

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma introdução à controlabilidade de Equações Diferenciais Parciais Estocásticas

Natália das Neves Lucas

João Pessoa – PB
Agosto de 2022

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma introdução à controlabilidade de Equações Diferenciais Parciais Estocásticas

por

Natália das Neves Lucas

sob a orientação de

Prof. Dr. Felipe Wallison Chaves Silva

João Pessoa – PB
Agosto de 2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

L933i Lucas, Natália das Neves.

Uma introdução à controlabilidade de equações
diferenciais parciais estocásticas / Natália das Neves
Lucas. - João Pessoa, 2022.
118 f.

Orientação: Felipe Wallison Chaves Silva.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Equações diferenciais estocásticas. 2.
Controlabilidade. 3. Observabilidade. I. Silva, Felipe
Wallison Chaves. II. Título.

UFPB/BC

CDU 517.9(043)

Uma introdução à controlabilidade de Equações Diferenciais Parciais Estocásticas

por

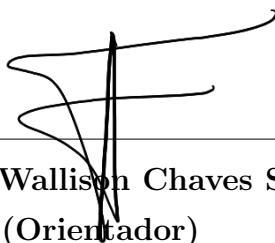
Natália das Neves Lucas ¹

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 25 de agosto de 2022

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Felipe Wallison Chaves Silva – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Maurício Cardoso Santos – UFPB
(Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente



DISSON SOARES DOS PRAZERES
Data: 31/08/2022 11:29:38-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Disson Soares dos Prazeres – UFS
(Examinador Externo)

¹Este trabalho contou com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

A minha família por todo apoio. A todos que me ajudaram direta e indiretamente em toda minha caminhada até aqui.

Agradecimentos

- À minha família por todo incentivo e confiança. Em especial, aos meus pais por todo afeto, carinho e motivação para me manter firme em todas as etapas da minha vida.

- Ao professor *Dr. Felipe Wallison Chaves Silva* pela excelente orientação, por todo apoio, paciência e ajuda, sempre me incentivando em todos os momentos.

- Aos professores *Flávio França Cruz* e *José Tiago Nogueira Cruz*, da Universidade Regional do Cariri-Urca, que me deram a oportunidade de iniciar a vida acadêmica como sua orientanda e sempre me motivaram a estudar para ingressar na pós-graduação.

- Aos amigos que sempre me salvaram nos momentos de desespero no estudo, que me distraíam, compartilhavam sorrisos e palavras de motivação. Em especial, cito *Alaíde Larissa, Diana dos Santos, Natanaelson Rodrigues e Wallas Lacerda* (In Memoriam).

- A todos os colegas e amigos da graduação e do mestrado, por todos os momentos e conhecimentos compartilhados. Gostaria de citar, *Cicero Alexandre, Alessandro Fernandes, Lucas Machado e Renato Carlos*.

- À minha amiga *Shirley Primo* por toda amizade e parceria surgida desde a graduação, por ter sido em todos esses anos minha companheira de estudos e de descontração de todas horas.

- À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, faremos um estudo da controlabilidade de algumas Equações Diferenciais Estocásticas. Primeiramente, mostramos alguns resultados básicos de controlabilidade para este tipo de equações, como por exemplo o fato que equações de evolução estocásticas não são controláveis quando o controle só atua na parte determinista da equação, sendo necessário assim a aplicação de um controle também na sua parte estocástica. Em seguida, analisaremos a controlabilidade de dois tipos de equações estocásticas, a saber, as equações de transporte e do calor. Usando uma estimativa de observabilidade para equações de transporte estocásticas reversas, mostramos que, para um tempo $T > 0$ suficientemente grande a equação de transporte estocástica é exatamente controlável. Para a equação do calor estocástica, provaremos uma estimativa global de Carleman para equações parabólicas estocásticas reversas, e usaremos isto para obter uma propriedade de continuação única e uma estimativa de observabilidade, as quais nos permite concluir a controlabilidade nula e aproximada da equação do calor estocástica para qualquer tempo $T > 0$.

Palavras-chave: equações diferenciais estocásticas, controlabilidade, observabilidade.

Abstract

In this work, we study the controllability of some Stochastic Differential Equations. First, we show some basic controllability results for this type of equations, such as the fact that stochastic evolution equations are not controllable when the control only acts on the deterministic part of the equation, thus requiring the application of a control in its stochastic part. Next, we analyze the controllability of two types of stochastic equations, namely the transport and heat equations. Using an observability estimate for reverse stochastic transport equations, we show that, for a sufficiently large time $T > 0$, the stochastic transport equation is exactly controllable. For the stochastic heat equation, we prove a global Carleman estimate for reverse stochastic parabolic equations and use this to obtain a unique continuation property and an observability estimate, which allow us to conclude the null and approximate controllability of the stochastic heat equation for any time $T > 0$.

Keywords: stochastic differential equations, controllability, observability.

Sumário

Introdução	1
1 Introdução ao Cálculo Estocástico	5
1.1 Probabilidade, variáveis aleatórias e expectativa	5
1.2 Processo estocástico	7
1.3 Integral de Itô	10
1.4 Equações de Evolução Estocásticas	15
1.5 Equações de Evolução Estocásticas Reversas	18
2 Alguns resultados básicos	23
2.1 Falta de controlabilidade exata	23
2.2 Controlabilidade nula e aproximada de equações de evolução estocásticas	27
2.3 Estimativa de observabilidade de equações de evolução estocásticas . .	31
3 Equação de Transporte Estocástica	34
3.1 Formulação do problema	34
3.2 Boa colocação do sistema de controle e uma identidade com peso	41
3.3 Estimativa de observabilidade para equações de transporte estocásticas reversas	46
3.4 Controlabilidade exata da equação de transporte estocástica	51
4 Equações Parabólicas Estocásticas	53
4.1 Formulação do problema e resultado principal	53
4.2 Uma identidade com peso para operadores parabólicos estocásticos . . .	55
4.3 Estimativa global de Carleman para equações parabólicas estocásticas reversas	63
4.4 Controlabilidade nula e aproximada de equações parabólicas estocásticas	72
A Resultados Auxiliares	75
A.1 Espaços de Banach, Espaços de Hilbert e Operadores Lineares	75
A.1.1 Espaços de Banach e Espaços de Hilbert	75

A.1.2	Operadores Lineares Limitados	77
A.1.3	Operador Linear Ilimitado	82
A.2	Medida e Integração	83
A.3	Continuidade e diferenciabilidade de funções com valor vetorial	94
A.4	Funções generalizadas e espaços de Sobolev	96
A.5	Semigrupos de operadores	99
A.6	Outros resultados utilizados	105
Referências Bibliográficas		107

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $G \subset \mathbb{R}^n$ denota um conjunto aberto e limitado (domínio).
- Γ denota a fronteira de um conjunto $G \subset \mathbb{R}^n$.
- $\|\cdot\|$ - denota a norma euclidiana.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ - denota o produto interno entre dois elementos de um espaço de Hilbert H .
- $\mu - q.t.p$ - em quase toda parte com relação a medida μ .
- $L^p_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathcal{X}) := L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{X})$.
- $L^\infty_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathcal{X}) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{X})$.
- $H^m(G)$ denota o espaço de Sobolev $W^{m,2}(G)$.
- $EDPE$ - Equação Diferencial Parcial Estocástica.
- $\mathbb{E}$ - denota a esperança matemática.
- $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ designa o operador de Laplace.
- $\mathcal{C}$ - é uma constante positiva e que pode mudar de uma linha a outra dependendo do contexto.

Introdução

Podemos dizer que a Teoria moderna do Controle teve início com o matemático N. Wiener, em 1948, quando este definiu, em seu livro “Cybernetics” (ver [30]), a cibernética como a ciência do controle e comunicação em animais e máquinas. Deste modo, Wiener estabeleceu uma conexão entre Teoria do Controle e Fisiologia e antecipou que, no futuro, máquinas obedeceriam e imitariam comportamentos humanos. Naquela época, as ideias de Wiener eram apenas um sonho, mas sabemos que hoje em dia a situação é completamente diferente. De fato, devido ao esforço de inúmeros matemáticos e engenheiros, diversos desenvolvimentos são feitos constantemente e um grande número de aplicações surgem em áreas como robótica, engenharia, economia, biologia, medicina, etc (ver [5]).

Hoje em dia, a Teoria do Controle para sistemas de dimensão finita está relativamente madura (ver [22]). Para sistemas em dimensão infinita, apesar de ser um campo bastante ativo, existe também uma lista enorme de publicações, principalmente para sistemas deterministas (normalmente governados por Equações Diferenciais Parciais). Em relação ao caso estocástico, para Equações Diferenciais Ordinárias Estocásticas, i.e., Equações Estocásticas em dimensão finita, a teoria está também relativamente bem estabelecida (veja, por exemplo, [22]). Por outro lado, podemos dizer que a teoria para o caso de sistemas distribuídos estocásticos, i.e., Equações Diferenciais Parciais Estocásticas, encontra-se em seu estágio inicial (ver [23]).

O estudo de Equações Estocásticas se faz importante pois, devido a complexidades intrínsecas, muitos sistemas apresentam dinâmicas que incluem incertezas substanciais em seus modelos. Estes tipos de sistemas são melhores descritos por Equações Diferenciais Estocásticas, sejam elas ordinárias ou parciais (veja, por exemplo, [26]). O estudo das Equações Diferenciais Parciais Estocásticas (EDPEs) é motivado principalmente por dois aspectos: Este tema é uma área multidisciplinar envolvendo tanto processos estocásticos quanto EDPs, e por isso tem sido, nas últimas duas décadas, uma das áreas mais ativas da análise estocástica. Outro aspecto importante é sua aplicabilidade em outros ramos da ciência. De fato, em muitos fenômenos da física, biologia, economia e teoria do controle, efeitos estocásticos desempenham um papel central.

Vejamos dois modelos para os quais efeitos estocásticos surgem de maneira natural.

Exemplo 0.0.1. Equação Parabólica Estocástica

Suponha que uma população de bactérias esteja distribuída no intervalo $[0, L]$ e denote por $y(t, x)$ a densidade desta população no tempo $t \in [0, T]$ e posição $x \in [0, L]$. Se não houver “*grande migração*”, a variação da densidade é governada por

$$dy(t, x) = ky_{xx}(t, x)dt + d\xi(t, x, y). \quad (1)$$

Em (1), $ky_{xx}(t, x)$ descreve a difusão da população do local de alta densidade para o de baixa densidade, enquanto $\xi(t, x, y)$ é uma perturbação aleatória causada por vários pequenos distúrbios independentes. Suponha que a perturbação aleatória $\xi(t, x, y)$ no tempo t e na posição x possa ser aproximada por um processo estocástico gaussiano cuja variância, $Var \xi$, é monótona em quase toda parte com relação a y . No estudo das bactérias, L é muito pequeno e podemos supor que ξ é independente de x . Além disso, quando y é pequeno, $Var \xi$ pode ser aproximada por $\alpha^2 y$, onde α^2 é a derivada de $Var \xi$ em $y = 0$. Sob essas suposições, segue que

$$d\xi(t, x, y) = \alpha\sqrt{y}dW(t). \quad (2)$$

Combinando (1) e (2), obtemos a equação

$$dy = k\partial_{xx}ydt + \alpha\sqrt{y}dW(t).$$

Se assumirmos que não há bactérias entrando ou saindo do intervalo $[0, L]$, então $y_x(t, 0) = y_x(t, L) = 0$. Supondo que podemos alterar a densidade populacional, inserindo ou extraindo algumas espécies, obtemos a seguinte equação parabólica estocástica controlada:

$$\begin{cases} dy = (k\partial_{xx}y + u)dt + (\alpha\sqrt{y} + v)dW(t) & \text{em } (0, T) \times (0, L), \\ y_x(t, 0) = y_x(t, L) = 0 & \text{em } (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{em } (0, L), \end{cases} \quad (3)$$

onde $k > 0$, $\alpha > 0$ são constantes dadas, $y_0 \in L^2(0, L)$ é a densidade inicial e u e v são as formas de inserir ou extrair espécies (controles).

Exemplo 0.0.2. Equação de Onda Estocástica

Comparado com seu comprimento, o diâmetro de uma molécula de DNA é pequeno e, portanto, pode ser visto como uma corda elástica fina e longa de comprimento $[0, L]$. A posição de uma molécula de DNA pode ser descrita usando uma função $y = (y_1, y_2, y_3)$, de valor em $\mathbb{R}^3$, definida em $[0, L] \times [0, +\infty)$. Como uma molécula

de DNA está imersa em um fluido, ela é afetada pelas moléculas do fluido, do mesmo modo que uma partícula de pólen flutuando em um líquido ou gás (ver [14], [24]).

Por simplicidade, assumimos que a massa da corda, por unidade de comprimento, é igual a 1. Então, a aceleração na posição $x \in [0, L]$ ao longo da corda no instante $t \in [0, +\infty)$ é dada por $y_{tt}(t, x)$. Há quatro tipos de forças principais que atuam na corda: a força elástica $F_1(t, x)$, o atrito $F_2(t, x)$ devido à viscosidade do fluido, a força de impacto $F_3(t, x)$ do fluxo do fluido e o impulso aleatório $F_4(t, x)$ dos impactos das moléculas do fluido. Pela segunda lei de Newton, segue que

$$y_{tt}(t, x) = F_1(t, x) + F_2(t, x) + F_3(t, x) + F_4(t, x). \quad (4)$$

Semelhante à derivação da equação de onda determinista, a força elástica é dada por $F_1(t, x) = y_{xx}(t, x)$. Obviamente, a fricção depende da propriedade do fluido e da corda. Assim, quando y , y_x e y_t são pequenos, $F_2(t, x)$ depende deles linearmente, ou seja, $F_2 = a_1 y_x + a_2 y_t + a_3 y$ para algumas funções adequadas a_1 , a_2 e a_3 . Da teoria clássica da Mecânica Estatística (por exemplo, [29, Capítulo VI]), o impulso aleatório $F_4(t, x)$ no tempo t e posição x pode ser aproximado por um processo estocástico gaussiano com uma covariância $k(\cdot, y)$, que também depende da propriedade do fluido. Deste modo, podemos supor que

$$F_4(t, x) = \int_0^t k(x, y(s, x)) dW(s).$$

Assim, a identidade (4) pode ser reescrita como

$$dy_t(t, x) = (y_{xx} + a_1 y_x + a_2 y_t + a_3 y) dt + F_3(t, x) dt + k(x, y(t, x)) dW(t). \quad (5)$$

Quando y é pequeno, podemos assumir que $k(\cdot, y)$ é linear com relação a y e, neste caso, $k(x, y(t, x)) = a_4(x) y(t, x)$ para uma função adequada $a_4(\cdot)$. Mais geralmente, assumimos que a_4 também depende de t , e a equação (5) se reescreve como:

$$dy_t(t, x) = (y_{xx} + a_1 y_x + a_2 y_t + a_3 y) dt + F_3(t, x) dt + a_4(t, x) y(t, x) dW(t). \quad (6)$$

Uma vez que diversos comportamentos biológicos estão relacionados aos movimentos das moléculas de DNA, há um interesse natural em controlar esses movimentos. Podemos tentar controlar a molécula através da força de impacto $F_3(\cdot, \cdot)$ no termo drift e também alguma força atuando em uma parte do termo de difusão. Supondo que existem forças nas extremidades da molécula, chegamos na seguinte equação de onda

estocástica controlada em uma dimensão espacial:

$$\begin{cases} dy_t = (y_{xx} + a_1 y_x + a_2 y_t + a_3 y + u)dt + (a_4 y + v)dW(t) & \text{em } (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = f_1(t) & \text{em } (0, T), \\ y(t, L) = f_2(t) & \text{em } (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x), \quad y_t(0, x) = y_1(x) & \text{em } (0, L), \end{cases} \quad (7)$$

em que (f_1, f_2, u, v) são controles que pertencem a algum espaço adequado.

Uma pergunta importante do ponto de vista da Teoria do Controle, assim como do ponto de vista de aplicações, é a seguinte:

“Podemos conduzir a molécula de DNA (regida por (7)) de qualquer (y_0, y_1) para qualquer alvo (z_0, z_1) no tempo T escolhendo controles adequados (f_1, f_2, u, v) ?”

Como veremos, este é um problema de controlabilidade exata para a equação de onda estocástica. Embora existem quatro controles no sistema, a resposta para a pergunta acima é negativa para certas classes de controle (ver [23]).

Mesmo que o sistema (7) não seja exatamente controlável, pode acontecer que para alguns estados (y_0, y_1) e (z_0, z_1) , existam controles (f_1, f_2, u, v) (em algum espaço de Hilbert H) de modo que as soluções correspondentes a (7) verifiquem $y(T) = z_0$ e $y_t(T) = z_1$, q.t.p. Normalmente, tais tipos de controles não são únicos e, portanto, podemos nos perguntar se existe um controle “ótimo” entre todos os controles possíveis. Por exemplo, podemos buscar um controle que minimiza a norma

$$|(f_1, f_2, u, v)|_H^2.$$

Este problema é chamado de problema de controle ótimo para a equação de onda estocástica (7).

Dos dois exemplos acima, vemos que é de fundamental importância entender e, possivelmente, mudar o comportamento de um determinado sistema por meio de ações de controle que muitas vezes precisam ser ótimas. Isto leva ao estudo de problemas de controlabilidade e controle ótimo.

Nesta dissertação, faremos um estudo sobre a controlabilidade das equações de transporte e do calor estocásticas. No caso da equação de transporte, estudaremos o problema da controlabilidade exata. Para a equação do calor, nos centraremos nos problemas de controlabilidade nula e controlabilidade aproximada.

Capítulo 1

Introdução ao Cálculo Estocástico

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados do cálculo estocástico que serão essenciais posteriormente.

1.1 Probabilidade, variáveis aleatórias e expectativa

Definimos um espaço de probabilidade como um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde Ω é um conjunto não vazio, $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra em Ω e $\mathbb{P}$ é uma medida em $\mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Neste caso, $\mathbb{P}$ é chamada de medida de probabilidade.

A partir de agora, fixaremos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, um espaço de Banach $\mathcal{X}$ e $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ a σ -álgebra de Borel em $\mathcal{X}$.

Terminologias:

- i) Um elemento $\omega \in \Omega$ é chamado ponto amostral;
- ii) Qualquer $A \in \mathcal{F}$ é chamado de evento, e $\mathbb{P}(A)$ representa a probabilidade do evento A ocorrer;
- iii) Se $A \in \mathcal{F}$ é tal que $\mathbb{P}(A) = 1$, então podemos alternativamente dizer que A mantém, $\mathbb{P}$ -q.t.p.

Definição 1.1.1. Uma função $f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ fortemente mensurável é chamada de variável aleatória.

Se a variável aleatória f for Bochner integrável com relação à medida $\mathbb{P}$, definimos a média (ou expectativa matemática) de f como

$$\mathbb{E}f := \int_{\Omega} f(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Para qualquer $1 \leq p \leq \infty$, definimos os espaços de Banach $L^p_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathcal{X}) \equiv L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{X})$ e $L^p_{\mathcal{F}}(\Omega)$ como na Subseção A.2. Ou seja,

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{X}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}; f \text{ é fortemente mensurável e } \int_{\Omega} |f|_{\mathcal{X}}^p d\mathbb{P} < +\infty\}.$$

Se $f \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ (para algum $m \in \mathbb{N}$), definimos a variância de f por

$$\begin{aligned} \text{Var } f &= \mathbb{E}[(f - \mathbb{E}f)(f - \mathbb{E}f)^T] \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(f_i - \int_{\Omega} f_i d\mathbb{P} \right)^2 d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Definição 1.1.2. Seja $A, B \in \mathcal{F}$. Dizemos que A e B são independentes se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Sejam $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ duas subfamílias de $\mathcal{F}$. Dizemos que $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ são independentes se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \quad \forall (A, B) \in \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2.$$

Seja $f, g : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ duas variáveis aleatórias. Dizemos que f e g (resp. f e $\mathcal{I}_1$) são independentes se as σ -álgebras geradas por f e g , isto é, $\sigma(f)$ e $\sigma(g)$, (resp. $\sigma(f)$ e $\mathcal{I}_1$) são independentes.

Seja $X = (X_1, \dots, X_m) : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ uma variável aleatória. A função $F : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$, dada por

$$\begin{aligned} F(x) &\equiv F(x_1, \dots, x_m) := \mathbb{P}(X^{-1}(-\infty, x]) = \mathbb{P}\{X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m\} \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; X_i(\omega) \leq x_i\}), \end{aligned}$$

é chamada de função de distribuição de X . Se para alguma função não-negativa f , tivermos

$$F(x) \equiv F(x_1, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_m} f(\xi_1, \dots, \xi_m) d\xi_1 \dots d\xi_m,$$

então a função f é chamada de função de densidade de X . No caso particular em que

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} |\det Q|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \lambda)^T Q^{-1} (x - \lambda) \right\},$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}^m$ é a média da variável aleatória e Q é uma matriz m -dimensional definida positiva (matriz de variância-covariância de X), então X é chamada de variável aleatória normalmente distribuída (ou diz-se que X tem uma distribuição normal) e

denotamos por $X \sim \mathcal{N}(\lambda, Q)$. Quando $\lambda = 0$ e Q é a matriz identidade m -dimensional I_m , chamamos X de uma variável aleatória padrão normalmente distribuída.

1.2 Processo estocástico

Seja $T > 0$ e $\mathcal{I} = [0, T]$. Uma processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias, $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{I}}$ em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, com valores em $\mathcal{X}$. Em particular, um processo estocástico é uma aplicação

$$\begin{aligned} X : [0, T] \times \Omega &\rightarrow \mathcal{X} \\ (t, \omega) &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

tal que fixado o $t \in \mathcal{I}$, $X_t(\omega)$ é mensurável em ω .

Na sequência, usaremos indistintamente $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{I}}$, $X(\cdot)$ ou até mesmo X para denotar um processo estocástico.

Definição 1.2.1. Para qualquer $\omega \in \Omega$, a aplicação $t \mapsto X(t, \omega)$ é chamada de caminho amostral de X .

Definição 1.2.2. $X(\cdot)$ é dito ser contínuo (resp. cádlàg, ou seja, contínuo à direita com limites à esquerda) se houver um conjunto de medida nula $N \in \mathcal{F}$, de modo que para qualquer $\omega \in \Omega \setminus N$, o caminho amostral $X(\cdot, \omega)$ é contínuo (resp. cádlàg) em $\mathcal{X}$.

Definição 1.2.3. Dois processos $X(\cdot)$ e $\bar{X}(\cdot)$ (de valores em $\mathcal{X}$) são considerados estocasticamente equivalentes se

$$\mathbb{P}(\{X(t) = \bar{X}(t)\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; X(t, \omega) = \bar{X}(t, \omega)\}) = 1, \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

Nesse caso, um é considerado uma modificação do outro.

Definição 1.2.4. Uma família de sub- σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{I}}$ em $\mathcal{F}$ é uma filtração se $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ para todo $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$ com $t_1 \leq t_2$. Para $t \in [0, T)$, escrevemos

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s \in (t, T]} \mathcal{F}_s, \quad \mathcal{F}_{t-} := \bigcup_{s \in [0, t)} \mathcal{F}_s.$$

Se $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ (resp. $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$), então $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{I}}$ é dito ser contínuo a direita (resp. esquerda).

Na sequência, denotamos $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{I}}$ por $\mathbf{F}$, a menos que queiramos enfatizar o que $\mathcal{F}_t$ ou $\mathcal{I}$ é exatamente. Chamamos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade filtrado.

Definição 1.2.5. Dizemos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbb{P})$ satisfaz a condição usual se $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é completo, a família $\mathcal{F}_0$ contém todos os conjuntos de medida nula em $\mathcal{F}$ e $\mathbf{F}$ é contínua à direita.

No que segue, salvo indicação contrária, assumiremos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbb{P})$ satisfaz a condição usual.

Definição 1.2.6. Seja $X(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ um processo estocástico.

- 1) $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ é mensurável se a aplicação $(t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$ é fortemente $(\mathcal{B}(\mathcal{I}) \times \mathcal{F})/\mathcal{B}(\mathcal{X})$ -mensurável;
- 2) $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ é $\mathbf{F}$ -adaptável se for mensurável, e para cada $t \in \mathcal{I}$, a aplicação $\omega \mapsto X(t, \omega)$ é fortemente $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathcal{X})$ -mensurável;
- 3) $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ é considerada $\mathbf{F}$ -progressivamente mensurável se para cada $t \in \mathcal{I}$, a aplicação $(s, \omega) \mapsto X(s, \omega)$ de $[0, t] \times \Omega$ em $\mathcal{X}$ é fortemente $(\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t)/\mathcal{B}(\mathcal{X})$ -mensurável.

Definição 1.2.7. Um conjunto $A \in \mathcal{I} \times \Omega$ é chamado de progressivamente mensurável com relação a $\mathbf{F}$ se o processo $\chi_A(\cdot)$ é progressivamente mensurável.

A classe de todos os conjuntos progressivamente mensuráveis é uma σ -álgebra, denominada σ -álgebra progressiva com relação a $\mathbf{F}$, denotada por $\mathbb{F}$. Podemos mostrar que um processo $\varphi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ é $\mathbf{F}$ -progressivamente mensurável se, e somente, se for fortemente $\mathbb{F}$ -mensurável.

É claro que se $X(\cdot)$ é $\mathbf{F}$ -progressivamente mensurável então deve ser $\mathbf{F}$ -adaptável. Por outro lado, pode ser provado que, para qualquer processo $\mathbf{F}$ -adaptável $X(\cdot)$, há um processo $\mathbf{F}$ -progressivamente mensurável $\tilde{X}(\cdot)$ que é estocasticamente equivalente a $X(\cdot)$. Por esse motivo, na sequência, dizendo que um processo $X(\cdot)$ é $\mathbf{F}$ -adaptável, queremos dizer que é $\mathbf{F}$ -progressivamente mensurável.

Para qualquer $p, q \in [1, \infty)$, definimos

$$L_{\mathbb{F}}^p(\Omega; L^q(0, T; \mathcal{X})) \\ := \left\{ \varphi : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathcal{X} \mid \varphi \text{ é } \mathbf{F} - \text{adaptável e } \int_{\Omega} \left(\int_0^T |\varphi(t, \omega)|_{\mathcal{X}}^q dt \right)^{\frac{p}{q}} d\mathbb{P} < \infty \right\}$$

e

$$L_{\mathbb{F}}^q(0, T; L^p(\Omega; \mathcal{X})) \\ := \left\{ \varphi : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathcal{X} \mid \varphi \text{ é } \mathbf{F} - \text{adaptável e } \int_0^T \left(\int_{\Omega} |\varphi(t, \omega)|_{\mathcal{X}}^p d\mathbb{P} \right)^{\frac{q}{p}} dt < \infty \right\}.$$

Da mesma forma, para $1 \leq p, q < \infty$, podemos definir os espaços de Banach (com as normas canônicas):

$$\begin{cases} L_{\mathbb{F}}^{\infty}(\Omega; L^q(0, T; \mathcal{X})), & L_{\mathbb{F}}^p(\Omega; L^{\infty}(0, T; \mathcal{X})), & L_{\mathbb{F}}^{\infty}(\Omega; L^{\infty}(0, T; \mathcal{X})) \\ L_{\mathbb{F}}^{\infty}(0, T; L^p(\Omega; \mathcal{X})), & L_{\mathbb{F}}^q(0, T; L^{\infty}(\Omega; \mathcal{X})), & L_{\mathbb{F}}^{\infty}(0, T; L^{\infty}(\Omega; \mathcal{X})). \end{cases}$$

No que se segue, denotaremos o espaço $L_{\mathbb{F}}^p(\Omega; L^p(0, T; \mathcal{X})) \equiv L_{\mathbb{F}}^p(0, T; L^p(\Omega; \mathcal{X}))$ por $L_{\mathbb{F}}^p(0, T; \mathcal{X})$ e $L_{\mathbb{F}}^p(0, T; \mathbb{R})$ por $L_{\mathbb{F}}^p(0, T)$.

Para qualquer $p \in [1, \infty)$, definimos

$$\begin{aligned} & L_{\mathbb{F}}^p(\Omega; C([0, T]; \mathcal{X})) \\ & := \{\varphi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{X} \mid \varphi \text{ é contínua, } \mathbf{F} - \text{adaptável e } \mathbb{E} \left(|\varphi(\cdot)|_{C([0, T]; \mathcal{X})}^p \right) < \infty \} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^p(\Omega; \mathcal{X})) \\ & := \{\varphi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{X} \mid \varphi \text{ é } \mathbf{F} - \text{adaptável e } \varphi(\cdot) : [0, T] \rightarrow L_{\mathcal{F}_T}^p(\Omega; \mathcal{X}) \text{ é contínua}\}. \end{aligned}$$

É possível mostrar que ambos $L_{\mathbb{F}}^p(\Omega; C([0, T]; \mathcal{X}))$ e $C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^p(\Omega; \mathcal{X}))$ são espaços de Banach com as normas

$$|\varphi(\cdot)|_{L_{\mathbb{F}}^p(\Omega; C([0, T]; \mathcal{X}))} = [\mathbb{E} |\varphi(\cdot)|_{C([0, T]; \mathcal{X})}^p]^{\frac{1}{p}}$$

e

$$|\varphi(\cdot)|_{C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^p(\Omega; \mathcal{X}))} = \max_{t \in [0, T]} [\mathbb{E} |\varphi(t)|_{\mathcal{X}}^p]^{\frac{1}{p}},$$

respectivamente. Além disso, denotamos por $D_{\mathbb{F}}([0, T]; L^p(\Omega; \mathcal{X}))$ o espaço de Banach de todos os processos que são contínuos a direita com limites a esquerda em $L_{\mathcal{F}_T}^p(\Omega; \mathcal{X})$, $t \in [0, T]$, com a norma $[\mathbb{E} |\varphi(\cdot)|_{\mathcal{X}}^p]_{L^{\infty}(0, T)}^{\frac{1}{p}}$.

Definição 1.2.8. Um processo contínuo $\{W(t)\}_{t \geq 0}$, com valores em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbf{F}$ -adaptável, é chamado de movimento Browniano m-dimensional (padrão), se

- 1) $\mathbb{P}(\{W(0) = 0\}) = 1$;
- 2) Para qualquer $s, t \in [0, \infty)$ com $0 \leq s < t < +\infty$, a variável aleatória $W(t) - W(s)$ é independente de $\mathcal{F}_s$ e $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, (t - s)I_m)$.

Observação 1. Para um movimento Browniano m-dimensional (padrão) com valores em $\mathbb{R}^m$, a variável aleatória $W(t) - W(s)$ satisfaz $\lambda = 0$ e $Q = (t - s)I_m$. Assim,

- $Q^{-1} = \frac{1}{t - s} I_m$

- $(x - 0)^T Q^{-1}(x - 0) = \frac{x_1^2}{t-s} + \frac{x_2^2}{t-s} + \cdots + \frac{x_m^2}{t-s} = \frac{|x|^2}{t-s}$
- $|\det Q| = (t-s)^m$.

Com isso, vemos que a função de densidade da variável aleatória $W(t) - W(s)$ é:

$$f(x) = \frac{1}{[2\pi(t-s)]^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2(t-s)}}.$$

Teorema 1.2.1. Com probabilidade um, as trajetórias do movimento Browniano não são diferenciáveis em nenhum ponto.

Demonstração. Ver [23, p. 86]. □

Da mesma forma como acima, podemos definir movimentos Brownianos de valores em $\mathbb{R}^m$ ao longo de qualquer intervalo de tempo $[a, b]$ ou $[a, b)$ com $0 \leq a < b \leq +\infty$.

Adiante, salvo indicação contrária, fixamos um movimento Browniano padrão unidimensional $W(\cdot)$ em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbb{P})$. Definimos

$$\mathcal{F}_t^W := \sigma(W(s); s \in [0, t]) \subset \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in \mathcal{I}. \quad (1.1)$$

De modo geral, a filtração $\{F_t^W\}_{t \in \mathcal{I}}$ é contínua à esquerda, mas não necessariamente é contínua à direita. No entanto, a família $\{\tilde{\mathcal{F}}_t^W\}_{t \in \mathcal{I}}$ formada por $\{F_t^W\}_{t \in \mathcal{I}}$ e todos os conjuntos de medida nula, é contínua, e $W(\cdot)$ é ainda um movimento Browniano no espaço de probabilidade filtrado (aumentado) $(\Omega, \mathcal{F}, \{\tilde{\mathcal{F}}_t^W\}_{t \in \mathcal{I}}, \mathbb{P})$.

Ao dizer que $\mathbf{F}$ é a filtração natural gerada por $W(\cdot)$, queremos dizer que $\mathbf{F}$ é gerada como em (1.1) com o aumento acima e, portanto, é contínua.

1.3 Integral de Itô

Seja H um espaço de Hilbert. Vamos agora definir a integral de Itô de um processo estocástico $X(\cdot)$, que é $\mathbf{F}$ -adaptado, de valor em H , com relação a um movimento Browniano $W(\cdot)$. Isto é, definiremos a seguinte integral estocástica

$$\int_0^t X(s) dW(s). \quad (1.2)$$

Notação 1. Quando escrevemos $X(s)$ estamos nos referindo à variável aleatória, definida em Ω , que leva ω em $X(s, \omega)$.

Integrais do tipo (1.2) aparecem no contexto das equações diferenciais estocásticas. É importante notar que não se pode definir (1.2) como uma integral do tipo de Lebesgue-Stieltjes considerando ω como um parâmetro. De fato, a aplicação $t \in [0, T] \mapsto W(t, \cdot)$ não é de variação limitada, q.t.p..

Observação 2. O resultado da integração de um processo estocástico com relação a um movimento Browniano $W(\cdot)$ é outro processo estocástico. Em particular, a integral (1.2) para cada t fixado é uma variável aleatória definida no espaço $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definição 1.3.1. Seja $f \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)$ um processo estocástico dado e considere uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = T$ do intervalo $[0, T]$ e variáveis aleatórias f_j que são $\mathcal{F}_{t_j}$ -mensuráveis, $j \in (1, \dots, n)$. Se para todos $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ o processo f admite a seguinte representação

$$f(t, \omega) = \sum_{j=0}^n f_j(\omega) \chi_{[t_j, t_{j+1})}(t), \quad (1.3)$$

então f é dita um processo escada (ou processo elementar ou processo simples). Denotamos o conjunto dos processos escadas por $\mathcal{L}_0$.

Suponha $f \in \mathcal{L}_0$. Definimos a integral de Itô de f em $[0, T]$ relativamente a $W(t)$ por

$$I(f)(t, \omega) := \int_0^t f(s, \omega) dW_s(\omega) = \sum_{j=0}^n f_j(\omega) [W(t \wedge t_{j+1}, \omega) - W(t \wedge t_j, \omega)],$$

onde

$$W(t \wedge t_{j+1}, \omega) - W(t \wedge t_j, \omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq t_j \\ W(t, \omega) - W(t_j, \omega) & \text{se } t_j < t \leq t_{j+1} \\ W(t_{j+1}, \omega) - W(t_j, \omega) & \text{se } t_{j+1} \leq t. \end{cases}$$

É fácil mostrar que $I(f) \in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega; H)$.

Lema 1.3.1. Para qualquer processo escada f (em particular, $f \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)$) temos a seguinte isometria de Itô,

$$|I(f)|_{L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega; H)} = |f|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, t; H)}.$$

Usaremos o seguinte resultado para definir integrais estocásticas de funções em $L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)$.

Lema 1.3.2. $\mathcal{L}_0$ é denso em $L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)$.

Dada $f \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)$, podemos encontrar uma sequência $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}_0$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f_k - f|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)} = 0.$$

Pela Isometria de Itô para processos simples, temos que

$$|I(f_k) - I(f_j)|_{L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega; H)} = |f_k - f_j|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, t; H)}.$$

Logo, $\{I(f_k)\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega; H)$ e portanto, ela converge para um único elemento em $L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega; H)$, que é determinado exclusivamente por f e é independente da escolha particular de $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Chamamos esse elemento de integral de Itô de f (com relação ao movimento Browniano $W(\cdot)$) em $[0, t]$ e denotamos por $\int_0^t f dW$.

Definição 1.3.2. Para $0 \leq s < t \leq T$, definimos

$$\int_0^t f dW - \int_0^s f dW$$

a integral Itô de $f \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)$ (com relação ao movimento Browniano $W(\cdot)$) no intervalo $[s, t]$.

Denotaremos a integral por $\int_s^t f(\tau) dW(\tau)$ ou simplesmente $\int_s^t f dW$.

Definição 1.3.3. Seja $p \in [1, \infty)$. Definimos o conjunto $L^{p, loc}_{\mathbb{F}}(0, T; H)$ como o conjunto de todos os processos estocásticos $f(\cdot)$ com valores em H e $\mathbf{F}$ -adaptados, que satisfazem

$$\int_0^T |f(t)|_H^p dt < \infty, \quad q.t.p..$$

De maneira análoga, podemos definir a integral de Itô para funções $f \in L^{p, loc}_{\mathbb{F}}(0, T; H)$, com $p \in [1, \infty)$.

A integral de Itô satisfaz as seguintes propriedades:

Teorema 1.3.3. Seja $p \in [1, \infty)$ e considere $f, g \in L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; L^2(0, T; H))$ e $a, b \in L^2_{\mathcal{F}_s}(\Omega)$, $0 \leq s, t \leq T$. Então,

- 1) $\int_s^t f dW \in L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; C([s, t]; H))$;
- 2) $\int_s^t (af + bg) dW = a \int_s^t f dW + b \int_s^t g dW$, q.t.p.;
- 3) $\mathbb{E} \left(\int_s^t f dW \right) = 0$;
- 4) Para $p = 2$, vale

$$\mathbb{E} \left(\left\langle \int_s^t f dW, \int_s^t g dW \right\rangle \right) = \mathbb{E} \left(\int_s^t \langle f(r, \cdot), g(r, \cdot) \rangle_H dr \right).$$

Demonstração. O resultado é provado primeiro para processos simples, e a prova do caso geral segue da definição de integral estocástica e, portanto, a omitimos aqui. $\square$

Lema 1.3.4 (Isometria de Itô). Para qualquer processo $f \in L^2_{\mathbb{F}}(0, t; H)$ temos a seguinte igualdade chamada isometria de Itô,

$$|I(f)|_{L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega; H)} = |f|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, t; H)}.$$

O seguinte resultado, conhecido como a desigualdade Burkholder-Davis-Gundy, relaciona a integral de Itô com a integral de Lebesgue/Bochner.

Teorema 1.3.5. Para qualquer $p \in [1, \infty)$, existe uma constante $\mathcal{C}_p > 0$ tal que para qualquer $T > 0$ e $f \in L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; L^2(0, T; H))$,

$$\frac{1}{\mathcal{C}_p} \mathbb{E} \left(\int_0^T |f(s)|_H^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \leq \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t f(s) dW(s) \right|_H^p \right) \leq \mathcal{C}_p \mathbb{E} \left(\int_0^T |f(s)|_H^2 ds \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Demonstração. Ver [23, p. 115]. $\square$

Definição 1.3.4 (Processo de Itô). Um processo estocástico contínuo $X(\cdot)$, com valores em H , $\mathbf{F}$ -adaptado, é chamado de processo de Itô se existem dois processos estocásticos com valores em H , $\phi(\cdot) \in L^{1,loc}_{\mathbb{F}}(0, T; H)$ e $\Phi(\cdot) \in L^{2,loc}_{\mathbb{F}}(0, T; H)$ tal que

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \phi(s) ds + \int_0^t \Phi(s) dW(s), \quad q.t.p, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.4)$$

O seguinte resultado fundamental é conhecido como fórmula de Itô.

Teorema 1.3.6 (Fórmula de Itô: versão forte). Seja $X(\cdot)$ um processo de Itô e $F : [0, T] \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que as derivadas parciais F_t , F_x e F_{xx} são uniformemente contínuas em qualquer subconjunto limitado de $[0, T] \times H$. Então,

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) - F(0, X(0)) &= \int_0^t F_x(s, X(s)) \Phi(s) dW(s) \\ &+ \int_0^t [F_t(s, X(s)) + F_x(s, X(s)) \phi(s) \\ &+ \frac{1}{2} \langle F_{xx}(s, X(s)) \Phi(s), \Phi(s) \rangle_H] ds, \quad q.t.p., \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Demonstração. Ver [23, p.110]. $\square$

Como caso particular, temos a regra do produto de Itô

$$d(X_1(t)X_2(t)) = X_2(t)dX_1(t) + X_1(t)dX_2(t) + \Phi_1(t)\Phi_2(t)dt,$$

onde X_1 e X_2 são dois processos de Itô.

Observação 3. Podemos escrever a fórmula (1.5) da seguinte forma diferencial:

$$\begin{aligned} dF(t, X(t)) &= F_x(t, X(t))\Phi(t)dW(t) + F_t(t, X(t))dt + F_x(t, X(t))\phi(t)dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\langle F_{xx}(t, X(t))\Phi(t), \Phi(t) \rangle_H dt. \end{aligned}$$

O Teorema 1.3.6 vale para processos de Itô na forma (1.4) (forte). No entanto, isso é muito restritivo no estudo de equações diferenciais estocásticas em dimensões infinitas. Na verdade, no cenário de dimensão infinita, às vezes é preciso lidar com os processos de Itô em uma forma mais fraca.

Seja $\mathcal{V}$ um espaço de Hilbert tal que a inclusão $\mathcal{V} \subset H$ seja contínua e densa. Denotamos por $\mathcal{V}^*$ o espaço dual de $\mathcal{V}$ com relação ao espaço pivô H . Portanto, $\mathcal{V} \subset H = H^* \subset \mathcal{V}^*$, continuamente e densamente, e

$$\langle z, v \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}^*} = \langle z, v \rangle_H, \quad \forall (v, z) \in H \times \mathcal{V}.$$

Teorema 1.3.7 (Fórmula de Itô: versão fraca). Suponha que $X_0 \in L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega; H)$, $\phi(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; \mathcal{V}^*)$ e $\Phi(\cdot) \in L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; L^2(0, T; H))$ para algum $p \geq 1$. Seja

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \phi(s)ds + \int_0^t \Phi(s)dW(s), \quad t \in [0, T].$$

Se $X \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; \mathcal{V})$, então $X(\cdot) \in C([0, T]; H)$, q.t.p., e para qualquer $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} |X(t)|_H^2 &= |X_0|_H^2 + 2 \int_0^t \langle \phi(s), X(s) \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}} ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle \Phi(s), X(s) \rangle_H dW(s) + \int_0^t |\Phi(s)|_H^2 ds, \quad \text{q.t.p.} \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [23, p. 120]. □

Observação 4. Por simplicidade, geralmente escrevemos a fórmula anterior da seguinte forma diferencial:

$$d|X(t)|_H^2 = 2\langle \phi(t), X(t) \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}} dt + |\Phi(t)|_H^2 dt + 2\langle \Phi(t), X(t) \rangle_H dW(t)$$

e denotamos $|\Phi(t)|_H^2 dt$ por $|dX|_H^2$ para simplificar.

1.4 Equações de Evolução Estocásticas

Seja H um espaço de Hilbert separável e A um operador linear ilimitado (com domínio $D(A)$) em H , o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Considere $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ um movimento Browniano definido num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e X_0 uma variável aleatória definida no mesmo espaço e independente do processo $\{W(t)\}_{t \geq 0}$. Estamos interessados em saber se existe um processo estocástico $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ satisfazendo a seguinte equação de evolução estocástica:

$$\begin{cases} dX(t) = (AX(t) + F(t, X(t)))dt + \tilde{F}(t, X(t))dW(t) & \text{em } (0, T], \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (1.6)$$

onde $X_0 \in L^p_{\mathcal{F}_0}(\Omega; H)$ (para algum $p \geq 1$), e $F(\cdot, \cdot)$ e $\tilde{F}(\cdot, \cdot)$ são duas funções dadas de $[0, T] \times \Omega \times H$ em H .

Observação 1. Eventualmente, poderemos escrever $X_0 \in H$, pois assumimos que o estado do sistema é conhecido no tempo $t = 0$.

Definição 1.4.1 (Solução forte). Um processo estocástico contínuo $X(\cdot)$ de valor em H , $\mathbf{F}$ -adaptado, é chamado de solução forte para a equação (1.6) se

- 1) $X(t) \in D(A)$ para quase todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ e $AX(\cdot) \in L^1(0, T; H)$ quase sempre;
- 2) $F(\cdot, X(\cdot)) \in L^1(0, T; H)$ quase sempre, $\tilde{F}(\cdot, X(\cdot)) \in L^{2,loc}_{\mathbb{F}}(0, T; H)$; e
- 3) Para todo $t \in [0, T]$,

$$X(t) = X_0 + \int_0^t (AX(s) + F(s, X(s)))ds + \int_0^t \tilde{F}(s, X(s))dW(s), \quad q.t.p..$$

Em geral, são necessárias condições muito restritivas para garantir a existência de soluções fortes para (1.6). Desse modo, temos outros dois tipos de soluções para a mesma equação, que chamaremos de solução fraca e solução mild.

Definição 1.4.2 (Solução fraca). Um processo estocástico contínuo $X(\cdot)$ de valor em H , $\mathbf{F}$ -adaptado, é chamado de solução fraca para a equação (1.6) se $F(\cdot, X(\cdot)) \in L^1(0, T; H)$ quase sempre, $\tilde{F}(\cdot, X(\cdot)) \in L^{2,loc}_{\mathbb{F}}(0, T; H)$, e para qualquer $t \in [0, T]$ e $\xi \in D(A^*)$, a seguinte identidade vale q.t.p.,

$$\begin{aligned} & \langle X(t), \xi \rangle_H \\ &= \langle X_0, \xi \rangle_H + \int_0^t (\langle X(s), A^*\xi \rangle_H + \langle F(s, X(s)), \xi \rangle_H)ds + \int_0^t \langle \tilde{F}(s, X(s)), \xi \rangle_H dW(s). \end{aligned}$$

Definição 1.4.3 (Solução mild). Um processo estocástico contínuo $X(\cdot)$ de valor em H , $\mathbf{F}$ -adaptado, é chamado de solução mild para a equação (1.6) se $F(\cdot, X(\cdot)) \in L^1(0, T; H)$ quase sempre, $\tilde{F}(\cdot, X(\cdot)) \in L_{\mathbb{F}}^{2,loc}(0, T; H)$, e para qualquer $t \in [0, T]$,

$$X(t) = S(t)X_0 + \int_0^t S(t-s)F(s, X(s))ds + \int_0^t S(t-s)\tilde{F}(s, X(s))dW(s), \quad q.t.p..$$

Observação 2. Uma solução forte para a equação (1.6) é também uma solução fraca/mild para a mesma equação.

O resultado a seguir fornece uma condição suficiente para uma solução mild ser uma solução forte.

Proposição 1.4.1. Uma solução mild $X(\cdot)$ para (1.6) é uma solução forte (para a mesma equação) se as três condições seguintes são válidas para todos os $x \in H$ e $0 \leq s \leq t \leq T$, *q.t.p.*,

- 1) $X_0 \in D(A)$, $S(t-s)F(s, x) \in D(A)$ e $S(t-s)\tilde{F}(s, x) \in D(A)$;
- 2) $|AS(t-s)F(s, x)|_H \leq \alpha(t-s)|x|_H$ para algum processo estocástico de valor real $\alpha(\cdot) \in L_{\mathbb{F}}^{1,loc}(0, T)$ *q.t.p.*; e
- 3) $|AS(t-s)\tilde{F}(s, x)|_H \leq \beta(t-s)|x|_H$ para algum processo estocástico de valor real $\beta(\cdot) \in L_{\mathbb{F}}^{2,loc}(0, T)$ *q.t.p.*

Demonstração. Ver [23, p.139]. □

O próximo resultado fornece a relação entre as soluções mild e fraca da equação (1.6).

Proposição 1.4.2. Qualquer solução fraca para (1.6) também é uma solução mild para a mesma equação e vice versa.

Demonstração. Ver [23, p.137]. □

Pela Proposição 1.4.2, no que segue, não iremos distinguir as soluções mild e fraca para (1.6).

No resto desta subseção, assumimos que ambos $F(\cdot, x)$ e $\tilde{F}(\cdot, x)$ são $\mathbf{F}$ -adaptados para cada $x \in H$, e existem duas funções não negativas (com valor real) $L_1(\cdot) \in L^1(0, T)$ e $L_2(\cdot) \in L^2(0, T)$ de modo que para quase todo $t \in [0, T]$ e todo $y, z \in H$,

$$\begin{cases} |F(t, y) - F(t, z)|_H \leq L_1(t)|y - z|_H, & q.t.p., \\ |\tilde{F}(t, y) - \tilde{F}(t, z)|_H \leq L_2(t)|y - z|_H, & q.t.p., \\ F(\cdot, 0) \in L_{\mathbb{F}}^p(\Omega; L^1(0, T; H)), \tilde{F}(\cdot, 0) \in L_{\mathbb{F}}^p(\Omega; L^2(0, T; H)). \end{cases}$$

Temos o seguinte resultado:

Teorema 1.4.3. Seja $p \geq 1$. Então, existe uma única solução mild $X(\cdot) \in C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^p(\Omega; H))$ para (1.6). Além disso,

$$|X(\cdot)|_{C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^p(\Omega; H))} \leq \mathcal{C}(|X_0|_{L^p_{\mathcal{F}_0}(\Omega; H)} + |F(\cdot, 0)|_{L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; L^1(0, T; H))} + |\tilde{F}(\cdot, 0)|_{L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; L^2(0, T; H))}).$$

Demonstração. Ver [23, p. 143]. □

Se o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ for contrativo, então podemos obter uma melhor regularidade para a solução mild com relação a variável tempo da seguinte forma:

Teorema 1.4.4. Se A gera um semigrupo de contração e $p \geq 1$, então (1.6) admite uma única solução mild $X(\cdot) \in L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, T]; H))$. Além disso,

$$|X(\cdot)|_{L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, T]; H))} \leq \mathcal{C}(|X_0|_{L^p_{\mathcal{F}_0}(\Omega; H)} + |F(\cdot, 0)|_{L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; L^1(0, T; H))} + |\tilde{F}(\cdot, 0)|_{L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; L^2(0, T; H))}).$$

Demonstração. Ver [23, p. 149]. □

O seguinte resultado fornece a regularidade das soluções mild para uma classe de equações de evolução estocásticas.

Teorema 1.4.5. Seja $p \geq 1$. Suponha que A é um operador auto-adjunto, negativo (linear ilimitado) definido em H . Então, a equação (1.6) admite uma única solução mild $X(\cdot) \in L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, T]; H)) \cap L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; L^2(0, T; D((-A)^{\frac{1}{2}})))$. Além disso,

$$\begin{aligned} & |X(\cdot)|_{L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, T]; H))} + |X(\cdot)|_{L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; L^2(0, T; D((-A)^{\frac{1}{2}})))} \\ & \leq \mathcal{C}(|X_0|_{L^p_{\mathcal{F}_0}(\Omega; H)} + |F(\cdot, 0)|_{L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; L^1(0, T; H))} + |\tilde{F}(\cdot, 0)|_{L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; L^2(0, T; H))}). \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [23, p. 154]. □

Em geral, uma solução mild não tem regularidade suficiente para muitas situações. No entanto, esse problema pode ser resolvido pela seguinte estratégia:

1. Apresente algumas equações auxiliares com soluções fortes, de modo que o limite dessas soluções é a solução mild ou fraca para a equação original.
2. Obtenha as propriedades desejadas para essas soluções fortes.
3. Utilize densidade para estabelecer as propriedades desejadas para soluções mild/fraca para a equação original.

Existem muitos métodos para implementar as três etapas acima na configuração de EDPs deterministas. Grosso modo, qualquer um desses métodos, que não destrói a adaptabilidade da solução com relação a $\mathbf{F}$, pode ser aplicada as Equações de Evolução Estocásticas. A seguir, apresentamos uma abordagem.

Introduzimos uma família de equações auxiliares para (1.6) da seguinte forma:

$$\begin{cases} dX^\lambda(t) = AX^\lambda(t)dt + R(\lambda)F(t, X^\lambda(t))dt + R(\lambda)\tilde{F}(t, X^\lambda(t))dW(t), & \text{em } (0, T], \\ X^\lambda(0) = R(\lambda)X_0 \in D(A). \end{cases} \quad (1.7)$$

Aqui, $\lambda \in \rho(A)$ e $R(\lambda) := \lambda(\lambda I - A)^{-1}$.

Teorema 1.4.6. Seja $p \geq 2$. Para cada $X_0 \in L^p_{\mathcal{F}_0}(\Omega; H)$ e $\lambda \in \rho(A)$, a equação (1.7) admite uma única solução forte $X^\lambda(\cdot) \in C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^p(\Omega; D(A)))$. Além disso, quando $\lambda \rightarrow \infty$, a solução $X^\lambda(\cdot)$ converge para $X(\cdot)$ em $C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^p(\Omega; H))$, onde $X(\cdot)$ é a solução mild para (1.6).

Demonstração. Ver [23, p. 152]. □

Por último, damos uma desigualdade do tipo Burkholder-Davis-Gundy, que é muito útil no estudo de soluções mild para Equações de Evolução Estocásticas.

Proposição 1.4.7. Seja $p \geq 1$. Existe uma constante $\mathcal{C}_p > 0$ tal que para qualquer $g \in L^p_{\mathbb{F}}(\Omega; L^2(0, T; H))$ e $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E} \left| \int_0^t S(t-s)g(s)dW(s) \right|_H^p \leq \mathcal{C}_p \mathbb{E} \left(\int_0^t |g(s)|_H^2 ds \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Demonstração. Ver [23, p. 146]. □

1.5 Equações de Evolução Estocásticas Reversas

Equações Diferenciais Estocásticas Reversas (EDERs) e, mais geralmente, Equações de Evolução Estocásticas Reversas (EEERs) são subprodutos no estudo da teoria de controle estocástico. Essas equações têm interesses independentes e são aplicadas em outros lugares.

Considere a seguinte Equação de Evolução Estocástica Reversa:

$$\begin{cases} dY(t) = -(A^*Y(t) + F(t, Y(t), Z(t)))dt - Z(t)dW(t) & \text{em } [0, T], \\ Y(T) = Y_T, \end{cases} \quad (1.8)$$

onde $Y_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; H)$ e $F : [0, T] \times \Omega \times H \times H \rightarrow H$ é uma função dada.

Observação 3. Considere a solução $(Y(\cdot), Z(\cdot))$ para a equação (1.8) adaptada à filtração natural $\{F_t\}_{t \geq 0}$ gerada pelo movimento Browniano $W(\cdot)$. Para essa filtragem, $\mathcal{F}_0$ é a σ -álgebra gerada por $\{\Omega, \emptyset\}$ e todos os conjuntos de medida nula. Nesse caso, um elemento em $L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega; H)$ é quase sempre igual a um elemento em H . Assim, no estudo de Equações Estocásticas Reversas, identificam-se esses dois espaços. Isto é, $L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega; H) \equiv H$.

Da mesma forma que no caso das Equações de Evolução Estocásticas, apresentamos a seguir noções de soluções fortes, fracas e mild para a equação (1.8).

Definição 1.5.1 (Solução forte). Um processo $(Y(\cdot), Z(\cdot))$ com valor em $H \times H$ é chamado uma solução forte para (1.8) se

- 1) $Y(\cdot)$ é $\mathbf{F}$ -adaptado e contínuo, $Z(\cdot) \in L^{2,loc}_{\mathbb{F}}(0, T; H)$;
- 2) $Y(t) \in D(A^*)$ para quase todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, $A^*Y(\cdot) \in L^1(0, T; H)$ e $F(\cdot, Y(\cdot), Z(\cdot)) \in L^1(0, T; H)$ q.t.p.;
- 3) Para qualquer $t \in [0, T]$,

$$Y(t) = Y_T + \int_t^T (A^*Y(s) + F(s, Y(s), Z(s)))ds + \int_t^T Z(s)dW(s), \quad q.t.p..$$

Definição 1.5.2 (Solução fraca). Um processo $(Y(\cdot), Z(\cdot))$ com valor em $H \times H$ é chamado uma solução fraca para (1.8) se

- 1) $Y(\cdot)$ é $\mathbf{F}$ -adaptado e contínuo, $Z(\cdot) \in L^{2,loc}_{\mathbb{F}}(0, T; H)$ e $F(\cdot, Y(\cdot), Z(\cdot)) \in L^1(0, T; H)$ q.t.p.;
- 2) Para qualquer $t \in [0, T]$ e $\eta \in D(A)$,

$$\begin{aligned} &\langle Y(t), \eta \rangle_H \\ &= \langle Y_T, \eta \rangle_H + \int_t^T \langle Y(s), A\eta \rangle_H ds + \int_t^T \langle F(s, Y(s), Z(s)), \eta \rangle_H ds + \int_t^T \langle Z(s), \eta \rangle_H dW(s), \end{aligned}$$

em quase toda parte.

Definição 1.5.3. Um processo $(Y(\cdot), Z(\cdot))$ com valor em $H \times H$ é chamado uma solução mild para (1.8) se

- 1) $Y(\cdot)$ é $\mathbf{F}$ -adaptado e contínuo, $Z(\cdot) \in L^{2,loc}_{\mathbb{F}}(0, T; H)$ e $F(\cdot, Y(\cdot), Z(\cdot)) \in L^1(0, T; H)$ q.t.p.;
- 2) Para qualquer $t \in [0, T]$,

$$Y(t) = S(T-t)^*Y_T + \int_t^T S(s-t)^*F(s, Y(s), Z(s))ds + \int_t^T S(s-t)^*Z(s)dW(s), \quad q.t.p..$$

Da mesma forma que a Proposição 1.4.2, temos o seguinte resultado a respeito da equivalência entre soluções fraca e mild para a equação (1.8).

Proposição 1.5.1. Um processo $(Y(\cdot), Z(\cdot))$ com valor em $H \times H$ é uma solução fraca para (1.8) se, e somente se, é uma solução mild para a mesma equação.

Demonstração. Ver [23, p. 163]. □

De acordo com a Proposição 1.5.1, a partir de agora, não iremos distinguir soluções fraca e mild para (1.8).

Claramente, se $(Y(\cdot), Z(\cdot))$ é uma solução forte para (1.8), então é também uma solução fraca/mild para a mesma equação. Por outro lado, a partir da Definição 1.5.2, é fácil mostrar o seguinte resultado.

Proposição 1.5.2. Uma solução fraca/mild $(Y(\cdot), Z(\cdot))$ para (1.8) é uma solução forte (para a mesma equação), se $Y(t) \in D(A^*)$ para quase todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, e $A^*Y(\cdot) \in L^1(0, T; H)$ q.t.p..

No restante desta subseção, assumimos que $F(\cdot, y, z)$ é $\mathbf{F}$ -adaptada para cada $y, z \in H$, e existem duas funções não negativas $L_1(\cdot) \in L^1(0, T)$ e $L_2(\cdot) \in L^2(0, T)$ tal que, para quase todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{cases} |F(t, y_1, z_1) - F(t, y_2, z_2)|_H \leq L_1(t)|y_1 - y_2|_H + L_2(t)|z_1 - z_2|_H, & q.t.p.. \\ F(\cdot, 0, 0) \in L^1_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(\Omega; H)). \end{cases}$$

Teorema 1.5.3. Assuma que $\mathbf{F}$ é a filtração natural gerada por $W(\cdot)$. Então, para todo $Y_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; H)$, a equação (1.8) admite uma única solução mild $(Y(\cdot), Z(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, T]; H)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)$, e

$$|(Y, Z)|_{L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, T]; H)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)} \leq \mathcal{C}(|Y_T|_{L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; H)} + |F(\cdot, 0, 0)|_{L^1_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(\Omega; H))}).$$

Demonstração. Ver [23, p. 166]. □

O seguinte resultado descreve o efeito da suavização de soluções mild para uma classe de equações de evolução estocásticas reversas.

Teorema 1.5.4. Seja $\mathbf{F}$ a filtração natural gerada por $W(\cdot)$, e A um operador auto-adjunto, negativo definido em H .

Então, para qualquer $Y_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; H)$, a equação (1.8) admite uma única solução mild $(Y(\cdot), Z(\cdot)) \in (L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, T]; H)) \cap L^2_{\mathbb{F}}(0, T; D((-A)^{\frac{1}{2}}))) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)$. Além disso,

$$\begin{aligned} & |Y(\cdot)|_{L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, T]; H))} + |Y(\cdot)|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; D((-A)^{\frac{1}{2}}))} + |Z(\cdot)|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)} \\ & \leq \mathcal{C}(|Y_T|_{L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; H)} + |F(\cdot, 0, 0)|_{L^1_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(\Omega; H))}). \end{aligned}$$

Demonstração. Similar à demonstração do Teorema 1.4.5. $\square$

Agora, para cada $\lambda \in \rho(A^*)$, introduzimos a seguinte equação aproximada de (1.8):

$$\begin{cases} dY^\lambda(t) = -(A^*Y^\lambda(t) + R^*(\lambda)F(t, Y(t), Z(t)))dt \\ \quad - R^*(\lambda)Z^\lambda(t)dW(t) \quad \text{em } [0, T], \\ Y^\lambda(T) = R^*(\lambda)Y_T, \end{cases} \quad (1.9)$$

onde $R^*(\lambda) := \lambda(\lambda I - A^*)^{-1}$, $Y_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; H)$ e $(Y(\cdot), Z(\cdot))$ é a solução mild para (1.8).

Pela Proposição 1.5.2, similarmente à prova do Teorema 1.4.6, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.5.5. Assuma que $\mathbf{F}$ é a filtração natural gerada por $W(\cdot)$. Então, para cada $Y_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; H)$ e $\lambda \in \rho(A^*)$, a equação (1.9) admite uma única solução forte $(Y^\lambda(\cdot), Z^\lambda(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, T]; D(A^*))) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; D(A^*))$. Além disso, quando $\lambda \rightarrow \infty$, $(Y^\lambda(\cdot), Z^\lambda(\cdot))$ converge para $(Y(\cdot), Z(\cdot))$ em $L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, T]; H)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)$, que é uma solução mild para (1.8).

Para resolver a equação de evolução estocástica reversa do tipo (1.8) no espaço geral de filtração, uma ideia fundamental no método de transposição estocástica é introduzir a seguinte equação de evolução estocástica teste

$$\begin{cases} d\varphi = (A\varphi + \psi_1)ds + \psi_2dW(s) \quad \text{em } (t, T], \\ \varphi(t) = \eta, \end{cases} \quad (1.10)$$

onde $t \in [0, T)$, $\psi_1 \in L^1_{\mathbb{F}}(t, T; L^2(\Omega; H))$, $\psi_2 \in L^2_{\mathbb{F}}(t, T; H)$ e $\eta \in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega; H)$.

Pelo Teorema 1.4.3, a equação (1.10) admite uma única solução $\varphi \in C_{\mathbb{F}}([t, T]; L^2(\Omega; H))$ tal que

$$|\varphi|_{C_{\mathbb{F}}([t, T]; L^2(\Omega; H))} \leq \mathcal{C} |(\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot), \eta)|_{L^1_{\mathbb{F}}(t, T; L^2(\Omega; H)) \times L^2_{\mathbb{F}}(t, T; H) \times L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega; H)}.$$

Definição 1.5.4. Chamamos $(Y(\cdot), Z(\cdot)) \in D_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega; H)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)$ uma solução por transposição para (1.8) se para qualquer $t \in [0, T]$, $\psi_1(\cdot) \in L^1_{\mathbb{F}}(t, T; L^2(\Omega; H))$, $\psi_2(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t, T; H)$, $\eta \in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega; H)$ vale

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\langle \varphi(T), Y_T \rangle_H - \mathbb{E} \int_t^T \langle \varphi(s), F(s, Y(s), Z(s)) \rangle_H ds \\ = \mathbb{E}\langle \eta, Y(t) \rangle_H + \mathbb{E} \int_t^T \langle \psi_1(s), Y(s) \rangle_H ds + \mathbb{E} \int_t^T \langle \psi_2(s), Z(s) \rangle_H ds, \end{aligned} \quad (1.11)$$

onde $\varphi \in C_{\mathbb{F}}([t, T]; L^2(\Omega; H))$ é a solução correspondente para (1.10).

Observação 5. Se (1.8) admite uma solução fraca $(Y(\cdot), Z(\cdot)) \in C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega; H)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)$, então, pela fórmula de Itô, obtemos a igualdade variacional (1.11). Esta é a verdadeira razão para apresentarmos a Definição 1.5.4.

Temos o seguinte resultado sobre a boa colocação da equação (1.8).

Teorema 1.5.6. A equação (1.8) admite uma única solução por transposição $(Y(\cdot), Z(\cdot)) \in D_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega; H)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)$. Além disso,

$$\begin{aligned} & |(Y(\cdot), Z(\cdot))|_{D_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega; H)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)} \\ & \leq \mathcal{C}(|Y_T|_{L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; H)} + |F(\cdot, 0, 0)|_{L^1_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(\Omega; H))}). \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [23, p. 181]. □

Observação 6. O método de transposição estocástica funciona bem não apenas para Equações de Evolução Estocásticas Reversas do tipo (1.8) com valores vetoriais (ou seja, valores em H), mas também (e mais importante) para Equações de Evolução Estocásticas Reversas com valores que são na verdade operadores (ou seja, valores em $\mathcal{L}(H)$).

Capítulo 2

Controlabilidade e observabilidade para equações de evolução estocásticas: alguns resultados básicos

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados sobre a controlabilidade e observabilidade de Equações de Evolução Estocásticas.

Aqui, U e H são espaços de Hilbert e A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em H .

2.1 Falta de controlabilidade exata

Considere o seguinte sistema de controle evoluindo em H :

$$\begin{cases} dX(t) = (A + F(t))X(t)dt + Bu(t)dt + K(t)X(t)dW(t) & \text{em } (0, T], \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

com $X_0 \in H$, $F, K \in L^\infty_{\mathbb{F}}(0, T; \mathcal{L}(H))$, $B \in \mathcal{L}(U; H)$ e $u \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; U)$.

Observação 4. No sistema (2.1), temos que $X_0 \in L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega; H)$. Entretanto, escreve-se $X_0 \in H$ porque assumimos que o estado do sistema é conhecido no tempo $t = 0$.

Vejamos agora a noção de controlabilidade exata para o sistema (2.1).

Definição 2.1.1 (Controlabilidade exata). O sistema (2.1) é dito exatamente controlável no tempo $T > 0$ se para qualquer $X_0 \in H$ e $X_1 \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; H)$, existe um controle $u \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; U)$ tal que a solução correspondente $X(\cdot)$ de (2.1) satisfaz $X(T) = X_1$, q.t.p.

O seguinte resultado nos diz que quando $K(\cdot) \in C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^\infty(\Omega; \mathcal{L}(H)))$, o sistema (2.1) não é exatamente controlável.

Teorema 2.1.1. Seja $K(\cdot) \in C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^\infty(\Omega; \mathcal{L}(H)))$. Então o sistema (2.1) não é exatamente controlável em qualquer instante $T > 0$.

Para demonstrar este teorema, faremos uso da seguinte função $\eta(\cdot)$ em $[0, T]$ dada por

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } t \in \left[\left(1 - \frac{1}{2^{2j}}\right)T, \left(1 - \frac{1}{2^{2j+1}}\right)T \right), j = 0, 1, 2, \dots, \\ -1, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.2)$$

e do seguinte lema

Lema 2.1.2. Seja $\xi = \int_0^T \eta(t)dW(t)$. É impossível encontrar $(\varrho_1, \varrho_2) \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T) \times C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega))$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\xi = x_0 + \int_0^T \varrho_1(t)dt + \int_0^T \varrho_2(t)dW(t). \quad (2.3)$$

Demonstração. Ver [28, Lema 2.1]. □

Demonstração do Teorema 2.1.1: Assumimos, sem perda de generalidade, que $F(\cdot) = 0$. Daí, o sistema (2.1) se reescreve como:

$$\begin{cases} dX(t) = AX(t)dt + Bu(t)dt + K(t)X(t)dW(t) \text{ em } (0, T], \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Vamos mostrar o resultado por contradição. Suponha que (2.4) seja exatamente controlável em algum momento $T > 0$ e considere $X_0 = 0$ e $X_1 = \left(\int_0^T \eta(t)dW(t) \right) \varphi$ com $\eta(\cdot)$ sendo dado por (2.2) e $\varphi \in D(A^*)$ tal que $|\varphi|_H = 1$. Assim, temos que existe um controle $u \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; U)$ tal que a solução correspondente $X(\cdot)$ para (2.4) satisfaz $X(T) = X_1$, q.t.p.

Pela definição de solução fraca para (2.4) (ver 1.4.2), temos que

$$\langle X(T), \varphi \rangle_H = \langle X_0, \varphi \rangle_H + \int_0^T (\langle X(t), A^* \varphi \rangle_H + \langle Bu(t), \varphi \rangle_H) dt + \int_0^T \langle K(t)X(t), \varphi \rangle_H dW(t).$$

Como $X(T) = X_1$, $X_0 = 0$ e $|\varphi|_H = 1$, segue que

$$\int_0^T \eta(t)dW(t) = \int_0^T (\langle X(t), A^* \varphi \rangle_H + \langle Bu(t), \varphi \rangle_H) dt + \int_0^T \langle K(t)X(t), \varphi \rangle_H dW(t). \quad (2.5)$$

Afirmção 1. Como $X(\cdot) \in C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega; H))$, segue que $\langle X(\cdot), A^* \varphi \rangle_H + \langle Bu(\cdot), \varphi \rangle_H \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T)$ e $\langle K(\cdot)X(\cdot), \varphi \rangle_H \in C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega))$.

Da Afirmção 1, é fácil ver que a identidade (2.5) contradiz o Lema 2.1.2. E com isso, segue que o sistema (2.1) não é exatamente controlável.

Demonstração da Afirmção 1: Como $X_0 \in H$ e $X(\cdot)$ é solução fraca de (2.4), então $X(\cdot) \in C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega; H))$. Por hipótese, temos que $K(\cdot) \in C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^\infty(\Omega; \mathcal{L}(H)))$.

Agora, vejamos que:

$$\bullet \langle X(\cdot), A^* \varphi \rangle_H + \langle Bu(\cdot), \varphi \rangle_H \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T)$$

Para isso, é suficiente mostrar que

$$\int_0^T |\langle X(\cdot), A^* \varphi \rangle_H + \langle Bu(\cdot), \varphi \rangle_H|^2 dt < +\infty.$$

Da desigualdade triangular, tem-se que

$$\int_0^T |\langle X(\cdot), A^* \varphi \rangle_H + \langle Bu(\cdot), \varphi \rangle_H|^2 dt \leq \int_0^T |\langle X(\cdot), A^* \varphi \rangle_H|^2 dt + \int_0^T |\langle Bu(\cdot), \varphi \rangle_H|^2 dt.$$

Assim, vamos considerar separadamente cada integral: Como $B \in \mathcal{L}(U; H)$ e $u \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; U) \Rightarrow u(t) \in U$, $t \in (0, T)$ q.t.p. Então, $Bu(t) \in H$, $t \in (0, T)$ q.t.p. Seja,

$$\langle Bu(t), \varphi \rangle_H = r(t).$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |r(t)| &\leq |Bu(t)|_H |\varphi|_H \\ &\leq |B|_{\mathcal{L}(U; H)} |u(t)|_U |\varphi|_H \\ &\leq \mathcal{C} |u(t)|_U, \end{aligned}$$

pois B é limitado e $|\varphi|_H = 1$. Integrando de 0 a T , temos

$$\int_0^T |r(t)|^2 dt \leq \mathcal{C} \int_0^T |u(t)|_U^2 dt < \infty,$$

já que $u \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; U)$. Portanto, $r(t) \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T)$.

Do mesmo modo, vemos que $\langle X(\cdot), A^* \varphi \rangle_H \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T)$. Seja

$$\langle X(t, \cdot), A^* \varphi \rangle_H = G(t).$$

Novamente, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, e integrando de 0 a T , vemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T |G(t)|^2 dt &\leq \int_0^T |X(t, \cdot)|_H^2 |A^* \varphi|_H^2 dt \\ &\leq C \int_0^T |X(t, \cdot)|_H^2 dt < \infty, \end{aligned}$$

pois $C_{\mathbb{F}}([0, T]) \subset L^2_{\mathbb{F}}(0, T)$. Portando, $G(t) \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T)$.

$$\bullet \langle K(\cdot)X(\cdot), \varphi \rangle_H \in C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega))$$

Seja

$$\langle K(t, \cdot)X(t, \cdot), \varphi \rangle_H = L(t).$$

Queremos mostrar que $L(t) \in C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega))$. Primeiro, vejamos que para cada $t \in [0, T]$, temos $L(t) \in L^2(\Omega)$. De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e usando que $|\varphi|_H = 1$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |L(t)|^2 d\mathbb{P}(\omega) &= \int_{\Omega} |\langle K(t, \omega)X(t, \omega), \varphi \rangle_H|^2 d\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \int_{\Omega} |K(t, \omega)X(t, \omega)|_H^2 |\varphi|_H^2 d\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \int_{\Omega} |K(t, \omega)|_{\mathcal{L}(H)}^2 |X(t, \omega)|_H^2 d\mathbb{P}(\omega) < \infty. \end{aligned}$$

Logo, $L(t) \in L^2(\Omega)$, pois $|K(\cdot)|_{\mathcal{L}(H)} \in L^\infty(\Omega)$ e $|X(\cdot)|_H \in L^2(\Omega)$.

Além disso, $|L(t)|_{L^2(\Omega)} \in C_{\mathbb{F}}([0, T])$ pois $|X(\cdot)|_{L^2(\Omega; H)} \in C_{\mathbb{F}}([0, T])$ e $|K(\cdot)|_{L^\infty(\Omega; \mathcal{L}(H))} \in C_{\mathbb{F}}([0, T])$. $\square$

Isso conclui a prova do Teorema 2.1.1. $\square$

O Teorema 2.1.1 conclui que uma Equação de Evolução Estocástica não é exatamente controlável quando o controle, que é L^2 com relação a variável tempo, só atua no termo drift. Resultados adicionais para problemas de controlabilidade de tais sistemas de controle estocástico pode ser encontrados em [10], [28], [31].

2.2 Controlabilidade nula e aproximada de equações de evolução estocásticas

Começaremos introduzindo os seguintes conceitos.

Definição 2.2.1 (Controlabilidade nula). O sistema (2.1) é dito controlável a zero no tempo $T > 0$ se, para qualquer $X_0 \in H$, existe um controle $u \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; U)$ tal que a solução correspondente $X(\cdot)$ de (2.1) satisfaz $X(T) = 0$, q.t.p..

Definição 2.2.2 (Controlabilidade aproximada). O sistema (2.1) é chamado aproximadamente controlável no tempo $T > 0$ se, para qualquer $X_0 \in H$, $X_1 \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; H)$ e $\epsilon > 0$, existe um controle $u \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; U)$ tal que a solução correspondente $X(\cdot)$ de (2.1) satisfaz $|X(T) - X_1|_{L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; H)} < \epsilon$.

É fácil estudar a controlabilidade nula do sistema (2.1) quando o operador $F(\cdot)$ é “determinista”, isto é, $F(\cdot) \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}(H))$. Neste caso, considere o seguinte sistema de controle determinista:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}(t)}{dt} = (A + F(t))\tilde{X}(t) + B\tilde{u}(t) \text{ em } (0, T], \\ \tilde{X}(0) = X_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde $X_0 \in H$ e $\tilde{u} \in L^2(0, T; U)$. Analogamente à Definição 2.2.1, o sistema (2.6) é dito controlável a zero no tempo $T > 0$ se para qualquer $X_0 \in H$, existe um controle $\tilde{u} \in L^2(0, T; U)$ tal que a solução correspondente para (2.6) satisfaz $\tilde{X}(T) = 0$. Temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2.1. Suponha que $F(\cdot) \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}(H))$ e $K(\cdot) \in L^\infty_{\mathbb{F}}(0, T)$, então o sistema estocástico (2.1) é controlável a zero no tempo $T > 0$ se, e somente se, o sistema determinista (2.6) for controlável a zero em T .

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que (2.1) é controlável a zero no tempo T . Para $X_0 \in H$ arbitrário, seja $u(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; U)$ um controle que leva a solução de (2.1) a 0 no tempo T , ou seja, $X(T) = 0$. Mostremos que $\mathbb{E}X$ é a solução para (2.6) com o controle $\tilde{u} = \mathbb{E}u \in L^2(0, T; U)$. De fato, se $X(\cdot)$ é solução de (2.1), então, por (1.4.1):

$$X(t) = X_0 + \int_0^t (A + F(s))X(s)ds + \int_0^t Bu(s)ds + \int_0^t K(s)X(s)dW(s).$$

Aplicando a média em ambos os lados, segue que

$$\mathbb{E}X(t) = \mathbb{E}X_0 + \mathbb{E} \int_0^t (A + F(s))X(s)ds + \mathbb{E} \int_0^t Bu(s)ds + \mathbb{E} \int_0^t K(s)X(s)dW(s). \quad (2.7)$$

Das propriedades da integral de Itô, temos que

$$\mathbb{E} \int_0^t K(s)X(s)dW(s) = 0.$$

Além disso, das propriedades da integral de Bochner, sendo $B \in \mathcal{L}(U; H)$, temos que

$$\mathbb{E}Bu(t) = B\mathbb{E}u(t).$$

Seja $\tilde{X}(t) = \mathbb{E}X(t)$. Sabendo que $F(\cdot)$ é determinista, ou seja, não depende de ω , temos, por Fubini e da identidade (2.7) que

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{X}(t)}{dt} &= \mathbb{E}(A + F(t))X(t) + \mathbb{E}Bu(t) \\ &= (A + F(t))\mathbb{E}X(t) + B\mathbb{E}u(t) \\ &= (A + F(t))\tilde{X}(t) + B\tilde{u}(t), \end{aligned}$$

em que $\tilde{u}(t) = \mathbb{E}u(t)$. Como $X(T) = 0$, q.t.p., temos que $\tilde{X}(T) = \mathbb{E}X(T) = 0$, o que mostra que (2.6) é controlável a zero no tempo T .

($\Leftarrow$) Dado $X_0 \in H$, seja $\tilde{u}(\cdot) \in L^2(0, T; U)$ um controle que leva a solução de (2.6) a 0 no tempo T . Considere

$$X(t) = e^{\int_0^t K(s)dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t |K(s)|_H^2 ds} \tilde{X}(t).$$

Temos que $X(\cdot)$ é a única solução de (2.1) com o controle

$$u(\cdot) = e^{\int_0^\cdot K(s)dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^\cdot K(s)^2 ds} \tilde{u}(\cdot). \quad (2.8)$$

De fato, fazendo

$$Y(t) = \int_0^t K(s)dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t K(s)^2 ds$$

e

$$G(Y(t)) = e^{Y(t)}.$$

Da fórmula de Itô (ver Cap.1, Observação 3) com $H = \mathbb{R}$, segue que

$$dG(Y(t)) = G(Y(t)) \cdot \left(-\frac{1}{2} K^2(t) dt \right) + \frac{1}{2} G(Y(t)) K^2(t) dt + G(Y(t)) K(t) dW(t).$$

Logo,

$$dG(Y(t)) = G(Y(t)) K(t) dW.$$

Assim, como $\tilde{X}$ é solução de (2.6), tem-se que

$$\begin{aligned} dX(t) &= dG(Y(t))\tilde{X}(t) + G(Y(t))d\tilde{X}(t) \\ &= G(Y(t))\tilde{X}(t)K(t)dW + G(Y(t))(A + F(t))\tilde{X}(t)dt + G(Y(t))B\tilde{u}(t). \end{aligned}$$

Como $G(Y(t))\tilde{X}(t) = X(t)$, segue que

$$dX(t) = (A + F(t))X(t)dt + Bu(t)dt + X(t)K(t)dW.$$

Agora, uma vez que $\tilde{X}(T) = 0$, temos

$$X(T) = e^{\int_0^T K(s)dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^T K(s)^2 ds} \tilde{X}(T) = 0.$$

Além disso, de (2.8), pelo Teorema de Fubini

$$\mathbb{E} \int_0^T |u(t)|_U^2 dt = \int_0^T |\tilde{u}(t)|_U^2 \mathbb{E} |e^{\int_0^t K(s)dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t K(s)^2 ds}|^2 dt \leq C \int_0^T |\tilde{u}(t)|_U^2 dt < \infty,$$

pois $\tilde{u} \in L^2(0, T; U)$. Ou seja, mostramos que existe $u \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; U)$ que orienta a solução de (2.1) a 0 no tempo T . Isto completa a prova. $\square$

Observação 7. O argumento usado na prova do Teorema 2.2.1 não pode ser aplicado para obter a controlabilidade exata ou controlabilidade aproximada do sistema (2.1). De fato, suponhamos que o sistema determinista (2.6) seja exatamente controlável, ou seja, para qualquer $X_0, X_1 \in H$, existe um controle $\tilde{u}$ tal que a solução de (2.6) satisfaz $\tilde{X}(T) = X_1$. Considere

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_T &:= \{X(T) \mid X(\cdot) \text{ resolve (2.1) para alguns } X_0 \in H \text{ e} \\ &\quad u(\cdot) = e^{\int_0^T K(s)dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^T K(s)^2 ds} \tilde{u}(\cdot) \text{ para } \tilde{u}(\cdot) \in L^2(0, T; U)\}. \end{aligned}$$

Da controlabilidade exata de (2.6), vemos que

$$\mathcal{A}_T = \{e^{\int_0^T K(s)dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^T K(s)^2 ds} X_1 \mid X_1 \in H\}.$$

Claramente, $\mathcal{A}_T \neq L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; H)$ e $\mathcal{A}_T$ não é denso em $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; H)$. Consequentemente, não é possível deduzir a controlabilidade exata/aproximada do sistema estocástico (2.1) a partir da controlabilidade exata/aproximada do sistema determinista (2.6).

Observação 8. Quando A gera um C_0 -grupo em H , a controlabilidade nula de (2.6) implica a controlabilidade exata/aproximada de (2.6). Da Observação 7, é fácil ver que isso está incorreto para (2.1), que é um fenômeno novo no cenário estocástico.

Para sistemas de controle deterministas, se assumirmos que o operador de controle B é inversível, então é fácil obter resultados de controlabilidade. O seguinte teorema mostra que o mesmo vale para sistemas de controle estocástico.

Teorema 2.2.2. Se $B \in \mathcal{L}(U; H)$ é inversível, então o sistema (2.1) é controlável a zero e aproximadamente controlável para qualquer tempo $T > 0$.

Demonstração. Considere a seguinte Equação de Evolução Estocástica Reversa:

$$\begin{cases} dY(t) = -(A^*Y(t) + F(t)Y(t) + K(t)Z(t))dt + Z(t)dW(t) \text{ em } [0, T), \\ Y(T) = Y_T, \end{cases}$$

onde $Y_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; H)$. De [23, Teorema 7.17], para provar que (2.1) é controlável a zero, basta mostrar que

$$|Y(0)|_H^2 \leq \mathcal{C} \int_0^T \mathbb{E}|B^*Y(t)|_U^2 dt. \quad (2.9)$$

Pelo Teorema 1.5.3, existe uma constante $\mathcal{C} > 0$ tal que

$$|Y(0)|_H^2 \leq \mathcal{C} \mathbb{E}|Y(t)|_H^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.10)$$

Como B é inversível, como consequência do Teorema da Aplicação Aberta, (ver [7, Corolário C.1]), temos que existe uma constante $\mathcal{C} > 0$ tal que

$$|x|_H \leq \mathcal{C}|B^*x|_U, \quad \forall x \in H.$$

Assim, como $Y(t) \in H$, segue que

$$|Y(0)|_H^2 \leq \mathcal{C} \int_0^T \mathbb{E}|Y(t)|_H^2 dt \leq \mathcal{C} \int_0^T \mathbb{E}|B^*Y(t)|_U^2 dt,$$

o que mostra que o sistema (2.1) é controlável a zero se o operador B for inversível.

Para provar que (2.1) é aproximadamente controlável, por [23, Teorema 7.19] basta mostrar o seguinte resultado de continuação única

$$B^*Y(\cdot) = 0 \text{ em } (0, T), \text{ q.t.p.} \Rightarrow Y_T = 0.$$

Como B é inversível, temos que B^* é inversível. Logo, $B^*Y(\cdot) = 0 \Rightarrow Y(\cdot) = 0$ em $L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H)$. Ou seja, para quase todo $t \in (0, T)$, $Y(t) = 0$. Considerando, $Y(\cdot) \in C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega; H))$, temos que $Y(\cdot) : [0, T] \rightarrow L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; H)$ é contínua. Daí, sendo $Y(\cdot) = 0$ para $t \in (0, T)$, segue que $Y_T = Y(T) = 0$.

□

2.3 Estimativa de observabilidade de equações de evolução estocásticas

Considere a seguinte Equação de Evolução Estocástica:

$$\begin{cases} dX(t) = (A + F(t))X(t)dt + G(t)X(t)dW(t) & \text{em } (0, T], \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (2.11)$$

onde $X_0 \in H$, $F \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}(H))$ e $G \in L^\infty_{\mathbb{F}}(0, T; \mathcal{L}(H))$. Além disso, seja a seguinte equação de evolução determinista:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}(t)}{dt} = (A + F(t))\tilde{X}(t) & \text{em } (0, T], \\ \tilde{X}(0) = X_0, \end{cases} \quad (2.12)$$

Considere $\tilde{U}$ outro espaço de Hilbert e $\phi \in \mathcal{L}(H; \tilde{U})$.

Definição 2.3.1. 1) Dizemos que a equação (2.11) é observável em $[0, T]$ para o operador de observação ϕ se

$$|X_0|_H^2 \leq C \int_0^T \mathbb{E} |\phi X(t)|_{\tilde{U}}^2 dt, \quad (2.13)$$

2) Dizemos que a equação (2.12) é observável em $[0, T]$ para o operador de observação ϕ se

$$|X_0|_H^2 \leq C \int_0^T |\phi \tilde{X}(t)|_{\tilde{U}}^2 dt. \quad (2.14)$$

O resultado a seguir revela a relação entre as observabilidades das equações (2.11) e (2.12).

Teorema 2.3.1. A equação (2.11) é observável em $[0, T]$ para o operador observação ϕ , desde que assim seja a equação (2.12). Em outras palavras, a equação (2.11) é observável em $[0, T]$ se a sua equação determinista o for.

Demonstração. Seja $X(\cdot)$ a solução forte para (2.11). Então, $\mathbb{E}X(\cdot)$ é solução para (2.12). De fato, de (1.4.1), temos que

$$X(t) = X_0 + \int_0^t (A + F(s))X(s)ds + \int_0^t G(s)X(s)dW(s).$$

Tomando a média,

$$\mathbb{E}X(t) = \mathbb{E}X_0 + \mathbb{E} \int_0^t (A + F(s))X(s)ds + \mathbb{E} \int_0^t G(s)X(s)dW(s).$$

Das propriedades da integral de Itô,

$$\mathbb{E} \int_0^t G(s)X(s)dW(s) = 0.$$

Fazendo $\tilde{X}(t) = \mathbb{E}X(t)$. Segue, por Fubini e por $F(\cdot)$ ser determinista, que

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{X}(t)}{dt} &= \mathbb{E}(A + F(t))X(t) \\ &= (A + F(t))\mathbb{E}X(t) \\ &= (A + F(t))\tilde{X}(t). \end{aligned}$$

Se (2.12) é observável em $[0, T]$, então por (2.14),

$$|X_0|_H^2 \leq \mathcal{C} \int_0^T |\phi \tilde{X}(t)|_{\tilde{U}}^2 dt = \mathcal{C} \int_0^T |\phi \mathbb{E}X(t)|_{\tilde{U}}^2 dt. \quad (2.15)$$

Como $\phi \in \mathcal{L}(H; \tilde{U})$, das propriedades da integral de Bochner, tem-se que

$$\begin{aligned} |\phi \mathbb{E}X(t)|_{\tilde{U}}^2 &= \left| \phi \int_{\Omega} X(t) d\mathbb{P} \right|_{\tilde{U}}^2 \\ &= \left| \int_{\Omega} \phi X(t) d\mathbb{P} \right|_{\tilde{U}}^2 \\ &\leq \int_{\Omega} |\phi X(t)|_{\tilde{U}}^2 d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}|\phi X(t)|_{\tilde{U}}^2. \end{aligned}$$

Integrando de 0 a T , segue que

$$\mathcal{C} \int_0^T |\phi \mathbb{E}X(t)|_{\tilde{U}}^2 dt \leq \mathcal{C} \int_0^T \mathbb{E}|\phi X(t)|_{\tilde{U}}^2 dt. \quad (2.16)$$

Portanto, de (2.15) e (2.16)

$$|X_0|_H^2 \leq \mathcal{C} \int_0^T \mathbb{E}|\phi X(t)|_{\tilde{U}}^2 dt.$$

□

Observação 9. Claramente, quando F é estocástico (ou seja, F depende de ω), não podemos usar o argumento acima para resolver os problemas de observabilidade para as Equações de Evolução Estocásticas. Como veremos, para estabelecer a observabilidade para Equações Diferenciais Parciais Estocásticas, um método poderoso é a estimativa global de Carleman.

Observação 10. Nesta seção, por simplicidade, assumimos que $B \in \mathcal{L}(U; H)$ e $\phi \in \mathcal{L}(H; \tilde{U})$. Alguns resultados para B e ϕ ilimitados podem ser encontrados em [23].

Capítulo 3

Equação de Transporte Estocástica

A equação de transporte estocástica pode ser considerada como a equação diferencial parcial estocástica mais simples. Neste capítulo, vamos considerar o problema da controlabilidade exata para esta equação. Por um argumento de dualidade, será suficiente obter uma estimativa de observabilidade adequada para equações de transporte estocásticas reversas. Para obter a observabilidade empregaremos uma versão estocástica de estimativas global de Carleman.

Aqui, assumimos que $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ é a filtração natural gerada por $W(\cdot)$.

3.1 Formulação do problema

Seja $G \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e convexo, com fronteira Γ de classe C^1 . Para qualquer $T > 0$, considere

$$Q := (0, T) \times G \quad \text{e} \quad \Sigma := (0, T) \times \Gamma.$$

Fixe um ponto $O \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $|O|_{\mathbb{R}^n} = 1$ e defina,

$$\begin{aligned} \Gamma^- &:= \{x \in \Gamma \mid O \cdot \nu(x) < 0\}, & \Gamma^+ &:= \{x \in \Gamma \mid O \cdot \nu(x) \geq 0\}, \\ \Sigma^- &:= (0, T) \times \Gamma^-, & \Sigma^+ &:= (0, T) \times \Gamma^+, \end{aligned}$$

em que $\nu(x)$ é o vetor normal exterior unitário de G para $x \in \Gamma$.

Seja $L_O^2(\Gamma^-)$ o espaço de Hilbert obtido pelo completamento de $C_0^\infty(\Gamma^-)$ com relação à norma

$$|h|_{L_O^2(\Gamma^-)} := \left(- \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu |h|^2 d\Gamma^- \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall h \in C_0^\infty(\Gamma^-). \quad (3.1)$$

Como $C_0^\infty(\Gamma^-) \hookrightarrow L^2(\Gamma^-) \hookrightarrow L_O^2(\Gamma^-)$ segue que $L^2(\Gamma^-)$ é denso em $L_O^2(\Gamma^-)$.

Antes de introduzirmos o problema que queremos estudar, vamos relembrar o pro-

blema de controlabilidade para a seguinte equação de transporte determinista

$$\begin{cases} y_t + O \cdot \nabla y = a_1^0 y & \text{em } Q, \\ y(t, x) = u(t, x) & \text{sobre } \Sigma^-, \\ y(0) = y_0 & \text{em } G, \end{cases} \quad (3.2)$$

em que $y_0 \in L^2(G)$ e $a_1^0 \in L^\infty(0, T; L^\infty(G))$. Em (3.2), y é o estado e u é o controle. Os espaços de estado e controle são serão $L^2(G)$ e $L^2(0, T; L_O^2(\Gamma^-))$, respectivamente. É fácil mostrar que, para qualquer $y_0 \in L^2(G)$ e $u \in L^2(0, T; L_O^2(\Gamma^-))$, o sistema (3.2) admite uma única solução por transposição $y(\cdot) \in C([0, T]; L^2(G))$ (ver[20]).

Definição 3.1.1. O sistema (3.2) é exatamente controlável no tempo $T > 0$ se, para quaisquer $y_0, y_1 \in L^2(G)$, existir um controle $u \in L^2(0, T; L_O^2(\Gamma^-))$ tal que a solução correspondente $y(\cdot)$ de (3.2) satisfaz $y(T) = y_1$.

Para estudar o problema de controlabilidade exata de (3.2), é necessário introduzir a seguinte equação dual:

$$\begin{cases} z_t + O \cdot \nabla z = -a_1^0 z & \text{em } Q, \\ z(t, x) = 0 & \text{sobre } \Sigma^+, \\ z(T) = z_T & \text{em } G. \end{cases} \quad (3.3)$$

Por meio do argumento de dualidade padrão, é fácil mostrar o seguinte resultado (ver [18]).

Proposição 3.1.1. A equação (3.2) é exatamente controlável no tempo $T > 0$ se, e somente se, as soluções para a equação (3.3) satisfazem a seguinte estimativa de observabilidade

$$|z_T|_{L^2(G)} \leq \mathcal{C} |z|_{L^2(0, T; L_O^2(\Gamma^-))}, \quad \forall z_T \in L^2(G). \quad (3.4)$$

Problemas de controlabilidade para equações de transporte deterministas são bem compreendidos. De fato, pode-se usar a estimativa global de Carleman para provar a desigualdade de observabilidade (3.4) para $T > 2 \max_{x \in \Gamma} |x|_{\mathbb{R}^n}$ (c.f. [18]). No restante desta seção, veremos que as coisas são bem diferentes no cenário estocástico.

Considere a seguinte equação de transporte estocástica controlada:

$$\begin{cases} dy + O \cdot \nabla y dt = (a_1 y + a_3 v) dt + (a_2 y + v) dW(t) & \text{em } Q, \\ y = u & \text{sobre } \Sigma^-, \\ y(0) = y_0 & \text{em } G. \end{cases} \quad (3.5)$$

Aqui $y_0 \in L^2(G)$, e $a_1, a_2, a_3 \in L^\infty_{\mathbb{F}}(0, T; L^\infty(G))$. Em (3.5), y é o estado, enquanto $u \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-))$ e $v \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$ são dois controles.

Observação 11. Na prática, muito provavelmente, o controle v no termo de difusão afeta também o sistema através de seu termo drift (na forma a_3v , como se ver em (3.5)). Isso significa que não se pode simplesmente colocar um controle apenas no termo de difusão. O custo é que isso afetará o termo drift de maneira indesejada, ou seja, a_3v não funciona como controle, mas como perturbação.

Soluções para (3.5) devem ser entendida no sentido de transposição. Para isso, apresentamos a seguinte equação de “referência” que é uma equação de transporte estocástica reversa:

$$\begin{cases} dz + O \cdot \nabla z dt = -(a_1 z + a_2 Z) dt + Z dW(t) & \text{em } Q_\tau, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma_\tau^+, \\ z(\tau) = z_\tau & \text{em } G, \end{cases} \quad (3.6)$$

em que $\tau \in (0, T]$, $Q_\tau := (0, \tau) \times G$, $\Sigma_\tau^+ := (0, \tau) \times \Gamma^+$ e $z_\tau \in L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))$.

Seja A o operador de transporte introduzido no Exemplo A.5.3 e $H = L^2(G)$. Ou seja,

$$\begin{cases} D(A) = \{h \in H^1(G); h|_{\Gamma^-} = 0\} \\ Ah = -O \cdot \nabla h, \forall h \in D(A). \end{cases}$$

Podemos verificar que o operador adjunto de A é tal que

$$\begin{cases} D(A^*) = \{h \in H^1(G); h|_{\Gamma^+} = 0\} \\ A^*h = O \cdot \nabla h, \forall h \in D(A^*). \end{cases}$$

Com isso, a equação (3.6) pode ser escrita da seguinte forma abstrata

$$\begin{cases} dz + A^* z dt = f dt + Z dW(t) & \text{em } Q_\tau, \\ z(\tau) = z_\tau, \end{cases}$$

com $f = -(a_1 z + a_2 Z)$.

Como consequência do Teorema 1.5.3, temos o seguinte resultado de boa-colocação para (3.6).

Proposição 3.1.2. Para qualquer $\tau \in (0, T]$ e $z_\tau \in L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))$, a equação (3.6) admite uma única solução mild $(z, Z) \in L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, \tau]; L^2(G))) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, \tau; L^2(G))$ tal que

$$|z|_{L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, \tau]; L^2(G)))} + |Z|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, \tau; L^2(G))} \leq \mathcal{C} |z_\tau|_{L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))},$$

onde $\mathcal{C}$ é uma constante, independente de τ e z_τ .

Precisamos do seguinte resultado de regularidade adicional para soluções de (3.6).

Proposição 3.1.3. Para qualquer $\tau \in (0, T]$, soluções para a equação (3.6) satisfaz que

$$|z|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, \tau; L^2_O(\Gamma^-))} \leq \mathcal{C} \mathbb{E} |z_\tau|_{L^2(G)}^2, \quad \forall z_\tau \in L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G)).$$

Demonstração. Por simplicidade, vamos considerar apenas o caso de $\tau = T$. Consideremos a equação (3.6) reescrita da seguinte forma:

$$\begin{cases} dz + A^* z dt = f dt + Z dW(t) & \text{em } Q, \\ z(T) = z_T, \end{cases}$$

com $f = -(a_1 z + a_2 Z)$. Seja $\{(z_\lambda, Z_\lambda)\}_{\lambda \in \rho(A^*)}$ a aproximação de (z, Z) introduzida em (1.9), ou seja, (z_λ, Z_λ) resolve

$$\begin{cases} dz_\lambda + A^* z_\lambda dt = R^*(\lambda) f dt + R^*(\lambda) Z_\lambda dW(t) & \text{em } [0, T], \\ z_\lambda(T) = R^*(\lambda) z_T, \end{cases} \quad (3.7)$$

onde $R^*(\lambda) \triangleq \lambda(\lambda I - A^*)^{-1}$. Do Teorema 1.5.5 sabemos que a equação (3.7) admite uma única solução forte (z_λ, Z_λ) . Do Teorema 1.5.3 e da Proposição 1.5.2, temos que a solução para (3.7) satisfaz $(z_\lambda, Z_\lambda) \in (L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, T]; L^2(G))) \cap L^2_{\mathbb{F}}(0, T; D(A^*))) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$. Seja

$$z_\lambda(T) = z_\lambda(0) + \int_0^T (-A^* z_\lambda + R^*(\lambda) f) dt + \int_0^T R^*(\lambda) Z_\lambda dW(t),$$

solução de (3.7) no tempo T . Da fórmula de Itô para uma forma fraca de processo Itô, temos que

$$\begin{aligned} & |R^*(\lambda) z_T|_{L^2(G)}^2 - |z_\lambda(0)|_{L^2(G)}^2 \\ &= 2 \int_0^T \langle (-A^* z_\lambda + R^*(\lambda) f), z_\lambda \rangle_{L^2(G)} dt + 2 \int_0^T \langle R^*(\lambda) Z_\lambda, z_\lambda \rangle_{L^2(G)} dW(t) \\ &+ \int_0^T |R^*(\lambda) Z_\lambda|_{L^2(G)}^2 dt. \end{aligned}$$

Tomando a média e uma vez que $\mathbb{E} \left(\int_s^t f dW \right) = 0$, temos

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} |R^*(\lambda) z_T|_{L^2(G)}^2 - |z_\lambda(0)|_{L^2(G)}^2 \\ &= 2\mathbb{E} \int_0^T \langle -A^* z_\lambda, z_\lambda \rangle_{L^2(G)} dt + 2\mathbb{E} \int_0^T \langle R^*(\lambda) f, z_\lambda \rangle_{L^2(G)} dt + \mathbb{E} \int_0^T |R^*(\lambda) Z_\lambda|_{L^2(G)}^2 dt \\ &= -2\mathbb{E} \int_0^T \int_G z_\lambda O \cdot \nabla z_\lambda dx dt + \mathbb{E} \int_0^T \int_G (2z_\lambda R^*(\lambda) f + |R^*(\lambda) Z_\lambda|^2) dx dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Além disso, por integração por partes e usando o Teorema de Gauss-Green,

$$-2\mathbb{E} \int_0^T \int_G z_\lambda O \cdot \nabla z_\lambda dx dt = -2 \left(\mathbb{E} \int_0^T \int_\Gamma z_\lambda^2 O \cdot \nu(x) d\Gamma dt - \mathbb{E} \int_0^T \int_G z_\lambda O \cdot \nabla z_\lambda dx dt \right).$$

Daí, segue que

$$-2\mathbb{E} \int_0^T \int_G z_\lambda O \cdot \nabla z_\lambda dx dt = -\mathbb{E} \int_0^T \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu(x) z_\lambda^2 d\Gamma^- dt, \quad (3.9)$$

pois $z_\lambda = 0$ em Γ^+ .

Como $|z_\lambda(0)|_{L^2(G)}^2 > 0$, de (3.8) e (3.9), temos que

$$\begin{aligned} -\mathbb{E} \int_0^T \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu z_\lambda^2 d\Gamma^- dt &= \mathbb{E} |R^*(\lambda) z_T|_{L^2(G)}^2 - |z_\lambda(0)|_{L^2(G)}^2 \\ &\quad - \mathbb{E} \int_0^T \int_G (2z_\lambda R^*(\lambda) f + |R^*(\lambda) Z_\lambda|^2) dx dt \\ &\leq \mathbb{E} |R(\lambda) z_T|_{L^2(G)}^2 - \mathbb{E} \int_0^T \int_G (2z_\lambda R^*(\lambda) f + |R^*(\lambda) Z_\lambda|^2) dx dt. \end{aligned}$$

Fazendo λ tender a $+\infty$, e usando o Teorema 1.5.5, obtemos

$$-\mathbb{E} \int_0^T \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu z^2 d\Gamma^- dt \leq \mathbb{E} |z_T|_{L^2(G)}^2 - \mathbb{E} \int_0^T \int_G (2zf + |Z|^2) dx dt.$$

De (3.1) e da Proposição 3.1.2, segue que

$$\begin{aligned}
|z|_{L^2_{\mathbb{F}}(0,T;L^2_O(\Gamma^-))}^2 &= -\mathbb{E} \int_0^T \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu z^2 d\Gamma^- dt \\
&\leq \mathbb{E}|z_T|_{L^2(G)}^2 - \mathbb{E} \int_0^T \int_G (2zf + |Z|^2) dx dt \\
&\leq \mathbb{E}|z_T|_{L^2(G)}^2 + \mathbb{E} \int_0^T \int_G (2a_1 z^2 + 2a_2 zZ) dx dt - \mathbb{E} \int_0^T \int_G |Z|^2 dx dt \\
&\leq \mathbb{E}|z_T|_{L^2(G)}^2 + \mathcal{C} \mathbb{E} \int_0^T \int_G (z^2 + Z^2) dx dt - \mathbb{E} \int_0^T \int_G |Z|^2 dx dt \\
&\leq \mathcal{C} \mathbb{E}|z_T|_{L^2(G)}^2.
\end{aligned}$$

Isso completa a prova da Proposição 3.1.3. $\square$

Observação 12. Pela Proposição 3.1.2, a primeira componente z da solução de (3.6) pertence a $L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, \tau]; L^2(G)))$. Isso não produz a regularidade $z|_{\Gamma^-} \in L^2_{\mathbb{F}}(0, \tau; L^2_O(\Gamma^-))$, garantido pela Proposição 3.1.3. Portanto, o último resultado é, às vezes, chamado de propriedade de regularidade escondida.

Com o auxílio da Proposição 3.1.3, podemos dar a seguinte definição.

Definição 3.1.2. Um processo estocástico $y \in C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega; L^2(G)))$ é chamado solução por transposição para (3.5) se para qualquer $\tau \in (0, T]$ e $z_{\tau} \in L^2_{\mathcal{F}_{\tau}}(\Omega; L^2(G))$, vale

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \langle y(\tau), z_{\tau} \rangle_{L^2(G)} - \langle y_0, z(0) \rangle_{L^2(G)} \\
&= \mathbb{E} \int_0^{\tau} \langle v, a_3 z + Z \rangle_{L^2(G)} dt - \mathbb{E} \int_0^{\tau} \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu uz d\Gamma^- dt,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

em que (z, Z) resolve (3.6).

Observação 13. Na seção 1.5, introduzimos a noção de solução por transposição para Equações de Evolução Estocásticas Reversas com filtragem geral, pois neste caso não podemos aplicar um Teorema da Representação de Martingale como no caso da filtração natural. Na definição acima, usamos a noção de solução por transposição para Equações Diferenciais Parciais Estocásticas controladas para poder superar a dificuldade surgida do fato de estarmos tentando controlar a equação por meio de um controle na fronteira. Note, porém, que a ideia de resolver esses dois problemas diferentes é muito semelhante, ou seja, estudar a boa colocação de uma equação “menos compreendida” por meio de outra “bem compreendida”.

Temos o seguinte resultado de boa-colocação para (3.5) (ver Seção 3.2 para sua demonstração).

Proposição 3.1.4. Dados $y_0 \in L^2(G)$, $u \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-))$ e $v \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$, a equação (3.5) admite uma única solução por transposição $y \in C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega; L^2(G)))$ tal que

$$|y|_{C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega; L^2(G)))} \leq \mathcal{C}(|y_0|_{L^2(G)} + |u|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-))} + |v|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))}). \quad (3.11)$$

Agora introduzimos a noção de controlabilidade exata para o sistema (3.5).

Definição 3.1.3. O sistema (3.5) é dito exatamente controlável no tempo $T > 0$ se para qualquer $y_0 \in L^2(G)$ e $y_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))$ existe um par de controles $(u, v) \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$ tal que a solução por transposição y para (3.5) satisfaz $y(T) = y_T$ em $L^2(G)$ q.t.p..

O principal resultado nesta seção garante a controlabilidade exata para (3.5) quando o tempo T é suficientemente grande.

Teorema 3.1.5. Se $T > 2 \max_{x \in \Gamma} |x|_{\mathbb{R}^n}$, então o sistema (3.5) é exatamente controlável no tempo $T > 0$.

Observação 14. Introduzimos dois controles no sistema (3.5). Além disso, o controle v atua no domínio inteiro. Comparado com as equações de transporte deterministas, parece que nossa escolha de controles é muito restritiva. Pode-se considerar os seguintes três casos mais fracos:

- 1) Apenas um controle atua no sistema, ou seja, $u = 0$ ou $v = 0$ em (3.5).
- 2) Nem u e nem v é zero. Mas $v = 0$ em $(0, T) \times G_0$, onde G_0 é um subconjunto aberto não vazio de G .
- 3) Dois controles são impostos ao sistema. Mas ambos estão no termo drift.

Para os três casos acima, de acordo com o resultado de controlabilidade exata para equações de transporte deterministas, deveríamos esperar que o sistema de controle estocástico correspondente fosse também exatamente controlável. No entanto, da mesma forma da prova do Teorema 2.1.1, é possível mostrar que isso não é verdade (ver [21]).

Usando um argumento padrão de dualidade, para provar o Teorema 3.1.5, basta estabelecer uma estimativa de observabilidade adequada para o sistema (3.6) com $\tau = T$. A obtenção da estimativa de observabilidade será feita na Seção 3.3, por meio de uma versão estocástica de estimativas globais de Carleman.

3.2 Boa colocação do sistema de controle e uma identidade com peso

Para começar, provemos a boa colocação (i.e., Proposição 3.1.4) da equação de transporte estocástica (3.5).

Demonstração da Proposição 3.1.4: Como $u \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-))$, existe uma sequência $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C^2_{\mathbb{F}}([0, T]; H^{\frac{3}{2}}_0(\Gamma^-))$ com $u_m(0) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = u \quad \text{em } L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-)). \quad (3.12)$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, podemos encontrar um $\bar{u}_m \in C^2_{\mathbb{F}}([0, T]; H^2(G))$ tal que $\bar{u}_m|_{\Gamma^-} = u_m$ e $\bar{u}_m(0) = 0$. De fato, sabemos que existe um operador linear, contínuo e sobrejetivo (operador traço), $T : H^2(G) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$. Então,

$$\tilde{u}_m(t) = \begin{cases} u_m(t), & \text{em } \Gamma^- \\ 0, & \text{em } \Gamma^+ \end{cases}$$

Assim, vemos que $\tilde{u}_m(t)$ está definida em Γ e $\tilde{u}_m(t) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$. Portanto, existe $\bar{u}_m(\cdot) \in H^2(G)$ tal que $\bar{u}_m(\cdot)|_{\Gamma} = \tilde{u}_m(\cdot)$. Em particular, $\bar{u}_m(\cdot)|_{\Gamma^-} = u_m(\cdot)$ e $\bar{u}_m(\cdot)|_{\Gamma^+} = 0$.

Considere a seguinte equação de transporte estocástico:

$$\begin{cases} d\bar{y}_m + O \cdot \nabla \bar{y}_m dt = (a_1 \bar{y}_m + a_3 v + \zeta_m) dt + [a_2(\bar{y}_m + \bar{u}_m) + v] dW(t) & \text{em } Q, \\ \bar{y}_m = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \bar{y}_m(0) = y_0 & \text{em } G, \end{cases} \quad (3.13)$$

onde $\zeta_m = -\bar{u}_{m,t} - O \cdot \nabla \bar{u}_m + a_1 \bar{u}_m$. Pelo Teorema 1.4.3, o sistema (3.13) admite um única solução mild $\bar{y}_m \in C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega; L^2(G)))$.

Seja $y_m = \bar{y}_m + \bar{u}_m$. Consideremos

$$\bar{y}_m = y_0 + \int_0^t (-O \cdot \nabla \bar{y}_m + a_1 \bar{y}_m + a_3 v + \zeta_m) ds + \int_0^t [a_2(\bar{y}_m + \bar{u}_m) + v] dW(s),$$

e

$$z = z(0) + \int_0^t [O \cdot \nabla z - (a_1 z + a_2 Z)] ds + \int_0^t Z dW(s),$$

processos Itô referentes às equações (3.5) e (3.6), respectivamente.

Para quaisquer $\tau \in (0, T]$ e $z_{\tau} \in L^2_{\mathcal{F}_{\tau}}(\Omega; L^2(G))$, pela fórmula de Itô e integração

por partes, temos que

$$\begin{aligned}
 & \langle \bar{y}_m(\tau), z(\tau) \rangle_{L^2(G)} - \langle \bar{y}_m(0), z(0) \rangle_{L^2(G)} \\
 &= \int_0^\tau (\langle \bar{y}_m, Z \rangle_{L^2(G)} + \langle [a_2(\bar{y}_m + \bar{u}_m) + v], z \rangle_{L^2(G)}) dW(t) + \int_0^\tau \langle \bar{y}_m, -O \cdot \nabla z \rangle_{L^2(G)} dt \\
 &+ \int_0^\tau \langle \bar{y}_m, -(a_1 z + a_2 Z) \rangle_{L^2(G)} dt + \int_0^\tau \langle -O \cdot \bar{y}_m, z \rangle_{L^2(G)} dt + \int_0^\tau \langle a_1 \bar{y}_m, z \rangle_{L^2(G)} dt \\
 &+ \int_0^\tau \langle a_3 v, z \rangle_{L^2(G)} dt + \int_0^\tau \langle \xi_m, z \rangle_{L^2(G)} dt + \int_0^\tau \langle a_2 \bar{y}_m + a_2 \bar{u}_m, Z \rangle_{L^2(G)} dt \\
 &+ \int_0^\tau \langle v, Z \rangle_{L^2(G)} dt \\
 &= \int_0^\tau (\langle \bar{y}_m, Z \rangle_{L^2(G)} + \langle [a_2(\bar{y}_m + \bar{u}_m) + v], z \rangle_{L^2(G)}) dW(t) + \int_0^\tau \langle a_3 v, z \rangle_{L^2(G)} dt \\
 &- \int_G \bar{u}_m z|_0^\tau dx + \int_0^\tau \langle \bar{u}_m, dz \rangle_{L^2(G)} - \int_0^\tau \int_\Gamma O \cdot \nu \bar{u}_m z d\Gamma dt + \int_0^\tau \langle \bar{u}_m, O \cdot \nabla z \rangle_{L^2(G)} dt \\
 &+ \int_0^\tau \langle a_1 \bar{u}_m, z \rangle_{L^2(G)} dt + \int_0^\tau \langle a_2 \bar{u}_m, Z \rangle_{L^2(G)} dt + \int_0^\tau \langle v, Z \rangle_{L^2(G)} dt.
 \end{aligned}$$

De (3.6), $dz = -O \cdot \nabla z dt - (a_1 z + a_2 Z) dt + Z dW(t)$. Substituindo na equação anterior, vemos que

$$\begin{aligned}
 & \langle \bar{y}_m(\tau), z(\tau) \rangle_{L^2(G)} - \langle \bar{y}_m(0), z(0) \rangle_{L^2(G)} + \langle \bar{u}_m(\tau), z(\tau) \rangle_{L^2(G)} \\
 &= \int_0^\tau (\langle \bar{y}_m, Z \rangle_{L^2(G)} + \langle [a_2(\bar{y}_m + \bar{u}_m) + v], z \rangle_{L^2(G)}) dW(t) + \int_0^\tau \langle a_3 v, z \rangle_{L^2(G)} dt \\
 &+ \int_0^\tau \langle \bar{u}_m, Z \rangle_{L^2(G)} dW(t) - \int_0^\tau \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu u_m z d\Gamma^- dt + \int_0^\tau \langle v, Z \rangle_{L^2(G)} dt.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 & \langle y_m(\tau), z(\tau) \rangle_{L^2(G)} - \langle y_0, z(0) \rangle_{L^2(G)} \\
 &= \int_0^\tau (\langle \bar{y}_m, Z \rangle_{L^2(G)} + \langle [a_2(\bar{y}_m + \bar{u}_m) + v], z \rangle_{L^2(G)}) dW(t) + \int_0^\tau \langle v, a_3 z + Z \rangle_{L^2(G)} dt \\
 &+ \int_0^\tau \langle \bar{u}_m, Z \rangle_{L^2(G)} dW(t) - \int_0^\tau \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu u_m z d\Gamma^- dt.
 \end{aligned}$$

Tomando a expectativa e lembrando das propriedades da integral de Itô, temos que

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \langle y_m(\tau), z_\tau \rangle_{L^2(G)} - \langle y_0, z(0) \rangle_{L^2(G)} \\
 &= \mathbb{E} \int_0^\tau \langle v, a_3 z + Z \rangle_{L^2(G)} dt - \mathbb{E} \int_0^\tau \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu u_m z d\Gamma^- dt,
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde (z, Z) é a solução suave para (3.6). Consequentemente, para qualquer $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\langle y_{m_1}(\tau), z_\tau \rangle_{L^2(G)} - \langle y_0, z(0) \rangle_{L^2(G)} = \mathbb{E} \int_0^\tau \langle v, a_3 z + Z \rangle_{L^2(G)} dt - \mathbb{E} \int_0^\tau \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu u_{m_1} z d\Gamma^- dt,$$

e

$$\mathbb{E}\langle y_{m_2}(\tau), z_\tau \rangle_{L^2(G)} - \langle y_0, z(0) \rangle_{L^2(G)} = \mathbb{E} \int_0^\tau \langle v, a_3 z + Z \rangle_{L^2(G)} dt - \mathbb{E} \int_0^\tau \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu u_{m_2} z d\Gamma^- dt.$$

Subtraindo ambas as igualdades, resulta que

$$\mathbb{E}\langle y_{m_1}(\tau) - y_{m_2}(\tau), z_\tau \rangle_{L^2(G)} = -\mathbb{E} \int_0^\tau \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu (u_{m_1} - u_{m_2}) z d\Gamma^- dt. \quad (3.15)$$

Pela Proposição A.1.15, podemos escolher $z_\tau \in L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))$ com $|z_\tau|_{L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))} = 1$ e

$$\langle y_{m_1}(\tau) - y_{m_2}(\tau), z_\tau \rangle_{L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))} = |y_{m_1}(\tau) - y_{m_2}(\tau)|_{L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))}.$$

Dessa forma, tem-se que

$$\mathbb{E}\langle y_{m_1}(\tau) - y_{m_2}(\tau), z_\tau \rangle_{L^2(G)} \geq \frac{1}{2} |y_{m_1}(\tau) - y_{m_2}(\tau)|_{L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))}. \quad (3.16)$$

De (3.15)-(3.16) e da Proposição 3.1.3, segue que

$$\begin{aligned} |y_{m_1}(\tau) - y_{m_2}(\tau)|_{L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))} &\leq -2\mathbb{E} \int_0^\tau \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu (u_{m_1} - u_{m_2}) z d\Gamma^- dt \\ &\leq 2 \left| \mathbb{E} \int_0^\tau \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu (u_{m_1} - u_{m_2}) z d\Gamma^- dt \right| \\ &\leq 2\mathbb{E} \int_0^\tau \int_{\Gamma^-} |O \cdot \nu (u_{m_1} - u_{m_2}) z| d\Gamma^- dt \\ &\leq \mathcal{C} |u_{m_1} - u_{m_2}|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-))} |z_\tau|_{L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))} \\ &\leq \mathcal{C} |u_{m_1} - u_{m_2}|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-))}, \end{aligned}$$

onde a constante $\mathcal{C}$ é independente de τ . Consequentemente, vale que

$$|y_{m_1} - y_{m_2}|_{C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega; L^2(G)))} \leq \mathcal{C} |u_{m_1} - u_{m_2}|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-))}.$$

Desse modo, temos que $\{y_m\}_{m=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega; L^2(G)))$. Logo, converge para um elemento em $C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega; L^2(G)))$. Denote por y o limite de $\{y_m\}_{m=1}^\infty$. Fazendo $m \rightarrow +\infty$ em (3.14), vemos que y satisfaz (3.10). Portanto, y é uma solução de transposição para (3.5).

Provemos agora a estimativa de energia (3.11). Pela Proposição A.1.15, existe

$z_\tau \in L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))$ tal que $|z_\tau|_{L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))} = 1$ e

$$\langle y(\tau), z_\tau \rangle_{L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))} = |y(\tau)|_{L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))}.$$

Daí,

$$\mathbb{E} \langle y(\tau), z_\tau \rangle_{L^2(G)} \geq \frac{1}{2} |y(\tau)|_{L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))}. \quad (3.17)$$

Combinando (3.10), (3.17) e usando as Proposições 3.1.2 e 3.1.3, obtemos

$$\begin{aligned} & |y(\tau)|_{L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G))} \\ & \leq 2 \mathbb{E} \langle y(\tau), z_\tau \rangle_{L^2(G)} \\ & = 2 \left(\langle y_0, z(0) \rangle_{L^2(G)} + \mathbb{E} \int_0^\tau \langle v, Z \rangle_{L^2(G)} dt - \mathbb{E} \int_0^\tau \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu u z d\Gamma^- dt \right) \\ & \leq 2 \left(|\langle y_0, z(0) \rangle_{L^2(G)}| + \left| \mathbb{E} \int_0^\tau \langle v, a_3 z + Z \rangle_{L^2(G)} dt \right| + \left| \mathbb{E} \int_0^\tau \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu u z d\Gamma^- dt \right| \right) \\ & \leq 2 \left(|y_0|_{L^2(G)} |z(0)|_{L^2(G)} + \mathbb{E} \int_0^\tau |v|_{L^2(G)} (\mathcal{C}_1 |z|_{L^2(G)} + |Z|_{L^2(G)}) dt \right) \\ & \quad + 2 \left(\mathbb{E} \int_0^\tau |u|_{L^2_O(\Gamma^-)} |z|_{L^2_O(\Gamma^-)} dt \right) \\ & \leq \mathcal{C} (|y_0|_{L^2(G)} + |u|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-))} + |v|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))}), \end{aligned}$$

onde a constante $\mathcal{C}$ é independente de τ .

Agora provaremos a unicidade das soluções. Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções por transposição para (3.5). De (3.10), deduzimos que, para todo $\tau \in (0, T]$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \langle y_1(\tau), z_\tau \rangle_{L^2(G)} - \langle y_0, z(0) \rangle_{L^2(G)} \\ & = \mathbb{E} \int_0^\tau \langle v, a_3 z + Z \rangle_{L^2(G)} dt - \mathbb{E} \int_0^\tau \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu u z d\Gamma^- dt, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \langle y_2(\tau), z_\tau \rangle_{L^2(G)} - \langle y_0, z(0) \rangle_{L^2(G)} \\ & = \mathbb{E} \int_0^\tau \langle v, a_3 z + Z \rangle_{L^2(G)} dt - \mathbb{E} \int_0^\tau \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu u z d\Gamma^- dt. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\mathbb{E} \langle y_1(\tau) - y_2(\tau), z_\tau \rangle_{L^2(G)} = 0, \quad \forall z_\tau \in L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; L^2(G)),$$

o que implica que $y_1 = y_2$ em $C_{\mathbb{F}}([0, T]; L^2(\Omega; L^2(G)))$. Isto completa a prova da Proposição 3.1.4. $\square$

Vejamos agora uma identidade com peso para operadores de transporte estocásticos, que terá um papel fundamental no estabelecimento da estimativa global de Carleman para a equação (3.6).

Proposição 3.2.1. Seja $l \in C^1([0, T] \times G)$ e $\theta = e^l$. Seja $\mathbf{u}$ um processo Itô de valor em $H^1(\mathbb{R}^n)$, e $\mathbf{v} = \theta \mathbf{u}$. Então,

$$\begin{aligned} & -\theta(l_t + O \cdot \nabla l) \mathbf{v} (d\mathbf{u} + O \cdot \nabla \mathbf{u} dt) \\ &= -\frac{1}{2} d[(l_t + O \cdot \nabla l) \mathbf{v}^2] - \frac{1}{2} O \cdot \nabla [(l_t + O \cdot \nabla l) \mathbf{v}^2] dt \\ &+ \frac{1}{2} [l_{tt} + O \cdot \nabla (O \cdot \nabla l) + 2O \cdot \nabla l_t] \mathbf{v}^2 dt + \frac{1}{2} (l_t + O \cdot \nabla l) (d\mathbf{v})^2 \\ &+ (l_t + O \cdot \nabla l)^2 \mathbf{v}^2 dt. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Demonstração. Começamos notando que

$$d\theta^{-1} = -l_t \theta^{-1} dt$$

e

$$\nabla \theta^{-1} = -\theta^{-1} \nabla l.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \theta(d\mathbf{u} + O \cdot \nabla \mathbf{u} dt) &= \theta d(\theta^{-1} \mathbf{v}) + \theta O \cdot \nabla (\theta^{-1} \mathbf{v}) dt \\ &= d\mathbf{v} + O \cdot \nabla \mathbf{v} dt - (l_t + O \cdot \nabla l) \mathbf{v} dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & -\theta(l_t + O \cdot \nabla l) \mathbf{v} (d\mathbf{u} + O \cdot \nabla \mathbf{u} dt) \\ &= -(l_t + O \cdot \nabla l) \mathbf{v} [d\mathbf{v} + O \cdot \nabla \mathbf{v} dt - (l_t + O \cdot \nabla l) \mathbf{v} dt] \\ &= -(l_t + O \cdot \nabla l) \mathbf{v} (d\mathbf{v} + O \cdot \nabla \mathbf{v} dt) + (l_t + O \cdot \nabla l)^2 \mathbf{v}^2 dt. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Cálculos diretos implicam

$$\left\{ \begin{aligned} -l_t \mathbf{v} d\mathbf{v} &= -\frac{1}{2} d(l_t \mathbf{v}^2) + \frac{1}{2} l_{tt} \mathbf{v}^2 dt + \frac{1}{2} l_t (d\mathbf{v})^2, \\ -O \cdot \nabla l \mathbf{v} d\mathbf{v} &= -\frac{1}{2} d(O \cdot \nabla l \mathbf{v}^2) + \frac{1}{2} (O \cdot \nabla l)_t \mathbf{v}^2 dt + \frac{1}{2} O \cdot \nabla l (d\mathbf{v})^2, \\ -l_t \mathbf{v} O \cdot \nabla \mathbf{v} dt &= -\frac{1}{2} O \cdot \nabla (l_t \mathbf{v}^2) dt + \frac{1}{2} O \cdot \nabla l_t \mathbf{v}^2 dt, \\ -O \cdot \nabla l \mathbf{v} O \cdot \nabla \mathbf{v} dt &= -\frac{1}{2} O \cdot \nabla (O \cdot \nabla l \mathbf{v}^2) dt + \frac{1}{2} O \cdot \nabla (O \cdot \nabla l) \mathbf{v}^2 dt. \end{aligned} \right. \tag{3.20}$$

Na primeira e segunda igualdade acima usamos a regra do produto de Itô e o fato que $|d\mathbf{v}|^2 = |\Phi|^2 dt$, onde Φ é o termo de difusão do processo Itô $\mathbf{v}$.

Usando (3.19) e (3.20), segue (3.18).

□

3.3 Estimativa de observabilidade para equações de transporte estocásticas reversas

Nesta subseção, mostraremos uma estimativa de observabilidade para a equação (3.6), que será de fundamental importância na demonstração do Teorema 3.1.5. Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.1. Seja $T > 2 \max_{x \in \Gamma} |x|_{\mathbb{R}^n}$. Toda solução para a equação (3.6) com $\tau = T$ satisfaz

$$|z_T|_{L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))} \leq \mathcal{C}(|z|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-))} + |a_3 z + Z|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))}), \quad \forall z_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G)). \quad (3.21)$$

Demonstração. Seja $\lambda > 0$ e $c \in (0, 1)$ tal que $cT > 2 \max_{x \in \Gamma} |x|_{\mathbb{R}^n}$, e considere

$$l = \lambda \left[|x|_{\mathbb{R}^n}^2 - c \left(t - \frac{T}{2} \right)^2 \right]. \quad (3.22)$$

Aplicando a Proposição 3.2.1 à equação (3.6) com $\mathbf{u} = z$, temos que

$$\begin{aligned} & -\theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)z(dz + O \cdot \nabla z dt) \\ &= -\frac{1}{2}d[(l_t + O \cdot \nabla l)\theta^2 z^2] - \frac{1}{2}O \cdot \nabla[(l_t + O \cdot \nabla l)\theta^2 z^2]dt \\ &+ \frac{1}{2}[l_{tt} + O \cdot \nabla(O \cdot \nabla l) + 2O \cdot \nabla l_t]\theta^2 z^2 dt + \frac{1}{2}(l_t + O \cdot \nabla l)(d(\theta z))^2 \\ &+ (l_t + O \cdot \nabla l)^2 \theta^2 z^2 dt. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sendo l dado por (3.22), vemos que

$$\nabla l = 2\lambda x, \quad l_t = -2\lambda c \left(t - \frac{T}{2} \right), \quad \nabla l_t = 0, \quad l_{tt} = -2\lambda c.$$

Daí,

$$2O \cdot \nabla l_t = 0 \quad \text{e} \quad O \cdot \nabla(O \cdot \nabla l) = 2\lambda.$$

Multiplicando (3.23) por 2 e usando as regras de derivação e gradiente do produto,

tem-se

$$\begin{aligned}
& -2\theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)z(dz + O \cdot \nabla z dt) \\
& = -\theta^2 z^2 d(l_t + O \cdot \nabla l)dt - (l_t + O \cdot \nabla l)d(\theta^2 z^2)dt - O \cdot \nabla(l_t + O \cdot \nabla l)\theta^2 z^2 dt \quad (3.24) \\
& \quad - (l_t + O \cdot \nabla l)O \cdot \nabla(\theta^2 z^2)dt - 2\lambda c\theta^2 z^2 dt + 2\lambda\theta^2 z^2 dt + (l_t + O \cdot \nabla l)\theta^2(dz)^2 \\
& \quad + 2(l_t + O \cdot \nabla l)^2\theta^2 z^2 dt.
\end{aligned}$$

Integrando (3.24) em Q e usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
& -2 \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)z(dz + O \cdot \nabla z dt)dx \\
& = - \int_Q \theta^2 z^2 d(l_t + O \cdot \nabla l)dxdt - \int_Q (l_t + O \cdot \nabla l)d(\theta^2 z^2)dxdt \\
& \quad - \int_Q O \cdot \nabla(l_t + O \cdot \nabla l)\theta^2 z^2 dxdt - \int_Q (l_t + O \cdot \nabla l)O \cdot \nabla(\theta^2 z^2)dxdt \\
& \quad + 2(1-c)\lambda \int_Q \theta^2 z^2 dxdt + \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)(dz)^2 dx + 2 \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)^2 z^2 dxdt \\
& = \lambda \int_G (cT - 2O \cdot x)\theta^2(T)z^2(T)dx + \lambda \int_G (cT + 2O \cdot x)\theta^2(0)z^2(0)dx \\
& \quad + \int_Q (l_t + O \cdot \nabla l)d(\theta^2 z^2)dxdt - \int_Q (l_t + O \cdot \nabla l)d(\theta^2 z^2)dxdt \\
& \quad + \lambda \int_{\Sigma^-} O \cdot \nu[c(2t - T) - 2O \cdot x]\theta^2 z^2 d\Sigma^- + \int_Q (l_t + O \cdot \nabla l)O \cdot \nabla(\theta^2 z^2)dxdt \\
& \quad - \int_Q (l_t + O \cdot \nabla l)O \cdot \nabla(\theta^2 z^2)dxdt + 2(1-c)\lambda \int_Q \theta^2 z^2 dxdt + \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)(dz)^2 dx \\
& \quad + 2 \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)^2 z^2 dxdt \\
& = \lambda \int_G (cT - 2O \cdot x)\theta^2(T)z^2(T)dx + \lambda \int_G (cT + 2O \cdot x)\theta^2(0)z^2(0)dx \\
& \quad + \lambda \int_{\Sigma^-} O \cdot \nu[c(2t - T) - 2O \cdot x]\theta^2 z^2 d\Sigma^- + 2(1-c)\lambda \int_Q \theta^2 z^2 dxdt \\
& \quad + \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)(dz)^2 dx + 2 \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)^2 z^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Tomando a expectativa,

$$\begin{aligned}
& -2\mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l) z (dz + O \cdot \nabla z dt) dx \\
& = \lambda \mathbb{E} \int_G (cT - 2O \cdot x) \theta^2(T) z^2(T) dx + \lambda \int_G (cT + 2O \cdot x) \theta^2(0) z^2(0) dx \\
& + \lambda \mathbb{E} \int_{\Sigma^-} O \cdot \nu [c(2t - T) - 2O \cdot x] \theta^2 z^2 d\Sigma^- + 2(1 - c) \lambda \mathbb{E} \int_Q \theta^2 z^2 dx dt \\
& + \mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l) (dz)^2 dx + 2\mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)^2 z^2 dx dt.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Afirmção: A seguinte desigualdade é verdadeira

$$\begin{aligned}
& -2\mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l) z (dz + O \cdot \nabla z dt) dx \\
& = 2\mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l) z (a_1 z + a_2 Z) dx dt \\
& \leq \mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)^2 z^2 dx dt + C \mathbb{E} \int_Q \theta^2(z^2 + |Z|^2) dx dt \\
& \leq \mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)^2 z^2 dx dt + C \mathbb{E} \int_Q \theta^2(z^2 + |a_3 z + Z|^2) dx dt.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Prova da Afirmção. Observe que (z, Z) resolve (3.6) com $\tau = T$, daí

$$dz + O \cdot \nabla z dt = -(a_1 z + a_2 Z) dt + Z dW.$$

Fazendo a substituição e lembrando que $\mathbb{E} \int_s^t f dW = 0$, pela desigualdade de Young $a \cdot b \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, temos

$$\begin{aligned}
& 2\mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l) z (a_1 z + a_2 Z) dx dt \\
& = 2\mathbb{E} \int_Q [\theta(l_t + O \cdot \nabla l) z] [\theta(a_1 z + a_2 Z)] dx dt \\
& \leq \mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)^2 z^2 dx dt + \mathbb{E} \int_Q \theta^2(a_1 z + a_2 Z)^2 dx dt \\
& \leq \mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)^2 z^2 dx dt + C \mathbb{E} \int_Q \theta^2(z^2 + Z^2) dx dt,
\end{aligned}$$

onde usamos que $a_1, a_2 \in L^\infty_{\mathbb{F}}(0, T; L^\infty(G))$ e

$$\begin{aligned} (a_1 z + a_2 Z)^2 &= a_1^2 z^2 + 2a_1 a_2 z Z + a_2^2 Z^2 \\ &\leq \mathcal{C}_1 z^2 + \mathcal{C}_2 (z^2 + Z^2) + \mathcal{C}_3 Z^2 \\ &\leq \mathcal{C} (z^2 + Z^2). \end{aligned}$$

Ainda, como $|Z|^2 = Z^2$, então vale a desigualdade

$$\int_Q \theta^2 (z^2 + |Z|^2) \leq \mathcal{C} \int_Q \theta^2 (z^2 + |a_3 z + Z|^2) dx dt.$$

Com efeito, sabendo que $(a - b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ e $a_3 \in L^\infty_{\mathbb{F}}(0, T; L^\infty(G))$,

$$\begin{aligned} \int_Q \theta^2 (z^2 + |Z|^2) &= \int_Q \theta^2 (z^2 + |(a_3 z + Z) - a_3 z|^2) dx dt \\ &= \int_Q \theta^2 z^2 dx dt + \int_Q \theta^2 [(a_3 z + Z) - a_3 z]^2 dx dt \\ &\leq \int_Q \theta^2 z^2 dx dt + \int_Q \theta^2 [2(a_3 z + Z)^2 + 2a_3^2 z^2] dx dt \\ &\leq \int_Q \theta^2 z^2 dx dt + 2 \int_Q \theta^2 |a_3 z + Z|^2 dx dt + \mathcal{C}_1 \int_Q \theta^2 z^2 dx dt \\ &\leq \mathcal{C} \int_Q \theta^2 (z^2 + |a_3 z + Z|^2) dx dt. \end{aligned}$$

□

Agora, de (3.25) e (3.26), vale a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} &\lambda \mathbb{E} \int_G (cT - 2O \cdot x) \theta^2(T) z^2(T) dx + \lambda \int_G (cT + 2O \cdot x) \theta^2(0) z^2(0) dx \\ &+ \lambda \mathbb{E} \int_{\Sigma^-} O \cdot \nu [c(2t - T) - 2O \cdot x] \theta^2 z^2 d\Sigma^- + 2(1 - c) \lambda \mathbb{E} \int_Q \theta^2 z^2 dx dt \quad (3.27) \\ &+ \mathbb{E} \int_Q \theta^2 (l_t + O \cdot \nabla l) (dz)^2 dx + 2 \mathbb{E} \int_Q \theta^2 (l_t + O \cdot \nabla l)^2 z^2 dx dt \\ &\leq \mathbb{E} \int_Q \theta^2 (l_t + O \cdot \nabla l)^2 z^2 dx dt + \mathcal{C} \mathbb{E} \int_Q \theta^2 (z^2 + |a_3 z + Z|^2) dx dt. \end{aligned}$$

Pela Observação 4, temos que $|dz|_{L^2(G)}^2 = |Z|_{L^2(G)}^2 dt$. Assim, segue que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)(dz)^2 dx \\
&= \mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)|Z|^2 dt dx \\
&= \mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)|(a_3 z + Z) - a_3 z|^2 dx dt \\
&\leq \mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)^2 z^2 dx dt + \mathcal{C} \mathbb{E} \int_Q \theta^2 z^2 dx dt \\
&\quad + 2 \mathbb{E} \int_Q \theta^2 |l_t + O \cdot \nabla l| |a_3 z + Z|^2 dx dt.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)|(a_3 z + Z) - a_3 z|^2 dx dt \\
&\leq \mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)[2(a_3 z + Z)^2 + 2a_3^2 z^2] dx dt \\
&\leq \mathbb{E} \int_Q 2\theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)(a_3 z + Z)^2 dx dt + \mathbb{E} \int_Q 2\theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)a_3^2 z^2 dx dt \\
&\leq 2 \mathbb{E} \int_Q \theta^2 |l_t + O \cdot \nabla l| |a_3 z + Z|^2 dx dt + \mathbb{E} \int_Q \theta^2(l_t + O \cdot \nabla l)^2 z^2 dx dt + \mathcal{C} \mathbb{E} \int_Q \theta^2 z^2.
\end{aligned}$$

Da desigualdade (3.27) e $z(T) = z_T$ em G q.t.p., segue que

$$\begin{aligned}
& \lambda \mathbb{E} \int_G (cT - 2O \cdot x) \theta^2(T) z_T^2 dx + \lambda \int_G (cT + 2O \cdot x) \theta^2(0) z^2(0) dx \\
&\quad + 2(1 - c) \lambda \mathbb{E} \int_Q \theta^2 z^2 dx dt \\
&\leq \mathcal{C} \mathbb{E} \int_Q \theta^2 (z^2 + \lambda |a_3 z + Z|^2) dx dt - \lambda \mathbb{E} \int_{\Sigma^-} O \cdot \nu [c(2t - T) - 2O \cdot x] \theta^2 z^2 d\Sigma^-,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

onde a constante $\mathcal{C} > 0$ é independente de λ .

Observando que $|x|_{\mathbb{R}^n} < 2 \max_{x \in \Gamma} |x|_{\mathbb{R}^n} = 2R$, temos

$$\begin{cases} (cT - 2R) \mathbb{E} \int_G \theta^2(T) z^2(T) dx \leq \mathbb{E} \int_G \theta^2(T) (cT - 2O \cdot x) z^2(T) dx, \\ (cT - 2R) \int_G \theta^2(0) z^2(0) dx \leq \int_G \theta^2(0) (cT + 2O \cdot x) z^2(0) dx. \end{cases}$$

Como $c \in (0, 1)$, para qualquer $\lambda > 0$ suficientemente grande,

$$[2(1 - c)\lambda - \mathcal{C}] \mathbb{E} \int_Q \theta^2 z^2 dx dt \geq \delta_1 > 0.$$

Finalmente, lembrando que para $c \in (0, 1)$ temos $cT > 2 \max_{x \in \Gamma} |x|_{\mathbb{R}^n}$, escolhendo λ grande o suficiente em (3.29), obtemos

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_G \theta^2(T, x) z_T^2 dx \\ & \leq C \mathbb{E} \int_Q \theta^2 |a_3 z + Z|^2 dx dt - C \mathbb{E} \int_{\Sigma^-} O \cdot \nu \theta^2 z^2 d\Sigma^-. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Da definição de θ , junto com a desigualdade (3.30), concluimos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_G z_T^2 dx \\ & \leq C \left(\mathbb{E} \int_Q |a_3 z + Z|^2 dt dx - \mathbb{E} \int_{\Sigma^-} O \cdot \nu z^2 d\Sigma^- \right). \end{aligned}$$

Isto completa a prova do Teorema 3.3.1. □

3.4 Controlabilidade exata da equação de transporte estocástica

Vamos agora demonstrar o resultado principal desta seção sobre a controlabilidade exata de (3.5), ou seja, provaremos o Teorema 3.1.5.

Demonstração do Teorema 3.1.5. Fixe $y_0 \in L^2(G)$ e $y_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))$. Devemos mostrar que para $T > 2 \max_{x \in \Gamma} |x|_{\mathbb{R}^n}$, existe um par de controles $(u, v) \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$ tal que a solução por transposição y para (3.5) satisfaz $y(T) = y_T$ em $L^2(G)$, q.t.p..

Começamos definindo um subespaço linear de $L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$ do seguinte modo

$$\mathcal{Y} := \{(-z|_{\Gamma^-}, a_3 z + Z) \mid (z, Z) \text{ resolve a equação (3.6) com algum } z_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))\},$$

e um funcional linear F em $\mathcal{Y}$ tal que

$$F(-z|_{\Gamma^-}, a_3 z + Z) = \mathbb{E} \int_G y_T z_T dx - \int_G y_0 z(0) dx.$$

Pelo Teorema 3.3.1, se $T > 2 \max_{x \in \Gamma} |x|_{\mathbb{R}^n}$, então F é um funcional linear limitado em

$\mathcal{Y}$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} |F(-z|_{\Gamma^-}, a_3 z + Z)| &= \left| \mathbb{E} \int_G y_T z_T dx - \int_G y_0 z(0) dx \right| \\ &\leq \mathbb{E} \int_G |y_T| |z_T| dx + \int_G |y_0| |z(0)| dx \\ &\leq \|y_T\|_{L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))} \|z_T\|_{L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))} + \|y_0\|_{L^2(G)} \|z(0)\|_{L^2(G)}. \end{aligned}$$

Da Proposição 3.1.3 e Teorema 3.3.1, para $T > 2 \max_{x \in \Gamma} |x|_{\mathbb{R}^n}$, obtemos

$$\begin{aligned} |F(-z|_{\Gamma^-}, a_3 z + Z)| &\leq \mathcal{C}_1 \|z_T\|_{L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))} + \mathcal{C}_2 \|z_T\|_{L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))} \\ &\leq \mathcal{C} (\|z\|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-))} + \|a_3 z + Z\|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))}) \\ &\leq \mathcal{C} |(-z|_{\Gamma^-}, a_3 z + Z)|_{\mathcal{Y}}. \end{aligned}$$

Por meio do Teorema de Hahn-Banach, F pode ser estendido para ser um funcional linear limitado no espaço $L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$. Por simplicidade, ainda usamos F para denotar essa extensão. Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe $(u, v) \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2_O(\Gamma^-)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_G y_T z_T dx - \int_G y_0 z(0) dx &= F(-z|_{\Gamma^-}, a_3 z + Z) \\ &= -\mathbb{E} \int_0^T \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu z u d\Gamma^- dt + \mathbb{E} \int_0^T \int_G v(a_3 z + Z) dx dt. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Afirmamos que u e v são os controles desejados. Com efeito, pela definição de solução por transposição para (3.5), temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_G y(T) z_T dx - \int_G y_0 z(0) dx \\ = -\mathbb{E} \int_0^T \int_{\Gamma^-} O \cdot \nu z u d\Gamma^- dt + \mathbb{E} \int_0^T \int_G v(a_3 z + Z) dx dt. \end{aligned} \quad (3.32)$$

De (3.31) e (3.32), segue que

$$\mathbb{E} \int_G y_T z_T dx = \mathbb{E} \int_G y(T) z_T dx, \quad \forall z_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G)).$$

Portanto, $y(T) = y_T$ em $L^2(G)$, q.t.p.. Isto completa a prova do Teorema 3.1.5. $\square$

Observação 15. Na prova do Teorema 3.1.5, damos apenas a existência dos controles que conduzem o estado para o destino desejado. Algumas caracterizações adicionais para esses controles podem ser encontradas em [23, Seção 7.4].

Capítulo 4

Equações Parabólicas Estocásticas

Esta seção é dedicada a estudar a controlabilidade nula/aproximada de equações parabólicas estocásticas.

Aqui, assumimos que $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ é a filtração natural gerada por $W(\cdot)$.

4.1 Formulação do problema e resultado principal

Sejam $G \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira Γ de classe C^4 e $G_0 \subset G$ um subconjunto aberto não vazio. Denote por χ_{G_0} a função característica de G_0 . Para qualquer $T > 0$, definimos

$$Q := (0, T) \times G, \quad \Sigma := (0, T) \times \Gamma, \quad Q_0 := (0, T) \times G_0.$$

Começamos com a seguinte equação parabólica determinista controlada

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = a_1^0 y + \chi_{G_0} u & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{em } G, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $a_1^0 \in L^\infty(0, T; L^\infty(G))$.

Em (4.1), y e u são as variáveis de estado e controle, respectivamente, enquanto os espaços de estado e de controle são escolhidos sendo $L^2(G)$ e $L^2(Q_0)$, respectivamente.

Definição 4.1.1. Diz-se que a equação (4.1) é controlável a zero no tempo T se, dado $y_0 \in L^2(G)$, podemos encontrar um controle $u \in L^2(Q_0)$ tal que a solução $y(\cdot) \in C([0, T]; L^2(G)) \cap L^2(0, T; H_0^1(G))$ para (4.1) satisfaz $y(T) = 0$.

Definição 4.1.2. Diz-se que a equação (4.1) é aproximadamente controlável no tempo T se, dados $\epsilon > 0$ e $y_0, y_1 \in L^2(G)$, podemos encontrar um controle $u \in L^2(Q_0)$ tal que a solução $y(\cdot) \in C([0, T]; L^2(G)) \cap L^2(0, T; H_0^1(G))$ para (4.1) satisfaz $|y(T) - y_1|_{L^2(G)} \leq \epsilon$.

Observação 16. Devido ao efeito regularizante para soluções de equações parabólicas, a controlabilidade exata para (4.1) é impossível, ou seja, o ϵ na Definição 4.1.2 nunca pode ser zero.

Lembramos que a equação dual de (4.1) é

$$\begin{cases} z_t + \Delta z = -a_1^0 z & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(T) = z_T & \text{em } G. \end{cases} \quad (4.2)$$

Por meio de um argumento padrão da dualidade (ver [7]), é fácil mostrar o seguinte resultado.

Proposição 4.1.1.

- i) A equação (4.1) é controlável a zero no tempo T se, e somente se, existe $\mathcal{C} > 0$ tal que as soluções da equação (4.2) satisfazem a seguinte estimativa de observabilidade:

$$|z(0)|_{L^2(G)} \leq \mathcal{C} |z|_{L^2(Q_0)}, \quad \forall z_T \in L^2(G). \quad (4.3)$$

- ii) A equação (4.1) é aproximadamente controlável no tempo T se, e somente se, vale a seguinte propriedade de continuação única para soluções da equação (4.2):

$$z = 0 \text{ em } Q_0 \Rightarrow z_T = 0. \quad (4.4)$$

A controlabilidade de equações parabólicas deterministas é bem compreendida. De fato, por meio de estimativas globais de Carleman é possível mostrar a desigualdade de observabilidade (4.3) e a propriedade de continuação única (4.4) (cf. [13],[15]).

Seja agora a seguinte equação parabólica estocástica controlada

$$\begin{cases} dy - \Delta y dt = (a_1 y + \chi_{G_0} u + a_3 v) dt + (a_2 y + v) dW(t) & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{em } G, \end{cases} \quad (4.5)$$

onde $a_1, a_2, a_3 \in L^\infty_{\mathbb{F}}(0, T; L^\infty(G))$.

No sistema (4.5), o estado inicial $y_0 \in L^2(G)$, y é a variável de estado e o controle consiste em $(u, v) \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G_0)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$.

Observação 17. Da mesma forma que o sistema de controle (3.5), o controle v no termo de difusão afeta o termo drift na forma $a_3 v$.

Da prova do Teorema 1.4.5, e usando a Proposição 1.4.2, é fácil mostrar o seguinte resultado de boa colocação para a equação (4.5).

Proposição 4.1.2. Para qualquer $y_0 \in L^2(G)$ e $(u, v) \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G_0)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$, o sistema (4.5) admite uma única solução fraca $y \in L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, T]; L^2(G))) \cap L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H^1_0(G))$. Além disso,

$$\begin{aligned} & \|y\|_{L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, T]; L^2(G))) \cap L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H^1_0(G))} \\ & \leq \mathcal{C}(\|y_0\|_{L^2(G)} + \|(u, v)\|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G_0)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))}). \end{aligned}$$

Definição 4.1.3. O sistema (4.5) é controlável a zero no tempo T se, para qualquer $y_0 \in L^2(G)$, existe um par de controles $(u, v) \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G_0)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$ tal que a solução correspondente para (4.5) satisfaz $y(T) = 0$, q.t.p..

Definição 4.1.4. O sistema (4.5) é aproximadamente controlável no tempo T se, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, $y_0 \in L^2(G)$ e $y_1 \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))$, existe um par de controles $(u, v) \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G_0)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$ tal que a solução correspondente para (4.5) satisfaz $\|y(T) - y_1\|_{L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))} \leq \epsilon$.

A seguir, enunciamos o resultado principal desta seção.

Teorema 4.1.3.

- 1) O sistema (4.5) é controlável a zero para qualquer tempo $T > 0$.
- 2) O sistema (4.5) é aproximadamente controlável para qualquer tempo $T > 0$.

A partir de agora, nos centraremos em provar o Teorema 4.1.3. Para isso, precisamos de alguns resultados preliminares.

4.2 Uma identidade com peso para operadores parabólicos estocásticos

Nesta seção, vamos derivar uma identidade com peso para o operador parabólico estocástico “ $dh + \Delta h dt$ ”. Por simplicidade, usamos a notação $y_{x_j} = \frac{\partial y}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$, para a derivada parcial de uma função y com relação a x_j , onde x_j é a j -ésima coordenada de um ponto genérico $x = (x_1, \dots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$.

Sejam $l \in C^{1,3}(Q)$, $\Psi \in C^{1,2}(Q)$ e considere

$$\begin{cases} \mathcal{A} = |\nabla l|^2 - \Delta l - \Psi - l_t, \\ \mathcal{B} = 2[\mathcal{A}\Psi + \text{div}(\mathcal{A}\nabla l)] - \mathcal{A}_t + \Delta \Psi, \\ c^{jk} = 2l_{x_j x_k} - \delta^{jk} \Delta l - \Psi \delta^{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (4.6)$$

onde

$$\delta^{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k, \\ 0, & \text{se } j \neq k. \end{cases} \quad (4.7)$$

Temos a seguinte identidade com peso.

Teorema 4.2.1. Seja h um processo Itô com valores em $H^2(G)$. Defina $\theta = e^l$ e $w = \theta h$. Então, para qualquer $t \in [0, T]$ e quase todo $(x, \omega) \in G \times \Omega$, vale

$$\begin{aligned} & 2\theta(\Delta w + \mathcal{A}w)(dh + \Delta h dt) - 2\text{div}(\nabla w dw) \\ & + 2\text{div} \left[2(\nabla l \cdot \nabla w) \nabla w - |\nabla w|^2 \nabla l - \Psi w \nabla w + \left(\mathcal{A} \nabla l + \frac{\nabla \Psi}{2} \right) w^2 \right] dt \\ & = 2 \sum_{j,k=1}^n c^{jk} w_{x_j} w_{x_k} dt + \mathcal{B} w^2 dt - d(|\nabla w|^2 - \mathcal{A} w^2) + 2(\Delta w + \mathcal{A} w)^2 dt \\ & + \theta^2 |d\nabla h + \nabla l dh|^2 - \theta^2 \mathcal{A}(dh)^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Demonstração. Sejam $\theta = e^l$ e $w = \theta h$. Temos que,

$$d\theta = \theta l_t dt, \quad \theta_{x_j} = l_{x_j} \theta, \quad \theta^{-1} = e^{-l}, \quad (\theta^{-1})_{x_j} = -l_{x_j} \theta.$$

Como $dw = \theta dh + h d\theta$ e $w_{x_j} = h \theta_{x_j} + \theta h_{x_j}$, então

$$\begin{aligned} dh &= \theta^{-1}(dw - h d\theta) \\ &= \theta^{-1}(dw - h \theta l_t dt) \\ &= \theta^{-1}(dw - l_t w dt), \end{aligned} \quad (4.9)$$

e

$$\begin{aligned} h_{x_j} &= \theta^{-1}(w_{x_j} - h \theta l_{x_j}) \\ &= \theta^{-1}(w_{x_j} - l_{x_j} w), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Com isso, vemos que

$$\begin{aligned}
\theta \Delta h &= \theta \sum_{j=1}^n h_{x_j x_j} \\
&= \theta \sum_{j=1}^n [\theta^{-1}(w_{x_j} - l_{x_j} w)]_{x_j} \\
&= \sum_{j=1}^n (w_{x_j} - l_{x_j} w)_{x_j} - \sum_{j=1}^n (w_{x_j} - l_{x_j} w) l_{x_j} \\
&= \sum_{j=1}^n (w_{x_j x_j} - l_{x_j x_j} w - l_{x_j} w_{x_j}) - \sum_{j=1}^n (w_{x_j} l_{x_j} - l_{x_j} l_{x_j} w) \\
&= \Delta w - 2 \nabla l \cdot \nabla w + (|\nabla l|^2 - \Delta l) w.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Defina,

$$\begin{aligned}
I &:= \Delta w + \mathcal{A}w, & I_1 &:= (\Delta w + \mathcal{A}w) dt, \\
I_2 &:= dw - 2 \nabla l \cdot \nabla w dt, & I_3 &:= \Psi w dt.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

De (4.11) e (4.12), segue que

$$2\theta(\Delta w + \mathcal{A}w)(dh + \Delta h dt) = 2I(I_1 + I_2 + I_3). \tag{4.13}$$

De fato, usando (4.6) e (4.9)-(4.12), obtemos

$$\begin{aligned}
&2(\Delta w + \mathcal{A}w)(\theta dh + \theta \Delta h dt) \\
&= 2(\Delta w + \mathcal{A}w)[dw - l_t w dt + (\Delta w - 2 \nabla l \cdot \nabla w + |\nabla l|^2 w - w \Delta l) dt] \\
&= 2(\Delta w + \mathcal{A}w)[(\Delta w + |\nabla l|^2 w - w \Delta l - l_t w - \Psi w) dt + \Psi w dt + dw - 2 \nabla l \cdot \nabla w dt] \\
&= 2I(I_1 + I_2 + I_3).
\end{aligned}$$

A seguir, calculamos o lado direito de (4.13).

Para calcular $2II_2$, primeiramente notamos que

$$\sum_{j,k=1}^n (l_{x_j} w_{x_j} w_{x_k})_{x_k} = \sum_{j,k=1}^n l_{x_j x_k} w_{x_j} w_{x_k} + \sum_{j,k=1}^n l_{x_j} w_{x_j x_k} w_{x_k} + \sum_{j,k=1}^n l_{x_j} w_{x_j} w_{x_k x_k} \tag{4.14}$$

e

$$2 \sum_{j,k=1}^n l_{x_j} w_{x_k} w_{x_j x_k} = \sum_{j,k=1}^n l_{x_j} (w_{x_k}^2)_{x_j} = \sum_{j,k=1}^n [(l_{x_j} w_{x_k}^2)_{x_j} - l_{x_j x_j} w_{x_k}^2]. \tag{4.15}$$

Usando (4.14) e (4.15), temos que

$$\begin{aligned}
-4(\Delta w + \mathcal{A}w)\nabla l \cdot \nabla w &= -4 \sum_{j,k=1}^n l_{x_j} w_{x_j} w_{x_k x_k} - 4\mathcal{A}w \nabla l \cdot \nabla w \\
&= -4 \sum_{j,k=1}^n (l_{x_j} w_{x_j} w_{x_k})_{x_k} + 4 \sum_{j,k=1}^n l_{x_j x_k} w_{x_j} w_{x_k} \\
&\quad + 4 \sum_{j,k=1}^n l_{x_j} w_{x_j x_k} w_{x_k} - 2\mathcal{A} \nabla l \cdot \nabla (w^2) \\
&= -4 \sum_{j,k=1}^n (l_{x_j} w_{x_j} w_{x_k})_{x_k} + 4 \sum_{j,k=1}^n l_{x_j x_k} w_{x_j} w_{x_k} \\
&\quad + 2 \sum_{j,k=1}^n [(l_{x_j} w_{x_k}^2)_{x_j} - l_{x_j x_j} w_{x_k}^2] - 2\mathcal{A} \nabla l \cdot \nabla (w^2) \\
&= -4 \operatorname{div}[(\nabla l \cdot \nabla w) \nabla w] + 4 \sum_{j,k=1}^n l_{x_j x_k} w_{x_j} w_{x_k} + 2 \operatorname{div}[|\nabla w|^2 \nabla l] \\
&\quad - 2 \sum_{j,k=1}^n \delta^{jk} \Delta l w_{x_j} w_{x_k} + 2 \operatorname{div}(\mathcal{A} \nabla l) w^2 - 2 \operatorname{div}(\mathcal{A} \nabla l w^2) \\
&= -2 \operatorname{div}[2(\nabla l \cdot \nabla w) \nabla w - |\nabla w|^2 \nabla l + \mathcal{A} \nabla l w^2] \\
&\quad + 2 \sum_{j,k=1}^n (2l_{x_j x_k} - \delta^{jk} \Delta l) w_{x_j} w_{x_k} + 2 \operatorname{div}(\mathcal{A} \nabla l) w^2,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

e

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{div}(\mathcal{A} \nabla l) w^2 - 2 \operatorname{div}(\mathcal{A} \nabla l w^2) &= 2(\nabla \mathcal{A} \cdot \nabla l + \mathcal{A} \Delta l) w^2 - 2[\nabla \mathcal{A} \cdot \nabla l w^2 + \mathcal{A}(\operatorname{div}(\nabla l w^2))] \\
&= 2\mathcal{A} \Delta l w^2 - 2\mathcal{A}(\Delta l w^2 + \nabla l \cdot \nabla (w^2)) \\
&= -2\mathcal{A} \nabla l \cdot \nabla (w^2).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
2(\Delta w + \mathcal{A}w)dw &= 2 \operatorname{div}(\nabla w dw) - 2 \nabla w \cdot d \nabla w + 2 \mathcal{A}w dw \\
&= 2 \operatorname{div}(\nabla w dw) + d(-|\nabla w|^2 + \mathcal{A}w^2) + |d \nabla w|^2 - \mathcal{A}_t w^2 dt - \mathcal{A}(dw)^2.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

De fato, pela regra do produto de Itô, temos que

$$d(-|\nabla w|^2) = -2 \nabla w \cdot d \nabla w - |d \nabla w|^2$$

e

$$d(\mathcal{A}w^2) = \mathcal{A}_t w^2 dt + 2 \mathcal{A}w dw + \mathcal{A}(dw)^2.$$

Combinando (4.12),(4.16) e (4.17), chegamos em

$$\begin{aligned}
 2II_2 &= -2\operatorname{div}[2(\nabla l \cdot \nabla w)\nabla w - |\nabla w|^2\nabla l + \mathcal{A}w^2\nabla l]dt + 2\operatorname{div}(\nabla w dw) \\
 &\quad + d(-|\nabla w|^2 + \mathcal{A}w^2) + 2 \sum_{j,k=1}^n (2l_{x_j x_k} - \delta^{jk}\Delta l)w_{x_j}w_{x_k} \\
 &\quad - [\mathcal{A}_t - 2\operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla l)]w^2dt + |d\nabla w|^2 - \mathcal{A}(dw)^2.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Para calcular $2II_3$, por (4.12) vemos que

$$\begin{aligned}
 2II_3 &= 2(\Delta w + \mathcal{A}w)\Psi w dt \\
 &= [2\operatorname{div}(\Psi w \nabla w) - 2\Psi|\nabla w|^2 - \nabla \Psi \cdot \nabla(w^2) + 2\mathcal{A}\Psi w^2]dt \\
 &= [\operatorname{div}(2\Psi w \nabla w - w^2 \nabla \Psi) - 2\Psi|\nabla w|^2 + (\Delta \Psi + 2\mathcal{A}\Psi)w^2]dt.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Agora, usando o Teorema 1.3.7 e a Observação 4, sabemos que $|F(t)dt + dz|^2 = |dz|^2$, logo

$$\begin{aligned}
 -|d\nabla w|^2 + \mathcal{A}(dw)^2 &= -|d(\theta \nabla h + h \nabla \theta)|^2 + \theta^2 \mathcal{A}(dh)^2 \\
 &= -|\theta d(\nabla h + h \nabla l)|^2 + \theta^2 \mathcal{A}(dh)^2 \\
 &= -|\theta(d\nabla h + dh \nabla l)|^2 + \theta^2 \mathcal{A}(dh)^2 \\
 &= -\theta^2 |d\nabla h + dh \nabla l|^2 + \theta^2 \mathcal{A}(dh)^2.
 \end{aligned}$$

Finalmente, combinando as identidades (4.13),(4.18), (4.19) e esta ultima identidade, obtemos a igualdade desejada (4.8). $\square$

Para o que segue, precisamos definir algumas funções peso apropriadas. Para isso, sejam $\psi \in C^4(\overline{G})$ uma função fixa não negativa diferente de zero e dois parâmetros $\lambda > 1$ e $\mu > 1$. Definimos

$$\theta = e^l, \quad l = \lambda\alpha, \quad \alpha(t, x) = \frac{e^{\mu\psi(x)} - e^{2\mu|\psi|_{C(\overline{G})}}}{t(T-t)}, \quad \varphi(t, x) = \frac{e^{\mu\psi(x)}}{t(T-t)}, \tag{4.20}$$

e

$$\Psi = -2\Delta l. \tag{4.21}$$

Para um inteiro não negativo m , denotamos por $O(\mu^m)$ uma função de ordem μ^m para μ grande (que é independente de λ); por $O_\mu(\lambda^m)$ uma função de ordem λ^m para μ fixo e para λ grande. Da mesma forma, usamos a notação $O(e^{\mu|\psi|_{C(\overline{G})}})$ e assim por

diante. Para $j, k = 1, 2, \dots, n$, é fácil verificar que

$$l_t = \lambda \alpha_t, \quad l_{x_j} = \lambda \mu \varphi \psi_{x_j}, \quad l_{x_j x_k} = \lambda \mu^2 \varphi \psi_{x_j} \psi_{x_k} + \lambda \mu \varphi \psi_{x_j x_k} \quad (4.22)$$

e que

$$\begin{aligned} |\alpha_t| &\leq \mathcal{C} \varphi^2 e^{2\mu|\psi|_{C(\bar{G})}}, & |\alpha_{tt}| &\leq \mathcal{C} \varphi^3 e^{2\mu|\psi|_{C(\bar{G})}}, \\ |\varphi_t| &\leq \mathcal{C} \varphi^2, & |\varphi_{tt}| &\leq \mathcal{C} \varphi^3. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Mais precisamente, temos

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \varphi^2 O(e^{2\mu|\psi|_{C(\bar{G})}}), & \alpha_{tt} &= \varphi^3 O(e^{2\mu|\psi|_{C(\bar{G})}}), \\ \varphi_t &= \varphi^2 O(1), & \varphi_{tt} &= \varphi^3 O(1). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Precisaremos também das seguintes estimativas para $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e c^{jk} que aparecem na identidade com peso (4.8) (veja (4.6) para suas definições, com l e Ψ dados em (4.20)-(4.21)):

Proposição 4.2.2. Para λ e μ suficientemente grandes, vale

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \leq \lambda^2 \mu^2 \varphi^2 |\nabla \psi|^2 + \mathcal{C} \lambda \mu^2 \varphi + \mathcal{C} \lambda \mu \varphi + \mathcal{C} \lambda \varphi^2 e^{2\mu|\psi|_{C(\bar{G})}}, \\ \mathcal{B} \geq 2\lambda^3 \mu^4 \varphi^3 |\nabla \psi|^4 - \mathcal{C} \lambda^3 \mu^3 \varphi^3 - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^2 \varphi^3 e^{2\mu|\psi|_{C(\bar{G})}} - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^4 \varphi^2, \\ \sum_{j,k=1}^n c^{jk} \xi_j \xi_k \geq [\lambda \mu^2 \varphi |\nabla \psi|^2 - \mathcal{C} \lambda \mu \varphi] |\xi|^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right. \quad (4.25)$$

para qualquer $t \in [0, T]$ e $x \in G$ com $|\nabla \psi(x)| > 0$.

Demonstração. Substituindo (4.21) e (4.22) em (4.6), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^n c^{jk} \xi_j \xi_k &= \sum_{j,k=1}^n (2l_{x_j x_k} + \delta^{jk} \Delta l) \xi_j \xi_k \\ &= \sum_{j,k=1}^n (2l_{x_j x_k} + \delta^{jk} \Delta l) \xi_j \xi_k \\ &= \sum_{j,k=1}^n (2\lambda \mu^2 \varphi \psi_{x_j} \psi_{x_k} + 2\lambda \mu \varphi \psi_{x_j x_k} + \lambda \mu^2 \varphi \delta^{jk} |\nabla \psi|^2 + \lambda \mu \varphi \delta^{jk} \Delta \psi) \xi_j \xi_k \\ &= 2\lambda \mu^2 \varphi (\nabla \psi \cdot \xi)^2 + \lambda \mu^2 \varphi |\nabla \psi|^2 |\xi|^2 + 2\lambda \mu \varphi \psi_{x_j x_k} \xi_j \xi_k + \lambda \mu \varphi \Delta \psi |\xi|^2 \\ &\geq [\lambda \mu^2 \varphi |\nabla \psi|^2 - \mathcal{C} \lambda \mu \varphi] |\xi|^2, \end{aligned}$$

que é a última estimativa em (4.25).

Da mesma forma, pela definição de $\mathcal{A}$ em (4.6), e observando (4.23), vemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= |\nabla l|^2 + \Delta l - l_t \\ &= \lambda^2 \mu^2 \varphi^2 |\nabla \psi|^2 + \lambda \mu^2 \varphi |\nabla \psi|^2 + \lambda \mu \varphi \Delta \psi - \lambda \alpha_t \\ &\leq \lambda^2 \mu^2 \varphi^2 |\nabla \psi|^2 + \mathcal{C} \lambda \mu^2 \varphi + \mathcal{C} \lambda \mu \varphi + \mathcal{C} \lambda \varphi^2 e^{2\mu|\psi|_{C(\overline{G})}},\end{aligned}$$

donde segue a primeira estimativa de (4.25).

Agora, vamos estimar $\mathcal{B}$ (veja (4.6) para sua definição). Por (4.22), e lembrando a definição de Ψ em (4.21), temos que

$$\begin{aligned}\Delta \Psi &= -2\Delta(\Delta l) \\ &= -2\Delta(\lambda \mu^2 \varphi |\nabla \psi|^2 + \lambda \mu \varphi \Delta \psi) \\ &= -2[\lambda \mu^2 \Delta \varphi |\nabla \psi|^2 + \lambda \mu^2 \varphi \Delta(|\nabla \psi|^2) + 2\lambda \mu^2 \nabla \varphi \nabla(|\nabla \psi|^2) \\ &\quad + \lambda \mu \Delta \varphi \Delta \psi + 2\lambda \mu \varphi \nabla \varphi \nabla \Delta \psi + \lambda \mu \varphi \Delta^2 \psi] \\ &= -2\lambda \mu^4 \varphi |\nabla \psi|^4 - 2\lambda \mu^3 \varphi \Delta \psi |\nabla \psi|^2 - 2\lambda \mu^2 \varphi \Delta(|\nabla \psi|^2) - 4\lambda \mu^3 \varphi \nabla \psi \cdot \nabla(|\nabla \psi|^2) \\ &\quad - 2\lambda \mu^3 \varphi |\nabla \psi|^2 \Delta \psi - 2\lambda \mu^2 \varphi |\Delta \psi|^2 - 4\lambda \mu^2 \varphi \nabla \psi \cdot \nabla \Delta \psi - 2\lambda \mu \varphi \Delta^2 \psi \\ &\geq -2\lambda \mu^4 \varphi |\nabla \psi|^4 - \mathcal{C} \lambda \mu^3 \varphi - \mathcal{C} \lambda \mu^2 \varphi - \mathcal{C} \lambda \mu \varphi.\end{aligned}$$

Lembrando a definição de $\mathcal{A}$ em (4.6), e usando (4.21)- (4.23), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\Psi &= -2(\lambda^3 \mu^4 \varphi^3 |\nabla \psi|^4 + \lambda^3 \mu^3 \varphi^3 |\nabla \psi|^2 \Delta \psi) \\ &\quad - 2(\lambda^2 \mu^4 \varphi^2 |\nabla \psi|^4 + 2\lambda^2 \mu^3 \varphi^2 |\nabla \psi|^2 \Delta \psi + \lambda^2 \mu^2 \varphi^2 |\Delta \psi|^2) \\ &\quad + 2\lambda \alpha_t (\lambda \mu^2 \varphi |\nabla \psi|^2 + \lambda \mu \varphi \Delta \psi) \\ &\geq -2\lambda^3 \mu^4 \varphi^3 |\nabla \psi|^4 - \mathcal{C} \lambda^3 \mu^3 \varphi^3 - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^4 \varphi^2 \\ &\quad - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^3 \varphi^2 - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^2 \varphi^2 - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^2 \varphi^3 e^{2\mu|\psi|_{C(\overline{G})}} - \mathcal{C} \lambda^2 \mu \varphi^3 e^{2\mu|\psi|_{C(\overline{G})}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{x_k} &= \sum_{j=1}^n (2l_{x_j} l_{x_j x_k} + l_{x_j x_j x_k}) - l_{t x_k} \\ &= 2\lambda^2 \mu^3 \varphi^2 |\nabla \psi|^2 \psi_{x_k} + 2\lambda^2 \mu^2 \varphi^2 \nabla \psi \cdot \nabla \psi_{x_k} + \lambda \mu^3 \varphi |\nabla \psi|^2 \psi_{x_i} \\ &\quad + 2\lambda \mu^2 \varphi \nabla \psi \cdot \nabla \psi_{x_k} + \lambda \mu^2 \varphi \psi_{x_k} \Delta \psi + \lambda \mu \varphi (\Delta \psi)_{x_k} - \lambda \nabla \alpha_t,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathcal{A}_{x_j} l_{x_j} &= 2\lambda^3 \mu^4 \varphi^3 |\nabla \psi|^4 + 2\lambda^3 \mu^3 \varphi^3 \psi_{x_k} \psi_{x_j} \psi_{x_j x_k} \\ &\quad + \lambda^2 \mu^4 \varphi^2 |\nabla \psi|^4 + 2\lambda^2 \mu^3 \varphi^2 \psi_{x_j} \psi_{x_k} \psi_{x_j x_k} \\ &\quad + \lambda^2 \mu^3 \varphi^2 |\nabla \psi|^2 \Delta \psi + \lambda^2 \mu^2 \varphi^2 (\Delta \psi)_{x_k} \psi_{x_k} - l_{tx_k} \lambda \mu \varphi \psi_{x_k}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla \mathcal{A} \cdot \nabla l \geq 2\lambda^3 \mu^4 \varphi^3 |\nabla \psi|^4 - \mathcal{C} \lambda^3 \mu^3 \varphi^3 - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^4 \varphi^2 - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^3 \varphi^2 - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^2 \varphi^2.$$

Também,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t &= (|\nabla l|^2 + \Delta l - l_t)_t \\ &= 2\lambda^2 \mu^2 \varphi \varphi_t |\nabla \psi|^2 + \lambda \mu^2 \varphi_t |\nabla \psi|^2 + \lambda \mu \varphi_t \Delta \psi - \lambda \alpha_{tt} \\ &\geq -\mathcal{C} \lambda^2 \mu^2 \varphi^3 - \mathcal{C} \lambda \mu^2 \varphi^2 - \mathcal{C} \lambda \mu \varphi^2 - \mathcal{C} \lambda \varphi^3 e^{2\mu|\psi|_{C(\overline{\mathcal{G}})}}. \end{aligned}$$

Por último, sabendo que,

$$2\operatorname{div}(\mathcal{A} \nabla l) = 2\nabla \mathcal{A} \cdot \nabla l + 2\mathcal{A} \Delta l,$$

da definição de $\mathcal{B}$ e das estimativas acima, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= 2\mathcal{A} \Psi + 2\operatorname{div}(\mathcal{A} \nabla l) - \mathcal{A}_t + \Delta \Psi \\ &= 2\mathcal{A} \Psi + 2\nabla \mathcal{A} \cdot \nabla l + 2\mathcal{A} \Delta l - \mathcal{A}_t + \Delta \Psi \\ &= \mathcal{A} \Psi + 2\nabla \mathcal{A} \cdot \nabla l - \mathcal{A}_t + \Delta \Psi \\ &\geq -2\lambda^3 \mu^4 \varphi^3 |\nabla \psi|^4 - \mathcal{C} \lambda^3 \mu^3 \varphi^3 - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^4 \varphi^2 \\ &\quad - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^3 \varphi^2 - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^2 \varphi^2 - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^2 \varphi^3 e^{2\mu|\psi|_{C(\overline{\mathcal{G}})}} - \mathcal{C} \lambda^2 \mu \varphi^3 e^{2\mu|\psi|_{C(\overline{\mathcal{G}})}} \\ &\quad + 4\lambda^3 \mu^4 \varphi^3 |\nabla \psi|^4 - \mathcal{C} \lambda^3 \mu^3 \varphi^3 - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^4 \varphi^2 - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^3 \varphi^2 - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^2 \varphi^2 \\ &\quad - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^2 \varphi^3 - \mathcal{C} \lambda \mu^2 \varphi^2 - \mathcal{C} \lambda \mu \varphi^2 - \mathcal{C} \lambda \varphi^3 e^{2\mu|\psi|_{C(\overline{\mathcal{G}})}} \\ &\quad - \mathcal{C} \lambda \mu^4 \varphi |\nabla \psi|^4 - \mathcal{C} \lambda \mu^3 \varphi - \mathcal{C} \lambda \mu^2 \varphi - \mathcal{C} \lambda \mu \varphi \\ &\geq 2\lambda^3 \mu^4 \varphi^3 |\nabla \psi|^4 - \mathcal{C} \lambda^3 \mu^3 \varphi^3 - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^2 \varphi^3 e^{2\mu|\psi|_{C(\overline{\mathcal{G}})}} - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^4 \varphi^2, \end{aligned}$$

o que prova a segunda estimativa em (4.25). □

4.3 Estimativa global de Carleman para equações parabólicas estocásticas reversas

Para estudar os problemas de controlabilidade nula e aproximada para (4.5), introduzimos a seguinte equação parabólica estocástica reversa:

$$\begin{cases} dz + \Delta z dt = -(a_1 z + a_2 Z) dt + Z dW(t) & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(T) = z_T & \text{em } G. \end{cases} \quad (4.26)$$

Segue do Teorema 1.5.4, o seguinte resultado de existência e unicidade:

Proposição 4.3.1. Para qualquer $z_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))$, o sistema (4.26) admite uma única solução fraca $(z, Z) \in (L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, T]; L^2(G))) \cap L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H^1_0(G))) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$. Além disso, para qualquer $t \in [0, T]$,

$$|(z(\cdot), Z(\cdot))|_{(L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([0, T]; L^2(G))) \cap L^2_{\mathbb{F}}(0, T; H^1_0(G))) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))} \leq \mathcal{C} |z(t)|_{L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega; L^2(G))}. \quad (4.27)$$

Para o que segue, precisamos do seguinte resultado que garante a existência de uma função peso apropriada. ([15, p. 4, Lema 1.1]).

Lema 4.3.2. Para qualquer subconjunto aberto não vazio G_1 de G , existe uma $\psi \in C^4(\overline{G})$ tal que $\psi > 0$ em G , $\psi = 0$ em Γ , e $|\nabla \psi(x)| > 0$ para todo $x \in \overline{G} \setminus G_1$.

Sejam agora θ e l como em (4.20), e ψ dado pelo Lema 4.3.2 com G_1 sendo qualquer subconjunto aberto fixado não vazio de G tal que $\overline{G_1} \subset G_0$. Temos a seguinte estimativa global de Carleman para (4.26):

Teorema 4.3.3. Existe uma constante $\mu_0 = \mu_0(G, G_0, T) > 0$ tal que para todo $\mu \geq \mu_0$, podemos encontrar duas constantes $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mu) > 0$ e $\lambda_0 = \lambda_0(\mu) > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ e $z_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))$, a solução (z, Z) para (4.26) satisfaz

$$\begin{aligned} & \lambda^3 \mu^4 \mathbb{E} \int_Q \theta^2 \varphi^3 z^2 dx dt + \lambda \mu^2 \mathbb{E} \int_Q \theta^2 \varphi |\nabla z|^2 dx dt \\ & \leq \mathcal{C} \left(\lambda^3 \mu^4 \mathbb{E} \int_{Q_0} \theta^2 \varphi^3 z^2 dx dt + \lambda^2 \mu^2 \mathbb{E} \int_Q \theta^2 \varphi^2 (a_3 z + Z)^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Demonstração. Primeiramente, note que para $\lambda > 1$ e $\mu > 1$, sendo $\theta = e^l$ e $l = \lambda \alpha$ definidos em (4.20), temos

$$\theta(0, \cdot) = 0 = \theta(T, \cdot), \quad \forall x \in G. \quad (4.29)$$

De fato, como $\alpha(t, x) < 0$ para todo $(t, x) \in Q$, segue que

$$\alpha(t, x) \rightarrow -\infty, \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+ \text{ e } t \rightarrow T^-.$$

Com isso,

$$\theta = e^{\lambda\alpha} \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+ \text{ e } t \rightarrow T^-.$$

Para provar a desigualdade 4.28, usaremos o Teorema 4.2.1 e a Proposição 4.2.2. De fato, integrando a igualdade (4.8) em Q e tomando a expectativa em ambos os lados, vemos que

$$\begin{aligned} & 2\mathbb{E} \int_Q \theta(\Delta w + \mathcal{A}w)(dz + \Delta z dt) - 2\mathbb{E} \int_Q \operatorname{div}(\nabla w dw) dx \\ & + 2\mathbb{E} \int_Q \operatorname{div} \left[2(\nabla l \cdot \nabla w) \nabla w - |\nabla w|^2 \nabla l - \Psi w \nabla w + \left(\mathcal{A} \nabla l + \frac{\nabla \Psi}{2} \right) w^2 \right] dt dx \\ & = 2\mathbb{E} \int_Q \sum_{j,k=1}^n c^{jk} w_{x_j} w_{x_k} dt dx + \mathbb{E} \int_Q \mathcal{B} w^2 dt dx - \mathbb{E} \int_Q d(|\nabla w|^2 - \mathcal{A} w^2) dx \\ & + 2\mathbb{E} \int_Q (\Delta w + \mathcal{A}w)^2 dt dx + \mathbb{E} \int_Q \theta^2 |d\nabla z + \nabla l dh|^2 dx - \mathbb{E} \int_Q \theta^2 \mathcal{A}(dz)^2. \end{aligned}$$

Como $w = \theta z$, por (4.29) temos que $w(0, x) = 0 = w(T, x)$ para todo $x \in G$. Daí,

$$\begin{aligned} & \int_G \int_0^T \frac{d(|\nabla w|^2 - \mathcal{A}w)}{dt} dt dx \\ & = \int_G [(|\nabla w(T, x)|^2 - \mathcal{A}w(T, x)) - (|\nabla w(0, x)|^2 - \mathcal{A}w(0, x))] dx \\ & = 0. \end{aligned}$$

Agora, lembrando de (4.25), concluimos que

$$\begin{aligned} & 2\mathbb{E} \int_Q \theta(\Delta w + \mathcal{A}w)(dz + \Delta z dt) - 2\mathbb{E} \int_Q \operatorname{div}(\nabla w dw) dx \\ & + 2\mathbb{E} \int_Q \operatorname{div} \left[2(\nabla l \cdot \nabla w) \nabla w - |\nabla w|^2 \nabla l - \Psi w \nabla w + \left(\mathcal{A} \nabla l + \frac{\nabla \Psi}{2} \right) w^2 \right] dx dt \\ & \geq 2\mathbb{E} \int_Q \varphi(\lambda \mu^2 |\nabla \psi|^2 - \mathcal{C} \lambda \mu) |\nabla w|^2 dx dt + \mathbb{E} \int_Q \varphi^3 (2\lambda^3 \mu^4 |\nabla \psi|^4 - \mathcal{C} \lambda^3 \mu^3) \quad (4.30) \\ & - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^4 \varphi^{-1} - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^2 e^{2\mu|\psi|_{C(\bar{G})}} w^2 dx dt + 2\mathbb{E} \int_Q |\Delta w + \mathcal{A}w|^2 dx dt \\ & + \mathbb{E} \int_Q \theta^2 |d\nabla z + dz \nabla l|^2 dx - \mathbb{E} \int_Q \theta^2 \mathcal{A}(dz)^2 dx. \end{aligned}$$

Seja $\nu(x) = (\nu^1(x), \dots, \nu^n(x))$ o vetor normal externo unitário de G em $x \in \Gamma$. Sabendo

que $z = 0$ em Σ e que $\frac{\partial z}{\partial \nu} = \nabla z \cdot \nu$, temos

$$w = \theta z = 0 \text{ e } w_{x_j} = \theta z_{x_j} = \theta \frac{\partial z}{\partial \nu} \nu^j \text{ sobre } \Sigma. \quad (4.31)$$

Da mesma forma, por (4.22) e pelo Lema 4.3.2, obtemos

$$l_{x_j} = \lambda \mu \varphi \psi_{x_j} = \lambda \mu \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \nu^j \text{ e } \frac{\partial \psi}{\partial \nu} < 0 \text{ sobre } \Sigma. \quad (4.32)$$

De fato, como $\psi = 0$ em Γ e $\psi > 0$ em G ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu}(x) = \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{\psi(x + k\nu) - \psi(x)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{\psi(x + k\nu)}{k} < 0,$$

pois se $x \in \Gamma$ e $k < 0$ então $x + k\nu \in G$.

Além disso, pelo Teorema da Divergência,

$$\begin{aligned} -2\mathbb{E} \int_Q \operatorname{div}(\nabla w dw) dx &= -2\mathbb{E} \int_Q \operatorname{div}(w_t \nabla w) dx dt \\ &= -2\mathbb{E} \int_\Sigma w_t \frac{\partial w}{\partial \nu} dx dt = 0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

uma vez que $w = 0$ sobre Σ então $w_t = 0$ sobre Σ . E ainda,

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E} \int_Q \operatorname{div}(\Psi w \nabla w) dx dt \\ = 2\mathbb{E} \int_\Sigma \Psi w \frac{\partial w}{\partial \nu} dx dt = 0, \end{aligned} \quad (4.34)$$

e

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E} \int_Q \operatorname{div} \left(\mathcal{A} \nabla l + \frac{\nabla \Psi}{2} \right) w^2 dx dt \\ = 2\mathbb{E} \int_\Sigma \left[\left(\mathcal{A} \nabla l + \frac{\nabla \Psi}{2} \right) w^2 \right] \cdot \nu dx dt \\ = 2\mathbb{E} \int_\Sigma \left[\mathcal{A} \frac{\partial l}{\partial \nu} w^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} w^2 \right] dx dt = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

De (4.31)-(4.35), segue que

$$\begin{aligned}
 & 2\mathbb{E} \int_Q \operatorname{div} \left[2(\nabla l \cdot \nabla w) \nabla w - |\nabla w|^2 \nabla l - \Psi w \nabla w + \left(\mathcal{A} \nabla l + \frac{\nabla \Psi}{2} \right) w^2 \right] dx dt \\
 &= 4\mathbb{E} \int_Q \operatorname{div} [(\nabla l \cdot \nabla w) \nabla w] dx dt - 2\mathbb{E} \int_Q \operatorname{div} [|\nabla w|^2 \nabla l] dx dt \\
 &= 4\mathbb{E} \int_{\Sigma} (\nabla l \cdot \nabla w) \frac{\partial w}{\partial \nu} dx dt - 2\mathbb{E} \int_{\Sigma} |\nabla w|^2 \frac{\partial l}{\partial \nu} dx dt \\
 &= 4\mathbb{E} \int_{\Sigma} \theta \frac{\partial z}{\partial \nu} \sum_{i=1}^j l_{x_i} w_{x_i} dx dt - 2\mathbb{E} \int_{\Sigma} \theta^2 \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 \sum_{i=1}^n l_{x_i} \nu^i dx dt \\
 &= 4\mathbb{E} \int_{\Sigma} \theta \frac{\partial z}{\partial \nu} \lambda \mu \varphi \sum_{i=1}^j \psi_{x_i} \theta \frac{\partial z}{\partial \nu} \nu^i dx dt - 2\mathbb{E} \int_{\Sigma} \theta^2 \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 \lambda \mu \varphi \sum_{i=1}^n \psi_{x_i} \nu^i dx dt \\
 &= 4\mathbb{E} \int_{\Sigma} \lambda \mu \varphi \theta^2 \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 dx dt - 2\mathbb{E} \int_{\Sigma} \lambda \mu \varphi \theta^2 \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \nu} dx dt \\
 &= 2\lambda \mu \mathbb{E} \int_{\Sigma} \theta^2 \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \left(\frac{\partial z}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \leq 0.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

De (4.26), temos

$$\begin{aligned}
 & 2\mathbb{E} \int_Q \theta (\Delta w + \mathcal{A}w) (dz + \Delta z dt) dx \\
 &= 2\mathbb{E} \int_Q \theta (\Delta w + \mathcal{A}w) [-(a_1 z + a_2 Z) dt + Z dW(t)] dx \\
 &= -2\mathbb{E} \int_Q \theta (\Delta w + \mathcal{A}w) (a_1 z + a_2 Z) dx dt \\
 &\leq \mathbb{E} \int_Q (\Delta w + \mathcal{A}w)^2 dx dt + \mathbb{E} \int_Q \theta^2 (a_1 z + a_2 Z)^2 dx dt.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Por (4.30)-(4.37), concluimos que

$$\begin{aligned}
 & 2\mathbb{E} \int_Q \varphi \lambda \mu^2 |\nabla \psi|^2 |\nabla w|^2 dx dt - 2\mathbb{E} \int_Q \mathcal{C} \varphi \lambda \mu |\nabla w|^2 dx dt + \mathbb{E} \int_Q \varphi^3 (2\lambda^3 \mu^4 |\nabla \psi|^4 \\
 & - \mathcal{C} \lambda^3 \mu^3 - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^4 \varphi^{-1} - \mathcal{C} \lambda^2 \mu^2 e^{2\mu|\psi|_{C(\bar{\partial})}}) w^2 dx dt + 2\mathbb{E} \int_Q |\Delta w + \mathcal{A}w|^2 dx dt \\
 & + \mathbb{E} \int_Q \theta^2 |d\nabla z + dz \nabla l|^2 dx - \mathbb{E} \int_Q \theta^2 \mathcal{A}(dz)^2 dx \\
 & \leq 2\mathbb{E} \int_Q \theta (\Delta w + \mathcal{A}w) (dz + \Delta z dt) + 2\lambda \mu \mathbb{E} \int_{\Sigma} \theta^2 \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \left(\frac{\partial z}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \\
 & \leq \mathbb{E} \int_Q (\Delta w + \mathcal{A}w)^2 dx dt + \mathbb{E} \int_Q \theta^2 (a_1 z + a_2 Z)^2 dx dt.
 \end{aligned}$$

Isso implica,

$$\begin{aligned}
 & 2\mathbb{E} \int_Q \varphi \lambda \mu^2 |\nabla \psi|^2 |\nabla w|^2 dxdt - \mathcal{C} \lambda \mu \mathbb{E} \int_Q \varphi |\nabla w|^2 dxdt \\
 & + 2\mathbb{E} \int_Q \varphi^3 \lambda^3 \mu^4 |\nabla \psi|^4 w^2 dxdt - \mathcal{C} \mathbb{E} \int_Q \varphi^3 (\lambda^3 \mu^3 + \lambda^2 \mu^4 \varphi^{-1} + \lambda^2 \mu^2 e^{2\mu|\psi|_{C(\bar{G})}}) w^2 dxdt \\
 & \leq \mathbb{E} \int_Q \theta^2 (a_1 z + a_2 Z)^2 dxdt + \mathbb{E} \int_Q \theta^2 \mathcal{A} Z^2 dxdt \\
 & \leq \mathbb{E} \int_Q \theta^2 (a_1 z + a_2 Z)^2 dxdt + \mathbb{E} \int_Q \theta^2 \mathcal{A} [(a_3 z + Z) - a_3 z]^2 dxdt \\
 & \leq \mathbb{E} \int_Q \theta^2 [(a_1 z + a_2 Z)^2 + 2\mathcal{A}(a_3 z + Z)^2 + 2a_3^2 \mathcal{A} z^2] dxdt,
 \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
 & 2\mathbb{E} \int_Q \varphi^3 \lambda^3 \mu^4 |\nabla \psi|^4 w^2 dxdt + 2\mathbb{E} \int_Q \varphi \lambda \mu^2 |\nabla \psi|^2 |\nabla w|^2 dxdt \\
 & \leq \mathcal{C} \lambda \mu \mathbb{E} \int_Q \varphi |\nabla w|^2 dxdt + \mathcal{C} \mathbb{E} \int_Q \varphi^3 (\lambda^3 \mu^3 + \lambda^2 \mu^4 \varphi^{-1} + \lambda^2 \mu^2 e^{2\mu|\psi|_{C(\bar{G})}}) w^2 dxdt \quad (4.38) \\
 & + \mathbb{E} \int_Q \theta^2 [(a_1 z + a_2 Z)^2 + 2\mathcal{A}(a_3 z + Z)^2 + 2a_3^2 \mathcal{A} z^2] dxdt.
 \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.3.2, temos que $|\nabla \psi| > 0$ em $\overline{G \setminus G_1}$, logo existe uma constante $\mathcal{C} > 0$ tal que $|\nabla \psi| \geq \mathcal{C} > 0$ em $\overline{G \setminus G_1}$. Daí,

$$\mathcal{C} \lambda^3 \mu^4 \mathbb{E} \int_{Q \setminus Q_1} \varphi^3 w^2 dxdt \leq \lambda^3 \mu^4 \mathbb{E} \int_Q \varphi^3 |\nabla \psi|^4 w^2 dxdt$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{C} \lambda^3 \mu^4 \mathbb{E} \int_Q \varphi^3 w^2 dxdt - \mathcal{C} \lambda^3 \mu^4 \mathbb{E} \int_{Q_1} \varphi^3 w^2 dxdt \leq \lambda^3 \mu^4 \mathbb{E} \int_Q \varphi^3 |\nabla \psi|^4 w^2 dxdt.$$

De modo análogo,

$$\mathcal{C} \lambda \mu^2 \mathbb{E} \int_Q \varphi |\nabla w|^2 dxdt - \mathcal{C} \lambda \mu^2 \mathbb{E} \int_{Q_1} \varphi |\nabla w|^2 dxdt \leq \lambda \mu^2 \mathbb{E} \int_Q \varphi |\nabla \psi|^2 |\nabla w|^2 dxdt.$$

Portanto, de (4.38) obtemos

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{C}\lambda^3\mu^4\mathbb{E} \int_Q \varphi^3 w^2 dxdt - \mathcal{C}\lambda^3\mu^4\mathbb{E} \int_{Q_1} \varphi^3 w^2 dxdt \\
 & + \mathcal{C}\lambda\mu^2\mathbb{E} \int_Q \varphi |\nabla w|^2 dxdt - \mathcal{C}\lambda\mu^2\mathbb{E} \int_{Q_1} \varphi |\nabla w|^2 dxdt \\
 & \leq \mathcal{C}\lambda\mu\mathbb{E} \int_Q \varphi |\nabla w|^2 dxdt + \mathbb{E} \int_Q \varphi^3 (\mathcal{C}\lambda^3\mu^3 + \mathcal{C}\lambda^2\mu^4\varphi^{-1} + \mathcal{C}\lambda^2\mu^2 e^{2\mu|\psi|_{C(\bar{G})}}) w^2 dxdt \\
 & + \mathbb{E} \int_Q \theta^2 [(a_1 z + a_2 Z)^2 + 2\mathcal{A}(a_3 z + Z)^2 + 2a_3^2 \mathcal{A} z^2] dxdt,
 \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{C}\lambda^3\mu^4\mathbb{E} \int_Q \varphi^3 w^2 dxdt + \mathcal{C}\lambda\mu^2\mathbb{E} \int_Q \varphi |\nabla w|^2 dxdt \\
 & \leq \mathcal{C}\lambda^3\mu^4\mathbb{E} \int_{Q_1} \varphi^3 w^2 dxdt + \mathcal{C}\lambda\mu^2\mathbb{E} \int_{Q_1} \varphi |\nabla w|^2 dxdt + \mathcal{C}\lambda\mu\mathbb{E} \int_Q \varphi |\nabla w|^2 dxdt \quad (4.39) \\
 & + \mathbb{E} \int_Q \varphi^3 (\mathcal{C}\lambda^3\mu^3 + \mathcal{C}\lambda^2\mu^4\varphi^{-1} + \mathcal{C}\lambda^2\mu^2 e^{2\mu|\psi|_{C(\bar{G})}}) w^2 dxdt \\
 & + \mathbb{E} \int_Q \theta^2 [(a_1 z + a_2 Z)^2 + 2\mathcal{A}(a_3 z + Z)^2 + 2a_3^2 \mathcal{A} z^2] dxdt.
 \end{aligned}$$

Note que para λ e μ , suficientemente grandes, podemos absorver os termos de ordem inferior do lado direito de (4.39). Deste modo, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{C}\lambda^3\mu^4\mathbb{E} \int_Q \varphi^3 w^2 dxdt + \mathcal{C}\lambda\mu^2\mathbb{E} \int_Q \varphi |\nabla w|^2 dxdt \\
 & \leq \mathcal{C}\lambda^3\mu^4\mathbb{E} \int_{Q_1} \varphi^3 w^2 dxdt + \mathcal{C}\lambda\mu^2\mathbb{E} \int_{Q_1} \varphi |\nabla w|^2 dxdt \quad (4.40) \\
 & + \mathbb{E} \int_Q \theta^2 [(a_1 z + a_2 Z)^2 + 2\mathcal{A}(a_3 z + Z)^2 + 2a_3^2 \mathcal{A} z^2] dxdt.
 \end{aligned}$$

Como $w = \theta z$, então $\nabla w = \theta \nabla z + z \nabla \theta$. Logo, de (4.40), temos que

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{C}\lambda^3\mu^4\mathbb{E} \int_Q \varphi^3 \theta^2 z^2 dxdt + \mathcal{C}\lambda\mu^2\mathbb{E} \int_Q \theta^2 \varphi |\nabla z|^2 dxdt + \mathcal{C}\lambda^3\mu^4\mathbb{E} \int_Q \theta^2 \varphi^3 z^2 |\nabla \psi|^2 dxdt \\
 & \leq \mathcal{C}\lambda^3\mu^4\mathbb{E} \int_{Q_1} \varphi^3 \theta^2 z^2 dxdt + \mathcal{C}\lambda\mu^2\mathbb{E} \int_{Q_1} \theta^2 \varphi |\nabla z|^2 dxdt + \mathcal{C}\lambda^3\mu^4\mathbb{E} \int_{Q_1} \theta^2 \varphi^3 z^2 |\nabla \psi|^2 dxdt \\
 & + \mathbb{E} \int_Q \theta^2 [(a_1 z + a_2 Z)^2 + 2\mathcal{A}(a_3 z + Z)^2 + 2a_3^2 \mathcal{A} z^2] dxdt.
 \end{aligned}$$

Com isso, temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
& C\lambda^3\mu^4\mathbb{E} \int_Q \varphi^3\theta^2z^2dxdt + C\lambda\mu^2\mathbb{E} \int_Q \theta^2\varphi|\nabla z|^2dxdt \\
& \leq C\lambda^3\mu^4\mathbb{E} \int_{Q_1} \varphi^3\theta^2z^2dxdt + C\lambda\mu^2\mathbb{E} \int_{Q_1} \theta^2\varphi|\nabla z|^2dxdt \\
& + \mathbb{E} \int_Q \theta^2[(a_1z + a_2Z)^2 + 2\mathcal{A}(a_3z + Z)^2 + 2a_3^2\mathcal{A}z^2]dxdt.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Agora, nosso objetivo é estimar a integral em Q_1 envolvendo $|\nabla z|^2$ no lado direito acima. Escolhendo uma função de corte $\zeta \in C_0^\infty(G_0)$, com $0 \leq \zeta \leq 1$, de modo que $\zeta = 1$ em G_1 , temos

$$C\lambda\mu^2\mathbb{E} \int_{Q_1} \varphi|\nabla z|^2dxdt \leq C\lambda\mu^2\mathbb{E} \int_{Q_0} \varphi|\nabla z|^2\zeta^2dxdt.$$

Pela regra do produto de Itô,

$$d(\theta^2\varphi z^2) = z^2(\theta^2\varphi)_tdt + 2\theta^2\varphi z dz + \theta^2\varphi(dz)^2. \tag{4.42}$$

Recordemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \theta(t, \cdot) = \lim_{t \rightarrow T^-} \theta(t, \cdot) \equiv 0$$

e que $|dz|_H^2 = |Z|_H^2 dt$. Daí, integrando (4.42) em Q_0 , tomando a expectativa e usando (4.26), encontramos

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E} \int_{Q_0} \zeta^2 z^2 (\theta^2 \varphi)_t dxdt + 2\mathbb{E} \int_{Q_0} \zeta^2 \theta^2 \varphi z dz + \mathbb{E} \int_{Q_0} \zeta^2 \theta^2 \varphi (dz)^2 \\
&= \mathbb{E} \int_{Q_0} (\zeta^2 z^2 \theta^2 \varphi_t + 2\zeta^2 z^2 \varphi \lambda \alpha_t \theta^2) dxdt + 2\mathbb{E} \int_{Q_0} \zeta^2 \theta^2 \varphi z (-\Delta z dt + f dt) \\
&+ \mathbb{E} \int_{Q_0} \zeta^2 \theta^2 \varphi Z^2 dxdt \\
&= \mathbb{E} \int_{Q_0} (\zeta^2 z^2 \theta^2 \varphi_t + 2\zeta^2 z^2 \varphi \lambda \alpha_t \theta^2) dxdt - 2\mathbb{E} \int_{Q_0} \zeta^2 \theta^2 \varphi z [\operatorname{div}(\nabla z)] dxdt \\
&+ 2\mathbb{E} \int_{Q_0} \zeta^2 \theta^2 \varphi z f dxdt + \mathbb{E} \int_{Q_0} \zeta^2 \theta^2 \varphi Z^2 dxdt \\
&= \mathbb{E} \int_{Q_0} \zeta^2 z^2 \theta^2 (\varphi_t + 2\lambda \varphi \alpha_t) dxdt + 2\mathbb{E} \int_{Q_0} \theta^2 \zeta^2 \varphi |\nabla z|^2 dxdt \\
&+ 2\mathbb{E} \int_{Q_0} \theta^2 \mu \zeta^2 \varphi (1 + 2\lambda \varphi) z \nabla z \cdot \nabla \psi dxdt \\
&+ 4\mathbb{E} \int_{Q_0} \theta^2 \zeta \varphi z \nabla z \cdot \nabla \zeta dxdt + 2\mathbb{E} \int_{Q_0} \zeta^2 \theta^2 \varphi f z dxdt + \mathbb{E} \int_{Q_0} \zeta^2 \theta^2 \varphi Z^2 dxdt,
\end{aligned}$$

em que $f = -(a_1 z + a_2 Z)$. Além disso, para qualquer $\epsilon > 0$ temos

$$\begin{aligned}
 & 2\mathbb{E} \int_{Q_0} \theta^2 \zeta^2 \varphi |\nabla z|^2 dxdt + \mathbb{E} \int_{Q_0} \theta^2 \zeta^2 \varphi Z^2 dxdt \\
 &= -\mathbb{E} \int_{Q_0} \zeta^2 z^2 \theta^2 (\varphi_t + 2\lambda \varphi \alpha_t) dxdt - 2\mathbb{E} \int_{Q_0} \theta^2 \mu \zeta^2 \varphi (1 + 2\lambda \varphi) z \nabla z \cdot \nabla \psi dxdt \\
 &- 4\mathbb{E} \int_{Q_0} \theta^2 \zeta \varphi z \nabla z \cdot \nabla \zeta dxdt - 2\mathbb{E} \int_{Q_0} \zeta^2 \theta^2 \varphi f z dxdt \\
 &\leq \epsilon \mathbb{E} \int_{Q_0} \theta^2 \zeta^2 \varphi |\nabla z|^2 dxdt + C(\epsilon) \mathbb{E} \int_{Q_0} \theta^2 \left[\frac{1}{\lambda^2 \mu^2} (a_1 z + a_2 Z)^2 + \lambda^2 \mu^2 \varphi^3 z^2 \right] dxdt.
 \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, vemos que

$$\mathbb{E} \int_0^T \int_{G_1} \theta^2 \varphi |\nabla z|^2 dxdt \leq C \mathbb{E} \int_{Q_0} \theta^2 \left[\frac{1}{\lambda^2 \mu^2} (a_1 z + a_2 Z)^2 + \lambda^2 \mu^2 \varphi^3 z^2 \right] dxdt. \quad (4.43)$$

De (4.41), (4.43) e usando a Proposição 4.2.2, concluímos que existe um $\mu_0 > 0$ tal que para todo $\mu \geq \mu_0$, podemos encontrar uma constante $\lambda_0 = \lambda_0(\mu)$ de modo que para qualquer $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\begin{aligned}
 & \lambda^3 \mu^4 \mathbb{E} \int_Q \varphi^3 \theta^2 z^2 dxdt + \lambda \mu^2 \mathbb{E} \int_Q \theta^2 \varphi |\nabla z|^2 dxdt \\
 &\leq C \lambda^3 \mu^4 \mathbb{E} \int_Q \varphi^3 \theta^2 z^2 dxdt + C \lambda \mu^2 \mathbb{E} \int_Q \theta^2 \varphi |\nabla z|^2 dxdt \\
 &\leq C \lambda^3 \mu^4 \mathbb{E} \int_{Q_0} \varphi^3 \theta^2 z^2 dxdt + C \mathbb{E} \int_{Q_0} \theta^2 \lambda^{-1} (a_1 z + a_2 Z)^2 dxdt \\
 &+ \mathbb{E} \int_Q \theta^2 (a_1 z + a_2 Z)^2 dxdt + 2\mathbb{E} \int_Q \theta^2 \mathcal{A} (a_3 z + Z)^2 dxdt + 2\mathbb{E} \int_Q \theta^2 a_3^2 \mathcal{A} z^2 dxdt \\
 &\leq C \lambda^3 \mu^4 \mathbb{E} \int_{Q_0} \varphi^3 \theta^2 z^2 dxdt + \lambda^2 \mu^2 \mathbb{E} \int_Q \theta^2 \varphi^2 (a_3 z + Z)^2 dxdt.
 \end{aligned}$$

Isso completa a prova do Teorema 4.3.3. $\square$

Como consequência do Teorema 4.3.3, temos a seguinte estimativa de observabilidade e continuação única para (4.26):

Corolário 4.3.4.

1) [Desigualdade de observabilidade]: Soluções (z, Z) para o sistema (4.26) satisfazem

$$\begin{aligned}
 |z(0)|_{L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega; L^2(G))} &\leq C \left(|\chi_{G_0} z|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G_0))} + |a_3 z + Z|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))} \right), \\
 \forall z_T &\in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G)).
 \end{aligned} \quad (4.44)$$

2) [Continuação única]: Se para algum $z_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))$, a solução (z, Z) para o sistema (4.26) satisfaz $z = 0$ em Q_0 e $a_3 z + Z = 0$ em Q , q.t.p., então $z_T = 0$ em G ,

q.t.p..

Demonstração. Provamos apenas a conclusão 1). Tomando λ e μ , suficientemente grandes, tal que a desigualdade (4.28) do Teorema 4.3.3 é verdadeira para a equação (4.26), deduzimos que

$$\mathbb{E} \int_Q \theta^2 \varphi^3 z^2 dx dt \leq \mathcal{C} \left[\mathbb{E} \int_{Q_0} \theta^2 \varphi^3 z^2 dx dt + \mathbb{E} \int_Q \theta^2 \varphi^2 (a_3 z + Z)^2 dx dt \right]. \quad (4.45)$$

Pela definição das funções peso (ver 4.20), existe $\mathcal{C} > 0$ tal que em $(T/4, 3T/4) \subset (0, T)$ vale

$$\theta^2 \varphi^3 \geq \mathcal{C} > 0.$$

Dai,

$$\mathcal{C} \mathbb{E} \int_{T/4}^{3T/4} \int_G z^2 dx dt \leq \mathbb{E} \int_{T/4}^{3T/4} \int_G \theta^2 \varphi^3 z^2 dx dt \leq \mathbb{E} \int_Q \theta^2 \varphi^3 z^2 dx dt.$$

Com isso, segue de (4.45) que

$$\begin{aligned} & \mathcal{C} \mathbb{E} \int_{T/4}^{3T/4} \int_G z^2 dx dt \\ & \leq \mathcal{C} \frac{\sup_{(t,x) \in Q} (\theta^2(t,x) \varphi^3(t,x) + \theta^2(t,x) \varphi^2(t,x))}{\inf_{x \in G} (\theta^2(T/2, x) \varphi^3(T/2, x))} [\mathbb{E} \int_{Q_0} z^2 dx dt + \mathbb{E} \int_Q (a_3 z + Z)^2 dx dt] \\ & \leq \mathcal{C} \left[\mathbb{E} \int_{Q_0} z^2 dx dt + \mathbb{E} \int_Q (a_3 z + Z)^2 dx dt \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

De (4.27), tem-se

$$\mathbb{E} \int_G z^2(0) dx \leq \mathcal{C} \mathbb{E} \int_G z^2(t) dx, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.47)$$

Integrando em $(T/4, 3T/4)$, segue que

$$\mathbb{E} \int_{T/4}^{3T/4} \int_G z^2(0) dx dt \leq \mathcal{C} \mathbb{E} \int_{T/4}^{3T/4} \int_G z^2(t) dx dt,$$

i.e.,

$$\frac{T}{2} \mathbb{E} \int_G z^2(0) dx \leq \mathcal{C} \mathbb{E} \int_{T/4}^{3T/4} \int_G z^2(t) dx dt.$$

Logo, de (4.46), concluimos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_G z^2(0) dx &\leq C \mathbb{E} \int_{T/4}^{3T/4} \int_G z^2(t) dx dt \\ &\leq C \left[\mathbb{E} \int_{Q_0} z^2 dx dt + \mathbb{E} \int_Q (a_3 z + Z)^2 dx dt \right]. \end{aligned}$$

Portanto, a solução (z, Z) da equação (4.26) satisfaz (4.44). $\square$

4.4 Controlabilidade nula e aproximada de equações parabólicas estocásticas

Agora, provaremos o Teorema 4.1.3. Similarmente à prova do Teorema 3.1.5, usaremos um argumento clássico de dualidade.

Demonstração do Teorema 4.1.3.

- 1) Primeiro, provaremos que (4.5) é controlável a zero em qualquer instante $T > 0$. Ou seja, para qualquer $y_0 \in L^2(G)$ existe um par de controles $(u, v) \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G_0)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$ tal que $y(T) = 0$ em G , q.t.p..

Introduzimos um subespaço linear de $L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G_0)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$ do seguinte modo

$\mathcal{Y} := \{(\chi_{G_0} z, a_3 z + Z) \mid (z, Z) \text{ resolve a equação (4.26) com algum } z_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))\}$ e definimos um funcional linear F em $\mathcal{Y}$ tal que,

$$F(\chi_{G_0} z, a_3 z + Z) = - \int_G y_0 z(0) dx.$$

Pela conclusão 1) do Corolário 4.3.4, vemos que F é um funcional linear limitado em $\mathcal{Y}$. De fato,

$$\begin{aligned} |F(\chi_{G_0} z, a_3 z + Z)| &= \left| - \int_G y_0 z(0) dx \right| \\ &\leq |\langle y_0, z(0) \rangle_{L^2(G)}| \\ &\leq \|y_0\|_{L^2(G)} \|z(0)\|_{L^2(G)} \\ &\leq C \left(\|\chi_{G_0} z\|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G_0))} + \|a_3 z + Z\|_{L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))} \right) \\ &\leq C \|(\chi_{G_0} z, a_3 z + Z)\|_{\mathcal{Y}}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Hahn Banach, F pode ser estendido a um funcional linear limitado no espaço $L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G_0)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$. Por simplicidade, ainda usaremos F

para denotar esta extensão. Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe $(u, v) \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G_0)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))$ tal que

$$\begin{aligned} - \int_G y_0 z(0) dx &= F(\chi_{G_0} z, a_3 z + Z) \\ &= \mathbb{E} \int_0^T \int_{G_0} zu \, dx dt + \mathbb{E} \int_0^T \int_G v(a_3 z + Z) dx dt. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Afirmamos que u e v obtidos acima são os controles desejados. De fato, para qualquer $z_T \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))$, pela fórmula de Itô e integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \int_G y(T) z_T dx - \int_G y_0 z(0) dx \\ &= \mathbb{E} \int_Q y[-\Delta z - (a_1 z + a_2 Z)] dx dt + \mathbb{E} \int_Q z(\Delta y + a_1 y + \chi_{G_0} u + a_3 v) dx dt \\ &+ \mathbb{E} \int_Q (a_2 y + v) Z dx dt \\ &= \mathbb{E} \int_0^T \int_{G_0} zu \, dx dt + \mathbb{E} \int_0^T \int_G v(a_3 z + Z) dx dt, \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde (z, Z) é a solução para (4.26) com $z_T = z(T)$ e y é o estado de (4.5).

De (4.48) e (4.49), vemos que

$$\mathbb{E} \int_G y(T) z_T dx = 0. \quad (4.50)$$

Como z_T é um elemento arbitrário em $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))$, da igualdade (4.50), concluimos que $y(T) = 0$ em $L^2(G)$, q.t.p.. Isso prova a controlabilidade nula de (4.5).

2) Agora, provaremos que (4.5) é aproximadamente controlável no tempo T . Para isso, basta mostrar que o conjunto

$$\begin{aligned} A_T &:= \{y(T) \mid y \text{ é o estado de (4.5) com controles} \\ &\quad (u, v) \in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G_0)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G))\} \end{aligned}$$

é denso em $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))$. Vamos provar isso por contradição. Suponha que exista $\eta \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; L^2(G))$ diferente de zero tal que

$$\mathbb{E} \int_G y(T) \eta dx = 0, \quad \forall y(T) \in A_T. \quad (4.51)$$

Da fórmula de Itô e usando integração por partes, temos que

$$\mathbb{E} \int_G y(T) \eta dx - \int_G y_0 z(0) dx = \mathbb{E} \int_0^T \int_{G_0} z u dx dt + \mathbb{E} \int_0^T \int_G v (a_3 z + Z) dx dt, \quad (4.52)$$

onde (z, Z) é a solução para (4.26) com $z_T = \eta$ e y é o estado de (4.5).

De (4.51) e (4.52), obtemos

$$\begin{aligned} - \int_G y_0 z(0) dx &= \mathbb{E} \int_0^T \int_{G_0} z u dx dt + \mathbb{E} \int_0^T \int_G (a_3 z + Z) v dx dt, \\ \forall (u, v) &\in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G_0)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G)). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Note que o lado esquerdo de (4.53) é independente de (u, v) . Daí, escolhendo $(u, v) = (0, 0)$, encontramos que $\int_G y_0 z(0) dx = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E} \int_0^T \int_{G_0} z u dx dt + \mathbb{E} \int_0^T \int_G (a_3 z + Z) v dx dt, \\ \forall (u, v) &\in L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G_0)) \times L^2_{\mathbb{F}}(0, T; L^2(G)). \end{aligned}$$

Portanto, temos que $z = 0$ em $G_0 \times (0, T)$, q.t.p. e $a_3 z + Z = 0$ em $G \times (0, T)$, q.t.p.. Pela conclusão 2) do Corolário 4.3.4, segue que $\eta = 0$, o que é uma contradição. $\square$

Apêndice A

Resultados Auxiliares

A.1 Espaços de Banach, Espaços de Hilbert e Operadores Lineares

Todos os espaços lineares mencionados neste trabalho estão sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Claramente, qualquer espaço linear sobre $\mathbb{C}$ é também um espaço linear sobre $\mathbb{R}$. Para qualquer $c \in \mathbb{C}$, denotamos por $\bar{c}$ seu conjugado complexo.

A.1.1 Espaços de Banach e Espaços de Hilbert

Definição A.1.1. Seja $\mathcal{X}$ um espaço linear. Uma aplicação $|\cdot|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada norma em $\mathcal{X}$ se satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $|x|_{\mathcal{X}} \geq 0, \forall x \in \mathcal{X}$ e $|x|_{\mathcal{X}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- ii) $|\alpha x|_{\mathcal{X}} = |\alpha| |x|_{\mathcal{X}}, \forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ e } \forall x \in \mathcal{X}$;
- iii) $|x + y|_{\mathcal{X}} \leq |x|_{\mathcal{X}} + |y|_{\mathcal{X}}, \forall x, y \in \mathcal{X}$.

Um espaço linear $\mathcal{X}$ munido com uma norma $|\cdot|_{\mathcal{X}}$ é chamado de espaço linear normado e será denotado por $(\mathcal{X}, |\cdot|_{\mathcal{X}})$.

Definição A.1.2. Seja $\mathcal{X}$ um espaço linear normado.

- 1) Dizemos que $(x_k) \subset \mathcal{X}$ é uma sequência de Cauchy (em $(\mathcal{X}, |\cdot|_{\mathcal{X}})$) se para qualquer $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k - x_j|_{\mathcal{X}} < \epsilon$ para todo $k, j \geq k_0$.
- 2) Dizemos que $(x_k) \subset \mathcal{X}$ converge para algum x_0 em $\mathcal{X}$ se $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ em $\mathcal{X}$, isto é, $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x_0|_{\mathcal{X}} = 0$.

Definição A.1.3. Seja $\mathcal{X}$ um espaço linear normado.

- 1) Um subconjunto $G \subset \mathcal{X}$ é dito limitado se existir uma constante $\mathcal{C}$ tal que $|x|_{\mathcal{X}} \leq \mathcal{C}$ para qualquer $x \in G$.
- 2) Um subconjunto G é denso em $\mathcal{X}$ se, para qualquer $x \in \mathcal{X}$, podemos encontrar uma sequência $(x_k) \subset G$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ em $\mathcal{X}$.

Definição A.1.4. (Espaço de Banach) Um espaço linear normado $(\mathcal{X}, |\cdot|_{\mathcal{X}})$ é chamado espaço de Banach se é completo, isto é, para qualquer sequência de Cauchy $(x_k) \subset \mathcal{X}$ existe $x_0 \in \mathcal{X}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ em $\mathcal{X}$.

Definição A.1.5. Um espaço de Banach $\mathcal{X}$ é dito separável se possui um subconjunto denso e enumerável.

Definição A.1.6. Seja $\mathcal{X}$ um espaço linear. Uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada produto interno em $\mathcal{X}$ se satisfaz:

- i) $\langle x, x \rangle_{\mathcal{X}} \geq 0$, $\forall x \in \mathcal{X}$ e $\langle x, x \rangle_{\mathcal{X}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- ii) $\langle x, y \rangle_{\mathcal{X}} = \overline{\langle y, x \rangle_{\mathcal{X}}}$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$;
- iii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_{\mathcal{X}} = \alpha \langle x, z \rangle_{\mathcal{X}} + \beta \langle y, z \rangle_{\mathcal{X}}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, e $x, y, z \in \mathcal{X}$.

Um espaço linear $\mathcal{X}$ com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$ é chamado de espaço com produto interno e é denotado por $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}})$.

Lema A.1.7. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja $\mathcal{X}$ um espaço com produto interno. Definindo $|x|_{\mathcal{X}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathcal{X}}}$, temos

$$|\langle x, y \rangle_{\mathcal{X}}| \leq |x|_{\mathcal{X}} |y|_{\mathcal{X}}, \quad \forall x, y \in \mathcal{X}.$$

Demonstração. Ver [3, p.78]. □

Proposição A.1.8. Seja $\mathcal{X}$ um espaço com produto interno. A aplicação $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathcal{X}}}$ define uma norma em $\mathcal{X}$.

Demonstração. Da definição de produto interno, vemos que

- i) $|x|_{\mathcal{X}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathcal{X}}} \geq 0, \forall x \in \mathcal{X}$.
e
 $|x|_{\mathcal{X}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathcal{X}}} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle_{\mathcal{X}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

- ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ e qualquer $x \in \mathcal{X}$:

$$|\alpha x|_{\mathcal{X}} = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle_{\mathcal{X}}} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle_{\mathcal{X}}} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle x, x \rangle_{\mathcal{X}}} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathcal{X}}} = |\alpha| |x|_{\mathcal{X}}.$$

iii) Para quaisquer $x, y \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned}
 |x + y|_{\mathcal{X}}^2 &= \langle x + y, x + y \rangle_{\mathcal{X}} \\
 &= \langle x, x \rangle_{\mathcal{X}} + \langle x, y \rangle_{\mathcal{X}} + \langle y, x \rangle_{\mathcal{X}} + \langle y, y \rangle_{\mathcal{X}} \\
 &= |x|_{\mathcal{X}}^2 + \langle x, y \rangle_{\mathcal{X}} + \overline{\langle x, y \rangle_{\mathcal{X}}} + |y|_{\mathcal{X}}^2 \\
 &= |x|_{\mathcal{X}}^2 + 2\operatorname{Re}\{\langle x, y \rangle_{\mathcal{X}}\} + |y|_{\mathcal{X}}^2 \\
 &\leq |x|_{\mathcal{X}}^2 + 2|\langle x, y \rangle_{\mathcal{X}}| + |y|_{\mathcal{X}}^2 \\
 &\leq |x|_{\mathcal{X}}^2 + 2|x|_{\mathcal{X}}|y|_{\mathcal{X}} + |y|_{\mathcal{X}}^2 \quad (\text{Desigualdade de Cauchy-Schwarz}) \\
 &= (|x|_{\mathcal{X}} + |y|_{\mathcal{X}})^2.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$|x + y|_{\mathcal{X}} \leq |x|_{\mathcal{X}} + |y|_{\mathcal{X}}.$$

□

Da Proposição A.1.8, vemos que qualquer espaço com produto interno pode ser visto como um espaço linear normado. A norma dada por $|x|_{\mathcal{X}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathcal{X}}}$ é dita norma induzida por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$.

Definição A.1.9. Um espaço com produto interno $\mathcal{X}$ é chamado de espaço de Hilbert se for completo sob a norma induzida por seu produto interno.

A.1.2 Operadores Lineares Limitados

A seguir, sejam $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{Y}_1$ espaços lineares normados e $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços de Banach.

Definição A.1.1. Uma aplicação $A : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{Y}_1$ é chamada de operador linear limitado se for linear, isto é,

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \quad \forall x, y \in \mathcal{X}_1 \quad \text{e} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

e A aplica subconjuntos limitados de $\mathcal{X}_1$ em subconjuntos limitados de $\mathcal{Y}_1$.

Denotaremos por $\mathcal{L}(\mathcal{X}_1; \mathcal{Y}_1)$ o conjunto de todos os operadores lineares limitados de $\mathcal{X}_1$ em $\mathcal{Y}_1$.

Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1; \mathcal{Y}_1)$, definimos $\alpha A + \beta B$ do seguinte modo

$$(\alpha A + \beta B)(x) = \alpha Ax + \beta Bx, \quad \forall x \in \mathcal{X}_1.$$

Deste modo, temos que $\mathcal{L}(\mathcal{X}_1; \mathcal{Y}_1)$ é também um espaço linear. Podemos definir uma norma em $\mathcal{L}(\mathcal{X}_1; \mathcal{Y}_1)$ da seguinte forma:

$$|A|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}_1; \mathcal{Y}_1)} := \sup_{x \in \mathcal{X}_1 \setminus \{0\}} \frac{|Ax|_{\mathcal{Y}_1}}{|x|_{\mathcal{X}_1}}. \quad (\text{A.1})$$

É fácil ver que $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ é um espaço de Banach com tal norma.

O seguinte teorema é importante na demonstração do Teorema da Limitação Uniforme.

Teorema A.1.10. (Teorema da Categoria de Baire) Seja $\mathcal{X}$ um espaço métrico completo e $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma coleção enumerável de conjuntos fechados de $\mathcal{X}$. Se $\text{int} F_n = \emptyset$ para todo n , então $\text{int}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n) = \emptyset$.

Equivalentemente, se $\mathcal{X}$ é um espaço métrico completo não-vazio e $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma coleção enumerável de conjuntos fechados de $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int} F_{n_0} \neq \emptyset$.

Demonstração. Ver [4, p.31]. □

Teorema A.1.11. (Limitação Uniforme) Seja Λ um conjunto de índices. Se $A_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ para cada $\lambda \in \Lambda$ e

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |A_\lambda x|_{\mathcal{Y}} < \infty, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

então

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |A_\lambda|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})} < \infty.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere

$$F_n = \{x \in \mathcal{X}; \quad |A_\lambda x|_{\mathcal{Y}} \leq n \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\}.$$

Seja a função contínua $G_\lambda = \|\cdot\| \circ A_\lambda$. Temos que, para cada λ , o conjunto $G_\lambda^{-1}([0, n])$ é fechado, logo $F_n = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda^{-1}([0, n])$ é fechado.

Por hipótese, dado $x \in \mathcal{X}$, existe $C_x > 0$ tal que $|A_\lambda x|_{\mathcal{Y}} \leq C_x, \forall \lambda \in \Lambda$. Considere $n_1 > C_x$, $n_1 \in \mathbb{N}$, daí $|A_\lambda x|_{\mathcal{Y}} \leq n_1, \forall \lambda \in \Lambda$. Com isso, vemos que $x \in F_{n_1}$. Desse modo, segue que $\mathcal{X} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Da definição de F_n , vemos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \subset \mathcal{X}$. Logo, $\mathcal{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Pelo Teorema da Categoria de Baire, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int} F_{n_0} \neq \emptyset$.

Seja $B_r(x_0) \subset F_{n_0}$, então

$$|A_\lambda(x_0 + rz)|_{\mathcal{Y}} \leq n_0, \quad \forall z \in B_1(0), \lambda \in \Lambda.$$

Da desigualdade triangular, temos

$$r|A_\lambda z|_{\mathcal{Y}} - |A_\lambda x_0|_{\mathcal{Y}} \leq |A_\lambda x_0 + rA_\lambda z|_{\mathcal{Y}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |A_\lambda z|_{\mathcal{Y}} &\leq \frac{|A_\lambda x_0 + rA_\lambda z|_{\mathcal{Y}} + |A_\lambda x_0|_{\mathcal{Y}}}{r} \\ &\leq \frac{n_0 + C_{x_0}}{r}, \quad \forall \lambda \in \Lambda. \end{aligned}$$

Portanto, como $|A_\lambda|_{\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})} = \sup_{|z|_{\mathcal{X}}=1} |A_\lambda(z)|_{\mathcal{Y}}$, segue que

$$|A_\lambda|_{\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})} \leq \frac{n_0 + C_{x_0}}{r}, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

□

Também, nos será importante o seguinte teorema, que é uma consequência do Teorema da Aplicação Aberta (mais detalhes, ver [4]).

Teorema A.1.12. (Aplicação Inversa) Se $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ é bijetivo então $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})$.

Demonstração. Como A é bijetivo então $A^{-1} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ existe e está bem definido. Vejamos que A^{-1} é linear. De fato, sendo A linear temos que $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$, então

$$A^{-1}(\alpha Ax + \beta Ay) = A^{-1}(A(\alpha x + \beta y)) = \alpha x + \beta y = \alpha A^{-1}(Ax) + \beta A^{-1}(Ay).$$

Também, A^{-1} é contínua. Com efeito, para todo aberto $U \subset \mathcal{X}$, temos que $(A^{-1})^{-1}(U) = A(U)$ é um aberto de $\mathcal{Y}$. Logo, A^{-1} é contínua. Portanto, $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})$. □

Quando $f \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1; \mathbb{C})$, dizemos que f é um funcional linear limitado em $\mathcal{X}_1$. Denotaremos por $\mathcal{X}_1^* = \mathcal{L}(\mathcal{X}_1; \mathbb{C})$ o espaço dual de $\mathcal{X}_1$. Se $f \in \mathcal{X}_1^*$ e $x \in \mathcal{X}_1$, usaremos a seguinte notação

$$f(x) = \langle f, x \rangle_{\mathcal{X}_1^*, \mathcal{X}_1}.$$

O símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}_1^*, \mathcal{X}_1}$ é referido como o par de dualidade entre $\mathcal{X}_1^*$ e $\mathcal{X}_1$. Segue de (A.1) que

$$|f|_{\mathcal{X}_1^*} = \sup_{x \in \mathcal{X}_1, |x|_{\mathcal{X}_1} < 1} |f(x)|, \quad \forall f \in \mathcal{X}_1^*.$$

É possível mostrar que $\mathcal{X}_1^*$ e $\mathcal{X}^*$ são espaços de Banach.

Dizemos que o espaço $\mathcal{X}$ é reflexivo se $(\mathcal{X}^*)^* = \mathcal{X}^{**} = \mathcal{X}$. Ou seja, o bidual de $\mathcal{X}$ é igual a $\mathcal{X}$.

Lema A.1.13. (Teorema de Hahn-Banach na forma complexa) Sejam $\mathcal{X}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, um subespaço $F \subset \mathcal{X}$ e $p : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty)$ um funcional sublinear, i.e.,

$$\begin{aligned} p(\alpha x) &= |\alpha|p(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, x \in \mathcal{X}, \text{ e} \\ p(x+y) &\leq p(x) + p(y), \text{ para quaisquer } x, y \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Suponha que $f : F \rightarrow \mathbb{C}$ seja um funcional linear tal que $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in F$. Então, existe um funcional linear $\tilde{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ que é uma extensão de f , isto é, $\tilde{f}|_F = f$, e que satisfaz

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Demonstração. Ver [3, p.45]. □

Teorema A.1.14. (Hahn-Banach) Seja $\mathcal{X}_0$ um subespaço linear de $\mathcal{X}_1$ e $f_0 \in \mathcal{X}_0^*$. Então, existe $f \in \mathcal{X}_1^*$ com $|f|_{\mathcal{X}_1^*} = |f_0|_{\mathcal{X}_0^*}$, satisfazendo

$$f(x) = f_0(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}_0$$

Demonstração. Sendo $f_0 : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear limitado, então

$$|f_0(x)| \leq |f_0|_{\mathcal{X}_0^*} |x|_{\mathcal{X}_0}, \quad \forall x \in \mathcal{X}_0.$$

Definamos $p(x) = |f_0|_{\mathcal{X}_0^*} |x|_{\mathcal{X}_0}$ que, claramente, é um funcional sublinear. Pelo Lema A.1.13, existe $f \in \mathcal{X}_1^*$ tal que $f|_{\mathcal{X}_0} = f_0$, ou seja, $f(x) = f_0(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}_0$. E ainda, f satisfaz

$$|f(x)| \leq |f_0|_{\mathcal{X}_0^*} |x|_{\mathcal{X}_0}, \quad \forall x \in \mathcal{X}_1.$$

Com isso, segue que

$$\sup_{x \in \mathcal{X}_1, |x|_{\mathcal{X}_1} < 1} |f(x)| \leq |f_0|_{\mathcal{X}_0^*} \Rightarrow |f|_{\mathcal{X}_1^*} \leq |f_0|_{\mathcal{X}_0^*}.$$

Por outro lado, como f é uma extensão de f_0 , temos a seguinte estimativa

$$\sup_{x \in \mathcal{X}_0, |x|_{\mathcal{X}_0} < 1} |f_0(x)| \leq |f|_{\mathcal{X}_1^*} \Rightarrow |f_0|_{\mathcal{X}_0^*} \leq |f|_{\mathcal{X}_1^*}.$$

Portanto, $|f|_{\mathcal{X}_1^*} = |f_0|_{\mathcal{X}_0^*}$.

□

Como consequência, temos o seguinte resultado:

Proposição A.1.15. Para qualquer $x_0 \in \mathcal{X}$, existe $f \in \mathcal{X}^*$ com $|f|_{\mathcal{X}^*} = 1$ tal que $f(x_0) = |x_0|_{\mathcal{X}}$.

Demonstração. Basta aplicar o Teorema de Hahn-Banach ao subespaço $F = \langle x_0 \rangle$ e ao funcional linear limitado $f_0 : F \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f_0(tx_0) = t|x_0|_F$. □

Teorema A.1.16. Sejam $\mathcal{X}$ um espaço de Hilbert e $L \subset \mathcal{X}$ um subespaço vetorial fechado próprio. Então $\mathcal{X} = L \oplus L^\perp$, isto é, cada $x \in \mathcal{X}$ admite uma única representação na forma

$$x = p + q, \text{ com } p \in L \text{ e } q \in L^\perp.$$

Demonstração. Ver [3, p. 83]. □

Teorema A.1.17. (Representação de Riesz) Se $\mathcal{X}$ é um espaço de Hilbert e $F \in \mathcal{X}^*$, então existe $y \in \mathcal{X}$ tal que

$$F(x) = \langle x, y \rangle_{\mathcal{X}}, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Demonstração. Seja $M = \text{Ker} F = F^{-1}(\{0\})$. Temos que M é um subespaço fechado de $\mathcal{X}$. Se $M = \mathcal{X}$, então $F \equiv 0$ e tomamos $y = 0$. Caso contrário, temos que M é um subespaço fechado próprio de $\mathcal{X}$. Do Teorema A.1.16, sabemos que $M^\perp \neq \{0\}$. Então, podemos escolher $z \in M^\perp$ tal que $|z|_{\mathcal{X}} = 1$. Dado $x \in \mathcal{X}$,

$$x = \frac{F(x)}{F(z)}z + \left(x - \frac{F(x)}{F(z)}z\right), \quad (\text{A.2})$$

onde

$$x - \frac{F(x)}{F(z)}z \in M \text{ e } \frac{F(x)}{F(z)}z \in M^\perp.$$

Afirmamos que $y = \overline{F(z)}z$. De fato, fazendo o produto interno de (A.2) com o vetor $y = \overline{F(z)}z$, segue que

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_{\mathcal{X}} &= \left\langle \frac{F(x)}{F(z)}z + \left(x - \frac{F(x)}{F(z)}z\right), \overline{F(z)}z \right\rangle_{\mathcal{X}} \\ &= \left\langle \frac{F(x)}{F(z)}z, \overline{F(z)}z \right\rangle_{\mathcal{X}} + F(z) \left\langle x - \frac{F(x)}{F(z)}z, z \right\rangle_{\mathcal{X}} \\ &= F(x) \langle z, z \rangle_{\mathcal{X}} \\ &= F(x), \end{aligned}$$

pois $\langle x - \frac{F(x)}{F(z)}z, z \rangle_{\mathcal{X}} = 0$, já que $x - \frac{F(x)}{F(z)}z \in M$ e $z \in M^\perp$. $\square$

Para qualquer $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, definimos uma aplicação $A^* : \mathcal{Y}^* \rightarrow \mathcal{X}^*$ do seguinte modo:

$$\langle A^*y', x \rangle_{\mathcal{X}^*, \mathcal{X}} = \langle y', Ax \rangle_{\mathcal{Y}^*, \mathcal{Y}}, \quad \forall y' \in \mathcal{Y}^*, x \in \mathcal{X}.$$

Chamamos A^* de operador adjunto de A . Claramente, A^* é linear e limitado. É fácil verificar que para qualquer $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$.

A.1.3 Operador Linear Ilimitado

Seja H um espaço de Hilbert.

Definição A.1.2. Para uma aplicação linear $A : D(A) \subset H \rightarrow H$, onde $D(A)$ é um subespaço linear em H , chamamos $D(A)$ o domínio de A . O gráfico de A é o subconjunto de $H \times H$ consistindo em todos os elementos da forma (x, Ax) com $x \in D(A)$. O operador A é dito fechado (resp. densamente definido) se seu gráfico for um subespaço fechado de $H \times H$ (resp. se $D(A)$ é denso em H).

Ao contrário dos operadores limitados, o operador linear A na Definição (A.1.2) pode ser ilimitado, ou seja, pode aplicar alguns conjuntos limitados em H para conjuntos ilimitados em H . Um típico operador linear ilimitado, fechado, densamente definido (em $H = L^2(0, 1)$) é o operador diferencial $\frac{d}{dx}$, com o domínio

$$\{y \in L^2(0, 1); y \text{ é absolutamente contínuo em } [0, 1], \frac{dy}{dx} \in L^2(0, 1), y(0) = 0\}.$$

Se o operador A é densamente definido, o domínio $D(A^*)$ do operador adjunto A^* de A é definido como o conjunto de todos $f \in H$ tal que, para algum $g_f \in H$,

$$\langle Ax, f \rangle_H = \langle x, g_f \rangle_H, \quad \forall x \in D(A).$$

Neste caso, definimos $A^*f := g_f$.

Denote por I o operador identidade em H . O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A é definido por

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A : D(A) \rightarrow H \text{ é bijetivo e } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)\}.$$

O conjunto resolvente $\rho(A)$ é aberto em $\mathbb{C}$.

A.2 Medida e Integração

Seja Ω um conjunto não vazio. Para qualquer subconjunto $E \subset \Omega$, denotamos por $\chi_E(\cdot)$ a função característica de E , isto é

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E, \\ 0, & \text{se } x \in \Omega \setminus E. \end{cases}$$

Definição A.2.1. Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos não vazios de Ω . Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra em Ω se

- 1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- 2) $E^c \in \mathcal{F}$ para qualquer $E \in \mathcal{F}$;
- 3) $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$ sempre que cada $E_i \in \mathcal{F}$.

Se $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra em Ω , então $(\Omega, \mathcal{F})$ é chamado de espaço mensurável. Qualquer elemento $E \in \mathcal{F}$ é chamado de conjunto mensurável.

Definição A.2.2. Uma função $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ é uma medida em $(\Omega, \mathcal{F})$ se:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- μ é contavelmente aditiva, i.e.,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i), \quad \text{se } E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j.$$

A tríplce $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é chamada de espaço de medida.

Definição A.2.3. Uma medida μ é chamada finita (resp. σ -finita) se $\mu(\Omega) < \infty$ (resp. se existe uma sequência $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ tal que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ e $\mu(E_i) < \infty$ para cada $i \in \mathbb{N}$).

Se $\mu(E) = 0$ dizemos que o conjunto E tem medida nula.

Definição A.2.4. O espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é dito completo (e μ é dita completa em $\mathcal{F}$) se

$$\mathcal{N} = \{\tilde{E} \subset \Omega; \text{ existe } E \in \mathcal{F} \text{ com } \mu(E) = 0 \text{ e } \tilde{E} \subset E\} \subset \mathcal{F}.$$

Se o espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ não é completo, então definimos a classe

$$\overline{\mathcal{F}} = \{E \cup N; \quad E \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\}.$$

A família $\overline{\mathcal{F}}$ é uma σ -álgebra que contém $\mathcal{F}$ como uma sub-classe própria, e a função de conjunto $\overline{\mu}$ dada por $\overline{\mu}(E \cup N) = \mu(E)$ é uma medida completa em $\overline{\mathcal{F}}$. A medida $\overline{\mu}$ é chamada de complemento de μ .

Se uma determinada proposição sobre os pontos de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é verdadeira para cada ponto $x \in \Omega$, com exceção no máximo de um conjunto de pontos que formam um conjunto de medida nula, dizemos que a proposição é verdadeira $\mu - q.t.p$ (quase toda parte com relação a medida μ). Uma função $g : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada essencialmente limitada se for limitada $\mu - q.t.p$, isto é, se existe uma constante positiva c tal que o conjunto $\{x \in \Omega; |g(x)| > c\}$ é um conjunto de medida nula. O ínfimo dos valores de c para que esta afirmação seja verdadeira é chamado de supremo essencial de $|g|$, abreviado para $ess \sup_{x \in \Omega} |g(x)|$.

Sejam $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ espaços mensuráveis. Denotemos por $\mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_n$ a σ -álgebra (no produto cartesiano $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$) gerada pelos subconjuntos da forma $E_1 \times \dots \times E_n$, onde $E_i \in \mathcal{F}_i$, $1 \leq i \leq n$. Seja μ_i uma medida em $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$. Chamamos μ uma medida produto em $(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_n)$ induzida por $\mu_1, \dots, \mu_n$ se

$$\mu(E_1 \times \dots \times E_n) = \prod_{i=1}^n \mu_i(E_i), \quad \forall E_i \in \mathcal{F}_i.$$

Teorema A.2.1. Sejam $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mu_n)$ espaços de medida σ -finita. Então existe uma única medida produto μ (denotada por $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$) em $(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_n)$ induzida por $\{\mu_i\}_{i=1}^n$.

Demonstração. Vamos considerar o caso $n = 2$. Seja $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ espaços de medida σ -finita. A aplicação $\mu_1 \times \mu_2 : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \rightarrow [0, \infty]$ dada por

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2), \quad \forall E_i \in \mathcal{F}_i$$

é uma medida em $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Evidentemente, temos que $\mu_1 \times \mu_2(\emptyset) = 0$. Seja $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ uma sequência de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ tal que $B = \bigcup_{i=1}^\infty B_i$ está em $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Para cada $x \in \Omega_1$, denotamos por B_x a faixa vertical de B definida por

$$B_x = \{y \in \Omega_2; (x, y) \in B\}.$$

Como μ_2 é σ -finita, a aplicação

$$x \mapsto \mu_2(B_x) \in [0, \infty], \quad x \in \Omega_1$$

é mensurável e

$$\int_{\Omega_1} \mu_2(B_x) d\mu_1(x) = (\mu_1 \times \mu_2)(B).$$

Para ver isto, basta observar que se $B = E_1 \times E_2$, com $E_i \in \mathcal{F}_i$, então

$$\mu_2(B_x) = \mu_2(E_2) \chi_{E_1}(x),$$

para todo $x \in \Omega_1$ e

$$\int_{\Omega_1} \mu_2(B_x) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_1} \mu_2(E_2) \chi_{E_1}(x) d\mu_1(x) = \mu_1(E_1) \mu_2(E_2) = (\mu_1 \times \mu_2)(B).$$

De modo análogo, para todo $i = 1, 2$ a função $x \mapsto \mu_2(B_x^i)$ é mensurável e sua integral é igual a $(\mu_1 \times \mu_2)(B^i)$. Como para todo $x \in \Omega_1$ a faixa vertical B_x é igual à união disjunta das faixas verticais B_x^i , temos que

$$\mu_2(B_x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2(B_x^i).$$

Integrando de ambos os lados,

$$(\mu_1 \times \mu_2)(B) = \int_{\Omega_1} \mu_2(B_x) d\mu_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega_1} \mu_2(B_x^i) d\mu_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\mu_1 \times \mu_2)(B^i).$$

Logo, $(\mu_1 \times \mu_2)$ é uma medida em $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Como μ_1 e μ_2 são medidas σ -finitas então a medida produto $(\mu_1 \times \mu_2)$ é definida como sendo a única medida em $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

O caso geral segue por indução.

□

Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach.

Definição A.2.5. A menor σ -álgebra contendo todos os conjuntos abertos de $\mathcal{X}$ é chamada de σ -álgebra de Borel de $\mathcal{X}$ e denotada por $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Qualquer conjunto $E \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ é chamado conjunto Boreliano em $\mathcal{X}$.

Seja $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ uma aplicação entre espaços mensuráveis.

Definição A.2.6. A aplicação f é dita ser $\mathcal{F} - \mathcal{F}'$ -mensurável ou simplesmente $\mathcal{F}$ -mensurável ou até mensurável (no caso que não ocorra confusão) se $f^{-1}(\mathcal{F}') \subset \mathcal{F}$. Em particular, se $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, então f é dita ser uma função $\mathcal{F}$ -mensurável (com valores em $\mathcal{X}$) ou simplesmente mensurável.

Seja β uma propriedade relativa a uma aplicação f , em alguns elementos de Ω .

Denotamos por $\{\beta\}$ o conjunto $\{x \in \Omega; \beta \text{ vale para } f(x)\}$. Por exemplo, quando $\Omega' = \mathbb{R}$, denotamos $\{x \in \Omega; f(x) \geq 0\}$ por $\{f \geq 0\}$.

Para uma aplicação mensurável $f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ é óbvio que $f^{-1}(\mathcal{F}')$ é uma sub- σ -álgebra de $\mathcal{F}$, chamada de σ -álgebra gerada por f , e denotada por $\sigma(f)$.

Para um determinado conjunto de índices Λ e uma família de aplicações mensuráveis $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (definida em $(\Omega, \mathcal{F})$, com intervalos possivelmente diferentes), denotamos por $\sigma(f_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ a σ -álgebra gerada por $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(f_\lambda)$.

Definição A.2.7. Seja $f_k : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ uma sequência de funções com valores em $\mathcal{X}$ definidas em Ω . A sequência $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ é dita convergente para f_0 (denotada por $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f_0$) em $\mathcal{X}$, $\mu - q.t.p.$, se $\{\lim_{k \rightarrow \infty} f_k \neq f_0\} \in \mathcal{F}$ e $\mu(\{\lim_{k \rightarrow \infty} f_k \neq f_0\}) = 0$.

Em dimensão infinita, a noção de $\mathcal{F}$ -mensurabilidade da Definição A.2.6 nem sempre é suficiente para argumentos de aproximação. Portanto, precisamos de outra noção de mensurabilidade. Concentraremos nas funções de valores em espaços de Banach, embora alguns dos resultados abaixo possam ser generalizados para funções com valores em espaços métricos.

Definição A.2.8. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ uma função de valores em $\mathcal{X}$.

1) Chamamos f uma função $\mathcal{F}$ -simples se

$$f(\cdot) = \sum_{i=1}^k \chi_{E_i}(\cdot) h_i, \quad (\text{A.3})$$

para algum $k \in \mathbb{N}$, $h_i \in \mathcal{X}$, e conjuntos mutualmente disjuntos $E_1, \dots, E_k \in \mathcal{F}$ satisfazendo $\bigcup_{i=1}^k E_i = \Omega$;

2) A função f é dita fortemente $\mathcal{F}$ -mensurável com relação a μ (ou simplesmente fortemente mensurável) se existir uma sequência de funções $\mathcal{F}$ -simples $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ convergindo para f em $\mathcal{X}$, $\mu - q.t.p.$

Neste caso, as vezes também dizemos que $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow \mathcal{X}$ é fortemente mensurável.

A fim de caracterizar a mensurabilidade forte de funções com valores em $\mathcal{X}$, introduziremos algumas terminologias.

Definição A.2.9. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ é dita de valor μ -separável se existir um subespaço fechado separável $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ de modo que $f(x) \in \mathcal{X}_0$ para quase todo $x \in \Omega$.

Teorema A.2.2. (Teorema da mensurabilidade de Pettis, 2^o versão) Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ uma função, onde $\mathcal{X}$ é um espaço de Banach. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- 1) f é fortemente mensurável,
- 2) f é de valor separável e fracamente mensurável.

Demonstração. Ver [16, p. 6]. □

Teorema A.2.3. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida σ -finito. Para uma função $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$, são equivalentes:

- 1) f é fortemente mensurável,
- 2) f é de valor separável e mensurável.

Demonstração.

1) $\Rightarrow$ 2) Seja f fortemente mensurável. Então, existe uma sequência $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ de funções simples convergindo para f , $\mu - q.t.p.$ Se E é o conjunto dos pontos $x \in \Omega$ onde a sequência $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ não converge para $f(x)$, temos que $\mu(E) = 0$ e

$$f(\Omega \setminus E) \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f_k(\Omega)}. \quad (\text{A.4})$$

Como $f_k(\Omega)$ é finito para todo k , então $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k(\Omega)$ é um conjunto enumerável e então $\overline{A}$ é separável. Logo, segue de (A.4) que $f(\Omega \setminus E)$ é fechado e separável. Ou seja, f é de valor separável.

Mostremos que f é mensurável. Para provar que $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ é suficiente mostrar que $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ para todos os conjuntos abertos U . Seja U um conjunto aberto e consideremos uma sequência de funções simples $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ que converge para f . Para $r > 0$ seja $U_r = \{x \in U; d(x, U^c) > r\}$. Assim, $f_k^{-1}(U_r) \in \mathcal{F}$ para todo $k \geq 1$, pela definição de uma função simples. Como

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{m,k \geq 1} \bigcap_{n \geq k} f_n^{-1}(U_{\frac{1}{m}}).$$

Segue que $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$.

2) $\Rightarrow$ 1) Suponhamos que f é $\mathcal{F}$ -mensurável. Deste modo, $x^*(f) = \langle f, x^* \rangle_{\mathcal{X}, \mathcal{X}^*}$ é mensurável para todo $x^* \in \mathcal{X}^*$. Ou seja, f é fracamente mensurável. A implicação segue da segunda versão do Teorema da mensurabilidade de Pettis. □

Note que, pelo Teorema A.2.3, se o espaço de Banach $\mathcal{X}$ é separável e o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é σ -finito, então f é fortemente mensurável se, e somente se, f é mensurável.

Considere $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida σ -finito.

Definição A.2.10. Seja f uma função simples com valores em $\mathcal{X}$. Dizemos que $f(\cdot)$ é Bochner integrável se $\mu(E_i) < \infty$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Neste caso, para qualquer $E \in \mathcal{F}$, a integral de Bochner de f sobre E é definida por

$$\int_E f(s) d\mu = \sum_{i=1}^k \mu(E \cap E_i) h_i.$$

Definição A.2.11. Uma função fortemente mensurável $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ é dita ser Bochner integrável se existir uma sequência de funções simples Bochner integráveis $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ convergindo para f em $\mathcal{X}$, μ -q.t.p., de modo que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_\Omega |f(s) - f_i(s)|_{\mathcal{X}} d\mu = 0.$$

Neste caso, também dizemos que $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow \mathcal{X}$ é Bochner integrável. Para qualquer $E \in \mathcal{F}$, a integral de Bochner de f sobre E é definida por

$$\int_E f(s) d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_\Omega \chi_E(s) f_i(s) d\mu(s) \quad \text{em } \mathcal{X}. \quad (\text{A.5})$$

É fácil verificar que o limite do lado direito de (A.5) existe e seu valor é independente da escolha da sequência $\{f_i\}_{i=1}^\infty$.

Claramente, quando $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ (para algum $n \in \mathbb{N}$), a integral de Bochner acima coincide com a integral de Lebesgue usual para funções com valores em $\mathbb{R}^n$.

O seguinte resultado revela a relação entre a integral de Bochner (para funções com valores vetoriais) e a integral de Lebesgue usual (para funções escalares).

Teorema A.2.4. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ fortemente mensurável. Então, f é Bochner integrável se, e somente se, a função escalar $|f|_{\mathcal{X}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é Lebesgue integrável.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que f é Bochner integrável. Então, existe uma sequência $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ de funções simples Bochner integráveis convergindo para f em $\mathcal{X}$, μ -q.t.p., e

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_\Omega |f(s) - f_i(s)|_{\mathcal{X}} d\mu = 0.$$

Como,

$$|f(s)|_{\mathcal{X}} = |f(s) - f_i(s) + f_i(s)|_{\mathcal{X}} \leq |f(s) - f_i(s)|_{\mathcal{X}} + |f_i(s)|_{\mathcal{X}},$$

basta mostrar que $|f_i(s)|_{\mathcal{X}}$ e $|f(s) - f_i(s)|_{\mathcal{X}}$ são integráveis.

Temos que $|f_i(s)|_{\mathcal{X}}$ é integrável pois, como f_i é uma função simples Bochner integrável para todo i , então $f_i = \sum_{i=1}^{k_i} \chi_{E_i} h_i$ e $\mu(E_i) < \infty$, para todo i . Logo,

$$\int_{\Omega} |f_i(s)|_{\mathcal{X}} d\mu = \sum_{i=1}^{k_i} \mu(E_i) |h_i|_{\mathcal{X}} < \infty.$$

Além disso, $|f(s) - f_i(s)|_{\mathcal{X}}$ também é integrável pois, como $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f(s) - f_i(s)|_{\mathcal{X}} d\mu = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ vale,

$$\int_{\Omega} |f(s) - f_i(s)|_{\mathcal{X}} d\mu < \infty.$$

Portanto, $|f|_{\mathcal{X}}$ é integrável.

($\Leftarrow$) Seja $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de funções simples convergindo para f em $\mathcal{X}$, μ -q.t.p. Considere

$$g_i(s) = \begin{cases} f_i(s), & \text{se } |f_i(s)|_{\mathcal{X}} \leq \frac{3}{2}|f(s)|_{\mathcal{X}}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A sequência $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ de funções simples satisfaz $|g_i(s)|_{\mathcal{X}} \leq \frac{3}{2}|f(s)|_{\mathcal{X}}$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} |f(s) - g_i(s)|_{\mathcal{X}} = 0$, μ -q.t.p. Além disso, $|f(s) - g_i(s)|_{\mathcal{X}}$ é integrável. De fato,

$$|f(s) - g_i(s)|_{\mathcal{X}} \leq |f(s)|_{\mathcal{X}} + |g_i(s)|_{\mathcal{X}} \leq |f(s)|_{\mathcal{X}} + \frac{3}{2}|f(s)|_{\mathcal{X}} = \frac{5}{2}|f(s)|_{\mathcal{X}}$$

e, como $|f(s)|_{\mathcal{X}}$ é integrável, segue que $|f(s) - g_i(s)|_{\mathcal{X}}$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f(s) - g_i(s)|_{\mathcal{X}} d\mu(s) = \int_{\Omega} \lim_{i \rightarrow \infty} |f(s) - g_i(s)|_{\mathcal{X}} d\mu(s) = 0.$$

Portanto, f é Bochner integrável. □

Outras propriedades para a integral de Bochner são dadas a seguir.

Teorema A.2.5. Sejam $f, g : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow \mathcal{X}$ funções Bochner integráveis.

- 1) Para qualquer $a, b \in \mathbb{R}$, a função $af + bg$ é Bochner integrável e, para qualquer $E \in \mathcal{F}$, vale

$$\int_E (af(s) + bg(s)) d\mu = a \int_E f(s) d\mu + b \int_E g(s) d\mu.$$

2) Para qualquer $E \in \mathcal{F}$,

$$\left| \int_E f(s) d\mu \right|_{\mathcal{X}} \leq \int_E |f(s)|_{\mathcal{X}} d\mu.$$

3) A integral de Bochner é μ -absolutamente contínua, isto é,

$$\lim_{E \in \mathcal{F}, \mu(E) \rightarrow 0} \int_E f(s) d\mu = 0 \quad \text{em } \mathcal{X}.$$

4) Se $F \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, então Ff é uma função Bochner integrável com valores em $\mathcal{Y}$.

Além disso, para qualquer $E \in \mathcal{F}$, vale

$$\int_E Ff(s) d\mu = F \int_E f(s) d\mu.$$

Demonstração.

1) Como f e g são Bochner integráveis, existem $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ e $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ seqüências de funções simples Bochner integráveis convergindo para f e g , respectivamente, μ -q.t.p. E ainda,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f(x) - f_i(x)|_{\mathcal{X}} d\mu = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |g(x) - g_i(x)|_{\mathcal{X}} d\mu = 0.$$

Notemos que $(af_i + bg_i)$ é uma seqüência de funções simples Bochner integráveis e, para todo i , temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |af(x) + bg(x) - (af_i(x) + bg_i(x))|_{\mathcal{X}} d\mu \\ &= \int_{\Omega} |a(f(x) - f_i(x)) + b(g(x) - g_i(x))|_{\mathcal{X}} d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} |a||f(x) - f_i(x)|_{\mathcal{X}} + |b||g(x) - g_i(x)|_{\mathcal{X}} d\mu \\ &= |a| \int_{\Omega} |f(x) - f_i(x)|_{\mathcal{X}} d\mu + |b| \int_{\Omega} |g(x) - g_i(x)|_{\mathcal{X}} d\mu \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Logo, $|af(x) + bg(x) - (af_i(x) + bg_i(x))|_{\mathcal{X}}$ é integrável para todo i . Também,

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |af(x) + bg(x) - (af_i(x) + bg_i(x))|_{\mathcal{X}} d\mu &\leq |a| \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f(x) - f_i(x)|_{\mathcal{X}} d\mu \\ &\quad + |b| \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |g(x) - g_i(x)|_{\mathcal{X}} d\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $(af + bg)$ é Bochner integrável. Além disso,

$$\begin{aligned} \int_E (af(x) + bg(x))d\mu &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E (af_i(x) + bg_i(x))d\mu \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(a \int_E f_i(x)d\mu + b \int_E g_i(x)d\mu \right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} a \int_E f_i(x)d\mu + \lim_{i \rightarrow \infty} b \int_E g_i(x)d\mu \\ &= a \int_E f(x)d\mu + b \int_E g(x)d\mu. \end{aligned}$$

2) Seja f uma função Bochner integrável, então existe uma sequência $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ de funções simples Bochner integráveis tal que $\int_E f d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i d\mu$.

Para todo i , temos que

$$\left| \int_E f_i d\mu \right|_{\mathcal{X}} \leq \int_E |f_i|_{\mathcal{X}} d\mu,$$

donde

$$\left| \int_E f(x)d\mu \right|_{\mathcal{X}} = \left| \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i(x)d\mu \right|_{\mathcal{X}} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E |f_i(x)|_{\mathcal{X}} d\mu = \int_E |f(x)|_{\mathcal{X}} d\mu.$$

3) Provemos que $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \int_E |f|_{\mathcal{X}} d\mu = 0$.

Como f é Bochner integrável, pelo Teorema A.2.4, temos que $|f(x)|_{\mathcal{X}}$ é integrável.

Se $\mu(E) = 0$ para algum $E \in \mathcal{F}$, então $|f(x)|_{\mathcal{X}} \chi_E(x) = 0$ μ -q.t.p., e

$$\int_{\Omega} |f(x)|_{\mathcal{X}} \chi_E(x) d\mu = 0.$$

Logo, $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \int_E |f|_{\mathcal{X}} d\mu = 0$ e, do item anterior, segue que

$$\left| \lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \int_E f(x)d\mu \right|_{\mathcal{X}} \leq \lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \int_E |f(x)|_{\mathcal{X}} d\mu = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \int_E f(x)d\mu = 0.$$

4) Seja f uma função Bochner integrável. Existe uma sequência $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ de funções simples Bochner integráveis convergindo para f com

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f(x) - f_i(x)|_{\mathcal{X}} d\mu = 0.$$

Como F é linear, aplicando F em cada elemento da sequência, a nova sequência $\{Ff_i\}_{i=1}^{\infty}$ também é uma sequência de funções simples e, portanto, integráveis.

Pela linearidade e continuidade de F , temos

$$\int_E Ff_i(x)d\mu = F \int_E f_i(x)d\mu \quad \text{e} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} F(f_i(x)) = F \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = Ff(x), \quad \mu - q.t.p.,$$

donde Ff é fortemente mensurável.

Como, $|Ff(x)|_Y \leq |F|_{\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})}|f(x)|_{\mathcal{X}}$ e $|f(x)|_{\mathcal{X}}$ é integrável, temos que $|Ff(x)|_Y$ é integrável. Logo, pelo Teorema A.2.4, concluímos que Ff é Bochner integrável. Além disso,

$$\int_E Ff(x)d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E Ff_i(x)d\mu = F \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i(x)d\mu = F \int_E f(x)d\mu.$$

□

Teorema A.2.6 (Teorema da Convergência Dominada). Seja $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow \mathcal{X}$ fortemente mensurável e $g : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável não negativa de valores reais.

Assuma que $f_i : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow \mathcal{X}$ é Bochner integrável com $|f_i|_{\mathcal{X}} \leq g$, $\mu - q.t.p.$, para cada $i \in \mathbb{N}$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f$ em $\mathcal{X}$, $\mu - q.t.p.$ Então, f é Bochner integrável e

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i(s)d\mu = \int_E f(s)d\mu \quad \text{em } \mathcal{X}, \quad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Demonstração. Como $|f_i|_{\mathcal{X}} \leq g$, $\mu - q.t.p.$, para todo $i \in \mathbb{N}$, então $\lim_{i \rightarrow \infty} |f_i(x)|_{\mathcal{X}} \leq g(x)$, $\mu - q.t.p.$, donde, temos que $|f(x)|_{\mathcal{X}} \leq g(x)$, $\mu - q.t.p.$

Como g é Bochner integrável, $|f(x)|_{\mathcal{X}}$ é integrável. Pelo Teorema A.2.4, temos que f é Bochner integrável. Além disso,

$$|f(x) - f_i(x)|_{\mathcal{X}} \leq |f(x)|_{\mathcal{X}} + |f_i(x)|_{\mathcal{X}} \leq 2g(x), \quad \mu - q.t.p.,$$

donde $|f(x) - f_i(x)|_{\mathcal{X}}$ é integrável.

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e o fato que $\lim_{i \rightarrow \infty} |f(x) - f_i(x)|_{\mathcal{X}} = 0$, temos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_E |f(x) - f_i(x)|_{\mathcal{X}} d\mu = 0, \quad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Portanto, para todo $E \in \mathcal{F}$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i(x)d\mu = \int_E f(x)d\mu \quad \text{em } \mathcal{X}.$$

□

O seguinte teorema é conhecido como Teorema de Fubini para integrais de Bochner.

Teorema A.2.7. Seja $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ espaços de medida σ -finito.

Se $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathcal{X}$ é Bochner integrável então as funções $y(\cdot) \equiv \int_{\Omega_1} f(t, \cdot) d\mu_1(t)$ e $z(\cdot) \equiv \int_{\Omega_2} f(\cdot, s) d\mu_2(s)$ são q.t.p. definidas em Ω_2 e Ω_1 e Bochner integráveis com relação as medidas μ_2 e μ_1 , respectivamente. Além disso,

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(t, s) d(\mu_1 \times \mu_2)(t, s) = \int_{\Omega_1} z(t) d\mu_1(t) = \int_{\Omega_2} y(s) d\mu_2(s).$$

Para qualquer $p \in [1, \infty)$, denotamos por $L^p_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathcal{X}) := L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{X})$ o conjunto de todas (classes de equivalência de) as funções fortemente mensuráveis $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow \mathcal{X}$ tal que $\int_{\Omega} |f|_{\mathcal{X}}^p d\mu < \infty$. Este é um espaço de Banach com a norma

$$|f|_{L^p_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathcal{X})} = \left(\int_{\Omega} |f|_{\mathcal{X}}^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observação 5. Quando $p = 2$ e $\mathcal{X}$ é um espaço de Hilbert, então $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathcal{X})$ também é um espaço de Hilbert.

Denotamos por $L^{\infty}_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathcal{X}) := L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{X})$ o conjunto de todas (classes de equivalência de) as funções f fortemente mensuráveis (de valores em $\mathcal{X}$) tais que $\text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)|_{\mathcal{X}} < \infty$. Este é um espaço de Banach com a norma

$$|f|_{L^{\infty}_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathcal{X})} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)|_{\mathcal{X}}.$$

Para qualquer $1 \leq p \leq \infty$, e qualquer subconjunto aberto não vazio G de $\mathbb{R}^n$, denotaremos por $L^p(G, \mathcal{L}, \mathbf{m}; \mathcal{X})$ por $L^p(G; \mathcal{X})$, onde $\mathcal{L}$ é a família dos conjuntos mensuráveis de Lebesgue em G e $\mathbf{m}$ é a medida de Lebesgue em G . Também, denotamos $L^p_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathbb{R})$ e $L^p(G, \mathbb{R})$ por $L^p_{\mathcal{F}}(\Omega)$ e $L^p(G)$, respectivamente. Em particular, no caso em que $G = (0, T) \subset \mathbb{R}$ para algum $T > 0$, escrevemos simplesmente $L^p(0, T; \mathcal{X})$ e $L^p(0, T)$ ao invés de $L^p((0, T); \mathcal{X})$ e $L^p((0, T))$, respectivamente.

Para qualquer $p \in [1, \infty)$, definimos p' o conjugado Hölder de p , isto é,

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1}, & \text{se } p > 1, \\ \infty, & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

O seguinte resultado caracteriza o espaço dual de $L^p(\Omega; \mathcal{X})$.

Proposição A.2.8. Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach reflexivo e $p \in [1, \infty)$. Então,

$$L_{\mathcal{F}}^p(\Omega; \mathcal{X})^* = L_{\mathcal{F}}^{p'}(\Omega; \mathcal{X}^*).$$

Seja $\phi : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ uma aplicação mensurável. Dada uma medida μ em $(\Omega, \mathcal{F})$, a aplicação ϕ induz uma medida μ' em $(\Omega', \mathcal{F}')$ através de

$$\mu'(E') := \mu(\phi^{-1}(E')), \quad \forall E' \in \mathcal{F}'.$$

O seguinte teorema é conhecido como uma fórmula de mudança de variável para integrais de Bochner.

Teorema A.2.9. A função $f : \Omega' \rightarrow \mathcal{X}$ é Bochner integrável com relação a μ' se e somente se $f \circ \phi$ (definida em $(\Omega, \mathcal{F})$) é Bochner integrável com relação a μ .

Neste caso, vale a seguinte igualdade

$$\int_{\Omega'} f(x') d\mu'(x') = \int_{\Omega} f(\phi(x)) d\mu(x).$$

A.3 Continuidade e diferenciabilidade de funções com valor vetorial

Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços de Banach, $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ um subespaço e $F : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{Y}$ uma função (não necessariamente linear).

Definição A.3.1.

1) Dizemos que F é contínua em $x_0 \in \mathcal{X}_0$ se

$$\lim_{x \in \mathcal{X}_0, x \rightarrow x_0} |F(x) - F(x_0)|_{\mathcal{Y}} = 0.$$

Se F é contínua em cada ponto de $\mathcal{X}_0$, dizemos que F é contínua em $\mathcal{X}_0$.

2) Dizemos que F é Fréchet diferenciável em $x_0 \in \mathcal{X}_0$ se existe $F_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ tal que

$$\lim_{x \in \mathcal{X}_0, x \rightarrow x_0} \frac{|F(x) - F(x_0) - F_1(x - x_0)|_{\mathcal{Y}}}{|x - x_0|_{\mathcal{X}}} = 0.$$

Chamamos F_1 a derivada de Fréchet de F em x_0 , e escrevemos $F_x(x_0) = F_1$. Se F for Fréchet diferenciável em cada ponto de $\mathcal{X}_0$, dizemos que F é Fréchet diferenciável em $\mathcal{X}_0$. Além disso, quando a aplicação $F_x : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ é contínua, dizemos que F é Fréchet diferenciável contínua em $\mathcal{X}_0$.

3) Dizemos que F é Fréchet diferenciável de segunda ordem em $x_0 \in \mathcal{X}_0$ se $F : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{Y}$ é Fréchet diferenciável contínua e existe $F_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}))$ de modo que

$$\lim_{x \in \mathcal{X}_0, x \rightarrow x_0} \frac{|F_x(x) - F_x(x_0) - F_2(x - x_0)|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})}}{|x - x_0|_{\mathcal{X}}} = 0.$$

Chamamos F_2 a derivada de Fréchet de segunda ordem de F em x_0 , e escrevemos $F_{xx}(x_0) = F_2$. Se F é Fréchet diferenciável de segunda ordem em cada ponto de $\mathcal{X}_0$, dizemos que F é Fréchet diferenciável de segunda ordem em $\mathcal{X}_0$. Além disso, quando a aplicação $F_{xx} : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}))$ é contínua, dizemos que F é Fréchet diferenciável contínua de segunda ordem em $\mathcal{X}_0$.

O conjunto de todas as funções contínuas (resp. Fréchet diferenciáveis contínuas, Fréchet diferenciáveis contínuas de segunda ordem) de $\mathcal{X}_0$ a $\mathcal{Y}$ é denotado por $\mathcal{C}(\mathcal{X}_0; \mathcal{Y})$ (resp. $\mathcal{C}^1(\mathcal{X}_0; \mathcal{Y})$, $\mathcal{C}^2(\mathcal{X}_0; \mathcal{Y})$). Quando $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$, simplesmente o denotamos por $\mathcal{C}(\mathcal{X}_0)$ (resp. $\mathcal{C}^1(\mathcal{X}_0)$, $\mathcal{C}^2(\mathcal{X}_0)$).

Definição A.3.2. Seja $\mathcal{Z}$ espaço de Banach. Uma aplicação $M : \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ é chamada de operador bilinear limitado se M for linear em cada argumento e existir uma constante $\mathcal{C} > 0$ tal que

$$|M(x, z)|_{\mathcal{Y}} \leq \mathcal{C}|x|_{\mathcal{X}}|z|_{\mathcal{Z}}, \quad \forall (x, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z}.$$

Denote por $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}; \mathcal{Y})$ o conjunto de todos os operadores bilineares limitados de $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ a $\mathcal{Y}$. A norma de $M \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}; \mathcal{Y})$ é definida por

$$|M|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}; \mathcal{Y})} = \sup_{x \in \mathcal{X} - \{0\}, z \in \mathcal{Z} - \{0\}} \frac{|M(x, z)|_{\mathcal{Y}}}{|x|_{\mathcal{X}}|z|_{\mathcal{Z}}}.$$

Temos que $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}; \mathcal{Y})$ é um espaço de Banach com essa norma.

Qualquer $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{Y}))$ define um operador bilinear limitado $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}; \mathcal{Y})$ do seguinte modo:

$$\tilde{L}(x, z) = (L(x))(z), \quad (x, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z}.$$

Por outro lado, qualquer $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}; \mathcal{Y})$ define um operador $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{Y}))$ da seguinte maneira:

$$(L(x))(z) = \tilde{L}(x, z), \quad (x, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z}.$$

Portanto, qualquer $F \in \mathcal{C}(\mathcal{X}_0; \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{Y})))$ pode ser considerado como um elemento $\tilde{F} \in \mathcal{C}(\mathcal{X}_0; \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}; \mathcal{Y}))$. Se não houver confusão, identificaremos $F \in \mathcal{C}(\mathcal{X}_0; \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{Y})))$ com $\tilde{F} \in \mathcal{C}(\mathcal{X}_0; \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}; \mathcal{Y}))$.

A.4 Funções generalizadas e espaços de Sobolev

Para qualquer multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ (com $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = 1, \dots, n$), defina sua ordem $|\alpha| = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|$ e o operador de derivação de ordem $|\alpha|$ como sendo,

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Seja $G \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira Γ , e denote $\overline{G}$ seu fecho. Para qualquer $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, denote por $B(x^0, r)$ a bola aberta com raio r , centrada em x^0 .

Definição A.4.1. Dizemos que a fronteira Γ de G é de classe C^k (para algum $k \in \mathbb{N}$) se para cada ponto $x^0 \in \Gamma$ existem $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tal que, após possível renomeação e reorientação dos eixos coordenados, temos

$$G \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r); x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Dizemos que Γ é de classe C^∞ se Γ é de classe C^k para qualquer $k = 1, 2, \dots$.

Se Γ for de classe C^1 , então ao longo de Γ definimos o campo vetorial normal exterior unitário a G :

$$\nu(x) = (\nu^1(x), \dots, \nu^n(x)).$$

Para qualquer $u \in C^1(\overline{G})$, temos a derivada normal exterior:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nabla u \cdot \nu.$$

Embora a maioria dos resultados a seguir se mantenham quando Γ é de classe C^k para algum $k \in \mathbb{N}$ adequado (geralmente, $k = 1$ ou 2), para simplificar, na sequência assumiremos que Γ é C^∞ (a menos que seja indicado de outra forma).

Para qualquer $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotamos por $C^m(G)$ e $C^m(\overline{G})$ os conjuntos de todas as funções m -vezes diferenciáveis, contínuas em G e $\overline{G}$, respectivamente, e por $C_0^m(G)$ o conjunto de todas as funções $f \in C^m(G)$ tais que $\text{supp}(f) := \{x \in G; f(x) \neq 0\}$ é compacto em G . O conjunto $C^m(\overline{G})$ é um espaço de Banach com a norma

$$|f|_{C^m(\overline{G})} = \max_{x \in \overline{G}} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha f(x)|, \quad \forall f \in C^m(\overline{G}).$$

Na sequência, escreveremos $C(\overline{G})$ para indicar o conjunto $C^0(\overline{G})$.

Denotamos por $C^\infty(G)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis em G , e definimos

$$C_0^\infty(G) = \{f \in C^\infty(G); \text{supp}(f) \text{ é compacto em } G\}.$$

Definição A.4.2. Seja $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ uma sequência em $C_0^\infty(G)$. Dizemos que $f_k \rightarrow 0$ em $C_0^\infty(G)$ quando $k \rightarrow \infty$, se:

- 1) Para algum subconjunto compacto K em G ,

$$\text{supp}(f_k) \subset K, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

- 2) Para todos os multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$,

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha f_k(x)| \rightarrow 0, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Para $f \in C_0^\infty(G)$, dizemos que $f_k \rightarrow f$ em $C_0^\infty(G)$ quando $k \rightarrow \infty$, se $f_k - f \rightarrow 0$ em $C_0^\infty(G)$ quando $k \rightarrow \infty$.

Denotamos por $\mathcal{D}(G)$ o espaço linear $C_0^\infty(G)$ equipado com a convergência sequencial dada na Definição A.4.2. Este espaço é denominado o espaço das funções teste sobre G . Uma função generalizada sobre G é qualquer funcional linear contínuo $F : \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathbb{C}$, isto é

- 1) $F(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha F(\varphi) + \beta F(\psi)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(G)$, e
- 2) para qualquer sequência $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset C_0^\infty(G)$ com $f_k \rightarrow 0$ em $C_0^\infty(G)$ quando $k \rightarrow \infty$, tem-se que $\lim_{k \rightarrow \infty} F(f_k) = 0$.

O espaço das funções generalizadas (ou espaço das distribuições) será denotado por $\mathcal{D}'(G)$.

Exemplo A.4.1. Qualquer função $f \in L^1(G)$ pode ser identificada com uma função generalizada, (ver [1, p. 20]), do seguinte modo:

$$F_f(\varphi) = \int_G f(x)\varphi(x)dx. \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

É fácil ver que $F_f \in \mathcal{D}'(G)$. Então, podemos dizer que $L^1(G) \subset \mathcal{D}'(G)$.

Exemplo A.4.2. Seja $a \in G$. Definimos δ_a a delta de Dirac (em G) centrada em a como

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

Temos que $\delta_a \in \mathcal{D}'(G)$, mas δ_a não pode ser identificada como uma função em G . Deste modo, vemos que o espaço das funções generalizadas é “muito grande”.

Seja $F \in \mathcal{D}'(G)$. A derivada generalizada de F com relação a x_k (para algum $k \in \{1, 2, \dots, n\}$), é definida por

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)(\varphi) = -F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}'(G).$$

Facilmente verifica-se que $\frac{\partial F}{\partial x_k} \in \mathcal{D}'(G)$.

Definição A.4.3. Seja $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço $W^{m,p}(G)$ por

$$W^{m,p}(G) = \{f \in L^p(G); \partial^\alpha f \in L^p(G) \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}$ é Banach com a seguinte norma:

$$|f|_{W^{m,p}(G)} := \left(\int_G \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{A.6})$$

Equivalentemente, $W^{m,p}(G)$ é o completamento de $C^m(\overline{G})$ em relação à norma (A.6). Da mesma forma, o completamento de $C_0^m(G)$ sob a norma (A.6) é denotado por $W_0^{m,p}(G)$. Para $p = 2$, denotaremos $W^{m,2}(G)$ por $H^m(G)$ e $W_0^{m,2}(G)$ por $H_0^m(G)$. Ambos, $H^m(G)$ e $H_0^m(G)$ são espaços de Hilbert com o produto interno

$$\langle f, g \rangle_{H^m(G)} = \int_G \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f \partial^\alpha \bar{g} dx, \quad \forall f, g \in H^m(G).$$

No caso $m = 1$, temos que,

$$\langle f, g \rangle_{H^1(G)} = \int_G (f(x)\bar{g}(x) + f_{x_1}(x)\bar{g}_{x_1}(x) + \dots + f_{x_n}(x)\bar{g}_{x_n}(x)) dx.$$

Podemos provar que $y \in W^{m,p}(G)$ se, e somente se, existem funções $f_\alpha \in L^p(G)$, $|\alpha| \leq m$, tal que

$$\int_G y \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G f_\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

A função acima f_α é a α -ésima derivada generalizada de y .

Definição A.4.4. Seja $(W_0^{m,p}(G))^*$ o espaço dual de $W_0^{m,p}(G)$. Como $C_0^\infty(G) \subset W_0^{m,p}(G)$ então $(W_0^{m,p}(G))^* \subset \mathcal{D}'(G)$. Assim, cada elemento de $(W_0^{m,p}(G))^*$ determina uma função generalizada.

O espaço $(W_0^{m,p}(G))^*$ será denotado por $W^{-m,p'}(G)$, onde p' é o conjugado Holder de p . Em particular, denotamos $H^{-m}(G) = W^{-m,2}(G)$.

Temos que $W^{-m,q}(G)$ é um espaço de Banach com a norma canonica, isto é

$$|F|_{W^{-m,q}(G)} = \sup_{\varphi \in W_0^{m,p}(G) - \{0\}} \frac{F(\varphi)}{|\varphi|_{W_0^{m,p}(G)}}, \quad \forall F \in W^{-m,q}(G).$$

Além disso, $H^{-m}(G)$ é um espaço de Hilbert.

Observação 18. Como $H_0^m(G)$ é Hilbert, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um isomorfismo entre $H_0^m(G)$ e $H^{-m}(G) \equiv (H_0^m(G))^*$. Mas, isso não significa que esses dois espaços sejam iguais. Na verdade, os elementos de $H_0^m(G)$ possuem certa regularidade, enquanto os elementos em $H^{-m}(G)$ não precisam nem mesmo ser uma função.

Todos os espaços acima, $W^{m,p}(G)$, $W_0^{m,p}(G)$ e $W^{-m,p'}(G)$ são chamados espaços de Sobolev.

A.5 Semigrupos de operadores

Seja H um espaço de Hilbert.

Definição A.5.1. Um C_0 -semigrupo em H é uma família de operadores lineares limitados $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ (em H) tal que:

- i) $S(t+s) = S(t)S(s)$ para qualquer $s, t \geq 0$;
- ii) $S(0) = I$;
- iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)y = y, \quad \forall y \in H$.

Quando $|S(t)|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$, o semigrupo é denominado contrativo.

Para qualquer C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em H , define-se um operador linear A em H do seguinte modo:

$$\begin{cases} D(A) := \{x \in H; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe em } H\}, \\ A(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A) \end{cases}$$

Dizemos que o operador A definido acima é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, ou A gera o C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Temos que $D(A)$ é denso em H , A é um operador fechado e $S(t)D(A) \subset D(A)$ para todo $t \geq 0$ (ver [27]).

Proposição A.5.1. Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo em H . Então

- 1) Existem constantes positivas M e α tais que $|S(t)|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{\alpha t}$, $\forall t \geq 0$;
- 2) $\frac{dS(t)x}{dt} = AS(t)x = S(t)Ax$ para todo $x \in D(A)$ e $t \geq 0$;
- 3) Para todo $z \in D(A^*)$ e $x \in H$, a aplicação $t \mapsto \langle z, S(t)x \rangle_H$ é diferenciável e $\frac{d}{dt} \langle z, S(t)x \rangle_H = \langle A^*z, S(t)x \rangle_H$;
- 4) Se uma função $y \in C^1([0, +\infty); D(A))$ satisfaz $\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t)$ para todo $t \in [0, +\infty)$, então $y(t) = S(t)y(0)$;
- 5) $\{S(t)^*\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo em H com gerador infinitesimal A^* .

Demonstração. Vamos provar alguns itens.

- 1) Primeiramente, vamos mostrar que existe um $\delta > 0$ tal que $|S(t)|_{\mathcal{L}(H)}$ é limitada para $t \in [0, \delta]$. Suponhamos o contrário, então existe uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo $t_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$ e $|S(t_n)|_{\mathcal{L}(H)} \geq M$. Pelo Teorema da Limitação Uniforme, segue-se que para algum $x \in H$, $|S(t_n)x|_{\mathcal{L}(H)}$ é ilimitada, contrariando o item (iii) da definição de C_0 -semigrupo. Portanto, $|S(t)|_{\mathcal{L}(H)} \leq M$, para $t \in [0, \delta]$. Desde que $|S(0)|_{\mathcal{L}(H)} = 1$, então $M \geq 1$. Seja, $\alpha = \delta^{-1} \log M$. Observe que $\alpha \geq 0$, pois $M \geq 1$. Dado $t > 0$ pelo algoritmo de Euclides, existe $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \eta < \delta$ tal que $t = n\delta + \eta$. Daí,

$$|S(t)|_{\mathcal{L}(H)} = |S(n\delta + \eta)|_{\mathcal{L}(H)} = |S(n\delta)S(\eta)|_{\mathcal{L}(H)} = |S(\delta)^n|_{\mathcal{L}(H)}|S(\eta)|_{\mathcal{L}(H)} \leq M^n M. \quad (\text{A.7})$$

Note que, $\alpha = \delta^{-1} \log M$ implica que $\alpha\delta = \log M$. Logo, $n\alpha\delta = n \log M = \log M^n$. Com isso, tem-se que

$$\alpha t = \alpha(n\delta + \eta) \geq n\alpha\delta = \log M^n.$$

Assim,

$$e^{\alpha t} \geq M^n. \quad (\text{A.8})$$

De (A.7) e (A.8), segue que

$$|S(t)|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

- 2) Seja $x \in D(A)$, da definição de gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo, segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = Ax.$$

Consequentemente, para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} AS(t)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t)S(h)x - S(t)x}{h} \\ &= S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = S(t)Ax. \end{aligned}$$

Logo, $S(t)x \in D(A)$ e $AS(t)x = S(t)Ax$. Também,

$$AS(t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h+t)x - S(t)x}{h}.$$

Agora, note que para $h \in [0, t]$,

$$S(t-h) \left(\frac{S(h)x - x}{h} \right) = \frac{S(t-h)S(h)x - S(t-h)x}{h} = \frac{S(t)x - S(t-h)x}{h}.$$

Logo,

$$\frac{S(t)x - S(t-h)x}{h} - S(t)Ax = S(t-h) \left(\frac{S(h)x - x}{h} \right) - S(t)Ax.$$

Somando e subtraindo $S(t-h)Ax$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{S(t)x - S(t-h)x}{h} - S(t)Ax &= S(t-h) \left(\frac{S(h)x - x}{h} - Ax \right) \\ &\quad + (S(t-h) - S(t))Ax. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Como,

$$\left| S(t-h) \left(\frac{S(h)x - x}{h} - Ax \right) \right|_{\mathcal{L}(H)} \leq |S(t-h)|_{\mathcal{L}(H)} \left| \frac{S(h)x - x}{h} - Ax \right|_H,$$

e $S(t-h)$ é limitado e $x \in D(A)$, obtemos

$$\left| S(t-h) \left(\frac{S(h)x - x}{h} - Ax \right) \right|_{\mathcal{L}(H)} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0. \tag{A.10}$$

Por outro lado, pela continuidade de $S(\cdot)x$

$$|(S(t-h) - S(t))Ax|_{\mathcal{L}(H)} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0. \tag{A.11}$$

Logo, de (A.9),(A.10) e (A.11), segue que

$$\left| \frac{S(t)x - S(t-h)x}{h} - S(t)Ax \right|_{\mathcal{L}(H)} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0.$$

Portanto, concluimos que

$$\frac{d}{dt}S(t)x = S(t)Ax = AS(t)x.$$

4) Seja A um gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Da definição,

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}.$$

Tomando $y(t) = S(t)y(0)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)y(0) - S(t)y(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t)S(h)y(0) - S(t)y(0)}{h} \\ &= S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)y(0) - y(0)}{h} \\ &= S(t)Ay(0) \\ &= AS(t)y(0) \\ &= Ay(t). \end{aligned}$$

□

Seja agora a seguinte equação de evolução:

$$\begin{cases} y_t(t) = Ay(t), & \forall t > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Se A gera um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ então, para qualquer $y_0 \in H$ chamamos $y(\cdot) = S(\cdot)y_0$ a solução mild para (A.12).

O seguinte resultado é bastante útil para garantir que um operador ilimitado gere um semigrupo de contração.

Teorema A.5.2. Seja $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador linear, fechado, densamente

definido. Se

$$\langle Ax, x \rangle_H \leq 0, \quad \forall x \in D(A)$$

e

$$\langle A^*x', x' \rangle_H \leq 0, \quad \forall x' \in D(A^*),$$

então A gera um semigrupo de contração em H .

Demonstração. Ver [27, p.15]. □

Exemplo A.5.3. Seja $G \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado convexo com fronteira Γ , e seja $O \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $|O|_{\mathbb{R}^n} = 1$. Consideremos $\Gamma^- := \{x \in \Gamma; O \cdot \nu(x) \leq 0\}$. Defina um operador linear ilimitado A em H do seguinte modo:

$$\begin{cases} D(A) = \{f \in H^1(G); f = 0 \text{ em } \Gamma^-\}, \\ A(f) = -O \cdot \nabla f, \quad \forall f \in D(A). \end{cases}$$

Podemos usar o Teorema A.5.2 para mostrar que A gera um semigrupo de contração $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em $H = L^2(G)$. Este semigrupo surge no estudo da equação de transporte (homogênea):

$$\begin{cases} y_t + O \cdot \nabla y = 0 & \text{em } G \times (0, +\infty), \\ y = 0 & \text{em } \Gamma^- \times (0, +\infty), \\ y(0) = y_0 & \text{em } G. \end{cases}$$

Exemplo A.5.4. Defina um operador linear ilimitado A em $H = L^2(G)$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} D(A) = H^2(G) \cap H_0^1(G), \\ Af = \Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}, \quad \forall f \in D(A). \end{cases}$$

Mais uma vez, usando o Teorema A.5.2, vemos que A gera um semigrupo de contração $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em $L^2(G)$. Este semigrupo surge no estudo da equação de calor (homogênea):

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = 0 & \text{em } G \times (0, +\infty), \\ y = 0 & \text{em } \Gamma \times (0, +\infty), \\ y(0) = y_0 & \text{em } G. \end{cases}$$

Exemplo A.5.5. Seja $H = H_0^1(G) \times L^2(G)$ e defina um operador linear ilimitado A em H da seguinte forma:

$$\begin{cases} D(A) = \{(y, z)^T; y \in H^2(G) \cap H_0^1(G), z \in H_0^1(G)\}, \\ A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \Delta y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad \forall (y, z)^T \in D(A). \end{cases}$$

Pelo Teorema A.5.2, segue que A gera um semigrupo de contração em H . Este semigrupo surge no estudo da seguinte equação de onda (homogênea):

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = 0 & \text{em } G \times (0, +\infty), \\ y = 0 & \text{em } \Gamma \times (0, +\infty), \\ y(0) = y_0, \quad y_t(0) = y_1 & \text{em } G. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Na verdade, se definirmos $z = y_t$, então, (A.13) pode ser transformado na seguinte equação:

$$\begin{cases} w_t = Aw & \text{em } (0, +\infty), \\ w(0) = w_0, \end{cases}$$

onde $w = (y, z)$ e $w_0 = (y_0, y_1)$.

Seja agora a seguinte equação de evolução semilinear:

$$\begin{cases} y_t(t) = Ay(t) + f(t, y(t)), & t \in (0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

onde $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ gera um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em H , $y_0 \in H$ e $f : [0, T] \times H \rightarrow H$ satisfaz:

- 1) Para cada $x \in H$, $f(\cdot, x) : [0, T] \rightarrow H$ é fortemente mensurável; e
- 2) Existe uma constante $\mathcal{C} > 0$, tal que, para quase todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{cases} |f(t, x_1) - f(t, x_2)|_H \leq \mathcal{C}|x_1 - x_2|_H, & \forall x_1, x_2 \in H, \\ |f(t, 0)|_H \leq \mathcal{C}. \end{cases}$$

Definição A.5.2.

- 1) Chamamos $y \in C([0, T]; H)$ uma solução forte para (A.14) se $y(0) = y_0$, y é diferenciável para $t \in (0, T)$, $y(t) \in D(A)$ para $t \in (0, T)$ e $y_t(t) = Ay(t) + f(t, y(t))$ em $t \in (0, T)$.
- 2) Chamamos $y \in C([0, T]; H)$ uma solução fraca para (A.14) se para qualquer $\varphi \in D(A^*)$ e $t \in [0, T]$,

$$\langle y(t), \varphi \rangle_H = \langle y_0, \varphi \rangle_H + \int_0^t (\langle y(s), A^* \varphi \rangle_H + \langle f(s, y(s)), \varphi \rangle_H) ds.$$

- 3) Chamamos $y \in C([0, T]; H)$ uma solução mild para (A.14) se

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, y(s))ds, \quad t \in [0, T].$$

Temos o seguinte resultado:

Proposição A.5.6. Uma função $y \in C([0, T]; H)$ é uma solução mild para (A.14) se, e somente se, for uma solução fraca para a mesma equação.

Demonstração. Ver [6, p.50]. □

De agora em diante, não distinguiremos soluções mild e fracas para (A.14).

Proposição A.5.7. Para qualquer $y_0 \in H$, a equação (A.14) admite uma única solução mild y , com

$$|y|_{C([0, T]; H)} \leq C(1 + |y_0|_H).$$

Demonstração. Ver [6, p.51]. □

Note que a solução y para (A.14) não é necessariamente diferenciável porque A é geralmente ilimitado. O seguinte resultado de convergência às vezes é muito útil.

Proposição A.5.8. Seja y a solução mild para (A.14) e seja y^λ a solução forte para seguinte equação:

$$y^\lambda(t) = S_\lambda(t)y_0 + \int_0^t S_\lambda(t-s)f(s, y^\lambda(s))ds, \quad t \in [0, T],$$

onde $\{S_\lambda(t)\}_{t \geq 0}$ é o C_0 -semigrupo gerado por $A_\lambda = \lambda A(\lambda I - A)^{-1}$ onde $\lambda \in \rho(A)$, o conjunto resolvente de A . Então,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} |y^\lambda(t) - y(t)|_H = 0.$$

A.6 Outros resultados utilizados

Teorema A.6.1 (Gauss-Green). Se $u \in C^1(\overline{G})$, então

$$\int_G u_{x_i} dx = \int_\Gamma u \nu^i d\Gamma, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Demonstração. Ver [4]. □

Teorema A.6.2 (Fórmulas de Green).

- i) Se $\gamma \in H^2(G)$, então $\int_G \nabla \gamma \nabla u dx = - \int_G u \Delta \gamma dx + \int_\Gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} u ds, \forall u \in H^1(G)$.
- ii) Se $u, \gamma \in H^2(G)$, então $\int_G (u \Delta \gamma - \gamma \Delta u) dx = \int_\Gamma \left(u \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} - \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds$.

Demonstração. Ver [4]. □

Teorema A.6.3 (Cauchy-Schwarz). Sejam $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de quadrado integrável, então

$$|\langle f, g \rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}. \quad (\text{A.15})$$

Demonstração. Ver [4] □

Teorema A.6.4 (Desigualdade de Hölder). Sejam $f \in L^p(G)$ e $g \in L^q(G)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q = 1$ se $p = \infty$ e $q = \infty$ se $p = 1$). Então, $fg \in L^1(G)$ e

$$\int_G |fg| d\mu(x) \leq \|f\|_{L^p(G)} \|g\|_{L^q(G)}. \quad (\text{A.16})$$

Demonstração. Ver [4]. □

Teorema A.6.5 (Desigualdade de Young). Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ e $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q. \quad (\text{A.17})$$

Demonstração. Ver [4]. □

Referências Bibliográficas

- [1] R. A. ADAMS & J.F.F.S. FOURNIER, *Sobolev Spaces*, Elsevier, 2003.
- [2] R. G. BARTLE, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, 1995.
- [3] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO & E. TEIXEIRA, *Fundamentos de Análise Funcional*, IMPA, 2011.
- [4] H. BREZIS, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.
- [5] E.F. CARA & E. ZUAZUA, *Control Theory: History, Mathematical Achievements and Perspectives*, Boletim SEMA., 26(2003), 79-140.
- [6] T. CAZENAVE & A. HARAUX, *An introduction to semilinear evolution equations*, The Clarendon Press, Oxford University Press, 1998.
- [7] F.W. CHAVES-SILVA, *(Breve) Introdução à Teoria do Controle*, Notas de Aula, 2020.
- [8] G. DA PRATO & J. ZABCZYK, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Cambridge University Press, 1992.
- [9] D. A. DAWSON, *Stochastic evolution equations*, Math. Biosci., 15 (1972), 287-316.
- [10] F. DOU & Q. LÜ, *Partial approximate controllability for linear stochastic control systems*, SIAM J. Control Optim., 57 (2019), 1209-1229.
- [11] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, 1998.
- [12] P.J. FERNANDES, *Medida e Integração*, IMPA, 2002.
- [13] X. FU, Q. LÜ & X. ZHANG, *Carleman estimates for second order partial differential operators and applications, a unified approach*, Springer, Cham, 2019.

- [14] T. FUNAKI, *Random motion of strings and related stochastic evolution equations*, Nagoya Math. J., 89 (1983), 129-193.
- [15] A. V. FURSIKOV & O. YU, *Imanuvilov, Controllability of evolution equations*, Lecture Notes Series 34, Research Institute of Mathematics, Seoul National University, Seoul, Korea, 1994.
- [16] P. HESS, *Integração de Funções Vetoriais*, Dissertação, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.
- [17] H. HOLDEN, B. ØKSENDAL, J. UBØE & T. ZHANG, *Stochastic partial differential equations. A modeling, white noise functional approach*, Universitext, Springer, 2010.
- [18] M. V. KLIBANOV & M. YAMAMOTO, *Exact controllability for the time dependent transport equation*, SIAM J. Control Optim., 46 (2007), 2071-2195.
- [19] E. L. LIMA, *Curso de Análise vol. 2*, Impa, 2018.
- [20] J.-L. LIONS & E. MAGENES, *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Springer-Verlag, 1972.
- [21] Q. LÜ, *Exact controllability for stochastic transport equations*, SIAM J. Control Optim., 52 (2014), 397-419.
- [22] Q. LÜ & X. ZHANG, *A concise introduction to control theory for stochastic partial differential equations*, Mathematical Control and Related Fields, doi: 10.3934/mcrf.2021020.
- [23] Q. LÜ & X. ZHANG, *Mathematical Control Theory for Stochastic Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, in press, 2021.
- [24] R. S. MANNING, J. H. MADDOCKS & J. D. KAHN, *A continuum rod model of sequence-dependent DNA structure*, J. Chem. Phys., 105 (1996), 5626-5646.
- [25] J.R.S. MORALES, *La Integral de Bochner*, Tese, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2017.
- [26] R. M. MURRAY, ET AL, *Control in an information rich world. Report of the panel on future directions in control, dynamics, and systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [27] A. PAZY, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer, 1983.

- [28] S. PENG, *Backward stochastic differential equation and exact controllability of stochastic control systems*, Progr. Natur. Sci. (English Ed.), 4 (1994), 274-284.
- [29] K. STOWE, *An introduction to thermodynamics and statistical mechanics*, Cambridge University Press, 2007.
- [30] N. WIENER, *Cybernetics: Control and Communication in the Animal and the Machine*, Mit Press, 1965.
- [31] J. YONG & X. Y. ZHOU, *Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations*, Springer-Verlag, 1999.
- [32] K. YOSIDA, *Functional analysis*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, 1995.