

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Uma introdução ao operador ϕ -Laplaciano

Victor Vinicius França Silva

JOÃO PESSOA – PB

AGOSTO DE 2020

Victor Vinicius França Silva

Uma introdução ao operador ϕ -Laplaciano

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

João Pessoa – PB
Agosto de 2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586i Silva, Victor Vinicius França.

Uma introdução ao operador ϕ -Laplaciano / Victor
Vinicius França Silva. - João Pessoa, 2020.
59 f.

Orientação: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. ϕ -Laplaciano. 3. Problemas
elípticos. 4. Espaços de Orlicz-Sobolev. 5. Métodos
variacionais. I. Ribeiro, Bruno Henrique Carvalho. II.
Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Dedicatória À minha mãe Núbia.

Agradecimentos

À minha mãe Nubia, pois tudo que sou hoje é graças a ela. À minha família por todo amor e por ser minha base, em particular a todos os meus tios e tias, em especial a minha tia Ana pelo apoio incondicional. A minha namora Mislaine por me aguentar, e pelo incentivo diário. A todos os meus amigos e colegas de estudo pelos conselhos e momentos de distrações. Aos companheiros de departamento pelas pausas do café. A minha eterna gratidão a todos os meus professores que me proporcionaram grande aprendizado durante a minha carreira acadêmica, em especial a Bruno Ribeiro (Orientador do Mestrado), Matheus Menezes (Orientador do TCC), Tony César (Professor do ensino médio) e Toinho (Professor do ensino fundamental). Ao CNPq, pela bolsa de estudos e auxílio financeiro que possibilitou a dedicação integral ao programa de pós-graduação.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a existência de soluções fracas no espaço de Orlicz-Sobolev do problema de Dirichlet do Δ_ϕ (“ ϕ -Laplaciano”)

$$(D) \begin{cases} -\Delta_\phi u = g(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é de domínio limitado no $\mathbb{R}^N$, $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Caso a função ϕ satisfaça algumas condições técnicas e g obedeça umas condições de subcriticalidade e superlinearidade com relação a função ϕ , obtemos a existência de soluções não triviais do tipo passo da montanha.

Palavras-chave: Métodos variacionais, ϕ -Laplaciano, Problemas elípticos quasilineares, Espaços de Orlicz-Sobolev.

Abstract

In this work we will study the existence of weak solutions in an Orlicz-Sobolev space to the Dirichlet's problem of the Δ_ϕ (“ ϕ -Laplaciano”)

$$(D) \begin{cases} -\Delta_\phi u = g(x, u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. If the function ϕ satisfies some technical conditions and g obeys some conditions of subcriticality and superlinearity with respect to the function ϕ , we obtain the existence of nontrivial solutions which are of mountain pass type.

Keywords: Variational methods, ϕ -Laplacian, Quasilinear elliptic problems, Orlicz-Sobolev spaces.

Sumário

Introdução	1
1 Uma breve introdução aos espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev	4
1.1 N-função	4
1.2 Espaços de Orlicz	10
1.3 Espaços de Orlicz-Sobolev e o $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$	19
2 O Problema de Dirichlet Para Δ_ϕ:	26
2.1 A geometria do funcional I	30
2.2 Existência da solução do problema de Dirichlet para Δ_ϕ	38
2.3 Existência de duas soluções	42
2.4 Exemplos	44
Referências Bibliográficas	52

Introdução

Neste trabalho estudaremos o seguinte problema

$$(D) \begin{cases} -\Delta_\phi u = g(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é de domínio limitado no $\mathbb{R}^N$, com fronteira $\partial\Omega$ suave, $\Delta_\phi u$ é chamado de “ ϕ -laplaciano” e definido por $\Delta_\phi u = \operatorname{div}(a(|\nabla u(x)|)\nabla u(x))$ (denotaremos por $|\cdot|$ a norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$). O funcional a é tal que $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\phi(s) = \begin{cases} a(|s|)s & \text{se } s \neq 0 \\ 0 & \text{se } s = 0 \end{cases} \quad (0.1)$$

é um homeomorfismo crescente de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e a função contínua $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz $g(x, 0) = 0, x \in \overline{\Omega}$.

Deste modo caso $\phi(s) = s$ no problema (D), temos que o “ ϕ -laplaciano” é o laplaciano usual, i.e., o problema (D) é o problema clássico que introduziu o Teorema do passo da montanha. Em [2] é provada a existência de uma solução para este caso, basicamente considerando as seguintes hipóteses:

1. Existe um $q \in (1, 2^*)$ e uma constante $C > 0$ tal que

$$|g(x, s)| \leq C(1 + |s|^{q-1}), \quad x \in \Omega, s \in \mathbb{R},$$

com $2^* = \frac{2N}{N-2}, N \geq 3$,

2. $\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{g(x, s)}{s} < \lambda_1$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$ onde λ_1 é o principal autovalor do operador $-\Delta$
3. Existem $\theta > 2$ e $s_0 > 0$ tal que

$$0 < \theta G(x, S) \leq sg(x, s), \quad x \in \overline{\Omega}, |s| \geq s_0$$

com

$$G(x, s) := \int_0^s g(x, t) dt.$$

Em [7] o resultado é estendido para o caso do operador p -Laplaciano, isto é, para o caso do problema (D), com $\phi(s) = |s|^{p-2}s$, $p > 1$, neste caso as hipóteses (1),(2) e (3) do Teorema do Passo da Montanha são modificadas: o 2^* é substituído por $p^* := \frac{pN}{N-p}$ com $N \geq p$, λ_1 é o principal autovalor do p -Laplaciano, e $\theta > p$ ao invés de $\theta > 2$.

Aqui vamos abordar o problema (D) com uma técnica variacional, isto é, vamos associar o problema (D) a um funcional I em um espaço de funções adequado (os espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev, vide capítulo 1), e este funcional I satisfará as condições do seguinte Teorema

Teorema 0.1. (*Passo da Montanha*) *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$, suponha que:*

$$(G_1) \quad \exists \rho > 0 \text{ e } r > 0 \text{ tal que } I(u) \geq r \text{ para } \|u\| = \rho.$$

$$(G_2) \quad \exists e \in X \text{ com } \|e\| > \rho \text{ tal que } I(e) \leq 0.$$

Seja

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1]; X) | \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

e considere

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)).$$

Então existe uma sequencia (u_n) em X tal que

$$I(u_n) \longrightarrow c \quad I'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Este Teorema enunciado acima é uma versão do famoso Teorema do Passo da Montanha de Ambrosseti e Rabinowitz sem a condição de Palais–Smale. Mostraremos que essa sequência quase crítica (u_n) converge para um ponto crítico u do funcional I , onde este ponto u será uma solução fraca para o problema (D).

No **Capítulo 1**, faremos uma breve introdução aos espaços de Orlicz. Esses espaços são generalizações dos espaços de Lebesgue. A noção dos espaços de Orlicz foi introduzida em 1932, em um artigo do matemático polonês Władysław Roman Orlicz (vide [13]). A princípio, foram definidos utilizando-se uma condição que hoje denotamos por condição Δ_2 , só em 1936, definiu-se tais espaços com a generalização estudada hoje. Também neste capítulo estudaremos os espaços de Orlicz-Sobolev, que por sua vez são uma generalização dos espaços de Sobolev a partir dos espaços de Orlicz. Devido a sua estrutura topológica e geométrica serem bastante ricas, estes espaços vêm ganhando notoriedade, e sendo fortemente utilizados nas mais diversas áreas do conhecimento.

O estudo do operador ϕ -Laplaciano é um tópico bastante relevante que atraiu a atenção de muitos especialistas devido às suas aplicações (ver, por exemplo [4]). No **Capítulo 2**, estudaremos

soluções do tipo passo da montanha para equações elípticas quasilineares, utilizando-se das ideias encontradas em [6]. Assumiremos algumas hipóteses convenientes, e discutiremos a existência de soluções fracas para o problema envolvendo o operador.

Capítulo 1

Uma breve introdução aos espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Neste capítulo faremos uma breve introdução aos conceitos básicos dos espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev, que serão nosso ambiente de trabalho durante todo o texto.

1.1 N-função

Definição 1.1. Dizemos que $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **N-função** (ou função de Young) se satisfaz as seguintes propriedades:

1. Φ é uma função convexa e contínua;
2. Φ é par;
3. $\Phi(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0$;
4. $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Phi(u)}{u} = 0$ e $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$.

Exemplo 1.1. Deste modo temos que as funções $\Phi_1(t) = |t|^p$, $\Phi_2(t) = e^{|t|} - |t| - 1$ e $\Phi_3(t) = |t|^p \ln(1 + t)$, para $p \in (1, \infty)$ e $t \in \mathbb{R}$, são exemplos de N-funções.

Agora vamos fazer uma caracterização para as N-funções, que futuramente será bastante útil.

Teorema 1.1. *Seja $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as propriedades*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s) ds,$$

onde $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaz as propriedades:

- (i) $\phi(0) = 0$;

(ii) $\phi(t) > 0 \forall t > 0$;

(iii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \infty$;

(iv) ϕ é não decrescente;

(v) ϕ é contínua à direita.

Então, Φ é uma N -função.

Demonstração.

Verificação da condição 2.: pela definição da própria Φ segue imediatamente que esta função é par.

Verificação da condição 1.: Φ é contínua por definição. Mostraremos que Φ é convexa. De fato, considere inicialmente $0 \leq u_1 < u_2$, segue do fato de ϕ ser não decrescente e do item (ii), que

$$\Phi(u_1) = \int_0^{u_1} \phi(t)dt < \int_0^{u_2} \phi(t)dt = \Phi(u_2),$$

ou seja Φ é estritamente crescente, e além disso temos que

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) &= \int_0^{(u_1+u_2)/2} \phi(t)dt \leq \int_0^{u_1} \phi(t)dt + \int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} \phi(t)dt \\ &= \int_0^{u_1} \phi(t)dt + \frac{1}{2} \left[\int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} \phi(t)dt + \int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} \phi(t)dt \right] \\ &\leq \int_0^{u_1} \phi(t)dt + \frac{1}{2} \left[\int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} \phi(t)dt + \int_{(u_1+u_2)/2}^{u_2} \phi(t)dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{u_1} \phi(t)dt + \frac{1}{2} \int_0^{u_1} \phi(t)dt + \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} \phi(t)dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{u_1} \phi(t)dt + \int_0^{u_2} \phi(t)dt \right] = \frac{1}{2} [\Phi(u_1) + \Phi(u_2)]. \end{aligned}$$

Pelo fato de Φ ser par e crescente, podemos generalizar este resultado para u_1 e u_2 arbitrário, de forma que

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) &= \Phi\left(\frac{|u_1 + u_2|}{2}\right) \leq \Phi\left(\frac{|u_1| + |u_2|}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} [\Phi(u_1) + \Phi(u_2)]. \end{aligned}$$

obtemos assim o resultado desejado.

Verificação da condição 3.: segue imediatamente da definição.

Verificação da condição 4.: Note que se $u > 0$ por (iv)

$$\Phi(u) = \int_0^u \phi(t)dt \leq u\phi(u).$$

. Daí, por (i) e (v) temos

$$0 \leq \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(u)}{u} \leq \lim_{u \rightarrow 0^+} \phi(u) = \phi(0) = 0,$$

agora para caso $u < 0$ o resultado é análogo, concluindo que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Phi(u)}{u} = 0.$$

Finalmente, se $u > 0$ por (iii) e (iv) obtemos

$$\frac{\Phi(u)}{u} = \frac{1}{u} \int_0^u \phi(t) dt \geq \frac{1}{u} \int_{u/2}^u \phi(t) dt \geq \phi\left(\frac{u}{2}\right) \frac{1}{u} \int_{u/2}^u 1 dt = \frac{\phi(u/2)}{2} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \infty. \quad (1.1)$$

□

Demonstraremos agora, que a recíproca do Teorema 1.1 é verdadeira.

Teorema 1.2. *Seja $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma N -função. Existe $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.1 tal que*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s) ds.$$

Demonstração. Pela convexidade de Φ , obtemos que existe a derivada lateral à direita de Φ , em todo ponto de $\mathbb{R}$, e além disso Φ'_+ é não decrescente em $\mathbb{R}$, a mesma possui uma quantidade enumerável de pontos descontínuos (vide [11], página 233). À vista disso, concluimos pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que Φ pode ser escrita da seguinte forma

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \Phi'_+(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Mostraremos que

$$\phi(t) := \Phi'_+(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (1.2)$$

satisfaz as condições (i) – (v).

Verificação da condição (v): Sejam $t_0, s, t \in \mathbb{R}_+$, com $t_0 < s < t$, pela convexidade de Φ temos que

$$\frac{\Phi(t_0) - \Phi(s)}{t_0 - s} < \frac{\Phi(t) - \Phi(s)}{t - s} < \frac{\Phi(t_0) - \Phi(t)}{t_0 - t}$$

pela continuidade de Φ , temos

$$\frac{\Phi(t_0) - \Phi(s)}{t_0 - s} \leq \Phi'_+(s) \leq \frac{\Phi(t_0) - \Phi(s)}{t_0 - t}, \text{ para } t_0 < s.$$

portanto,

$$\lim_{s \rightarrow t_0^+} \Phi'_+(s) = \Phi'_+(t_0).$$

Verificação da condição (ii): Caso $t > 0$, temos

$$\Phi(t) = \int_0^t \Phi'_+(s) ds \leq \Phi'_+(t)t.$$

Conclui-se

$$\Phi'_+(t) \geq \frac{\Phi(t)}{t} > 0, \text{ para } t > 0. \quad (1.3)$$

Verificação da condição (iii): É só observar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi'_+(t) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty.$$

Verificação da condição (i): caso $\Phi'_+(t) = 0$, por (1.3) implica que $\Phi(t_0) = 0$, e pelo fato de Φ é uma N-função temos que $t_0 = 0$.

Reciprocamente, é só observar que

$$\Phi'_+(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t)}{t} = 0.$$

□

Definição 1.2. Seja $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma N-função dada por

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} \phi(t) dt.$$

Seja ψ a inversa à direita de ϕ , isto é, $\psi(s) = \sup\{t : \phi(t) \leq s\}$. A N-função $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Psi(v) = \int_0^{|v|} \psi(s) ds$$

é dita **N-função complementar** a Φ .

Sendo assim, se Ψ é N-função complementar a Φ então, reciprocamente, Φ é complementar a Ψ , donde iremos nos referir a tal par de funções por **N-funções mutuamente complementares** ou simplesmente **N-funções complementares**.

O próximo Teorema estabelecerá uma nova N-função Φ_* , associada à Φ . Posteriormente verificaremos que esta é a N-função crítica para se obter imersões compactas nos espaços de Orlicz-Sobolev. Esses espaços de Orlicz-Sobolev será definido mais adiante.

Teorema 1.3. *Seja Φ uma N-função satisfazendo*

$$\int_0^1 \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{n}}} d\tau < +\infty \quad (1.4)$$

e

$$\int_1^\infty \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{n}}} d\tau = +\infty, \quad (1.5)$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Então a função $\Phi_*^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{n}}} d\tau, \quad (1.6)$$

é bijetiva e sua inversa Φ_* , estendida em toda reta de forma que Φ_* seja uma função par, é uma N-função.

Demonstração. Note que

$$\frac{d\Phi_*^{-1}}{dt}(t) = \frac{\Phi^{-1}(t)}{t^{1+\frac{1}{n}}} > 0, \quad t > 0. \quad (1.7)$$

Portanto, obtemos que Φ_*^{-1} é estritamente crescente em $\mathbb{R}_+$, por conseguinte injetiva em $\mathbb{R}_+$. Como Φ_*^{-1} é estritamente crescente, contínua em $\mathbb{R}_+$ e satisfaz (1.5), isto implica que Φ_*^{-1} é sobrejetiva em $\mathbb{R}_+$. Concluindo assim Φ_*^{-1} é bijetiva em $\mathbb{R}_+$.

Agora mostraremos que Φ_* é uma N-função. Para tal, é suficiente observar os seguintes fatos:

(i) $\Phi_*(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0$.

De fato, como Φ_*^{-1} é bijetiva em $\mathbb{R}_+$ e $\Phi_*^{-1}(0) = 0$, conclui-se o resultado desejável

(ii) **A função Φ_* é convexa e contínua na $\mathbb{R}$.**

Para mostrar que Φ_* é contínua basta mostrar que a derivada de $\Phi_*^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}_+^*$, por (1.7) temos que Φ_* é derivável em $\mathbb{R}_+^*$, além disso sua derivada é dada por

$$\Phi'_*(s) = \frac{1}{\frac{d\Phi_*^{-1}}{dt}(t)}, \text{ para } s = \Phi_*^{-1}(t) > 0.$$

Daí, pelo fato de Φ_* é par, concluímos que Φ_* é contínua.

Agora, vamos mostrar que Φ_* é convexa. De fato, como Φ é uma função convexa, dado $s \geq 0$ temos que

$$\Phi(\alpha\Phi^{-1}(s)) = \Phi(\alpha\Phi^{-1}(s) + (1-\alpha)0) \leq \alpha\Phi(\Phi^{-1}(s)) \leq \alpha s, \quad \alpha \in [0, 1],$$

daí, pelo fato de Φ_*^{-1} ser crescente em $\mathbb{R}_+$, resulta

$$\alpha\Phi^{-1}(s) \leq \Phi^{-1}(\alpha s), \quad s \geq 0 \text{ e } \alpha \in [0, 1].$$

Seja $0 \leq \alpha = \frac{a}{b} < 1$ e $s = b > 0$, tem-se

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(a) &\geq \frac{a}{b} \Phi^{-1}(b) \\ &> \left(\frac{a}{b}\right)^{1+\frac{1}{n}} \Phi^{-1}(b).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(\Phi_*^{-1})'(a) &= \frac{\Phi^{-1}(a)}{a^{1+\frac{1}{n}}} \\ &> \left(\frac{a}{b}\right)^{1+\frac{1}{n}} \frac{\Phi^{-1}(b)}{a^{1+\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{\Phi^{-1}(b)}{b^{1+\frac{1}{n}}} \\ &= (\Phi_*^{-1})'(b).\end{aligned}$$

Logo $(\Phi_*^{-1})'$ é decrescente em $\mathbb{R}_+$, concluindo-se assim que Φ_*^{-1} é côncava em $\mathbb{R}_+$. Daí, obtemos que a derivada de Φ_*^{-1} é decrescente em $\mathbb{R}_+$. Diante disso, como a derivada de Φ_* em $\mathbb{R}_+^*$ é dada por

$$\Phi_*'(s) = \frac{1}{\frac{d\Phi_*^{-1}}{dt}(t)}, \text{ para } s = \Phi_*^{-1}(t) > 0$$

deduzimos que Φ_*' será uma função crescente em $\mathbb{R}_+^*$. Portanto, Φ_* será convexa em $\mathbb{R}_+^*$, e pelo fato de Φ_* ser par, concluimos que Φ_* é uma função convexa $\mathbb{R}$.

$$(iii) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_*(t)}{t} = \infty.$$

Usando a Regra de L'Hospital, temos

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_*(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_*'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(\Phi_*^{-1})'(\Phi_*(t))} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_*(t)^{1+\frac{1}{n}}}{\Phi^{-1}(\Phi_*(t))} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\Phi_*(t)}{\Phi^{-1}(\Phi_*(t))} \right) \Phi_*(t)^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Além disso, como Φ é uma N-função, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty,\tag{1.9}$$

em especialmente, temos

$$\frac{\Phi(\Phi^{-1}(\Phi_*(t)))}{\Phi^{-1}(\Phi_*(t))} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty,$$

ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_*(t)}{\Phi^{-1}(\Phi_*(t))} = +\infty.$$

Por esse motivo, e por (1.8), concluimos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_*(t)}{t} = \infty.$$

$$(iii) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_*(t)}{t} = 0.$$

A demonstração desse resultado segue de forma análoga ao item anterior.

□

Definição 1.3. Dizemos que uma N-função Φ satisfaz a **condição** Δ_2 ($\Phi \in \Delta_2$) se existem constante $k > 0$ e $u_0 > 0$ tais que

$$\Phi(2u) \leq k\Phi(u), \quad \forall u \geq u_0.$$

Observe que quando $\Phi(t) = |t|^p$, que é o caso no qual se modela os espaços de Lebesgue, essa função Φ satisfaz trivialmente a condição Δ_2 , pois a função $|t|^p$ é homogeneia então $\Phi(2u) = |2u|^p = 2^p|u|^p = 2^p\Phi(u)$.

O próximo Teorema será utilizado para determina uma caracterização das N-funções que satisfazem a condição Δ_2 , e futuramente com os espaços de Orlicz reflexivos.

Teorema 1.4. *Sejam Φ e Ψ N-funções complementares, e ϕ derivada à direita de Φ . Então $\Phi, \Psi \in \Delta_2$ se, e somente se*

$$1 < \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{u\phi(u)}{\Phi(u)} \leq \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{u\phi(u)}{\Phi(u)} < \infty. \quad (1.10)$$

1.2 Espaços de Orlicz

Para podermos definirmos os espaços de Orlicz com mais clareza, será necessário definir a **classe de Orlicz**. Nos casos em que não for especificado, Ω representará um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$, no qual consideramos a medida de Lebesgue.

Definição 1.4. Seja Φ uma N-função. Definimos a **classe de Orlicz** da função Φ como o conjunto

$$\mathcal{L}_\Phi(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_\Omega \Phi(u(x))dx < \infty\}.$$

Note que, se $\Phi(s) = |s|^p$, $1 < p < \infty$ temos $\mathcal{L}_\Phi = L^p$, o famoso espaço de Lebesgue.

Observação 1.1. Também é útil observar que em geral $\mathcal{L}_\Phi$ não é um espaço vetorial, a título de exemplo, a classe $\mathcal{L}_{\Phi_1}$ dada pela N-função $\Phi_1(s) = e^{s^2} - 1$, não é um espaço vetorial.

Porem temos que toda classe de Orlicz $\mathcal{L}_\Phi$ é um conjunto convexo, com efeito de que se $u_1, u_2 \in \mathcal{L}_\Phi$ então, supondo $t \in [0, 1]$, a função $u_t(x) = tu_1(x) + (1-t)u_2(x)$, é tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(u_t(x))dx &= \int_{\Omega} \Phi(tu_1(x) + (1-t)u_2(x))dx \\ &\leq t \int_{\Omega} \Phi(u_1(x))dx + (1-t) \int_{\Omega} \Phi(u_2(x))dx < \infty, \end{aligned}$$

daí segue que $u_t \in \mathcal{L}_\Phi$.

Teorema 1.5. A classe de Orlicz $\mathcal{L}_\Phi$ é um espaço vetorial se, e somente se, a N-função Φ satisfaz a condição Δ_2 .

Demonstração. Suponha que $\mathcal{L}_\Phi$ é um espaço vetorial. Por isto, em particular $2u \in \mathcal{L}_\Phi$ sempre que $u \in \mathcal{L}_\Phi$. Seja $\Phi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a N-função dada por $\Phi_1(v) = \Phi(2v)$, considere $\mathcal{L}_{\Phi_1}$ a classe de Orlicz gerada por essa função. Desta forma $\mathcal{L}_\Phi \subset \mathcal{L}_{\Phi_1}$, pois caso $v \in \mathcal{L}_\Phi$ temos que

$$\int_{\Omega} \Phi_1(v(x))dx = \int_{\Omega} \Phi(2v(x))dx < \infty.$$

Afirmamos que existem $k > 0$ e $u_0 > 0$ tais que

$$\Phi(2u) = \Phi_1(u) \leq a\Phi(u) \quad \forall u \geq u_0. \quad (1.11)$$

Suponha, por absurdo que inequação (1.11) não seja satisfeita. Desta forma existe uma sequência crescente de números (v_n) , com $v_1 > 0$ tal que

$$\Phi_1(v_n) > 2^n \Phi(v_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dividimos o domínio Ω em subdomínios Ω_n , tais que

$$|\Omega_n| = \frac{\Phi(v_1)|\Omega|}{2^n \Phi(v_n)}.$$

Considere $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a função mensurável definida por

$$v(x) = \begin{cases} v_n(x) & \text{se } x \in \Omega_n \\ 0 & \text{se } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n, \end{cases}$$

observe que $v \in \mathcal{L}_\Phi$, desde que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Phi(v(x))dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} \Phi(v(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(v_n)|\Omega_n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(v_n)\Phi(v_1)|\Omega|}{2^n \Phi(v_n)} \\ &= \Phi(v_1)|\Omega| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.\end{aligned}$$

Contudo $v \notin \mathcal{L}_{\Phi_1}$, pois

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Phi_1(v(x))dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} \Phi_1(v(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_1(v_n)|\Omega_n| \\ &> \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \Phi(v_n)|\Omega_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \Phi(v_n)\Phi(v_1)|\Omega|}{2^n \Phi(v_n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(v_1)|\Omega| = \infty,\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Assim, (1.11) é satisfeita, concluindo que $\Phi \in \Delta_2$.

Reciprocamente, suponha que $\Phi \in \Delta_2$. Assim, dado $l > 1$ existem constantes k_l e u_0 maiores que 0, tais que $\Phi(lu) \leq k_l \Phi(u)$, $\forall u \geq u_0$. Portanto, tomando

$$K = \{x \in \Omega : |u(x)| < u_0\},$$

temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Phi(lu(x))dx &= \int_{\Omega \setminus K} \Phi(lu(x))dx + \int_K \Phi(lu(x))dx \\ &\leq k_l \int_{\Omega} \Phi(u(x))dx + \Phi(lu_0)|K| < \infty.\end{aligned}$$

Agora, se $0 \leq l \leq 1$, então $\Phi(lu(x)) \leq \Phi(u(x))$ pois Φ é par e crescente, concluindo também que $lu \in \mathcal{L}_\Phi$. Caso $l \leq 0$ segue o mesmo resultado, pois Φ é uma função par. Portanto, dado qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que $\alpha u \in \mathcal{L}_\Phi$ sempre que $u \in \mathcal{L}_\Phi$. Além disso, se u_1 e u_2 estão em $\mathcal{L}_\Phi$, logo

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Phi(u_1(x) + u_2(x))dx &= \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{1}{2}(2u_1(x)) + \frac{1}{2}(2u_2(x))\right)dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Phi(2u_1(x))dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Phi(2u_2(x))dx < \infty,\end{aligned}$$

e por fim, $u_1 + u_2 \in \mathcal{L}_\Phi$, consequentemente $\mathcal{L}_\Phi$ é espaço vetorial. Terminando assim a demonstração. $\square$

Faremos agora uma generalização dos espaços de Lebesgue, denominada de **espaços de Orlicz**, em homenagem ao matemático polonês Władysław Roman Orlicz.

Definição 1.5. Sejam Φ e Ψ N-funções complementares, o espaço vetorial normado $(L_\Phi(\Omega), \|\cdot\|_\Phi)$ é denotado **espaço de Orlicz** com respeito à Φ , onde

$$L_\Phi(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_\Omega u(x)v(x)dx < \infty. \quad \forall v \in \mathcal{L}_\Psi(\Omega)\}$$

Em [1], é provado que o conjunto $L_\Phi(\Omega)$ é igual à:

$$L_\Phi(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \exists \lambda > 0 \text{ com } \int_\Omega \Phi\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right)dx < \infty \right\}.$$

Denotaremos o espaço de Orlicz simplesmente por L_Φ quando não houver ambiguidade.

Definição 1.6. Definimos como **norma de Luxemburg** a aplicação $\|\cdot\|_\Phi : L_\Phi(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\|_\Phi = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right)dx \leq 1 \right\}, \quad u \in L_\Phi(\Omega).$$

Faremos a seguinte economia de notação, nos referindo ao espaço vetorial normado $(L_\Phi(\Omega), \|\cdot\|_\Phi)$ apenas como $L_\Phi(\Omega)$, ou simplesmente por L_Φ , quando não houver ambiguidade.

Teorema 1.6. A norma de Luxemburg $\|\cdot\|$ define uma norma sobre o espaço L_Φ , além disso, ela é equivalente a norma $\|\cdot\|_{(\Phi)}$ (**norma de Orlicz**) definida por

$$\|u\|_{(\Phi)} := \sup_{\int_\Omega \Psi(v(x))dx \leq 1} \left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right|,$$

onde Ψ é a N-função complementar de Φ .

Uma demonstração desse Teorema é encontrada na página 33 de [15].

Teorema 1.7. O espaço de Orlicz L_Φ é um espaço vetorial, com efeito de Demonstração.

- Suponha que $u, v \in L_\Phi(\Omega)$, existem $\lambda_u, \lambda_v > 0$, tais que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda_u}\right)dx < +\infty \quad \text{e} \quad \int_\Omega \Phi\left(\frac{v}{\lambda_v}\right)dx < +\infty,$$

por causa disso, e uma vez que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi\left(\frac{u+v}{\lambda_u + \lambda_v}\right)dx &= \int_\Omega \Phi\left(\frac{\lambda_u u}{\lambda_u(\lambda_u + \lambda_v)} + \frac{\lambda_v v}{\lambda_v(\lambda_u + \lambda_v)}\right)dx \\ &\leq \frac{\lambda_u}{\lambda_u + \lambda_v} \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda_u}\right)dx + \frac{\lambda_v}{\lambda_u + \lambda_v} \int_\Omega \Phi\left(\frac{v}{\lambda_v}\right)dx < \infty, \end{aligned}$$

mostrando que $u + v \in L_\Phi(\Omega)$.

- Sejam $u \in L_\Phi$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tomando $\gamma = \lambda_u \lambda$ temos que

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{\lambda u}{\gamma}\right) dx = \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{u}{\lambda_u}\right) dx < \infty,$$

portanto $\lambda u \in L_\Phi$.

□

Veremos mais a frente a relação entre os espaços L_Φ e $\mathcal{L}_\Phi$.

O próximo resultado é similar ao conhecida desigualdade de Hölder para os espaços de Lebesgue

Teorema 1.8. (*Desigualdade de Hölder*) Sejam Φ e Ψ duas N -funções complementares. Então, para cada $u \in L_\Phi(\Omega)$ e cada $v \in L_\Psi(\Omega)$ é válida a desigualdade

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \right| \leq \|u\|_\Phi \|v\|_\Psi$$

Teorema 1.9. Sejam $L_\Phi(\Omega)$ um espaço de Orlicz e $u \in L_\Phi(\Omega)$, então $u \in L^1(\Omega)$ e existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\|u\|_1 \leq K \|u\|_\Phi,$$

ou seja, todo espaço de Orlicz está imerso continuamente no espaço de Lebesgue das funções integráveis.

Demonstração. Seja Ψ a N -função complementar a Φ . Considere $C > 0$ de forma que $\Psi(C) = \frac{1}{|\Omega|}$. Podemos fazer isto pois Ψ é uma N -função. Dessa forma, a função $v \equiv C$ é tal que $v \in \mathcal{L}_\Psi$ e $\int_{\Omega} \Psi(v(x)) dx = 1$, tomemos $u \in L_\Phi$. Assim

$$\int_{\Omega} |u(x)| dx = \frac{1}{C} \int_{\Omega} u(x) \operatorname{sgn}(u(x)) v(x) dx,$$

onde sgn é a função sinal. Mas, como Ψ é função par temos

$$\int_{\Omega} \Psi(\operatorname{sgn}(u(x))v(x)) dx = \int_{\Omega} \Psi(v(x)) dx = 1,$$

ou seja, $(\text{sgn}(u))v$ pertence a $\mathcal{L}_\Psi$. Logo,

$$\begin{aligned} \|u\|_1 &= \int_{\Omega} |u(x)| dx \\ &= \frac{1}{C} \left| \int_{\Omega} u(x) \text{sgn} u(x) v(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{C} \sup_{\int_{\Omega} \Psi(v(x)) dx \leq 1} \left| \int_{\Omega} u(x) (v(x)) dx \right| \\ &= \frac{1}{C} \|u\|_{\Psi}. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.10. *Todo espaço de Orlicz $L_{\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L_{\Phi}(\Omega)$. Segue do Teorema 1.9 que $\{u_n\}$ também é uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$. Mas como $L^1(\Omega)$ é Banach e portanto existe $u_0 \in L^1$, tal que $\{u_n\}$ converge fortemente para u_0 . Sabendo disto, temos pelo Teorema 4.19 de [3], $\{u_n\}$ possui uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ e uma função $h \in L^1$, tais que

- $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$, q.t.p em Ω ;
- $|u_{n_k}| \leq h(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo $x \in \Omega$.

Considere $\varepsilon > 0$. Como (u_{n_k}) ainda é uma sequência de Cauchy, existe $k(\varepsilon)$ tal que para todo k , $k + p > k(\varepsilon)$, temos

$$\int_{\Omega} |u_{n_{k+p}}(x) - u_{n_k}(x)| \cdot |v(x)| dx < \varepsilon,$$

para cada $v \in \mathcal{L}_{\Psi}$ satisfazendo $\int_{\Omega} \Psi(v(x)) dx \leq 1$. Fazendo p suficientemente grande, obtemos pelo Teorema de Fatou-Lebesgue (vide [8]) que

$$\int_{\Omega} |u_0(x) - u_{n_k}(x)| \cdot |v(x)| dx \leq \varepsilon,$$

para cada $v \in \mathcal{L}_{\Psi}$ satisfazendo $\int_{\Omega} \Psi(v(x)) dx \leq 1$. Segue desta última inequação primeiramente que $u_0 - u_{n_k} \in L_{\Phi}$. Consequentemente $u_0 \in L_{\Phi}$. Além disso, também verificamos imediatamente desta inequação que

$$\|u_{n_k} - u_0\|_{(\Phi)} \leq \varepsilon, \quad \forall k > k(\varepsilon),$$

donde (u_{n_k}) converge na norma de Orlicz para u_0 . Como (u_n) é sequência de Cauchy e (u_{n_k}) é subsequência de (u_n) convergente para u_0 , temos que (u_n) converge para u_0 na norma de Orlicz.

□

O próximo resultado estabelecerá uma associação entre o espaço de Orlicz L_{Φ} e a classe de Orlicz $\mathcal{L}_{\Phi}$, quando a N-função Φ satisfaz à condição Δ_2 .

Teorema 1.11. *O espaço de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$ é igual à classe de Orlicz $\mathcal{L}_\Phi(\Omega)$ se e somente se Φ satisfaz a condição Δ_2 .*

Demonstração. Considere V um espaço vetorial que contém $\mathcal{L}_\Phi(\Omega)$. Dado $u \in L_\Phi(\Omega)$, existe $\lambda > 0$ tal que $\frac{u}{\lambda} \in \mathcal{L}_\Phi(\Omega)$, segue pelo fato de que $\mathcal{L}_\Phi(\Omega) \subseteq V$ que

$$\frac{u}{\lambda} \in V,$$

mostrando que $L_\Phi(\Omega) \subseteq V$, ou seja, $L_\Phi(\Omega)$ é o menor espaço vetorial que contém $\mathcal{L}_\Phi(\Omega)$. Assim pelo Teorema 1.5, e pelo fato de que $L_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial, temos o resultado desejado. $\square$

A próxima definição será bastante útil para tratarmos da separabilidade e reflexibilidade dos espaços de Orlicz.

Definição 1.7. Definimos o fecho em L_Φ do espaço das funções essencialmente limitadas $L^\infty(\Omega)$ na norma de Orlicz por $E_\Phi(\Omega)$, ou simplesmente E_Φ , caso não haja ambiguidade, ou seja, definamos

$$E_\Phi(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{|\cdot|_\Phi}.$$

Teorema 1.12. *L^∞ é denso no espaço de Orlicz L_Φ apenas quando Φ satisfaz a condição Δ_2 , ou seja, $E_\Phi = L_\Phi$, se e somente se, $\Phi \in \Delta_2$.*

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada na página 41 de [15].

Teorema 1.13. *Sejam Φ e Ψ N -funções complementares. L_Φ é um espaço reflexivo, se e somente se, Φ e Ψ satisfazem a condição Δ_2 .*

Demonstração. Suponha que $\Phi \notin \Delta_2$, vamos mostrar que a imersão

$$\begin{aligned} L_{(\Psi)} &\longrightarrow L_\Phi^* \\ v &\longmapsto T_v \end{aligned} \tag{1.12}$$

não é sobrejetiva, onde para cada $v \in L_{(\Psi)}$, definimos o funcional $T_v : L_\Phi \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$T_v(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx. \tag{1.13}$$

Pela desigualdade de Hölder (ver [1]) temos que

$$|T_v(u)| = \left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \|v\|_{(\Psi)} \|u\|_{(\Phi)}.$$

Portanto se L_Φ^* é equipado com a norma definida por $\|T\|_\Phi^* := \sup\{|T(u)| : \|u\|_\Phi \leq 1\}$, temos que

$$\|T_v\|_\Phi^* = \sup \left\{ \left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| : \|u\|_\Phi \leq 1 \right\} = \|v\|_{(\Psi)}.$$

Logo a imersão (1.12) é isométrica

De fato, suponha por absurdo que essa imersão seja sobrejetiva, pelo Teorema 1.11 temos que existe $u_0 \in L_\Phi \setminus E_\Phi$. Definindo $T \in \langle E_\Phi, u_0 \rangle$ um funcional linear contínuo tal que $T(u) = 0$ se $u \in E_\Phi$ e $T(u_0) = 1$. Pelo Teorema de Hanh-Banach, estendendo T a um funcional linear contínuo em L_Φ . Então existe $v \in L_{(\Psi)}$ tal que T será dado por (1.13). Considere a sequência de truncamentos

$$v_n(x) = \begin{cases} v(x) & \text{se } |v(x)| \leq n \\ 0 & \text{se } |v(x)| > n. \end{cases} \quad (1.14)$$

Portanto, cada v_n é limitado e, conseqüentemente, pertence a E_Φ . No entanto, a sequência de funções positiva $v_n v \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v^2$ q.t.p. Desta forma, pelo Teorema de Fatou-Lebesgue,

$$0 = \sup_n T(v_n) = \sup_n \int_\Omega v_n(x)v(x)dx \geq \int_\Omega v^2(x)dx.$$

Por esse motivo concluímos que $v = 0$, o que é absurdo pois $T(u_0) = 1$, assim concluindo nossa argumentação.

Reciprocamente, suponha que $\Phi \in \Delta_2$, então $E_\Phi = L_\Phi$, iremos mostrar que a imersão isométrica

$$\begin{aligned} L_{(\Psi)} &\longrightarrow E_\Phi^* \\ v &\longmapsto T_v \end{aligned} \quad (1.15)$$

é sobrejetiva. De fato, tomando $T \in E_\Phi^*$, e definindo $\Sigma = \{U \subseteq \Omega : U \text{ é mensurável}\}$ e a função F tal que

$$\begin{aligned} F : \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ U &\longmapsto F(U) = T(k(\cdot, U)), \end{aligned}$$

onde k é a função característica. Notemos que se $k_0 > 0$ é tal que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u(x)}{k_0}\right)dx = 1,$$

segue do fato de que uma vez que Φ é estritamente crescente, dado $\varepsilon > 0$ temos que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u(x)}{k_0 - \varepsilon}\right)dx > \int_\Omega \Phi\left(\frac{u(x)}{k_0}\right)dx = 1.$$

então $\|u\|_\Phi = k_0$.

Como aplicação desta última afirmação, calculamos a norma de Luxemburgo da função característica $k(\cdot, A)$ de um subconjunto A mensurável qualquer de Ω . Uma vez que $\Phi(u) = 0$ se e somente se $u = 0$, temos

$$\int_{\Omega} \Phi\left(k(x, A)\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|A|}\right)\right)dx = \int_{\Omega} k(x, A)\frac{1}{A}dx = 1,$$

donde segue que

$$|F(U)| \leq \|T\|_\Phi^* \cdot \|k(\cdot, U)\|_\Phi \xrightarrow{|U| \rightarrow 0} 0,$$

daí, pelo Teorema de Radon-Nikodyn, podemos encontrar uma função v mensurável tal que

$$F(U) = \int_U v(x)dx.$$

Portanto se w é uma função mensurável simples, isto é, assumindo um número finito de valores, vemos que

$$\begin{aligned} T(w) &= T(\sum \alpha_i k(\cdot, U_i)) = \sum \alpha_i T(k(\cdot, U_i)) \\ &= \sum \alpha_i F(U_i) = \sum \alpha_i \int_{U_i} v(x)dx = \int_{\Omega} w(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

Tomando $w \in L^\infty$, temos também $T(w) = \int_{\Omega} w(x)v(x)dx$. Para tanto, é suficiente observar que se w é essencialmente limitada, podemos tomar uma sequência (w_n) de função simples convergindo em quase todo ponto e em E_Φ para w . Usando mais uma vez a densidade de L^∞ em E_Φ temos que para qualquer $u \in E_\Phi$,

$$T(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Por fim, nos resta mostra que $v \in L_\Psi(\Omega)$. Desta forma, consideramos $u \in L_\Phi$.

Novamente considerando os truncamentos de $u_n \in L^\infty$

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } |u(x)| \leq n \\ 0 & \text{se } |u(x)| > n, \end{cases}$$

temos que $|u_n v| \rightarrow |uv|$ em quase todo ponto, e pelo Teorema de Fatou-Lebesgue,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| &\leq \sup_n \left\{ \int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx \right\} \\ &= \sup_n |T(|u_n|sgnv)| \leq \|T\|_\Phi^* \sup_n \|u_n\|_\Phi \\ &\leq \|T\|_\Phi^* \|u\|_\Phi < \infty. \end{aligned}$$

Portando, $v \in L_\Psi$, como queríamos demonstrar.

□

1.3 Espaços de Orlicz-Sobolev e o $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$

Estudamos na seção anterior uma generalização do espaços de Lebesgue $L^P(\Omega)$ (o espaço de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$). Agora, nada mais natural que obtermos uma generalização do espaço de Orlicz, de forma análoga em que definimos os espaços de Sobolev partir dos espaços de Lebesgue, o espaço Orlicz-Sobolev.

Definição 1.8. Seja Φ uma N-função, definimos o espaço de **Orlicz-Sobolev**, $W^1 L_\Phi(\Omega)$, o espaço vetorial das funções dado por:

$$W^1 L_\Phi(\Omega) = \left\{ u \in L_\Phi(\Omega) : \begin{array}{l} \text{existem } f_1, f_2, \dots, f_n \in L_\Phi(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega f_i \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right\}.$$

Quando não houver ambiguidade, denotaremos o espaço $W^1 L_\Phi(\Omega)$ por $W^1 L_\Phi$.

Observação 1.2. Por [3] temos que se $u \in W^1 L_\Phi$ então tais f_i são únicas. Assim, denotemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i \text{ e } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Esta notação não é por acaso, é imediato verificar que se a função $u \in W^1 L_\Phi$ possui todas as derivadas parciais no sentido usual, então a igualdade $\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$ também é verdadeira, estas funções f_i são chamadas de derivadas fracas da função u .

Observação 1.3. Podemos definir a norma sobre $W^1 L_\Phi(\Omega)$, da seguinte forma:

$$\|u\|_{W^1 L_\Phi} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \|u\|_\Phi, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\Phi \right\}.$$

Além disso, é fácil verificar que essa norma é equivalente a

$$\|u\|_{1, \Phi} = \|u\|_\Phi + \|\nabla u\|_\Phi, \quad u \in W^1 L_\Phi(\Omega).$$

Teorema 1.14. $W^1 L_\Phi$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Note que podemos denotar o espaço $W^1 L_\Phi$ como um subespaço de um produto cartesiano de L_Φ , $n + 1$ vezes:

$$\begin{aligned} W^1 L_\Phi &\longrightarrow L_\Phi \times L_\Phi \times \dots \times L_\Phi \\ u &\longmapsto (u, \nabla u), \end{aligned}$$

e que isso define uma imersão isométrica, então para mostrar que W^1L_Φ é um espaço de Banach, basta mostrar que a imagem de tal imersão é fechada. Daí, considere

$$(u_k, \nabla u_k) \longrightarrow (u, u_1, \dots, u_n), \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Ou seja, vamos mostrar que $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, para todo $i = 1, \dots, n$. De modo que $(u_k, \nabla u_k)$ converge em $\prod_{n+1} L_\Phi$ para $(u, u_1, \dots, u_n)$, então $u_k \rightarrow u$ e $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \rightarrow u_i$ em L_Φ , para cada i . Agora, tomando $\phi \in C_0^\infty$, temos que $\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \in L_\Psi$, para cada i , onde Ψ denota a N-função complementar a Φ . Portanto

$$v \longmapsto \int_{\Omega} v(x)\phi(x)dx \quad \text{e} \quad v \longmapsto \int_{\Omega} v(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx$$

definem funcionais lineares contínuos em L_Φ . Consequentemente,

$$\int_{\Omega} u_k(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx \longrightarrow \int_{\Omega} u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x)\phi(x)dx \longrightarrow \int_{\Omega} u_i(x)\phi(x)dx.$$

Consequentemente, desde que

$$\int_{\Omega} u_k(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x)\phi(x)dx,$$

logo

$$\int_{\Omega} u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx = - \int_{\Omega} u_i(x)\phi(x)dx,$$

para cada $i = 1, \dots, n$. Então, como ϕ é arbitrário, temos, por definição, que $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, para cada i , finalizando nossa demonstração. □

Algumas propriedades estudadas na seção anterior sobre o espaço de Orlicz serão facilmente estendidas para os espaços de Orlicz-Sobolev. Podemos resumí-las no seguinte

Teorema 1.15.

1. $W^1E_\Phi = W^1L_\Phi$ se e somente se $\Phi \in \Delta_2$;
2. Para cada $T \in (W^1E_\Phi)^*$ existem $v_i \in L_\Psi$, $i = 0, \dots, n$ tais que

$$T(u) = \int_{\Omega} u(x)v_0(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)v_i(x)dx;$$

3. W^1L_Φ é reflexivo, se e somente se, $\Phi \in \Delta_2$ e $\Psi \in \Delta_2$.

Demonstração. O item 1 é facilmente mostrado pelo Teorema 1.11, o item 2 segue do mesmo argumento da prova do Teorema 1.13, e o item 3, por sua vez, segue imediatamente do Teorema 1.13. □

De forma análoga que definimos os espaços $W_0^{1,p}$, iremos definir agora o espaço $W_0^1 L_\Phi$.

Definição 1.9. Definimos o espaço $W_0^1 L_\Phi$ como:

$$W_0^1 L_\Phi(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^1 L_\Phi}}.$$

Ou seja, $W_0^1 L_\Phi$ é o fecho na norma $\|\cdot\|_{W^1 L_\Phi}$ do espaço $C_0^\infty(\Omega)$.

Do mesmo modo, conseguiríamos definir o espaço $W_0^1 E_\Phi$. No entanto, é fácil verificar que dada qualquer N-função Φ , temos que invariavelmente $W_0^1 E_\Phi = W_0^1 L_\Phi$. Pois, caso $u \in W_0^1 L_\Phi$, existirá uma sequência $(u_k) \in C_0^\infty$ tal que $u_k \rightarrow u$ em $W^1 L_\Phi$. Assim sendo, temos $u_k \rightarrow u$ e $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$, em L_Φ , para cada $i = 1, \dots, n$. Pela definição do espaço E_Φ , temos que $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \in E_\Phi$, consequentemente $u \in W_0^1 E_\Phi$, ou seja, $W_0^1 L_\Phi \subseteq W_0^1 E_\Phi$. Como $W_0^1 E_\Phi \subseteq W_0^1 L_\Phi$ temos o resultado desejado.

Lema 1.1. *Existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|u\|_\Phi \leq c \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\Phi,$$

para todo $u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$.

Demonstração. Assuma que $|\Omega| = d$, para algum $d > 0$. Primeiramente vamos mostrar que

$$\int_\Omega \Phi(u(x)) dx \leq \int_\Omega \Phi\left(2d \frac{\partial u}{\partial x_1}\right), \quad (1.16)$$

para todo $u \in W_0^1 L_\Phi$. De fato, considere $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Logo, pela desigualdade de Jensen (vide Teorema 4.3.3.1 em [8]),

$$\begin{aligned} \Phi(u(\xi, x_2, \dots, x_n)) &= \Phi\left(\int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) d\xi\right) \\ &= \Phi\left(\int_{-\infty}^{x_1} \left[\frac{d}{d}\right] \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) d\xi\right) \\ &\leq \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(d \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n)\right) d\xi. \end{aligned}$$

Integrando os dois lados da inequação acima sobre Ω , encontramos

$$\int_{\Omega} \Phi(u(x))dx \leq \int_{\Omega} \Phi\left(d \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right)dx. \quad (1.17)$$

É evidente que (1.17) também é satisfeito para toda $u \in W_0^1 L_{\Phi}$, cujo suporte é compacto em Ω . Portanto, agora considerando $u \in W_0^1 L_{\Phi}$ e um aberto Ω^1 contendo $\bar{\Omega}$, tal que $|\Omega^1| = 2d$, e estendendo u para todo este aberto Ω^1 , fazendo $u = 0$ em $\Omega^1 \setminus \Omega$, temos $u \in W_0^1 L_{\Phi}(\Omega^1)$ e $\text{supp } u$ compacto em Ω^1 . Consequentemente, por (1.17), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(u(x))dx &= \int_{\Omega^1} \Phi(u(x))dx \\ &\leq \int_{\Omega^1} \Phi\left(2d \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right)dx \\ &= \int_{\Omega} \Phi\left(2d \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)dx, \end{aligned}$$

provando que a inequação (1.16) é satisfeita.

Note que toda a argumentação da demonstração de (1.16) pode ser usada para todas as outras derivadas parciais de u . Deste modo, derivando a desigualdade de Poincaré. De fato, se $u \in W_0^1 L_{\Phi}$ então

$$\tilde{u}_i := \frac{u}{2d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\Phi}} \in W_0^1(\Omega).$$

Agora, por (1.16), e para cada $i = 1, \dots, n$, temos

$$\int_{\Omega} \Phi(\tilde{u}_i(x))dx \leq \int_{\Omega} \Phi\left(2d \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{2d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\Phi}}\right)dx \leq 1$$

então,

$$\int_{\Omega} \Phi\left(2d \frac{u(x)}{2d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\Phi}}\right)dx \leq 1,$$

daí

$$\|u\|_{\Phi} \leq 2d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\Phi},$$

finalizando assim a demonstração. □

O próximo Teorema é uma versão da desigualdade de Poincaré para os espaços de Orlicz-Sobolev.

Teorema 1.16. (*Desigualdade de Poincaré no espaço $W_0^1 L_{\Phi}(\Omega)$*) *Sejam Ω um domínio*

limitado e Φ uma N -função satisfazendo a condição Δ_2 , para todo $u \in W_0^1(\Omega)$, vale que

$$\int_{\Omega} \Phi(|u(x)|) dx \leq \lambda \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|) dx,$$

onde λ é uma constante dependente de Φ .

Demonstração. Como Ω é limitado, então existem constantes reais a e b , tais que $\Omega \subseteq (a, b) \times \mathbb{R}^{n-1}$. considerando $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$, pelo Teorema fundamental do Cálculo, obtemos

$$|\varphi(t)| \leq \int_a^b |\varphi'(s)| ds, \quad t \in (a, b). \quad (1.18)$$

Sejam $v \in C_0^\infty(\Omega)$ e $x = (t, x')$, com $x' = (x_2, \dots, x_n)$, temos

$$\begin{aligned} |v(x)| &= |v(t, x')| \\ &= |v_{x'}(t)| \\ &\leq \int_a^b |v'_{x'}(t)| dt. \end{aligned} \quad (1.19)$$

À vista disso, e pela desigualdade de Jensen (vide Teorema 4.3.3.1 em [8]), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(v(x)) ds &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_a^b \Phi(|v(t, x')|) dt dx' \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_a^b \Phi\left(\int_a^b |v'_{x'}(s)| ds\right) dt dx' \\ &= (b-a) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi\left(\frac{(b-a) \int_a^b |\frac{\partial v}{\partial x_1}(s, x')| ds}{\int_a^b 1 ds}\right) dx', \end{aligned}$$

por esse motivo, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(v(x)) ds &\leq K(b-a) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi\left(\frac{\int_a^b |\frac{\partial v}{\partial x_1}(s, x')| ds}{\int_a^b 1 ds}\right) dx' \\ &\leq K(b-a) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{b-a} \Phi\left(\int_a^b |\frac{\partial v}{\partial x_1}(s, x')| ds\right) dx' \\ &= K \int_{\Omega} \Phi\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x'}(x)\right|\right) dx \\ &\leq K \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v|) dx. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Tomando $u \in W_0^1(\Omega)$, e seja $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\varphi_n \longrightarrow u \text{ em } W_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\|\nabla(\varphi_n - u)\|_\Phi \longrightarrow 0.$$

Como $\Phi \in \Delta_2$, tem-se que

$$\int_{\Omega} \Phi(|\nabla(\varphi_n - u)|) dx \longrightarrow 0,$$

daí, segue de Brézis-Lieb que

$$\int_{\Omega} \left(\Phi(|\nabla \varphi_n|) - \Phi(|\nabla(\varphi_n - u)|) - \Phi(|\nabla u|) \right) \rightarrow 0,$$

portanto

$$\int_{\Omega} \Phi(|\nabla \varphi_n|) dx \rightarrow \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx. \quad (1.21)$$

De forma similar, mostra-se que

$$\int_{\Omega} \Phi(|\varphi_n|) dx \rightarrow \int_{\Omega} \Phi(|u|) dx. \quad (1.22)$$

Por (1.20), obtemos

$$\int_{\Omega} \Phi(|\varphi_n|) dx \leq K \int_{\Omega} \Phi(|\nabla \varphi_n|) dx,$$

para $n \in \mathbb{N}$. Por (1.21), (1.22) e fazendo $n \rightarrow \infty$ concluímos que

$$\int_{\Omega} \Phi(|u|) dx \leq \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx, \quad u \in W_0^1(\Omega).$$

□

O próximo resultado vai ter bastante utilidade neste trabalho, e diz respeito sobre uma imersão no espaço de Orlicz-Sobolev, quando assumimos uma N -função que obedece as condições (1.4) e (1.5). Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada na página 54 de [15].

Teorema 1.17. *Seja Ω limitado, e que ocorre as imersões de Sobolev $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $1 \leq q \leq n/(n-1)$. Suponha que a N -função Φ satisfaz as hipóteses (1.4) e (1.5). Se Φ_* é dado por (1.6), então a imersão abaixo é contínua*

$$W^1 L_{\Phi} \hookrightarrow L_{\Phi_*}.$$

Além disso, se N é N -função tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(kt)}{\Phi_*(t)} = 0,$$

para todo $k > 0$, então a imersão

$$W^1 L_{\Phi} \hookrightarrow L_N$$

existe e é compacta.

Capítulo 2

O Problema de Dirichlet Para Δ_ϕ :

Neste trabalho consideraremos o problema (D) permitindo que a função ϕ seja não homogêneo. Para isto considere as seguintes funções Φ e Ψ , dadas por

$$\Phi(s) := \int_0^s \phi(t)dt, \quad \Psi(s) := \int_0^s \phi^{-1}(t)dt, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Então pelo **Capítulo 1** temos que Φ e Ψ são N-funções complementares, que definem os espaços de Orlicz $L_\Phi := L_\Phi(\Omega)$ e $L_\Psi := L_\Psi(\Omega)$, respectivamente. Então, pelos Teoremas 1.4 e 1.13, L_Φ será reflexivo, se e somente se,

$$(\phi_0) \quad 1 < \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{s\phi(s)}{\Phi(s)} \leq \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{s\phi(s)}{\Phi(s)} < \infty.$$

Assumiremos a seguinte condição um pouco mais restritiva

$$(\phi_1) \quad 1 < \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{s\phi(s)}{\Phi(s)} \leq \sup_{s > 0} \frac{s\phi(s)}{\Phi(s)} < \infty$$

O que implica que (ϕ_0) é satisfeita, ou seja, que Φ satisfaz a condição Δ_2 .

Vamos agora introduzir o conjugado do espaço de Orlicz-Sobolev Φ_* de Φ , que é dado por

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{\frac{N+1}{N}}} d\tau. \quad (2.2)$$

Aqui supomos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{\frac{N+1}{N}}} d\tau < \infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{\frac{N+1}{N}}} d\tau = \infty, \quad (2.3)$$

vide Teorema 1.3. No caso $\Phi(t) = \frac{|t|^p}{p}$, (2.3) é verdade, se e somente se, $N > p$.

Faremos a seguinte suposição sobre a não linearidade g :

$$(g_1) \quad \begin{cases} \text{existem um homeomorfismo crescente } f \text{ de } \mathbb{R} \text{ em } \mathbb{R}, \text{ e } a_1, a_2 \text{ constantes não} \\ \text{negativas, tais que } |g(x, s)| \leq a_1 + a_2 f(|s|), \text{ para todo } (x, s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Definindo:

$$F(s) := \int_0^s f(t)dt, \quad \tilde{F}(s) := \int_0^s f^{-1}(t)dt, \quad (2.4)$$

Obtemos N-funções complementares que definem respectivamente os espaços de Orlicz L_F e $L_{\tilde{F}}$.

Também assumiremos que L_F e $L_{\tilde{F}}$ são reflexivos, ou seja, supomos que

$$(g_2) \quad 1 < \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{tf(t)}{F(t)} \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{tf(t)}{F(t)} < +\infty.$$

Além disso, segue do Teorema 1.16 que se Φ satisfaz a condição Δ_2 , então existe uma melhor constante positiva λ_1 , tal que

$$\lambda_1 \int_{\Omega} \Phi(|u|)dx \leq \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|)dx, \quad (2.5)$$

para todo $u \in W_0^1 L_{\Phi}$.

Finalmente, introduziremos a seguinte notação:

$$p_{\Phi} := \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\phi(t)}{\Phi(t)}, \quad p^{\Phi} := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\phi(t)}{\Phi(t)}, \quad p^0 := \sup_{t>0} \frac{t\phi(t)}{\Phi(t)}, \quad (2.6)$$

$$p^{-\Phi} := \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{t\phi(t)}{\Phi(t)}, \quad p_{\Phi_*} := \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\Phi'_*(t)}{\Phi_*(t)}. \quad (2.7)$$

Em seguida, enunciaremos um dos principais resultados.

Teorema 2.1. *Seja ϕ definida por (0.1) um homeomorfismo crescente de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ satisfazendo (ϕ_1) e (2.3). Considere $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ satisfazendo $g(x, 0) = 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e f um homeomorfismo ímpar crescente de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Assumimos que g e f satisfazem (g_1) com f também satisfazendo (g_2) . Sejam Φ, Φ_* e F definidas por (2.1), (2.2) e (2.4) respectivamente, e suponha que as seguintes condições são verdadeiras:*

$$(H_1) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{\Phi_*(kt)} = 0, \quad \text{para todo } k > 0$$

$$(H_2) \quad \limsup_{s \rightarrow 0} \frac{G(x, s)}{\Phi(s)} < \lambda_1, \quad \text{uniformemente para } x \in \overline{\Omega},$$

onde λ_1 obedece as condição (2.5), e

$$(H_3) \begin{cases} \text{existem } \theta > p^\Phi \text{ e } R_1 > 0 \text{ tais que} \\ sg(x, s) \geq \theta G(x, s) \geq 0 \text{ para todo } |s| \geq R_1 \text{ e todo } x \in \overline{\Omega}, \\ \text{além disso } G(x, R_1) > 0 \text{ em } \Omega, \text{ ou } G(x, -R_1) > 0 \text{ em } \Omega \end{cases}$$

Vamos assumir ainda que

$$(\phi_2) \quad p^0 < p_{\Phi_*}.$$

Então o problema (D) tem solução não trivial $u \in W_0^1 L_\Phi$, isto é u é um ponto crítico do funcional $I : W_0^1 L_\Phi \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) := \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|) dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx. \quad (2.8)$$

Aqui vamos denotar por $I_i : W_0^1 L_\Phi \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, os funcionais

$$I_1(u) := \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|) dx \quad \text{e} \quad I_2(u) = \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad (2.9)$$

isto é

$$I(u) = I_1(u) - I_2(u). \quad (2.10)$$

Observação 2.1. A condição (H_1) tem a consequência importante, de que a imersão

$$W^1 L_\Phi \hookrightarrow L_F \quad (2.11)$$

é compacta (vide o Teorema 1.17), fato crucial no nosso desenvolvimento e que corresponde a um tipo de condição de subcriticalidade. As condições (H_2) e (H_3) correspondem a condições de tipo superlinearidade em 0 e ∞ , respectivamente, para problemas semilineares elípticos.

Observação 2.2. para o caso onde $\Phi(s) = s^p/p$, as condições (ϕ_1) e (ϕ_2) são automaticamente satisfeitas. De fato, neste caso e para $N > p$,

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\phi^{-1}(\tau)}{\tau^{\frac{N+1}{N}}} d\tau = \int_0^t \frac{p\tau^{\frac{1}{p}}}{\tau^{\frac{N+1}{N}}} d\tau = pt^{\frac{N-p}{Np}} \frac{Np}{N-p},$$

portanto $\Phi_*(t) = \frac{N-p}{Np^2} t^{\frac{Np}{N-p}}$, então

$$\begin{aligned} p_{\Phi_*} &= \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\Phi'_*(t)}{\Phi_*(t)} = \liminf_{t \rightarrow +\infty} t \left(\frac{\frac{N-p}{Np^2} t^{\frac{Np}{N-p}}}{\frac{N-p}{Np^2} t^{\frac{Np}{N-p}}} \right)', \\ &= \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \frac{t^{\frac{Np}{N-p}}}{\frac{N-p}{Np^2} t^{\frac{Np}{N-p}}} = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{Np}{N-p}, \\ &= \frac{Np}{N-p} > p, \end{aligned}$$

além disso, temos que

$$p^0 = \sup_{t>0} \frac{t\phi(t)}{\Phi(t)} = \sup_{t>0} \frac{tt^{p-1}}{\frac{t^p}{p}} = p,$$

ou seja,

$$p^0 < p_{\Phi_*}. \quad (2.12)$$

Observação 2.3. Note que o funcional $I : W_0^1 L_\Phi \rightarrow \mathbb{R}$ em (2.8) está bem definido: de fato, se $u \in W_0^1 L_\Phi$, então pela condição (H_1) , temos que $W_0^1 L_\Phi \hookrightarrow L_F$ e portanto $u \in L_F$ logo $u \in L^1 := L^1(\Omega)$. Consequentemente, por (g_1) ,

$$|G(x, s)| \leq \left| \int_0^s |g(x, t)| dt \right| \leq a_1 |s| + a_2 F(|s|),$$

e assim,

$$\int_\Omega |G(x, u(x))| dx < +\infty.$$

Em nosso próximo Teorema substituiremos a condição (ϕ_2) do Teorema 2.1 por novas condições. Isso nos oferece novos resultados de existência não abrangidos pelo Teorema 2.1.

Teorema 2.2. Suponha que todas as condições do Teorema 2.1 são verdadeiras, exceto possivelmente a condição (ϕ_2) que é substituída por

$$(\phi_3) \quad \begin{cases} \text{existe } p \in (1, N) \text{ e } C > 0 \text{ tal que} \\ \Phi(x) \geq C|x|^p \text{ para todo } x \geq 0; \end{cases}$$

$$(H_4) \quad \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{F(s)}{|s|^{\frac{Np}{N-p}}} < \infty.$$

Então o problema (D) tem solução não trivial $u \in W_0^1 L_\Phi$, onde u é um ponto crítico do funcional I definido por (2.8).

Corolário 2.1. Assuma que ϕ e g satisfazem todas as condições do Teorema 2.1 exceto a condição (ϕ_2) , além disso suponha que

$$(\phi_4) \quad p^{-\Phi} < p_\Phi < N,$$

$$(H_5) \quad \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{\log F(s)}{\log s} < \frac{Np_\Phi}{N - p_\Phi},$$

então a conclusão do Teorema 2.2 é verdadeira.

2.1 A geometria do funcional I

Considerando as condições do Teorema 2.1, segue de [9] que I_1 (vide (2.9)) é funcional convexo de classe C^1 , e com derivada de Fréchet dado por

$$\langle I'_1(u), v \rangle = \int_{\Omega} a(|\nabla u(x)|) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad v \in W_0^1 L_{\Phi}.$$

Mostraremos agora que o funcional I_2 (vide (2.9)) é de Classe C^1 , em função de (2.11) e do próximo Lema.

Lema 2.1. *Seja g uma função que satisfaz (g_1) e (g_2) . Então o funcional $I_2 : L_F \rightarrow R$ é de classe C^1 com derivada de Fréchet dada por*

$$\langle I'_2(u), v \rangle = \int_{\Omega} g(x, u(x)) v(x) dx, \quad u, v \in L_F. \quad (2.13)$$

Demonstração. Iremos mostrarmos que I_2 é Gâteaux diferenciável em L_F com I'_2 linear e contínua de L_F em $(L_F)^*$. Sejam $u, h \in L_F$ e $t \in (0, 1)$. Então

$$\frac{1}{t} [I_2(u + th) - I_2(u)] = \int_{\Omega} \frac{1}{t} [G(x, u(x) + th(x)) - G(x, u(x))] dx,$$

e

$$\frac{1}{t} [G(x, u(x) + th(x)) - G(x, u(x))] dx \rightarrow g(x, u(x)) h(x), \text{ com } t \rightarrow 0,$$

para q.t.p $x \in \Omega$. Além disso,

$$\begin{aligned} \left| \frac{G(x, u(x) + th(x)) - G(x, u(x))}{t} \right| &= \left| \int_0^1 g(x, u(x) + tsh(x)) h(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |g(x, u(x) + tsh(x)) h(x)| dx, \end{aligned}$$

e assim, por (g_1) e pela monotonicidade da função f concluímos que

$$\left| \frac{G(x, u(x) + th(x)) - G(x, u(x))}{t} \right| \leq (a_1 + a_2 f(|u(x)| + |h(x)|)) |h(x)|. \quad (2.14)$$

Como o lado direito da desigualdade (2.14) é integrável, usando a desigualdade de Hölder no espaço de Orlicz (vide [15]), concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [I_2(u + th) - I_2(u)] = \int_{\Omega} g(x, u(x)) h(x) dx.$$

Agora estabeleceremos a continuidade de I'_2 . Assuma que $u_n \rightarrow u$ em L_F . Segue-se de (2.13)

(como I'_2 é a derivada de I_2 neste ponto) que para qualquer $h \in L_F$,

$$|\langle I'_2(u_n) - I'_2(u), h \rangle| \leq \int_{\Omega} |g(x, u_n(x)) - g(x, u(x))| |h(x)| dx.$$

Assim, por (g_1) , o Lema será provado se estabelecermos que aplicação

$$u \mapsto g(\cdot, u)$$

pertence a $C(L_F, L_{\tilde{F}})$. Como f satisfaz (g_2) , usamos o Teorema 2.4.12 (ii) em [14], ou seja, neste caso, $\|g(\cdot, u_n) - g(\cdot, u)\|_{\tilde{F}} \rightarrow 0$, se e somente se

$$\int_{\Omega} \tilde{F}(|g(x, u_n(x)) - g(x, u(x))|) dx \rightarrow 0, \quad \text{com } n \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

Desde que $u_n \rightarrow u$ em L_F , podemos assumir que $\|u_n - u\|_F \leq \frac{1}{4}$. Então, pelas propriedades da norma dos espaços de Orlicz, temos que

$$\int_{\Omega} F(4|u_n(x) - u(x)|) dx \leq 4\|u_n - u\|_F \rightarrow 0 \text{ com } n \rightarrow \infty,$$

e assim $F(4|u_n - u|) \rightarrow 0$ em L^1 . Portanto, pelo Teorema 4.9 em [3], a sequência $\{F(4|u_n - u|)\}$ contém uma subsequência tal que

$$F(4|u_n(x) - u(x)|) \rightarrow 0, \quad \text{com } n \rightarrow \infty \text{ q.t.p em } \Omega, \quad (2.16)$$

e

$$F(4|u_n(x) - u(x)|) \leq k_1(x) \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ com } k_1 \in L^1 \quad (2.17)$$

Em seguida, pela monotonicidade e a convexidade de F ,

$$F(2|u_n(x)|) \leq \frac{1}{2}F(4|u_n(x) - u(x)|) + \frac{1}{2}F(4|u(x)|),$$

e assim, desde que $4u \in L_F$, concluímos por (2.17) que existe $k_2 \in L^1$ tal que

$$F(2|u_n(x)|) \leq k_2(x), \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Agora, usando que $\tilde{F}(f(u_n(x))) \leq F(2|u_n(x)|)$ concluímos que

$$\tilde{F}(f(u_n(x))) \leq k_2(x) \quad \text{q.t.p em } \Omega. \quad (2.18)$$

Usando a continuidade de $\tilde{F}$ e g , e por (2.16) obtemos que

$$\tilde{F}(|g(x, u_n(x)) - g(x, u(x))|) \rightarrow 0 \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Além disso, por (g_1) e a convexidade de $\tilde{F}$,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(|g(x, u_n(x)) - g(x, u(x))|) &\leq \tilde{F}(2a_1 + a_2|f(u_n(x))| + a_2|f(u(x))|) \\ &\leq \frac{\tilde{F}(6a_1) + \tilde{F}(3a_2|f(u_n(x))|) + \tilde{F}(3a_2|f(u(x))|)}{3} \end{aligned}$$

e assim, por um argumento semelhante ao usado para obter 2.18 concluimos que existe $k_3 \in L^1$ tal que

$$\tilde{F}(|g(x, u_n(x)) - g(x, u(x))|) \leq k_3(x), \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Portanto, (2.15) segue do Teorema da convergência dominada de Lebesgue, completa a demonstração deste Lema. □

Os dois próximos lemas que se seguem, serão uma relação entre o Teorema 2.1 e as condições geométricas do Teorema do passo da montanha.

Lema 2.2. *Supondo que as condições do Teorema 2.1 são satisfeitas, então a condição (G_1) é verdadeira, ou seja, existem um $\rho > 0$ e $r > 0$ tal que $I(u) \geq r$ para $\|u\|_0 = \rho$.*

Demonstração. O funcional I pode ser escrito como:

$$I(u) = \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|) dx \left(1 - \frac{\int_{\Omega} G(x, u(x))}{\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|) dx} \right). \quad (2.19)$$

Primeiramente, estimaremos o quociente

$$\frac{\int_{\Omega} G(x, u(x))}{\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|) dx}.$$

Por (H_2) temos que existe $\varepsilon \in (0, 1)$ e $t_0 > 0$ tal que

$$G(x, t) \leq \lambda_1(1 - \varepsilon)\Phi(t), \quad \text{para todo } |t| \leq t_0, \quad \text{e todo } x \in \overline{\Omega},$$

considere $\Omega_0 := \{x \in \Omega; |u(x)| \geq t_0\}$, temos que

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0} G(x, u(x)) dx \leq \lambda_1(1 - \varepsilon) \int_{\Omega \setminus \Omega_0} \Phi(|u(x)|) dx,$$

somando $\int_{\Omega_0} G(x, u(x))$ dos dois lados da desigualdade a cima, temos

$$\int_{\Omega} G(x, u(x))dx \leq \lambda_1(1 - \varepsilon) \int_{\Omega \setminus \Omega_0} \Phi(|u(x)|)dx + \int_{\Omega_0} G(x, u(x))dx. \quad (2.20)$$

Como $F(t)/t$ é crescente quando $t > 0$, por (g_1) temos que existe um constante C_0 positiva tal que

$$\begin{aligned} |G(x, t)| &= \left| \int_0^t g(x, s)ds \right| \leq \left| \int_0^t a_1 ds + \int_0^t a_2 f(|s|)ds \right| \\ &\leq a_1|t| + a_2 F(|t|) \leq C_0 F(|t|) \end{aligned} \quad (2.21)$$

para todo $|t| > t_0$ e todo $x \in \bar{\Omega}$. Pela definição de p_{Φ_*} , temos que existem $\mu \in (0, p_{\Phi_*})$ e $t_1 \geq t_0$ tal que

$$\frac{\Phi'_*(t)}{\Phi_*(t)} \geq \frac{p_{\Phi_*} - \mu}{t}, \quad \text{para todo } t > t_1. \quad (2.22)$$

Seja $k_0 = t_1/t_0$, então t_0, t_1 e consequentemente k_0 são constantes independentes de u , e $k_0 \geq 1$. Usando (H_1) e (2.21), temos que existira uma constante positiva $\widetilde{C}_0$ tal que

$$|G(x, t)| \leq C_0 F(|t|) \leq \widetilde{C}_0 \Phi_*(k_0|t|), \quad (2.23)$$

para todo $|t| > t_0$ e todo $x \in \bar{\Omega}$. Portanto, como $W_0^1 L_{\Phi} \hookrightarrow L_{\Phi_*}$ continuamente, obtemos que

$$\int_{\Omega_0} G(x, u(x))dx \leq \widetilde{C}_0 \int_{\Omega_0} \Phi_*(k_0|u(x)|)dx. \quad (2.24)$$

Mostraremos que existe uma constante positiva C_1 tal que

$$\widetilde{C}_0 \int_{\Omega_0} \Phi_*(k_0|u(x)|)dx \leq C_1 \|u\|_0^{p_{\Phi_*} - \mu}, \quad (2.25)$$

para $\|u\|_0$ pequeno. De fato, para $x \in \Omega_0$ temos que $k_0|u(x)| \geq t_1$, integrando (2.22) no intervalo $(k_0|u(x)|, (k_0|u(x)|)/\|k_0 u\|_{\Phi_*})$, com $\|k_0 u\|_{\Phi_*} \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_{k_0|u(x)|}^{\frac{k_0|u(x)|}{\|k_0 u\|_{\Phi_*}}} \frac{\Phi'_*(t)}{\Phi_*(t)} dt &= \log \left(\frac{\Phi_*(\frac{k_0|u(x)|}{\|k_0 u\|_{\Phi_*}})}{\Phi_*(k_0|u(x)|)} \right) \\ &\geq \int_{k_0|u(x)|}^{\frac{k_0|u(x)|}{\|k_0 u\|_{\Phi_*}}} \frac{p_{\Phi_*} - \mu}{t} dt = (p_{\Phi_*} - \mu) \log \left(\frac{1}{\|k_0 u\|_{\Phi_*}} \right), \end{aligned}$$

portanto

$$\Phi_*(k_0|u(x)|) \leq \|k_0 u\|_{\Phi_*}^{p_{\Phi_*} - \mu} \Phi_* \left(\frac{k_0|u(x)|}{\|k_0 u\|_{\Phi_*}} \right), \quad x \in \Omega_0.$$

Então

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_0 \int_{\Omega_0} \Phi_*(k_0|u(x)|)dx &\leq \widetilde{C}_0(k_0\|u(x)\|_{\Phi_*})^{p_{\Phi_*}-\mu} \int_{\Omega_0} \Phi_*\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{\Phi_*}}\right)dx \\ &\leq \widetilde{C}_0(k_0\|u(x)\|_{\Phi_*})^{p_{\Phi_*}-\mu}.\end{aligned}$$

Assim, assumindo k_1 a melhor constante da imersão $W_0^1 L_{\Phi} \hookrightarrow L_{\Phi_*}$, e tome $u \in W_0^1 L_{\Phi}$ tal que $\|u\|_0 \leq \min 1/k_0, 1/(k_0 k_1)$ nos temos que (2.25) é verdade para alguma constate positiva C_1 .

Então, usando (2.24) e (2.25), temos que

$$\int_{\Omega_0} G(x, u(x))dx \leq C_1 \|u\|_0^{p_{\Phi_*}-\mu}. \quad (2.26)$$

Finalmente, pela definição p^0 obtemos que

$$\frac{p^0}{s} \geq \frac{\phi(s)}{\Phi(s)}, \quad \text{para todo } s > 0,$$

integrando os dois lados da inequação no intervalo $(t, t/\tau)$, onde $\tau \in (0, 1]$ e $t > 0$ temos

$$\Phi(t) \geq \tau^{p^0} \Phi(t/\tau),$$

e pela proposição 6 da página 77 de [14], com $\|u\|_0 \leq 1$, temos que

$$I_1(u) = \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|)dx \geq \|u\|_0^{p^0} \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|\nabla u(x)|}{\|u\|_0}\right)dx = \|u\|_0^{p^0} \quad (2.27)$$

consequentemente por (2.26),

$$\frac{\int_{\Omega_0} G(x, u(x))dx}{\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|)dx} \leq C_1 \|u\|_0^{p_{\Phi_*}-\mu-p^0}. \quad (2.28)$$

Agora usando (2.19),(2.20),(2.5) e (2.26), obtemos que

$$\begin{aligned}I(u) &= \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|)dx \left(1 - \frac{\int_{\Omega} G(x, u(x))}{\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|)dx}\right) \\ &\geq \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|)dx \left(1 - \frac{\lambda_1(1-\varepsilon) \int_{\Omega \setminus \Omega_0} \Phi(|u(x)|)dx + \int_{\Omega_0} G(x, u(x))dx}{\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|)dx}\right) \\ &\geq \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|)dx \left(1 - \frac{\lambda_1(1-\varepsilon) \int_{\Omega \setminus \Omega_0} \Phi(|u(x)|)dx}{\lambda_1 \int_{\Omega_0} \Phi(|u(x)|)dx} - \frac{\int_{\Omega_0} G(x, u(x))dx}{\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|)dx}\right) \\ &\geq \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|)dx \left(\varepsilon - C_1 \|u\|_0^{p_{\Phi_*}-\mu-p^0}\right),\end{aligned}$$

note que se

$$\|u\|_0 = \rho \leq \min \left\{ \frac{1}{k_0 k_1}, \left(\frac{\varepsilon}{2C_1} \right)^{\frac{1}{p_{\Phi_*} - \mu - p^0}} \right\} \quad (2.29)$$

temos que

$$I(u) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|) dx.$$

Por outro lado, como Φ satisfaz a condição Δ_2 , segue do Capítulo 3 de [10], que

$$\|u\|_0 \rightarrow 0 \quad \text{se e somente se} \quad \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|) dx \rightarrow 0.$$

consequentemente para $\rho > 0$ como (2.29), existe um $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\rho) > 0$ tal que para todo u com $\|u\|_0 = \rho$, fazendo com que $\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|) dx \geq \tilde{\mu}$. Obtemos que

$$I(u) \geq \frac{\varepsilon}{2} \tilde{\mu}, \quad (2.30)$$

fazendo $r = \tilde{\mu}\varepsilon/2$ o resultado segue. □

Lema 2.3. *Supondo que as condições do Teorema 2.1 são satisfeitas, então a condição (G_2) é verdadeira, ou seja, existe um $e \in X$ com $\|e\| > \rho$, tal que $I(e) \leq 0$.*

Demonstração. Sejam $\theta > p^{\Phi}$ e $R_1 > 0$ dado por (H_3) , e seja $\mu > 0$ tal que $\theta > p^{\Phi} + \mu$. Por (H_3) , temos $G(x, R_1) > 0$ em Ω ou $G(x, -R_1) > 0$ em Ω , e

$$sg(x, s) \geq \theta G(x, s), \quad \text{para todo } |s| > R_1 \quad \text{e todo } x \in \overline{\Omega},$$

o que é equivalente a escrever

$$|s|^{\theta} s \frac{d}{ds} \left(|s|^{-\theta} G(x, s) \right) \geq 0 \quad \text{para todo } |s| > R_1 \quad \text{e todo } x \in \overline{\Omega},$$

isto é, o funcional $|\cdot|^{-\theta} G(x, \cdot)$ é crescente para $s \geq R_1$ e decrescente para $s \leq -R_1$, portanto segue-se que

$$G(x, u) \geq R_1^{-\theta} G(x, -R_1) |u|^{\theta} \quad \text{para todo } s \leq -R_1, \quad (2.31)$$

$$G(x, u) \geq R_1^{-\theta} G(x, -R_1) |u|^{\theta} \quad \text{para todo } s \geq R_1. \quad (2.32)$$

Escolhendo $u \in W_0^1 L_{\Phi}$ tal que se

$$\tilde{\Omega}^+ := \{x \in \Omega | u(x) \geq R_1\}, \quad \tilde{\Omega}^- := \{x \in \Omega | u(x) \leq -R_1\}.$$

Então a medida de Lebesgue de cada um desses conjuntos é positiva. Considere $t_0 > 0$ de forma

que para todo $\sigma > 0$

$$\frac{\Phi(\sigma t)}{\Phi(t)} \leq \sigma^{p^\Phi + \mu}, \quad \text{para todo } t \geq t_0,$$

e para todo $s > 0$, definimos os conjuntos

$$\Omega_1 := \{x \in \Omega \mid |\nabla u(x)| \leq t_0\}, \quad \Omega_2 := \{x \in \Omega \mid |\nabla u(x)| \geq t_0\},$$

$$\Omega_3 := \{x \in \Omega \mid s|u(x)| \leq R_1\}, \quad \Omega_4^+ := \{x \in \Omega \mid su(x) \geq R_1\},$$

$$\Omega_4^- := \{x \in \Omega \mid su(x) \leq -R_1\}.$$

Então para $s > 1$, temos que

$$\begin{aligned} I(su) &= \int_{\Omega} \Phi(s|\nabla u(x)|)dx - \int_{\Omega} G(x, su)dx \\ &= \int_{\Omega_1} \Phi(s|\nabla u(x)|)dx + \int_{\Omega_2} \Phi(s|\nabla u(x)|)dx - \int_{\Omega} G(x, su(x))dx \\ &\leq \Phi(st_0)|\Omega_1| + s^{p^\Phi + \mu} \int_{\Omega_2} \Phi(|\nabla(x)|)dx - \int_{\Omega} G(x, su(x))dx \\ &\leq s^{p^\Phi + \mu} \Phi(t_0)|\Omega| + s^{p^\Phi + \mu} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla(x)|)dx + \int_{\Omega_3} |G(x, su(x))|dx \\ &\quad - \int_{\Omega_4^+} G(x, su(x))dx - \int_{\Omega_4^-} G(x, su(x))dx. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} C_1(u) &:= \Phi(t_0)|\Omega| + \int_{\Omega} \Phi(|\nabla(x)|)dx, \\ C_2 &:= |\Omega| \sup_{\substack{v \in \bar{\Omega} \\ |v| \leq R_1}} |G(x, v)|, \\ C_3(u) &:= \int_{\tilde{\Omega}^+} R_1^{-\theta} G(x, R_1) |u(x)|^\theta + \int_{\tilde{\Omega}^-} R_1^{-\theta} G(x, -R_1) |u(x)|^\theta. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Sabemos que $\Omega_4^+ \subset \tilde{\Omega}^+$ e $\Omega_4^- \subset \tilde{\Omega}^-$, logo por (2.31) e (2.32) temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_4^+} G(x, su(x))dx &\geq s^\theta \int_{\tilde{\Omega}^+} R_1^{-\theta} G(x, R_1) |u(x)|^\theta > 0, \\ \int_{\Omega_4^-} G(x, su(x))dx &\geq s^\theta \int_{\tilde{\Omega}^-} R_1^{-\theta} G(x, -R_1) |u(x)|^\theta > 0, \end{aligned} \tag{2.35}$$

portanto $C_3 > 0$. Agora usando (2.33), (2.34) e (2.35) obtemos

$$I(su) \leq s^{p^\Phi + \mu} c_1(u) + C_2 - s^\theta C_3,$$

finalmente dado $s \geq s_0$ de forma que

$$I(su) \leq s^\theta (s^{p^\Phi + \mu - \theta} c_1(u) + s^{-\theta} C_2 - C_3) < 0,$$

isto é possível pois $p^\Phi + \mu < \theta$. Então, fazendo $e = s_0 u$, temos que $I(e) < 0$, finalizando assim a demonstração. $\square$

Note que na demonstração do Lema 2.3 não foi utilizado em nenhum momento a condição (Φ_2) , ou seja, o mesmo resultado vale assumindo as condições do Teorema 2.2 ao invés das condições do Teorema 2.1.

Lema 2.4. *Supondo que as condições do Teorema 2.2 são satisfeitas, então a condição (G_1) é verdadeira, ou seja, existem um $\rho > 0$ e $r > 0$ tal que $I(u) \geq r$ para $\|u\|_0 = \rho$.*

Demonstração. Pela condição (ϕ_3) temos que $\Phi_*(x) = \tilde{C}|x|^{\frac{Np}{N-p}}$, para alguma constante positiva $\tilde{C}$ e para todo $x \geq 0$. Isto, e pelo fato da imersão $W_0^1 L_\Phi \hookrightarrow L_{\Phi_*}$ ser contínua, temos que $W_0^1 L_\Phi \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}$ continuamente.

Por outro lado, a hipótese (H_4) implica que

$$F(t) \leq C|t|^{\frac{Np}{N-p}} \quad \text{para todo } |t| \geq t_0, \quad (2.36)$$

para alguma constante positiva t_0 . Obtemos de (2.21) que existe uma constante positiva C tal que

$$\int_{\Omega_0} G(x, u(x)) dx \leq C_0 \int_{\Omega_0} F(|u(x)|) dx \leq C \int_{\Omega_0} |u(x)|^{\frac{Np}{N-p}} dx. \quad (2.37)$$

Por (ϕ_3) temos que $W_0^1 L_\Phi \subset W_0^{1,p}$. Daí segue pela imersão contínua $W_0^{1,p} \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}$ e por (2.37) que para $u \in W_0^1 L_\Phi$

$$\int_{\Omega_0} G(x, u(x)) \leq \tilde{C} \|u\|_{1,p}^{\frac{Np}{N-p}}, \quad (2.38)$$

Onde $\tilde{C}$ é uma constante positiva e por $\|u\|_{1,p} := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ Consequentemente, novamente usando (ϕ_3) , obtemos que

$$\frac{\int_{\Omega_0} G(x, u(x)) dx}{\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx} \leq \tilde{C} \|u\|_{1,p}^{\frac{Np}{N-p} - p},$$

por (ϕ_3) temos que existe uma constante positiva $\tilde{C}_0$ talque

$$\frac{\int_{\Omega_0} G(x, u(x))}{\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|) dx} \leq \frac{\int_{\Omega_0} G(x, u(x)) dx}{\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx}.$$

Finalmente, podemos concluir que

$$\lim_{\|u\|_0 \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega_0} G(x, u(x))}{\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u(x)|) dx} = 0$$

de forma análoga ao Lema 2.2 temos que a condição G_1 é satisfeita

□

2.2 Existência da solução do problema de Dirichlet para

Δ_ϕ .

Lema 2.5. *Considere ϕ e g tais que satisfaçam as condições (g_1) , (g_2) , (H_1) , (H_3) e (ϕ_1) . Note que podemos reescrever a condição (ϕ_1) por*

$$1 < p_\Phi \leq p^\Phi < +\infty. \quad (2.39)$$

Seja I um funcional definido por (2.8) e seja $\{u_n\}$ uma sequência em $W_0^1 L_\Phi$ tal que

$$(i) \ I(u_n) \rightarrow c > 0, \quad (ii) \ \|I'(u_n)\|_{(W_0^1 L_\Phi)^*} \rightarrow 0.$$

Então existe $u \in W_0^1 L_\Phi$, tal que

$$I(u) = c, \quad I'(u) = 0.$$

Demonstração. Resulta de (i) que existe $M > 0$ tal que $I(u_n) < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, (ii) implica que existe uma sequência de números positivos $\{\varepsilon_n\}, \varepsilon_n \rightarrow 0$, tal que

$$|\langle I'(u_n), v \rangle| \leq \varepsilon_n \|v\|_0 \quad \text{para todo } v \in W_0^1 L_\Phi. \quad (2.40)$$

Primeiro mostraremos que a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^1 L_\Phi$. De fato, notemos inicialmente que

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\theta} \langle I'(u_n), u_n \rangle \\ = \int_{\Omega} \left(\Phi(|\nabla u_n(x)|) - \frac{1}{\theta} \phi(|\nabla u_n(x)|) |\nabla u_n(x)| \right) dx \\ - \int_{\Omega} \left(G(x, u_n(x)) - \frac{1}{\theta} g(x, u_n(x)) u_n(x) \right) dx, \end{aligned} \quad (2.41)$$

com $\theta > p^\Phi$ dado por (H_3) . Suponha por absurdo que exista uma subsequência tal que $\|u_n\|_0 > n$, para todo n . Neste caso, pela convexidade de Φ , temos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo

$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, temos

$$\frac{1}{\|u\|_0 - \varepsilon} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n(x)|) dx \geq \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|\nabla u_n(x)|}{\|u_n\|_0 - \varepsilon}\right) dx > 1,$$

fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que

$$\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n(x)|) dx \geq \|u_n\|_0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.42)$$

Portanto, usando (2.40), (2.41) e (2.42), concluimos que

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\theta} \langle I'(u_n), u_n \rangle &\leq M + \frac{\varepsilon_n}{\theta} \|u_n\|_0 \\ &\leq M + \frac{\varepsilon_n}{\theta} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n(x)|) dx. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Agora, segue das condições (ϕ_0) e (H_3) que, escolhendo $\mu > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que $p^\Phi + \mu < \theta$, então existe $t_0 \geq R_1$, tal que

$$0 < t\phi(t) \leq (p^\Phi + \mu)\Phi(t),$$

e

$$0 \leq \theta(t)G(x, t) \leq tg(x, t)$$

para todo $t \geq t_0$ e todo $x \in \overline{\Omega}$.

Considere

$$\begin{aligned} \Omega_{1,n} &= \{x \in \Omega \mid |\nabla u_n(x)| \leq t_0\}, \quad \Omega_{2,n} = \{x \in \Omega \mid |\nabla u_n(x)| > t_0\}, \\ \Omega_{3,n} &= \{x \in \Omega \mid |u_n(x)| \leq t_0\} \quad e \quad \Omega_{4,n} = \{x \in \Omega \mid |u_n(x)| > t_0\}. \end{aligned}$$

Então pelas suposições (g_1) , (2.41) e (2.43) temos que existe uma constante positiva $\widetilde{M}$ independente de n , tal que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{2,n}} \left(\Phi(|\nabla u_n(x)|) - \frac{1}{\theta} \phi(|\nabla u_n(x)|) |\nabla u_n(x)| \right) dx \\ &\quad - \int_{\Omega_{4,n}} \left(G(x, u_n(x)) - \frac{1}{\theta} g(x, u_n(x)) u_n(x) \right) dx \\ &\leq \widetilde{M} + \frac{\varepsilon_n}{\theta} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n(x)|) dx. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Então, desde que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{2,n}} \left(\Phi(|\nabla u_n(x)|) - \frac{1}{\theta} \phi(|\nabla u_n(x)|) |\nabla u_n(x)| \right) dx \\ & \geq \left(1 - \frac{p^\Phi + \mu}{\theta} \right) \int_{\Omega_{2,n}} \Phi(|\nabla u_n(x)|) dx, \end{aligned} \quad (2.45)$$

e

$$\int_{\Omega} \left(G(x, u_n(x)) - \frac{1}{\theta} g(x, u_n(x)) u_n(x) \right) dx \geq 0, \quad (2.46)$$

combinando (2.44), (2.45) e (2.46), obtemos

$$\int_{\Omega_{2,n}} \Phi(|\nabla u_n(x)|) dx \leq C_1 + \frac{\varepsilon_n}{\theta} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n(x)|) dx,$$

onde C_1 é uma constante positiva. Como

$$\int_{\Omega_{1,n}} \left(\Phi(|\nabla u_n(x)|) - \frac{1}{\theta} \phi(|\nabla u_n(x)|) |\nabla u_n(x)| \right) dx$$

é claramente limitada, e $\Omega = \Omega_{1,n} \cup \Omega_{2,n}$, temos

$$\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n(x)|) dx \leq C_2 + \frac{\varepsilon_n}{\theta} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n(x)|) dx,$$

onde C_2 é uma constante positiva. Tomando n_0 tal que $1 - \frac{\varepsilon_n}{\theta} > \frac{1}{2} > 0$ para $n \geq n_0$, segue que

$$\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n(x)|) dx \leq 2C_2, \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Finalmente, usando (2.42) obtemos que existe uma constante positiva C tal que

$$\|u_n\|_0 \leq C \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

que é uma contradição, portanto $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $W_0^1 L_\Phi$.

Como $\{u_n\}$ é uma sequência limitada no espaço reflexivo $W_0^1 L_\Phi$, podemos assumir que $\{u_n\}$ converge fracamente para u em $W_0^1 L_\Phi$. Além disso, como a imersão $W_0^1 L_\Phi$ em L_F é compacta, podemos supor que $u_n \rightarrow u$ em L_F . Assim, desde que o funcional $I_2 \in C^1$ em L_F , segue do Lema 2.1, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_2(u_n) = I_2(u)$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_2'(u_n) = I_2'(u)$. Temos por hipótese $I'(u_n) \rightarrow 0$, obtemos que

$$I_1'(u_n) \rightarrow I_2'(u) \text{ em } (W_0^1 L_\Phi)^* \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \quad (2.47)$$

Como I_1 é convexa e C^1 , temos que

$$I_1(u_n) \leq I_1(u) + \langle I'_1(u_n), u_n - u \rangle, \quad (2.48)$$

portanto, usando (2.47), podemos deduzir que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} I_1(u_n) \leq I_1(u).$$

Além disso pela convexidade de I_1 , e como I_1 é fracamente semicontínua inferiormente, e portanto

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} I_1(u_n) \geq I_1(u)$$

o que implica que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_1(u_n) = I_1(u),$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I(u_n) = I(u).$$

Finalmente, mostraremos que $I'(u) = 0$. A convexidade de I_1 implica que I'_1 é monotônica e, temos que

$$\langle I'_1(u_n), u_n - v \rangle \geq \langle I'_1(v), u_n - v \rangle, \text{ para todo } n \in W_0^1 L_\Phi.$$

tomando $v = u - th, h \in W_0^1 L_\Phi, t \in \mathbb{R}^+$, e usando (2.47) obtemos

$$\langle I'_2(u) - I'_1(u - th), h \rangle \geq 0,$$

para todo $h \in W_0^1 L_\Phi$, e portanto fazendo $t \rightarrow 0$, e usando que h é arbitrário, temos que

$$I'(u) = I'_1(u) - I'_2(u) = 0$$

isto mostra que u é um ponto critico de I .

□

Finalmente temos condição de demonstrar os Teoremas 2.1 e 2.2.

Demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.2. Segue dos Lemas 2.2, 2.3 e 2.4 que as hipóteses do Teorema 0.1 são satisfeitas e, portanto o Lema 2.5 implica que existe um ponto critico não trivial do funcional I . Por outro lado, pontos críticos de I são soluções fracas para o nosso problema.

□

Demonstração do Corolário 2.1. Para essa demonstração basta verificar (ϕ_3) e (H_4) do Teorema 2.2.

Usando (H_5) obtemos que $0 < \mu < \frac{Np_\Phi}{N-p_\Phi}$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(s)}{s^{\frac{Np_\Phi}{N-p_\Phi} - \mu}} < \infty.$$

Além disso, existe $0 < \mu_1 < p_\Phi$ tal que

$$\frac{Np_\Phi}{N-p_\Phi} - \mu \leq \frac{N(p_\Phi - \mu_1)}{N - (p_\Phi - \mu_1)}.$$

Escolhendo $0 < \mu_2 < \mu_1$ temos

$$p^\Phi < p_\Phi - \mu_2,$$

então, pela definição de $p^{-\Phi}$, p_Φ , obtemos que

$$\Phi(x) \geq Cx^{p^\Phi - \mu_2} \quad \text{para alguma constante } C > 0 \text{ e todo } x \geq 0.$$

Além disso

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(s)}{s^{\frac{N(p_\Phi - \mu_2)}{N - (p_\Phi - \mu_2)}}} < \infty.$$

Finalmente fazendo $p := p_\Phi - \mu_2$, temos que as condições (ϕ_3) e (H_4) do Teorema 2.2 são verdadeiras. $\square$

2.3 Existência de duas soluções

Provaremos nesta seção que se g satisfaz a seguinte condição adicional

$$(g_3) \quad sg(x, s) > 0 \quad \text{para todo } (x, s) \in \overline{\Omega} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

então o problema (D) tem uma solução não trivial (fraca) não negativa u_0 e uma solução não trivial (fraca) não positiva u_1 , ou seja, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.3. *Sob as condições do Teorema 2.1 ou Teorema 2.2, e se condição (g_3) é satisfeita, então o problema (D) tem uma solução $u_0 \in W_0^1 L_\Phi$ não trivial e não negativa, e uma solução $u_1 \in W_0^1 L_\Phi$ não trivial e não positiva.*

Demonstração. Considere o problema

$$(P_+) \quad \begin{cases} -\Delta_\phi u = g^+(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde para cada $x \in \Omega$, definimos

$$g^+(x, s) := \max\{g(x, s), 0\} \quad \text{e} \quad g^-(x, s) := g^+(x, s) - g(x, s).$$

Como ϕ e g satisfazem as condições do Teorema 2.1 ou Teorema 2.2, segue facilmente da condição (g_3) que ϕ e g^+ (respectivamente ϕ e g^-) também satisfazem as condições do Teorema 2.1 ou Teorema 2.2. Portanto, pelo Teorema 2.1 ou Teorema 2.2, problema (P_+) tem solução $u_0 \in W_0^1 L_\Phi$ não trivial. mostraremos que $u_0(x) > 0$ q.t.p em Ω . De fato, temos que $u_0^1, u_0^- \in W_0^1 L_\Phi$ e

$$|\nabla u_0^+(x)| = \begin{cases} |\nabla u_0(x)|, & \text{para } x \text{ tal que } u_0(x) > 0 \\ 0, & \text{para } x \text{ tal que } u_0(x) \leq 0, \end{cases}$$

e

$$|\nabla u_0^-(x)| = \begin{cases} |\nabla u_0(x)|, & \text{para } x \text{ tal que } u_0(x) < 0 \\ 0, & \text{para } x \text{ tal que } u_0(x) \geq 0. \end{cases}$$

Portanto, como

$$\int_{\Omega} a(|\nabla u_0(x)|) \nabla u_0(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} g^+(x, u_0(x)) v(x) dx,$$

para todo $v \in W_0^1 L_\Phi$, fazendo $v = u_0^-$ e usando que $g^+(x, u_0(x)) u_0^- \geq 0$, q.t.p em Ω , obtemos que

$$\int_{\Omega} a(|\nabla u_0(x)|) \nabla u_0(x) \cdot \nabla u_0^-(x) dx \geq 0.$$

Assim, usando que $u_0(x) = u_0^+ - u_0^-(x)$ e $\nabla u_0^+(x) \cdot \nabla u_0^-(x) = 0$, q.t.p. em Ω , obtemos que

$$- \int_{\Omega} a(|\nabla u_0(x)|) |\nabla u_0^-(x)|^2 dx \geq 0,$$

isto é

$$\int_{\Omega^-} \phi(|\nabla u_0^-(x)|) |\nabla u_0^-(x)| dx \leq 0,$$

com $\Omega^- := \{x \in \Omega \mid u_0(x) \leq 0\}$. Portanto, como $v\phi(v) \geq \Phi(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}$, temos que

$$\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_0^-(x)|) dx = \int_{\Omega^-} \Phi(|\nabla u_0^-(x)|) dx \leq \int_{\Omega^-} \phi(|\nabla u_0^-(x)|) |\nabla u_0^-(x)| dx \leq 0,$$

portanto

$$\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_0^-(x)|) dx = 0,$$

agora usando (2.5), temos

$$\int_{\Omega} \Phi(|u_0^-(x)|) dx = 0,$$

o que implica que $u_0^-(x) = 0$, *q.t.p.* em Ω . Portanto $u_0^+ = u_0$, o que prova nossa afirmação. Como neste caso $g^+(x, u_0(x)) = g(x, u_0(x))$ *q.t.p.* em Ω , isto mostra que u_0 é uma solução fraca não trivial de (D) .

De forma análoga, considere o problema

$$(P_-) \quad \begin{cases} -\Delta_\phi u = -g^-(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

por argumentos similares concluimos que $-g^-(x, u)$ satisfaz as condições do Teorema 2.1 ou Teorema 2.2 e existe uma solução fraca u_1 não trivial satisfazendo $u_1^+(x) = 0$ *q.t.p.* em Ω . Consequentemente, u_1 é uma solução fraca de (D) e $u_1(x) \leq 0$ *q.t.p.* em Ω . □

2.4 Exemplos

Esta seção é dedicada a exemplos que ilustram os teoremas deste capítulo.

Exemplo 2.1. *Considere o problema*

$$(D_1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\log(1 + |\nabla u|)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = |u|^{\delta-1}u, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

para

$$1 < p < N - 1, \quad e \quad p < \delta \leq \frac{N(p-1) + p}{N-p}. \quad (2.49)$$

Note que este exemplo pode ser rescrito como

$$(D_1) \quad \begin{cases} -\Delta_\phi u = g(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Delta_\phi u = -\operatorname{div}(a(|\nabla u(x)|)\nabla u(x))$, e o funcional a é dado por $a(|\nabla u|) = \log(1 + |\nabla u|)|\nabla u|^{p-2}$. Mostraremos agora que o problema (D_1) tem solução fraca não trivial e não negativa $u \in W_0^1 L_\Phi$, onde a N -função Φ é dada por $\Phi(s) = \int_0^s \log(1+t)t^{p-1}dt$. Além disso u é ponto crítico do funcional I , dado por

$$I(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \frac{1}{\delta+1} \int_\Omega |u|^{\delta+1}dx.$$

Para este problema, definimos

$$\phi(s) = |s|^{p-2}s \log(1 + |s|), \quad g(x, s) = g(s) = |s|^{\delta-1}s, \quad (2.50)$$

onde $1 < p < N$ e $\delta > 0$. Além disso, por (2.50),

$$\Phi(s) = \frac{1}{p}|s|^p \log(1 + |s|) - \frac{1}{p} \int_0^{|s|} \frac{t^p}{1+t} dt \quad e \quad G(s) = \frac{|s|^{\delta+1}}{\delta+1}. \quad (2.51)$$

Mostraremos a seguir que todas as hipóteses do Teorema 2.1 são satisfeitas, e como g é ímpar e por (2.49) as hipóteses do Teorema 2.3 são verdadeiras.

- (i) Como Φ é equivalente a t^{p+1} próximo de zero, é imediato verificar que a condição (2.3) é satisfeita, se e somente se

$$p+1 < N. \quad (2.52)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável, $t = \Phi(\tau)$ obtemos que

$$\int_1^s \Phi^{-1}(t) t^{-1-1/N} dt = \int_{\Phi^{-1}(1)}^{\Phi^{-1}(s)} \frac{\tau \phi(\tau)}{\Phi(\tau)} (\Phi(\tau))^{-1/N} d\tau.$$

Além disso,

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^\tau \frac{t^p}{1+t} dt}{\tau^p \log(1+\tau)} = 0 \quad (2.53)$$

e que

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\tau \phi(\tau)}{\Phi(\tau)} = p \left(1 - \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^\tau \frac{t^p}{1+t} dt}{\tau^p \log(1+\tau)} \right)^{-1} = p. \quad (2.54)$$

Então, por (2.51), (2.53), e (2.54), segue-se que a segunda condição (2.3) é satisfeita se e somente se

$$\int_2^\infty \frac{d\tau}{\tau^{p/N} (\log(\tau))^{1/N}} = \infty.$$

Ou seja, se e somente se $p \leq N$.

- (ii) Agora verificamos que (ϕ_1) é verdadeira. Temos que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\tau \phi(\tau)}{\Phi(\tau)} = p \left(1 - \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^\tau \frac{t^p}{1+t} dt}{\tau^p \log(1+\tau)} \right)^{-1} = p+1. \quad (2.55)$$

Então, desde que $H_\Phi(t) := \frac{t\phi(t)}{\Phi(t)}$ em $(0, \infty)$ é contínua, por (2.54), e (2.55), concluímos que $p^0 < \infty$ e assim (ϕ_1) é válida para qualquer $p > 1$ fixo. É possível mostrar que a função H_Φ é decrescente, e portanto

$$p^0 = p+1. \quad (2.56)$$

- (iii) A seguir, verificaremos que para qualquer $\delta > 0$, as condições (g_1) , (g_2) e (g_3) são satisfeitas. De fato, (g_1) é trivialmente válida com $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e $f(s) = |s|^{\delta-1}s$. Além disso, com $H_G(t) \equiv \delta+1$, verifica-se (g_2) é satisfeito e finalmente, (g_3) é imediato.

(iv) Sabemos de [1] que, (H_1) ocorre se e somente se

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\Phi_*^{-1}(s)}{s^{\frac{1}{\delta+1}}} = 0. \quad (2.57)$$

Provaremos que (2.57) é verdade se

$$\delta + 1 \leq \frac{Np}{N - p}, \quad (2.58)$$

Pela regra de L'Hôpital e o Teorema fundamental do cálculo,

$$\begin{aligned} \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{\Phi_*^{-1}(s)}{s^{\frac{1}{\delta+1}}} &= \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^s \phi^{-1}(\tau) \tau^{-\frac{N+1}{N}} d\tau}{s^{\frac{1}{\delta+1}}} \\ &\leq (\delta + 1) \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{\frac{1}{\delta+1} + \frac{1}{N}}}, \end{aligned}$$

e fazendo $t = \Phi(s)$,

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{\Phi_*^{-1}(s)}{s^{\frac{1}{\delta+1}}} \leq (\delta + 1) \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{(\Phi(t))^{\frac{1}{\delta+1} + \frac{1}{N}}}.$$

Agora, como

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{\frac{N(\delta+1)}{N+\delta+1}}}{\Phi(t)} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{\frac{N(\delta+1)}{N+\delta+1}}}{t^p \log(1+t)} \left(1 - \frac{\int_0^t \frac{s^p}{1+s} ds}{t^p \log(1+t)} \right)^{-1}, \quad (2.59)$$

usando (2.53) e (2.59) temos que vale (H_1) caso

$$p - \frac{N(\delta + 1)}{N + \delta + 1} = \frac{Np - (N - p)(\delta + 1)}{N + \delta + 1} \geq 0,$$

o que equivale a (2.58) .

(v) Claramente, como foi mostrado anteriormente uma condição suficiente para que (H_2) seja verdade é que $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)}{\Phi(s)} = 0$, isso é

$$p < \delta. \quad (2.60)$$

(vi) Como $\frac{sg(s)}{G(s)} \equiv \delta + 1$ e $p^\Phi = p$ é claro que (H_3) é verdade se, e somente se,

$$p < \delta + 1. \quad (2.61)$$

(vii) Vamos agora estudar a condição (ϕ_2) . Para isto, precisamos calcular o número p_{Φ_*} . Usando

a seguinte identidade

$$\frac{t(\chi^{-1})'(t)}{\chi^{-1}(t)} = \frac{\chi(\chi^{-1}(t))}{\chi^{-1}(t)\chi'(\chi^{-1}(t))} , \quad (2.62)$$

para qualquer funcional diferenciável χ , com $\chi'(t) \neq 0$, e usando (2.54), obtemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t(\Phi^{-1})'(t)}{\Phi^{-1}(t)} = \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)} \right)^{-1} = \frac{1}{p} .$$

Novamente usando a regra de L'Hôpital, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t(\Phi_*^{-1})'(t)}{\Phi_*^{-1}(t)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{-\frac{1}{N}}\Phi^{-1}(t)}{\int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}} ds} \\ &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{N} + \frac{t(\Phi^{-1})'(t)}{\Phi^{-1}(t)} \right) = -\frac{1}{N} + \frac{1}{p} . \end{aligned}$$

Portanto, por (2.62) para $\chi = \Phi_*$, temos que

$$p_{\Phi_*} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\Phi_*'(t)}{\Phi_*(t)} = \frac{Np}{N-p} . \quad (2.63)$$

Então, por (2.56) e (2.63), concluímos que (ϕ_2) é satisfeita, se e somente se

$$p+1 < \frac{Np}{N-p} . \quad (2.64)$$

Finalmente, se

$$1 < p < N-1 \quad e \quad p < \delta \leq \frac{N(p-1)+p}{N-p} ,$$

Segue de (2.52), (iii), (2.58), (2.60), (6.12), (2.64), e pelo Teorema 2.3 que o problema (D_1) tem solução fraca não trivial $u \in W_0^1 L_\Phi$.

Observação 2.4. Note que o Teorema 2.2 não pode ser aplicado ao Exemplo 2.1, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x^{p+1}} = \frac{1}{p(p+1)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(x)}{x^p} = \infty ,$$

assim (ϕ_3) não ocorre nesse caso.

Exemplo 2.2. Considere o seguinte problema

$$(D_2) \begin{cases} -\Delta_\phi u = |u|^{\delta-1}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Delta_\phi u = -\operatorname{div}(a(|\nabla u(x)|)\nabla u(x))$, e o funcional a é dado por $a(|\nabla u|) = \log(1 + \alpha +$

$|\nabla u|)|\nabla u|^{p-2}$, e com $1 < p < N$, $\delta > 0$, e $\alpha > 0$. neste caso temos

$$\phi(t) := |t|^{p-2}t \log(1 + \alpha + |t|),$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{p}|s|^p \log(1 + \alpha + |s|) - \frac{1}{p} \int_0^{|s|} \frac{t^p}{1 + \alpha + t} dt,$$

e de maneira equivalente ao exemplo anterior, temos que $G(s) = \frac{|s|^{\delta+1}}{\delta+1}$.

Assim $\phi(t) \geq \log(1 + \alpha)t^{p-1}$ para todo $t \geq 0$, a condição (ϕ_3) do Teorema 2.2 é verdade com $C = \frac{\log(1 + \alpha)}{p}$.

Agora vamos verificar as outras hipóteses do nosso teorema

- (i) Pelo fato de que Φ é equivalente a t^p próximo de zero, e como o valor do limite (2.54) quando $1 + |t|$ é substituído por $1 + \alpha + |t|$ nos obtemos que (2.3) é válido se e somente se

$$p < N. \quad (2.65)$$

Além disso, como Φ é equivalente a t^p próximo de zero, (H_2) é verdade desde que $p < \delta + 1$.

- (ii) Para verificar se (ϕ_1) é verdade, temos que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\int \frac{t^p}{1 + \alpha + t} dt}{\log(1 + \alpha + t)} = 0,$$

daí

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\tau \phi(\tau)}{\Phi(\tau)} = p \left(1 - \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\int \frac{t^p}{1 + \alpha + t} dt}{\log(1 + \alpha + t)} \right)^{-1} = p. \quad (2.66)$$

Consequentemente, a partir da continuidade do funcional $H_\Phi(t) := \frac{t\phi(t)}{\Phi(t)}$ em $(0, \infty)$, (2.54), e (2.66), concluímos que $p^0 < \infty$ e que (ϕ_1) ocorre para qualquer $p > 1$ e $\alpha > 0$ fixo. Neste caso, H_Φ não é monótona, e portanto, p^0 não pode ser avaliada diretamente. No entanto, um cálculo direto produz que H_Φ atinge seu valor máximo em exatamente um ponto $x_0 \equiv x_0(\alpha) > 0$, e que

$$p^0 \leq \bar{p}^0 := p + \frac{1}{1 + \log(1 + \alpha + s_0)}, \quad (2.67)$$

onde s_0 é a única solução de $s = (1 + \alpha) \log(1 + \alpha + s)$.

- (iii) Em relação (H_4) , é imediato verificar que ela é satisfeita, se e somente se, $\delta + 1 \leq \frac{Np}{N-p}$. Finalmente, para qualquer $\delta > 0$ dado, as condições (g_1) , (g_2) e (g_3) são imediatamente estabelecidas. Além disso, como as premissas (H_1) e (H_3) são condições no infinito, e ϕ se comporta no infinito como no exemplo anterior, sua demonstração é análoga à do Exemplo 2.1.

Concluindo, se

$$1 < p < N \quad e \quad p - 1 < \delta \leq \frac{N(p-1) + p}{N-p},$$

segue do Teorema 2.2 que o problema (D_2) tem solução fraca não trivial $u \in W_0^1 L_\Phi$.

Observação 2.5. Note que também podemos usar o Teorema 2.1 para resolver Exemplo 2.2. Mas o resultado seria mais fraco, ou seja, teríamos obtido a existência de uma solução fraca não trivial sob a suposição extra

$$p^0 < \frac{Np}{N-p}.$$

Em nosso último exemplo, consideramos o caso onde não podemos aplicar o Teorema 2.1 e onde é difícil calcular a melhor potência p para (ϕ_3) seja satisfeita. Veremos que, neste caso, nosso Corolário 2.1 se aplica.

Exemplo 2.3. Considere o seguinte problema

$$(D_3) \begin{cases} -\Delta_\phi u = |u|^{\delta-1}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Onde $\delta > 0$ é constante, e o funcional $\phi(t) = a(|t|)t$, será construído a seguir, e será dado por (2.68).

Seja $\phi_1(t) := |t|^{p-2}t \log(1 + \alpha + |t|)$, $\alpha > 0$ e seja $H_1(t) := \frac{t\phi_1(t)}{\Phi_1(t)}$, onde

$$\Phi_1(t) = \int_0^t \phi_1(\tau) d\tau.$$

Então, pelo Exemplo 2.2 temos que existe um único $x_0 > 0$, tal que H_1 é crescente para $x < x_0$ e decrescente para $x > x_0$. Portanto $p^0 = H_1(x_0)$. Além disso, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} H_1(t) = p.$$

Escolhendo $q \in (p, p^0)$, $q < N$, e fazendo $\omega(t) := |t|^{q^*-2}t \log(1 + |t|)$, $q^* = \frac{q}{q-1}$, definimos

$$\tilde{\phi}_2(t) := \omega^{-1}(t), \quad \tilde{\Phi}_2(t) = \int_0^t \tilde{\phi}_2(\tau) d\tau.$$

Então pode ser mostrado que o funcional $\tilde{H}_2(t) := \frac{t\tilde{\phi}_2(t)}{\tilde{\Phi}_2(t)}$ é estritamente crescente em $(0, \infty)$ e que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{H}_2(t) = q.$$

Com $q \in (p, p^0)$, então existe um único ponto $\bar{x}_0 > x_0$ tal que $H_1(\bar{x}_0) = \tilde{H}_2(\bar{x}_0)$ e $\tilde{H}_2(t) > H_1(t)$

para todo $t > \bar{x}_0$. Para qualquer $x_1 > \bar{x}_0$ fixo, temos que

$$\phi_2(t) = \frac{\phi_1(x_1)}{\tilde{x}_1(x_1)} \tilde{\phi}_2(t),$$

e definimos $\phi_3(t)$ para $t > 0$

$$\phi_3(t) = \begin{cases} \phi_1(t) & \text{para } t \in (0, x_1) \\ \phi_2(t) & \text{para } t \in (x_1, \infty). \end{cases}$$

Agora estenderemos o funcional ϕ_3 para toda a $\mathbb{R}$ como uma função ímpar, para finalmente definirmos o funcional ϕ , da seguinte forma

$$\phi(t) := \begin{cases} \phi_3(t) & \text{para } t \in (0, \infty) \\ -\phi_3(t) & \text{para } t \in (-\infty, 0). \end{cases} \quad (2.68)$$

O funcional a em (D_3) é dado por $a(|s|) = \frac{\phi(s)}{s}$, para todo $s \neq 0$.

Definindo $H(t) := \frac{t\phi(t)}{\Phi(t)}$, temos que

$$H(t) := \begin{cases} H_1(t) & \text{para } t \in (0, x_1) \\ H_2(t) \frac{\Phi_2(t)}{\Phi_2(t) + \Phi_1(x_1) - \Phi_2(x_1)} & \text{para } t \in (x_1, \infty), \end{cases}$$

com $H_2(t) := \frac{t\phi_2(t)}{\Phi_2(t)}$. Note que $\tilde{H}_2 = H_2$ e que $H(t)$ é crescente para $t \in (x_1, \infty)$.

Iremos mostrar que todas as hipóteses do Corolário 2.1 são satisfeitas. Começaremos observando que $\sup_{s>0} H(s) = p^0 > q > p$. Além disso para ϕ definido por (2.68) temos que

$$p_\Phi = p^\Phi = q, \quad p^{-\Phi} = p,$$

e assim, por construção, $p^{-\Phi} < p_\Phi < N$, temos que a condição (ϕ_4) é satisfeita.

De maneira análoga aos exemplos anteriores temos que fácil verificar que as condições (g_1) , (g_2) e (g_3) são satisfeitas. Além disso, (H_1) , (H_2) e (H_3) é verdade, desde que

$$\delta + 1 \leq \frac{Nq}{N - q},$$

respectivamente. Finalmente, se

$$\delta + 1 < \frac{Nq}{N - q},$$

a condição (H_5) do Corolário 2.1 é válida, e portanto, desde que $p < q$ por construção, se

$$1 < q < \delta + 1 < \frac{Nq}{N - q}, \quad (2.69)$$

então pelo Corolário 2.1 obtemos que existe uma solução não trivial para o problema (D_3) , que pode ser assumido como não negativa.

Finalmente, vamos mostrar por que o Teorema 2.1 não pode ser aplicado no problema (D_3) .

Escolhendo $p > 1$, e assumindo que a dimensão N satisfaz $N > p(p + 1)$, o que é equivalente a $p < \frac{N(p + 1)}{N + p + 1}$. Tomando $q \in \frac{N(p + 1)}{N + p + 1}$ e observe que essa escolha de q implica que $N > q$. Além disso, $q < \frac{N(p + 1)}{N + p + 1}$ é equivalente a $\frac{Nq}{N - q} < p + 1$. Então, p e q satisfazem

$$p < q < \frac{Nq}{N - q} < p + 1 \quad (2.70)$$

Por outro lado, é claro que p^0 , para p fixo, depende de α e não é difícil ver que $p^0 < p + 1$, e que $p^0 \rightarrow p + 1$ quando $\alpha \rightarrow 0$. então como a seleção de q em (2.70) é independente de α , além disso, para α pequeno, temos que

$$1 < q < \delta + 1 < \frac{Nq}{N - q} < p^0 < p + 1, \quad (2.71)$$

onde escolhemos δ para que (2.69) seja satisfeito. Mas (2.71) implica que $p_{\Phi_*} = \frac{Nq}{N - q} < p^0$, que diz que a condição (ϕ_2) do Teorema (2.1) não é satisfeita e, portanto que o teorema não se aplica. Por outro lado, como o (2.69) é satisfeito, o Corolário 2.1 se aplica.

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, Robert; FOURNIER, John. **Sobolev Spaces**. 2. ed. Oxford: Elsevier Science, 2003.
- [2] AMBROSETTI, Antonio; RABINOWITZ, Paul H. **Dual variational methods in critical point theory and applications**. Journal of functional Analysis, v. 14, n. 4, p. 349-381, 1973. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(73\)90051-7](https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90051-7).
- [3] BREZIS, H. **Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, Springer, 2010.
- [4] CABADA, Alberto; CID, J. Ángel. **Heteroclinic solutions for non-autonomous boundary value problems with singular Φ -Laplacian operators**. In: Conference Publications. American Institute of Mathematical Sciences, 2009. p. 118.
- [5] CARVALHO, Marcos Leandro. **Equações Diferenciais Parciais Elípticas Multivalentes: Crescimento Crítico, Métodos Variacionais**. 2013. 132 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.
- [6] CLÉMENT, Ph; GARCÍA-HUIDOBRO, M; Manásevich, R; Schmitt, K. **Mountain pass type solutions for quasilinear elliptic equations**. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, v. 11, n. 1, p. 33-62, 2000.
- [7] DINCA, G.; JEBELEAN, P.; MAWHIN, J. **A result of Ambrosetti-Rabinowitz type for p -Laplacian**. Qualitative problems for differential equations and control theory. Dedicated to Aristide Halanay on occasion of his 70th birthday, p. 231-242, 1995.
- [8] FERNANDEZ, Pedro. **Medida e integração**, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2002.
- [9] GARCÍA-HUIDOBRO, M., Le, V., MANÀSEVICH, R. **On principal eigenvalues for quasilinear elliptic differential operators: an Orlicz-Sobolev space setting**. NoDEA, Nonlinear differ. equ. appl. 6, 207–225 (1999). <https://doi.org/10.1007/s000300050073>

- [10] KUFNER, Alois; JOHN, Oldrich; FUCIK, Svatopluk. **Function spaces**. Springer Science & Business Media, 1977.
- [11] LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 13a Edição. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 2011.
- [12] MENESES, João Paulo Formiga. **Existência de múltiplas soluções positivas para uma classe de problemas elípticos quasilineares**. 2016. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Campina Grande UFCG, Campina Grande , 2016.
- [13] ORLICZ, Wladyslaw. **Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B**. Bull. Int. Acad. Pol. Ser. A, v. 8, n. 9, p. 207-220, 1932.
- [14] RAO, M. M.; REN, Z. **Theory of Orlicz spaces**, ser. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker Inc, v. 146, 1991.
- [15] RIBEIRO, Bruno Henrique. **Espaços de Orlicz e uma aplicação a sistemas hamiltonianos**. 2006. 86 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal da Paraíba UFPB, João Pessoa, 2006.