Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Módulos Cohen-Macaulay Maximais sobre anéis de Gorenstein e Sequências de Bourbaki

Aiury Silva Azerêdo

João Pessoa – PB
Março de 2021

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Módulos Cohen-Macaulay Maximais sobre anéis de Gorenstein e Sequências de Bourbaki

por

Aiury Silva Azerêdo

sob a orientação do

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

João Pessoa – PB
Março de 2021

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A993m Azerêdo, Aiury Silva.
Módulos Cohen-Macaulay maximais sobre anéis de Gorenstein e sequências de Bourbaki / Aiury Silva Azerêdo. - João Pessoa, 2021.
64 f.

Orientação: Cleto Brasileiro Miranda Neto.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Álgebra. 2. Módulos Cohen-Macaulay Maximais. 3. Sequências de Bourbaki. 4. Linkage algébrico. I. Miranda Neto, Cleto Brasileiro. II. Título.

UFPB/BC CDU 512(043)

Elaborado por Gracilene Barbosa Figueiredo - CRB-15/794

Módulos Cohen-Macaulay Maximais sobre anéis de Gorenstein e Sequências de Bourbaki

por

Aiury Silva Azerêdo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Álgebra.

Aprovada em 15 de março de 2021.

Banca Examinadora:
Cleto Brasileiro Miranda Neto Cleto Brasileiro Miranda Neto
Ricardo Burity Croccia Macedo Ricardo Burity C. Macedo
Víctor Hugo Jorge Perez

João Pessoa – PB
Março de 2021

A todos.

Agradecimentos

À minha mãe.

À minha avó.

A Leiliane e Ted.

Ao Professor Cleto Brasileiro, por ter aceitado ser meu orientador e por fazer de tudo para que eu não perdesse as oportunidades dadas a mim. Não tenho palavras. Ao professor Ricardo Burity e Victor Hugo, por participarem da banca, e a todos os outros professores do departamento que contribuíram com minha formação.

Agradeço em especial ao professor Naéliton, que me chamou para conhecer a Álgebra. Deixo meus sinceros agradecimentos aos seus alunos Rafael Holanda e Thiago Fiel, também.

A André Dósea, meu irmão de orientação, que ajudou nos meu primeiros passos na Álgebra Comutativa com sua dissertação fenomenal e disponibilizou seu tempo para tirar muitas dúvidas minhas.

A todos os meus colegas da graduação e Mestrado: Raoni, Angélica, Raiza, Marcos Gabriel, Julian, Marcelo, Geovane, Lázaro, Fábio, Cláudia, Carlos, Zé Carlos, Renato, Ranieri e Felipe.

Aos meus amigos.

A CAPES e CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo expor resultados publicados no artigo clássico de Jürgen Herzog e Michael Kühl, *Maximal Cohen-Macaulay Modules over Gorenstein Rings and Bourbaki Sequences*, publicado em 1987. Concentraremos nossa atenção em módulos Cohen-Macaulay maximais sobre um domínio Gorenstein, apresentaremos fatos sobre os mesmos e também abordamos o caso específico em que o anel base é uma hipersuperfície. Por fim, demonstramos o resultado principal, que conecta a noção de sequências de Bourbaki com o conceito de linkage algébrico.

Palavras-chave: Módulos Cohen-Macaulay maximais; Sequências de Bourbaki; Linkage algébrico.

Abstract

The purpose of this work is to investigate some results due to Jürgen Herzog and Michael Kühl, published in 1987 in their classic paper *Maximal Cohen-Macaulay Modules over Gorenstein Rings and Bourbaki-Sequences*. We concentrate our attention on maximal Cohen-Macaulay modules over a local Gorenstein domain, prove general facts about it and we also explore the case when the base ring is a hypersurface. Finally, we present the main result, which connects the notion of Bourbaki-Sequences to the algebraic linkage concept.

Keywords: Maximal Cohen-Macaulay Modules; Bourbaki-Sequences; Algebraic linkage.

Contents

Notações

Neste trabalho R denota, à menos de menção contrária, um anel comutativo e com identidade. A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathrm{ht}(I)$ denota a altura do ideal I;

- $\mu_R(M)$ denota o número mínimo de geradores de um R-módulo M;

- $\dim(R)$ denota a dimensão de Krull de R;

- $\ell(M)$ denota o comprimento de um R-módulo;

- $\dim_K(V)$ denota a dimensão do K-espaço vetorial V;

- $\mathrm{Spec}(R)$ denota o conjunto dos ideais primos de R.;

- $\mathrm{Ass}(M)$ denota o conjunto dos ideais primos associados do A-módulo M;

- $e(R)$ denota a multiplicidade de R;

- Se $\{e_1, ..., e_r\}$ é uma base de um R-módulo livre F, denotaremos por $\{e_1^*, ..., e_r^*\}$ sua base dual;

- $\square$ denota o final de uma demonstração;

Introdução

Este trabalho tem por objetivo apresentar resultados obtidos por Jürgen Herzog e Michael Kühl, no seu clássico artigo *Maximal Cohen-Macaulay Modules over Gorenstein Rings and Bourbaki Sequences*, publicado em 1987.

A dissertação está dividida em quatro capítulos, mais um Apêndice que inclui um ferramental da Álgebra Homológica, alguns fatos sobre o grupo das classes dos divisores e uma brevíssima discussão sobre o complexo de Koszul, ambos os assuntos necessários no decorrer do texto.

Reservamos o primeiro capítulo para oferecer um breve panorama dos pré-requisitos que serão necessários no decorrer do trabalho. A maioria dos conceitos apresentados diz respeito ao estudo da Álgebra Comutativa, especialmente de anéis e módulos Cohen-Macaulay. Baseamos as definições e resultados no clássico livro *Cohen-Macaulay rings*, de Bruns-Herzog, assim como na dissertação de mestrado de André Dósea, *Uma jornada aos anéis de Gorenstein*. Omitimos as provas e deixamos a referência em cada enunciado. Definições e resultados referentes a um primeiro curso de Álgebra Comutativa serão assumidos como verdade.

A partir do Capítulo 2, trabalharemos principalmente com módulos finitos sobre um domínio base Gorenstein e local R . Trabalhar sobre anéis deste tipo traz muitas vantagens técnicas, especialmente quando aliados a módulos Cohen-Macaulay maximais (MCM do inglês *maximal Cohen-Macaulay*). Estes últimos são reflexivos sobre R e seus duais continuam sendo MCM. Mais ainda, o funtor $M \rightsquigarrow M^* := \operatorname{Hom}_R(M, R)$, que associa um módulo ao seu dual, é exato na subcategoria completa dos módulos MCM.

É de posse desse bônus técnico que podemos e começamos abordar resultados presentes em [12]. Na primeira seção, derivamos um apanhado de fatos e propriedades de módulos MCM, com o intuito de provar uma desigualdade que relaciona o posto do módulo, seu posto livre e número mínimo de geradores, assim como a multiplicidade do anel base. Também reservamos a nossa atencão para o caso específico em que R é uma hipersuperfície, mostrando que módulos MCM sobre essa classe de anéis admitem resolução periódica, desde que não possuam somando direto livre.

Ainda no mesmo capítulo, introduzimos a noção do que [12] chamou de sequência de Bourbaki (do inglês, *Bourbaki-Sequence*), inspirado em um resultado mostrado em [5]: todo módulo finito livre de torção M sobre um domínio normal R admite um submódulo livre F tal que o quociente M/F seja isomorfo a um ideal I de R. É a sequência $0 \to F \to M \to I \to 0$ que norteia nossa definição de sequência de Bourbaki. O principal objetivo é garantir sua existência, sob certas condições, para módulos MCM e ideais de grade 2 dados.

No Capítulo 3, definimos a noção de *linkage* de dois ideais por uma sequência regular. Mostramos que um ideal I está inserido em uma sequência de Bourbaki com um módulo M em seu centro, então qualquer ideal J na mesma classe de linkage de I tem primeira sizígia estavelmente isomorfa a M^*. Isto é uma dica na direção do que configura nosso principal resultado: duas sequências de Bourbaki cujos módulos centrais são estavelmente isomorfos têm necessariamente ideais ligados por um número par de links.

Os resultados de existência de sequências de Bourbaki do Capítulo 2 juntamente com o teorema principal mencionado acima culminam em um enunciado que resume bem o que tudo o que foi feito: sobre um domínio local Gorenstein, existe uma bijeção entre as classes de linkage par de ideais Cohen-Macaulay de grade 2 e as classes de isomorfismo estável de módulos Cohen-Macaulay maximais.

Por fim, mostramos como os ideais de Bourbaki podem influenciar invariantes do módulo central, exibindo um teorema que determina a paridade do número mínimo de geradores de um módulo MCM orientável sobre um anel de hipersuperfície.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Sequências Regulares e Módulos Cohen-Macaulay

Definição 1.1. Seja M um R-módulo. Um elemento $x \in R$ é dito M**-regular** se a multiplicação $M \xrightarrow{x} M$ for injetiva. Uma sequência $\mathbf{x} = x_1, ..., x_n \in R$ é dita uma M**-sequência** ou uma **sequência** M**-regular** se valem as condições abaixo:

(i) x_1 é M-regular e x_i é $M/(x_1, ..., x_{i-1})M$-regular para cada $i = 2, ..., n$.

(ii) $\mathbf{x}M \neq M$.

Quando $M = R$, dizemos simplesmente que $\mathbf{x}$ é uma sequência regular. O inteiro positivo n é o *comprimento* da sequência $\mathbf{x}$. Dizemos que $\mathbf{x}$ é maximal se não existe $y \in R$ tal que $x_1, ..., x_n, y$ seja M-regular. Mais geralmente, se $\mathbf{x} \subset I$, onde I é um ideal de R, dizemos que $\mathbf{x}$ é maximal em I se não existe $y \in I \backslash \mathbf{x}$ tal que $x_1, ..., x_n, y$ seja M-regular.

Exemplo. Seja $R = k[X_1, ..., X_n]$, com k corpo. Então $X_1, ..., X_n$ úma sequência regular. Para $k[X, Y, Z]$, tem-se que $X, Y(1 - X), Z(1 - X)$ é regular.

Verifica-se facilmente que uma sequência M-regular $\mathbf{x} \subset I$ induz uma cadeia estrita $(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (x_1, ..., x_n)$. Particularmente, no caso em que R é noetheriano, toda sequência M-regular em I pode ser estendida a uma maximal e, mais ainda, toda sequência maximal em I possui o mesmo comprimento, desde que M seja finitamente gerado. Isso é garantido pelo seguinte resultado devido a Rees:

Proposição 1.2. Sejam R um anel noetheriano, $I \subset R$ um ideal e M um R-módulo finitamente gerado. Se $\mathbf{x}= x_1, ..., x_n$ é um M-sequência maximal em I, então

$$n = \min\{i \mid \operatorname{Ext}^i(R/I, M) \neq 0\}.$$

Em particular, todas as sequências M-regulares maximais em I possuem o mesmo comprimento.

Demonstração. Vide [6], Theorem 1.2.5. $\square$

Definição 1.3. Sejam R um anel noetheriano, $I \subset R$ um ideal e M um R-módulo finitamente gerado. Definimos o número

$$\operatorname{grade}(I, M) = \min\{i \mid \operatorname{Ext}^i(R/I, M) \neq 0\},$$

o qual é o comprimento comum das M-sequências maximais em I. Quando R é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$, o número $\operatorname{grade}(\mathfrak{m}, M)$ ganha a notação clássica $\operatorname{depth} M$ e é chamado de **profundidade** de M. Nesse caso, escrevendo $k = R/\mathfrak{m}$, é importante reescrever a definição acima:

$$\operatorname{depth} M := \operatorname{grade}(\mathfrak{m}, M) = \min\{i \mid \operatorname{Ext}^i(k, M) \neq 0\}.$$

Proposição 1.4. Sejam R um anel noetheriano, $I \subset R$ um ideal e M um R módulo finitamente gerado.

(a) Se $\mathbf{x} = x_1, ..., x_n$ é uma M-sequência em I, então

$$\operatorname{grade}(I, M/\mathbf{x}M) = \operatorname{grade}(I, M) - n;$$

(b) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ uma sequência exata de R-módulos finitamente gerados. Então:

(i) $\operatorname{grade}(I, M') \geq \min\{\operatorname{grade}(I, M), \operatorname{grade}(I, M'') + 1\}$;

(ii) $\operatorname{grade}(I, M) \geq \min\{\operatorname{grade}(I, M'), \operatorname{grade}(I, M'')\}$;

(iii) $\operatorname{grade}(I, M'') \geq \min\{\operatorname{grade}(I, M), \operatorname{grade}(I, M') - 1\}$.

Demonstração. Vide [6], Proposition 1.2.9. $\square$

Relembremos o conceito de dimensão de Krull de um módulo.

Definição 1.5. Seja M um R-módulo. A **dimensão de Krull** de M é o maior comprimento das cadeias de ideais primos em $\operatorname{Supp}(M) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$ e é denotada por $\dim M$.

Definição 1.6. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado não-nulo. Uma sequência $x_1, ..., x_d \subset \mathfrak{m}$ é dito um **sistema de parâmetros** para M se

$$\dim\left(\frac{M}{(x_1, ..., x_d)M}\right) = 0, \text{ com } d \text{ menor possível.}$$

Proposição 1.7. No contexto da definição anterior, tem-se que todo sistema de parâmetros tem $\dim M$ elementos.

Proposição 1.8. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado não-nulo. Então toda M-sequência faz parte de um sistema de parâmetros de M. Em particular, $\operatorname{depth} M \leq \dim M$.

Demonstração. Veja [6], Proposition 1.2.12. □

Este último resultado motiva a clássica definição a seguir:

Definição 1.9. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Dizemos que M é **Cohen-Macaulay** (CM) se $M = 0$ ou $\operatorname{depth} M = \dim M$. Um anel noetheriano local R é dito **anel Cohen Macaulay** se for Cohen-Macaulay como R-módulo. Se $I \subset R$ é um ideal e R/I é Cohen-Macaulay, diremos que I é um **ideal Cohen-Macaulay**.

Exemplo. Todo corpo é um anel Cohen-Macaulay. O anel dos inteiros $\mathbb{Z}$ (mais geralmente, qualquer domínio noetheriano de dimensão 1) é Cohen-Macaulay. Um anel quociente do tipo

$$\frac{k[X_1, ..., X_n]}{\mathfrak{p}},$$

onde k é um corpo, é um anel Cohen-Macaulay para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de altura $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \in \{0, 1, n-1, n\}$.

A proposição a seguir reúne algumas propriedades válidas no ambiente Cohen-Macaulay. Apenas algumas serão utilizadas no decorrer deste trabalho:

Proposição 1.10. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e M um R-módulo Cohen-Macaulay não-nulo. Então:

(a) $\dim R/\mathfrak{p} = \operatorname{depth} M$, para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$;

(c) $\mathbf{x} = x_1, ..., x_n$ é um M-sequência se, e somente se, $\dim M/\mathbf{x}M = \dim M - n$;

(d) $\mathbf{x} = x_1, ..., x_n$ é um M-sequência se, e somente se, $\mathbf{x}$ faz parte de um sistema de parâmetros de M.

Demonstração. Veja [6], Theorem 2.1.2. □

Corolário 1.11. Seja R um anel Cohen-Macaulay. Então

$$\operatorname{grade} I := \operatorname{grade}(I, R) = \operatorname{ht} I,$$

para todo ideal $I \subset R$. Além disso, se R for local, também vale

$$\operatorname{ht} I + \dim R/I = \dim R$$

para todo ideal $I \subset R$.

Demonstração. Veja [6], Corollary 2.1.4. $\square$

Vimos que, em geral, $\operatorname{depth} M \leq \dim M$. Como $\dim M \leq \dim R$, é importante destacar o caso Cohen-Macaulay em que a dimensão atinge o maior valor possível.

Definição 1.12. Seja R um anel local. Dizemos que um R-módulo M é **Cohen-Macaulay maximal** (MCM, do inglês *maximal Cohen-Macaulay*) se for Cohen-Macaulay e $\dim M = \dim R$.

Veremos que módulos MCM sobre uma classe específica de anéis que definiremos a seguir, os chamados anéis de Gorenstein, possuem ótimas propriedades e serão protagonistas no decorrer do presente trabalho.

1.2 Anéis de Gorenstein e o Módulo Canônico

Seja R um anel. Já definimos a noção de resolução injetiva deletada de um R-módulo M (veja Apêndice, 5.16). Utilizando a mesma notação, se $\mathcal{I}^\bullet$ é uma resolução injetiva de M, então $H^0(\mathcal{I}^\bullet) = \ker\{I^0 \to I^1\} \simeq M$. Assim, pode-se escrever a sequência exata longa

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^n \longrightarrow I^{n+1} \longrightarrow \cdots ,$$

a qual é chamada de uma *resolução injetiva* para M. Dizemos que $\mathcal{I}^\bullet$ é finita se existe $n \geq 0$ tal que $I^n \neq 0$ e $I^i = 0$ para $i > n$. O número n é chamado de comprimento da resolução $\mathcal{I}^\bullet$ e o menor dentre estes números é chamado de *dimensão injetiva* de M e denotado por $\operatorname{inj\,dim}_R M$. Nem todo módulo admite uma resolução injetiva finita. Nesses casos, escrevemos $\operatorname{inj\,dim}_R M = \infty$. Obviamente, M é injetivo se, e somente se, $\operatorname{inj\,dim}_R M = 0$.

Proposição 1.13. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Se $\operatorname{inj\,dim}_R M < \infty$, então

$$\dim M \leq \operatorname{inj\,dim}_R M = \operatorname{depth} R.$$

Definição 1.14. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local. Dizemos que R é um **anel de Gorenstein** se $\operatorname{inj\,dim} R < \infty$. Quando R não é local, ele é dito ser um anel de Gorenstein se $\operatorname{inj\,dim} R_{\mathfrak{m}} < \infty$, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R.

Exemplo. Anéis de Gorenstein incluem todos anéis regulares (vide seção seguinte), em particular todos os corpos e anéis de polinômios. Para k corpo, os anéis $k[X]/(X^2)$ e $k[X, Y, Z]/(X^2, Y^2, XZ, YZ, Z^2 - XY)$ configuram outros exemplos de anéis de Gorenstein.

Proposição 1.15. Seja R um anel noetheriano. Se R é um anel de Gorenstein e $\mathbf{x}$ é um sequência regular, então $R/(\mathbf{x})$ é um anel de Gorenstein. Quando R é local, vale a recíproca.

Demonstração. Vide [8], Proposição 3.3.2, (b). □

Se R é um anel de Gorenstein, a Proposição 1.13 garante $\dim R \leq \operatorname{depth} R$. Uma vez que a desigualdade contrária é sempre válida, concluímos que $\operatorname{depth} R = \dim R$, mostrando que ser Cohen-Macaulay é uma condição necessária para que um anel seja Gorenstein. Exibimos agora uma condição suficiente:

Definição 1.16. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado com profundidade t. O **tipo** de M é o número

$$r(M) = \dim_k \operatorname{Ext}^t(k, M).$$

Proposição 1.17. Sejam R um anel noetheriano local. Para que R seja um anel de Gorenstein, é necessário e suficiente que R seja um anel Cohen-Macaulay e $r(R) = 1$.

Demonstração. Vide [8], Corolário 3.3.7. □

Os resultados a seguir, que escolhemos demonstrar, deixam claro as vantagens de se trabalhar no contexto Gorenstein com módulos Cohen-Macaulay maximais.

Proposição 1.18. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel de Gorenstein com dimensão n e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. Então $\operatorname{depth} M > 0$ se, e somente se, $\operatorname{Ext}^n(M, R) = 0$.

Demonstração. Como R é Gorenstein, $\operatorname{inj\,dim} R < \infty$ e $\dim \operatorname{inj}\ R = \operatorname{depth} R = n$. Suponha que $\operatorname{depth} M > 0$ e tome $x \in \mathfrak{m}$ elemento M-regular. Da sequência exata $0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/xM \to 0$, obtemos a sequência exata

$$\operatorname{Ext}^n(M/xM, R) \longrightarrow \operatorname{Ext}^n(M, R) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}^n(M, R) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{n+1}(M/xM, R).$$

De $\operatorname{inj\,dim} R = n$, temos que $\operatorname{Ext}^{n+1}(M/xM, R) = 0$. Segue que a multiplicação por x é sobrejetiva e por Nakayama, $\operatorname{Ext}^n(M, R) = 0$.

Reciprocamente, suponha que $\operatorname{depth} M = 0$. Nesse caso, $\mathfrak{m}$ não possui elemento M-regular, de modo que $\mathfrak{m} \subset \mathcal{Z}(M) = \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}(M)} \mathfrak{p}$. Pelo Lema da Esquiva, existe $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ tal que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{m}$ é maximal, temos que $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(M)$. Assim, conseguimos uma sequência exata $0 \to R/\mathfrak{m} \to M \to C \to 0$ e, a partir desta, temos

$$\operatorname{Ext}^n(M, R) \longrightarrow \operatorname{Ext}^n(R/\mathfrak{m}, R) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{n+1}(C, R) = 0.$$

A igualdade $\operatorname{depth} R = n$ nos garante $\operatorname{Ext}^n(R/\mathfrak{m}, R) \neq 0$ e a sobrejetividade do mapa $\operatorname{Ext}^n(M, R) \to \operatorname{Ext}^n(R/\mathfrak{m}, R)$ fornece $\operatorname{Ext}^n(M, R) \neq 0$, como queríamos. □

Corolário 1.19. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel de Gorenstein de dimensão n e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. Então

$$\operatorname{depth} M = \min\{i \mid \operatorname{Ext}^{n-i}(M, R) \neq 0\}.$$

Demonstração. Faremos indução em $d = \operatorname{depth} M$. O caso $d = 0$ decorre imediatamente de 1.18. Suponha que $d > 0$ e que o resultado vale para $d - 1$. Tome $x \in \mathfrak{m}$ elemento M-regular. Mais uma vez, temos a sequência exata

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}^{n-d}(M, R) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{n-d+1}(M/xM, R) &\longrightarrow \operatorname{Ext}^{n-d+1}(M, R) \\ &\xrightarrow{x} \operatorname{Ext}^{n-d+1}(M, R) \\ &\longrightarrow \operatorname{Ext}^{n-d+2}(M/xM, R). \end{aligned}$$

Por 1.4,(a), $\operatorname{depth}(M/xM) = d-1$ e $\operatorname{Ext}^{n-d+2}(M/xM, R) = 0$ da hipótese de indução. A multiplicação por x é então sobrejetiva e por Nakayama, $\operatorname{Ext}^{n-d+1}(M, R) = 0$. Por outro lado, a hipótese de indução também nos garante que $\operatorname{Ext}^{n-d+1}(M/xM, R) \neq 0$ e, assim, $\operatorname{Ext}^{n-d}(M, R) \neq 0$. Resta mostrar que d é o menor valor que satisfaz essa propriedade. De fato, se $i < d$, tem-se $\operatorname{Ext}^{n-i+1}(M/xM, R) = 0$. Logo

$$\operatorname{Ext}^{n-i}(M, R) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}^{n-i}(M, R) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{n-i+1}(M/xM, R) = 0.$$

Por Nakayama, $\operatorname{Ext}^{n-i}(M, R) = 0$ e o resultado segue. □

Corolário 1.20. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel de Gorenstein de dimensão n e M um R-módulo finitamente gerado de profundidade d. Então M é Cohen-Macaulay maximal se, e somente se, $\operatorname{Ext}^i(M, R) = 0$, para todo $i > 0$.

Demonstração. Suponha que M seja MCM, isto é, $n = d$. Por 1.19, n é o menor valor i

tal que $\operatorname{Ext}^{n-i}(M,R) \neq 0$. Assim $\operatorname{Ext}^0(M,R) \neq 0$ e $\operatorname{Ext}^1(M,R) = \cdots = \operatorname{Ext}^n(M,R) = 0$. Por outro lado, $\operatorname{inj\,dim}\ R = \operatorname{depth} R = n$ e, portanto, $\operatorname{Ext}^i(M,R) = 0$ para $i > n$.

Reciprocamente, suponha que $\operatorname{Ext}^i(M,R) = 0$ sempre que $i > 0$. Temos por 1.19 que d satisfaz $\operatorname{Ext}^{n-d}(M,R) \neq 0$. Devemos ter $n - d = 0$ ou contradiríamos a hipótese. Logo $n = d$ e M é MCM. $\square$

Corolário 1.21. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel de Gorenstein e $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ uma sequência exata de R-módulos, com M'' Cohen-Macaulay maximal. Então a sequência dual $0 \to M''^* \to M^* \to M'^* \to 0$ é exata.

Demonstração. Aplique 5.21 com $N = R$ à sequência dada para obter

$$0 \to M''^* \to M^* \to M'^* \to \operatorname{Ext}^1_R(M'', R)$$

Por 1.20, $\operatorname{Ext}^1_R(M'', R) = 0$ e o resultado segue. $\square$

Corolário 1.22. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel de Gorenstein de dimensão n e $I \subset R$ um ideal Cohen-Macaulay de altura $r \geq 1$. Então $\operatorname{Ext}^i(I,R) = 0$, para todo $i \geq r$.

Demonstração. Como $\operatorname{Ext}^i(I,R) \simeq \operatorname{Ext}^{i+1}(R/I,R)$, para todo $i \geq 1$, basta mostrar que $\operatorname{Ext}^j(R/I,R) = 0$ para $j > r$. Como I é Cohen-Macaulay, por definição R/I é um anel Cohen-Macaulay com profundidade (e dimensão) dada por $\dim R - \operatorname{ht} I = n - r$. Por 1.19, $n-r$ é o menor valor i satisfazendo $\operatorname{Ext}^{n-i}(R/I,R) \neq 0$, ou, equivalentemente, $n - (n-r) = r$ é o maior valor tal que $\operatorname{Ext}^i(R/I,R) \neq 0$. Logo $\operatorname{Ext}^j(R/I,R) = 0$, para $j > r$. $\square$

Definição 1.23. Seja R um anel Cohen-Macaulay local. Um R-módulo Cohen-Macaulay maximal de dimensão injetiva finita e tipo 1 é chamado de um **módulo canônico** de R.

Proposição 1.24. Sejam R um anel Cohen-Macaulay local, C e C' módulos canônicos de R. Então $C \simeq C'$.

Demonstração. Ver [8], Teorema 3.4.6. $\square$

Portanto, quando um anel Cohen-Macaulay local admite um módulo canônico, este é único e o denotaremos por ω_R. Em face à 1.17, um anel é de Gorenstein R se, e somente se, admite um módulo canônico e $\omega_R \simeq R$.

Proposição 1.25. Seja R um anel local Cohen-Macaulay com módulo canônico ω_R e M um módulo Cohen-Macaulay maximal. Então o mapa canônico

$$M \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(M, \omega_R), \omega_R)$$

é um isomorfismo. Em particular, quando R é um anel de Gorenstein local, M é um R-módulo reflexivo no sentido usual.

Demonstração. [8], Teorema 3.4.17. □

Proposição 1.26. Seja $\varphi : R \to S$ um homomorfismo de anéis locais Cohen-Macaulay, de modo que S seja finitamente gerado como R-módulo. Se ω_R existe, então ω_S existe e é isomorfo a $\operatorname{Ext}^t(S, \omega_R)$, com $t = \dim R - \dim S$.

Demonstação. [8], Proposição 3.4.10. □

Proposição 1.27. Sejam R um anel local Cohen-Macaulay com módulo canônico ω_R e M um R-módulo Cohen-Macaulay de dimensão t. Então $r(M) = \mu(\operatorname{Ext}_R^{d-t}(M, \omega_R))$.

Demonstração. [6], Proposition 3.3.11. □

Corolário 1.28. Se $I \subset R$ é um ideal Cohen-Macaulay de um anel de Gorenstein local, então $\omega_{R/I} \simeq \operatorname{Ext}_R^{\operatorname{ht} I}(R/I, R)$ e $r(R/I) = \mu(\operatorname{Ext}_R^{\operatorname{ht} I}(R/I, R))$.

1.3 Resoluções projetivas minimais e a fórmula de Auslander-Buchsbaum

Seja R um anel. Já definimos a noção de resolução projetiva deletada (e também livre) de um R-módulo M (veja Apêndice, 5.15). Utilizando a mesma notação, se $\mathcal{P}_\bullet$ é uma resolução projetiva de M, então $H_0(\mathcal{P}_\bullet) = \operatorname{Coker}\{P_1 \to P_0\} \simeq M$. Assim, pode-se escrever a sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

a qual é chamada de uma **resolução projetiva** para M. Escreva $P_{-1} := M$. Para cada $i \geq 0$, o módulo $K_i = \ker\{P_i \to P_{i-1}\}$ é dito o *i-ésimo módulo de sizígias* de M com relação a resolução $\mathcal{P}_\bullet$. Dizemos que $\mathcal{P}_\bullet$ é finita se existe $n \geq 0$ tal que $P_n \neq 0$ e $P_i = 0$ para $i > n$. O número n é chamado de comprimento da resolução $\mathcal{P}_\bullet$ e o menor dentre estes números é chamado de **dimensão projetiva** de M e denotado por $\operatorname{proj\,dim}_R M$. Como esperado, nem todo módulo admite uma resolução projetiva finita. Nesses casos, escrevemos $\operatorname{proj\,dim}_R M = \infty$. Obviamente, M é projetivo se, e somente se, $\operatorname{proj\,dim}_R M = 0$.

Todo módulo admite uma resolução projetiva. Na verdade, todo módulo M admite uma resolução livre e portanto projetiva. O processo é bem simples e conhecido: tome uma sobrejeção $F_0 \to M$, com F_0 livre. O núcleo K_0 deste mapa pode ser sobrejetado por um livre F_1 de forma análoga. A composição $F_1 \to K_0 \to F_0$ torna a sequência $F_1 \to F_0 \to M \to 0$ exata e assim fazemos indução para obter

$$\cdots \to F_{n+1} \to F_n \to \cdots \to F_0 \to M \to 0,$$

onde $K_i = \ker\{F_i \to F_{i-1}\}$ em cada passo é o i-ésimo módulo de sizígias de M com relação a resolução livre construída.

Quando R é noetheriano e M é um R-módulo finitamente gerado, pode-se escolher $F_i \simeq R^{n_i}$, com $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, para todo $i \geq 0$. Nosso caso mais bem comportado ocorre quando R é um anel local: se $\mu_R(-)$ denota o *número mínimo de geradores* de um módulo, podemos escolher o menor n_i possível em cada passo, a saber, $n_i = \mu(K_i)$. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 1.29. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Uma resolução livre de M

$$\cdots \longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

é dita **minimal** se $\mu(F_i) = \mu(\operatorname{Im}\{F_i \to F_{i-1}\})$, para todo $i \geq 0$.

Pela nossa discussão acima, uma resolução minimal sempre existe no caso local. A minimalidade de uma resolução livre pode ser caracterizada de outras formas úteis:

Proposição 1.30. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel noetheriano local com corpo residual k, M um R-módulo finitamente gerado e

$$\mathcal{F}_\bullet = \cdots \longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma resolução livre de M. São equivalentes:

(a) $\mathcal{F}_\bullet$ é minimal;

(b) $\operatorname{Im}\{F_i \to F_{i-1}\} \subset \mathfrak{m}F_{i-1}$;

(c) $\mu(F_i) = \dim_k \operatorname{Tor}_i^R(M, k)$.

Demonstração. Vide [8], Teorema 1.3.4. $\square$

Resoluções projetivas isomorfas de M, digamos $\mathcal{P}_\bullet$ e $\mathcal{P}'_\bullet$, necessariamente determinam os mesmos módulos de sizígias. De fato, no diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K'_0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

o mapa induzido $K_0 \to K_0'$ é um isomorfismo em decorrência do Lema da Serpente. Um argumento indutivo mostra que as demais sizígias são isomorfas. Em particular, as sizígias K_{i-1} obtidas a partir de resoluções livres minimais de M são únicas a menos de isomorfismo e serão denotadas por $\operatorname{syz}_i(M)$, para cada $i \geq 0$ (escreva $\operatorname{syz}_0(M) := M$). Note que $\operatorname{syz}_{i+1}(M) = \operatorname{syz}_1(\operatorname{syz}_i(M))$. Os números $\beta_i(M) := \mu(\operatorname{syz}_i(M))$ são chamados de **números de Betti** do módulo M.

Proposição 1.31. Sejam R um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Se F é um R-módulo livre finitamente gerado e $F \to M$ é um mapa sobrejetivo, então $\ker\{F \to M\} \simeq \operatorname{syz}_1(M) \oplus G$, onde G é um submódulo livre de F. Em particular, se $\cdots \to F_{n+1} \to F_n \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$ é uma resolução livre de M, com cada F_i finitamente gerado, então para cada $i \geq 0$, existe um submódulo livre G_i do módulo de sizígias K_i tal que $K_i \simeq \operatorname{syz}_{i+1}(M) \oplus G_i$.

Demonstração. Veja [17], Theorem 26.1 e argumente por indução para mostrar a segunda afirmação. □

Outra vantagem de trabalhar no ambiente local é ter em mãos a fórmula de Auslander-Buchsbaum, que relaciona a dimensão projetiva de um módulo com a sua profundidade.

Teorema 1.32 (Teorema de Auslander-Buchsbaum)**.** *Seja R um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Se* $\operatorname{proj\,dim}_R M < \infty$*, então*

$$\operatorname{proj\,dim}_R M + \operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R.$$

Demonstração. Veja [8], Teorema 1.3.7. □

Como nem todo módulo possui uma dimensão projetiva finita, a fórmula de Auslander-Buchsbaum não pode ser usada em geral. No entanto, existem ambientes onde ela sempre vem à mão.

1.4 Anéis Regulares

Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local. Lembre que o número mínimo de geradores de $\mathfrak{m}$, visto como R-módulo, pode ser expresso por $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Definimos este número como sendo a **dimensão de imersão** de R, denotada por $\operatorname{emb\,dim} R$. Em geral, temos $\dim R \leq \operatorname{emb\,dim} R$, pelo teorema do ideal de Krull.

Definição 1.33. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local. Dizemos que R é um anel **regular local** se $\operatorname{emb\,dim} R = \dim R$.

Exemplo. Os exemplos mais comuns de anéis regulares locais são os corpos e os anéis de polinômios localizados em maximais. Se k e um corpo, o anel das potências formais $k[[X]] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n + \cdots \mid a_i \in k, \ \forall i\}$ é um anel regular local.

Como de costume, é possível caracterizar anéis regulares de outra forma:

Teorema 1.34 (Auslander-Buchsbaum-Serre)**.** *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel noetheriano local. Então R é regular se, e somente se,*

$$\operatorname{proj\,dim}_R k = \sup\{\operatorname{proj\,dim}_R M \mid M \ R\text{-módulo}\} < \infty.$$

Demonstração. Ver [8], Teoremas 2.2.10 e 2.2.12. □

Em outras palavras, se R é um anel regular local, então todo R-módulo tem dimensão projetiva finita; mais que isso, de acordo com o teorema acima, existe uma cota superior para essas dimensões. O supremo indicado acima é usualmente chamado de **dimensão global** de R e concorda com $\operatorname{proj\,dim}_R k$ no caso local.

Anéis regulares locais são anéis de Gorenstein, portanto Cohen-Macaulay. Com efeito, se R é um anel regular local com dimensão global d, tem-se que $\operatorname{Ext}_R^{d+1}(M, R) = 0$, para qualquer R-módulo M. Isto nos diz que $\operatorname{inj\,dim} R \leq d$. Por definição, segue que R é um anel de Gorenstein.

Também em virtude de 1.34, a fórmula de Auslander-Buchsbaum sempre pode ser usada quando estivermos estudando módulos sobre anéis locais regulares, uma vez que estes necessariamente possuem dimensão projetiva finita. Um fato interessante ocorre na classe dos módulos MCM:

Corolário 1.35. Seja R um anel noetheriano local. Então R é regular se, e somente se, todo R-módulo MCM é livre.

Demonstração. Se R for regular, então todo R-módulo tem dimensão projetiva finita. Por 1.32, $\operatorname{proj\,dim}_R M = 0$, para todo módulo MCM. Segue que todo MCM é projetivo, o que significa ser livre no caso local. Reciprocamente, $\operatorname{syz}_{\dim R}(k)$ é nulo ou MCM em decorrência de 1.4. Em todo caso, $\operatorname{proj\,dim}_R k < \infty$. □

Observação 1.36. Na verdade, anéis regulares locais pertencem a uma classe mais restrita de anéis de Gorenstein, os chamados **anéis de interseção completa**, aqueles cujo completamento é o quociente de um anel regular por um ideal gerado por uma sequência regular. Decidimos não introduzir suas propriedades aqui, pois foge do objetivo deste trabalho.

Capítulo 2

Módulos MCM e Sequências de Bourbaki

Neste capítulo estaremos interessados no caso em que $(R, \mathfrak{m}, k)$ é um domínio Gorenstein local e os R-módulos são finitamente gerados. Nesse caso, o **anel total de frações** $Q(R)$ de R é na verdade um corpo, de modo que todo R-módulo finitamente gerado M possui **posto**, dado como de costume pela dimensão do $Q(R)$-espaço vetorial $M \otimes_R Q(R)$ e denotado aqui por $\operatorname{rank} M$.

No mesmo contexto citado acima, M possui um número mínimo de geradores $\mu_R(M)$ e um único (a menos de isomorfismo) primeiro módulo de sizígias $\operatorname{syz}_1(M)$ satisfazendo $0 \to \operatorname{syz}_1(M) \to R^{\mu(M)} \to M \to 0$. Para qualquer resolução livre minimal de M, já vimos que o $i{+}1$-ésimo módulo de sizígias de M pode ser definido de forma recursiva como $\operatorname{syz}_{i+1}(M) = \operatorname{syz}_1(\operatorname{syz}_i(M))$. Também convencionamos $\operatorname{syz}_0(M) := M$. Os números $\beta_i(M) = \mu(\operatorname{syz}_i(M))$ são os números de Betti de M.

2.1 Fatos Gerais sobre Módulos MCM

Definição 2.1. Sejam R um anel noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. O **posto livre** de M, o qual denotaremos por $\text{f-rank}\,(M)$, é o posto máximo de um somando direto livre de M. Quando não existe somando direto livre, $\text{f-rank}\,(M) = 0$.

Para o caso local, escreva $D(M) := \operatorname{syz}_1(M)^*$. Temos o nosso primeiro resultado:

Lema 2.2. Sejam R um domínio Gorenstein local e M um R-módulo MCM tal que $\operatorname{rank} M = m$, $\mu(M) = n$ e $\text{f-rank}\,(M) = p$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) Se F é um módulo livre, então $D(M \oplus F) \simeq D(M)$;

(ii) $M \simeq D(D(M)) \oplus R^p$;

(iii) $\operatorname{rank} D(M) = m - n$ e $\mu(D(M)) = n - p$.

Demonstração. (i) Primeiro notemos que vale a afirmação mais geral $D(M \oplus N) \simeq D(M) \oplus D(N)$. De fato, é claro que $\operatorname{syz}_1(M) \oplus \operatorname{syz}_1(N)$ é uma primeira sizígia de $M \oplus N$, sendo nesse caso isomorfa a $\operatorname{syz}_1(M \oplus N)$, pois $\mu(M \oplus N) = \mu(M) + \mu(N)$. Segue, aplicando $\operatorname{Hom}_R(-, R)$, que $D(M \oplus N) \simeq D(M) \oplus D(N)$. O resultado (i) decorre do fato que $D(F) = 0$, pois F é livre.

(ii) Suponhamos primeiro que $\text{f-rank}\,(M) = 0$. Veremos que esse caso é suficiente. Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow \operatorname{syz}_1(M) \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

a qual nos leva a sequência dual

$$0 \longrightarrow M^* \longrightarrow R^n \longrightarrow D(M) \longrightarrow 0, \qquad (\star_1)$$

também exata por 1.21. Por 1.31, $M^* = \operatorname{syz}_1(D(M)) \oplus F$ com F livre. Mas $M \simeq M^{**} \simeq \operatorname{syz}_1(D(M))^* \oplus F$, nos levando a $F = 0$, pois $\text{f-rank}\,(M) = 0$. Então $M^* = \operatorname{syz}_1(D(M))$ e $M \simeq D(D(M))$. Para ver o caso geral, escreva $M \simeq M' \oplus R^p$. Temos por (i) que $D(M) \simeq D(M')$. Mas $\text{f-rank}\, M' = 0$ e concluímos pelo caso anterior que $M' \simeq D(D(M))$. Segue que $M \simeq D(D(M)) \oplus R^p$.

(iii) Lembre que

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank} M^* &= \dim_{Q(R)} \operatorname{Hom}_R(M, R) \otimes_R Q(R) \\
&= \dim_{Q(R)} \operatorname{Hom}_{Q(R)}(M \otimes_R Q(R), Q(R)) \\
&= \dim_{Q(R)} M \otimes_R Q(R) \\
&= \operatorname{rank} M = m.
\end{aligned}$$

A segunda igualdade segue do isomorfismo demonstrado em [20], Lemma 4.85. Aplicando a adividade do posto à sequência ($\star_1$), conseguimos $\operatorname{rank} D(M) = n - m$. Escrevamos $M = M' \oplus R^p$. Como $\text{f-rank}\, M' = 0$, aplique ($\star_1$) a M' para obter que $D(M')$ tem número mínimo de geradores dado por $\mu(M')$, isto é, exatamente $n - p$.

$\square$

Lema 2.3. Sejam R um domínio Gorenstein local e M um R-ḿodulo MCM. Então $\text{f-rank}\,(\operatorname{syz}_i(M)) = 0$, para todo $i \geq 1$.

Demonstração. Mais uma vez, considere a sequência exata $0 \to \mathrm{syz}_1(M) \xrightarrow{i} R^n \xrightarrow{\pi} M \to 0$, com $n = \mu(M)$. Nesse caso, sabemos que $i(\mathrm{syz}_1(M)) \subset \mathfrak{m}R^n$ em virtude de 1.30. Segue por linearidade que $\varphi(i(\mathrm{syz}_1(M))) \subset \mathfrak{m}$, sempre que $\varphi \in (R^n)^*$. Como a sequência $0 \to M^* \to (R^n)^* \to D(M) \to 0$ é exata, para todo $\psi \in D(M)$ deve existir $\varphi \in (R^n)^*$ tal que $\psi = \varphi \circ i$. Assim, para todo $\psi \in D(M)$, $\psi(\mathrm{syz}_1(M)) \subset \mathfrak{m}$. Se fosse $\operatorname{f-rank}(\mathrm{syz}_1(M)) > 0$, R seria somando direto livre de $\mathrm{syz}_1(M)$, nos levando a um mapa sobrejetivo $\mathrm{syz}_1(M) \to R$, com $n \mapsto 1$ para algum $n \in \mathrm{syz}_1(M)$. Esse mapa certamente pertence a $D(M)$, contradizendo o fato de que todo elemento nesse conjunto assume valores em $\mathfrak{m}$. Devemos ter $\operatorname{f-rank}(\mathrm{syz}_1(M)) = 0$. Como $\mathrm{syz}_i(M)$ é definida de forma iterada, o resultado está mostrado. □

Proposição 2.4. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local de dimensão d. Existe um polinômio $P(n)$ de grau d e com coeficientes racionais tal que, para n suficientemente grande, tem-se

$$P(n) = \ell\left(\frac{R}{\mathfrak{m}^n}\right).$$

Demonstração. Ver [14], Theorem 11.1.3. □

Definição 2.5. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local de dimensão d. A **multiplicidade de** R, denotada por $e(R)$, é definida como sendo $d!$ vezes o coeficiente líder de $P(n)$.

Corolário 2.6. Suponha que R seja um domínio Gorenstein de multiplicidade $e(R) = e > 1$ e seja M um módulo MCM tal que $\operatorname{rank} M = m$, $\mu(M) = n$ e $\operatorname{f-rank}(M) = p$. Então

$$\frac{e \cdot m - p}{e - 1} \leq n \leq e \cdot m.$$

Demonstração. Seja $(\mathbf{x})$ o ideal gerado por um sistema de parâmetros de R. Por [6], Corollary 4.7.11, $\ell(M/\mathbf{x}M) = e(R) \cdot \operatorname{rank} M = e \cdot m$. Segue que

$$n = \mu(M) = \ell(M/\mathfrak{m}M) \leq \ell(M/\mathbf{x}M) = e \cdot m.$$

Por 2.2, (iii), $\operatorname{rank} D(M) = m$ e $\mu(D(M)) = n - p$. Usando o mesmo argumento (lembre que $D(M)$ é MCM), obtemos $\mu(D(M)) \leq e \cdot \operatorname{rank} D(M) \implies n - p \leq e \cdot (n - m)$. Reorganizando os termos, temos $(e \cdot m - p)/(e - 1) \leq n$ e o resultado foi mostrado. □

Definição 2.7. Sejam R um domínio Cohen-Macaulay e $M \neq 0$ um módulo MCM. Dizemos que M é um **módulo de Ulrich** se a última desigualdade acima é uma igualdade, isto é, se

$$\mu(M) = e(R) \cdot \operatorname{rank} M$$

.

Corolário 2.8. Sejam R um domínio Gorenstein local de multiplicidade 2 e M módulo MCM não-livre. Então M pode ser escrito como $U \oplus F$, onde U é um módulo de Ulrich e F é livre. Em particular, todo anel deste tipo admite um módulo de Ulrich.

Demonstração. Seja $p = \text{f-rank}\,(M)$ e escreva $M = U \oplus R^p$. Pela definição do posto livre, é claro que $\text{f-rank}\,(U) = 0$. Por 2.6, temos $\mu(U) = 2 \cdot \operatorname{rank} U$ e portanto U é um módulo de Ulrich. A segunda afirmação segue do fato de que R não é regular (ou teríamos $e(R) = 1$). Por 1.35, R admite um R-módulo MCM não-livre. □

Introduzimos agora um tipo de específico de anel de Gorenstein, os anéis de hipersuperfície. São quocientes de anéis regulares locais por elementos não-nulos e continuam Gorenstein em virtude de 1.15.

Definição 2.9. Neste trabalho, diremos que R é um **anel de hipersuperfície** ou simplesmente uma **hipersuperfície** se $R = A/(f)$, onde A é um anel regular local e f não-nulo.

Lema 2.10. Sejam R um anel de hipersuperfície e M um R-módulo MCM. Então $\mu(M) = \mu(M^*)$.

Demonstração. Por hipótese, $R = A/(f)$, onde A é um anel regular local e f um elemento não-nulo. Considerando M como A-módulo, temos $\operatorname{proj\,dim}_A(M) < \infty$ por 1.34. Pela fórmula de Auslander-Buchsbaum 1.32, $\operatorname{proj\,dim}_A(M) = \dim R - \dim A = \dim R - (\dim R - 1) = 1$. Escrevendo $n = \mu(M)$, tome uma A-resolução livre minimal dada por $0 \to A^m \to A^n \to M \to 0$. Como f anula M, localizando esta última sequência em f, conseguimos $0 \to A^m_f \to A^n_f \to 0 \implies n = m$. Podemos então considerar $0 \to A^n \xrightarrow{\partial} A^n \to M \to 0$ e ao aplicar $\operatorname{Hom}_A(-, A)$, obtemos a sequência exata $0 \to \operatorname{Hom}_A(A^n, A) \xrightarrow{\partial^*} \operatorname{Hom}_A(A^n, A) \to \operatorname{Ext}^1_A(M, A) \to 0$. Já que tomamos uma resolução minimal, lembre que $\partial(A^n) \subset \mathfrak{m}A^n$ por 1.30. Uma computação direta mostra que o mapa dual ∂^* satisfaz $\partial^*(\operatorname{Hom}_A(A^n, A)) \subset \mathfrak{m}\operatorname{Hom}_A(A^n, A)$ e concluímos que $n = \mu(\operatorname{Ext}^1_A(M, A))$, novamente por 1.30.

Por outro lado, considere a sequência $0 \to A \xrightarrow{f} A \to R \to 0$. Aplicando o funtor $\operatorname{Hom}_A(M, -)$, temos $0 \to \operatorname{Hom}_A(M, R) \to \operatorname{Ext}^1_A(M, A) \xrightarrow{f} \operatorname{Ext}^1_A(M, A) \to \cdots$. Mas f anula M, então por fim $0 \to \operatorname{Hom}_A(M, R) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}_A(M, A) \to 0$. Logo $M^* = \operatorname{Hom}_A(M, R) = \operatorname{Hom}_R(M, R) \simeq \operatorname{Ext}^1(M, A)$ e $\mu(M) = n = \mu(\operatorname{Ext}^1(M, A)) = \mu(M^*)$. □

Corolário 2.11. Seja M um módulo MCM sobre um anel de hipersuperfície. Então:

(i) $\text{f-rank}\,(M) = \beta_0(M) - \beta_1(M)$;

(ii) $\beta_i(M) = \beta_1(M)$, para todo $i \geq 1$.

Demonstração. (i) Temos que $\beta_1(M) = \mu(\mathrm{syz}_1(M)) = \mu(\mathrm{syz}_1(M)^*) = \mu(D(M)) \overset{2.2}{=} \mu(M) - \text{f-rank}\,(M)$. Como $\beta_0(M) = \mu(M)$, segue o resultado.

(ii) O resultado é óbvio para $i = 1$. Se vale para algum $i > 1$, então repetindo o mesmo processo acima, temos $\beta_{i+1}(M) = \mu(\mathrm{syz}_1(\mathrm{syz}_i(M))) = \mu(\mathrm{syz}_i(M)) - \text{f-rank}\,(\mathrm{syz}_i(M))$. Por 2.3, $\text{f-rank}\,(\mathrm{syz}_i(M)) = 0$ e pela hipótese de indução $\beta_{i+1}(M) = \mu(\mathrm{syz}_i(M)) = \beta_i(M)$.

$\square$

Lema 2.12. Seja M um módulo MCM sobre um anel de hipersuperfície R. Escreva $M \simeq R^p \oplus U$, onde $p = \text{f-rank}\,(M)$. Então $\mathrm{syz}_2(M) \simeq U$. Em particular, quando $p = 0$, $\mathrm{syz}_2(M) \simeq M$ e M admite uma R-resolução periódica de período 2.

Demonstração. Como $\mathrm{syz}_1(M) \simeq \mathrm{syz}_1(U)$, temos que $\mathrm{syz}_2(M) \simeq \mathrm{syz}_2(U)$. Podemos supor, portanto, que $p = 0$ e por 2.11 que $\beta_1(M) = \beta_0(M)$. Considere, mais uma vez, a A-resolução minimal

$$0 \longrightarrow A^n \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Aplicando $- \otimes_A R$, obtemos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, R) \longrightarrow R^n \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Como $\beta_1(M) = \beta_0(M) = n$, devemos ter $\mathrm{Tor}_1^A(M, R) \simeq \mathrm{syz}_2(M)$. Por outro lado, $0 \to A \xrightarrow{f} A \to R \to 0$ é uma A-resolução projetiva de R. Logo $\mathrm{Tor}_1^A(M, R) = H_1(M \otimes_A (0 \to A \xrightarrow{f} A \to 0)) = H_1(0 \to M \xrightarrow{f} M \to 0) \simeq M$, já que $f \cdot M = 0$. Segue que $\mathrm{syz}_2(M) \simeq M$. $\square$

2.2 Sequências de Bourbaki

Nesta seção introduziremos o conceito de sequências de Bourbaki. Esta noção surge de um teorema de [5] (Ch. 7, §4.9, Theorem 6), o qual tem o seguinte enunciado:

Teorema 2.13. *Sejam R um domínio noetheriano normal e M um R-módulo finitamente gerado livre de torção. Então existe um submódulo livre $F \subset M$ tal que M/F é isomorfo a um ideal de R.*

Foi mostrado por E. Evans, em [11], que a propriedade acima na verdade caracteriza os domínios normais, isto é, vale a recíproca.

Teorema (Evans)**.** Seja R um domínio noetheriano. Se todo R-módulo finito livre de torção M admite um submódulo livre F tal que M/F é isomorfo a um ideal de R, então R é normal.

Outros autores também investigaram 2.13:

- Em *Remarks on a Theorem of Bourbaki* (1965), por M. Auslander, temos uma prova de que todo módulo reflexivo sobre um domínio CM normal admite um submódulo livre tal que o quociente seja isomorfo a um ideal.
- M. Miller em *Bourbaki's Theorem and Prime Ideals* (1978) estudou sob que condições temos que o ideal I é primo.
- Uma versão graduada e envolvendo sequências longas pode ser encontrada em *Homogeneous prime ideals and graded modules fitting into long Bourbaki sequences* (1993), por M. Amasaki;
- O recente paper de Herzog, Kamashiro e Stamate, *Graded Bourbaki Ideals of Graded Modules* (2021), explora também o caso graduado de forma bem geral.
- O artigo de Herzog e Kühl , *Maximal Cohen-Macaulay Modules over Gorenstein rings and Bourbaki-Sequences* (1987), define a noção de *sequência de Bourbaki.*

Definição 2.14. Seja R um domínio Gorenstein local. Uma sequência exata de R-módulos

$$0 \to F \to M \to I \to 0$$

é dita uma **sequência de Bourbaki** se F é livre, M é MCM e $I \subset R$ é um ideal de R de altura 2 ou $I = R$. O ideal I é chamado de **ideal de Bourbaki** para M.

Com a definição posta dessa forma e utilizando um vocabulário moderno, podemos dizer que 2.13 garante a existência de sequências de Bourbaki para módulos finitos e livres de torção sobre domínios normais.

É importante ressaltar que sequências de Bourbaki não-triviais são obtidas apenas quando $\operatorname{grade} I \leq 2$. Isto é evidenciado pelo seguinte resultado exposto em [13], Lemma 2.2:

Lema 2.15. Sejam R um anel notheriano e M um R-modulo finitamente gerado inserido numa sequência $0 \to F \to M \to I \to 0$, com F livre e I ideal. Se $\operatorname{grade} I > 2$, então $M \simeq F \oplus I$.

Demonstração. Se $\operatorname{grade} I > 2$, então $0 = \operatorname{Ext}^2(R/I, R) \simeq \operatorname{Ext}^1(I, R)$. Pela relação entre Ext e extensões, a sequência exata em questão cinde, com queríamos. $\square$

Antes de continuarmos, precisamos definir a noção de *orientabilidade* para módulos. Suponha que R seja um domínio normal, isto é, integralmente fechado em seu corpo de frações $Q(R)$. Denotamos por $\mathrm{Cl}(R)$ o **grupo das classes dos divisores** de R (do inglês, *divisor class group*), definido pelo quociente entre o *grupo dos divisores de* $\mathfrak{D}(R)$ e o seu subgrupo de *divisores principais* $\mathfrak{P}(R)$. Para um ideal fracionário I de R, suas imagens em $\mathfrak{D}(R)$ e $\mathrm{Cl}(R)$ são comumente denotadas por $\mathrm{div}(I)$ e $[\mathrm{div}(I)]$, respectivamente. O elemento neutro de $\mathrm{Cl}(R)$ é $[\mathrm{div}(1)]$. Tem-se que $[\mathrm{div}(I)] = [\mathrm{div}(1)]$ se, e somente se, $Rx = (R :_{Q(R)} I) \simeq_R \mathrm{Hom}_R(I, R)$, para algum $x \in Q(R)$. Esta discussão encontra-se na primeira seção do Apêndice.

De forma semelhante, é também possível definir divisores para módulos. Omitimos os detalhes, pois estes envolvem uma longa construção que foge do objetivo deste trabalho. Isto não será um problema no contexto exposto aqui, já que a ideia de divisores para módulos acaba se traduzindo na noção para ideais via sequências de Bourbaki.

Se M é um R-módulo finitamente gerado, existe um submódulo livre F de M tal que M/F é um módulo de torção. Utilizando a notação de [5], defina $\chi(M/L) = \sum_{\mathfrak{p}} l_{\mathfrak{p}}(M/L) \cdot \mathfrak{p}$, onde a soma é tomada sobre todos primos de altura 1 e $l_{\mathfrak{p}}$ denota o comprimento do $R_{\mathfrak{p}}$-módulo $(M/L)_{\mathfrak{p}}$. Esta soma é finita e a classe $[\chi(M/L)]$ em $\mathrm{Cl}(R)$ não depende do submódulo livre L ([5], Ch. 7, §4.7, Theorem 15). Manteremos a notação de [12] e denotaremos $[\chi(M/L)]$ por $\det M$, chamada de *classe de divisores anexada a* M.

Definição 2.16. Sejam R um domínio normal e M um R-módulo finitamente gerado. Dizemos que M é **orientável** se $\det M = 0$.

Exibimos agora algumas propriedades da classe de divisores anexadas a módulos:

Proposição 2.17. Seja R um domínio normal. Então:

(a) Se $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ uma sequência exata de módulos finitamente gerados, então
$$\det M = \det M' + \det M''.$$

(b) Se I é um ideal fracionário de R, então $\det I = [\mathrm{div}(I)]$, isto é, a definição de det é coerente e recupera a estrutura de $\mathrm{Cl}(R)$.

(c) Se F é um R-módulo livre, então $\det F = 0$.

Demonstração. Ver [5], Ch.7, §4.7, Theorem 16. □

O seguinte Lema é um primeiro passo na direção de garantir existência de sequências de Bourbaki.

Lema 2.18. Sejam R um anel noetheriano e E R-módulo finitamente gerado. Se $\mathrm{Ext}^1(E,R)$ é gerado por r elementos, então existe um R-módulo M satisfazendo $\mathrm{Ext}^1(M,R)=0$ e uma extensão $0\to R^r\to M\to E\to 0$.

Demonstração. Façamos indução em r. Para $r=1$, seja ξ um gerador de $\mathrm{Ext}^1(E,R)$. Em decorrência de 5.24, existe uma sequência exata $0\to R\to M\to E\to 0$. Dualizando-a, obtemos $R\simeq \mathrm{Hom}(R,R)\xrightarrow{\partial}\mathrm{Ext}^1(E,R)\to\mathrm{Ext}^1(M,R)\to 0$ exata, com $\partial(1_R)=\xi$. Como ξ gera $\mathrm{Ext}^1(E,R)$, o homomorfismo ∂ é sobrejetor. Assim, concluímos que $\mathrm{Ext}^1(M,R)\simeq \mathrm{Coker}\ \partial=0$.

Seja agora $r>1$ e suponha que o resultado vale para $r-1$. Seja também $\{\xi_1,...,\xi_r\}$ um conjunto gerador de $\mathrm{Ext}^1(E,R)$. Como antes, $\xi_1\in\mathrm{Ext}^1(E,R)$ nos garante uma extensão $0\to R\xrightarrow{\varphi}M_1\xrightarrow{h}E\to 0$. Dualizando-a, obtemos a sequência exata

$$\mathrm{Hom}(R,R)\xrightarrow{\partial_1}\mathrm{Ext}^1(E,R)\xrightarrow{g}\mathrm{Ext}^1(M_1,R)\to 0,$$

com $\partial_1(1_R)=\xi_1$. Temos $g(\xi_1)=g(\partial_1(1_R))=0$ e como g é sobrejetiva, o módulo $\mathrm{Ext}^1(M_1,R)$ é gerado pelos $r-1$ elementos $\{g(\xi_2),...,g(\xi_r)\}$. A hipótese de indução fornece um módulo M satisfazendo $\mathrm{Ext}^1(M,R)=0$ e uma sequência exata $0\to R^{r-1}\xrightarrow{\psi}M\xrightarrow{k}M_1\to 0$.

Considere a sequência exata $0\to\ker(h\circ k)\to M\xrightarrow{h\circ k}E\to 0$. Afirmamos que $\ker(h\circ k)\simeq R\oplus R^{r-1}\simeq R^r$. De fato, observe que $R^{r-1}\simeq \mathrm{Im}\ \psi=\ker k\subset\ker(h\circ k)$. Por outro lado, como R é projetivo, existe $\phi: R\to M$ tal que o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, dashed, "\phi"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ M \arrow[r, "k"'] & M_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Note que $\mathrm{Im}\ \phi\subset\ker(h\circ k)$, pois $(h\circ k)\circ\phi=h\circ\varphi=0$. Mostraremos que $\ker(h\circ k)=\mathrm{Im}\ \phi\oplus\mathrm{Im}\ \psi$. Com efeito, se $x\in\ker(h\circ k)$, temos que $k(x)\in\ker h=\mathrm{Im}\ \varphi$. Então existe $y\in R$ tal que $k(x)=\varphi(y)=k(\phi(y))$. Segue que $x-\phi(y)\in\ker k=\mathrm{Im}\ \psi$. Logo existe $z\in R^{r-1}$ tal que $x=\phi(y)+\psi(z)$. É fácil ver que $\mathrm{Im}\ \phi\cap\mathrm{Im}\ \psi=0$, uma vez que se $\phi(y)=\psi(z)$, então $\varphi(y)=k(\phi(y))=k(\psi(z))=0\implies y=0$ e a igualdade segue. Assim, concluímos que $\ker(h\circ k)\simeq\mathrm{Im}\ \phi\oplus\mathrm{Im}\ \psi=R^r$, já que ϕ e ψ são injetivas. Isso nos leva a uma sequência exata $0\to R^r\to M\to E\to 0$, como queríamos.

□

Observação 2.19. A demonstração do lema anterior é idêntica à dada por [16], embora o resultado original exija a hipótese adicional de que E possui dimensão projetiva ≤ 1

para garantir projetividade ao módulo M.

A próxima proposição deixa claro como o Lema 2.18 pode nos ajudar a produzir sequências de Bourbaki na forma que queremos. Utilizaremos a nocão de orientabilidade discutida acima para produzir sequências de Bourbaki na forma que desejamos.

Proposição 2.20. Seja R um ael de Gorenstein local. Então:

(i) Dado $I \subset R$ um ideal CM de altura 2, existe uma sequência de Bourbaki $0 \to F \to M \to I \to 0$. Se R for um domínio normal, o módulo M obtido é orientável;

(ii) Se R for um domínio normal e M for um R-módulo MCM, então existe uma sequência de Bourbaki $0 \to F \to M \to I \to 0$.

Demonstração. (i) Tome $\{\xi_1, ..., \xi_r\}$ um conjunto gerador de $\mathrm{Ext}^1_R(I, R)$. Considere $0 \to R^r \to M \to I \to 0$ garantida por 2.18, isto é, com $\mathrm{Ext}^1(M, R) = 0$. Mostraremos que M é MCM. Como $\mathrm{Ext}^i(R^r, R) = 0$ para $i \geq 1$, vale que $\mathrm{Ext}^i(I, R) \simeq \mathrm{Ext}^i(M, R)$, para todo $i \geq 2$. Como I tem altura 2, $\mathrm{Ext}^i(I, R) = 0$ para $i \geq 2$, por 1.22. Portanto, $\mathrm{Ext}^i(M, R) = 0$ para $i \geq 1$. Segue por 1.20 que M é MCM.

Suponha que R é normal. Segue de 2.17, (a), que $\det M = \det I$. Como I tem altura 2, tem-se $I^* \simeq R^*$ ao dualizar $0 \to I \xrightarrow{\iota} R \to R/I \to 0$. Mantendo a notação de 5.2, (iii), construímos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
R^* \arrow[r, "\iota^*"] & I^* \arrow[d, "D'"] \\
R \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, hook] & (R :_{Q(R)} I)
\end{tikzcd}$$

onde pode ser verificado que o $R \hookrightarrow (R :_{Q(R)} I)$ é simplesmente a inclusão. Dizer que ι^* é um isomorfismo é dizer que $R = (R :_{Q(R)} I)$. Portanto, $\det M = \det I = 0$ e M é orientável.

(ii) Como R é Gorenstein, M é reflexivo e portanto livre de torção em decorrência de 1.25. Supondo que R é normal, 2.13 garante a existência de uma sequência exata $0 \to F \to M \to I \to 0$. Precisamos mostrar que I é um ideal CM de altura 2. Observe que $\det I = \det M = 0$, isto é, $(R :_{Q(R)} I) = Rx$, para algum $x \in Q(R) \backslash \{0\}$. O diagrama anterior já nos fornece o mapa $R \hookrightarrow (R :_{Q(R)} I) = Rx$, o qual é não só injetivo, como também sobrejetivo. Isso é possível se, e somente se, $\mathrm{Hom}_R(R/I, R) = \mathrm{Ext}^1(R/I, R) = 0$. Logo podemos assumir que $\mathrm{ht}\, I = \mathrm{grade}\, I \geq$

2. Por outro lado, $\operatorname{Ext}_R^{i+1}(R/I, R) \simeq \operatorname{Ext}_R^{i}(I, R) \simeq \operatorname{Ext}_R^{i}(M, R) = 0$ para $i \geq 2$, mostrando que $\operatorname{ht} I \leq 2$, como queríamos. Além disso, por 1.19,

$$\operatorname{depth} R/I = \min\{i \mid \operatorname{Ext}_R^{\dim R - i}(R/I, R) \neq 0\} = \dim R - \operatorname{ht} I = \dim R/I.$$

Logo I é um ideal CM.

□

Definição 2.21. Sejam M e N R-módulos. Dizemos que M e N são **estavelmente isomorfos**, e escrevemos $M \underset{\text{est}}{\simeq} N$, se existem R-módulos livres e finitamente gerados F e G tais que $M \oplus F \simeq N \oplus G$.

Observação 2.22. Se $M \underset{\text{est}}{\simeq} N$ e $\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} N$, então pela aditividade do posto devemos ter $M \oplus F \simeq N \oplus F$. No caso local, vale o cancelamento, isto é, podemos concluir do isomorfismo anterior que $M \simeq N$. Em particular, $M \underset{\text{est}}{\simeq} N$ se, e somente se, $M \simeq N \oplus F$, para algum módulo livre F. Este resultado foi mostrado por Wolmer Vasconcelos em [24] e também por E. Evans em [10].

Proposição 2.23. Sejam R um anel de Gorenstein local e I um ideal CM com altura 2, com $r(R/I) = r$. Então existe uma sequência de Bourbaki dada por

$$0 \longrightarrow R^r \xrightarrow{\iota} M(I) \longrightarrow I \longrightarrow 0. \qquad (\star\star)$$

Além disso, qualquer outra sequência de Bourbaki para I é isomorfa a uma extensão trivial de ($\star\star$):

$$0 \longrightarrow R^r \oplus G \xrightarrow{(\iota, 1_G)} M(I) \oplus G \longrightarrow I \longrightarrow 0.$$

Em particular, ($\star\star$) e $M(I)$ são unicamente determinadas por I a menos de isomorfismo. Devido a isso chamaremos ($\star\star$) de **sequência natural de Bourbaki**.

Demonstração. Sabemos por 1.28 que $\omega_{R/I} \simeq \operatorname{Ext}^2(R/I, R) \simeq \operatorname{Ext}^1(I, R)$ e portanto $r = \mu(\operatorname{Ext}^1(I, R))$. Assim, se $\{\xi_1, ..., \xi_r\}$ é um conjunto gerador minimal de $\operatorname{Ext}^1(I, R)$, já vimos que existe ($\star\star$). A última afirmação segue do fato de que se $0 \to F' \to M' \to I \to 0$ e $0 \to F'' \to M'' \to I \to 0$ são tais que $\operatorname{rank} F' = \operatorname{rank} F''$, então existe um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & I & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & F'' & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & I & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

com os mapas verticais sendo isomorfismos.

□

Utilizando sequências de Bourbaki, acabamos de mostrar que sobre domínios Gorenstein locais, todo ideal Cohen-Macaulay I de altura 2 determina um módulo MCM $M(I)$, único a menos de isomorfismo estável. Por aditividade do posto, $\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank} F + \operatorname{rank}(I)$. Como I tem altura 2, $\operatorname{rank}(I) = 1$. Segue que em qualquer sequência de Bourbaki, M tem posto $\operatorname{rank} F + 1$.

O que podemos dizer sobre $\mu(M)$? Dada $0 \to F \xrightarrow{\iota} M \to I \to 0$ sequência de Bourbaki, obtemos $F \otimes k \xrightarrow{\iota \otimes k} M \otimes k \to I \otimes k \to 0$ aplicando $- \otimes k$ e, assim, $\mu(M) \leq \operatorname{rank} F + \mu(I)$. A igualdade ocorre se, e somente se, o mapa $\iota \otimes k$ é injetivo ou, equivalentemente, $\mathfrak{m}M \cap F = \mathfrak{m}F$ (tratando F como submódulo de M). Nesse caso, diremos que a sequência de Bourbaki é **tight**. Por agora, veremos como sequências de Bourbaki tight se comportam em anéis de hipersuperfície.

Lema 2.24. Sejam R um anel de hipersuperfície e $I \subset R$ um ideal CM de altura 2. São equivalentes:

(i) A sequência natural de Bourbaki de I é tight;

(ii) Toda sequência de Bourbaki de I é tight;

(iii) $\beta_1(I) = \beta_2(I)$;

(iv) f-rank $\operatorname{syz}_1(I) = 0$.

Demonstração. A implicação (ii)$\Longrightarrow$(i) é trivial. Por 2.23, toda sequência de Bourbaki de I é da forma $0 \to R^r \oplus G \to M(I) \oplus G \to I \to 0$. Se $R^r \otimes k \to M(I) \otimes k$ é injetivo, o mapa induzido $(R^r \otimes k) \oplus (G \otimes k) \to (M(I) \otimes k) \oplus (G \otimes k)$ também o é. Logo (i)$\Longleftrightarrow$(ii).

Aplicando $- \otimes k$ a qualquer sequência de Bourbaki $0 \to F \to M \to I \to 0$, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_1(k, M) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1(k, I) \longrightarrow F \otimes k \longrightarrow M \otimes k \longrightarrow I \otimes k \longrightarrow 0, \qquad (*)$$

e também

$$\operatorname{Tor}_2(k, M) \simeq \operatorname{Tor}_2(k, I).$$

Pela aditividade de $\dim_k(-)$ em sequências exatas, $\mu(M) = \mu(I) + \operatorname{rank} F$ se, e somente se, $\beta_1(I) = \beta_1(M)$. Como M é MCM, 2.11 nos garante $\beta_1(M) = \beta_2(M)$ e o isomorfismo acima fornece $\beta_2(M) = \beta_2(I)$. Segue que

$$\mu(M) = \mu(I) + \operatorname{rank} F \iff \beta_1(I) = \beta_1(M) \iff \beta_1(I) = \beta_2(I).$$

Temos então (ii)$\Longleftrightarrow$(iii).

Uma vez que $\mathrm{syz}_1(I)$ é MCM, basta utilizar 2.11, (i), isto é, $\text{f-rank}\,(\mathrm{syz}_1(I)) = \beta_0(\mathrm{syz}_1(I)) - \beta_1(\mathrm{syz}_1(I)) = \beta_1(I) - \beta_2(I)$, e (iii)$\Longleftrightarrow$(iv) é claro.

□

Lema 2.25. Seja R um anel de hipersuperfície e $I \subset R$ um ideal CM de altura 2. Então $M(I) \simeq \mathrm{syz}_2(I) \oplus R^p$, onde $p = r(I) - \beta_1(I) + \beta_0(I)$.

Demonstração. Seja $0 \to R^r \to M(I) \to I \to 0$ a sequência natural de Bourbaki. Em decorrência de 5.20, $\mathrm{syz}_2(M(I)) \simeq \mathrm{syz}_2(I)$. Uma vez que $M(I)$ é MCM, temos por 2.12 que $M(I) \simeq \mathrm{syz}_2(M(I)) \oplus R^p$, com $p = \text{f-rank}\, M(I)$. Aplicando $\dim_k(-)$ a sequência $(*)$ em 2.24 e utilizando 2.1, (i), tem-se

$$\text{f-rank}\, M(I) = \beta_0(M(I)) - \beta_1(M(I)) = r(I) - \beta_1(I) + \beta_0(I),$$

e o resultado segue. □

Capítulo 3

Sequências de Bourbaki e Classes de Linkage

Vimos no capítulo anterior que se dois módulos M' e M'' podem ser inseridos em sequências de Bourbaki de um ideal I, então estes módulos são estavelmente isomorfos. Veremos nesta seção que dadas sequências de Bourbaki $0 \to F' \to M' \to I' \to 0$ e $0 \to F'' \to M'' \to I'' \to 0$, M' e M'' serem estavelmente isomorfos é equivalente aos ideais I' e I'' pertencerem a uma mesma classe de linkage.

Definição 3.1. Sejam $I, J \subset R$ ideais. Dizemos que I e J estão **em linkage** por uma sequência regular $\mathbf{x} = x_1, ..., x_s$ em $I \cap J$, e escrevemos $I \sim_{\mathbf{x}} J$, se $I = (\mathbf{x}) : J$ e $J = (\mathbf{x}) : I$. Usaremos apenas $I \sim J$ quando houver pelo menos uma sequência regular $\mathbf{x}$ tal que $I \sim_{\mathbf{x}} J$.

Proposição 3.2. Sejam R um anel local de Gorenstein, I um ideal CM de altura s e $\mathbf{x} = x_1, ..., x_s$ é uma sequência regular em I. Então $J = (\mathbf{x}) : I$ é CM de altura s e $I \sim_{\mathbf{x}} J$.

Esta proposição segue como corolário de um resultado demonstrado por Peskine e Szpiro no artigo [18] de 1973. Foi introduzido neste trabalho a ideia de linkage (do francês, *liaison*) algébrico e geométrico.

Proposição 3.3 (Peskine-Szpiro)**.** Sejam R um anel local de Gorenstein e $I \neq 0$ um ideal de R tal que $\dim R/I = \dim R$. Seja também $J := (0 : I)$. As condições a seguir são equivalentes:

(a) I é ideal Cohen-Macaulay;

(b) J é ideal Cohen-Macaulay e I não admite primos imersos.

Além disso, se essas condições ocorrerem, então $I = (0 : J)$ e $\dim R/J = \dim R$.

Demonstração de 3.2. Seja $\mathbf{x} = x_1, ..., x_s$ uma sequência regular em I. Em virtude de 1.15, o anel $R/(\mathbf{x})$ é um anel de Gorenstein. O ideal $I/(\mathbf{x})$ é um ideal não-nulo e $\dim(R/(\mathbf{x}))/(I/(\mathbf{x})) = \dim R/I$. Como I é CM, vale que $\dim R/I = \dim R - \operatorname{ht} I = \dim R - \operatorname{ht}(\mathbf{x}) = \dim R/(\mathbf{x})$. Portanto $(\bar{0} :_{\frac{R}{(\mathbf{x})}} (I/(\mathbf{x})) = J/(\mathbf{x})$ é ideal Cohen-Macaulay de $R/(\mathbf{x})$, pela proposição demonstrada acima. Concluímos que $(R/(\mathbf{x}))/(J/(\mathbf{x})) \simeq R/J$ é um anel CM. Além disso, 3.3 também nos diz que $I/(\mathbf{x}) = ((\mathbf{x}) : J)/(\mathbf{x})$, isto é, $I = (\mathbf{x}) : J$; e que $\dim(R/(\mathbf{x}))/(J/(\mathbf{x})) = \dim R/J = \dim R/(\mathbf{x})$ ou, equivalentemente, $\operatorname{ht} J = \operatorname{ht} I$.

□

Definição 3.4. Sejam $I, J \subset R$ ideais. Dizemos que I e J pertencem a mesma **classe de linkage par**, e escreveremos $I \sim_{\mathrm{p}} J$, se existe uma sequência de ideais $I = I_0, I_1, ..., I_n = J$, com n par, tal que $I_i \sim I_{i+1}$ para $i = 0, ..., n-1$. Por conveniência, escreveremos $I \sim_{\mathrm{i}} J$ se existe uma tal sequência com n ímpar.

Em sequências de Bourbaki trabalhamos em altura 2, logo focaremos nesse tipo particular de ideal. Como R é Gorenstein, em particular Cohen-Macaulay, sabemos que $\operatorname{ht} I = \operatorname{grade} I$ por 1.11, isto é, existe pelo menos uma sequência regular $\mathbf{x} \subset I$ de comprimento 2, digamos, $\mathbf{x} = x_1, x_2$. Suponha agora que $0 \to M_2 \to M_1 \to I \to 0$ seja uma sequência exata, com M_1 módulo MCM. Lembre que o complexo de Koszul $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{x}; R)$ é uma resolução projetiva de $R/(\mathbf{x})$. Denotaremos por $K_n(\mathbf{x}; R)$ o n-ésimo módulo do complexo $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{x}; R)$. A partir do mapa canônico $R/(\mathbf{x}) \to R/I$, podemos construir um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "\iota"] & M_1 \arrow[r, "\gamma"] & R \arrow[r] & R/I \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2(\mathbf{x}; R) \arrow[r, "\partial_2"'] \arrow[u, "\alpha_2"] & K_1(\mathbf{x}; R) \arrow[r, "\partial_1"'] \arrow[u, "\alpha_1"] & R \arrow[r] \arrow[u, "1"] & R/(\mathbf{x}) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

onde a linha inferior é a resolução livre de $R/(\mathbf{x})$ obtida via complexo de Koszul, o que torna possível a construção acima. Aplicando $(\operatorname{Ext}^i_R(-, R))_{i \geq 0}$ e usando o isomorfismo $\operatorname{Ext}^1(I, R) \simeq \operatorname{Ext}^2(R/I, R)$, conseguimos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^* \arrow[r] \arrow[d] & M_1^* \arrow[r] \arrow[d] & M_2^* \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^2(R/I, R) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^* \arrow[r] & K_1^*(\mathbf{x}; R) \arrow[r] & K_2^*(\mathbf{x}; R) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^2(R/(\mathbf{x}), R) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e sua versão deletada

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{R}_\bullet : & = & 0 & \longrightarrow & R^* & \longrightarrow & M_1^* & \longrightarrow & M_2^* & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow f_\bullet & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{S}_\bullet : & = & 0 & \longrightarrow & R^* & \longrightarrow & K_1^*(\mathbf{x};R) & \longrightarrow & \underbrace{K_2^*(\mathbf{x};R)}_{0} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Os complexos $\mathcal{R}_\bullet$ e $\mathcal{S}_\bullet$ são exatos, exceto possivelmente em grau 0. Considere agora o cone de $f_\bullet$ (Apêndice, Definição 5.12,(b)), dado por

$$\mathrm{Cone}(f_\bullet) = \quad 0 \longrightarrow R^* \longrightarrow R^* \oplus M_1^* \longrightarrow K_1^*(\mathbf{x};R) \oplus M_2^* \longrightarrow \underbrace{K_2^*(\mathbf{x};R)}_{0} \longrightarrow 0.$$

e relembre que a sequência exata de complexos

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Cone}(f_\bullet) \longrightarrow \mathcal{R}_\bullet[-1] \longrightarrow 0$$

garante a sequência exata de homologias

$$0 \longrightarrow H_1(\mathrm{Cone}(f_\bullet)) \longrightarrow H_0(\mathcal{R}_\bullet) \longrightarrow H_0(\mathcal{S}_\bullet) \longrightarrow H_0(\mathrm{Cone}(f_\bullet)) \longrightarrow 0.$$

Em particular, $\mathrm{Cone}(f_\bullet)$ é exato, exceto possivelmente em posições 0 e 1, uma vez que $H_i(\mathcal{R}_\bullet) = H_i(\mathcal{S}_\bullet) = 0$ para $i \geq 1$. No entanto, o mapa $H_0(\mathcal{R}_\bullet) \to H_0(\mathcal{S}_\bullet)$ é simplesmente $\mathrm{Ext}^2(R/I,R) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(R/(\mathbf{x}),R)$. Como $\mathrm{Ext}^2_R(-,R) \simeq \mathrm{Hom}_{R/(\mathbf{x})}(-,R/(\mathbf{x}))$ define um isomorfismo natural na categoria dos funtores entre R-**mod** e $R/(\mathbf{x})$-**mod**, tem-se

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^2_R(R/I,R) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^2_R(R/(\mathbf{x}),R) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
\mathrm{Hom}_{R/(\mathbf{x})}(R/I,R/(\mathbf{x})) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{R/(\mathbf{x})}(R/(\mathbf{x}),R/(\mathbf{x})) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
(\mathbf{x}:I)/(\mathbf{x}) & \hookrightarrow & R/(\mathbf{x})
\end{array}$$

onde as setas verticais são isomorfismos. Segue que $H_0(\mathcal{R}_\bullet) \longrightarrow H_0(\mathcal{S}_\bullet)$ é injetiva e $H_1(\mathrm{Cone}(f_\bullet)) = 0$. Mais ainda, concluímos que

$$H_0(\mathrm{Cone}(f_\bullet)) \simeq \mathrm{Coker}\left\{\frac{(\mathbf{x}:I)}{(\mathbf{x})} \longrightarrow \frac{R}{(\mathbf{x})}\right\} = \frac{R}{(\mathbf{x}:I)}.$$

Dessa forma, encontramos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow R^* \longrightarrow R^* \oplus M_1^* \longrightarrow K_1^*(\mathbf{x}; R) \oplus M_2^* \longrightarrow K_2^*(\mathbf{x}; R) \longrightarrow \frac{R}{(\mathbf{x} : I)} \longrightarrow 0,$$

ou, sabendo que $K_2^*(\mathbf{x}; R) \simeq R$, escrevemos de forma mais conveniente para nossos propósitos:

$$0 \longrightarrow \frac{R^* \oplus M_1^*}{\operatorname{Im}\{R^* \to R^* \oplus M_1^*\}} \simeq M_1^* \xrightarrow{(\alpha_1^*, -\iota^*)} K_1^*(\mathbf{x}; R) \oplus M_2^* \longrightarrow (\mathbf{x} : I) \longrightarrow 0,$$

onde o isomorfismo indicado é dado pelo mapa $R^* \oplus M_1^* \to M_1^*$, $(r^*, m_1^*) \mapsto m_1^* + \gamma(r^*)$. Por essa discussão, podemos enunciar o seguinte resultado:

Lema 3.5. Sejam R um anel de Gorenstein local e $0 \to F \to M \to I \to 0$ é uma sequência de Bourbaki e $J = (\mathbf{x}) : I$, com $\mathbf{x} = x_1, x_2$ sequência regular em I, então $\operatorname{syz}_1(J) \underset{\text{est}}{\simeq} M^*$.

A fim continuar, precisaremos do seguinte resultado técnico de Álgebra Comutativa:

Lema 3.6. Seja $(A, \mathfrak{m}, k)$ um anel noetheriano local com corpo residual infinito k. Então:

(i) Dados $x \in \mathfrak{m} \cap (A \backslash Z(A))$ e $y \in \mathfrak{m}$ qualquer, existe um conjunto finito $X \subset k$ tal que para todo $\varepsilon \in A \backslash \mathfrak{m}$ satisfazendo $\overline{\varepsilon} \notin X$, tem-se que $x + \varepsilon \cdot y \in A \backslash Z(A)$. Em particular, como k é infinito, é sempre possível obter uma unidade tal que $x + \varepsilon \cdot y \in A \backslash Z(A)$, sempre que $y \neq 0$.

(ii) Analogamente, se M é um A-módulo finitamente gerado, $x \in M \backslash \mathfrak{m}M$ e $y \in M$ é arbitrátrio, existe um conjunto finito $X \subset k$ tal que, para toda unidade ε de A satisfazendo $\overline{\varepsilon} \notin X$, tem-se $x + \varepsilon \cdot y \in M \backslash \mathfrak{m}M$.

Demonstração. (i) Fixe x e y como no enunciado. O caso $y = 0$ é trivial, logo suponha que $y \neq 0$. Defina

$$W = \{\varepsilon \in A \backslash \mathfrak{m} \mid \ x + \varepsilon \cdot y \in Z(A)\}$$

e $X = \{\overline{\varepsilon} \mid \ \varepsilon \in W\}$. É suficiente mostrar que X é um conjunto finito. Com efeito, para qualquer $\varepsilon \in A \backslash \mathfrak{m}$ tal que $\overline{\varepsilon} \notin X$, tem-se que $x + \varepsilon \cdot y \in A \backslash Z(A)$ pela definição de W. Mostremos que X é de fato finito. Como A é noetheriano, $\operatorname{Ass} A$ é um conjunto finito. Escreva $\operatorname{Ass} A = \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n\}$. Afirmamos que $|X| \leq n$. Se fosse $|X| > n$, então poderíamos escolher $n + 1$ elementos distintos em X, o que nos leva, obviamente, a $n + 1$ elementos distintos de W, digamos

$\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}\}$. Da forma como W foi definido, para cada $i = 1, ..., n, n+1$, os elementos $x + \varepsilon_i \cdot y \in Z(A)$ e são todos distintos (lembre-se que $y \neq 0$ e que ε_i's distintos pertencem a classes distintas em k). Uma vez que $Z(A) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{p}_i$, pelo menos dois elementos distintos $x + \varepsilon_i \cdot y$ e $x + \varepsilon_j \cdot y$ pertencem a um mesmo primo associado, isto é, a $0 :_A r$, para algum r não-nulo de A. Temos

$$\begin{cases} (x + \varepsilon_i \cdot y)r = 0 \\ (x + \varepsilon_j \cdot y)r = 0 \end{cases} \implies (\varepsilon_i - \varepsilon_j)yr = 0 \implies yr = 0 \implies xr = 0 \implies r = 0,$$

uma contradição, uma vez que $0 :_A r$ é primo. Logo $|X| \leq n$ e o resultado segue.

(ii) Sejam $x \in M \backslash \mathfrak{m}M$ e $y \in M$ qualquer. Vejamos que se $y \in \mathfrak{m}M$, não há o que fazer. De fato, se isso ocorresse, bastaria tomar $X = \emptyset$ e notar que para qualquer unidade $\varepsilon \in A$, $\overline{x + \varepsilon \cdot y} = \overline{x} \neq 0$, pois $x \notin \mathfrak{m}M$. Dessa forma, $x + \varepsilon \cdot y \in M \backslash \mathfrak{m}M$. Podemos supor agora que $y \notin \mathfrak{m}M$. Temos duas possibilidades: existe uma unidade $\varepsilon_0 \in A$ com $x + \varepsilon_0 \cdot y \in \mathfrak{m}M$ ou não existe. Se não existe, basta tomar $X = \emptyset$ mais uma vez. Se existe, mostraremos que $X = \{\overline{\varepsilon_0}\}$ é o conjunto procurado. Com efeito, se $\varepsilon \in A$ é uma unidade tal que $x + \varepsilon \cdot y \in \mathfrak{m}M$, então

$$\overline{x + \varepsilon \cdot y} = \overline{x + \varepsilon_0 \cdot y} = \overline{0} \implies \overline{\varepsilon_0} \cdot \overline{y} = \overline{\varepsilon} \cdot \overline{y} \implies \overline{(\varepsilon_0 - \varepsilon)} \cdot \overline{y} = \overline{0}.$$

Devemos necessariamente ter $\overline{\varepsilon_0} = \overline{\varepsilon}$, já que $y \notin \mathfrak{m}M$. Isso mostra que no caso $y \notin \mathfrak{m}M$ toda unidade ε com classe fora de $X = \{\overline{\varepsilon_0}\}$ tem que satisfazer $x + \varepsilon \cdot y \in M \backslash \mathfrak{m}M$.

□

O Lema a seguir mostra como é possível utilizar o procedimento de [18] para produzir novas sequências de Bourbaki mantendo os ideais em alguma forma de linkage.

Lema 3.7. Sejam R um domínio Gorenstein local e

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} I \longrightarrow 0 \qquad (\star)$$

uma sequência de Bourbaki. Sejam $\{e_1, ..., e_r\}$ uma base de F, $\mathbf{x} = x_1, x_2$ uma sequência regular em I. Para quaisquer $f_1, f_2 \in M$, com $x_i = \pi(f_i)$ e $t \in \{1, ..., r\}$, existe um subconjunto finito $X \subset k$ tal que, para toda unidade ε satisfazendo $\overline{\varepsilon} \notin X$, o submódulo $L := \langle e_1, ..., e_{t-1}, e_t - \varepsilon \cdot f_1, e_{t+1}, ..., e_r \rangle$ de M é livre de posto r e que pode ser inserido em uma sequência de Bourbaki

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow J \longrightarrow 0, \qquad (\star\star)$$

onde $I \sim_p J$ na forma $I \sim_{\mathbf{x}} K \sim_{\mathbf{y}} J$. Mais ainda, se $(\star)$ for tight, então X pode ser tomado de modo que $(\star\star)$ também seja tight para $\overline{\varepsilon} \notin X$.

Demonstração. Seja $\{u_1, u_2\}$ uma base de R^2 e considere $(\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{x}; R), \partial_\bullet)$ construído sobre este conjunto, isto é, de modo que $\partial_1(u_i) = x_i$, para $i = 1, 2$. Como fizemos anteriormente, tomemos um morfismo de complexos de $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{x}; R)$ para $0 \to F \to M \to I \to 0$ a partir da inclusão $(\mathbf{x}) \hookrightarrow I$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F \arrow[r, "\iota"] & M \arrow[r] & I \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_2(\mathbf{x}; R) \arrow[r, "\partial_2"'] \arrow[u, "\alpha_2"] & K_1(\mathbf{x}; R) \arrow[r, "\partial_1"'] \arrow[u, "\alpha_1"] & (\mathbf{x}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0 \end{tikzcd}$$

Escreva $f_i = \alpha_1(u_i)$ e note que $\pi(f_i) = x_i$. Vimos que o ideal $K = (\mathbf{x}) : I$ está inserido em uma sequência exata

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{\tau} K_1^*(\mathbf{x}; R) \oplus F^* \xrightarrow{\rho} K \longrightarrow 0,$$

onde ρ é o mapa induzido por $(\partial_2^* \;\; \alpha_2^*) : K_1^*(\mathbf{x}; R) \oplus F^* \to K_2^*(\mathbf{x}; R) \simeq R$ e $\tau = (\alpha_1^*, -\iota^*)$. Temos ainda que $\partial_2(u_1 \wedge u_2) = x_1 u_2 - x_2 u_1$. Logo $\alpha_1(x_1 u_2 - x_2 u_1) = x_1 f_2 - x_2 f_1 = \iota\alpha_2(u_1 \wedge u_2)$. Segue que o elemento $x_2 f_1 - x_1 f_2$ pertence a $\iota(F) \subset M$. Existem, portanto, únicos $\lambda_1, ..., \lambda_r$ tais que $x_2 f_1 - x_1 f_2 = \sum_{i=1}^r \lambda_i \iota(e_i)$. Então

$$\begin{cases} \rho(0, e_1^*) = e_i^* \circ \alpha_2 \\ \rho(u_1^*, 0) = u_1^* \circ \partial_2 \\ \rho(u_2^*, 0) = u_2^* \circ \partial_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \rho(0, e_1^*)(u_1 \wedge u_2) = \lambda_i \\ \rho(u_1^*, 0)(u_1 \wedge u_2) = -x_2 \\ \rho(u_2^*, 0)(u_1 \wedge u_2) = x_1 \end{cases}.$$

Como x_2 é $R/(x_1)$-regular, por 3.6,(i), existe um conjunto finito $X \subset k$ tal que para toda unidade $\varepsilon \in R$ satisfazendo $\overline{\varepsilon} \notin X$, $\varepsilon \cdot \lambda_t + x_2$ é $R/(x_1)$-regular. Assim, tome uma unidade $\varepsilon \in R$ com $\overline{\varepsilon} \notin X$ e defina $y_1 := x_1, y_2 := x_2 + \varepsilon \cdot \lambda_t$ e $\mathbf{y} = y_1, y_2$. Note que $\mathbf{y}$ é um sequência regular contida em K.

Como já fizemos, seja $\{v_1, v_2\}$ uma base de R^2 e considere $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{y}; R)$ construído sobre este conjunto e construa um morfismo de $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{y}; R)$ para $0 \to M^* \to K_1^*(\mathbf{x}; R) \oplus F^* \xrightarrow{\rho} K \to 0$ a partir da inclusão $(\mathbf{y}) \hookrightarrow K$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M^* \arrow[r, "{(\alpha_1^*,\ -\iota^*)}"] & K_1^*(\mathbf{x}; R) \oplus F^* \arrow[r, "\rho"] & K \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_2(\mathbf{y}; R) \arrow[r, "\partial_2'"'] \arrow[u, "\beta_2"] & K_1(\mathbf{y}; R) \arrow[r, "\partial_1'"'] \arrow[u, "\beta_1"] & (\mathbf{y}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0 \end{tikzcd}$$

com $\beta_1(v_1) = (u_2^*, 0)$ e $\beta_1(v_2) = (-u_1^*, \varepsilon \cdot e_t^*)$. Note que isso de fato torna o primeiro quadrado comutativo, pois $\rho(-u_1^*, \varepsilon\cdot e_t^*) = x_2+\varepsilon\cdot\lambda_t$. Utilizando os mesmos argumentos, obtemos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow (K_1^*(\mathbf{x};R)\oplus F^*)^* \xrightarrow{(\beta_1^*,\ -\tau^*)} K_1^*(\mathbf{y};R)\oplus M^{**} \longrightarrow J \longrightarrow 0,$$

onde $J = (\mathbf{y}) : K$. Uma vez que $M^{**}\simeq M$, $F^{**}\simeq F$ e $K_1^{**}(\mathbf{x};R)\simeq K_1(\mathbf{x};R)$, podemos construir uma nova sequência exata $0\to K_1(\mathbf{x};R)\oplus F \overset{\varphi}{\to} K_1^*(\mathbf{y};R)\oplus M \to J\to 0$ compondo estes isomorfimos, como mostrado no diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (K_1^*(\mathbf{x};R)\oplus F^*)^* \arrow[r, "(\beta_1^*,-\tau^*)"] & K_1^*(\mathbf{y};R)\oplus M^{**} \arrow[r] & J \arrow[r] & 0 \\
 & K_1^{**}(\mathbf{x};R)\oplus F^{**} \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & K_1^*(\mathbf{y};R)\oplus M \arrow[u, leftrightarrow, "\simeq"'] \arrow[ur, bend right] & & \\
0 \arrow[r] & K_1(\mathbf{x};R)\oplus F \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[ur, bend right, "\varphi"'] & & &
\end{tikzcd}$$

O homomorfismo φ é definido pelas composições dos mapas apontados acima. Tentaremos calcular φ nos geradores de $K_1(\mathbf{x};R)\oplus F$. Seguindo as setas até $K_1^*(\mathbf{y};R)\oplus M^{**}$, obtemos

$$(0,e_i)\mapsto(0,e_i^{**})\mapsto 0\oplus e_i^{**}\mapsto([0\oplus e_i^{**}]\circ\beta_1, -[0\oplus e_i^{**}]\circ\tau)$$

$$(u_1,0)\mapsto(u_1^{**},0)\mapsto u_1^{**}\oplus 0\mapsto([u_1^{**}\oplus 0]\circ\beta_1, -[u_1^{**}\oplus 0]\circ\tau)$$

$$(u_2,0)\mapsto(u_2^{**},0)\mapsto u_2^{**}\oplus 0\mapsto([u_2^{**}\oplus 0]\circ\beta_1, -[u_2^{**}\oplus 0]\circ\tau),$$

onde a notação $\omega_1\oplus\omega_2$ é simplesmente o homomorfismo $\omega_1\oplus\omega_2(-) = \omega_1(-)+\omega_2(-)$. Aplicando as primeiras coordenadas na base $\{v_1, v_2\}$, tem-se

$$\begin{cases}([0\oplus e_i^{**}]\circ\beta_1)(v_1) = (0\oplus e_i^{**})(u_2^*,0) = 0\\ ([0\oplus e_i^{**}]\circ\beta_1)(v_2) = (0\oplus e_i^{**})(-u_1^*,\varepsilon\cdot e_t^*) = \varepsilon\cdot\delta_{it}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}[0\oplus e_t^{**}]\circ\beta_1 = \varepsilon\cdot v_2^*\\ [0\oplus e_i^{**}]\circ\beta_1 = 0 \quad (i\neq t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}([u_1^{**}\oplus 0]\circ\beta_1)(v_1) = (u_1^{**}\oplus 0)(u_2^*,0) = 0\\ ([u_1^{**}\oplus 0]\circ\beta_1)(v_2) = (u_1^{**}\oplus 0)(-u_1^*,\varepsilon\cdot e_t^*) = -1\end{cases} \Longrightarrow\ [u_1^{**}\oplus 0]\circ\beta_1 = -v_2^*$$

$$\begin{cases}([u_2^{**}\oplus 0]\circ\beta_1)(v_1) = (u_2^{**}\oplus 0)(u_2^*,0) = 1\\ ([u_2^{**}\oplus 0]\circ\beta_1)(v_2) = (u_2^{**}\oplus 0)(-u_1^*,\varepsilon\cdot e_t^*) = 0\end{cases} \Longrightarrow\ [u_2^{**}\oplus 0]\circ\beta = v_1^*.$$

Para um elemento $m^*\in M^*$, sabemos que $m^*\circ\alpha_1 = (m^*\circ\alpha_1)(u_1)u_1^* + (m^*\circ\alpha_1)(u_2)u_2^*$. Assim, as segundas coordenadas terão a seguinte forma:

$$-([0 \oplus e_i^{**}] \circ \tau)(m^*) = -[0 \oplus e_i^{**}](m^* \circ \alpha_1, m^* \circ \iota) = e_t^{**}(m^* \circ \iota) = \phi_{\iota(e_i)}(m^*)$$

$$-([u_1^{**} \oplus 0] \circ \tau)(m^*) = -u_1^{**}(m^* \circ \alpha_1) = -m^*(f_1) = -\phi_{f_1}(m^*)$$

$$-([u_2^{**} \oplus 0] \circ \tau)(m^*) = -u_2^{**}(m^* \circ \alpha_1) = -m^*(f_2) = -\phi_{f_2}(m^*),$$

onde ϕ_w é a imagem de $w \in M$ pelo mapa canônico $M \to M^{**}$. Como $\phi_{f_j} \approx f_j$ pelo isomorfismo $M^{**} \simeq M$ e $e_i^{**} \approx e_i \approx \iota(e_i)$ por $F^{**} \simeq F \overset{\iota}{\hookrightarrow} M$, concluímos que a imagem em $K_1^*(\mathbf{y}; R) \oplus M$ dos homomorfismos calculados é

$$\begin{cases} \varphi(0, e_t) = (\varepsilon \cdot v_2^*, e_t), \\ \varphi(0, e_i) = (0, e_i) \quad (i \neq t), \\ \varphi(u_1, 0) = (-v_2^*, -f_1), \\ \varphi(u_2, 0) = (v_1^*, -f_2) \end{cases}$$

Segue pelas duas últimas equações que a composição

$$\psi := p_1 \circ \varphi : K_1(\mathbf{x}; R) \oplus F \xrightarrow{\varphi} K_1^*(\mathbf{y}; R) \oplus M \xrightarrow{p_1} K_1^*(\mathbf{y}; R)$$

é sobrejetiva. Mais ainda, seu núcleo é dado por

$$\ker \psi = \langle (0, e_1), ..., (0, e_{t-1}), (\varepsilon \cdot u_1, e_t), (0, e_{t+1}), ..., (0, e_r) \rangle.$$

Para ver isso, podemos mostrar as duas inclusões. Tomando um elemento da forma

$$\Theta = a_t(\varepsilon \cdot u_1, e_t) + \sum_{i \neq t} a_i(0, e_i)$$

e aplicando φ, obtemos

$$\varphi(\Theta) = a_t(0, e_t - \varepsilon \cdot f_1) + \sum_{i \neq t} a_i(0, e_i),$$

de modo que $\psi(\Theta) = 0$. Reciprocamente, dado um elemento $\Theta \in \ker \psi$, podemos escrevê-lo na forma geral

$$\Theta = a(u_1, 0) + b(u_2, 0) + \sum_{i=1}^{r} a_i(0, e_i).$$

Daí,

$$\begin{aligned} 0 = \psi(\Theta) &= p_1\left(a(-v_2^*, -f_1) + b(v_1^*, -f_2) + a_t(\varepsilon \cdot v_2^*, e_t) + \sum_{i \neq t} a_i(0, e_i)\right) \\ &= (\varepsilon \cdot a_t - a)v_2^* + bv_1^*. \end{aligned}$$

Como $\{v_1^*, v_2^*\}$ é LI, concluímos que $b = 0$ e $a = \varepsilon \cdot a_t$, exatamente o que queríamos. Defina $L := (p_2 \circ \varphi)(\ker \psi)$. Note que $L \simeq \ker \psi$. De fato, pode-se facilmente verificar que o homomorfismo $\ker \psi \longrightarrow L$ definido por $\Theta \mapsto p_2 \circ \varphi(\Theta)$, é sobrejetivo por construção. Para ver que ele é também injetivo, suponha que $p_2 \circ \varphi(\Theta) = 0$ para $\Theta \in \ker \psi$. Como vimos anteriormente, Θ pode ser escrito na forma

$$\Theta = a_t(\varepsilon \cdot u_1, e_t) + \sum_{i \neq t} a_i(0, e_i),$$

donde

$$0 = p_2 \circ \varphi(\Theta) = a_t(e_t - \varepsilon \cdot f_1) + \sum_{i \neq t} a_i e_i \in M \tag{$\star_1$}$$

Aplicando π a ($\star_1$), obtemos

$$0 = -\varepsilon \cdot a_t \pi(f_1) = -\varepsilon \cdot a_t \cdot x_1 \implies \varepsilon \cdot a_t = 0 \implies a_t = 0.$$

Segue da equação ($\star_1$) que cada $a_i = 0$ e assim, $\Theta = 0$. Por computação direta, assim como feito para $\ker \psi$, mostra-se que $L = \langle e_1, ..., e_{t-1}, e_t - \varepsilon \cdot f_1, e_{t+1}, ..., e_r \rangle \subset M$. Em particular, L é gerado por r elementos. Calculando π em uma combinação linear nula de $\{e_1, ..., e_{t-1}, e_t - \varepsilon \cdot f_1, e_{t+1}, ..., e_r\}$, concluímos que L é livre. Por fim, considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & L \arrow[d] & M \arrow[d] & J \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_1(\mathbf{x}; R) \oplus F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & K_1^*(\mathbf{y}; R) \oplus M \arrow[r] \arrow[d, "p_1"] & J \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1^*(\mathbf{y}; R) \arrow[r, "1"] \arrow[d] & K_1^*(\mathbf{y}; R) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

O Lema da Serpente nos garante a sequência exata $0 \to L \to M \to J \to 0$. Os links $I \sim_{\mathbf{x}} K \sim_{\mathbf{y}} J$ dizem que J é um ideal CM de altura 2.

Quando ($\star$) for tight, $\{e_1, ..., e_r\}$ faz parte de um conjunto gerador minimal de M, podemos escolher, de acordo com 3.6,(ii), uma unidade $\overline{\varepsilon} \notin X$ de modo que $\{e_1, ..., e_{t-1}, e_t + \varepsilon \cdot f_1, ..., e_r\}$ também faça parte de um conjunto gerador minimal de M. Dessa forma, a sequência ($\star\star$) obtida para J também é tight. $\square$

Lema 3.8. Seja R um domínio noetheriano. Então ideais isomorfos de grade 2 são necessariamente iguais.

Demonstração. Sejam $I, J \subset R$ ideais de grade 2 e $\varphi : I \to J$ um isomorfismo. Então $\operatorname{Hom}(R/I, R) = \operatorname{Ext}^1(R/I, R) = 0$ e $R^* \simeq I^*$ (o mesmo vale para J). Segue que todo homomorfismo $I \to R$ vem de um homomorfismo $R \to R$. Isto nos diz φ deve ser uma multiplicação por um elemento $r \in R$. Pela mesma razão, φ^{-1} é a multiplicação por um elemento $r' \in R$. Em particular, para $i \neq 0$ em I, vale que $r'ri = i$ e assim $r'r = 1$. Assim, dado qualquer $i \in I$, $ri \in J$. Multiplicando por r', obtemos $i \in J$. Concluímos que $I \subset J$. Por simetria, a igualdade segue. $\square$

Enunciamos agora o principal resultado desta seção.

Teorema 3.9. *Seja R um domínio Gorenstein local com corpo residual infinito k. Sejam $0 \to F' \to M' \to I' \to 0$ e $0 \to F'' \to M'' \to I'' \to 0$ sequências de Bourbaki. São equivalentes:*

(i) $M' \underset{est}{\simeq} M''$;

(ii) $I' \underset{p}{\sim} I''$.

Demonstração. Suponha que $M' \underset{\text{est}}{\simeq} M''$, isto é, que existe um módulo livre G tal que, digamos, $M' \simeq M'' \oplus G$. Dessa forma, estendemos $0 \to F'' \to M'' \to I'' \to 0$ de forma trivial para $0 \to F'' \oplus G \to M' \to I'' \to 0$. Pela aditividade do posto, temos que $\operatorname{rank}(F'' \oplus G) = \operatorname{rank} M' - 1 = \operatorname{rank} F'$. É possível assumir, após realizar uma extensão trivial de uma das sequências se necessário, que $M' = M'' =: M$ e $\operatorname{rank} F' = \operatorname{rank} F''$, ou seja, escrevemos

$$0 \longrightarrow F' \xrightarrow{\iota'} M \xrightarrow{\pi'} I' \longrightarrow 0 \quad e \quad 0 \longrightarrow F'' \longrightarrow M \xrightarrow{\pi''} I'' \longrightarrow 0,$$

com $r := \operatorname{rank} F' = \operatorname{rank} F''$.

Afirmação. Existe um ideal $\widehat{I}$ na classe de linkage par de I' que admite uma sequência de Bourbaki tight

$$0 \longrightarrow \widehat{F} \longrightarrow M \longrightarrow \widehat{I} \longrightarrow 0.$$

Prova da afirmação. Lembre que $M \otimes k \simeq M/\mathfrak{m}M$ e observe o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
& F' \otimes k \arrow[r, "\iota' \otimes k"] \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \otimes k \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & I' \otimes k \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
& F'/\mathfrak{m}F' \arrow[r, "\bar{\iota'}"'] \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M/\mathfrak{m}M \arrow[r] \arrow[d, equal] & I'/\mathfrak{m}I \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & (F' + \mathfrak{m}M)/\mathfrak{m}M \arrow[r, hook] & M/\mathfrak{m}M & &
\end{tikzcd} \tag{$\star_4$}$$

O homomorfismo η indicado acima, dado por $f' + \mathfrak{m}F' \mapsto f' + \mathfrak{m}M$, é sobrejetivo, e para que seja injetivo (logo isomorfismo) é necessário e suficiente que $\iota' \otimes k$ seja injetivo. Isto é, em geral, $(\star_4)$ diz que

$$\dim_k \left(\frac{F' + \mathfrak{m}M}{\mathfrak{m}M} \right) \leq \dim_k \left(\frac{F'}{\mathfrak{m}F'} \right) = r,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, a sequência de Bourbaki em questão é tight. Seja $t := 1 + \dim_k((F' + \mathfrak{m}M)/\mathfrak{m}M)$. Assim sendo, existe um conjunto $\{e'_1, ..., e'_{t-1}\} \subset F'$ tal que $\{e'_1 + \mathfrak{m}M, \ldots, e'_{t-1} + \mathfrak{m}M\}$ é LI em $M/\mathfrak{m}M$. Pela sobrejetividade de η, o conjunto $\{e'_1 + \mathfrak{m}F', ..., e'_{t-1} + \mathfrak{m}F'\}$ é LI, podendo então ser completado até uma base $\{e'_1 + \mathfrak{m}F', ..., e'_{t-1} + \mathfrak{m}F', e'_t + \mathfrak{m}F', ..., e'_r + \mathfrak{m}F'\}$ de $F'/\mathfrak{m}F'$. Por essas observações, podemos escrever $F' = \bigoplus_{i=1}^r R \cdot e'_i$, onde $\{e_1, ..., e_{t-1}\}$ é parte de um conjunto minimal de geradores de M. Escolha, por Nakayama, um elemento $f_1 \in M \backslash (\mathfrak{m}M + F')$. Então $x_1 := \pi'(f_1)$ é um elemento não nulo (logo regular) de I, caso contrário $f_1 \in \ker \pi' = F'$. Escolha $f_2 \in M$ de modo que $\mathbf{x} = x_1, x_2$ seja uma sequência regular, com $x_2 = \pi'(f_2)$. Por 3.7, existe um ideal $J \sim_{\mathrm{p}} I'$ que pode ser inserido em uma sequência de Bourbaki $0 \to L \to M \to J \to 0$, com $L = \langle e'_1, ..., e'_{t-1}, e'_t + \varepsilon \cdot f_1, e'_{t+1}, ..., e'_r \rangle$, para alguma unidade $\varepsilon \in R$ adequada. Isso implica que $\{e'_1, ..., e'_{t-1}, e'_t + \varepsilon \cdot f_1\}$ tem classe residual LI em $M/\mathfrak{m}M$. Para ver isso, suponha que

$$\sum_{i=1}^{t-1} \bar{a}_i \bar{e}_i + \bar{a}_t(\bar{e}_t + \bar{\varepsilon} \cdot \bar{f}_1) = 0,$$

para $\bar{a}_i \in R/\mathfrak{m}$, $i = 1, ..., t$. Então $a_t \varepsilon \cdot f_1 \in \mathfrak{m}M + F'$. Se $a_t \notin \mathfrak{m}$, então concluiríamos que $f_1 \in \mathfrak{m}M + F'$, uma contradição. Segue que $\bar{a}_i = \bar{0}$, para todo $i = 1, ..., t$, e $\{e'_1, ..., e'_{t-1}, e'_t + \varepsilon \cdot f_1\}$ tem classe residual LI em $M/\mathfrak{m}M$. Isso nos mostra que o módulo livre L obtido satisfaz

$$\dim_k \left(\frac{L + \mathfrak{m}M}{\mathfrak{m}M} \right) \geq t.$$

Consequentemente, por um processo indutivo de 3.7, obtemos $0 \to \widehat{F} \to M \to \widehat{I} \to 0$, onde $\widehat{I} \sim_{\mathrm{p}} I'$ e $\widehat{F}$ é um módulo livre tal que

$$\dim_k \left(\frac{\widehat{F} + \mathfrak{m}M}{\mathfrak{m}M} \right) = r.$$

□

Diante do resultado mostrado, podemos aplicar o mesmo procedimento à segunda sequência e assumir a partir de agora que ambas as sequências de Bourbaki dadas são tight.

Defina o parâmetro

$$t(F', F'') := 1 + \sup\{\operatorname{rank} G |\ G \subset F' \cap F'', \quad G \ \text{ é somando livre de } \ F' \ \text{ e } \ F''\}$$

e usemos indução decrescente em $t(F', F'')$. Se $t(F', F'') > r = \operatorname{rank} F' = \operatorname{rank} F''$, então $F' = F''$ e, assim, $I' \simeq I''$ como R-módulos. Por 3.8, ideais isomorfos de grade 2 são necessariamente iguais.

Assuma que o resultado está mostrado para módulos F' e F'' tais que $t(F', F'') \geq t$ e mostremos que vale para $t - 1$. Escreva $F' = \bigoplus_{i=1}^{r} R \cdot e_i'$, $F'' = \bigoplus_{i=1}^{r} R \cdot e_i''$, com $e_i' = e_i''$ para $1 \leq i < t$. Veja que $e_t' \notin F''$, pois se $G = \bigoplus_{i=1}^{t-1} R \cdot e_i'$ é um somando livre maximal comum de F' e F'', então $G \oplus R \cdot e_t'$ é um somando direto livre de posto t de F', isto é, $\{e_1' + \mathfrak{m}F, ..., e_t' + \mathfrak{m}F\}$ é LI. Como as sequências são tight, tem-se

$$\begin{tikzcd}
F'/\mathfrak{m}F' \simeq (F' + \mathfrak{m}M)/\mathfrak{m}M \arrow[dr, hook, bend right] & & (F'' + \mathfrak{m}M)/\mathfrak{m}M \simeq F''/\mathfrak{m}F'' \arrow[dl, hook', bend left] \\
& M/\mathfrak{m}M &
\end{tikzcd}$$

de modo que $\{e_1' + \mathfrak{m}M, ..., e_t' + \mathfrak{m}M\}$ é LI e, caso $e_t' \in F''$, poderíamos garantir, pelo diagrama acima, que $\{e_1 + \mathfrak{m}F'', ..., e_t + \mathfrak{m}F''\}$ é LI. Isto implicaria em $G \oplus R \cdot e_t'$ sendo somando direto livre também de F'', contradizendo a igualdade $t(F', F'') = t - 1$.

Segue, portanto, que $e_t' \notin F''$ e pelo mesmo argumento que $e_t'' \notin F'$. Sejam $f_1' := e_t''$ e $f_1'' = e_t'$. Claramente $f_1' \notin \ker \pi'$ e $f_1'' \notin \ker \pi''$. Como I' e I'' são ideais de altura 2 em um domínio Cohen-Macaulay, existem $f_2' \in I'$, $f_2'' \in I''$, com $x_i' := \pi'(f_i')$ e $x_i'' = \pi''(f_i'')$, tais que $\mathbf{x}' = x_1', x_2'$ e $\mathbf{x}'' = x_1'', x_2''$ são sequências regulares em I' e I'', respectivamente. Usando 3.7, podemos encontrar X' e X'' contidos em k tais que, para quaisquer unidades $\varepsilon', \varepsilon'' \in R$ satisfazendo $\overline{\varepsilon'} \notin X'$ e $\overline{\varepsilon''} \notin X''$, existam sequências de

Bourbaki tight $0 \to L' \to M \to J' \to 0$ e $0 \to L'' \to M \to J'' \to 0$, onde

$$L' = \langle e'_1, ..., e'_{t-1}, e'_t + \varepsilon' \cdot f'_1, e'_{t+1}, ..., e'_r \rangle \subset M$$

$$L'' = \langle e''_1, ..., e''_{t-1}, e''_t + \varepsilon'' \cdot f''_1, e''_{t+1}, ..., e''_r \rangle \subset M.$$

(Lembre que $J' \sim_{\mathrm{p}} I'$ e $J'' \sim_{\mathrm{p}} I''$). Já que $X', X'' \subset k$ são finitos, é possível encontrar uma unidade $\varepsilon \in R$ tal que $\overline{\varepsilon} \notin X'$ e $\overline{\varepsilon^{-1}} \notin X''$. Para essa escolha de ε, escrevendo $\varepsilon' := \varepsilon$ e $\varepsilon'' := \varepsilon^{-1}$, concluímos que $e_t + \varepsilon' \cdot f'_1 \in L' \cap L''$, isto é, $G \oplus R \cdot (e_t + \varepsilon' \cdot f'_1)$ é somando livre direto de L' e L''. Em particular $t(L', L'') \geq t$ e nossa hipótese de indução garante que $J' \sim_{\mathrm{p}} J''$ e, consequentemente, $I' \sim_{\mathrm{p}} I''$.

Mostremos $(ii) \implies (i)$. Como $\underset{\text{e st}}{\simeq}$ é uma relação de equivalência, logo transitiva, podemos supor que o link $I' \sim_{\mathrm{p}} I''$ é feito por apenas um ideal K, ou seja, $I' \sim_{\mathbf{x}} K \sim_{\mathbf{y}} I''$. De acordo com a demonstração de 3.7, as sequências de Bourbaki dadas garantem as sequências exatas

$$0 \longrightarrow M'^* \longrightarrow F'^* \oplus K_1^*(\mathbf{x}; R) \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M''^* \longrightarrow F''^* \oplus K_1^*(\mathbf{y}; R) \longrightarrow K \longrightarrow 0.$$

Aplicando o Lema de Schanuel, concluímos que

$$M'^* \oplus F''^* \oplus K_1^*(\mathbf{y}; R) \simeq M''^* \oplus F'^* \oplus K_1^*(\mathbf{x}; R),$$

ou seja, M'^* e M''^* são estavelmente isomorfos. Tomando o dual, concluímos que $M' \underset{\text{est}}{\simeq} M''$. ☐

Corolário 3.10. Seja R um domínio Gorenstein local e normal. Existe uma bijeção entre as classes de linkage par de ideais Cohen-Macaulay de altura 2 e classes de isomorfismo estável de R-módulos Cohen-Macaulay maximais orientáveis.

Demonstração. Este corolário resume o que fizemos nestes dois últimos capítulos. Seja R como no enunciado. Se I e I' são um ideais CM de altura 2, então 2.20, (i), garante a existência de módulos M e M' CM maximais orientáveis, assim como sequências de Bourbaki $0 \to F \to M \to I \to 0$ e $0 \to F' \to M' \to I' \to 0$. Se $I' \sim_{\mathrm{p}} I$, então $M \underset{\text{est}}{\simeq} M'$ por 3.9, isto é, a classe de linkage em questão determina um única classe de isomorfismo estável. Reciprocamente, se M e M' são MCM orientáveis e estavelmente isomorfos, 2.20, (ii), fornece também ideais de Bourbaki I e I', os quais devem estar na mesma classe de linkage par por 3.9. ☐

Corolário 3.11. Sejam R um domínio Gorenstein local e $I', I'' \subset R$ ideais Cohen-Macaulay de altura 2. Então $I' \sim_{\mathrm{p}} I''$ se, e somente se, $\mathrm{syz}_1(I') \underset{\text{est}}{\simeq} \mathrm{syz}_1(I'')$.

Demonstração. Como enunciamos em 3.5, se I de altura 2 pode ser inserido em uma sequência de Bourbaki $0 \to F \to M \to I \to 0$, então o ideal $J = (\mathbf{x}) : I$ tem primeira sizígia estavelmente isomorfa a M^*. Dessa forma, utilizando a notação dada, tome $I' \sim J'$ e $I'' \sim J''$ links arbitrários e $0 \to F' \to M' \to J' \to 0$ e $0 \to F'' \to M'' \to J'' \to 0$ sequências de Bourbaki naturais. Temos as seguintes equivalências:

$$I' \sim_{\mathrm{p}} I'' \iff J' \sim_{\mathrm{p}} J'' \iff M' \underset{\text{est}}{\simeq} M'' \iff M'^* \underset{\text{est}}{\simeq} M''^* \iff \operatorname{syz}_1(I') \underset{\text{est}}{\simeq} \operatorname{syz}(I''),$$

como desejado. □

Corolário 3.12. Sejam R um domínio Gorenstein local e $0 \to F' \to M' \to I' \to 0$ e $0 \to F'' \to M'' \to I'' \to 0$ sequências de Bourbaki. Então $I' \sim_{\mathrm{i}} I''$ se, e somente se, $M' \underset{\text{est}}{\simeq} D(M'')$.

Demonstração. Tome um link arbitrário $J \sim I'$, de forma que $\operatorname{syz}_1(J) \underset{\text{est}}{\simeq} M'^*$. Temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} I' \sim_{\mathrm{i}} I'' \iff J \sim_{\mathrm{p}} I'' &\iff M'^* \underset{\text{est}}{\simeq} \operatorname{syz}_1(J) \underset{\text{est}}{\simeq} \operatorname{syz}_1(I'') \underset{\text{est}}{\simeq} \operatorname{syz}_1(M'') \\ &\iff M' \underset{\text{est}}{\simeq} D(M''). \end{aligned}$$

□

Lema 3.13. Seja R um domínio Gorenstein local. Suponha que $0 \to F' \to M' \xrightarrow{\pi'} I' \to 0$ e $0 \to F'' \to M'' \xrightarrow{\pi''} I'' \to 0$ sejam sequências de Bourbaki. Tome $\mathbf{x} = x', x''$ uma sequência regular tal que $x' \in I'$ e $x'' \in I''$. Então existe uma sequência de Bourbaki

$$0 \longrightarrow F' \oplus F'' \oplus R \longrightarrow M' \oplus M'' \longrightarrow x''I' + x'I'' \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Em primeiro lugar, note que é sempre possível tomar uma sequência regular como no enunciado acima. Com efeito,

$$\operatorname{ht} I' \cap I'' = \operatorname{grade}(I' \cap I'') = \min\{\operatorname{grade} I', \operatorname{grade} I''\} = 2,$$

logo basta tomar uma sequência regular em $I' \cap I''$. Segundo, as sequências de Bourbaki dadas já nos garantem a sequência exata

$$0 \longrightarrow F' \oplus F'' \longrightarrow M' \oplus M'' \xrightarrow{(\pi', \pi'')} I' \oplus I'' \longrightarrow 0,$$

apenas tomando soma direta. Considere o mapa $\varphi : I' \oplus I'' \longrightarrow x''I' + x'I''$ dado por $\varphi(y', y'') = x''y' + x'y''$. É claro que φ é sobrejetivo e seu núcleo é o submódulo

$R \cdot (-x', x'')$. Já que (π', π'') é sobrejetivo, tome $e \in M' \oplus M''$ tal que $(\pi', \pi'')(e) = (-x', x'')$. A soma $F' \oplus F'' + R \cdot e \subset M' \oplus M''$ é direta. De fato, $F' \oplus F''$ é levado em 0 via (π', π'') e $R \cdot e$ é levado em $R \cdot (-x', x'')$. Como x' é elemento regular, não pode existir elemento não nulo em $F' \oplus F'' \cap R \cdot e$. Concluímos que

$$\frac{M' \oplus M''}{F' \oplus F'' \oplus R \cdot e} \simeq \frac{I' \oplus I''}{R \cdot (-x', x'')} \simeq x''I' + x'I'',$$

como queríamos. Em particular, se tivéssemos tomado uma sequência regular distinta $\mathbf{y} = y', y''$, com $y' \in I'$ e $y'' \in I''$, concluímos que $x''I' + x'I'' \sim_{\mathrm{p}} y''I' + y'I''$ por 3.9. $\square$

Capítulo 4

Aplicação: Módulos MCM de posto 2 sobre anéis de hipersuperfície

Exibimos agora um resultado que evidencia como o conhecimento sobre ideais de Bourbaki fornece informações sobre o módulo MCM central. Trabalharemos agora sobre um domínio normal de hipersuperfície $R = A/(f)$, com $\mathfrak{n}$ sendo o ideal maximal de A.

Teorema 4.1. *Seja M um R-módulo MCM orientável de posto 2. Então $\mu(M)$ é par.*

Demonstração. Considere M um R-módulo como no enunciado. Escolha $0 \to F \to M \to I \to 0$ uma sequência de Bourbaki garantida por 2.20, (b). Uma vez que $\operatorname{rank} M = 2$, deve-se ter $\operatorname{rank} F = 1$. Podemos escrever a sequência na forma $0 \to R \xrightarrow{\eta} M \to I \to 0$. Pela afirmação feita na demonstração de 3.9, podemos assumir que a sequência tomada é tight. O fato de M ser MCM implica em um mapa sobrejetivo $R \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(I, R)$. Temos as igualdades

$$1 = \mu(\operatorname{Ext}^1(I, R)) = \mu(\operatorname{Ext}^2(R/I, I)) = \mu(\omega_{R/I}) = r(R/I).$$

Logo R/I é um anel Cohen-Macaulay de tipo 1, isto é, um anel de Gorenstein por 1.17. Escreva $I = J/(f)$, onde J é a pré-imagem de I pelo mapa canônico $A \longrightarrow R$. Então $\operatorname{ht} I + \dim R/I = \dim R = \dim A - 1$. Mas $R/I \simeq A/J$, logo $3 = \operatorname{ht} I + 1 = \dim A - \dim A/J = \operatorname{ht} J$. Isto nos diz que A/J é um anel de Gorenstein e o ideal J tem altura 3. Por [6], Theorem 3.4.1 (b), $\mu(J)$ é um número ímpar. Para mostrarmos o resultado, é suficiente que se tenha $f \in \mathfrak{n}J$. De fato, observe que a sequência de Bourbaki tomada garante $\mu(M) = \mu(I) + 1$, uma vez que é tight. Por outro lado

$$\mu(I) = \dim_k I \otimes k = \dim_k J/(f) \otimes k = \dim_k \frac{J/(f)}{\mathfrak{n}J/(f)} = \dim_k \frac{J}{\mathfrak{n}J + (f)}.$$

Se fosse o caso de $f \in \mathfrak{n}J$, então $\mu(I) = \mu(J)$ e, portanto, $\mu(M) = \mu(J) + 1$ seria par.

Assim, suponha que o contrário vale, isto é, que $f \notin \mathfrak{n}J$. Temos que $\operatorname{proj\,dim}_A J < \infty$, já que A é regular, logo a fómula de Auslander-Buchsbaum junto com 1.4 aplicada à $0 \to J \to A \to A/J \to 0$ garante $\operatorname{proj\,dim}_A J = 2$. Tome $0 \to F_3 \overset{\alpha}{\to} F_2 \overset{\alpha_2}{\to} F_1 \overset{\alpha_1}{\to} J \to 0$ uma A-resolução livre minimal de J. Mas R/J ser Gorenstein implica que $F_3 \simeq A$, também por [6], Theorem 3.4.1,(b). Mais ainda $J = I_1(\alpha)$, o ideal determinantal de primeira ordem associado a α. Reescrevendo nossa hipótese, temos $f \notin \mathfrak{n}I_1(\alpha)$. Escolha $g \in F_1$ tal que $g \mapsto f \in J$ pelo mapa sobrejetivoα_1. Considere os mapas $\overline{\alpha}_2 : F_2 \to F_1/Ag$ definido por $\overline{\alpha}_2(x) = \alpha_2(x) + Ag$ e $\overline{\alpha}_1 : F_1/Ag \to I$ dado por $\overline{\alpha}_1(x + Ag) = \alpha_1(x) + fA$. Estes são simplesmente os homomorfismos induzidos pela resolução livre de J; é fácil verificar que estão bem definidos, bem como que a sequência

$$0 \longrightarrow F_3 \xrightarrow{\alpha} F_2 \xrightarrow{\overline{\alpha}_2} F_1/Ag \xrightarrow{\overline{\alpha}_1} I \longrightarrow 0 \tag{R1}$$

é exata. Mais ainda, a sequência acima é uma resolução A-livre minimal do ideal I. Precisamos mostrar que F_1/Ag é um A-módulo livre e, em virtude da caracterização 1.30, que $\overline{\alpha}_2(F_2) \subset \mathfrak{n}(F_1/Ag)$. A última é óbvia pela definição direta de $\overline{\alpha}_2$. Para ver que F_1/Ag é livre, basta observar que o elemento g não pertence a $\mathfrak{n}F_1$. Se este fosse o caso, teríamos $f = \alpha_1(g) \in \alpha(\mathfrak{n}F_1) = \mathfrak{n}J$, contradizendo nossa hipótese. Segue então que $g + \mathfrak{n}F_1 \neq 0$, sendo de uma base para $F_1/\mathfrak{n}F_1$. Logo g é parte de uma base para o próprio F_1, isto é, $F_1 \simeq Ag \oplus F_1'$, com F_1' livre. Mas $F_1' \simeq F_1/Ag$, como queríamos.

Por outro lado, lembre que M tem dimensão projetiva 1 por consequência direta da fórmula de Auslander-Buchsbaum, possuindo uma A-resolucão livre minimal na forma $0 \to F \overset{\varphi_2}{\to} F \overset{\varphi_1}{\to} M \to 0$ (tome uma resolução arbitrária de comprimento 1 e localize no elemento f para concluir que os módulos livres têm o mesmo posto). Podemos construir o seguinte diagrama comutativo a partir da sequência de Bourbaki inicial:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F \arrow[d, "\varphi_2"] & & \\
 & A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F \arrow[d, "\varphi_1"] & & \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Retiraremos do diagrama acima outra A-resolução livre para I, da seguinte forma. Defina os seguintes homomorfismos:

$$\overline{\varphi}_1 : F/\iota(A) \longrightarrow M/\eta(R), \quad \overline{\varphi}_1(u+\iota(A)) = \varphi_1(u) + \eta(R);$$

$$\overline{\varphi}_2 : F \longrightarrow F/\iota(A), \quad \overline{\varphi}_2(x) = \varphi_2(x) + \iota(A).$$

O mapa $\overline{\varphi}_2$ é definido por composição. Para ver que $\overline{\varphi}_1$ está bem definido, note que se $u \in \iota(A)$, então $\varphi_1(u) \in \varphi_1(\iota(A)) = \eta(p(A)) \subset \eta(R)$. Mostraremos que a sequência

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\beta} F \xrightarrow{\overline{\varphi}_2} F/\iota(A) \xrightarrow{\overline{\varphi}_1} M/\eta(R) \simeq I \longrightarrow 0 \tag{R2}$$

é uma resolução livre minimal de I.

Em primeiro lugar, mostremos que (R2) é exata. Claramente $\overline{\varphi}_2 \circ \beta = 0$. Se $x \in \ker \overline{\varphi}_2$, então $\overline{\varphi}_2(x) = \iota(a)$, para algum $a \in A$. Aplicando φ_1 e usando o diagrama construído, concluímos que $\eta(p(a)) = 0$ e portanto $a \in fA$. Mas então $\varphi_2(x) = i(fb) = \varphi_2(\beta(b))$, para algum $b \in A$. Como φ_2 é injetiva, $x \in \mathrm{Im}\ \beta$. Segue que $\ker \overline{\varphi}_2 = \mathrm{Im}\, \beta$.

Mais uma vez, é claro que $\overline{\varphi}_1 \circ \overline{\varphi}_2 = 0$. Seja $u + \iota(A) \in \ker \overline{\varphi}_1$. Então $\varphi_1(u) = \eta(a + fA) = \eta(p(a)$, para algum $a \in A$. Mas $\eta(p(a)) = \varphi_1(\iota(a))$, de modo que $u - \iota(a) \in \ker \varphi_1 = \mathrm{Im}\ \varphi_2$. Existe, portanto, algum $x \in F$ tal que $u + \iota(A) = \varphi_2(x) + \iota(A) = \overline{\varphi}_2(x)$, como queríamos. É trivial mostrar que $\overline{\varphi}_1$ é sobrejetiva.

Devemos mostrar também que o módulo $F/\iota(A)$ é livre. É suficiente provar que o mapa ι é split injetivo ou, analogamente, que $\iota(A)$ é fator direto livre de F. Suponha que $\iota(1) \in \mathfrak{n}F$. Nesse caso, $\varphi_1(\iota(1)) = \eta(1 + fA) \in \mathfrak{n}M$ e, assim, $\eta(1 + fA) + \mathfrak{n}M = 0$. Relembre o isomorfismo $M/\mathfrak{n}M \simeq_A M \otimes_A k$ e que $\eta(1+fA)+\mathfrak{n}M \approx \eta \otimes k((1+fA)\otimes 1)$. Já que o homomorfismo $\eta \otimes k$ é injetivo (tomamos a sequência de Bourbaki tight), tem-se que $1 + fA \in \mathfrak{n}/fA$, contradizendo a maximalidade de $\mathfrak{n}$. Portanto $\iota(1) \notin \mathfrak{n}F$, sendo parte de uma base para F. Computação direta mostra que (R2) é minimal.

Comparando (R1) com (R2), concluímos que $I_1(\alpha) = I_1(\beta)$. Isto segue do fato de que $\ker \overline{\varphi}_1 \simeq \ker \overline{\varphi}_1 \simeq \mathrm{syz}_1(I)$, uma vez que ambas as resoluções são minimais. Pelo Lema de Fitting ([9], Corollary 20.4), os ideais determinantais (ou os *invariantes de Fitting*) de ordem 1 são iguais. Chegamos em uma contradição, visto que (R2) garante que $f \in \mathfrak{n}I_1(\beta)$. $\square$

Apêndice

5.1 Grupo das classes dos divisores

Definição 5.1. Seja R um domínio com corpo de frações $Q(R)$. Chamamos de **ideal fracionário** de R um R-submódulo não-nulo $I \subset Q(R)$ para o qual existe um elemento $0 \neq x \in R$ tal que $xI \subset R$. Denotaremos por $\mathrm{Frac}(R)$ o conjunto dos ideais fracionários de R.

É imediato verificar que qualquer ideal não nulo de R é um ideal fracionário. Se $x \in Q(R)\backslash\{0\}$, também é verdade que $Rx \in \mathrm{Frac}(R)$. Ideais fracionários deste último tipo são chamados de **principais**.

Defina a seguinte relação em $\mathrm{Frac}(R)$. Para $I, J \in \mathrm{Frac}(R)$,

$$I \leq J \iff (x \in Q(R)\backslash\{0\},\ I \subset Rx \implies J \subset Rx)\,.$$

É fácil verificar que $I \sim J \iff I \leq J\ e\ J \leq I$ define uma relação de equivalência em $\mathrm{Frac}(R)$. O conjunto quociente $\mathrm{Frac}(R)/\sim$ é denotado por $\mathfrak{D}(R)$ e seus elementos são chamados de **divisores** em R. A classe de $I \in \mathrm{Frac}(R)$ é denotada por $\mathrm{div}(I)$. A classe de um ideal fracionário principal Rx é simplesmente escrita como $\mathrm{div}(x)$. Expomos alguns fatos úteis:

Proposição 5.2. Seja R um domínio. Então:

(i) Se $I, J \in \mathrm{Frac}(R)$, então $IJ \in \mathrm{Frac}(R)$;

(ii) $\mathrm{div}(I) = \mathrm{div}(J) \iff (R :_{Q(R)} I) = (R :_{Q(R)} J)$.

(iii) O homomorfismo $D : (J :_{Q(R)} I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(I, J)$, $x \mapsto (i \mapsto ix)$, é um isomorfismo de R-módulos.

Demonstração. Mostrar (i) é computação direta. Observemos que (ii) é uma tautologia. Com efeito, $I \subset Rx \iff x^{-1}I \subset R \iff x^{-1} \in (R :_{Q(R)} I)$. Isto é, a condição

$$x \in Q(R)\backslash\{0\},\ I \subset Rx \implies J \subset Rx$$

ocorre se, e somente se, $(R :_{Q(R)} I) \subset (R :_{Q(R)} J)$. Um argumento de simetria termina a demonstração.

Para (iii), é imediato que D é um homomorfismo. Construímos sua inversa: dado $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(I, J)$, observe que $\varphi(ii') = i\varphi(i') = i'\varphi(i)$, para $i, i' \in I\backslash\{0\}$. Isto nos fornece a igualdade $\varphi(i)/i = \varphi(i')/i'$ em $Q(R)$. Defina $D' : \mathrm{Hom}_R(I, J) \to (J :_{Q(R)} I)$ por $D'(\varphi) = \varphi(i)/i$, para algum $i \in I\backslash\{0\}$. Pela observação anterior, o quociente não depende da escolha de i e se $i' \in I$, $\varphi(i)/i \cdot i' = \varphi(i')i/i = \varphi(i') \in J$; isto mostra que D' está bem definida. É também imediato verificar a aditividade e R-linearidade de D'. Para qualquer $x \in (J :_{Q(R)} I)$, $D(x) : I \to J$ é dado por $D(x)(i) = ix$. Logo, se $i \in I\backslash\{0\}$, $D'(D(x)) = D(x)(i)/i = ix/i = x$. Por outro lado, dado $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(I, J)$, $D(D'(\varphi)) = D(\varphi(i)/i)$ é a multiplicação por $\varphi(i)/i$. Então, para todo $i' \in I$,

$$D(D'(\varphi))(i') = D(\varphi(i)/i)(i') = \varphi(i)/i \cdot i' = \varphi(i')i/i = \varphi(i'),$$

concluindo que D e D' são inversas uma da outra. □

Proposição 5.3. Seja R um domínio. Então:

(i) A operação $\mathrm{div}(I) + \mathrm{div}(J) := \mathrm{div}(IJ)$ em $\mathfrak{D}(R)$ está bem definida e transforma $\mathfrak{D}(R)$ em um monoide comutativo com elemento neutro $\mathrm{div}(1)$.

(ii) $\mathfrak{D}(R)$ é um grupo com a operação definida acima se, e somente se, R é um domínio noetheriano integralmente fechado em $Q(R)$.

Demonstração. Ver [5], Chapter 7, §1.2, Proposition 3 e Theorem 1. □

À luz da proposição acima, se (ii) ocorre, $\mathfrak{D}(R)$ é chamado de **grupo dos divisores** de R. Nesse caso, o conjunto $\mathfrak{P}(R) := \{\mathrm{div}(x) |\ x \in Q(R)\backslash\{0\}\}$ é um subgrupo de $\mathfrak{D}(R)$ chamado de **subgrupo dos divisores principais** de R.

Definição 5.4. Seja R um domínio noetheriano integralmente fechado no seu corpo de frações $Q(R)$. O **grupo das classes dos divisores** de R é definido como o grupo quociente $\mathfrak{D}(R)/\mathfrak{P}(R)$ e é denotado por $\mathrm{Cl}(R)$.

5.2 Noções Gerais de Álgebra Homológica

Exploramos nessa seção alguns conceitos de álgebra homológica. A maioria dos resultados que enunciaremos sem demonstração são clássicos e podem ser encontrados em qualquer livro introdutório da área.

5.2.1 Complexos, Ext e Tor

Definição 5.5. Um **complexo** de R-módulos e R-homomorfismos é um par $(\mathcal{M}_\bullet, d_\bullet)$, onde $\mathcal{M}_\bullet = \{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma coleção de R-módulos e $d_\bullet = \{d_n : M_n \to M_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma coleção de R-homomorfismos, usualmente escrito como uma sequência

$$\mathcal{M}_\bullet : \cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots ,$$

que satisfaz $d_n d_{n+1} = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. O n**-ésimo módulo de homologia** de $(\mathcal{M}_\bullet, d_\bullet)$ é dado por

$$H_n(\mathcal{M}_\bullet) = \frac{\ker d_n}{\operatorname{Im} d_{n+1}}.$$

Um complexo é dito **exato na** n**-ésima posição** se $H_n(\mathcal{M}_\bullet) = 0$ e apenas **exato** se é exato em toda posição.

Note que, na nossa definição de complexo, os índices decrescem no sentido das setas. É natural considerar o contrário:

Definição 5.6. Chamamos de **cocomplexo** uma sequência

$$\mathcal{M}^\bullet : \cdots \to M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^n \xrightarrow{d^n} M^{n+1} \longrightarrow \cdots ,$$

satisfazendo $d^n d^{n-1} = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Analogamente, definimos n**-ésimo módulo de cohomologia** de $(\mathcal{M}^\bullet, d^\bullet)$ como sendo

$$H^n(\mathcal{M}^\bullet) = \frac{\ker d^n}{\operatorname{Im} d^{n-1}}.$$

Um cocomplexo é dito **exato na** n**-ésima posição** se $H^n(\mathcal{M}^\bullet) = 0$ e apenas **exato** se é exato em toda posição.

Mesmo que sejam definições ligeiramente distintas, tudo que for mostrado para complexos pode ser facilmente reproduzido para cocomplexos. Eventualmente utilizaremos apenas $\mathcal{M}_\bullet$ para denotar o complexo $(\mathcal{M}_\bullet, d_\bullet)$, embora fique claro que um complexo sempre está acompanhado de homomorfismos.

Definição 5.7. Sejam $(\mathcal{M}_\bullet, d_\bullet)$ e $(M'_\bullet, d'_\bullet)$ complexos. Um morfismo $f : \mathcal{M}_\bullet \to \mathcal{M}'_\bullet$ é uma coleção $f = \{f_n : M_n \to M'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de homomorfismos tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} M_n & \xrightarrow{d_n} & M_{n-1} \\ {\scriptstyle f_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} \\ M'_n & \xrightarrow{d'_n} & M'_{n-1} \end{array}$$

Esta definição nos permite definir o morfismo identidade e a composição de morfismos entre complexos, respectivamente:

$$1_{\mathcal{M}_\bullet} : \mathcal{M}_\bullet \to \mathcal{M}_\bullet, \quad 1_{\mathcal{M}_\bullet} = \{1_{M_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

$$f \circ g : \mathcal{M}_\bullet \xrightarrow{f} \mathcal{M}'_\bullet \xrightarrow{g} \mathcal{M}''_\bullet, \quad f \circ g = \{f_n \circ g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Um morfismo $f : \mathcal{M}_\bullet \to \mathcal{M}'_\bullet$ induz um homomorfismo $H_n(f) : H_n(\mathcal{M}_\bullet) \to H_n(\mathcal{M}'_\bullet)$ para cada n, definido por $\overline{x} \mapsto \overline{f_n(x)}$ (as barras denotam a classe em diferentes conjuntos). Verifica-se facilmente que este mapa é bem definido.

De posse da definição de morfismo entre complexos, pode-se definir de forma natural a noção de sequências exatas de complexos. Denotaremos por 0 o complexo tal que $M_n = 0$ e $d_n = 0$ para todo n. Dizemos que

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'_\bullet \xrightarrow{f} \mathcal{M}_\bullet \xrightarrow{g} \mathcal{M}''_\bullet \longrightarrow 0$$

é uma **sequência exata** de complexos se, para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$0 \longrightarrow M'_n \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{g_n} M''_n \longrightarrow 0$$

é exata.

Proposição 5.8. Uma sequência exata de complexos

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'_\bullet \xrightarrow{f} \mathcal{M}_\bullet \xrightarrow{g} \mathcal{M}''_\bullet \longrightarrow 0$$

induz um complexo exato de homologias dado por

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathcal{M}'_\bullet) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(\mathcal{M}_\bullet) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(\mathcal{M}''_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\mathcal{M}'_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

O mapa ∂_n é chamado homomorfismo conector.

Demonstração. [21], Theorem 3.3. □

Proposição 5.9. Seja

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{M}'_\bullet & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}_\bullet & \xrightarrow{g} & \mathcal{M}''_\bullet & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{N}'_\bullet & \xrightarrow[f']{} & \mathcal{N}_\bullet & \xrightarrow[g']{} & \mathcal{N}''_\bullet & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

um diagrama comutativo de complexos com linhas exatas. Então o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_n(\mathcal{M}'_\bullet) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(\mathcal{M}_\bullet) & \xrightarrow{H_n(g)} & H_n(\mathcal{M}''_\bullet) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(\mathcal{M}'_\bullet) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle H_n(\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(\beta)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(\gamma)} & & \downarrow{\scriptstyle H_{n-1}(\alpha)} & & \\
\cdots & \longrightarrow & H_n(\mathcal{N}'_\bullet) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(\mathcal{N}_\bullet) & \xrightarrow{H_n(g)} & H_n(\mathcal{N}''_\bullet) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(\mathcal{N}'_\bullet) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

é comutativo.

Demonstração. [19], Proposition 2.2. □

A proposição acima pode ser demonstrada também com o uso do Lema da Serpente, ferramenta clássica da álgebra homológica:

Lema 5.10 (Lema da Serpente)**.** Seja R um anel e considere o diagrama comutativo de R-módulos a seguir:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & &
\end{array}$$

Então existe uma sequência exata

$$\ker\alpha \longrightarrow \ker\beta \longrightarrow \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \text{Coker } \alpha \longrightarrow \text{Coker } \beta \longrightarrow \text{Coker } \gamma.$$

Demonstração. Ver [21], Lemma 1.7. □

Proposição 5.11. Sejam $(\mathcal{M}_\bullet, d_\bullet)$ um complexo e N um R-módulo. Os seguintes são (co)complexos:

(i) $N \otimes \mathcal{M}_\bullet : \cdots \longrightarrow N \otimes M_{n+1} \overset{1_N \otimes d_{n+1}}{\longrightarrow} N \otimes M_n \overset{1_N \otimes d_n}{\longrightarrow} \cdots$

(ii) $\mathcal{M}_\bullet \otimes N : \cdots \longrightarrow M_{n+1} \otimes N \overset{d_{n+1} \otimes 1_N}{\longrightarrow} M_n \otimes N \overset{d_n \otimes 1_N}{\longrightarrow} \cdots$

(iii) $\text{Hom}(N, \mathcal{M}_\bullet) : \cdots \text{Hom}(N, M_{n+1}) \overset{\text{Hom}(1_N, d_{n+1})}{\longrightarrow} \text{Hom}(N, M_n) \overset{\text{Hom}(1_N, d_n)}{\longrightarrow} \cdots$

(iv) $\text{Hom}(\mathcal{M}_\bullet, N) : \cdots \text{Hom}(M_n, N) \overset{\text{Hom}(d_n, 1_N)}{\longrightarrow} \text{Hom}(M_{n+1}, N) \overset{\text{Hom}(d_{n+1}, 1_N)}{\longrightarrow} \cdots$

Demonstração. Segue da funtorialidade de $N \otimes -$, $\text{Hom}_R(N, -)$ e $\text{Hom}_R(-, N)$. □

Definição 5.12. (a) Sejam $(\mathcal{M}_\bullet, d_\bullet)$ um complexo e p um número inteiro. O complexo $\mathcal{M}'_\bullet = \{M'_n \xrightarrow{d_n} M'_{n-1}\}$ tal que $M'_n = M_{n+p}$ e $d'_n = (-1)^p d_{n+p}$ é chamado de **translação** de $\mathcal{M}_\bullet$ por p e será denotado por $\mathcal{M}_\bullet[p]$.

(b) Seja $f_\bullet : (\mathcal{M}_\bullet, d_\bullet) \to (\mathcal{M}'_\bullet, d'_\bullet)$ um mapa de complexos. O complexo com módulos $M'_n \oplus M_{n-1}$ e homomorfismos

$$\begin{pmatrix} d'_n & f_{n-1} \\ 0 & -d_{n-1} \end{pmatrix} : M'_n \oplus M_{n-1} \longrightarrow M'_{n-1} \oplus M_{n-2}$$

é chamado de **cone** do mapa $f_\bullet$ e será denotado por $\mathrm{Cone}(f_\bullet)$.

Proposição 5.13. Seja $f_\bullet : (\mathcal{M}_\bullet, d_\bullet) \to (\mathcal{M}'_\bullet, d'_\bullet)$. Então existe uma sequência exata de complexos dada por

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'_\bullet \longrightarrow \mathrm{Cone}(f_\bullet) \longrightarrow \mathcal{M}_\bullet[-1] \longrightarrow 0.$$

Mais ainda, a sequência longa de homologias induzida pela sequência acima toma a forma

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathcal{M}_\bullet) \xrightarrow{H_n(f_n)} H_n(\mathcal{M}'_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathrm{Cone}(f_\bullet)) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{M}_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Demonstração. Ver [22], Proposition VII.4.8. □

A fim de definirmos Ext e Tor, precisamos relembrar o conceito de módulos projetivos e injetivos:

Definição 5.14. (a) Dizemos que um R-módulo P é **projetivo** se, dados $p : P \to N$ e $f : M \to N$ homomorfismos de R-módulos, com f sobrejetor, existe um homomorfismo $\tilde{p} : P \to M$ tal que $f \circ \tilde{p} = p$.

(b) Dizemos que um R-módulo I é **injetivo** se, dados $\iota : M \to I$ e $f : M \to N$ homomorfismos de R-módulos, com f injetor, existe um homomorfismo $\tilde{\iota} : N \to I$ tal que $\tilde{\iota} \circ f = \iota$.

Definição 5.15. Um complexo $\mathcal{P}_\bullet : \cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$ é dito **resolução projetiva deletada** (resp. livre) de um R-módulo N se $H_0(\mathcal{P}_\bullet) = N$, $H_n(\mathcal{P}_\bullet) = 0$ para $n > 0$ e P_n é projetivo (resp. livre) para todo n.

Definição 5.16. Um cocomplexo $\mathcal{I}^\bullet : 0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^n \to \cdots$ é dito **resolução injetiva deletada** de um R-módulo N se $H_0(\mathcal{I}^\bullet) = N$, $H_n(\mathcal{I}^\bullet) = 0$ para $n > 0$ e I^n é injetivo para todo n.

Proposição 5.17 (Lema de Schanuel)**.** Seja R um anel. Suponha que $0 \to K \to P \to M \to 0$ e $0 \to K' \to P' \to M \to 0$ sejam sequências exatas de R-ḿodulos, com P e P' projetivos. Então $K \oplus P' \simeq K' \oplus P$.

Demonstração. Ver [21], Theorem 6.4. □

Definição 5.18. Sejam M e N R-módulos e $\mathcal{P}_\bullet$ uma resolução projetiva de M. Então definimos:

(a) $\mathrm{Ext}^n_R(M,N) = H^n(\mathrm{Hom}(\mathcal{P}_\bullet, N))$;

(b) $\mathrm{Tor}^R_n(M,N) = H_n(\mathcal{P}_\bullet \otimes N)$.

Notemos que esta definição depende, *a priori*, da resolução escolhida. No entanto, mostra-se que quaisquer duas resoluções projetivas de M são homotópicas e portanto determinam homologias isomorfas, propriedade que é preservada por funtores aditivos como $\mathrm{Hom}(-,N)$ e $-\otimes N$ (vide [21]). Logo os módulos Ext e Tor estão bem definidos.

Obviamente, um módulo M é projetivo se, e somente se, $\mathrm{Ext}^1_R(M,N) = 0$, para todo R-módulo N.

Proposição 5.19. Sejam M e N R-módulos. Então:

(a) $\mathrm{Tor}^R_n(M,N) \simeq \mathrm{Tor}^R_n(N,M)$;

(b) Se $\mathcal{I}^\bullet$ é uma resolução injetiva de N, então $\mathrm{Ext}^n_R(M,N) \simeq H^n(\mathrm{Hom}(M,\mathcal{I}^\bullet))$;

(c) $\mathrm{Tor}^R_0(M,N) \simeq M \otimes_R N$ e $\mathrm{Ext}^0_R(M,N) \simeq \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

Como Ext e Tor são definidos como homologias de complexos, utilizaremos com muita frequência 5.8 em consonância com 5.19. Isto é, se $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ for uma sequência exata de R-módulos e formos capazes de obter $0 \to \mathcal{P}'_\bullet \to \mathcal{P}_\bullet \to \mathcal{P}''_\bullet \to 0$ sequência exata de complexos, com $\mathcal{P}'_\bullet, \mathcal{P}_\bullet$ e $\mathcal{P}''_\bullet$ resoluções projetivas de M', M e M'', respectivamente, então existem complexos exatos de Ext's e Tor's exatamente como em 5.8. Encontrar essas resoluções é de fato possível:

Proposição 5.20. Seja $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ uma sequência exata de R-módulos. Considere $\mathcal{P}'_\bullet$ e $\mathcal{P}''_\bullet$ resoluções projetivas de M' e M'', respectivamente. Então existe uma resolução projetiva de M e uma sequência exata de complexos $0 \to \mathcal{P}'_\bullet \to \mathcal{P}_\bullet \to \mathcal{P}''_\bullet \to 0$. Mais ainda, se P'_n e P''_n denotam os módulos das resoluções $\mathcal{P}'_\bullet$ e $\mathcal{P}''_\bullet$, respectivamente, então a resolução $\mathcal{P}_\bullet$ pode ser tomada de modo a ter como módulos $P'_n \oplus P''_n$.

Demonstração. Vide [19], Proposition 2.12. □

Corolário 5.21. Se $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ é um sequência exata e N é um R-módulo qualquer, existem sequências exatas longas

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^R_n(M',N) \to \mathrm{Tor}^R_n(M,N) \to \mathrm{Tor}^R_n(M'',N) \to \mathrm{Tor}^R_{n-1}(M',N) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^n_R(M'', N) \to \mathrm{Ext}^n_R(M, N) \to \mathrm{Ext}^n_R(M', N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M'', N) \to \cdots$$

.

Demonstração. Utilize 5.20 na sequência $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ para obter uma sequência exata de resoluções projetivas $0 \to \mathcal{P}'_\bullet \to \mathcal{P}_\bullet \to \mathcal{P}''_\bullet \to 0$, aplique $- \otimes N$ e $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ e em seguida 5.8. □

5.2.2 Ext e Extensões

Assim como Tor tem seu nome derivado de torção (do inglês, *torsion*), o funtor Ext ganhou esse nome por estar intimamente relacionado com o conceito de extensão, que exploraremos brevemente agora.

Definição 5.22. Sejam M e N R-módulos. Chamaremos uma sequência exata $\varepsilon = 0 \to N \to K \to M \to 0$ de **extensão de** N **por** M. Se $\varepsilon' = 0 \to N \to K' \to M \to 0$ for outra extensão de N por M, dizemos que ε é equivalente ε' se existe um isomorfismo $h : K \to K'$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{lccccccccc}
\varepsilon : & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
& & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
\varepsilon' : & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Dizemos que a extensão ε **cinde** se for equivalente à sequência

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{1 \oplus 0} N \oplus M \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Observação 5.23. De fato, apenas uma nova terminologia está sendo introduzida aqui. Extensões são apenas sequências exatas e dizer que duas destas são equivalentes é dizer que são isomorfas como sequências exatas de uma forma específica. À vista disso, uma extensão cinde se cinde no sentido usual.

Sabemos, pelas observações feitas após (5.20), que uma extensão ε de N por M induz um complexo exato

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^n_R(M, N) \to \mathrm{Ext}^n_R(K, N) \to \mathrm{Ext}^n_R(N, N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, N) \to \cdots$$

Utilizando as identificações de (5.19),(c), existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(K, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_R(M, N) \qquad \text{(I)}$$

Se $\mathrm{Ext}^1_R(M, N) = 0$, o mapa $\mathrm{Hom}_R(K, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, N)$ é sobrejetivo, portanto

1_N é imagem de algum homomorfismo $K \to N$ e ε cinde pela observação (5.23). Não obstante, em geral, uma extensão ε de N por M fornece um elemento $\delta(1_N)$ em $\operatorname{Ext}^1_R(M, N)$.

Proposição 5.24. A associação $\gimel : \varepsilon \mapsto \delta(1_N)$, onde δ é o mapa indicado em (I), é uma função bijetiva entre as classes das extensões de N por M e $\operatorname{Ext}^1_R(M, N)$.

Demonstração. [21], Lemma 22.2. □

Segue imediatamente desta proposição o seguinte corolário:

Corolário 5.25. Sejam $0 \to N \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} M \to 0$ e $0 \to N \xrightarrow{f'} K' \xrightarrow{g'} M \to 0$ extensões e ξ e ξ' suas imagens por $\gimel$ em $\operatorname{Ext}^1(M, N)$, respectivamente. Para que $\xi = \xi'$, é necessário e suficiente que exista um homomorfismo $h : K \to K'$ fazendo o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & K \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "h"] \\
K' \arrow[r, "g'"'] & M
\end{tikzcd}$$

Por simetria, qualquer mapa h satisfazendo esta propriedade é necessariamente um isomorfismo.

5.3 A Potência Exterior e o Complexo de Koszul

Seja M um R-módulo. Para $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, definimos por recorrência o R-módulo $M^{\otimes k} := \underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_{\text{k vezes}}$. No estudo de álgebra multilinear, é comum nos depararmos com um importante submódulo de $M^{\otimes k}$, a saber, aquele gerado pelos tensores puros que possuem entradas repetidas. Mais formalmente, definimos

$$J_k = \langle \{m_1 \otimes \cdots \otimes m_k |\ \exists i \neq j;\ m_i = m_j\} \rangle.$$

Definição 5.26. Com a notação acima introduzida, definimos o R-módulo

$$\Lambda^k M = \frac{M^{\otimes k}}{J_k},$$

chamado de **k-ésima potência exterior** de M. As imagens de geradores $m_1 \otimes \cdots \otimes m_k$ pelo mapa canônico $M^{\otimes k} \xrightarrow{\wedge} \Lambda^k M$ são comumente denotadas por $m_1 \wedge \cdots \wedge m_k$ e, é claro, formam um conjunto gerador de $\Lambda^k M$. Por convenção, definimos $\Lambda^0(M) = R$ e $\Lambda^1(M) = M$.

Como esperado, potências exteriores de um R-módulo M é solução de um problema universal. De fato, se $M^k \xrightarrow{f} N$ é um mapa alternado (isto é, $f(m_1, ..., m_k) = 0$ se $m_i = m_j$, $i \neq j$) , então existe um único homomorfismo de R-módulos $\tilde{f} : \Lambda^k M \to N$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} & \Lambda^k M \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"'] \\ N & M^k \arrow[l, "f"] \arrow[u, "\wedge"'] \end{tikzcd}$$

Isso pode ser facilmente mostrado usando as propriedades do produto tensorial $M^{\otimes k}$.

Proposição 5.27. Seja M um R-módulo gerado por d elementos. Então $\Lambda^k M = 0$ para $k > d$.

Demonstração. Seja $\{n_1, ..., n_d\}$ conjunto gerador de M e suponha que $k > d$. É suficiente mostrar que todos os elementos da forma $m_1 \wedge \cdots \wedge m_k$ são nulos, uma vez que estes geram $\Lambda^k M$. Por outro lado, cada m_j é uma combinação linear de $\{n_1, ..., n_d\}$. Portanto, usando linearidade, é suficiente mostrar que $n'_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge n'_{\lambda_k} = 0$, onde $n'_{\lambda_i} \in \{n_1, ..., n_d\}$, para todo $i = 1, ..., k$. Uma vez que $k > d$, ao escolhermos k elementos em um conjunto de d elementos, estamos certamente repetindo pelo menos um deles. Segue que, para qualquer escolha, $n'_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes n'_{\lambda_k} \in J_k$, ou, como queríamos, $n'_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge n'_{\lambda_k} = 0$. □

Proposição 5.28. Seja F um R-módulo livre de posto finito n. Então $\Lambda^k F$ é livre para todo $0 \leq k \leq n$. Explicitamente, se $F \neq 0$ tem base $\{u_1, ..., u_n\}$, então o conjunto formado por $\binom{n}{k}$ elementos

$$\{u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k} |\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

é uma base para $\Lambda^k F$.

Sejam M um R-módulo e $f : M \to R$ um funcional linear. Defina o mapa k-linear

$$f^{(k)} : M^k \to \Lambda^{k-1} M, \quad (m_1, ..., m_k) \mapsto \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r+1} f(m_r)\ m_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{m_r} \wedge \cdots \wedge m_k,$$

onde $\widehat{\ }$ indica que o elemento em questão foi omitido. Uma vez que $f^{(k)}$ é alternado, pode-se usar a propriedade universal do k-ésimo produto exterior para encontrar um homomorfismo $\partial f^{(k)} : \Lambda^k M \to \Lambda^{k-1} M$ satisfazendo $m_1 \wedge \cdots \wedge m_k \mapsto f^{(k)}(m_1, ..., m_k)$. Por computação direta, verifica-se que $\partial f^{(k)} \circ \partial f^{(k+1)} = 0$.

Definição 5.29. Sejam M um R-módulo e $f : M \to R$ um funcional linear. Chamamos de **complexo de Koszul** de f, e o denotamos por $\mathcal{K}_\bullet(f)$, o complexo

$$\cdots \longrightarrow \Lambda^k M \xrightarrow{\partial f^{(k)}} \Lambda^{k-1} M \xrightarrow{\partial f^{(k-1)}} \cdots \longrightarrow M \xrightarrow{f} R \longrightarrow 0.$$

Apesar de não termos definido-o dessa forma, o complexo de Koszul (até agora de um funcional linear) está intimamente ligado ao estudo de sequências regulares. Tornamos isso mais claro agora:

Definição 5.30. Sejam $\mathbf{x} = x_1, ..., x_n$ uma sequência em R e $\{u_1, ..., u_n\}$ uma base de $M = R^n$. O **complexo de Koszul de x**, denotado por $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{x}; R)$, é o complexo de Koszul do funcional linear f definido por $f(u_i) = x_i$.

Explicitamente, em face à (5.27), para qualquer sequência $\mathbf{x} = x_1, ..., x_n$ em R, o complexo de Koszul de $\mathbf{x}$ toma a forma:

$$\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{x}; R) = \quad 0 \longrightarrow \Lambda^n R^n \longrightarrow \Lambda^{n-1} R^n \longrightarrow \cdots \longrightarrow R^n \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Uma das principais propriedades do complexo de Koszul é a sua sensibilidade à profundidade de um módulo, ou, em outras palavras, o seu comportamento frente à sequências regulares. Não trataremos disso de forma aprofundada. Para o decorrer do traballho, é suficiente entender o que acontece para sequências de comprimento 2. Se $\mathbf{x} = x_1, x_2$ é um sequência em R e $\{u_1, u_2\}$ é base de R^2, tem-se que

$$\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{x}; R) = \quad 0 \longrightarrow \Lambda^2 R^2 \xrightarrow{\partial_2} R^2 \xrightarrow{\partial_1} R \longrightarrow 0,$$

onde $\partial_1(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$ e $\partial_2(r \cdot u_1 \wedge u_2) = r(x_1 u_2 - x_2 u_1)$. Se o elemento x_1 for regular em R, é fácil ver que o homomorfismo ∂_2 é injetivo e se x_2 for $R/(x_1)$-regular, temos que

$$\alpha u_1 + \beta u_2 \in \ker \partial_1 \implies \alpha x_1 = -\beta x_2 \implies x_2 \bar{\beta} = \bar{0} \;\text{ em }\; R/(x_1) \implies \beta \in (x_1).$$

Logo $\beta = a x_1$, para algum $a \in R$. De $\alpha x_1 = -\beta x_2$, obtemos $\alpha = -a x_2$. Segue que $\alpha u_1 + \beta u_2 = \partial_2(a \cdot u_1 \wedge u_2) \in \mathrm{Im}\ \partial_2$. Assim, se $\mathbf{x}$ for uma sequência regular, conseguimos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \Lambda^2 R^2 \xrightarrow{\partial_2} R^2 \xrightarrow{\partial_1} R \longrightarrow R/(\mathbf{x}) \longrightarrow 0,$$

ou seja, o complexo de Koszul $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{x}; R)$ é uma resolução projetiva do R-módulo $R/(\mathbf{x})$.

Referências Bibliográficas

[1] Amasaki, M. *Homogeneous prime ideals and graded modules fitting into long Bourbaki sequences.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 60, Cambridge Unniversity Press, 1993.

[2] Amasaki, M. *Existence of homogeneous ideals fitting into long Bourbaki sequences.* Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 127, No. 12 (Dec., 1999), pp. 3461-3466.

[3] Atiyah, M. F.; MacDonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, (1969), 128 p.

[4] Auslander, M. *Remarks on a Theorem of Bourbaki.* Nagoya Math. J. 27(P1): 361-369 (1966).

[5] Bourbaki. *Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1972).

[6] Bruns, W.; Herzog, J. *Cohen-Macaulay Rings.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 60, Cambridge Unniversity Press, 1993.

[7] Clark, P. *Commutative Algebra.* University of Georgia. Notes (2008).

[8] Dósea, A. *Uma jornada aos anéis de Gorenstein.* Dissertação de Mestrado (Orientador: Zaqueu Ramos), Departamento de Matemática, Universidade Federal da Sergipe, São Cristóvão, (2018).

[9] Eisenbud, D. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York (1995), 787 p.

[10] Evans, E. *Krull-Schmidt and cancellation over local rings.* Pacific Journal of Mathematics, vol. **26**, No. 1 (1973), 115-121.

[11] Evans, E. *Bourbaki's Theorem and Algebraic K-Theory.* Journal of Algebra 41, 108-115 (1976).

[12] Herzog, J,; Kühl, M. *Maximal Cohen-Macaulay Modules over Gorenstein Rings and Bourbaki-Sequences.* Advanced Studies in Pure Mathematics **11** (1987). Commutative Algebra and Combinatorics, pp. 65-92

[13] Herzog, J.; Kumashiro, S.; Stamate, D. *Graded Bourbaki ideals of graded modules.* Mathematische Zeitschrift (2021).

[14] Huneke, C.; Swanson, I. *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules.* Cambridge University Press. London Mathematical Society Lecture Note Series 336.

[15] Miller, M. *Bourbaki's Theorem and Prime Ideals.* Journal of Algebra 64 29-36 (1980).

[16] Murthy, M. *Generators for Certain Ideals in Regular Rings of Dimension Three.* Commentarii Mathematici Helvetici volume 47, p. 179-184 (1972).

[17] Nagata, M. *Local Rings.* Interscience Tracts 13, Interscience Publishers, New York (1962), 234 p.

[18] Peskine, C.; Szpiro, L. *Liaison des varietés algèbriques I*, Invent. Math. **26** (1974), 271-302.

[19] Raghavan, S.; Balwant, R.; Sridharan, R. *Homological Methods on Commutative Algebra.* Oxford University Press. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1975).

[20] Rotman, J. J., *An Introduction to Homological Algebra*, Springer, Second Edition, 2009.

[21] Swanson, I. *Homological Algebra*, Graz, Fall 2018.

[22] Sather-Wagstaff, S. *Homological Algebra Notes.* Department of Mathematics, North Dakota State University, 2000.

[23] Vasconcelos, W. *Integral Closure, Rees Algebras, Multiplicities, Algorithms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, (2005).

[24] Vasconcelos, W. *On Local and Stable Cancellation.* An. Acad. Brasil Ci. **12** (1965).