \rightarrow V'$ é um difeomorfismo. Daí, restringindo domínios, temos que $f = \psi \circ h \circ \phi^{-1} : \phi(U') \rightarrow \psi(V')$ é um difeomorfismo local. ■

1.1.2 Forma Local das Imersões

Até então estávamos estudando o comportamento local de aplicações $f : X \rightarrow Y$ nos casos em que, exclusivamente, $\dim X = \dim Y$. Ao longo dessa seção vamos supor que $\dim X < \dim Y$ e discutir alguns aspectos relacionados ao comportamento de f quando exigidas determinadas condições.

Definição 1.8. [20] Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é uma imersão em x se a transformação $df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ é injetiva

Um exemplo trivial de imersão é a própria imersão canônica, isto é, a aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n < m$, dada por $f(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$. A partir do teorema abaixo vamos garantir que, se f é uma imersão em x , então existem parametrizações para vizinhanças de x e $y = f(x)$ (ϕ e ψ , respectivamente), tais que $h = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$ é a imersão canônica.

Teorema 1.4 (Forma Local das Imersões). *Sejam X e Y variedades de dimensão n e m ($m > n$), respectivamente, e $f : X \rightarrow Y$ um aplicação suave que é uma imersão num ponto $x \in X$. Então, existem parametrizações $\phi : U \rightarrow U_1 \cap X$ e $\psi : V \rightarrow V_1 \cap Y$, de x e $y = f(x)$, tais que*

$$(\psi^{-1} \circ f \circ \phi)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in U$.

Demonstração: Tomemos $\sigma : U' \rightarrow U'_1 \cap X$ e $v : V' \rightarrow V'_1 \cap Y$ parametrizações para vizinhanças de x e $y = f(x)$, respectivamente, de maneira que $\sigma(0) = x$, $v(0) = y$ e que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \sigma \uparrow & & \uparrow v \\ U' & \xrightarrow{h=v_1^{-1} \circ f \circ \sigma} & V' \end{array}$$

comute. Então, como $dh_0 = dv_0^{-1} \circ df_x \circ d\sigma_0$ e dv_0^{-1} , df_x e $d\sigma_0$ são injetoras, temos que dh_0 é injetora. Daí, h é uma imersão em $0 = \sigma^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n$ e, portanto, pela Forma Local da Imersões em espaços euclidianos, temos que existe um difeomorfismo

$g : Z \rightarrow U \times W$, onde Z é vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^m$, U vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$ ($U \subset U'$) e W vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$, tal que

$$(g \circ h)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in U$, ou seja, tal que

$$(g \circ v^{-1} \circ f \circ \sigma)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in U$.

Desse modo, tomemos $\phi = \sigma|_U$ e $\psi = (g \circ v^{-1})^{-1} = v \circ g^{-1}$ e observemos que ϕ e ψ são, claramente, parametrizações para x e y que satisfazem

$$(\psi^{-1} \circ f \circ \phi)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in U$, já que $\psi^{-1} = g \circ v$, e com isso fica provado o resultado. ■

1.1.3 Forma Local das Submersões

Nessa subseção estudamos o comportamento local de aplicações $f : X \rightarrow Y$, mas dessa vez damos ênfase à Forma Local das Submersões para variedades suaves. Nesse sentido, é importante destacar, primeiramente, que toda a construção desenvolvida ao longo dessa discussão parte da suposição de, em f , que $\dim X > \dim Y$.

Definição 1.9. [20] Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é uma submersão em x se a transformação $df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ é sobrejetiva.

Um exemplo trivial de submersão é a própria projeção canônica, ou seja, a aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n > m$, dada por $f(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$. De maneira similar ao caso das imersões, garantimos logo abaixo que se $f : X \rightarrow Y$ é uma submersão em x , então existem parametrizações ϕ e ψ para vizinhanças de x e $y = f(x)$ tais que $\psi^{-1} \circ f \circ \phi$ é a submersão canônica.

Teorema 1.5 (Forma Local das Submersões). *Sejam X e Y variedades diferenciáveis de dimensões n e m ($m < n$), respectivamente, e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave que é uma submersão no ponto $x \in X$. Então, existem parametrizações $\phi : U \rightarrow U_1 \cap Y$ e $\psi : V \rightarrow V_1 \cap Y$ tais que*

$$(\psi^{-1} \circ f \circ \phi)(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$$

para todo $(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) \in V \times W$.

Demonstração: Tomemos $\sigma : U' \rightarrow U'_1 \cap Y$ e $v : V' \rightarrow V'_1 \cap X$ parametrizações para vizinhanças de x e $y = f(x)$, respectivamente, de maneira que $\sigma(0) = x$, $v(0) = y$ e que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \sigma \uparrow & & \uparrow v \\ U' & \xrightarrow{h=v^{-1} \circ f \circ \sigma} & V' \end{array}$$

comute. Notemos que do fato de $dh_0 = dv_0^{-1} \circ df_x \circ d\sigma_0$ e dv_0^{-1} , df_x e $d\sigma_0$ serem sobrejetivas temos que dh_0 é sobrejetiva. Assim, h é uma submersão em $0 = \sigma^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n$ e, portanto, pela Forma Local das Submersões para espaços euclidianos temos que existe um difeomorfismo $g : Z \times W \rightarrow U$, onde Z é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^m$, W é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ e U uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$ ($U \subset U'$), tal que

$$\begin{aligned} (h \circ g)(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) &= (v^{-1} \circ f \circ \sigma \circ g)(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) \\ &= (x_1, \dots, x_m), \end{aligned}$$

para todo $(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) \in Z \times W$. Daí, basta tomarmos $\psi = v$ e $\phi = \sigma \circ g$ para concluirmos o resultado. ■

Mantenhamos a hipótese de que $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre as variedades X e Y , de dimensões n e m ($n > m$), respectivamente, e consideremos o conjunto

$$f^{-1}(y) = \{x \in X; f(x) = y\}.$$

Definimos agora que

Definição 1.10. [20] Um ponto $y \in Y$ é um valor regular de f se $df_x : T_x X \rightarrow T_y Y$ é sobrejetiva para todo $x \in f^{-1}(y)$.

Notemos que, se f é uma submersão no ponto $x \in f^{-1}(y)$, então podemos, pela Forma Local das Submersões, obter parametrizações $\phi : U \rightarrow U_1 \cap X$, com $U = Z \times W$, onde Z é aberto de $\mathbb{R}^m$ e W é aberto de $\mathbb{R}^{n-m}$ e $\psi : V \rightarrow V_1 \cap X$, com $\psi(0) = y$, tais que

$$(\phi^{-1} \circ f \circ \phi)(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m).$$

para todo $(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) \in Z \times W$. Assim, consideremos o conjunto $f^{-1}(y) \cap U_1$. Temos que

$$\phi^{-1}(f^{-1}(y) \cap U_1) = \{(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) \in U; x_1 = \dots = x_m = 0\} = \{(0, \dots, 0)\} \times W,$$

pois dado $x \in \{(0, \dots, 0)\} \times W$, temos que $(f \circ \phi)(x) = y$ e, portanto, $\phi(x) \in$

$f^{-1}(y) \cap U_1$, o que implica que $x \in \phi^{-1}(f^{-1}(y) \cap U_1)$. Além disso, é claro que se $(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) \in \phi^{-1}(f^{-1}(y) \cap U_1) \subset U$, então $x_1 = \dots = x_m = 0$, pois se $x_i \neq 0$ para algum $i = 1, \dots, m$, então

$$(\psi^{-1} \circ f \circ \phi)(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) \neq (0, \dots, 0)$$

o que é um absurdo. Desse modo, ϕ define um difeomorfismo entre $f^{-1}(y) \cap U_1$ e $\{(0, \dots, 0)\} \times W$. Mas, como $\{(0, \dots, 0)\} \times W$ é difeomorfo a W , concluímos que $f^{-1}(y) \cap U_1$ é difeomorfo a W e isso prova o seguinte resultado:

Teorema 1.6. [20] *Se $y \in Y$ é um valor regular de $f : X \rightarrow Y$, então a $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade de X e $\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$.*

Supondo ainda que y é o valor regular de uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, precisamos também discutir um outro ponto relevante e que diz respeito exatamente à uma importante caracterização do espaço tangente à variedade $f^{-1}(y)$.

Teorema 1.7. [20] *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave entre variedades de dimensão n e m ($n > m$), respectivamente. Se $y \in Y$ é um valor regular de f e $Z = f^{-1}(y)$, então, para qualquer ponto $x \in Z$, $\ker df_x = T_x Z$.*

Demonstração: Tomemos $x \in Z$ e parametrizações $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow U_1 \cap Z$ e $\psi : V \rightarrow V_1 \cap Y$ para vizinhanças de x e y , com $\phi(0) = x$, $\psi(0) = y$ tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ U & \xrightarrow{h=\psi^{-1} \circ f \circ \varphi} & V \end{array}$$

comute. Então, como $h = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ é constante, já que

$$h(u) = \psi^{-1}(f(\varphi(u))) = \psi^{-1}(y) = 0, \text{ para todo } u \in U,$$

temos que $dh_0 = d\psi_y^{-1} \circ df_x \circ d\varphi_0 = 0$. Disso segue que

$$dh_0(\mathbb{R}^{n-m}) = d\psi_y^{-1}(df_x(\varphi_0(R^{n-m}))) = d\psi_y^{-1}(df_x(T_x Z)) = 0$$

e, daí, como $d\psi_y^{-1}$ é injetiva, temos que $df_x(T_x Z) = 0$, ou seja, $T_x Z \subset \ker df_x$. Agora observemos que, do fato $df_x : T_x X \rightarrow T_y Y$ ser sobrejetiva, temos que

$$\dim \ker df_x = \dim X - \dim Y = \dim Z.$$

Daí, como $T_x Z$ é um subespaço de $\ker df_x$ que tem a mesma dimensão que $\ker df_x$, concluímos que $T_x Z = \ker df_x$. ■

1.1.4 Transversalidade

Podemos estender a noção de regularidade por meio de uma nova propriedade diferencial. A ideia central que motiva esse estudo parte da tentativa de verificar quais condições exigir para que a imagem inversa de uma subvariedade de Y seja também uma subvariedade de X . Impulsionados por esse objetivo e tomando como referência Lima [13], apresentamos uma condição necessária e suficiente para que possamos ter tal fato e definimos a partir disso a noção de transversalidade, principal objeto de estudo nessa subseção.

Vamos fixar a partir de agora que X e Y são variedades diferenciáveis de dimensão n e m , respectivamente, que Z é uma subvariedade de Y de dimensão l e que $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação suave. Tomemos $x \in f^{-1}(Z)$ e façamos $y = f(x)$. Então, se $i : Z \rightarrow Y$ é a aplicação inclusão entre as variedades Z e Y e $\phi : U \subset \mathbb{R}^l \rightarrow U_1 \cap Z$ e $\psi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V_1 \cap Y$ são parametrizações para vizinhanças de y , com $\phi(0) = y$ e $\psi(0) = y$, tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i} & Y \\ \phi \uparrow & & \uparrow \psi \\ U & \xrightarrow{h=\psi^{-1} \circ i \circ \phi} & V \end{array}$$

comute, então temos do fato $h = \psi^{-1} \circ i \circ \phi = \psi^{-1} \circ \phi$ que $dh_0 = d\psi_0^{-1} \circ d\phi_0$. Daí, dh_0 é uma transformação injetiva, donde segue que, $di_y = d\psi_0 \circ dh_0 \circ d\phi_0^{-1}$ também é uma transformação injetiva. Logo, i é uma imersão e, assim, pela Forma Local das Imersões, temos que existem parametrizações $\varphi : U \rightarrow U_1 \cap Z$ e $\vartheta : U \times W \rightarrow V_1 \cap Y$ tais que

$$(\vartheta^{-1} \circ i \circ \varphi)(x_1, \dots, x_l) = (x_1, \dots, x_l, 0, \dots, 0),$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in U$, o que implica que $\vartheta^{-1}(U_1 \cap Z) = U \times \{(0, \dots, 0)\}$.

Desse modo, definamos $\pi \circ \vartheta^{-1} \circ f : S \cap X \rightarrow \mathbb{R}^{m-l}$, onde $S \cap X$ é uma vizinhança de x tal que $f(S \cap X) \subset U_1 \cap Y$ e $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-l}$ é a aplicação dada por $\pi(x_1, \dots, x_l, \dots, x_m) = (x_l, \dots, x_m)$ para todo $(x_1, \dots, x_l, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, façamos $g = \pi \circ \vartheta^{-1}$ e notemos, primeiramente, que $S \cap f^{-1}(Z) = (g \circ f)^{-1}(0)$. Observemos também que $dg_y : T_y Y \rightarrow \mathbb{R}^{m-l}$ é uma aplicação sobrejetiva, logo $Im(T_y Y) = \mathbb{R}^{m-l}$ e $\ker dg_y = T_y Z$, já que $0 \in \mathbb{R}^{m-l}$ é um valor regular de g e $y \in g^{-1}(0) = U_1 \cap Z \subset S$.

Além disso, notemos também que $0 \in \mathbb{R}^{m-l}$ é um valor regular de $g \circ f$ se e, somente se, $d(g \circ f)_z : T_z X \rightarrow \mathbb{R}^{m-l}$ é sobrejetiva, para todo $z \in S \cap f^{-1}(Z)$. Mas, para que $d(g \circ f)_z : T_z X \rightarrow \mathbb{R}^{m-l}$ seja sobrejetiva, para todo $z \in S \cap f^{-1}(Z)$ é necessário e suficiente exigir que $dg_y(Im(df_z)) = \mathbb{R}^{m-l}$, para todo $z \in S \cap f^{-1}(Z)$. Nosso intuito, a partir de agora, é provar que $dg_y(Im(df_z)) = \mathbb{R}^{m-l}$ para todo $z \in S \cap f^{-1}(Z)$ se e,

somente se, $Im(df_z) + T_y Z = T_y(Y)$ para todo $z \in S \cap f^{-1}(Z)$, pois a partir disso podemos exigir uma condição necessária e suficiente para que $0 \in \mathbb{R}^{m-l}$ seja um valor regular de $g \circ f$. Para isso, comecemos supondo que $dg_y(Im(df_z)) + T_y Z = T_y Y$ para todo $z \in S \cap f^{-1}$. Então

$$\begin{aligned} dg_y(Im(df_z)) &= dg_y(Im(df_z)) + dg_y(T_y Z) = dg_y(Im(df_z) + T_y Z) \\ &= dg_y(T_y Y) = \mathbb{R}^{m-l}, \forall z \in S \cap f^{-1}(Z). \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $Im(df_z) + T_y Z \neq T_y Y$, então existe $v_1 \in T_y Y$ tal que

$$v_1 \notin Im(df_z) + T_y Z.$$

Mas desse fato segue que $dg_y(v_1) \notin dg_y(Im(df_z))$, pois se existe $v_2 \in Im(df_z)$ tal que $dg_y(v_1) = dg_y(v_2)$, então $v_1 - v_2 \in \ker dg_y = T_y Z$, donde obtemos que

$$v_1 = v_2 + (v_1 - v_2) \in Im(df_z) + T_y Z,$$

o que contradiz a hipótese. Daí, se $Im(df_z) + T_y Z \neq T_y Y$, então $dg_y(Im(df_z)) \neq \mathbb{R}^{m-l}$ e isso conclui a demonstração do fato afirmado. Com isso provamos que $0 \in \mathbb{R}^{m-l}$ é um valor regular de $g \circ f$ se e, somente se, $Im(df_z) + T_y Z = T_y Y$, para todo $z \in S \cap f^{-1}(Z)$. A partir disso introduzimos a seguinte definição:

Definição 1.11. [20] Uma aplicação f é transversal a Z no ponto $x \in f^{-1}(Z)$ se

$$Im(df_x) + T_x Z = T_x Y.$$

Observemos pelo que vimos anteriormente que, se f é transversal a Z nos pontos de $S \cap f^{-1}(Z)$, então $0 \in \mathbb{R}^{m-l}$ é um valor regular de $g \circ f$, donde temos que $S \cap f^{-1}(Z) = (g \circ f)^{-1}(0)$ é uma subvariedade de X de dimensão $n - (m - l)$. Na verdade, de modo geral:

Teorema 1.8. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação suave transversal a subvariedade $Z \subset Y$, então $f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de X de dimensão $n - (m - l)$.

Suponhamos dessa vez que X também seja uma subvariedade de Y , tomemos a aplicação inclusão $i : X \rightarrow Y$ e observemos que $i^{-1}(Z) = Z \cap X$. Além disso, notemos também que $di_x : T_x(X) \rightarrow T_x Y$ é a inclusão do mapa $T_x(X)$ em $T_x Y$, para todo $x \in X$. Daí, i é transversal à Z se e, somente se, para todo $x \in X \cap Z$,

$$T_x X + T_x Z = T_x Y$$

e com base nisso definimos:

Definição 1.12. [20] X e Z , subvariedades de Y , são transversais se

$$T_x X + T_x Z = T_x Y.$$

para todo $x \in X \cap Z$.

A partir de agora vamos estabelecer uma importante caracterização para os pontos críticos de uma função g de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ restrita a uma variedade X .

Proposição 1.9. Se $g|_X : X \rightarrow \mathbb{R}$ é a restrição de uma aplicação $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ à uma variedade X , então o conjunto dos pontos críticos de g restrito à X é dado por:

- (i) Pontos $x \in X$ tais que x é ponto crítico de g ;
- (ii) Pontos $x \in X$ tais que x é valor regular de g e $Z = g^{-1}(g(x))$ intersecta X não transversalmente em x .

Demonstração: Começemos tomando a aplicação inclusão $i : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ e definamos f pondo $f = g \circ i : X \rightarrow \mathbb{R}$. Então, é importante destacar primeiramente que, dado $x \in X$,

$$df_x = dg_{i(x)} \circ di_x = dg_x \circ i_x,$$

onde i_x é a inclusão entre $T_x X$ e $\mathbb{R}^n$ e que, claramente, se $x \in X$ é um ponto crítico de g , então x é ponto crítico também de f .

Suponhamos, agora, que x é um ponto regular de g . Temos que x é ponto crítico de f se e, somente se, df_x não é sobrejetiva, ou seja, se e, somente se,

$$dg_x(\text{Im}(i_x)) = dg_x(T_x X) \subsetneq \mathbb{R}.$$

Por meio desse fato vamos provar que x é ponto crítico de f se e, somente se,

$$\text{Im}(i_x) = T_x X \subset \ker dg_x.$$

É claro que uma dessas implicações é óbvia, pois se $\text{Im}(i_x) = T_x X \subset \ker dg_x$, então $df_x(T_x X) = dg_x(i_x(T_x X)) = dg_x(T_x X) \subset dg_x(\ker dg_x) = 0$, donde segue que df_x é injetiva e, portanto, x é ponto crítico de f . Para provar que vale também a recíproca basta supormos, por absurdo, que existe $y \in T_x X$ tal que $dg_x(y) = a \neq 0$, isto é, que existe $y \in T_x X - \ker dg_x$ e observamos que disso segue que, para todo $b \in \mathbb{R}$, podemos tomar um elemento em $T_x(X)$ cuja imagem por dg_x é b (à saber, $z = \frac{b}{a} \cdot y$), o que nos levaria a concluir que $dg_x(T_x X) = \mathbb{R}$ que é seria uma absurdo.

Tomando o conjunto

$$Z = g^{-1}(g(x)) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; g(x_1, \dots, x_n) = g(x)\},$$

usando a afirmação provada acima e também o fato de que $\ker dg_x = T_x Z$ concluímos que x é ponto crítico de f se e, somente se, $T_x X \subset T_x Z$, ou seja, x é ponto crítico de f se e, somente se, $Z = g^{-1}(g(x))$ intersecta X não transversalmente em x . Como $f = g|_X$, segue a proposição. ■

Exemplo 1.2. Tomemos a função $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x_1, x_2, x_3) = x_3$ e a variedade $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Como $\nabla g(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, temos que g não possui ponto crítico. Mas, notemos que nos pontos $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$ os planos tangentes à $g^{-1}(1) = \{(x_1, x_2, 1); x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ e $g^{-1}(-1) = \{(x_1, x_2, -1); x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ coincidem, respectivamente, com os planos tangentes à X em $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$, assim, os planos tangentes à $g^{-1}(1)$ e $g^{-1}(-1)$ são não-transversais aos planos tangentes à X em $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$, respectivamente e, portanto, $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$ são pontos críticos de g restrito à X . Na verdade, esses são os únicos pontos críticos dessa restrição.

1.1.5 Variedades com Fronteira

Os objetos de estudo dessa subseção são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que não podem ser consideradas variedades uma vez que suas fronteiras não são difeomorfas a um aberto de um espaço $\mathbb{R}^m$. O exemplo mais simples desse tipo de espaço é o conjunto

$$H^m = \{(x_1, \dots, x_m); x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathbb{R}, x_m \geq 0\}$$

cujas fronteiras é $\mathbb{R}^{m-1}$. Nesse tipo de espaço estabelecemos um novo conceito, mais precisamente, o de variedades com fronteiras. Assim, definimos que

Definição 1.13. [20] Um subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ é uma variedade com fronteira m -dimensional se para cada $x \in X$ existir uma vizinhança de x difeomorfa a um aberto de H^m . Como anteriormente, tal difeomorfismo é dito uma parametrização local de uma vizinhança de x . A fronteira de X , denotada por ∂X , consiste dos pontos que pertencem a imagem da fronteira de H^m por alguma parametrização local e o interior de X é dado por ∂X .

Observe que o próprio conjunto H^m é uma variedade com fronteira. além disso, claro que por essa definição o conceito que já definimos de variedades se encaixa na definição de variedades com fronteira. Nesse sentido, é natural tentar pensar que algumas noções sobre variedades suaves sem fronteira se estendam também para variedades

com fronteira. De fato, basta notarmos que espaços tangentes e derivadas ainda podem ser definidos nesses espaços.

Essa construção, feita em [20], parte basicamente do fato de que se $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, com U aberto de H^m , é uma aplicação suave, então para pontos do interior de U dg_u está, automaticamente, bem definida. No entanto se $u \in \partial U$, o caminho para mostrar que dg_u está bem definida parte por de uma estratégia diferente. Nesse caso, é necessário considerar uma aplicação G que estende g a uma vizinhança de u , em $\mathbb{R}^n$, e definir a derivada de dg_u como sendo $dG_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e isso está de fato bem definido.

De acordo com [20], podemos também tomar $x \in X$ e ϕ , uma parametrização local, e definir o espaço tangente à x , $T_x X$, pondo que $T_x X = d\phi_x(\mathbb{R}^n)$ e podemos verificar que $T_x X$ está bem definido, provando apenas esse conjunto não depende de parametrização. Assim como no caso de variedades sem fronteira, $T_x X$ também é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão m , inclusive para $x \in \partial X$. E, por fim, se $F : X \rightarrow Y$ é uma aplicação suave entre duas variedades com fronteira, então para qualquer ponto $x \in X$ podemos definir também, como para o caso de variedades sem fronteiras, a derivada $df_x : T_x X \rightarrow T_y(Y)$ satisfazendo, inclusive, a regra da cadeia.

Por [20] temos também que se X é uma variedade com fronteira de dimensão m , então $\text{Int}X$ é uma variedade sem fronteira de mesma dimensão, pois dado um ponto $x \in X$ e uma vizinhança desse ponto temos, por uma parametrização local, que a imagem inversa dessa vizinhança é um aberto de H^m que está totalmente contido em $\text{Int}(H^m)$, sendo portanto um aberto de $\mathbb{R}^m$. Nesse sentido, será que ∂X seria também uma variedade sem fronteira? Se sim, qual seria dimensão de ∂X ? Bem, tomando como um caso específico a variedade com fronteiras H^m , já citada aqui, temos que $\partial H^m = \mathbb{R}^{m-1}$ é de fato uma variedade sem fronteira e de dimensão $m - 1$, mas isso pode ser garantido de maneira mais geral, uma vez que se X é uma variedade com fronteira de dimensão m , então ∂X é uma variedade sem fronteira com dimensão $m - 1$, conforme podemos verificar em [20].

1.1.6 Campo de Vetores e Fluxo em Variedades Suaves

Ao longo dessa subseção nós apresentamos os principais resultados a respeito de campos de vetores definidos sobre variedades suaves. A maior parte desses resultados estão relacionados com objetos geométricos associados a tais campos, como é o caso de curvas integrais e, posteriormente, do fluxo. Nesse sentido, definimos:

Definição 1.14. [20] Um campo de vetores suave $\vec{v}$ sobre uma variedade X é uma aplicação suave $\vec{v} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{v}(x) \in T_x X$, para todo $x \in X$. Além disso, uma curva integral de $\vec{v}$, com condição inicial x , é uma curva diferenciável $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X$

tal que $\lambda(0) = x$ e $\lambda'(t) = \vec{v}(\lambda(t))$ para todo $t \in (\epsilon, \epsilon)$.

Naturalmente, um questionamento que pode surgir a partir dessa definição diz respeito, basicamente, a existência ou não de curvas integrais associadas a um campo de vetores suave. Por meio do Teorema da Existência, Unicidade e Diferenciabilidade de Soluções de uma EDO, [12] podemos garantir, de maneira geral:

Lema 1.10. Se $\vec{v}$ é um campo de vetores suave em uma variedade suave X , então para cada $x \in X$ existe um caminho diferenciável $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X$ tal que $\lambda(0) = x$ e $\lambda'(t) = \vec{v}(\lambda(t))$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Agora, consideremos em $\mathbb{R} \times X$ um aberto $\mathcal{D}$ com a propriedade de que, para cada $x \in X$ o conjunto $\mathcal{D}_x = \{t \in \mathbb{R}; (t, x) \in \mathcal{D}\}$ é um intervalo aberto contendo 0 então podemos estabelecer que:

Definição 1.15. [20] O fluxo local é um mapa contínuo $\phi : \mathcal{D} \rightarrow X$ que satisfaz:

- (i) $\phi(0, x) = x$, para todo $x \in X$
- (ii) $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x)$, para todo $x \in X$ e $s, t \in \mathbb{R}$ tais que $s, s + t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $t \in \{t; (t, \phi(s, x)) \in (-\epsilon, \epsilon) \times U\}$.

Suponhamos que ϕ seja uma aplicação suave e definamos a aplicação $\vec{v} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\vec{v}(x) = \phi'(0, x)$. Então:

Proposição 1.11. [12] A aplicação $\vec{v}$ é um campo vetorial suave de X e, dado $x \in X$, $\phi(x, t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X$ é uma curva integral de $\vec{v}$.

Assim, dado um fluxo suave, podemos a partir desse fluxo definir um campo de vetores suaves. Logo abaixo provaremos também que, dado um campo de vetores suave, podemos definir a partir dele um fluxo que satisfaz determinadas condições. Para isso, definimos, para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$X_t = \{x \in X; (t, x) \in \mathcal{D}\}$$

e estabelecemos que uma curva integral é dita maximal se não é possível estendê-la por uma curva integral em um intervalo aberto "maior" e o fluxo é dito maximal se também não admite nem uma extensão para um aberto "maior" que o seu domínio. Partindo disso, [12] demonstra que

Teorema 1.12 (Teorema Fundamental em Fluxos). [12] Se $\vec{v}$ é um campo de vetores suave em uma variedade X , então existe um único fluxo maximal $\phi : \mathcal{D} \rightarrow X$ tal que $\vec{v}(x) = \phi'(0, x)$, para todo $x \in \mathcal{D}$. Além disso,

(i) Para cada $x \in X$, a curva $\phi(t, x) : \mathbb{R} \rightarrow X$ é a única curva integral maximal de $\vec{v}$, com condição inicial x .

(ii) Para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto X_t é um aberto de X e $\phi(t, x) : X_t \rightarrow X_{-t}$ é um difeomorfismo com inversa $\phi(-t, x) : X_{-t} \rightarrow X_t$.

É importante destacar que nem todo campo de vetores gera um fluxo global, mas quando isso ocorre dizemos que um campo de vetores é completo. O principal resultado a respeito disso segue logo a seguir:

Teorema 1.13. [12] *Em uma variedade suave compacta todo campo de vetores suave é completo.*

Nesse caso, também temos que o fluxo ϕ gerado por qualquer um desses campos de vetores determina, para cada $t \in \mathbb{R}$, uma família de difeomorfismo $\{\phi(t, x) : X \rightarrow X\}$. É com base nessas propriedades de fluxo que a utilização de campo de vetores para determinar homeomorfismos entre conjuntos é, por nós, amplamente abordada ao longo desse trabalho, como é o caso com o Teorema da Estrutura Cônica e o Campo de Vetores de Kuo.

A maioria das deduções de cada um desses resultados parte de uma construção que toma uma partição da unidade como ferramenta uma para construção de campos vetoriais. Nesse sentido, abordamos a partir de agora algumas definições e resultados acerca desse tema. Para isso, comecemos estabelecendo a seguinte definição:

Definição 1.16. [19] Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade suave e $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Então o suporte de ϕ é definido como sendo o fecho do conjunto $\phi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$

Sabemos que o fecho de $\phi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ é um conjunto fechado, portanto, possui complementar aberto. Daí, se $x \in X$ não pertence ao fecho de $\phi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ (ou seja, não pertence ao suporte) então existe uma vizinhança V de x tal que

$$V \subset (\phi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}))^C = \phi^{-1}(0),$$

ou seja, existe uma vizinhança V de x que anula ϕ . Agora, tomemos $\{U_1, \dots, U_n\}$ uma cobertura aberta finita do espaço X , definimos que:

Definição 1.17. [19] Uma família de funções

$$\phi_i : X \rightarrow [0, 1] \text{ para } i = 1, \dots, n$$

é dita uma partição da unidade dominada por $\{U_i\}$ se

- (i) suporte $\phi_i \subset U_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$;
- (ii) $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Um questionamento natural que pode surgir com relação a uma partição da unidade dominada por um conjunto finito de aberto diz respeito justamente a existência de tal conjunto de funções. Que, de maneira geral, é garantida pelo seguinte resultado:

Teorema 1.14 (Existência de uma Partição da Unidade Finita). [19] *Se $\{U_1, \dots, U_n\}$ uma cobertura aberta finita do espaço X , então existe uma partição da unidade dominada por $\{U_i\}$.*

Podemos ainda generalizar a definição de partição da unidade para o caso em que $\{U_i\} \in J$ é uma cobertura infinita aberta do espaço X .

Definição 1.18. Uma partição da unidade dominada por $\{U_i\}_{i \in J}$ é uma família de funções

$$\phi_i : X \rightarrow [0, 1] \quad i \in J$$

tais que

- (i) suporte $\phi_i \subset U_i$ para cada $i \in J$;
- (ii) Cada $x \in X$ possui uma vizinhança na qual apenas um número finito de ϕ_i são não nulos.
- (iii) $\sum_{i \in J} \phi_i(x) = 1$ para todo $x \in X$

É importante destacar que, por [17], podemos garantir também, para uma cobertura infinita aberta $\{U_i\}_{i \in J}$, um resultado análogo ao Teorema 1.14, ou seja, a existência de uma partição da unidade infinita dominada por $\{U_i\}_{i \in J}$.

1.2 Fibrados Localmente Triviais

O objeto de estudo central dessa seção são os fibrados localmente triviais.

Definição 1.19. [12] Um fibrado localmente trivial é uma estrutura (E, B, f, F) onde E, B e F são espaços topológicos e $f : E \rightarrow B$ é uma aplicação sobrejetiva contínua que satisfaz a condição de trivialidade local, ou seja, que para todo $x \in B$ existe uma vizinhança U de x e um homeomorfismo $\phi : f^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tal que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\ f \downarrow & \swarrow \pi & \\ U & & \end{array}$$

onde $\pi : U \times F \rightarrow U$ é a projeção dada por $\pi(x, y) = x$, para $x \in U$ e $y \in F$.

Aos espaços E , B e F damos os nomes de espaço total, espaço base e fibra do fibrado, respectivamente. É muito comum também se referir a aplicação f como sendo o fibrado. Agora, observemos que, para qualquer $x \in B$, $f^{-1}(x)$ é homeomorfo a F , nesse caso, dizer que (E, B, f, F) é um fibrado equivale a dizer que para todo $x \in B$ existe uma vizinhança U de x e um homeomorfismo $\phi : f^{-1}(U) \rightarrow U \times f^{-1}(x)$ que satisfaz $\pi \circ \phi = f$. Podemos ainda generalizar essa definição também para variedades diferenciáveis da seguinte forma:

Definição 1.20. [12] Sejam E, B e F variedades diferenciáveis e $f : E \rightarrow B$ uma aplicação sobrejetiva diferenciável, então (E, B, f, F) é um fibrado localmente trivial se, para todo $x \in B$, existir uma vizinhança U de x e um difeomorfismo $\phi : f^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tal que $\pi \circ \phi = f$, onde $\pi : U \times F$ é a projeção dada por $\pi(x, y) = x$, para $x \in U$ e $y \in F$, ou de maneira equivalente, se para todo $x \in B$ existe uma vizinhança U de x e um difeomorfismo $\phi : f^{-1}(U) \rightarrow U \times f^{-1}(x)$ que satisfaz $\pi \circ \phi = f$.

Exemplo 1.3. Denotemos por $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ e tomemos $E = S^1 \times \mathbb{R}$, $B = S^1$ e $f : E \rightarrow B$ dada por $f(x, t) = x$. Dado $x \in B$, a quadrupla $(E, B, f, f^{-1}(x))$ é um fibrado localmente trivial. De fato, seja $x \in B$ e U uma vizinhança de x , então $f^{-1}(U) = U \times \mathbb{R}$ e $f^{-1}(x) = \mathbb{R}$. Tomando $\phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow U \times \mathbb{R}$ dada por $\phi(x, t) = (x, t)$ temos que $(\pi \circ \phi)(x, t) = \pi(\phi(x, t)) = \pi(x, t) = x = f(x, t)$ para todo $x \in U$ e $t \in \mathbb{R}$ e disso segue o resultado.

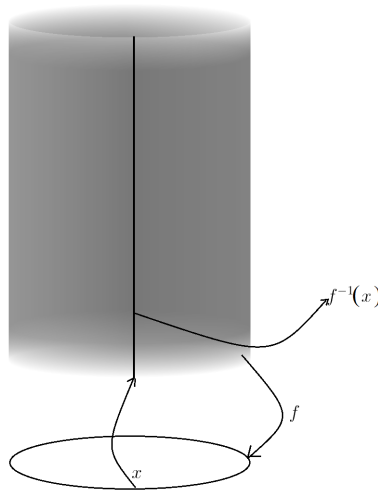


Figura 1.3: Projeção do cilindro sobre S^1

Agora que já estabelecemos cada uma dessas noções é natural pensar quais condições podemos exigir para que uma quádrupla (E, B, f, F) seja um fibrado localmente trivial. Um dos principais resultados a respeito disso é o Lema de Fibração de Ehresmann, cuja demonstração pode ser consultada em [22].

Lema 1.15 (Lema de Fibração de Ehresmann). [12] Se N e P são variedades suaves e $f : N \rightarrow P$ uma submersão própria. Então $(E, B, f, f^{-1}(x))$ é um fibrado localmente trivial.

OBS: Podemos ainda generalizar esse lema para o caso em que N e P são variedades com bordo.

1.3 Noções Algébricas Preliminares

Ao longo dessa seção abordamos alguns resultados e definições associados à álgebra que são importantes, principalmente, para o segundo capítulo desse trabalho. As principais referências utilizadas no decorrer dessa abordagem são Atiyah [1] e Kunze [6].

Definição 1.21. [1] Seja A um anel. Um A -módulo é um par (M, μ) onde M é um grupo abeliano e μ uma aplicação de $A \times M$ em M (que por conveniência escreveremos $\mu(a, x) = ax$ que satisfaz, para todo $a, b \in A$ e $x, y \in M$,

$$(i) \quad a(x + y) = ax + ay;$$

$$(ii) \quad (a + b)x = ax + bx;$$

$$(iii) \quad (ab)x = a(bx);$$

$$(iv) \quad 1x = x.$$

Observemos que disso segue que qualquer ideal de A é um A -módulo. Agora, definimos também que:

Definição 1.22. [1] Um submódulo N de um A -módulo M é um subgrupo de M que é fechado para a aplicação μ .

Definição 1.23. [1] M é um A -módulo Noetheriano se toda cadeia

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots \subseteq N_n \subseteq \dots$$

de submódulos de M estaciona, ou seja, se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $N_n = N_{n+1} = \dots$.

É importante destacar ainda, a respeito disso, a seguinte caracterização:

Proposição 1.16. [1] *M é um A –módulo Noetheriano se, e somente se, todo submódulo de M é finitamente gerado (como um A –módulo).*

A demonstração desse resultado pode ser consultada em [1] e aqui o apresentaremos sem demonstração. Agora, definimos que

Definição 1.24. [1] Um anel A é dito Noetheriano se é Noetheriano como um A –módulo.

Assim, se A é um anel Noetheriano temos, não só, que toda cadeia de ideais de A estaciona, como também, que todo ideal de A é finitamente gerado. Nesse contexto, um exemplo trivial de anel Noetheriano os corpos, já que os únicos ideais de um corpo K são $\{0\}$ e K . Isso, em conjunto com os resultados que seguem logo em seguida, garantem uma série de fatos importantes sobre os objetos de estudo ainda dessa seção. Nesse trabalho nós simplesmente os assumiremos sem nos preocuparmos com as demonstrações, que podem também ser consultadas em [1].

Teorema 1.17 (Teorema da Base de Hilbert). [1] *Se A é um anel Noetheriano, então $A[x]$ é um anel Noetheriano.*

Corolário 1.18. Se A é um anel Noetheriano, então $A[x_1, \dots, x_n]$ é um anel Noetheriano.

Partindo dessas observações, tomemos $\mathbb{K}$ um corpo infinito e $\mathbb{K}^n$ o conjunto formado pelas n –uplas $x = (x_1, \dots, x_n)$, onde $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Definamos que:

Definição 1.25. [6] Um subconjunto $V \subset \mathbb{K}^n$ é chamado um conjunto algébrico se existe um coleção $S \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tal que

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n; f(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall f \in S\}.$$

Assim, suponhamos que V seja um conjunto algébrico e consideremos o ideal

$$I(V) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]; f(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall (x_1, \dots, x_n) \in V\}.$$

Como $\mathbb{K}$ é um anel Noetheriano, temos pelo Corolário 1.18 que $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é Noetheriano. Assim, todo ideal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é gerado (como um $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ –módulo) por uma quantidade finita, $f_1, f_2, \dots, f_m$, de polinômios de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e isso é válido particularmente para $I(V)$.

Unindo isso ao fato de que $V = \{(x_1, \dots, x_n); f(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall f \in I(V)\}$, resultado cuja demonstração pode ser verificada em [6], chegamos à conclusão de que V pode ser descrito como o conjunto das raízes comuns a uma quantidade finita de

equações polinomiais, digamos $f_1, f_2, \dots, f_m$. Em outras palavras,

$$V = f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0) \cap \dots \cap f_m^{-1}(0)$$

e disso podemos concluir também que V é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$, pois cada $f_i^{-1}(0)$ é um fechado em $\mathbb{R}^n$, uma vez que 0 é fechado em $\mathbb{R}$ e cada f_i é contínua.

Segue também do fato de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ser Noetheriano que qualquer cadeia de conjuntos algébricos $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$ estaciona. De fato, se

$$V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset \dots,$$

então podemos concluir facilmente que $I(V_1) \subset I(V_2) \subset \dots \subset I(V_n) \subset \dots$. Como essa cadeia estaciona, uma vez que $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é Noetheriano, temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I(V_n) = I(V_{n+1}) = \dots$. Daí, $V_n = V_{n+1} = \dots$ e, portanto, $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$ estaciona.

É importante ressaltar também que se V_1 e V_2 são dois conjuntos algébricos, então $V_1 \cap V_2$ e $V_1 \cup V_2$ também são conjuntos algébricos, conforme podemos verificar em [6]. Por fim, definimos que:

Definição 1.26. [6] Um conjunto algébrico V , não-vazio, é uma variedade algébrica se não pode ser escrito como união de dois subconjuntos algébricos próprios. Em outros termos, uma variedade algébrica é um conjunto algébrico irredutível.

1.4 Conjuntos Analíticos e Germes de Funções Analíticas

Cada objeto de estudo abordado ao longo dessa seção parte de uma classe especial de funções que, a grosso modo, é mais ampla que a classe dos polinômios, mas que ainda preserva certas propriedades associadas a esse conjunto. Ou seja, nessa seção nós apresentamos alguns aspectos relacionados à classe de funções analíticas. Desse modo, de maneira geral, definimos que:

Definição 1.27. Uma função $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) é analítica se para cada $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ existir uma vizinhança $U \subset \mathbb{K}^n$ de a tal que

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_i} (x_i - a_i) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \dots, \end{aligned}$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$.

Ou seja, uma função $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ é dita analítica se localmente pode ser expandida por uma série de Taylor. Para o caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dizer que f é analítica é equivalente a dizer que f é holomorfa. Além disso, definimos também que

Definição 1.28. Um conjunto $V \subset \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) é dito analítico se, para cada $a \in V$, existe uma vizinhança U de a e funções analíticas $f_1, \dots, f_m : U \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ tais que

$$V \cap U = \{x \in \mathbb{K}^n; f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0\}.$$

Então um conjunto analítico é uma extensão natural de um conjunto algébrico. Claro que disso temos que todo conjunto algébrico é também um conjunto analítico. No espaço das funções $\mathbb{K}$ –analíticas (definidas em uma vizinhança 0) definiremos agora uma relação de equivalência $\sim$ estabelecendo que, dada duas funções $f : U_1 \rightarrow \mathbb{K}$ e $g : U_2 \rightarrow \mathbb{K}$, $f \sim g$ quando existe uma vizinhança U de 0 tal que $f|_U \equiv g|_U$. As classes de equivalência determinadas por $\sim$ são chamadas de germes e denotadas por $f : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, f(0))$ e a coleção de todos esses germes de funções é denotado por $\mathcal{O}_n$. É importante destacar que o conjunto $\mathcal{O}_n$ é um anel comutativo com unidade cujo único ideal maximal é $\mathcal{M} = \{f \in \mathcal{O}_n; f(0) = 0\}$.

Capítulo 2

Singularidades e Fibração de Milnor

Nesse capítulo apresentamos uma série de noções e resultados importantes para a construção de toda a teoria que será discutida nas próximas seções. Todos esses resultados foram construídos sobre uma classe específica de conjuntos: os conjuntos algébricos, mas que podem também ser estendidos para conjuntos mais gerais. Na seção abaixo introduzimos algumas definições e resultados importantes acerca disso. As principais referências para esse capítulo são: Milnor[18]

2.1 Fatos Básicos sobre Conjuntos Algébricos

Nessa seção, introduzimos algumas noções associados aos conjuntos algébricos (reais ou complexos) e apresentamos a partir disso alguns resultados relacionados, como é o caso, por exemplo, do Teorema da Estrutura Cônica. É importante destacar, antes de tudo, que ao longo dessa seção $\mathbb{K}$ indica sempre $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Tomemos $V \subset \mathbb{K}^n$ um conjunto algébrico não-vazio. Escolhamos uma quantidade finita de polinômios $f_1, \dots, f_m$ que gerem o ideal $I(V)$ e para cada $x \in V$ consideremos a matriz

$$(\partial f_i / \partial x_j(x)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Seja ρ o maior posto dessas matrizes. Então, definimos que

Definição 2.1. [18] Um ponto $x \in V$ é chamado não-singular se o posto de $(\partial f_i / \partial x_j(x))$ é ρ e é dito singular se o posto de $(\partial f_i / \partial x_j(x))$ é menor que ρ .

Notemos que a definição não depende de $f_1, \dots, f_m$ pois qualquer polinômio f_{m+1} extra adicionado a lista pode ser escrito como $f_{m+1} = g_1 f_1 + \cdots + g_m f_m$. Além disso,

Lema 2.1. [18] O conjunto $\Sigma(V)$ de todos os pontos singulares de V é um subconjunto algébrico próprio de V .

Demonstração: Começemos observando que, se $x \in \Sigma(V)$, então $(\partial f_i / \partial x_j(x))$ não assume posto máximo, donde segue que, o determinante de todo menor $\rho \times \rho$ de $(\partial f_i / \partial x_j(x))$ se anula. Além disso, notemos também que, se $x \in V$ é tal que o determinante de todo menor $\rho \times \rho$ de $(\partial f_i / \partial x_j(x))$ se anula, então $x \in \Sigma(V)$. Daí, considerando, estrategicamente, o conjunto S de todos determinantes de menores $\rho \times \rho$ de $(\partial f_i / \partial x_j)$ e observando que, $S \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, chegamos a conclusão que $\Sigma(V)$ é o conjunto dos pontos de V que anulam todos os polinômios de S . Sendo assim, temos que $\Sigma(V)$ é um subconjunto algébrico de V . É claro também que $\Sigma(V)$ é próprio, pois se $V \subset \Sigma(V)$, então $(\partial f_i / \partial x_j(x))$ tem posto menor que ρ para todo $x \in V$, mas isso é um absurdo. ■

Podemos também obter um resultado importante a respeito dos pontos não-singulares de um conjunto algébrico $V \subset \mathbb{K}^n$, conforme destacamos abaixo:

Teorema 2.2. (Whitney)[18] O conjunto $V - \Sigma(V)$ de pontos não-singulares de V é uma variedade suave não vazia (de dimensão $n - \rho$ sobre $\mathbb{K}$).

Além disso, mais especificamente, para qualquer par de conjuntos algébricos V e W ($V \supset W$), podemos garantir também que:

Teorema 2.3. (Whitney)[18] $V - W$ tem, no máximo, um número finito de componentes conexas.

Exemplo 2.1. A seguinte variedade algébrica:

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 - x^2(1 - x^2) = 0\}$$

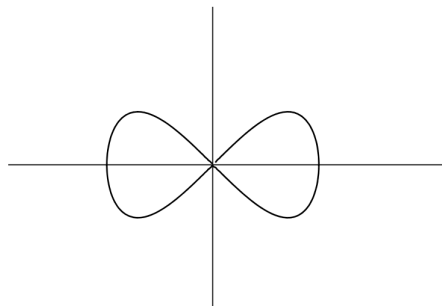


Figura 2.1: Representação de V

ilustra bem o tipo de ponto singular mais bem comportado e de fácil compreensão, um

”ponto duplo”, onde dois ramos analíticos reais com tangente distintas se cruzam.

De fato, consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y^2 - x^2 + x^4$ ($f(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in V$) e a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 4x^3 & 2y \end{pmatrix}$$

que tem posto máximo 1. Então, como essa matriz se anula em $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $(0, 0)$ e apenas $(0, 0)$ pertence a V , temos que $(0, 0)$ é o único ponto singular de V .

É importante ressaltar que nesse exemplo usamos, implicitamente, o fato de que qualquer outro polinômio que zerasse o conjunto V era múltiplo do polinômio f , sendo assim, poderíamos tomar f como sendo o único gerador de $I(V)$ e isso, sem dúvidas, facilitou a determinação dos pontos singulares de V . Esse artifício é, na verdade, garantido pelo resultado abaixo, que aqui apenas o enunciaremos, mas que a demonstração pode ser consultada em [18].

Lema 2.4. [18] Seja V um conjunto algébrico real ou complexo definida por uma equação polinomial $f(x) = 0$, com f irredutível. No caso real adicionemos a hipótese que V contem um ponto regular de f . Então, todo polinômio que se anula em V é múltiplo de f .

Observemos também que, pelos Teorema 2.2 e Teorema 2.3 de Whitney, podemos assegurar que

Corolário 2.5. [18] Qualquer conjunto algébrico V real ou complexo pode ser escrito como a seguinte união finita disjunta

$$V = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p$$

onde cada M_j é uma variedade diferenciável com apenas uma quantidade finita de componentes conexas.

Demonstração: Ponhamos, indutivamente, $M_1 = V - \Sigma(V)$, $M_2 = \Sigma(V) - \Sigma(\Sigma(V))$, $M_3 = \Sigma(\Sigma(V)) - \Sigma(\Sigma(\Sigma(V)))$ e assim sucessivamente e observemos que, para algum $p \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{\Sigma(\dots \Sigma(V))}_p = \emptyset$$

pois do contrário, teríamos pelo Lema 2.1 que

$$V \supsetneq \Sigma(V) \supsetneq \Sigma(\Sigma(V)) \supsetneq \Sigma(\Sigma(\Sigma(V))) \dots$$

não estacionária, o que seria um absurdo. Daí, como podemos escrever

$$V = (V - \Sigma(V)) \cup (\Sigma(V) - \Sigma(\Sigma(V))) \cup \dots \cup \underbrace{(\Sigma(\dots \Sigma(V)) - \Sigma(\dots \Sigma(V)))}_{p-1} \cup \underbrace{\Sigma(\dots \Sigma(V))}_{p},$$

concluimos que

$$V = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p.$$

■

A partir de agora, tomemos $M_1 = V - \Sigma(V)$ a variedade suave formada pelos pontos não-singulares de um conjunto algébrico $V \subset \mathbb{K}^n$ e tomemos g uma função polinomial em $\mathbb{K}^n$. Sabemos pelo Teorema 1.9 qual as condições exigidas para que pontos em M_1 sejam pontos críticos de $g|_{M_1}$. Mas nem sempre é fácil obter tais pontos por meio dessa caracterização. Em algumas situações é mais interessante empregar a seguinte ferramenta de caráter algébrico:

Lema 2.6. [18] O conjunto dos pontos críticos de uma restrição da função $g|_{M_1}$ é igual a interseção de M_1 com o conjunto algébrico W , que consiste dos pontos $x \in V$ tais que a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

tem posto menor ou igual a ρ ; onde $f_1, \dots, f_m$ denota os polinômios que geram $I(V)$.

Demonstração: Considerarmos o caso em que $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$ (o caso complexo pode ser feito de modo análogo) e lembremos que $M_1 = V - \Sigma(V)$ é uma variedade de dimensão $n - \rho$. Tomemos $y \in M_1$, $i : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação inclusão e $\phi : U' \subset \mathbb{R}^{n-\rho} \rightarrow U'_1 \cap M_1$ e $\psi : V'_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V'_1 \cap \mathbb{R}^n$ parametrizações para y que satisfazem $\psi(0) = \phi(0) = y$ tais que o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^n \\ \phi \uparrow & & \uparrow \psi \\ U' & \xrightarrow{h=\psi^{-1} \circ i \circ \phi} & V' \end{array}$$

comuta. Então, como i é uma imersão temos pela forma local das imersões que existem parametrizações $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n-\rho} \rightarrow U_1 \cap M_1$ e $\vartheta : U \times U' \rightarrow V_1 \cap \mathbb{R}^n$ tais que

$$(\vartheta^{-1} \circ i \circ \varphi)(u_1, \dots, u_{n-\rho}) = (u_1, \dots, u_{n-\rho}, 0, \dots, 0),$$

para todo $(u_1, \dots, u_n) \in U$ e daí $\vartheta^{-1}(U_1 \cap M_1) = U \times \{(0, \dots, 0)\}$.

Com isso concluímos que para uma vizinhança de y podemos escolher um sistema analítico de coordenadas locais $u_1, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ tais que M_1 corresponde ao lugar geométrico $u_1 = \dots = u_\rho = 0$. Assim, $u_{\rho+1}, u_{\rho+2}, \dots, u_n$ podem ser tomados como coordenadas locais de M_1 . Observemos agora que $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(x) = 0$ para todo $x \in M_1$ quando $j \geq \rho+1$, uma vez que f_i anula M_1 . Além disso, notemos também que $(\partial f_i / \partial u_j)(x)$ tem posto ρ já que $(\partial f_i / \partial u_j)(x)$ é coluna equivalente a $(\partial f_i / \partial x_l)(x)$. Assim, as ρ primeiras colunas de $(\partial f_i / \partial u_j)(x)$ são linearmente independentes e, portanto, a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_1}(x) & \dots & \frac{\partial g}{\partial u_n}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_n}(x) \end{pmatrix}$$

tem posto ρ se e, somente se, $\frac{\partial g}{\partial u_{\rho+1}}(x) = \dots = \frac{\partial g}{\partial u_n}(x) = 0$, ou em outros termos, se e, somente se, x é um ponto crítico de g restrito a M_1 e, como a matriz acima é coluna equivalente a matriz indicada no enunciado no lema, segue que o resultado. ■

É importante ressaltar também, a respeito de g e M_1 , que:

Corolário 2.7. [18] A função $g|_{M_1}$ pode ter no máximo um número finito de valores críticos.

Demonstração: Sabemos, pelo Lema 2.6, que o conjunto de pontos críticos de g , restrito à M_1 , é dado por $M_1 \cap W = (V - \Sigma(V)) \cap W = W - \Sigma(V)$ e, como a interseção de conjuntos algébricos ainda é um conjunto algébrico, temos, pelo Corolário 2.5, que $M_1 \cap W$ pode ser expresso pela seguinte união disjuntas:

$$M_1 \cap W = M'_1 \cup M'_2 \cup \dots \cup M'_p,$$

onde cada M'_i é uma variedade diferenciável como apenas uma quantidade finita de componentes conexas. Claro que cada ponto $x \in M'_i$ é ponto crítico de g restrito à M_1 já que $M'_i \subset M_1 \cap W$. Assim, x é também um ponto crítico de g restrito à M'_i e disso temos que todos os pontos de M'_i são pontos críticos dessa restrição. Mas desse fato temos que g é constante em cada componente conexa de M'_i , logo $g(M'_i)$ é conjunto finito e, portanto, o conjunto de todos os valores críticos de g restrito à M_1 , que é dado por $g(M'_1 \cup \dots \cup M'_p)$, é finito. ■

Agora, tomemos x^0 um ponto não-singular de V ou um ponto singular isolado de V (isto é, um ponto para o qual existe uma vizinhança na qual x^0 é o único ponto singular de V). Podemos garantir pelo resultado acima que:

Corolário 2.8. [18] Toda esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$ centrada em x^0 e de raio ε , com ε suficientemente pequeno, intersecta V em uma variedade suave.

Demonstração: Consideremos, primeiramente, o caso real. Vamos provar, antes de tudo, que se x^0 é um ponto não-singular, então existe uma esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$, centrada em x^0 , tal que $\Sigma(V) \cap \mathbb{S}_\varepsilon = \emptyset$. Para isso observemos que do fato de x^0 ser não-singular, existe um menor $(\partial f_{i'}/\partial x_{j'}(x^0))_{\rho \times \rho}$ da matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}$$

tal que o determinante é diferente de 0. Tomemos $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ associa o determinante de $(\partial f_{i'}/\partial x_{j'}(x))_{\rho \times \rho}$ e observemos que g é contínua, já que se trata do produto e diferença de funções contínuas. Como 0 é fechado em $\mathbb{R}$, temos que $g^{-1}(0)$ é fechado em $\mathbb{R}^n$ e disso segue que

$$\mathbb{R}^n - g^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; g(x) \neq 0\}$$

é aberto. Desse fato podemos concluir que existe um disco $\mathbb{D}_\varepsilon$, centrado em x^0 , que está contido em $\mathbb{R}^n - g^{-1}(0)$ e assim, da própria definição de g , temos que $\mathbb{D}_\varepsilon \cap \Sigma(V) = \emptyset$. Claro que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno isso é válido também para uma esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$ e disso segue o resultado.

Tomemos a função $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$r(x) = \|x - x^0\|^2.$$

Notemos que, pelo Corolário 2.7, r restrito à $V - \Sigma(V)$ tem um número finito de valores críticos. Sendo assim, tomemos $\varepsilon^2 > 0$ menor que qualquer um dos valores críticos positivos dessa restrição e observemos que, se $x \in V - \Sigma(V)$ é um valor regular de r restrito à $V - \Sigma(V)$, então $x \notin \mathbb{S}_\varepsilon$. Assim, ε^2 é valor regular de r restrito à $V - \Sigma(V)$ e, portanto, a imagem inversa de ε^2 , por essa restrição, que é o conjunto

$$\{x \in V - \Sigma(V); r(x) = \varepsilon^2\} = \mathbb{S}_\varepsilon \cap (V - \Sigma(V))$$

é uma subvariedade de $V - \Sigma(V)$. Mas, tomando ε suficientemente pequeno, $\mathbb{S}_\varepsilon$ e $\Sigma(V)$ são disjuntos, tanto para o caso que x^0 é um ponto singular isolado, como para o caso que x^0 é um ponto não-singular, temos que $\Sigma(V) \cap \mathbb{S}_\varepsilon = \emptyset$. Disso segue que

$$\mathbb{S}_\varepsilon \cap (V - \Sigma(V)) = \mathbb{S}_\varepsilon \cap V$$

o que prova o resultado. O caso complexo pode ser provado observando que uma variedade complexa em $\mathbb{C}^n$ vista como uma variedade real em $\mathbb{R}^{2n}$. ■

Curiosamente, essa mesma justificativa permite concluir também que, para ε suficientemente pequeno, V e $\mathbb{S}_\varepsilon$ são transversais. Na verdade, em determinadas situações é até mais prático utilizar essa consequência, ao invés do próprio lema em si. É importante destacar também que o conjunto $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ é comumente chamado de *link* e ao longo desse capítulo ainda abordamos vários resultados a respeito dessa variedade suave, o primeiro deles é o Teorema da Estrutura Cônica.

Teorema 2.9 (Teorema da Estrutura Cônica). [18] *Seja x^0 um ponto não-singular ou um ponto singular isolado, $\mathbb{D}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{K}^n; \|x - x^0\| \leq \varepsilon\}$ e $\mathbb{S}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{K}^n; \|x - x^0\| = \varepsilon\}$. Para ε pequeno, a interseção de V com o disco $\mathbb{D}_\varepsilon$ é homeomorfo ao cone sobre $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$.*

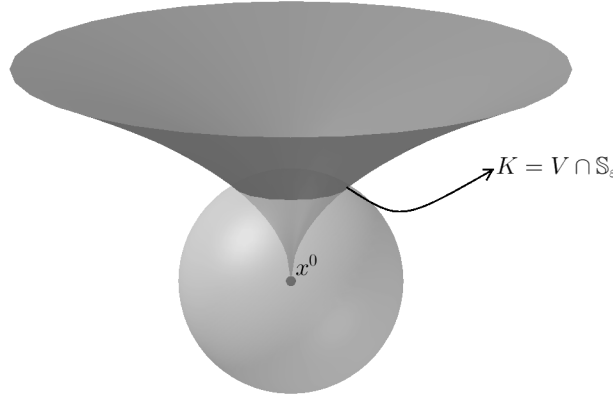


Figura 2.2: Estrutura Cônica

Demonstração: Primeiramente, lembremos que o cone sobre K é a união de todos os segmentos de reta

$$tk + (1 - t)x^0, \quad 0 \leq t \leq 1, k \in K.$$

e observemos que para demonstrar o teorema basta considerarmos, novamente, o caso real, já qualquer conjunto algébrico em $\mathbb{C}^n$ pode ser considerada conjunto algébrico em $\mathbb{R}^{2n}$. Novamente, consideremos a função $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$r(x) = \|x - x^0\|^2$$

e tomemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, de modo que x^0 seja o único ponto singular (ou não-singular) de V que pertença à $\mathbb{D}_\varepsilon$ e que a interseção $(V - \Sigma(V)) \cap \mathbb{D}_\varepsilon$ não contenha nenhum ponto crítico de r restrito a $V - \Sigma(V)$. Para provar esse teorema nós construiremos um campo de vetores diferenciável $\vec{v} : \mathbb{D}_\varepsilon - \{x^0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) O vetor $\vec{v}(x)$ aponta para fora de x^0 , para todo $x \in \mathbb{D}_\varepsilon - \{x^0\}$, isto é,

$$\langle \vec{v}(x), x - x^0 \rangle > 0$$

(ii) Se $x \in V - \Sigma(V)$, $\vec{v}(x)$ será tangente à variedade $V - \Sigma(V)$.

Para isso construiremos um campo de vetores em vizinhanças de cada ponto de $\mathbb{D}_\varepsilon - \{x^0\}$ satisfazendo as condições acima. Assim, tomemos $x_\alpha \in \mathbb{D}_\varepsilon - \{x^0\}$ e lembremos que se $x_\alpha \notin V$ então podemos considerar U_α uma vizinhança de x_α contida em $\mathbb{R}^n - V$ e definir um campo $\vec{v}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $\vec{v}_\alpha(x) = x - x^0$. É claro que dessa construção temos que $\langle \vec{v}_\alpha(x), x - x^0 \rangle > 0$ para todo $x \in U_\alpha$, pois

$$\langle \vec{v}_\alpha(x), x - x^0 \rangle = \langle x - x^0, x - x^0 \rangle = \|x - x^0\|^2$$

e $\|x - x^0\|^2 > 0$, já que $x \neq x^0$. Além disso, (ii) é válido por vacuidade.

Se, por outro lado, $x_\alpha \in V$ e, portanto, pertence a M_1 , então podemos escolher um sistema de coordenadas locais $u_1, \dots, u_n$ de uma vizinhança de x_α tal que M_1 corresponde ao lugar geométrico $u_1 = \dots = u_\rho = 0$, conforme indicamos no Lema 2.6. Do fato de x_α não ser um ponto crítico de r restrito à M_1 , segue que ao menos uma das derivadas parciais

$$\frac{\partial r}{\partial u_{\rho+1}}(x_\alpha), \dots, \frac{\partial r}{\partial u_n}(x_\alpha)$$

é diferente de 0, digamos $\frac{\partial r}{\partial u_h}(x_\alpha) \neq 0$. Seja U_α vizinhança conexa suficientemente pequena na qual $\frac{\partial r}{\partial u_h} \neq 0$ e seja $\vec{v}(x)$ o vetor

$$\pm \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_h}(x), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u_h}(x) \right)$$

tangente à u_h -curva coordenada em x , cujo sinal é escolhido de acordo com o sinal de $\frac{\partial r}{\partial u_h}(x)$. Esse vetor é tangente a M_1 se $x \in M_1$, pois a u_h -curva coordenada está contida em M_1 . Além disso, como

$$\begin{aligned} 2\langle \vec{v}_\alpha(x), x - x^0 \rangle &= \sum_{i=1}^n 2(x_i - x_i^0) \vec{v}_i^\alpha \\ &= \frac{\partial r}{\partial x_i}(x) \cdot \left(\pm \frac{\partial x_i}{\partial u_h}(x) \right) \\ &= \pm \frac{\partial r}{\partial u_h}(x) > 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in U_\alpha$, segue também que $\langle \vec{v}_\alpha(x), x - x^0 \rangle > 0$ pra todo $x \in U_\alpha$.

Agora, construmos a partir desses campos de vetores locais um campo de vetores global. Para isso tomemos uma partiçõ da unidade $\{\phi_\alpha\}$ em $\mathbb{D}_\epsilon - \{x^0\}$, dominada por $\{U_\alpha\}$, e definamos o campo vetorial

$$\vec{v}(x) = \sum \phi_\alpha(x) \vec{v}_\alpha(x)$$

em $\mathbb{D}_\epsilon - \{x^0\}$. Notemos que, para cada $x \in \mathbb{D}_\epsilon - \{x^0\}$,

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}(x), x - x^0 \rangle &= \left\langle \sum \phi_\alpha(x) \vec{v}_\alpha(x), x - x^0 \right\rangle \\ &= \sum \phi_\alpha(x) \langle \vec{v}_\alpha(x), x - x^0 \rangle > 0, \end{aligned}$$

pois $\langle \vec{v}(x), x - x^0 \rangle > 0$, $\phi_\alpha(x) \geq 0$ e a soma acima é finita. Além disso, notemos que, do fato de cada $\vec{v}_\alpha(x)$ ser tangente à $V - \Sigma(V)$, sempre que $x \in V - \Sigma(V)$, temos que $\vec{v}(x)$ é tangente a $V - \Sigma(V)$, sempre que $x \in V - \Sigma(V)$. Assim, o campo de vetores que construímos satisfaz os itens (i) e (ii).

Definamos, a partir disso, um campo vetorial $\vec{w} : \mathbb{D}_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$\vec{w}(x) = \frac{\vec{v}(x)}{\langle 2(x - x^0), \vec{v}(x) \rangle}$$

e consideremos a equaçõ diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \vec{w}(x).$$

Sejam $p(t) = x$ as soluções para essa equaçõ, definida em um intervalo (α, β) . Entã, para quaisquer uma delas temos que

$$\frac{dp}{dt}(t) = \vec{w}(p(t)) = \vec{w}(x).$$

Logo, cada $\frac{dp_i}{dt}(t)$ corresponde exatamente à $w_i(x)$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{d(r \circ p)}{dt}(t) &= \frac{\partial r}{\partial x_1}(x) \cdot \frac{dp_1}{dt}(t) + \cdots + \frac{\partial r}{\partial x_n}(x) \cdot \frac{dp_n}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial r}{\partial x_1}(x) \cdot \vec{w}_1(x) + \cdots + \frac{\partial r}{\partial x_n}(x) \cdot \vec{w}_n(x) \\ &= 2(x_1 - x^0) \cdot \vec{w}_1(x) + \cdots + 2(x_n - x^0) \cdot \vec{w}_n(x) \\ &= \langle (2(x_1 - x^0), \dots, 2(x_n - x^0)), (w_1(x), \dots, w_n(x)) \rangle \\ &= \langle 2(x - x^0), w(x) \rangle. \end{aligned}$$

Substituindo $\vec{w}(x)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d(r \circ p)}{dt}(t) &= \left\langle 2(x - x^0), \frac{\vec{v}(x)}{\langle 2(x - x^0), \vec{v}(x) \rangle} \right\rangle \\ &= \frac{\langle 2(x - x^0), \vec{v}(x) \rangle}{\langle 2(x - x^0), \vec{v}(x) \rangle} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, $(r \circ p)(t) = t + c$, para alguma constante c . Como podemos subtrair a constante c do parâmetro t (se necessário), assumiremos que

$$r(p(t)) = \|p(t) - x^0\|^2 = t.$$

Vamos mostrar agora que:

Lema 2.10. A solução $p(t)$ pode ser estendida para o intervalo $0 < t \leq \varepsilon^2$.

Demonstração: Primeiramente vamos supor que o campo $\vec{w}$ foi construído sobre um conjunto aberto um tanto maior que $\mathbb{D}_\varepsilon - x^0$, de maneira que a fronteira de $\mathbb{D}_\varepsilon$ não nos traga problemas. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todos os intervalos abertos no qual p pode ser definida e tomemos $\{\mathcal{C}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma cadeia de $\mathbb{S}$ (Com a relação de ordem dada pela continência). Claro que essa cadeia é limitada superiormente. Daí, pelo Lema de Zorn nós temos que a solução $p(t)$ pode ser estendida para um intervalo (α', β') . Agora suponhamos, por absurdo, que $\varepsilon^2 \leq \beta'$. Vamos provar que $p(t)$ pode ser estendido para um intervalo ligeiramente maior, o que irá contradizer a hipótese. Para isso comecemos observando que, como os pontos $p(t)$, com $\alpha' < t < \beta'$, pertencem ao compacto $\mathbb{D}_\varepsilon$, o limite x' de $\{p(t)\}$ com $t \rightarrow \beta'$ pertence à $\mathbb{D}_\varepsilon$ e como $r(x') = \beta' \neq 0$, já que $r(p(t)) = t$, temos que $x' \in \mathbb{D}_\varepsilon - x^0$.

Usando o Teorema da Existência, Unicidade e Diferenciabilidade na equação diferencial $\frac{dx}{dt} = \vec{w}(x)$, numa vizinhança U de x' , podemos garantir que para cada $x'' \in U$ e t'' em algum intervalo arbitrariamente pequeno I contendo β' existe uma única solução $x = q(t)$, $t \in I$, tal que $q(t'') = x''$, onde $q(t)$ é uma função diferenciável de x'', t'' e t . Sendo assim, para aplicar esse teorema, escolhamos $t'' \in (\alpha', \beta') \cap I$ e tomemos $x'' = p(t'')$. Usando a unicidade local nós temos que, $p(t) = q(t)$ para todo $t \in (\alpha', \beta') \cap I$. Desse modo, as soluções p e q podem ser unidas para fornecer uma solução definida no intervalo $(\alpha', \beta') \cup I$, mas isso é um absurdo e disso segue que $\beta' < \varepsilon^2$. O mesmo raciocínio pode ser usado para concluir que $\alpha' = 0$ o que prova o resultado. ■

Observemos também que a solução $p(t)$, com $0 < t \leq \varepsilon^2$ está unicamente determi-

nada pelo valor inicial $p(\varepsilon^2) \in \mathbb{S}_\varepsilon$. Assim, para cada $a \in \mathbb{S}_\varepsilon$ tomemos

$$p_a(t) = P(a, t), \quad 0 < t \leq \varepsilon^2$$

a única soluão que satisfaz a condição inicial $p_a(\varepsilon) = P(a, \varepsilon^2) = a$. Provaremos agora que a aplicação

$$\begin{aligned} P : \mathbb{S}_\varepsilon \times (0, \varepsilon] &\longrightarrow \mathbb{D}_\varepsilon - \{x^0\} \\ (x, t) &\longmapsto p_a(t) \end{aligned}$$

aplica $\mathbb{S}_\varepsilon \times (0, \varepsilon]$ difeomorficamente à $\mathbb{D}_\varepsilon - \{x^0\}$.

Para isso, comecemos observando que a sobrejetividade de P segue do fato de que, dada qualquer soluão $x = p(t)$, $0 < t \leq \varepsilon$, temos que $r(p(t)) = t$, donde segue que para todo $x \in \mathbb{D}_\varepsilon - \{x^0\}$ existe (a, t_0) tal que $x = p_a(t_0)$. Além disso, P é também injetiva, pois se $p_a(t_1) = p_b(t_2)$, então

$$\|p_a(t_1) - x^0\|^2 = \|p_b(t_2) - x^0\|^2.$$

Assim, $r(p_a(t_1)) = r(p_b(t_2))$ e, portanto, $t_1 = t_2$. Mas, se $t_1 = t_2 = \varepsilon^2$, então implica a injetividade. É claro também que P é diferenciável e que a derivada de P é não nula, logo, pelo Teorema da Aplicação Inversa, P é um difeomorfismo local, donde segue o resultado, já que f é uma bijeção.

Agora notemos que do fato de $\vec{w}(x)$ ser tangente a M_1 , para todo $x \in M_1$, temos que toda curva integral $p(t)$ que tem um ponto M_1 está contida em M_1 . Assim, P leva $K \times (0, \varepsilon]$ difeomorficamente em $V \cap (\mathbb{D}_\varepsilon - \{x^0\})$. Claro que $P(a, t)$ tende uniformemente para x^0 quando $t \rightarrow 0$. Logo, a correspondência

$$ta + (1 - t)x^0 \longmapsto P(a, t\varepsilon^2)$$

definida para $0 < t \leq 1$ estende-se unicamente a um homeomorfismo do cone sobre $\mathbb{S}_\varepsilon$ à $\mathbb{D}_\varepsilon$ e além disso, este homeomorfismo leva o cone sobre o link K em $V \cap \mathbb{D}_\varepsilon$. ■

2.2 Lema de Seleção da Curva

O foco central dessa seção é o Lema de Seleção da Curva. É importante ressaltar que a versão que abordamos aqui pode ainda ser generalizada para conjuntos mais amplos, conforme pontuamos no fim das discussões a respeito do tema e que essas generalizações terão papel crucial ao longo desse trabalho. Agora que destacamos isso,

tomemos $V \subset \mathbb{R}^m$ uma conjunto algébrico real e $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto definido por:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n; g_1(x) > 0, \dots, g_l(x) > 0\},$$

onde $g_1, \dots, g_l$ são polinômios. Então o Lema de Seleção da Curva garante que

Lema 2.11 (Lema de Seleção das Curvas). [18] Se $0 \in \overline{U \cap V}$, então existe uma curva analítica real

$$p : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

com $p(0) = 0$ e com $p(t) \in U \cap V$ para $t > 0$.

Demonstração: Suponhamos, primeiramente, que $\dim V \geq 2$. Vamos construir uma variedade algébrica própria $V_1 \subset V$ tal que $0 \in \overline{U \cap V_1}$ e por um processo repetido individualmente encontraremos um subconjunto algébrico V_q de V , tal que $\dim V_q \leq 1$ e $0 \in \overline{U \cap V_q}$. Partindo dessa ideia, já podemos supor que V é irredutível, pois se V é a união de dois conjuntos algébricos próprios, então podemos tomar um desses dois conjuntos como sendo V_1 o que trivializa o resultado.

Além disso, podemos supor também que existe uma vizinhança D_η de 0 tal que $D_\eta \cap U \cap \Sigma(V) = \emptyset$, pois do contrário $0 \in \overline{U \cap \Sigma(V)}$ e disso poderíamos tomar V_1 como sendo $\Sigma(V)$. Agora, definamos funções $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$r(x) = \|x\|^2 \quad \text{e} \quad g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdots g_l(x),$$

tomemos $f_1, \dots, f_k$ geradores do ideal $I(V)$ e V' o conjunto de todos os pontos $x \in V$ tais que o posto de

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial r}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial r}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

é menor ou igual a $\rho + 1$. Então segue que:

Lema 2.12. A interseção $U \cap V'$ também contém pontos arbitrariamente próximos de 0 .

Demonstração: Por hipótese, existem esferas suficientemente pequenas centradas em 0 que contém pontos de $U \cap V$. Tomemos $\mathbb{S}_\varepsilon$ uma dessas esferas e consideremos o conjunto

$$K = \{x \in V \cap \mathbb{S}_\varepsilon; g_1(x) \geq 0, \dots, g_l(x) \geq 0\}.$$

Provaremos, agora, que o conjunto K é compacto. Para isso, observemos, primeiramente, que o conjunto $U_i = \{x \in \mathbb{R}^n; g_i(x) \geq 0\}$ é fechado, já que $\mathbb{R}^n - U_i = \{x \in \mathbb{R}^n; g_i(x) < 0\}$ é aberto, pois é a imagem inversa do intervalo $(-\infty, 0)$ por g_i contínua. Assim,

$$K' = \{x \in V \cap \mathbb{S}_\varepsilon; g_1(x) \geq 0, \dots, g_l(x) \geq 0\} = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_l$$

é fechado. Mas, como $V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ é fechado, temos que $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon \cap K'$ é fechado e do fato de K ser limitado, temos que K é compacto.

Assim, como g é contínua, temos que g deve assumir máximo em algum ponto x' de K . É claro que $x' \in U$. Vamos mostrar, agora, que $x' \in V'$. Começemos lembrando que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, não só podemos ter que $U \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ não intersecta $\Sigma(V)$ como também teremos que qualquer valor crítico de r , restrito à $(V - \Sigma(V)) \cap U$, é maior que ε^2 , donde por uma argumentação semelhante ao do Corolário 2.8 segue que ε^2 é valor regular dessa restrição.

Logo, a imagem inversa dessa função, que é o conjunto $\mathbb{S}_\varepsilon \cap (V - \Sigma(V)) \cap U$ é uma subvariedade de $(V - \Sigma(V)) \cap U$ (uma variedade de mesma dimensão de $V - \Sigma(V)$, ou seja, de dimensão $n - \rho$), mas $\mathbb{S}_\varepsilon \cap (V - \Sigma(V)) \cap U = \mathbb{S}_\varepsilon \cap V \cap U$ e disso segue que $\mathbb{S}_\varepsilon \cap V \cap U$ é uma variedade de dimensão $n - \rho - 1$. Além disso observemos também que do fato de cada $x \in \mathbb{S}_\varepsilon \cap V \cap U$ ser valor regular de r restrito à $(V - \Sigma(V)) \cap U$ temos, pela mesma construção do Lema 2.6, que o posto da matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial r}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

é igual à $\rho + 1$.

Seguindo o mesmo raciocínio do Lema 2.6 podemos concluir também que se $x \in \mathbb{S}_\varepsilon \cap V \cap U$ é ponto crítico de g restrito à $\mathbb{S}_\varepsilon \cap V \cap U$, então $x \in \mathbb{S}_\varepsilon \cap V \cap U \cap V'$, pois se $x \notin V'$, então

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial r}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial r}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

tem posto $\rho + 2$, donde temos que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

tem posto $\rho + 1$ e isso nos leva a concluir que x não é ponto crítico de g restrito a $\mathbb{S}_\varepsilon \cap V \cap U$. Assim, notemos que, como g restrito a $\mathbb{S}_\varepsilon \cap V \cap U$ assume valor máximo em x' , temos que x' é ponto crítico dessa restrição. Daí, $x' \in V'$ e, portanto, como isso é válido para ε cada vez mais pequeno chegamos à conclusão de que $U \cap V'$ contém pontos arbitrariamente próximos de 0. ■

Assim, é claro que, se V' for um conjunto próprio V , então podemos tomar $V_1 = V'$. A questão é que podemos ter $V = V'$. Caso isso aconteça tomemos funções $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = x_i g(x_1, \dots, x_n)$$

e ponhamos, para cada i , V'_i o conjunto de todos os pontos $x \in V$ tais o posto de

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_i}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial r}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial r}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

é menor ou igual a $\rho + 1$. De forma análogo ao que fizemos anteriormente podemos concluir que $0 \in \overline{U \cap V'_i}$, para cada i . Se, para algum i , V_i for próprio, então podemos fazer $V_1 = V_i$ e isso conclui a demonstração. Só que existe a possibilidade de que $V = V' = V'_1 = \cdots = V'_n$ e para esse tipo de situação provaremos agora que:

Lema 2.13. $V = V' = V'_1 = \cdots = V'_n$ ocorre apenas quando a dimensão de V é igual a 1.

Demonstração: Por hipótese, existem pontos de $U \cap V$ arbitrariamente próximo de 0. Desse modo podemos tomar $x' \in U \cap V$ de modo que uma esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$, centrada em 0 contendo x' , seja tal que $\mathbb{S}_\varepsilon \cap \Sigma(V) = \emptyset$ e que qualquer valor crítico positivo de r restrito a $U \cap (V - \Sigma(V))$ seja maior que ε . Então da mesma maneira que procedemos anteriormente podemos concluir que nenhum ponto de $\mathbb{S}_\varepsilon \cap U \cap (V - \Sigma(V))$ é ponto crítico de r restrito a $U \cap (V - \Sigma(V))$ e, em especial, x' não é ponto crítico dessa restrição, donde temos que o posto de

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1}(x') & \cdots & \frac{\partial r}{\partial x_n}(x') \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x') & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x') \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x') & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x') \end{pmatrix}$$

é igual a $\rho + 1$.

Observemos também que se $V = V'$, então $x' \in V'$. Assim,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial r}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial r}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

tem posto $\rho + 1$ e disso segue que $dg(x')$ pertence ao espaço vetorial, de dimensão $\rho + 1$, gerado pelos vetores

$$\{df_1(x'), \dots, df_m(x'), dr(x')\}.$$

Analogamente, se $V = V'_i$, então $dg_i(x)$ pertence a esse mesmo espaço vetorial. Mas, do fato

$$dg_i(x') = dx_i(x')g(x') + x_idg(x'),$$

$dg(x')$ pertencer ao espaço vetorial gerado por $\{df_1(x'), \dots, df_m(x'), dr(x')\}$ e $g(x') \neq 0$, já que $x' \in U$, temos que cada $dx_i(x')$ também pertence ao espaço vetorial gerado por $\{df_1(x'), \dots, df_m(x'), dr(x')\}$. E, como o conjunto de vetores $\{dx_1(x'), \dots, dx_n(x')\}$ é uma base para o espaço vetorial de dimensão n temos que o espaço gerado por $\{df_1(x'), \dots, df_m(x'), dr(x')\}$ deve ser todo o espaço. Assim, $\rho + 1 = n$ e, portanto, $\dim V = n - \rho = 1$. ■

Agora que já provamos isso faremos uso de uma descrição muito comum de variedades algébricas de dimensão 1 que é enunciado por Milnor da seguinte forma:

Lema 2.14. Seja x^0 um ponto não-isolado de uma variedade V real (ou complexa) de dimensão 1. Então uma vizinhança de x^0 em V , escolhida de forma conveniente, é a união de um número finito de ramos que se intersectam apenas em x^0 . Cada ramo é homeomorfo a um intervalo aberto de números reais (ou a um disco complexo) por meio de um homeomorfismo $x = p(t)$ que é dado por uma série de potências

$$p(t) = x^0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \cdots$$

convergente para $|t| < \varepsilon$.

Agora que estabelecemos todos esses pontos importantes nós vamos concluir a demonstração do Lema de Seleção da Curva. Para isso começemos supondo, primeiramente, que $\dim V = 1$ e observemos que, como $0 \in \overline{U \cap V}$, 0 é um ponto de V não-isolado. Assim, pelo Lema podemos escolher uma vizinhança de 0 que é a união de um número finito de ramos que se intersectam apenas em 0 . Um desses ramos deve conter pontos de U arbitrariamente próximos de 0 . Tomemos

$$x = p(t) = 0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots, \quad |t| < \varepsilon$$

uma parametrização desse ramo.

Notemos que, para cada g_i , ou $g_i(p(t)) > 0$ para todo $t \in (-\varepsilon', 0)$ (com ε suficientemente pequeno) ou $g_i(p(t)) \leq 0$ para todo $t \in (-\varepsilon', 0)$. De fato, suponhamos que, para algum $t_1 \in (-\varepsilon', 0)$, $g_i(p(t_1)) > 0$. Se existir $t_2 < t_1$ tal que $g_i(p(t_2)) < 0$ então pelo Teorema do Valor Intermediário deve existir $t_3 \in (t_1, t_2)$ tal que $g_i(p(t_3)) = 0$. Do mesmo modo, se existir $t_4 < t_2$ tal que $g_i(p(t_4)) > 0$, então segue, pelo mesmo resultado, que existe $t_5 \in (t_2, t_4)$ tal que $g_i(p(t_5)) = 0$. Seguindo essa mesma construção nós obteremos uma sequência infinita de pontos distintos $p(t_3), p(t_5), \dots$ que são raízes de g_i , mas isso é um absurdo, já que g_i é um polinômio. Essa mesma justificativa impede que tenhamos pontos distintos $t_1, t_2, \dots$ suficientemente próximos de 0 tais que $g_i(p(t_j)) = 0$ e assim restringindo o intervalo de maneira conveniente segue o resultado.

Claro que seguindo o mesmo raciocínio podemos concluir também que, para cada g_i , ou $g_i(p(t)) > 0$ para todo $t \in (0, \varepsilon')$, (com ε suficientemente pequeno) ou $g_i(p(t)) \leq 0$ para todo $t \in (0, \varepsilon')$. Assim, ou $p((-\varepsilon', 0))$ está contido em U ou é disjunto de U e da mesma forma ou $p((0, \varepsilon))$ está contido em U ou é disjunto de U , mas como $p((-\varepsilon, \varepsilon))$ contém pontos arbitrariamente próximo de 0 , não podemos ser simultaneamente disjunto de U e disso segue o Lema Seleção da Curva. Agora, se $\dim V \geq 2$, então podemos tomar V_q um subconjunto algébrico com $\dim V_q = 1$ e concluir também, pela mesma construção, o resultado. ■

Essa versão do Lema de Seleção da Curva, embora importante, é ainda muito restritiva e pode não ser uma ferramenta útil em conjuntos mais gerais. Nesse sentido, é natural pensar para quais conjuntos esse resultado pode ser generalizado. Algumas respostas para esse questionamentos podem ser obtidas em Lojasiewicz[15], que aponta uma versão do Lema de Seleção da Curva para conjuntos semianalíticos, em Hironaka[5] que obtém uma versão para o resultado em conjuntos subanalíticos, conhecido como Lema de Seleção de Hironaka, e em Coste[2] que apresenta também uma versão do Lema de Seleção da Curva para estruturas o-minimais. Não vamos nos ater nas de-

monstrações desses resultados, mas é relevante ter conhecimento desses aspectos mais gerais.

2.3 Teorema da Fibração de Milnor

No decorrer dessa seção nós abordamos o Teorema da Fibração de Milnor, tanto na formulação original apresentada por Milnor [18], quanto também na versão obtida por Lê [10]. Por se tratar de resultado que exige uma construção argumentativa de um certo grau de complexidade preferimos suprimir os detalhes da demonstração desse teorema, tanto na versão original, quanto naquela dada por Lê, e nos atemos simplesmente em comentá-las. Mas destacamos que as deduções podem ser consultadas em [18] e [10].

Iniciemos tomando $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica, $V = f^{-1}(0)$, $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$, onde $\mathbb{S}_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}; \|z\| = \varepsilon\}$, e definamos $\phi : \mathbb{S}_\varepsilon - K \rightarrow S^1$ pondo que

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{\|f(z)\|}.$$

Com base em [18], podemos estabelecer uma caracterização para os pontos críticos da função ϕ através da qual é possível concluir que, se a função f acima é polinomial e se anula em 0, então $\phi : \mathbb{S}_\varepsilon - K \rightarrow S^1$ não tem pontos críticos para ε suficientemente pequeno, digamos, para $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Os mesmos argumentos que viabilizam a dedução desse resultado possibilita também a construção de campos de vetores suaves locais $\vec{v}_\alpha$ tangentes em $\mathbb{S}_\varepsilon - K$, donde por meio de uma partição da unidade podemos construir também um campo vetorial global $\vec{v}$ satisfazendo as mesmas condições. A partir do campo $\vec{v}$, [18] define também um campo $\vec{w}$ (com propriedade semelhante ao que é construído no Corolário 2.9) tangente em $\mathbb{S}_\varepsilon - K$, toma a partir disso curvas integrais desse campo, define o fluxo h em $\mathbb{S}_\varepsilon - K$ e utilizando as propriedades de fluxo conclui que

Teorema 2.15 (Teorema da Fibração de Milnor). [18] *Para $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\mathbb{S}_\varepsilon - K$ é um fibrado diferenciável localmente trivial sobre S^1 com projeção*

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{\|f(z)\|}.$$

Uma outra reformulação desse teorema foi dado por [10], inicialmente para um caso bem específico, conforme enunciado abaixo:

Teorema 2.16. [10] *Sejam $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial com singularidade isolada p_0 , $\mathbb{B}_\varepsilon(p_0)$ uma bola de raio ε (ε suficientemente pequeno) centrada em p_0 e*

$\mathbb{S}_\eta(f(p_0))$ a fronteira do disco $\mathbb{D}_\eta(f(p_0))$ de raio η (η suficientemente pequeno) centrado em $f(p_0)$. Então a aplicação

$$\phi : \mathbb{B}_\varepsilon(p_0) \cap f^{-1}(\mathbb{S}_\eta(f(p_0))) \rightarrow \mathbb{S}_\eta(f(p_0))$$

induzida por f é uma projeção do fibrado diferenciável localmente trivial de $\mathbb{B}_\varepsilon(p_0) \cap f^{-1}(\mathbb{S}_\eta(f(p_0)))$ sobre $\mathbb{S}_\eta(f(p_0))$.

É importante destacar que essa mesma reformulação foi obtida também por [18] no estudo do Teorema da Fibração para singularidades reais, mais especificamente, para o caso em que 0 é ponto crítico de f . Ainda em [10], podemos encontrar também uma versão mais ampla para o teorema acima extraindo apenas a hipótese de que p_0 é uma singularidade isolada, conforme indicamos abaixo

Teorema 2.17 (Teorema da Fibração de Lê-Milnor). [10] *Sejam $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ e $p_0 \in \mathbb{C}^n$. Então existe ε_0 , tal que para qualquer ε , $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, existe η_0 , tal que, para qualquer η , $\eta_0 > \eta > 0$, a aplicação*

$$\phi : \mathbb{B}_\varepsilon(p_0) \cap f^{-1}(\mathbb{S}_\eta(f(p_0))) \rightarrow \mathbb{S}_\eta(f(p_0))$$

induzida por f é uma projeção do fibrado diferenciável localmente trivial.

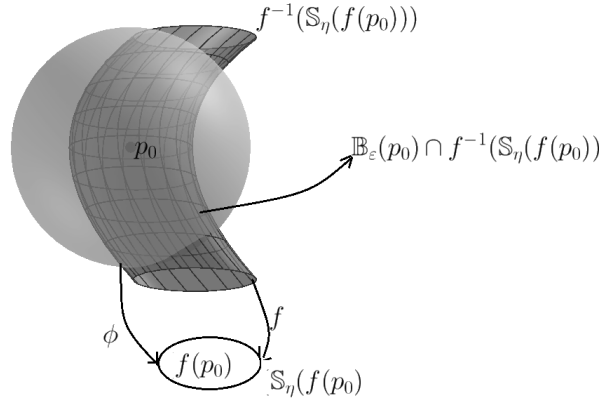


Figura 2.3: Fibração de Lê-Milnor

Essa reformulação permite mais generalizações e pode ser mais útil do ponto de vista algébrico. A dedução dessa versão pode ser encontrada em [10] e utiliza como ferramenta o Lema de Fibração de Ehresmann e o Teorema de Hironaka para funções holomorfas, associados as condições de Thom. É importante destacar também que cada uma dessas duas versões podem ainda ser generalizadas para outros contextos. A exemplo disso, Lê [11] comenta, mais especificamente, que é possível obter um resultado análogo ao Teorema da Fibração de Milnor para funções analíticas $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $f(0) = 0$, enquanto que Hamm [3] prova isso também para germes ICIS.

2.4 Topologia das Fibras de Milnor

Ao longo dessa seção, estudamos sobre a topologia das fibras obtidas a partir da projeção ϕ do fibrado localmente trivial definido no Teorema da Fibrção de Milnor e definimos também o número de Milnor, um importante invariante topológico e algébrico. Desde já, destacamos que não nos atemos as demonstrações dos resultados que abordamos abaixo, uma vez que muitos deles exigem noções de Topologia Algébrica (para se familiarizar com os conceitos, ver [4]), mas sempre que necessário faremos menção de ideias e referências que podem ser usadas para a consulta das deduções.

Assim, comecemos, primeiramente, relembrando que [18] conclui, para $\varepsilon < \varepsilon_0$, que a aplicação $\phi : \mathbb{S}_\varepsilon - K \longrightarrow S^1$ dada por

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{\|f(z)\|}$$

não tem ponto crítico. Consequentemente, para cada $e^{i\theta} \in \mathbb{S}_\varepsilon$, a fibra

$$F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset \mathbb{S}_\varepsilon - K$$

é uma variedade suave de dimensão $2(n-1)$.

Os próximos pontos que [18] discute a respeito das fibras de ϕ dependem essencialmente da Teoria de Morse e da caracterização dos pontos críticos de $s : \mathbb{S}_\varepsilon - K \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $s(z) = |f(z)|$ e de $s|_{F_\theta}$, donde de modo geral, temos que

Teorema 2.18. [18] *Cada fibra F_θ tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo de dimensão n .*

Além disso, para o caso em que 0 é uma singularidade isolada temos que

Teorema 2.19. [18] *Para ε suficientemente pequeno, o fecho em $\mathbb{S}_\varepsilon$ de cada fibra F_θ é uma variedade com bordo, cuja dimensão é $2(n-1)$. O interior dessa variedade é, mais precisamente, F_θ e o bordo é $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$.*

E temos também que

Teorema 2.20. [18] *Cada fibra F_θ tem o mesmo tipo de homotopia de um bouquet*

$$S_1^{n-1} \vee \dots \vee S_\mu^{n-1}$$

de esferas.

Motivados por isso estabelecemos que

Definição 2.2. O número de Milnor de f (denotado por $\mu(f)$) em 0 é definido como sendo o número de esferas S^{n-1} do bouquet.

Mantendo a hipótese de que 0 é uma singularidade isolada, de acordo com [11], podemos também generalizar alguns desses resultados sobre as fibras para o caso em que f é uma função analítica, ou mesmo um germe de função analítica. Além disso, [11] também garante nesses casos que o número de Milnor é um invariante do tipo topológico de V . A questão é que nem sempre é tão simples determinar o número de Milnor através desse viés topológico, em alguns casos vale a pena também partir para outras caracterizações associadas. Aqui nós discutimos apenas uma delas (A caracterização algébrica do número de Milnor), mas caso necessário é possível também consultar mais algumas das demais em [24], bem como as deduções das equivalências.

Nesse contexto, tomemos um germe de função analítica $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ com singularidade isolada na origem. Podemos caracterizar algebricamente o número de Milnor estabelecendo que em 0

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle Jf \rangle},$$

onde $\langle Jf \rangle$ é o ideal de $\mathcal{O}_n$ gerado pelos germes em 0 das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}$. Em outros termos, podemos definir o número de Milnor como sendo a multiplicidade algébrica de f em 0. Claro que definir $\mu(f)$ dessa maneira pode trazer incontáveis vantagens, principalmente, não só no diz respeito ao cálculo em si do número de Milnor, mas pode ser também particularmente interessante em um contexto mais objetivo para justificar a exigência de que a origem seja um ponto singular isolado, uma vez que, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle Jf \rangle} < \infty$ se e, somente se, a origem satisfaz essa condição.

Capítulo 3

Campo de Vetores de Kuo

Nos dedicamos a abordar nesse capítulo alguns pontos relevantes associados ao campo de vetores introduzido por Kuo [7] no estudo da C^0 -suficiência em r -jatos de polinômios. Algumas peculiaridades a respeito desse campo são interessantes quando analisadas sob a ótica do estudo de trivialidades topológicas. Inclusive, é pautada nessa verossimilhança que estruturamos alguns aspectos importantes discutidos no próximo capítulo. Mas antes de tudo isso apresentamos um pouco o contexto na qual cada um desses pontos se inserem. A referência norteadora desse capítulo é Kuo [7].

Definição 3.1. [7] Seja $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio de grau r com $V(0) = 0$. Nós dizemos que V é C^0 -suficiente r -jato se, dada uma função, $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^q ($q \geq r + 1$) que se anula em 0 e cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a r também se anulem em 0, existir um homeomorfismo $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, U vizinhança de 0, tal que $g(0) = 0$ e $(V + P)(g(x)) = V(x)$ para todo $x \in U$, ou seja, se existir um homeomorfismo g tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ g \downarrow & \searrow V & \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{V+P} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Partindo disso, tomemos $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio de grau r com $V(0) = 0$, escrevamos, por conveniência, $V(x) = H_1(x) + \cdots + H_r(x)$, onde $H_i(x)$ é a forma homogênea de grau i e denotemos

$$\nabla H_i(x) = \left(\frac{\partial H_i(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H_i(x)}{\partial x_n} \right).$$

Provaremos a seguir que:

Teorema 3.1. [7] Se existir $\varepsilon > 0$ e $k \leq r$ tais que

$$\|\nabla H_1(x) + \cdots + \nabla H_k(x)\| \geq \|x\|^{k-1} \varepsilon$$

para todo x em uma vizinhança de 0, então

$$V = H_1 + \cdots + H_r$$

é C^0 -suficiente r -jato.

Demonstração: Primeiramente observemos que se existe $\varepsilon > 0$ e $k \leq r$ tais que

$$\|\nabla H_1(x) + \cdots + \nabla H_k(x)\| \geq \|x\|^{k-1} \varepsilon$$

para todo x em uma vizinhança de 0, então existe também $\varepsilon' > 0$ tal que

$$\|\nabla V(x)\| \geq \|x\|^{k-1} \varepsilon' \quad (3.1)$$

para todo x em uma vizinhança de 0, pois do contrário, para todo $p \in \mathbb{N}$, podemos tomar $x_p \in \mathbb{R}^n$, com $0 \leq \|x_p\| < \frac{1}{p}$, tal que

$$\frac{\|\nabla V(x_p)\|}{\|x_p\|^{k-1}} = \frac{\|\nabla H_1(x_p) + \cdots + \nabla H_r(x_p)\|}{\|x_p\|^{k-1}} < \frac{1}{p},$$

o que nos dá uma sequência $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ convergindo para 0 que satisfaz

$$\lim \frac{\|\nabla V(x_p)\|}{\|x_p\|^{k-1}} = 0,$$

donde obtemos que

$$\lim \frac{\|\nabla H_1(x_p) + \cdots + \nabla H_k(x_p)\| - \|\nabla H_{k+1}(x_p) + \cdots + \nabla H_r(x_p)\|}{\|x_p\|^{k-1}} \leq \lim \frac{\|\nabla V(x_p)\|}{\|x_p\|^{k-1}} = 0,$$

já que

$$\begin{aligned} \|\nabla V(x_p)\| &= \|\nabla H_1(x_p) + \cdots + \nabla H_r(x_p)\| \\ &\geq \|\nabla H_1(x_p) + \cdots + \nabla H_k(x_p)\| - \|\nabla H_{k+1}(x_p) + \cdots + \nabla H_r(x_p)\| \end{aligned}$$

e, portanto, temos que

$$\lim \frac{\|\nabla H_1(x_p) + \cdots + \nabla H_k(x_p)\|}{\|x_p\|^{k-1}} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\nabla H_{k+1}(x) + \cdots + \nabla H_r(x)\|}{\|x\|^{k-1}} = 0.$$

Mas isso é um absurdo. Assim, podemos tomar ε no Teorema [3.1](#) de modo a satisfazer também a desigualdade [\(3.1\)](#).

Agora, tomemos $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^q ($q \geq r + 1$) que se anula em

0 e cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a r também se anulam em 0 e observemos que, se $H_1 \neq 0$, então $\nabla H_1 \neq 0$. Logo,

$$\nabla V(0) = \nabla H_1(0) + \nabla H_2(0) + \cdots + \nabla H_r(0) = \nabla H_1(0) \neq 0$$

e, portanto, V é uma submersão em 0. Nesse caso, temos pela Forma Local das Submersões, $V(x) = x_1$ para uma base adequada e disso segue que,

$$\nabla(V + P)(0) = \nabla V(0) + \nabla P(0) = \nabla V(0) \neq 0.$$

Claro que desse fato temos também que $V + P$ é uma submersão em 0 e, consequentemente, pela Forma Local das Submersões concluímos que V é C^0 -suficiente r -jato. Assim, podemos a partir de agora vamos considerar apenas o caso em que $H_1 = 0$.

Por fim, observemos que, para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$P(x) = P(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} x_i + \cdots + \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n \cdots \sum_{l=1}^n \frac{\partial^n f(0)}{\partial x_i \cdots \partial x_l} x_i x_j \cdots x_k + r(x) = r(x),$$

onde $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{\|x\|^r} = 0$ (Pela Fórmula de Taylor). Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{\|x\|^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{\|x\|^r} = 0. \quad (3.2)$$

e, consequentemente, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|P(x)|}{\|x\|^r} = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{\|x\|^r} \right| = 0$. Claro que disso temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|P(x)|}{\|x\|^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|P(x)|}{\|x\|^r} \cdot \|x\|^{r-k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|P(x)|}{\|x\|^r} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \|x\|^{r-k} = 0$$

e com isso concluímos as discussões dos aspectos iniciais que são relevantes para essa demonstração.

Agora, consideremos a função $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, a) = V(x) + aP(x)$. Então, como $\nabla V(0) = (0, \dots, 0)$, já que $H_1 = 0$, temos que

$$\nabla F(0, a) = \left(\frac{\partial V(0)}{\partial x_1} + a \frac{\partial P(0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(0)}{\partial x_n} + a \frac{\partial P(0)}{\partial x_n}, P(0) \right) = (0, \dots, 0, 0)$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Portanto, o conjunto $F = 0$ tem como singularidades os pontos $(0, a), a \in \mathbb{R}$. Ainda nesse contexto vamos provar também que:

Lema 3.2. Existe $\delta > 0$ tal que $\|\nabla F(x, a)\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|x\|^{k-1}$ para $0 \leq \|x\| < \delta$ e $a \in [0, 1]$.

Demonstração: De fato, seja $a \in [0, 1]$ e $x \neq 0$. Temos que

$$\begin{aligned}\|\nabla F(x, a)\| &= \|\nabla V(x) + a \cdot \nabla P(x)\| = \|\nabla V(x) - (-a \cdot \nabla P(x))\| \\ &\geq \|\nabla V(x)\| - \|-a \cdot \nabla P(x)\| \\ &= \|\nabla V(x)\| - |-a| \cdot \|\nabla P(x)\| \\ &= \|\nabla V(x)\| - a \cdot \|\nabla P(x)\|\end{aligned}$$

Mas, como $a \in [0, 1]$, temos que $a \cdot \|\nabla P(x)\| \leq \|\nabla P(x)\|$. Disso segue que

$$\|\nabla V(x)\| - a \cdot \|\nabla P(x)\| \geq \|\nabla V(x)\| - \|\nabla P(x)\|$$

e conseqüentemente, por (3.1), temos que

$$\begin{aligned}\|\nabla F(x, a)\| &\geq \|\nabla V(x)\| - \|\nabla P(x)\| \\ &\geq \|x\|^{k-1}\varepsilon - \|x\|^{k-1} \cdot \frac{\|\nabla P(x)\|}{\|x\|^{k-1}} \\ &\geq \|x\|^{k-1} \left(\varepsilon - \frac{\|\nabla P(x)\|}{\|x\|^{k-1}} \right),\end{aligned}\tag{3.3}$$

para $\|x\|$ suficientemente pequena.

Mas, do fato das funções $\partial P/\partial x_1, \dots, \partial P/\partial x_n : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por

$$(\partial P/\partial x_i)(x) = \frac{\partial P(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

serem de classe C^{q-1} (e em especial de classe C^{r-1}) e de suas derivadas parciais até a ordem $r - 1$ se anularem em 0, obtemos, de modo análogo ao que foi feito para provar a equação (3.2), que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\partial P/\partial x_i)(x)}{\|x\|^{k-1}} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde segue que

$$\frac{\|\nabla P(x)\|}{\|x\|^{k-1}} = 0$$

e, portanto, para $\|x\|$ suficientemente pequena temos que

$$\frac{\|\nabla P(x)\|}{\|x\|^{k-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.\tag{3.4}$$

Assim, por (3.3) e (3.4), temos que

$$\|\nabla F(x, t)\| \geq \|x\|^{k-1} \left(\varepsilon - \frac{\|\nabla P(x)\|}{\|x\|^{k-1}} \right) \geq \|x\|^{k-1} \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \right) \geq \|x\|^{k-1} \frac{\varepsilon}{2},$$

para $\|x\|$ suficientemente pequena. ■

Agora, tomemos $X(x, a)$ a projeção do vetor $(0, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ na direção de $\nabla F(x, a)$, com $0 \leq \|x\| < \delta$ e observemos que $X(x, a)$ é dado por

$$\begin{aligned} X(x, a) &= \frac{\langle \nabla F(x, a), (0, 1) \rangle}{\|\nabla F(x, a)\|^2} \nabla F(x, a) \\ &= \frac{\left\langle \left(\frac{\partial(V(x)+a \cdot P(x))}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(V(x)+a \cdot P(x))}{\partial x_n}, P(x) \right), (0, \dots, 0, 1) \right\rangle}{\|\nabla F(x, a)\|^2} \cdot \nabla F(x, a) \\ &= \frac{P(x)}{\|\nabla F(x, a)\|^2} \cdot \nabla F(x, a). \end{aligned} \tag{3.5}$$

A partir disso, definamos um campo de vetores $\vec{v}$ pondo

$$\vec{v}(x, a) = (0, 1) - X(x, a)$$

quando $0 < \|x\| < \delta$ e

$$\vec{v}(x, a) = (0, 1)$$

quando $x = 0$ e provemos que:

Lema 3.3. [7] O campo de vetores $\vec{v}$ satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\vec{v}(x, a)$ é contínua para $0 \leq \|x\| < \delta$ e é C^{q-1} para $0 < \|x\| < \delta$.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\vec{v}(x, a) - \vec{v}(0, a)\|}{\|x\|} = 0$, uniformemente para $a \in [0, 1]$.
- (iii) Para $x \neq 0$, $\vec{v}(x, a)$ é tangente a superfície de nível $F = C$ que passa por (x, a) .
- (iv) Existe $\eta > 0$ tal que, para $0 \leq \|x\| < \eta$, $\langle \vec{v}(x, a), (0, 1) \rangle > 0$.

Demonstração: Começemos observando que o Lema (3.2) garante que

$$\|\nabla F(x, a)\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|x\|^{k-1} > 0,$$

sempre que $0 < \|x\| < \delta$. Daí, para $0 < \|x\| < \delta$, $X(x, a)$ é de classe C^{q-1} , conforme podemos concluir por (3.5) e, portanto, $\vec{v}(x, a)$ é de classe C^{q-1} , para $0 < \|x\| < \delta$.

Observemos também que, do fato de

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\vec{v}(x, a) - \vec{v}(0, a)\|}{\|x\|} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|(0, 1) - X(x, a) - (0, 1)\|}{\|x\|} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \|X(x, a)\| \cdot \|x\|^{-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|P(x) \cdot \nabla F(x, a)\|}{\|\nabla F(x, a)\|^2} \cdot \|x\|^{-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|P(x)\| \cdot \|\nabla F(x, a)\|}{\|\nabla F(x, a)\|^2} \cdot \|x\|^{-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \|P(x)\| \cdot \|\nabla F(x, a)\|^{-1} \cdot \|x\|^{-1}
 \end{aligned}$$

e

$$\|\nabla F(x, a)\| \geq \|x\|^{k-1} \cdot \frac{\varepsilon}{2},$$

para $0 \leq \|x\| < \delta$, temos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\vec{v}(x, a) - \vec{v}(0, a)\|}{\|x\|} &= \lim_{x \rightarrow 0} \|P(x)\| \cdot \|\nabla F(x, a)\|^{-1} \cdot \|x\|^{-1} \\
 &\leq \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\|P(x)\| \cdot \|x\|^{-1}}{\|x\|^{k-1} \cdot \varepsilon} \\
 &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|P(x)\|}{\|x\|^k} \cdot \varepsilon^{-1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Daí, segue não apenas a afirmação (ii) como também a primeira afirmação de (i).

Agora, observemos que, para $0 < \|x\| < \delta$,

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{v}(x, a), \nabla F(x, a) \rangle &= \langle (0, 1) - X(x, a), \nabla F(x, a) \rangle \\
 &= \langle (0, 1) - \frac{\langle \nabla F(x, a), (0, 1) \rangle}{\|\nabla F(x, a)\|^2} \cdot \nabla F(x, a), \nabla F(x, a) \rangle \\
 &= \langle (0, 1), \nabla F(x, a) \rangle - \frac{\langle \nabla F(x, a), (0, 1) \rangle}{\|\nabla F(x, a)\|^2} \cdot \|\nabla F(x, a)\|^2 \\
 &= \langle (0, 1), \nabla F(x, a) \rangle - \langle (0, 1), \nabla F(x, a) \rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Assim, para $0 < \|x\| < \delta$, $\vec{v}(x, a)$ é ortogonal a $\nabla F(x, a)$. Mas sabemos que $\nabla F(x, a)$ é ortogonal a superfície de nível $F = C$ que passa por (x, a) e isso nos leva a concluir que, para $x \neq 0$, $\vec{v}(x, a)$ é tangente a essa superfície de nível o que prova (iii).

Por fim, notemos também que

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}(x, a), (0, 1) \rangle &= \langle (0, 1) - X(x, a), (0, 1) \rangle \\
&= \langle (0, 1), (0, 1) \rangle - \langle X(x, a), (0, 1) \rangle \\
&= \|(0, 1)\|^2 - \left\langle \frac{P(x)}{\|\nabla F(x, a)\|^2} \cdot \nabla F(x, a), (0, 1) \right\rangle \\
&= \|(0, 1)\|^2 - \frac{P(x)}{\|\nabla F(x, a)\|^2} \cdot \langle \nabla F(x, a), (0, 1) \rangle \\
&= 1 - (P(x))^2 \cdot \|\nabla F(x, a)\|^{-2}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

e que, pelo Lema [3.2](#),

$$\|\nabla F(x, a)\|^{-2} \leq 4\|x\|^{-2(k-1)} \cdot \varepsilon^{-2}, \tag{3.7}$$

para $0 < \|x\| < \delta$. Daí, por [\(3.6\)](#) e [\(3.7\)](#), temos que

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}(x, a), (0, 1) \rangle &= 1 - (P(x))^2 \cdot \|\nabla F(x, a)\|^{-2} \\
&\geq 1 - (P(x))^2 \cdot 4\|x\|^{-2(k-1)} \cdot \varepsilon^{-2} \\
&= 1 - 4 \left(\frac{P(x)}{\|x\|^{k-1}} \right)^2 \cdot \varepsilon^{-2},
\end{aligned}$$

para $0 < \|x\| < \delta$ e, portanto, para $\|x\|$ suficientemente pequena temos que

$$\langle \vec{v}(x, a), (0, 1) \rangle > 0,$$

pois $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{P(x)}{\|x\|^{k-1}} \right)^2 = 0$, uma vez que, por [\(3.2\)](#),

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{\|x\|^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{\|x\|^k} \cdot \|x\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{\|x\|^k} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \|x\| = 0.$$

■

Restringiremos, agora, o campo $\vec{v}(x, a)$ sobre $\mathbb{B}_\delta \times (0, 1)$ (onde $\mathbb{B}_\delta$ indica o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < \delta\}$) e provaremos que esse campo construído satisfaz a condição de Lipschitz ao longo de curvas integrais, isto é, provaremos que dado $(x_0, a_0) \in \mathbb{B}_\delta \times (0, 1)$ e dada $\phi(t, x_0, a_0)$ uma curva integral local associada a $\vec{v}$ (definida para $|t| < \eta$) que satisfaz $\phi(0, x_0, a_0) = (x_0, a_0)$, existe K (dependendo de ϕ) tal que para todo (x, a) em uma vizinhança de $\{\phi(t, x_0, a_0); |t| < \eta\}$,

$$\|\vec{v}(x, a) - \vec{v}(\phi(t, x_0, a_0))\| < K\|(x, a) - \phi(t, x_0, a_0)\|.$$

Começemos observando que do fato do campo $\vec{v}$ ser contínuo nesse domínio já

garante por si só a existência de soluções locais para todo ponto $(x_0, a_0) \in \mathbb{B}_\delta \times (0, 1)$. Além disso, para pontos $(x_0, a_0) \in \mathbb{B}_\delta \times (0, 1)$ tais que $x_0 \neq 0$, $\vec{v}$ satisfaz imediatamente a condição de Lipschitz ao longo de uma curva $\phi(t, x_0, a_0)$, pois nesse caso $\vec{v}$ é de classe C^{q-1} (em especial, é de classe C^1) e aplicações de classe C^1 são localmente Lipschitzianas (o que claramente implica ser Lipschitz ao longo de uma curva). Essa mesma condição é válida também para pontos $(x_0, a_0) \in \mathbb{B}_\delta \times (0, 1)$ tais que $x_0 = 0$, conforme é possível concluir do item (ii) do Lema 3.3.

Claro que esses dois pontos garantem que $\vec{v}$ satisfaz a condição de Lipschitz ao longo de curvas integrais, o que nesse contexto é particularmente interessante já que:

Teorema 3.4. [7] *Se X é um campo de vetores contínuo definido em um aberto U e para cada $u_0 \in U$ existe uma solução $\phi(t, u_0)$ com $\phi(0, u_0)$ de modo que X satisfaz a condição de Lipschitz, então X admite uma única solução em cada ponto de U . Além disso, a solução $\phi(t, u_0)$, definida num intervalo maximal de existência, é uma função contínua de t e u_0 .*

Assim, as soluções locais de $\vec{v}$ não só existem, como também são únicas. É claro também que essas soluções podem ser estendidas continuamente em função do valor inicial, o que permite redirecionar uma nova condição inicial para tais soluções até mesmo em pontos para os quais, *a priori*, não estariam definidas. Nesse contexto, denotemos por $\phi(t, x_0, a_0)$ uma solução que satisfaz $\phi(0, x_0, a_0) = (x_0, a_0)$ e observemos que a solução $\phi(t, 0, t) = (0, t)$ satisfaz a condição inicial $\phi(0, 0, 0) = (0, 0)$ (estendida continuamente).

Notemos também que pelo item (iii) do Lema 3.3, para todo x em uma vizinhança de 0, a componente a de qualquer solução $\phi(t, x, 0)$ cresce monotonamente com t . Daí, $\phi(t, x, 0)$ (estendida continuamente) encontra o hiperplano $a = 1$ em um único ponto $g(x)$ e com isso podemos definir um homeomorfismo que associa cada x à $g(x)$ através dessas soluções. Além disso, observemos pelo o item (iii) do Lema 3.3 podemos garantir que qualquer solução $\phi(t, x_0, a_0)$ ($x_0 \neq 0$) que intersecte uma curva de nível $F = t$ está inteiramente contida nessa curva de nível. Assim, F é constante ao longo de cada uma dessas soluções ϕ e, portanto,

$$V(x) = F(x, 0) = F(g(x), 1) = V(g(x)) + P(g(x)) = (V + P)(g(x)).$$

Com isso concluímos que V é C^0 — suficiente r — jato. ■

Ainda que tenha aparecido em um contexto bem específico, o campo de vetores apresentado nesse capítulo pode ser útil também em outras circunstâncias, inclusive no estudo da C^0 -suficiência em r — jatos de germes (Ver [16]). Além disso, alguns aspectos associados a esse campo também serão importantes para o próximo capítulo, quando o

3. Campo de Vetores de Kuo

utilizamos como uma ferramenta para estabelecer uma família de homeomorfismo que determina a trivialidade topológica estudada.

Capítulo 4

Trivialidade Topológica em Famílias de Funções Analíticas do Tipo

$$f(x) + tg(x)$$

Ao longo desse capítulo nós estudamos alguns aspectos relacionados à trivialidade topológica em uma família de funções analíticas. O objetivo central dessa discussão é apresentar uma condição, introduzida por Parusinski[21], para que uma família de funções analíticas, definidas por meio de deformações lineares, seja topologicamente trivial. Um ponto importante referente a esse resultado que também destacamos diz respeito ao estudo de trivialidade topológica em uma família μ –constante de funções analíticas com singularidade isolada. Nesse contexto, de maneira geral, mostramos que uma família μ –constante de funções analíticas com singularidade isolada, definidas por meio de deformações lineares, é topologicamente trivial.

Mas antes disso, precisamos ainda estabelecer alguns pontos importantes acerca da notação empregada ao longo desse capítulo. A primeira delas diz respeito basicamente ao ambiente no qual os resultados se estruturam: o espaço de funções analíticas (reais ou complexas), que aqui estamos denominando como espaço de funções $\mathbb{K}$ –analíticas, onde $\mathbb{K}$ indica o conjunto dos números reais ou dos números complexos. Além disso, destacamos também que, dada uma função analítica $F(x, t)$ definida de $\mathbb{K}^{n+1}$ em $\mathbb{K}$, estamos denotando por $\nabla F(x, t)$ o gradiente de F em (x, t) e por $\overset{x}{\nabla} F(x, t)$ e $\overset{t}{\nabla} F(x, t)$ o gradiente de F em (x, t) , com respeito as variáveis x e t , respectivamente. É importante observar ainda que, no corpo dos complexos,

$$\nabla F(x, t) = \left(\overline{\frac{\partial F(x, t)}{\partial x_1}}, \dots, \overline{\frac{\partial F(x, t)}{\partial x_1}}, \overline{\frac{\partial F(x, t)}{\partial t}} \right),$$

onde a barra acima indica o conjugado complexo e, nesse caso,

$$\overset{x}{\nabla} F(x, t) = \left(\frac{\partial F(x, t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F(x, t)}{\partial x_1} \right) \text{ e } \overset{t}{\nabla} F(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial t}.$$

Ressaltamos também que, dada duas aplicações (reais ou complexas) ϕ e ψ e Y um subconjunto fechado de um domínio comum de ϕ e ψ , estamos estabelecendo que

$$\|\phi(x)\| \ll \|\psi(x)\| \text{ com } x \rightarrow Y$$

se

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|\phi(x(s))\|}{\|\psi(x(s))\|} = 0,$$

para toda curva analítica real $x(s)$, $s \in [0, \varepsilon]$, tal que $x(s) \rightarrow x_0 \in Y$ quando $s \rightarrow 0$. E, agora que discutimos cada um desses pontos, definimos que:

Definição 4.1. Uma família de germes de funções $F : (\mathbb{K}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ é topologicamente trivial se existe uma família contínua de germes de homeomorfismos $h_t : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, $t \in \mathbb{K}$, tal que $F_0(x) = (F_t \circ h_t)(x)$.

A partir dessas circunstâncias, tomemos $f, g : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ dois germes de funções $\mathbb{K}$ -analíticas, donde, podemos considerá-los como germes de funções de $n + 1$ variáveis pondo $f(x, t) = f(x)$ e $g(x, t) = g(x)$ e a partir disso definamos $F(x, t) = f(x) + tg(x)$. Provaremos, ao longo desse capítulo, o seguinte teorema:

Teorema 4.1. [21] *Se, em uma vizinhança da origem,*

$$|g(x)| \ll \|\nabla F(x, t)\|, \text{ com } (x, t) \rightarrow g^{-1}(0) \cap f^{-1}(0),$$

então $F_t(x) = F(x, t)$ é uma família topologicamente trivial de germes de funções (ao longo do eixo t , para t suficientemente pequeno)

As ideias que empregamos para demonstrar esse resultado foram introduzidas por Parusinski [21] e tomam como ferramentas o Lema de Seleção da Curva (estendido em conjuntos subanalíticos ou estruturas o-minimais), além de ideias de Kuo [7] e Łojasiewicz [15]. A construção desenvolvida nesse sentido parte, inicialmente, do fato de que, em uma vizinhança da origem,

$$|g(x)| \ll \|\nabla F(x, t)\|, \text{ com } (x, t) \rightarrow g^{-1}(0) \cap f^{-1}(0)$$

se e, somente se,

$$|g(x)| \ll \inf_{\lambda} \{\|\nabla F(x, t) + \lambda \nabla g(x)\|\}$$

com $(x, t) \in F^{-1}(0)$ e $(x, t) \rightarrow f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ e é a demonstração dessa afirmação o foco principal da seção abaixo.

4.1 Desigualdade do Tipo Łojasiewicz: Principais Desfechos

Ao longo dessa seção deduzimos a equivalência afirmada anteriormente e discutimos algumas consequências que decorrem desse resultado. O primeiro passo dado nessa direção é demonstrar o seguinte teorema auxiliar:

Teorema 4.2. [27] *Seja $F : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ e $g : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ dois germes de funções $\mathbb{K}$ -analíticas. Então existe uma constante real C tal que para $p \in F^{-1}(0)$, suficientemente próximo da origem,*

$$|g(p)| \leq C\|p\| \inf_{\eta \in \mathbb{K}} \{\|\eta \nabla F(p) + \nabla g(p)\|\} \quad (4.1)$$

Demonstração: Começamos pelo caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e suponhamos, por absurdo, que afirmação acima não se aplica, ou seja, que para toda constante real C e para todo $\delta > 0$ existe $p \in F^{-1}(0)$, com $0 \leq \|p\| < \delta$, tal que

$$|g(p)| > C\|p\| \inf_{\eta \in \mathbb{K}} \{\|\eta \nabla F(p) + \nabla g(p)\|\}.$$

Então, em especial, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $p_k \in F^{-1}(0)$, com $0 \leq \|p_k\| < \frac{1}{k}$, que satisfaz

$$|g(p_k)| > k\|p_k\| \inf_{\eta \in \mathbb{K}} \{\|\eta \nabla F(p_k) + \nabla g(p_k)\|\}$$

e que, consequentemente, satisfaz também

$$|g(p_k)| > k\|p_k\| \|\eta_k \nabla F(p_k) + \nabla g(p_k)\|, \quad (4.2)$$

para algum $\eta_k \in \mathbb{K}$.

Construamos a partir disso as sequências $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfazendo a desigualdade (4.2) e observemos que disso segue que

$$\frac{\|p_k\| \|\eta_k \nabla F(p_k) + \nabla g(p_k)\|}{|g(p_k)|} < \frac{1}{k}$$

4. Trivialidade Topológica em Famílias de Funções Analíticas do Tipo $f(x) + tg(x)$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\lim \frac{\|p_k\| \|\eta_n \nabla F(p_k) + \nabla g(p_k)\|}{|g(p_k)|} = 0$$

e, portanto, como a sequência $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge para 0 (e $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ também pode ser tomada satisfazendo isso), podemos garantir, pelo Lema de Seleção da Curva, que existe uma curva analítica real p e uma função analítica η , definidas em $[0, \varepsilon)$, tais que

$$(i) \quad p(0) = 0;$$

$$(ii) \quad F(p(s)) = 0;$$

$$(iii) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|p(s)\| \|\eta(s) \nabla F(p(s)) + \nabla g(p(s))\|}{|g(p(s))|} = 0.$$

Mas, é claro que se $F(p(s)) = 0$, então

$$\frac{dF(p(s))}{ds} = dF(p(s)) \cdot p'(s) = 0.$$

Assim, podemos reformular (i), (ii) e (iii) afirmando que p e η satisfazem

$$(I) \quad p(0) = 0;$$

$$(II) \quad dF(p(s)) \cdot p'(s) = 0;$$

$$(III) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|p(s)\| \|\eta(s) \nabla F(p(s)) + \nabla g(p(s))\|}{|g(p(s))|} = 0.$$

Agora, observemos que, não só p , como também $g \circ p$ são analíticas. Assim, para todo s em uma vizinhança de 0, temos que

$$p(s) = p(0) + p'(0)s + \frac{p''(0)}{2}s^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}s^n + \dots$$

e

$$g(p(s)) = g(p(0)) + (g \circ p)'(0)s + \frac{(g'' \circ p)'(0)}{2}s^2 + \dots + \frac{(g \circ p)^n(0)}{n!}s^n + \dots$$

Mas, como $p(0) = 0$ e $g(p(0)) = g(0) = 0$, temos que

$$p(s) = p'(0)s + \frac{p''(0)}{2}s^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}s^n + \dots$$

e

$$g(p(s)) = (g \circ p)'(0)s + \frac{(g \circ p)''(0)}{2}s^2 + \dots + \frac{(g \circ p)^n(0)}{n!}s^n + \dots$$

Logo

$$p'(s) = p'(0) + p''(0)s + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{(n-1)!}s^{n-1} + \dots$$

4. Trivialidade Topológica em Famílias de Funções Analíticas do Tipo $f(x) + tg(x)$

e

$$(g \circ p)'(s) = (g \circ p)'(0) + (g'' \circ p)'(0)s + \dots + \frac{(g \circ p)^n(0)}{(n-1)!} s^{n-1} + \dots$$

e, portanto,

$$sp'(s) = p'(0)s + p''(0)s^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{(n-1)!} s^n + \dots$$

e

$$s(g \circ p)'(s) = (g \circ p)'(0)s + (g'' \circ p)'(0)s^2 + \dots + \frac{(g \circ p)^n(0)}{(n-1)!} s^n + \dots$$

Disso temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(p(s))}{s(g \circ p)'(s)} = \frac{(g \circ p)'(0)s + \frac{(g'' \circ p)'(0)}{2} s^2 + \dots + \frac{(g \circ p)^n(0)}{n!} s^n + \dots}{(g \circ p)'(0)s + (g'' \circ p)'(0)s^2 + \dots + \frac{(g \circ p)^n(0)}{(n-1)!} s^n + \dots} < \infty$$

e

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(g \circ p)'(s)}{g(p(s))} = \frac{(g \circ p)'(0)s + (g'' \circ p)'(0)s^2 + \dots + \frac{(g \circ p)^n(0)}{(n-1)!} s^n + \dots}{(g \circ p)'(0)s + \frac{(g'' \circ p)'(0)}{2} s^2 + \dots + \frac{(g \circ p)^n(0)}{n!} s^n + \dots} < \infty$$

se $(g \circ p)^n(0) \neq 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo, nesse caso, $\frac{g(p(s))}{s(g \circ p)'(s)}$ e $\frac{s(g \circ p)'(s)}{g(p(s))}$ são limitadas em vizinhanças 0 e, portanto, existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$g(p(s)) \leq C_1 s(g \circ p)'(s) \text{ e } s(g \circ p)'(s) \leq C_2 g(p(s)) \quad (4.3)$$

para todo s suficientemente próximo da origem. É claro também que as desigualdades de (4.3) são válidas também quando $(g \circ p)^n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois desse caso temos que $g \circ p \equiv 0$ e disso segue, de maneira geral, que em uma vizinhança de 0

$$|g(p(s))| \leq C_1 |s(g \circ p)'(s)| \text{ e } |s(g \circ p)'(s)| \leq C_2 |g(p(s))| \quad (4.4)$$

De modo análogo e usando a norma do máximo, podemos garantir também que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|p(s)\|}{\|sp'(s)\|} < \infty \text{ e } \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|sp'(s)\|}{\|p(s)\|} < \infty,$$

quando $p^n(0) \neq 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, donde novamente podemos assegurar a existência de $C_3, C_4 > 0$ tais que

$$\|p(s)\| \leq C_3 \|sp'(s)\| = C_3 s \|p'(s)\| \text{ e } s \|p'(s)\| = \|sp'(s)\| \leq C_4 \|p(s)\| \quad (4.5)$$

numa vizinhança de 0. Daí, de (4.4) e (4.5) e do fato de

$$\begin{aligned}
 (g \circ p)'(s) = dg(p(s)) \cdot p'(s) &= \eta(s)dF(p(s)) \cdot p'(s) + dg(p(s)) \cdot p'(s) \\
 &= (\eta(s)dF + dg)(p(s)) \cdot p'(s) \\
 &= \langle (\eta(s)dF + dg)(p(s)), p'(s) \rangle \\
 &= \langle \eta(s)\nabla F(p(s)) + \nabla g(p(s)), p'(s) \rangle \\
 &\leq \|\eta(s)\nabla F(p(s)) + \nabla g(p(s))\| \|p'(s)\|,
 \end{aligned}$$

temos, em uma vizinhança de 0, que

$$\begin{aligned}
 |g(p(s))| \leq C_1 |s(g \circ p)'(s)| &= C_1 s |(g \circ p)'(s)| \\
 &\leq C_1 s \|\eta(s)\nabla F(p(s)) + \nabla g(p(s))\| \|p'(s)\| \\
 &= C_1 s \|p'(s)\| \|\eta(s)\nabla F(p(s)) + \nabla g(p(s))\| \\
 &\leq C_1 C_4 \|p(s)\| \|\eta(s)\nabla F(p(s)) + \nabla g(p(s))\|.
 \end{aligned}$$

No entanto, isso contradiz (III) e, portanto, segue o teorema. O caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}^n$ pode ser concluído de modo análogo, uma vez que podemos associar $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{R}^{2n}$. ■

Por meio do Teorema 4.2, podemos concluir, para qualquer curva analítica real $p(s) = (x(s), t(s)) \rightarrow (0, 0)$ em $F^{-1}(0)$, que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(p(s))}{\inf \{\|\eta\nabla F(p(s)) + \nabla g(p(s))\|\}} = 0,$$

pois dada p satisfazendo essa condição, temos por (4.1) que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(p(s))}{\inf \{\|\eta\nabla F(p(s)) + \nabla g(p(s))\|\}} \leq \lim_{s \rightarrow 0} C \|p(s)\| = 0$$

e disso segue o fato afirmado. Com base nisso, podemos provar, por meio de uma construção totalmente análoga a que foi usada na demonstração do Teorema 4.2, que em uma vizinhança da origem

$$|g(p)| \ll \inf_{\eta \in \mathbb{K}} \{\|\eta\nabla F(p) + \nabla g(p)\|\} \text{ com } p \rightarrow g^{-1}(0). \quad (4.6)$$

Curiosamente, da desigualdade acima podemos, por ([15], p. 136), deduzir também que existe $\alpha > 0$ tal que

$$|g(p)| \leq |g(p)|^\alpha \inf_{\eta \in \mathbb{K}} \{\|\eta\nabla F(p) + \nabla g(p)\|\},$$

que pode ser entendida como uma versão da segunda desigualdade de Łojasiewicz (Ver [15], p. 92) para uma função g em $F^{-1}(0)$. E agora que já discutimos isso nosso objetivo é provar o seguinte corolário:

Corolário 4.3. [21] Seja $F(x, t) = f(x) + tg(x)$, onde $f, g : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ são germes de funções $\mathbb{K}$ -analíticas (que podem ser consideradas como sendo germes de funções de $n + 1$ variáveis) e $t \in \mathbb{K}$. Então, suficientemente próximo da origem, as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $|g(x)| \ll \|\nabla F(x, t)\|$ com $(x, t) \rightarrow f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$;
- (ii) $|g(x)| \ll \inf_{\lambda} \{\|\nabla F(x, t) + \lambda \nabla g(x)\|\}$ com $(x, t) \in F^{-1}(0)$ e $(x, t) \rightarrow f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Começemos considerando g como sendo uma função de $n + 1$ variáveis dada por $g(x, t) = g(x)$ e observemos que, de maneira mais geral,

$$\nabla F(x, t) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + t \frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} + t \frac{\partial g(x)}{\partial x_n}, g(x) \right).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|\nabla F(x, t)\| &= \sqrt{\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + t \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} \right|^2 + \dots + \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} + t \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right|^2 + |g(x)|^2} \\ &= \sqrt{\| \overset{x}{\nabla} f(x) + t \overset{x}{\nabla} g(x) \|^2 + |g(x)|^2}. \end{aligned}$$

A partir disso, provaremos agora que

$$(I) \quad |g(x)| \ll \|\nabla F(x, t)\| \text{ com } (x, t) \rightarrow f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$$

se e, somente se,

$$(II) \quad |g(x)| \ll \| \overset{x}{\nabla} f(x) + t \overset{x}{\nabla} g(x) \| \text{ com } (x, t) \rightarrow f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0).$$

Para isso, suponhamos primeiramente que

$$|g(x)| \ll \| \overset{x}{\nabla} f(x) + t \overset{x}{\nabla} g(x) \| \text{ com } (x, t) \rightarrow f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$$

e tomemos uma curva analítica real $p(s) = (x(s), t(s)) \rightarrow (x_0, t_0) \in f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$.

Como, por hipótese,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s))|}{\| \overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s) \overset{x}{\nabla} g(x(s)) \|} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s), t(s))|}{\| \overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s) \overset{x}{\nabla} g(x(s), t(s)) \|} = 0,$$

4. Trivialidade Topológica em Famílias de Funções Analíticas do Tipo $f(x) + tg(x)$

temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s))|^2}{\|\nabla f(x(s)) + t(s)\nabla g(x(s))\|^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{|g(x(s))|}{\|\nabla f(x(s)) + t(s)\nabla g(x(s))\|} \right)^2 = 0.$$

Consequentemente,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s))|^2}{\|\nabla f(x(s)) + t(s)\nabla g(x(s))\|^2 + |g(x)|^2} \leq \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s))|^2}{\|\nabla f(x(s)) + t(s)\nabla g(x(s))\|^2} = 0.$$

e, portanto,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s))|^2}{\|\nabla f(x(s)) + t(s)\nabla g(x(s))\|^2 + |g(x)|^2} = 0. \quad (4.7)$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{|g(x(s), t(s))|}{\|\nabla F(x(s), t(s))\|} \right)^2 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s), t(s))|^2}{\|\nabla F(x(s), t(s))\|^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s), t(s))|^2}{\|\nabla f(x(s)) + t\nabla g(x(s), s(t))\|^2 + |g(x(s), t(s))|^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s))|^2}{\|\nabla f(x(s)) + t\nabla g(x(s))\|^2 + |g(x(s))|^2}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

temos, por (4.7), que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{|g(x(s), t(s))|}{\|\nabla F(x(s), t(s))\|} \right)^2 = 0$$

Assim,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s), t(s))|}{\|\nabla F(x(s), t(s))\|} = 0.$$

e, portanto,

$$|g(x)| \ll \|\nabla F(x, t)\| \text{ com } (x, t) \rightarrow f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0).$$

O que prova que (II) implica (I).

Agora, suponhamos que $|g(x)| \ll \|\nabla F(x, t)\|$ com $(x, t) \rightarrow f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ e tomemos uma curva analítica real $p(s) = (x(s), t(s)) \rightarrow (x_0, t_0) \in f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$. Por hipótese,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s))|}{\|\nabla F(x(s), t(s))\|} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s), t(s))|}{\|\nabla F(x(s), t(s))\|} = 0,$$

Logo

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s))|^2}{\|\nabla F(x(s), t(s))\|^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{|g(x(s))|}{\|\nabla F(x(s), t(s))\|} \right)^2 = 0$$

4. Trivialidade Topológica em Famílias de Funções Analíticas do Tipo $f(x) + tg(x)$

e, conseqüentemente, por (4.8), temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s))|^2}{\|\overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x(s))\|^2 + |g(x(s))|^2} = 0. \quad (4.9)$$

De (4.9), temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|\overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x(s))\|^2 + |g(x(s))|^2}{|g(x(s))|^2} = \infty.$$

Daí, como

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|\overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x(s))\|^2 + |g(x(s))|^2}{|g(x(s))|^2} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|\overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x(s))\|^2}{|g(x(s))|^2} + 1 \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|\overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x(s))\|^2}{|g(x(s))|^2}, \end{aligned}$$

temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|\overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x(s))\|^2}{|g(x(s))|^2} = \infty.$$

Conseqüentemente,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s))|^2}{\|\overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x(s))\|^2} = 0.$$

e, portanto,

$$|g(x)| \ll \|\overset{x}{\nabla} f(x) + t\overset{x}{\nabla} g(x)\| \text{ com } (x, t) \rightarrow f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0).$$

Disso segue (I) implica (II).

A partir disso, provaremos a seguir que de (I) podemos garantir que

$$|g(x)| \ll \|\nabla F(x, t) + \lambda \nabla g(x)\| \text{ com } (x, t) \in F^{-1}(0) \text{ e } (x, t) \rightarrow f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0), \quad (4.10)$$

para $|\lambda|$ suficientemente pequeno (digamos, para $|\lambda| < \varepsilon$). Para isso comecemos observando que, do fato de

$$\begin{aligned} \|\overset{x}{\nabla} f(x) + t\overset{x}{\nabla} g(x) + \lambda \overset{x}{\nabla} g(x)\| &\geq \|\overset{x}{\nabla} f(x) + t\overset{x}{\nabla} g(x)\| - |\lambda| \|\overset{x}{\nabla} g(x)\| \\ &\geq \frac{\|\overset{x}{\nabla} f(x) + t\overset{x}{\nabla} g(x)\|}{2}, \end{aligned}$$

para $|\lambda|$ suficientemente pequena, dada uma curva analítica real $p(s) = (x(s), t(s)) \rightarrow$

$(x_0, t_0) \in f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$, temos que

$$\|\overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x(s)) + \lambda \overset{x}{\nabla} g(x(s))\| \geq \frac{\|\overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x(s))\|}{2},$$

para $|\lambda| < \varepsilon$. Disso segue que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s))|}{\|\overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x(s)) + \lambda \overset{x}{\nabla} g(x(s))\|} &\leq \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2|g(x(s))|}{\|\overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x(s))\|} \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s))|}{\|\overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x(s))\|} \end{aligned} \quad (4.11)$$

para $|\lambda| < \varepsilon$ e assim, como (I) implica (II), temos, por (4.11), que (I) implica

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s))|}{\|\overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x(s)) + \lambda \overset{x}{\nabla} g(x(s))\|} = 0 \quad (4.12)$$

para $|\lambda| < \varepsilon$. Mas, do fato de

$$\begin{aligned} \nabla F(x(s), t(s)) + \lambda \nabla g(x(s)) &= (\overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x(s)), g(x(s))) + (\lambda \overset{x}{\nabla} g(x(s)), 0) \\ &= (\overset{x}{\nabla} f(x(s)) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x(s)) + \lambda \overset{x}{\nabla} g(x(s)), g(x(s))), \end{aligned}$$

podemos concluir também, por meio da mesma justificativa utilizada em (II) $\Rightarrow$ (I), que (4.12) implica

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|g(x(s))|}{\|\nabla F(x(s), t(s)) + \lambda \nabla g(x(s))\|} = 0,$$

para $|\lambda| < \varepsilon$, o que prova que (I) implica (4.10). Claro que, para esse caso, (4.10) implica (ii), sendo assim, nos resta apenas provar que (ii) pode ser deduzido quando $|\lambda| \geq \varepsilon$.

Com esse intuito, notemos que se $|\lambda| \geq \varepsilon$, então temos, por (4.6), que

$$|g(x, t)| \ll \frac{1}{|\lambda|} \inf_{\lambda \in \mathbb{K}} \{\|\nabla F(x, t) + \lambda \nabla g(x)\|\}.$$

com $(x, t) \in F^{-1}(0)$ e $(x, t) \in f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$. No entanto, como

$$\frac{1}{|\lambda|} \inf_{\lambda \in \mathbb{K}} \{\|\nabla F(x, t) + \lambda \nabla g(x)\|\} \leq \frac{1}{\varepsilon} \inf_{\lambda \in \mathbb{K}} \{\|\nabla F(x, t) + \lambda \nabla g(x)\|\},$$

temos que

$$|g(x, t)| \ll \frac{1}{\varepsilon} \inf_{\lambda \in \mathbb{K}} \{\|\nabla F(x, t) + \lambda \nabla g(x)\|\}$$

4. Trivialidade Topológica em Famílias de Funções Analíticas do Tipo $f(x) + tg(x)$

com $(x, t) \in F^{-1}(0)$ e $(x, t) \in f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ e claro que disso também segue (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Suponhamos que $|g(x)| \ll \inf_{\lambda} \{\|\nabla F(x, t) + \lambda \nabla g(x)\|\}$, com $(x, t) \in F^{-1}(0)$ e $(x, t) \rightarrow (x_0, t_0) \in f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$, e neguemos que $|g(x)| \ll \|\nabla F(x, t)\|$, com $(x, t) \rightarrow (x_0, t_0) \in f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$. Então existe uma curva analítica real $p(s) = (X(s), T(s)) \rightarrow (x_0, t_0) \in f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$, definida em $[0, \varepsilon)$, e existe $C > 0$ tais que para todo $\delta > 0$ existe $s \in (-\delta, \delta) \cap [0, \varepsilon]$ satisfazendo

$$\frac{|g(X(s))|}{\|\nabla F(X(s), T(s))\|} = \frac{|g(X(s), T(s))|}{\|\nabla F(X(s), T(s))\|} > C.$$

Disso segue que, em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $s_n \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \cap [0, \varepsilon)$ que satisfaz

$$\frac{|g(X(s_n))|}{\|\nabla F(X(s_n), T(s_n))\|} = \frac{|g(X(s_n), T(s_n))|}{\|\nabla F(X(s_n), T(s_n))\|} > C.$$

Tomemos a sequência $\{(X(s_n), T(s_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ e observemos que $\{(X(s_n), T(s_n))\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (x_0, t_0)$, pois $s_n \rightarrow 0$. Logo, pelo Lema de Seleção da Curva, temos que existe uma curva analítica real $q(s) = (x(s), t(s)) \rightarrow (x_0, t_0)$, tal que

$$\frac{|g(x(s))|}{\|\nabla F(x(s), t(s))\|} = \frac{|g(x(s), t(s))|}{\|\nabla F(x(s), t(s))\|} > C,$$

ou seja, tal que

$$|g(x(s))| > C \|\nabla F(x(s), t(s))\|. \quad (4.13)$$

Agora, notemos que do fato de $F(x, t) = f(x) + tg(x)$ ser uma função analítica, temos, pondo $t = x_{n+1}$, que em uma vizinhança de $(x_0, y_0) \in f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$

$$\begin{aligned} F(x(s), t(s)) &= F(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F(x_0, t_0)}{\partial x_j} x_j(s) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial^2 F(x_0, t_0)}{\partial x_j \partial x_k} x_j(s) x_k(s) + \cdots \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F(x_0, t_0)}{\partial x_j} x_j(s) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial^2 F(x_0, t_0)}{\partial x_j \partial x_k} x_j(s) x_k(s) + \cdots. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial F(x(s), t(s))}{\partial x_i} = \frac{\partial F(x_0, t_0)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 F(x_0, t_0)}{\partial x_i \partial x_j} x_j(s) + \cdots, \text{ para } i = 1, \dots, n+1$$

4. Trivialidade Topológica em Famílias de Funções Analíticas do Tipo $f(x) + tg(x)$

e, portanto, se $\frac{\partial F(x(s), t(s))}{\partial x_i} \neq 0$, para algum $i \in \{1, \dots, n+1\}$, então

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{\frac{\partial F(x(s), t(s))}{\partial x_i}}{\left| \frac{\partial F(x(s), t(s))}{\partial x_i} \right|} \right| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{F(x(s), t(s))}{\frac{\partial F(x(s), t(s))}{\partial x_i}} \right| = 0. \quad (4.14)$$

Nesse caso, considerando

$$\|\nabla F(x(s), t(s))\| = \max \left\{ \left| \frac{\partial F(x(s), t(s))}{\partial x_1} \right|, \dots, \left| \frac{\partial F(x(s), t(s))}{\partial x_{n+1}} \right| \right\} = \left| \frac{\partial F(x(s), t(s))}{\partial x_l} \right|,$$

para algum l , temos, por (4.14), que $\lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{F(x(s), t(s))}{\frac{\partial F(x(s), t(s))}{\partial x_l}} \right| \leq \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{F(x(s), t(s))}{\frac{\partial F(x(s), t(s))}{\partial x_i}} \right| = 0$.

Consequentemente,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|F(x(s), t(s))|}{\|\nabla F(x(s), t(s))\|} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|F(x(s), t(s))|}{\left| \frac{\partial F(x(s), t(s))}{\partial x_l} \right|} = 0, \quad (4.15)$$

Logo,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|F(x(s), t(s))|}{C \|\Delta F(x(s), t(s))\|} = 0,$$

e portanto, por (4.13), temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|F(x(s), t(s))|}{|g(x(s))|} = 0 \quad (4.16)$$

Se $\frac{\partial F(x(s), t(s))}{\partial x_i} = 0$ para $i = 1, \dots, n+1$, então (4.16) segue, imediatamente, do fato de $|g(x(t))| > C \|\nabla F(x(t), t(s))\| = |F(x(s), t(s))| = 0$. Assim, em todo caso, (4.16) é satisfeita. Agora que estabelecemos isso, observemos que, do fato de

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|F(x(s), t(s))|}{|g(x(s))|} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|f(x(s)) + t(s)g(x(s))|}{|g(x(s))|} = \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{f(x(s)) + t(s)g(x(s))}{g(x(s))} \right| \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{f(x(s))}{g(x(s))} + t(s) \right|, \end{aligned}$$

temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{f(x(s))}{g(x(s))} + t(s) \right| = 0.$$

Assim,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x(s))}{g(x(s))} + t(s) = 0$$

e, desse modo,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x(s))}{g(x(s))} = -t_0. \quad (4.17)$$

Tomemos $t_1(s) = -\frac{f(x(s))}{g(x(s))}$ e observemos, primeiramente, que

$$\begin{aligned} \|\nabla F(x(s), t(s))\| &= \|(\overset{x}{\nabla} f(x) + t(s)\overset{x}{\nabla} g(x), g(x(s)))\| \\ &= \|(\overset{x}{\nabla} f(x), g(x(s))) + (t(s)\overset{x}{\nabla} g(x), 0)\| \\ &= \|(\overset{x}{\nabla} f(x), g(x(s))) + (t(s)\overset{x}{\nabla} g(x), 0) + (t_1(s) - t_1(s))(\overset{x}{\nabla} g(x), 0)\| \\ &= \|(\overset{x}{\nabla} f(x), g(x(s))) + (t_1(s)\overset{x}{\nabla} g(x), 0) + (t(s) - t_1(s))(\overset{x}{\nabla} g(x), 0)\| \\ &= \|(\overset{x}{\nabla} f(x) + t_1(s)\overset{x}{\nabla} g(x), g(x(s))) + (t(s) - t_1(s))(\overset{x}{\nabla} g(x), 0)\| \\ &= \|\nabla F(x(s), t_1(s)) + (t(s) - t_1(s))(\overset{x}{\nabla} g(x), 0)\| \\ &= \|\nabla F(x(s), t_1(s)) + (t(s) - t_1(s))\nabla g(x(s), t(s))\|. \end{aligned}$$

Daí, por (4.13), $(x(s), t_1(s))$ satisfaz

$$|g(x(s))| > C\|\nabla F(x(s), t_1(s)) + (t(s) - t_1(s))\nabla g(x(s))\|. \quad (4.18)$$

Além disso, notemos também que, por (4.17), $(x(s), t_1(s)) \rightarrow (x_0, t_0)$ e que, do fato de

$$\begin{aligned} F(x(s), t_1(s)) &= f(x(s)) + t_1(s)g(x(s)) = f(x(s)) - \frac{f(x(s))}{g(x(s))}g(x(s)) \\ &= f(x(s)) - f(x(s)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

temos que $(x(s), t_1(s)) \in F^{-1}(0)$. Agora, façamos $\lambda(t) = t(s) - t_1(s)$ e observemos que, por (4.18),

$$|g(x(s))| > C\|\nabla F(x(s), t_1(s)) + \lambda(s)\nabla g(x(s))\|.$$

e, assim, como

$$C\|\nabla F(x(s), t_1(s)) + \lambda(s)\nabla g(x(s))\| > C \inf_{\lambda} \{\|\nabla F(x(s), t_1(s)) + \lambda\nabla g(x(s))\|\},$$

temos que $(x(s), t_1(s))$ satisfaz

$$|g(x(s))| > C \inf_{\lambda} \{\|\nabla F(x(s), t_1(s)) + \lambda\nabla g(x(s))\|\}.$$

Mas isso, claramente, contradiz a hipótese considerada e com isso concluímos que (i) e (ii) são equivalentes. ■

4. Trivialidade Topológica em Famílias de Funções Analíticas do Tipo $f(x) + tg(x)$

Por meio de alguns raciocínios análogos ao que foram feitos no corolário acima podemos concluir também, supondo que $(x, t) \in F^{-1}(0)$ e $(x, t) \rightarrow f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$, que, para pontos suficientemente próximo da origem, a condição (ii) do Corolário 4.3 é equivalente a

$$\phi(x) = \frac{|g(x)|}{\inf_{\lambda} \{ \|\overset{x}{\nabla} f(x) + \lambda \overset{x}{\nabla} g(x)\| \}} \rightarrow 0.$$

Ou ainda, sob a mesma hipótese, temos que a condição (ii) é equivalente a

$$\psi(x) = \frac{|g(x)|^2}{\inf_{\lambda} \{ \|\overset{x}{\nabla} f(x) + \lambda \overset{x}{\nabla} g(x)\|^2 \}} \rightarrow 0. \quad (4.19)$$

Assim, suponhamos que $\overset{x}{\nabla} g(x) \neq 0$. Provaremos que $\inf_{\lambda} \{ \|\overset{x}{\nabla} f(x) + \lambda \overset{x}{\nabla} g(x)\|^2 \}$ é atingido em

$$\lambda_1 = - \frac{\langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle}{\|\overset{x}{\nabla} g(x)\|^2}.$$

Com esse intuito, comecemos observando que, quando $\lambda_1 = - \frac{\langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle}{\|\overset{x}{\nabla} g(x)\|^2}$,

$$\begin{aligned} \langle \overset{x}{\nabla} f(x) + \lambda_1 \overset{x}{\nabla} g(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle &= \left\langle \overset{x}{\nabla} f(x) - \frac{\langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle}{\|\overset{x}{\nabla} g(x)\|^2} \cdot \overset{x}{\nabla} g(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \right\rangle \\ &= \langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle - \frac{\langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle}{\|\overset{x}{\nabla} g(x)\|^2} \cdot \langle \overset{x}{\nabla} g(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle \\ &= \langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle - \frac{\langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle}{\|\overset{x}{\nabla} g(x)\|^2} \cdot \|\overset{x}{\nabla} g(x)\|^2 \\ &= \langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle - \langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Consequentemente,

$$\overline{\langle \overset{x}{\nabla} f(x) + \lambda_1 \overset{x}{\nabla} g(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle} = 0. \quad (4.21)$$

Nosso objetivo é provar, a partir disso que, para todo $\lambda \neq \lambda_1$

$$\|\overset{x}{\nabla} f(x) + \lambda \overset{x}{\nabla} g(x)\|^2 > \|\overset{x}{\nabla} f(x) + \lambda_1 \overset{x}{\nabla} g(x)\|^2. \quad (4.22)$$

Para isso, basta observar que, como

$$\begin{aligned}\overset{x}{\nabla}f(x) + \lambda\overset{x}{\nabla}g(x) &= \overset{x}{\nabla}f(x) + \lambda\overset{x}{\nabla}g(x) + \lambda_1\overset{x}{\nabla}g(x) - \lambda_1\overset{x}{\nabla}g(x) \\ &= \overset{x}{\nabla}f(x) + \lambda_1\overset{x}{\nabla}g(x) + (\lambda - \lambda_1)\overset{x}{\nabla}g(x),\end{aligned}$$

temos, por (4.20) e (4.21), que

$$\begin{aligned}\|\overset{x}{\nabla}f(x) + \lambda\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2 &= \|\overset{x}{\nabla}f(x) + \lambda_1\overset{x}{\nabla}g(x) + (\lambda - \lambda_1)\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2 \\ &= \|\overset{x}{\nabla}f(x) + \lambda_1\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2 + \overline{\lambda - \lambda_1} \langle \overset{x}{\nabla}f(x) + \lambda_1\overset{x}{\nabla}g(x), \overset{x}{\nabla}g(x) \rangle \\ &\quad + (\lambda - \lambda_1) \overline{\langle \overset{x}{\nabla}f(x) + \lambda_1\overset{x}{\nabla}g(x), \overset{x}{\nabla}g(x) \rangle} + |\lambda - \lambda_1|^2 \|\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2 \\ &= \|\overset{x}{\nabla}f(x) + \lambda_1\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2 + |\lambda - \lambda_1|^2 \|\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2\end{aligned}$$

e, como, por hipótese, $|\lambda - \lambda_1|^2 \|\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2 > 0$, (4.22) segue de imediato. Como consequência de (4.22), temos que $\inf_{\lambda} \{\|\overset{x}{\nabla}f(x) + \lambda\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2\}$ é atingido em

$$\lambda_1 = - \frac{\langle \overset{x}{\nabla}f(x), \overset{x}{\nabla}g(x) \rangle}{\|\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2}$$

e disso segue que

$$\inf_{\lambda} \{\|\overset{x}{\nabla}f(x) + \lambda\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2\} = \left\| \overset{x}{\nabla}f(x) - \frac{\langle \overset{x}{\nabla}f(x), \overset{x}{\nabla}g(x) \rangle}{\|\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2} \cdot \overset{x}{\nabla}g(x) \right\|^2.$$

Mas, como

$$\begin{aligned}\left\| \overset{x}{\nabla}f(x) - \frac{\langle \overset{x}{\nabla}f(x), \overset{x}{\nabla}g(x) \rangle}{\|\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2} \cdot \overset{x}{\nabla}g(x) \right\|^2 &= \|\overset{x}{\nabla}f(x)\|^2 - \frac{\overline{\langle \overset{x}{\nabla}f(x), \overset{x}{\nabla}g(x) \rangle}}{\|\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2} \langle \overset{x}{\nabla}f(x), \overset{x}{\nabla}g(x) \rangle \\ &\quad - \frac{\langle \overset{x}{\nabla}f(x), \overset{x}{\nabla}g(x) \rangle}{\|\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2} \overline{\langle \overset{x}{\nabla}f(x), \overset{x}{\nabla}g(x) \rangle} \\ &\quad + \left| \frac{\langle \overset{x}{\nabla}f(x), \overset{x}{\nabla}g(x) \rangle}{\|\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2} \right|^2 \|\overset{x}{\nabla}g(x)\|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle}}{\|\nabla g(x)\|^2} \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle &= \frac{\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle \overline{\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle}}{\|\nabla g(x)\|^2} \\ &= \frac{|\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle|^2}{\|\nabla g(x)\|^2} \end{aligned}$$

e

$$\left| \frac{\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle}{\|\nabla g(x)\|^2} \right|^2 \|\nabla g(x)\|^2 = \frac{|\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle|^2}{\|\nabla g(x)\|^4} \|\nabla g(x)\|^2 = \frac{|\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle|^2}{\|\nabla g(x)\|^2},$$

temos que

$$\begin{aligned} \inf_{\lambda} \{\|\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x)\|^2\} &= \|\nabla f(x)\|^2 - 2 \frac{|\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle|^2}{\|\nabla g(x)\|^2} + \frac{|\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle|^2}{\|\nabla g(x)\|^2} \\ &= \|\nabla f(x)\|^2 - \frac{|\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle|^2}{\|\nabla g(x)\|^2} \\ &= \frac{\|\nabla f(x)\|^2 \cdot \|\nabla g(x)\|^2 - |\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle|^2}{\|\nabla g(x)\|^2} \end{aligned}$$

e, portanto, por (4.19), a condição (ii) do Corolário 4.3 é equivalente a

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{|g(x)|^2}{\inf_{\lambda} \{\|\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x)\|^2\}} = \frac{|g(x)|^2}{\frac{\|\nabla f(x)\|^2 \cdot \|\nabla g(x)\|^2 - |\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle|^2}{\|\nabla g(x)\|^2}} \\ &= \frac{|g(x)|^2 \cdot \|\nabla g(x)\|^2}{\|\nabla f(x)\|^2 \cdot \|\nabla g(x)\|^2 - |\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle|^2} \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

em $F^{-1}(0)$. Assim, façamos $\Delta(x) = \|\nabla f(x)\|^2 \cdot \|\nabla g(x)\|^2 - |\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle|^2$. Temos da equivalência acima que a condição (ii) do Corolário 4.3 acima implica que

$$\Delta^{-1}(0) \cap F^{-1}(0) \subset \{\nabla g = 0\} \subset g^{-1}(0). \tag{4.24}$$

4.2 Trivialidade Topológica em Famílias de Funções do Tipo $f(x) + tg(x)$

O objetivo principal dessa seção é provar o Teorema 4.1 enunciado no início do capítulo. A ideia central empregada com esse intuito parte, resumidamente, da construção de um campo vetores e da obtenção de uma família contínua de homeomorfismos a partir do fluxo associado a esse campo.

Primeiramente, vamos mostrar como trivializar o conjunto $X = F^{-1}(0)$, ou seja, vamos provar que, para t suficientemente pequeno, existe um homeomorfismo de germes $h_t : (F_t^{-1}(0), 0) \rightarrow (F_0^{-1}(0), 0)$. Para isso, definamos um campo de vetores $\vec{v}$ pondo que

$$\vec{v}(x, t) = (0, 1) - \frac{g(x)\|\vec{\nabla}g(x)\|^2}{\Delta(x)} \cdot (\vec{\nabla}f(x), 0) + \frac{g(x)\langle \vec{\nabla}f(x), \vec{\nabla}g(x) \rangle}{\Delta(x)} \cdot (\vec{\nabla}g(x), 0),$$

se $(x, t) \in X' = X - g^{-1}(0)$ e $\vec{v}(x, t) = (0, 1)$ se $(x, t) \in X \cap g^{-1}(0)$ e observemos que $\vec{v}$ satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\vec{v}$ é tangente às curvas de nível de F e g , para $(x, t) \in X'$.
- (ii) $\|\vec{v}(x, t) - (0, 1)\| \rightarrow 0$ com $(x, t) \rightarrow f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ e $(x, t) \in X$.

De fato, suponhamos que $(x, t) \in X'$. Então

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}(x, t), \nabla g(x, t) \rangle &= \langle (0, 1), \nabla g(x, t) \rangle - \frac{g(x)\|\vec{\nabla}g(x)\|^2}{\Delta(x)} \langle (\vec{\nabla}f(x), 0), \nabla g(x, t) \rangle \\ &\quad + \frac{g(x)\langle \vec{\nabla}f(x), \vec{\nabla}g(x) \rangle}{\Delta(x)} \langle (\vec{\nabla}g(x), 0), \nabla g(x, t) \rangle. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Mas, como

$$\langle (0, 1), \nabla g(x, t) \rangle = \langle (0, 1), (\vec{\nabla}g(x), 0) \rangle = \langle 0, \vec{\nabla}g(x) \rangle + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{g(x)\|\vec{\nabla}g(x)\|^2}{\Delta(x)} \langle (\vec{\nabla}f(x), 0), \nabla g(x, t) \rangle &= \frac{g(x)\|\vec{\nabla}g(x)\|^2 \langle (\vec{\nabla}f(x), 0), (\vec{\nabla}g(x), 0) \rangle}{\Delta(x)} \\ &= \frac{g(x)\|\vec{\nabla}g(x)\|^2 [\langle \vec{\nabla}f(x), \vec{\nabla}g(x) \rangle + 0 \cdot 0]}{\Delta(x)} \\ &= \frac{g(x)\|\vec{\nabla}g(x)\|^2 \langle \vec{\nabla}f(x), \vec{\nabla}g(x) \rangle}{\Delta(x)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{g(x)\langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle}{\Delta(x)} \langle (\overset{x}{\nabla} g(x), 0), \nabla g(x, t) \rangle &= \frac{g(x)\langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle \langle (\overset{x}{\nabla} g(x), 0), \nabla g(x, t) \rangle}{\Delta(x)} \\
 &= \frac{g(x)\langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle \langle (\overset{x}{\nabla} g(x), 0), (\overset{x}{\nabla} g(x), 0) \rangle}{\Delta(x)} \\
 &= \frac{g(x)\langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle [\langle \overset{x}{\nabla} g(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle + 0 \cdot 0]}{\Delta(x)} \\
 &= \frac{g(x)\langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle \|\overset{x}{\nabla} g(x)\|^2}{\Delta(x)}
 \end{aligned}$$

temos, por (4.25), que

$$\langle \vec{v}(x, t), \nabla g(x, t) \rangle = 0.$$

Portanto, $\vec{v}$ é tangente às curvas de nível de g .

Além disso, notemos também que

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{v}(x, t), \nabla F(x, t) \rangle &= \langle (0, 1), \nabla F(x, t) \rangle - \frac{g(x)\|\overset{x}{\nabla} g(x)\|^2}{\Delta(x)} \langle (\overset{x}{\nabla} f(x), 0), \nabla F(x, t) \rangle \\
 &\quad + \frac{g(x)\langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle}{\Delta(x)} \langle (\overset{x}{\nabla} g(x), 0), \nabla F(x, t) \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Mas, do fato de

$$\begin{aligned}
 \langle (0, 1), \nabla F(x, t) \rangle &= \langle (0, 1), (\overset{x}{\nabla} f(x) + t\overset{x}{\nabla} g(x), g(x)) \rangle \\
 &= \langle 0, \overset{x}{\nabla} f(x) + t\overset{x}{\nabla} g(x) \rangle + g(x) \cdot 1 \\
 &= g(x),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle (\overset{x}{\nabla} f(x), 0), \nabla F(x, t) \rangle &= \langle (\overset{x}{\nabla} f(x), 0), (\overset{x}{\nabla} f(x) + t\overset{x}{\nabla} g(x), g(x)) \rangle \\
 &= \langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} f(x) + t\overset{x}{\nabla} g(x) \rangle + g(x) \cdot 0 \\
 &= \langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} f(x) \rangle + t\langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle \\
 &= \|\overset{x}{\nabla} f(x)\|^2 + t\langle \overset{x}{\nabla} f(x), \overset{x}{\nabla} g(x) \rangle
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla g(x), 0 \rangle, \nabla F(x, t) &= \langle \nabla g(x), 0 \rangle, (\nabla f(x) + t \nabla g(x), g(x)) \\
 &= \langle \nabla g(x), \partial_x f(x) + t \nabla g(x) \rangle + g(x) \cdot 0 \\
 &= \langle \nabla g(x), \nabla f(x) \rangle + t \langle \nabla g(x), \nabla g(x) \rangle \\
 &= \langle \nabla g(x), \nabla f(x) \rangle + t \|\nabla g(x)\|^2
 \end{aligned}$$

temos, por (4.26), que

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{v}(x, t), \nabla F(x, t) \rangle &= g(x) - \frac{g(x) \|\nabla g(x)\|^2}{\Delta(x)} [\|\nabla f(x)\|^2 + t \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle] \\
 &\quad + \frac{g(x) \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle}{\Delta(x)} [\langle \nabla g(x), \nabla f(x) \rangle + t \|\nabla g(x)\|^2],
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde, reordenando (4.27), obtemos que

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{v}(x, t), \nabla F(x, t) \rangle &= g(x) - \frac{g(x) \|\nabla g(x)\|^2 \|\nabla f(x)\|^2}{\Delta(x)} + \frac{g(x) |\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle|^2}{\Delta(x)} \\
 &= g(x) - \frac{g(x) (\|\nabla g(x)\|^2 \|\nabla f(x)\|^2 - |\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle|^2)}{\Delta(x)} \\
 &= g(x) - \frac{g(x) \cdot \Delta(x)}{\Delta(x)} = g(x) - g(x) = 0
 \end{aligned}$$

e portanto segue também que $\vec{v}$ é tangente às curvas de nível de F , o que prova a condição (i).

Para provar (ii) basta mostrarmos isso para qualquer curva analítica real $(x(x), t(s)) \rightarrow (x_0, t_0) \in g^{-1}(0) \cap f^{-1}(0)$. Assim, tomemos $(x(x), t(s)) \rightarrow (x_0, t_0) \in g^{-1}(0) \cap f^{-1}(0)$ e observemos que se $(x(x), t(s)) \in g^{-1}(0)$ para todo $s \in [0, \varepsilon)$ (com ε suficientemente pequeno) então o resultado é imediato pela própria definição de $\vec{v}$. Do contrário basta observarmos que para pontos $(x, t) \in X'$

$$\|\vec{v}(x, t) - (0, 1)\|^2 = \left\| -\frac{g(x) \|\nabla g(x)\|^2}{\Delta(x)} \cdot (\nabla f(x), 0) + \frac{g(x) \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle}{\Delta(x)} \cdot (\nabla g(x), 0) \right\|^2$$

donde, desenvolvendo a igualdade acima, temos que

$$\begin{aligned}
 \|\vec{v}(x, t) - (0, 1)\|^2 &= \left| \frac{g(x) \|\vec{\nabla} g(x)\|^2}{\Delta(x)} \right|^2 \|\vec{\nabla} f(x), 0\|^2 \\
 &\quad - \frac{g(x) \|\vec{\nabla} g(x)\|^2}{\Delta(x)} \cdot \frac{\overline{g(x) \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{\nabla} g(x) \rangle}}{\Delta(x)} \langle \vec{\nabla} f(x), 0 \rangle, \langle \vec{\nabla} g(x), 0 \rangle \rangle \\
 &\quad - \frac{g(x) \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{\nabla} g(x) \rangle}{\Delta(x)} \cdot \frac{\overline{g(x) \|\vec{\nabla} g(x)\|^2}}{\Delta(x)} \langle \vec{\nabla} f(x), 0 \rangle, \langle \vec{\nabla} g(x), 0 \rangle \rangle \\
 &\quad + \left| \frac{g(x) \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{\nabla} g(x) \rangle}{\Delta(x)} \right|^2 \|\vec{\nabla} g(x), 0\|^2.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

e, portanto, do fato

$$\left| \frac{g(x) \|\vec{\nabla} g(x)\|^2}{\Delta(x)} \right|^2 \|\vec{\nabla} f(x), 0\|^2 = \frac{|g(x)|^2 \|\vec{\nabla} g(x)\|^4 \|\vec{\nabla} f(x)\|^2}{\Delta(x)^2},$$

de

$$\frac{g(x) \|\vec{\nabla} g(x)\|^2}{\Delta(x)} \cdot \frac{\overline{g(x) \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{\nabla} g(x) \rangle}}{\Delta(x)} \langle \vec{\nabla} f(x), 0 \rangle, \langle \vec{\nabla} g(x), 0 \rangle \rangle$$

e

$$\frac{g(x) \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{\nabla} g(x) \rangle}{\Delta(x)} \cdot \frac{\overline{g(x) \|\vec{\nabla} g(x)\|^2}}{\Delta(x)} \langle \vec{\nabla} f(x), 0 \rangle, \langle \vec{\nabla} g(x), 0 \rangle \rangle$$

serem dados por

$$\frac{g(x) \overline{g(x)} \|\vec{\nabla} g(x)\|^2 \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{\nabla} g(x) \rangle \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{\nabla} g(x) \rangle}{\Delta(x)^2} = \frac{|g(x)|^2 \|\vec{\nabla} g(x)\|^2 |\langle \vec{\nabla} f(x), \vec{\nabla} g(x) \rangle|^2}{\Delta(x)^2}$$

e

$$\frac{\overline{g(x)g(x)} \|\vec{\nabla} g(x)\|^2 \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{\nabla} g(x) \rangle \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{\nabla} g(x) \rangle}{\Delta(x)^2} = \frac{|g(x)|^2 \|\vec{\nabla} g(x)\|^2 |\langle \vec{\nabla} f(x), \vec{\nabla} g(x) \rangle|^2}{\Delta(x)^2},$$

respectivamente, e de

$$\left| \frac{g(x) \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{\nabla} g(x) \rangle}{\Delta(x)} \right|^2 \|\vec{\nabla} g(x), 0\|^2 = \frac{|g(x)|^2 |\langle \vec{\nabla} f(x), \vec{\nabla} g(x) \rangle|^2 \|\vec{\nabla} g(x)\|^2}{\Delta(x)^2}$$

temos, por (4.28), que

$$\begin{aligned} \|\vec{v}(x, t) - (0, 1)\|^2 &= \frac{|g(x)|^2 \|\nabla^x g(x)\|^4 \|\nabla^x f(x)\|^2}{\Delta(x)^2} - 2 \frac{|g(x)|^2 \|\nabla^x g(x)\|^2 |\langle \nabla^x f(x), \nabla^x g(x) \rangle|^2}{\Delta(x)^2} \\ &\quad + \frac{|g(x)|^2 |\langle \nabla^x f(x), \nabla^x g(x) \rangle|^2 \|\nabla^x g(x)\|^2}{\Delta(x)^2}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \|\vec{v}(x, t) - (0, 1)\|^2 &= \frac{|g(x)|^2 \|\nabla^x g(x)\|^4 \|\nabla^x f(x)\|^2}{\Delta(x)^2} - \frac{|g(x)|^2 |\langle \nabla^x f(x), \nabla^x g(x) \rangle|^2 \|\nabla^x g(x)\|^2}{\Delta(x)^2} \\ &= \frac{|g(x)|^2 \|\nabla^x g(x)\|^2 \left(\|\nabla^x f(x)\|^2 \|\nabla^x g(x)\|^2 - |\langle \nabla^x f(x), \nabla^x g(x) \rangle|^2 \right)}{\Delta(x)^2} \\ &= \frac{|g(x)|^2 \|\nabla^x g(x)\|^2 \Delta(x)}{\Delta(x)^2} \\ &= \frac{|g(x)|^2 \|\nabla^x g(x)\|^2}{\Delta(x)} \end{aligned}$$

e disso segue (ii).

Vamos provar agora que (i) e (ii) implicam a continuidade do fluxo de $\vec{v}$. Para isso comecemos observando que pelo Corolário 4.3 $X' = X - g^{-1}(0)$ é não-singular e que, por (4.24), $\vec{v}$ é suave em X' , já que $\{\Delta(x) = 0\} \subset \{g = 0\}$. Além disso, notemos também que as curvas integrais de $\vec{v}|_{X'}$ não podem cair em $Y = X \cap g^{-1}(0)$, pois $\vec{v}$ é tangente as curvas de nível de g .

Sejam $\Phi(p, s)$ o fluxo de $\vec{v}$, $p_0 = (x_0, t_0) \in Y$ e $p_1 = (x_1, t_1) \in X'$. Temos que

$$\vec{v}(p_0) = \vec{v}(\Phi(p_0, s)) + R_0 \text{ e } \vec{v}(p_1) = \vec{v}(\Phi(p_1, s)) + R_1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\vec{v}(p_1) - \vec{v}(p_0)\| &= \|\vec{v}(\Phi(p_1, s)) + R_1 - (\vec{v}(\Phi(p_0, s)) + R_0)\| \\ &\leq \|\vec{v}(\Phi(p_1, s)) - \vec{v}(\Phi(p_0, s))\| + \|R_1 - R_0\| \end{aligned}$$

e, portanto, por (ii) temos que $\|\vec{v}(p_1) - \vec{v}(p_0)\| \rightarrow 0$ quando $p_1 \rightarrow p_0$. Além disso, observemos também que, para s suficientemente pequeno,

$$\Phi(p_1, s) = p_1 + s\vec{v}(p_1) + r_1 \text{ e } \Phi(p_0, s) = p_0 + s\vec{v}(p_0) + r_0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|\Phi(p_1, s) - \Phi(p_2, s)\| &= \|p_1 + s\vec{v}(p_1) + r_1 - (p_0 + s\vec{v}(p_0) + r_0)\| \\ &\leq \|p_1 - p_0\| + |s|\|\vec{v}(p_1) - \vec{v}(p_0)\| + \|r_1 - r_0\| \quad (4.29)\end{aligned}$$

e, conseqüentemente, $\|\Phi(p_1, s) - \Phi(p_2, s)\| \rightarrow 0$ quando $p_1 \rightarrow p_0$. Isso mostra a continuidade de Φ e nos permite concluir a trivialidade de X .

Para trivializar F como uma função nós tomaremos como base o Campo de Vetores de Kuo. Assim, definamos o seguinte campo:

$$\vec{w}(x, t) = (0, 1) - \frac{g(x)}{\|\vec{\nabla} F(x)\|^2} (\vec{\nabla} F(x, t), 0)$$

e observemos que do fato de

$$\langle (0, 1), \nabla F(x, t) \rangle = \langle (0, 1), (\vec{\nabla} F(x, t), g(x)) \rangle = \langle 0, \vec{\nabla} F(x, t) \rangle + g(x) \cdot 1 = g(x)$$

e

$$\begin{aligned}\langle (\vec{\nabla} F(x, t), 0), \nabla F(x, t) \rangle &= \langle (\vec{\nabla} F(x, t), 0), (\vec{\nabla} F(x, t), g(x)) \rangle \\ &= \langle \vec{\nabla} F(x, t), \vec{\nabla} F(x, t) \rangle + g(x) \cdot 0 \\ &= \|\vec{\nabla} F(x, t)\|^2 - \frac{g(x)}{\|\vec{\nabla} F(x)\|^2}\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}\langle \vec{w}(x, t), \nabla F(x, t) \rangle &= \langle (0, 1), \nabla F(x, t) \rangle - \frac{g(x)}{\|\vec{\nabla} F(x)\|^2} \langle (\vec{\nabla} F(x, t), 0), \nabla F(x, t) \rangle, \\ &= g(x) - \frac{g(x)}{\|\partial_x F(x)\|^2} \|\partial_x F(x)\|^2 \\ &= g(x) - g(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

e disso segue que $\vec{w}$ é tangente às curvas de nível de F .

Usando uma partição da unidade vamos “colar” os campos de vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Para isso, fixemos $\mathcal{U}$ uma vizinhança suficientemente pequena de $(0, 0) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}$, tomemos $\mathcal{V}_1$ uma vizinhança de $X' = X - Y$ em $\mathcal{U} - Y$ que ainda satisfaça (4.23) e ponhamos $\mathcal{V}_2 = \mathcal{U} - X$. Como $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ formam uma cobertura de $\mathcal{U} - Y$, podemos tomar uma partição da unidade $\rho_1, \rho_2 : \mathcal{U} - Y \rightarrow [0, 1]$ dominada por $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ e definir um campo

vetores $\vec{V}$ pondo que

$$\vec{V}(x, t) = \rho_1(x, t) \vec{v}(x, t) + \rho_2(x, t) \vec{w}(x, t).$$

Claro que o campo $\vec{V}$ é tangente às curvas de nível de F em $\mathcal{U} - Y$, uma vez que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são tangentes às curvas de níveis de F em $X - Y$ e $\mathcal{U} - X$, respectivamente, conforme provado anteriormente na construção de ambos os campos. Além disso, $\vec{V}$ é tangente também às curvas de g , em $X - Y$. Assim, o fluxo associado à $\vec{V}$ é contínuo em $\mathcal{U} - Y$.

Além disso, do fato de $\rho_1(x, t) + \rho_2(x, t) = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \vec{V}(x, t) - (0, 1) &= \rho_1(x, t) \vec{v}(x, t) + \rho_2(x, t) \vec{w}(x, t) - (0, 1) \\ &= \rho_1(x, t) \vec{v}(x, t) + \rho_2(x, t) \vec{w}(x, t) - (0, \rho_1(x, t) + \rho_2(x, t)) \\ &= \rho_1(x, t) \vec{v}(x, t) + \rho_2(x, t) \vec{w}(x, t) - \rho_1(x, t)(0, 1) - \rho_2(x, t)(0, 1) \\ &= \rho_1(x, t)(\vec{v}(x, t) - (0, 1)) + \rho_2(x, t)(\vec{w}(x, t) - (0, 1)). \end{aligned}$$

Disso segue que

$$\begin{aligned} \|\vec{V}(x, t) - (0, 1)\| &= \|\rho_1(x, t)(\vec{v}(x, t) - (0, 1)) + \rho_2(x, t)(\vec{w}(x, t) - (0, 1))\| \\ &\leq \|\rho_1(x, t)(\vec{v}(x, t) - (0, 1))\| + \|\rho_2(x, t)(\vec{w}(x, t) - (0, 1))\| \\ &= \rho_1(x, t)\|\vec{v}(x, t) - (0, 1)\| + \rho_2(x, t)\|\vec{w}(x, t) - (0, 1)\| \end{aligned}$$

e, portanto, $\|\vec{V}(x, t) - (0, 1)\| \rightarrow 0$ com $(x, t) \rightarrow Y$. Assim, podemos provar a continuidade do fluxo de $\vec{V}$ por um raciocínio completamente análogo ao que utilizamos para provar a continuidade do fluxo de $\vec{v}$ e disso segue o teorema.

4.3 Trivialidade Topológica em Famílias μ - Constante de Hipersuperfícies com Singularidades Isoladas do Tipo $f(x) + tg(x)$

Ao longo dessa seção discutimos uma consequência importante do Teorema [4.1](#) para o estudo de trivialidade topológica em famílias μ -constante de hipersuperfícies com singularidades isoladas na origem. De maneira geral, Parusinski [\[21\]](#) provou a partir desse teorema que um caso específico de deformação μ - constante é topologicamente trivial, conforme verificamos abaixo.

Corolário 4.4. Seja $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tais que $F(x, t) = f(x) + tg(x)$ é uma

4. Trivialidade Topológica em Famílias de Funções Analíticas do Tipo $f(x) + tg(x)$

família μ -constante de singularidades isoladas. Então F é topologicamente trivial.

Demonstração: Suponhamos que $F(x, t) = f(x) + tg(x)$ é uma família μ -constante com singularidades isoladas. Para concluir que F é topologicamente trivial vamos provar que, em uma vizinhança da origem,

$$|g(x)| \ll \|\nabla F(x, t)\|, \quad \text{com } (x, t) \rightarrow g^{-1}(0) \cap f^{-1}(0).$$

Nesse sentido, comecemos denotando o eixo t por L . Por [9] podemos garantir que, se a família $F(x, t) = f(x) + tg(x)$ é μ -constante, então

$$|\overset{t}{\nabla} F(x, t)| \ll \|\nabla F(x, t)\|$$

com $(x, t) \rightarrow L$, ou seja,

$$|g(x)| \ll \|\nabla F(x, t)\|$$

com $(x, t) \rightarrow L$. Assim, para provar que F é topologicamente trivial precisamos provar apenas que

$$|g(x)| \ll \|\nabla F(x, t)\|$$

para $(x, t) \rightarrow (x_0, t_0)$, onde $g(x_0) = f(x_0) = 0$ e $x_0 \neq 0$. Mas, isso segue do fato de que, por hipótese, $\overset{x}{\nabla} F(x_0, t_0) \neq 0$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] ATIYAH, M. F.; MACDONALD, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*. Massachusetts: Addison-Wesley Reading, 1969.
- [2] COSTE, M. *An Introduction to o-minimal Geometry*. Institut de Recherche Mathématique de Rennes, 1999.
- [3] HAMM, H. *Lokale topologische Eigenschaften komplexer Raume*. Math. Ann. 191, 1971, 235-252.
- [4] HATCHER, A. *Algebraic topology*. Cambridge university press, 2002.
- [5] HIRONAKA, H. *Subanalytics sets*. Number Theory in Honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973.
- [6] KUNZ, E. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*. Boston: Birkhäuser, 1985.
- [7] KUO, C.T. *On C^0 -sufficiency of jets of potencial function*.
- [8] LÊ, D. T.; P. RAMANUJAM *The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type*. Amer. J. Math. 98, 1976, 67–78.
- [9] LÊ, D. T.; SAITO, K. *La constance du nombre de Milnor donne des bonnes stratifications*. C. R. Acad. Sci. Paris SeUr, 1973, p. 793–795.
- [10] LÊ, D. T. *Notes on non-isolates singularities*. Université de Aix-Marseille.
- [11] ——— *Topologie des singularités des hypersurfaces complexes*. Astérisque, 1973, p. 171-182
- [12] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. New York: Springer, 2013.
- [13] LIMA, E. L. *Variedades Diferenciáveis*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011.

- [14] LOJASIEWICZ, S. *On semi-analytic and subanalytic geometry*. Panoramas of mathematics. Banach center publications. Warszawa, 1995.
- [15] ————— *Ensembles semi-analytiques*, . IHES, 1965.
- [16] MARTINS, J. C. C.; FÁVARO, L. A. *Sobre a C^i -suficiência em $J^r(n, p)$ ($i \geq 1$)*. Métrica, UNESP, nº 13, 1981.
- [17] MELO, W. *Topologia das Variedades*. IMPA, 2008.
- [18] MILNOR, J. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Princeton: Addison-Wesley Reading, 1968.
- [19] MUNKRES, J. R. *Topología*. Madrid: Pearson educación, 2002.
- [20] POLLACK, A.; GUILLEMIN, V. *Differential Topology*. Englewood: Prentice-Hall, 1974.
- [21] PARUSINSKI, A. *Topological Triviality of μ -Constant Deformations of Type $f(x) + tg(x)$* . London: Bull London Math, 1998.
- [22] SILVA, C. S. M. *Teorema da Fibração de Milnor-Lê*. Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação). Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.
- [23] TESSIER, B. *Introduction to equisingularity problems*. A.M.S. Algebraic Geometry Symposium, Arcata 1974, Providence, Rhode Island, 1975, p. 593-632.
- [24] TOMAZELLA, J. N. *O Número de Milnor*. Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação). ICMC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1992.