

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

CAIO ESTEVAM PEREIRA LOPES

**ANÁLISE DE TRELIÇA PLANA ATRAVÉS DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO**

JOÃO PESSOA

2022

CAIO ESTEVAM PEREIRA LOPES

**ANÁLISE DE TRELIÇA PLANA ATRAVÉS DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)
como parte das exigências para a obtenção do
título de bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. José Marcilio Filgueiras
Cruz

JOÃO PESSOA

2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

L864aa Lopes, Caio Estevam Pereira.

Análise de treliça plana através do método dos
elementos de contorno / Caio Estevam Pereira Lopes. -
João Pessoa, 2022.
52 f. : il.

Orientação: José Marcílio Filgueiras Cruz.
TCC (Graduação) - UFPB/CT.

1. MEC. 2. Treliça. 3. Estrutura Reticulada. I.
Cruz, José Marcílio Filgueiras. II. Título.

UFPB/CT/BSCT

CDU 624(043.2)

FOLHA DE APROVAÇÃO

CAIO ESTEVAM PEREIRA LOPES

ANÁLISE DE TRELIÇA PLANA ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Trabalho de Conclusão de Curso em 21/06/2022 perante a seguinte Comissão Julgadora:

José Márcilio Filgueiras Cruz

José Márcilio Filgueiras Cruz

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

APROVADO

CARLOS A. TAURINO DE LUCENA

Enildo Tales Ferreira

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

APROVADO.

ENILDO TALES FERREIRA

Carlos A. Taurino de Lucena

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

APROVADO

Profª. Andrea Brasiliano Silva

Matrícula Siape: 1549557

Coordenadora do Curso de Graduação em Engenharia Civil

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus. Agradeço ao meu orientador Marcílio Cruz por aceitar conduzir o meu trabalho de pesquisa e por todo apoio e paciência ao longo do desenvolvimento dele. A todos os meus professores do curso de Engenharia Civil da Universidade Federal da Paraíba pela excelência da qualidade técnica de cada um. Aos meus pais Odilon Lopes e Maria de Lourdes que sempre estiveram ao meu lado me apoiando ao longo de toda a minha trajetória. Por fim, à minha esposa Dayane Pereira pela compreensão e paciência demonstrada durante o período do projeto.

RESUMO

LOPES, C. E. P. ANÁLISE DE TRELIÇA PLANA ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO; 2022, 54 pág. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa. 2022.

Neste TCC é utilizada uma estratégia conveniente para a montagem das matrizes de influência de treliças planas simples nas quais em cada apoio chega apenas uma barra, utilizando o método dos elementos de contorno. Neste caso a representação integral utilizada é feita utilizando unicamente a solução fundamental que incorpora o efeito axial em cada barra. Ao final são analisadas duas treliças planas e os resultados obtidos para as reações de apoio, deslocamentos no nó não vinculado e esforços nas extremidades de cada barra são comparados com os valores respectivos obtidos através da análise via F-tool.

Palavras-chave: MEC, Treliça, Estrutura reticulada

ABSTRACT

LOPES, C. E. P. ANÁLISE DE TRELIÇA PLANA ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO; 2022, 54 pág. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa. 2022

In this TCC, a convenient strategy is used to assemble the influence matrices of simple plane trusses in which only one bar arrives at each support, using the boundary element method. In this case, the integral representation used is made using only the fundamental solution that incorporates the axial effect in each bar. At the end, two plane trusses are analyzed and the results obtained for the support reactions, displacements in the unbound node and efforts at the ends of each bar are compared with the respective values obtained through the analysis via F-tool.

Keywords: BEM, Trusses, Reticulated Structure.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estruturas de barra e elemento de contorno 0D.	17
Figura 2 – Elementos de contorno EP e sistemas de coordenadas global e local.	17
Figura 3 – Barra (elemento estrutural unidimensional).	18
Figura 4 – Barra sob efeito axial (Adaptada de Mendonça, 2009).	20
Figura 5 – SCL para a avaliação da contribuição do efeito axial.	28
Figura 6 – SCLU para a avaliação da contribuição do efeito axial.	28
Figura 7 – Coordenadas globais 0XY, coordenadas locais 0xy.	33
Figura 8 – Barras de treliça convergindo.	34
Figura 9 – Condição de Equilíbrio no nó.	35
Figura 10 – Treliça da aplicação 1.	36
Figura 11 – Coordenadas globais 0XY, coordenadas locais 0xy (reapresentada).	37
Figura 12 – Treliça da aplicação 2.	45

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	9
2. OBJETIVOS.....	10
2.1 Objetivo geral	10
2.2 Objetivos específicos	10
3. METODOLOGIA DO TRABALHO.....	10
4. ORGANIZAÇÃO DO TCC	11
5. ESTADO DA ARTE.....	12
6. SOBRE A FORMULAÇÃO E A APLICAÇÃO DO MEC	14
6.1 Objetivos do MEC	14
6.2 Classificação dos elementos de contorno	16
6.3 As Hipóteses	18
6.3.1 Hipóteses gerais.....	18
6.3.2 Hipóteses particulares	19
7. OS PROBLEMAS REAL E FUNDAMENTAL, A EQUAÇÃO INTEGRAL E A REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DO EFEITO AXIAL	20
7.1 O efeito axial.....	20
7.2 A equação diferencial governante do efeito axial (o problema real).....	20
7.3 A equação diferencial governante do efeito axial (o problema fundamental).....	21
7.4 A equação Integral do efeito axial	22
7.5 A representação algébrica do efeito axial	24
8. OS SISTEMAS DE REFERÊNCIA LOCAIS UNIFICADOS	27
8.1 Problemas independentes.....	27
8.1.1 O efeito axial	28
8.2 Problemas combinados	30
9. O SISTEMA DE COORDENADAS GLOBAIS E A MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO	32
10. REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DA ESTRUTURA	34
10.1 Representação algébrica da treliça plana	34
11. APLICAÇÕES	36
11.1 Introdução	36
11.2 Análise da treliça da Fig. 11.1.	36
11.2.1 Caracterização da estrutura: carregamento, geometria das barras e da estrutura, material constituinte, sistema global de referência e discretização.....	36
11.2.2 Solução	37

11.2.3 Resultados obtidos via Ftool para as reações, deslocamentos e esforços nas extremidades das barras	44
11.3 Análise da treliça da Fig. 11.3.	45
11.3.1 Caracterização da estrutura: carregamento, geometria das barras e da estrutura, material constituinte, sistema global de referência e discretização.....	45
11.3.2 Solução	46
11.3.3 Resultados obtidos via Ftool para as reações, deslocamentos e esforços nas extremidades das barras	51
12. CONCLUSÕES	52
REFERENCIAS	53
ANEXO	54

1. INTRODUÇÃO

Os componentes dos sistemas estruturais da engenharia civil são didaticamente divididos em três grupos: elementos de volume, de área e de barras. Sapatas, blocos de fundação e blocos de coroamento de estacas de fundação, são elementos de volume; lajes (ou placas), chapas e cascas, elementos de área; cada lance de pilar e vão de viga, exemplifica os elementos de barra ou reticulares.

Grande é a quantidade de arranjos possíveis na concepção das chamadas estruturas reticuladas. Sendo estas estruturas agrupadas, principalmente, segundo seu desempenho e quantidade de graus de liberdade em cada nó. Assim, têm-se as treliças e os pórticos, que podem ser planos ou espaciais, as grelhas e os pórticos enrijecidos por paredes estruturais ou por núcleos.

Neste TCC, apenas as treliças planas são estudadas razão pela qual a formulação a ser apresentada levará em consideração os modelos de barras submetidas a solicitações axiais. Assim, não se faz necessário estudar cada uma os efeitos da: flexão (segundo o eixo perpendicular ao plano da estrutura); a flexão (bidirecional), a torção e o estudo da torção não-uniforme.

O modelo matemático para esses problemas requer a adoção de hipóteses que estão adiante relacionadas, elas podem ser apresentadas em dois grupos, a saber: a) hipóteses gerais e b) hipóteses específicas. Embora no caso do estudo das treliças apenas as hipóteses gerais são suficientes. Estas hipóteses gerais devem ser respeitadas para caracterizar o regime estático ou dinâmico, as características elásticas lineares do material e o comportamento linear da estrutura, além de possibilitar a redução do problema originariamente tridimensional (3D) para um problema unidimensional (1D). As hipóteses específicas são aquelas que devem ser observadas quando do estudo de determinado problema através da aplicação de uma teoria específica; por exemplo: no problema da flexão, a aplicação da teoria de Euler-Bernoulli ou a de Timoschenko; no problema da torção, a aplicação da teoria de Saint-Venant ou a de Vlasov.

2. OBJETIVOS

2.1 Objetivo geral

Este TCC tem como objetivo geral a análise de treliças planas pelo método dos elementos de contorno.

2.2 Objetivos específicos

- Apresentação dos problemas real e fundamental do efeito axial
- Técnica para obtenção da representação integral e da representação algébrica do efeito axial;
- Técnica para obtenção da representação algébrica no sistema de coordenadas local unificado do efeito axial;
- Técnica para obtenção do sistema algébrico no sistema de coordenadas globais do efeito axial;
- Técnica para obtenção da representação algébrica da estrutura (treliça plana);
- Comparação dos resultados obtidos com o F-tool.

3. METOLOGIA DO TRABALHO

Para atingir os objetivos propostos foi realizada uma revisão bibliográfica sendo consultados trabalhos que tratam da análise de estruturas reticuladas via MEC. Já que se trata de uma pesquisa bibliográfica.

Dentre os trabalhos consultados alguns foram selecionados de modo a possibilitar uma vista panorâmica sobre o estado da arte do tema enfocado neste TCC. Estes trabalhos são comentados ou apenas citados no próximo item intitulado Estado da arte.

4. ORGANIZAÇÃO DO TCC

Item 1 – INTRODUÇÃO

Item 2 – OBJETIVOS

Item 3 - METODOLOGIA DO TRABALHO

Item 4 – ORGANIZAÇÃO DO TCC

Item 5 – ESTADO –DA-ARTE

Item 6 – SOBRE A FORMULAÇÃO DO MEC

Item 7 - OS PROBLEMAS REAL E FUNDAMENTAL, A EQUAÇÃO INTEGRAL E
A REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DO EFEITO AXIAL

Item 8 – OS SISTEMAS DE REFERÊNCIA LOCAIS UNIFICADOS

Item 9 – O SISTEMA DE COORDENADAS GLOBAIS E A MATRIZ DE
TRANSFORMAÇÃO

Item 10 – REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DA ESTRUTURA

Item 11 – APLICAÇÕES E CONCLUSÕES

No item 1 faz-se uma abordagem relativa às estruturas reticuladas em geral e em particular às treliças planas cuja solução é o foco deste TCC.

No item 2 são explicitados os objetivos gerais e específicos do trabalho.

Os itens 3, 4 e 5 apresentam a metodologia utilizada e a organização do TCC, fazendo também uma abordagem relativa ao estado da arte sobre o tema.

No item 6 são apresentadas as etapas do desenvolvimento da teoria do MEC, algumas funções especiais utilizadas, a definição do elemento ponta etc.

O item 7 está organizado de modo a apresentar o efeito axial, os problemas real e fundamental, a equação integral e a obtenção da representação algébrica do problema.

Nos itens 8 e 9, apresentam-se, respectivamente, a obtenção do sistema de coordenadas locais unificadas e o sistema de coordenadas globais com a matriz de transformação.

Enquanto o item 10 está estruturado de modo a apresentar a representação algébrica da estrutura, no item 11 e último, são apresentadas duas aplicações e algumas conclusões.

5. ESTADO DA ARTE

Aos métodos básicos de análise estrutural são fundamentados na representação discreta do modelo contínuo de um problema real em termos de um número finito de parâmetros.

O problema estrutural estático linear é um problema de valor de contorno, no qual um conjunto de equações diferenciais deve ser satisfeito em todos os pontos do domínio, respeitando as condições de contorno naturais. No caso de estruturas reticuladas o meio sólido contínuo 3D é reduzido pela consideração das hipóteses adotadas, aos eixos centroidais dos elementos. (Marta, 2010).

No âmbito deste TCC serão objetos de estudo as treliças planas, que são modelos reticulados formados pela associação de elementos coplanares interligados através de rotulas. Neste tipo de estrutura, as forças atuantes e os deslocamentos encontram-se no plano da estrutura

Das equações diferenciais acima referidas é obtida a representação algébrica do problema com a utilização da álgebra matricial procedimento que passou a ser conhecido como cálculo matricial de estruturas. Origem do método matricial dos deslocamentos e do método matricial das forças.

Conquanto a formulação matricial do método dos deslocamentos tenha seus primórdios em meados da década de 40, apenas nos anos 50 teve grande impulso com o advento do computador. O método das diferenças finitas (MDF) que teve origem no trabalho de Southwell de 1946, é desta época (CALDERON, 1996). Na sequência apareceram o método dos elementos finitos (MEF) e o método dos elementos de contorno (MEC). (Livesley, 1975). O MEF cujo nome foi dado por CLOUGH (1960) logo se tornou o mais conhecido, enquanto o MEC, o mais novo dos métodos, teve seu desenvolvimento a partir de 1970. De acordo com CAVALCANTI (2002), na última metade do século XX diversas técnicas de resoluções de equações ou de sistemas de equações diferenciais deram origem a eficientes ferramentas de cálculo que permitem a análise dos mais variados problemas de engenharia. Estas técnicas muito contribuíram na solução de problemas práticos cujas soluções analíticas demandam grande esforço ou simplesmente não existem. Os três principais métodos que afloraram destas técnicas são o MEF, o MDF e o MEC. Os dois primeiros, também chamados de métodos de domínio, aproximam a solução da equação diferencial governante do problema real (físico), utilizando valores do domínio de validade, isto é, valores das variáveis básicas do problema em pontos internos e do contorno do sistema em estudo, como explica Alexander e Chenga, (2005), citado em Cruz, 2012.

No MEC, que utiliza técnicas de resolução das equações integrais de contorno, a solução obtida será calculada em pontos discretos, chamados de nós, definido, quase sempre, no contorno. Desse modo, ocorre uma redução das dimensões do problema em estudo, caracterizando uma vantagem em relação aos demais métodos por envolver uma menor quantidade de dados o que leva a uma redução no tempo de processamento.

Obtém-se a equação integral de contorno que se dá pela transformação da equação diferencial governante do problema estudado em uma equação integral que lhe é equivalente. Para sua aplicação, o MEC, pressupõe a existência de uma solução fundamental que representa em um ponto, o ponto-campo, do domínio infinito do problema congênere devido à aplicação de força unitária em um outro ponto chamado ponto-fonte. As soluções fundamentais em geral têm natureza singular quando o ponto-fonte e o ponto-campo coincidem. Tal fato que se constitui em uma dificuldade matemática adicional é o responsável pela versatilidade e precisão do método. (CRUZ, 2012).

No que diz respeito a soluções de Problemas de Valor de Contorno, PVC, em eletrostática, com a utilização de equações integrais lineares, cita-se como precursor o trabalho de Erik Ivar Fredholm de 1903. Em 1967 o matemático norte-americano Frank Joseph Rizzo publicou um baseado nas soluções fundamentais para um meio infinito de Lord Kelvin trabalho intitulado: *An integral approach to boudary value problems of classical elastostatics* para a solução de problemas da elasticidade. Neste trabalho, pela primeira vez, o tratamento das equações integrais é feito através de técnica numérica semelhante aos demais métodos. Inúmeras foram as contribuições e os trabalhos publicados até que Lachat em 1975 incorpora ao MEC a filosofia de discretização e do cálculo do MEF demonstrando a consistência deste método que ficou conhecido como método dos elementos de contorno.

Constata-se através dos trabalhos publicados grande empenho nos estudos ligados à Mecânica dos Sólidos, no que diz respeito a aplicação do MEC em estruturas reticuladas são poucos os trabalhos publicados e boa parte deles estão relacionados com vigas e barras. Em 1981 e 1986, respectivamente Bamerjee e Butterfield e, Providakis e Beskos apresentaram soluções numéricas na filosofia do MEC no estudo de barras submetidas a flexão de Euler – Bernoulli em problemas estáticos e dinâmicos. Enquanto a formulação para a análise de estática de viga de Timoshenko foi desenvolvida em 2003 por Antes.

6. SOBRE A FORMULAÇÃO E A APLICAÇÃO DO MEC

6.1 Objetivos do MEC

Após o estabelecimento das equações integrais relativas ao problema em estudo, o MEC tem como objetivo a transformação dessas EIs em equações algébricas.

Algumas etapas são necessárias para a obtenção dessas equações algébricas e a consequente construção de soluções numéricas baseadas na filosofia do método dos elementos de contorno, as principais são mostradas a seguir.

Etapa (a): A discretização e aproximação da geometria e das variáveis $\{u\}$ e $\{p\}$

Na discretização do contorno de um corpo qualquer pelo MEC é utilizado um número finito de sub-regiões chamadas de elementos de contorno. A geometria desses elementos é definida pelas coordenadas cartesianas dos seus nós, as quais constituem o vetor $\{X_{no}\}$. Por outro lado, as coordenadas $\{X\}$ de um ponto q qualquer pertencente ao interior (ao domínio) do elemento de contorno podem ser definidas a partir de interpolações das coordenadas dos seus nós, ou seja, do vetor $\{X_{no}\}$, onde o índice no identifica o nó do elemento. Consequentemente as coordenadas do ponto q estão definidas pelo vetor das coordenadas nodais e pela função interpoladora $[\Phi]$ utilizada, como indicado na Eq. (6.1):

$$\{X\} = [\Phi]^T \{X_n\} \quad (6.1)$$

Os deslocamentos $\{u\}$ e as forças de superfícies $\{p\}$, variáveis físicas do problema, para cada ponto q são aproximados, também, através de funções interpoladoras, a partir dos seus respectivos valores nodais $\{u^{no}\}$ e $\{p^{no}\}$, como indicado nas Eqs. (1.2a-b). Devido à possibilidade de escolha da função interpoladora, a utilização de uma ou de outra, classifica os elementos de contorno, que podem ser: constantes; lineares; quadráticos; e de ordem superior.

$$\{u\} = [\Phi]^T \{u^{no}\}$$

$$\{p\} = [\Phi]^T \{p^{no}\} \quad (6.2a-b))$$

Etapa (b): Representação algébrica de um nó

Portanto, aproximando o contorno do sólido por um número n de elementos, com p pontos nodais (nós funcionais), e o seu domínio em c células, a representação integral para deslocamentos, Eq. (6.3), passa a ser:

$$\begin{aligned} [c](S)\{u\}(s) + \sum_{el=1}^{nel} \int_{\Gamma_{el}} [p^*](q, s) [\Phi]^T(q) d\Gamma(q) \{u^{no}\} = \\ = \sum_{el=1}^{nel} \int_{\Gamma_{el}} [u^*](q, s) [\Phi]^T(q) d\Gamma(q) \{p^{no}\} + \sum_{ce=1}^{nce} \int_{\Omega_{ce}} [u^*](q, s) [\Phi](q) d\Omega \{B^{no}\} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Etapa (c): Sistematização algébrica para todos os nós do contorno

Resolvidas as integrais da Eq. (6.3) e escrevendo-as para pontos de colocação s no contorno, tem-se:

$$[C]\{U_{est}\} + [\hat{H}_{est}]\{U_{est}\} = [G_{est}]\{P_{est}\} + [D_{est}]\{B_{est}\} \quad (6.4)$$

onde as matrizes $[\hat{H}_{est}]$, $[G_{est}]$ e $[D_{est}]$ vêm, respectivamente, dos somatórios das integrais sobre cada elemento e , definidos na Eq. (6.3).

O sistema indicado na Eq. (6.4) pode ser reagrupado como:

$$[H_{est}]\{U_{est}\} = [G_{est}]\{P_{est}\} + [D_{est}]\{B_{est}\} \quad (6.5)$$

onde: $[H_{est}] = [C][\hat{H}_{est}]$.

Etapa (d): Aplicação das condições de contorno e solução do sistema final

Antes da solução do problema, condições de contorno devem ser impostas na Eq. (6.5), resultando em:

$$[A]\{V_D\} = \{V_I\} \quad (6.6)$$

onde: $[A]$ é a matriz quadrada de ordem igual a 3 vezes o número de nós da malha, cheia e não simétrica, que contém elementos das matrizes $[H_{est}]$ e $[G_{est}]$ devidamente trocados (troca de colunas) para agrupar todas incógnitas do lado esquerdo da igualdade, sejam elas deslocamentos ou forças de superfície; $\{V_D\}$ é o vetor das incógnitas, deslocamentos e forças de superfícies; e $\{V_I\}$, o vetor independente formado pela multiplicação dos coeficientes das matrizes $[H_{est}]$ e $[G_{est}]$ relativos às componentes prescritas de deslocamentos e forças de superfície, somando-se, ainda, valores da parcela das forças de volume.

A solução do sistema indicado na Eq. (6.6) é simples, pode ser representada por:

$$\{V_D\} = [A]^{-1} \{V_I\} \quad (6.7)$$

6.2 Classificação dos elementos de contorno

Faz-se neste subitem uma brevíssima discussão sobre as classes de elementos de contorno e a apresentação do chamado elemento ponto. Os elementos de contorno utilizados para aproximar o contorno do corpo têm a dimensão deste diminuída de uma unidade. Desse modo existem elementos de contorno bidimensional (2D), unidimensional (1D) e pontual (0D).

Assim, o contorno de um volume é representado por elementos de superfície; o contorno de uma chapa ou placa delgada é representado por um conjunto de segmentos, enquanto o contorno (as extremidades) de uma barra é representado por um par de pontos, um em cada extremidade.

Quanto às funções interpoladoras os elementos de superfície e os de linha podem ser constantes, lineares (contínuo, de transição ou descontínuo), quadráticos ou de ordem superior. Se as funções interpoladoras de deslocamentos, de forças e da geometria forem iguais o elemento é dito isoparamétrico.

Tendo em vista que nas análises a serem desenvolvidas neste trabalho serão utilizados apenas os elementos de contorno associados às estruturas reticuladas, ou seja, os pontos que definem as extremidades inicial e final de cada barra, uma discussão mais aprofundada sobre os demais tipos de elementos não será aqui levada a efeito.

Quando o domínio do corpo é formado por um conjunto de segmentos unidimensionais tem-se uma estrutura reticulada. Cada uma das barras de um corpo reticulado terá elementos de contorno pontuais em suas extremidades, vide Figura 1.

O elemento ponto (EP), para a discretização do contorno dos elementos dos corpos reticulados, surge como decorrência da observação de que a dimensão dos elementos de contorno é uma unidade menor que a dimensão do corpo em estudo tendo, portanto, neste caso, dimensão zero, 0D.

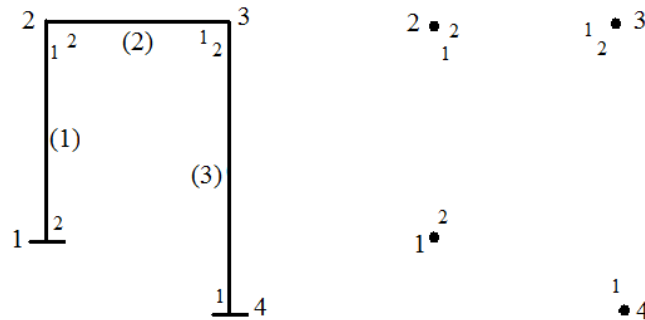


Figura 1 – Estruturas de barra e elemento de contorno 0D.

Uma peculiaridade da utilização desse tipo de elemento é que devido à ausência de pontos internos (pontos do domínio do elemento) não são utilizadas funções interpoladoras nem coordenadas homogêneas. Estas, para facilitar as integrações numéricas e aquelas para a obtenção das coordenadas, dos deslocamentos e das forças de superfícies em quaisquer dos pontos do interior do elemento de contorno. Desse modo as soluções obtidas para os nós da malha, isto é, para os nós geométricos do corpo reticulado analisado, coincidem com os valores exatos.

O elemento de contorno (EP), Figura 2, de aplicação pouco comum nos livros texto sobre o MEC, que em geral tratam apenas de elementos de contorno em 1D e em 2D, tem sido utilizado raramente em trabalhos como o de Antes (2003), Antes e col. (2004), Souza e Mendonça (2008), Cruz e col.(2010), Cruz (2012), etc.

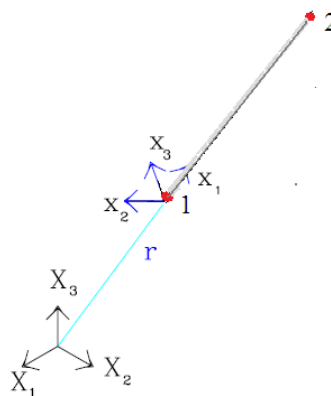


Figura 2 – Elementos de contorno EP e sistemas de coordenadas global e local.

A transição de equações integrais discretizadas para equações algébricas faz-se pelo cálculo das integrais envolvidas, por exemplo: via integração numérica das parcelas a seguir:

$$\begin{aligned} [h] &= \int_{\Gamma} [p^*](q, s) \{\Phi\}^T(q) d\Gamma(q) \\ [g] &= [u^*](q, s) \{\Phi\}^T(q) d\Gamma(q) \end{aligned} \quad (6.8a-b)$$

As soluções analíticas das integrais da Eq.(6.8) são de difícil obtenção, dada a complexidade das funções a serem integradas. O que justifica o emprego de esquemas numéricos de integração para que seja estabelecido um procedimento padrão e eficiente de obtenção dessas matrizes $[h]$ e $[g]$. Essas integrais são calculadas para duas situações distintas: i) quando o ponto de colocação s situa-se no elemento a ser integrado (integração singular ou semi-analítica) e, ii) quando este ponto s está posicionado fora do elemento a ser integrado quando em geral é feita integração numérica.

6.3 As Hipóteses

6.3.1 Hipóteses gerais

i) O problema tridimensional, 3D, pode ser reduzido ao espaço unidimensional, 1D, desde que a maior dimensão do elemento, o comprimento L , seja suficientemente maior que as outras duas, as dimensões b e h da seção transversal. Como mostrado na Figura 3:

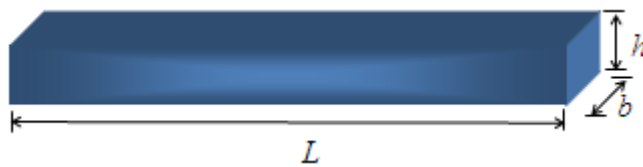


Figura 3 – Barra (elemento estrutural unidimensional).

- ii) A barra deve ter seção transversal uniforme, ou seja, a barra deve ser prismática;
- iii) Quando no regime estático, as cargas devem ser aplicadas de modo que os efeitos da energia cinética sejam desprezíveis;

iv) O material deve ser homogêneo e isótropo; enquanto a homogeneidade implica que as propriedades e os fenômenos do todo são representados em qualquer região do corpo, a isotropia implica em mesmas propriedades em todas as direções;

v) O material deve ser elasto-linear: a elasticidade implica que em um ciclo de carga descarga, não haverá deformação residual. Já a linearidade exige uma proporcionalidade direta entre tensão e deformação;

vi) A planicidade das seções transversais deve ser mantida durante o processo de deformação;

vii) O efeito de Poisson é desprezado, ou seja, as deformações transversais da seção são desconsideradas;

viii) Os campos de deslocamentos e deformações devem ser pequenos (suaves).

6.3.2 Hipóteses particulares

Neste caso não existe hipóteses particulares.

7. OS PROBLEMAS REAL E FUNDAMENTAL, A EQUAÇÃO INTEGRAL E A REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DO EFEITO AXIAL

7.1 O efeito axial

Considerada a barra prismática sob a ação do carregamento axial distribuído $p(x)$ conforme Figura 4(a), é possível escrever a equação diferencial governante do problema. Para tanto, um elemento da barra de comprimento dx é dela isolado para análise, como mostrado na Figura 4(b).

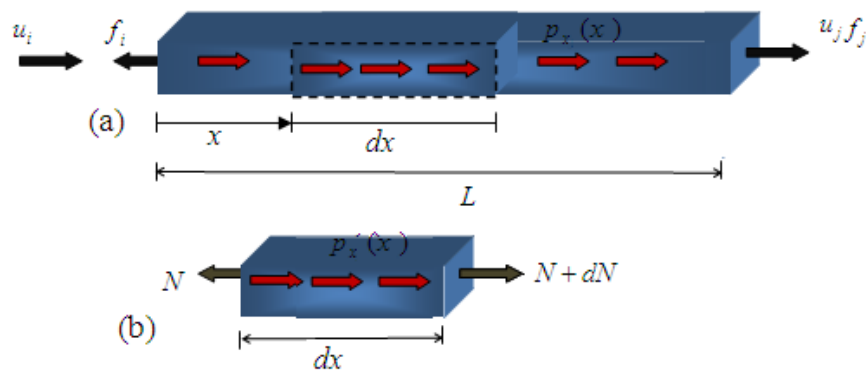


Figura 4 – Barra sob efeito axial (Adaptada de Mendonça, 2009).

7.2 A equação diferencial governante do efeito axial (o problema real)

Do balanço de forças no elemento da barra, obtém-se: $dN + p_x(x)dx = 0$ ou

$$\frac{dN}{dx} = -p_x(x) \quad (7.1)$$

onde, N ou $N(x)$ representa o esforço normal aplicado e $p_x(x) = p_x$, o carregamento aplicado.

Da relação força-deformação, tem-se:

$$N = EA \frac{du}{dx} \quad (7.2)$$

sendo: u (ou $u(x)$), A e E , respectivamente, o deslocamento segundo o eixo x da barra, a área da seção transversal e o módulo de elasticidade do material constituinte.

Igualando a derivada da Eq. (7.2) à Eq. (7.1), obtém-se a equação diferencial governante do problema real em estudo.

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + p_x(x) = 0 \quad (7.3)$$

7.3 A equação diferencial governante do efeito axial (o problema fundamental)

Por analogia ao problema real, Eq. (7.3), o equilíbrio do problema fundamental pode ser assim expresso:

$$EA \frac{du^*}{dx}(x, \hat{x}) = -p_x^*(x, \hat{x}) \quad (7.4)$$

onde: $p_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ é a função delta de Dirac que é definido no anexo.

Ainda, por analogia ao problema real, obtém-se a relação força-deslocamento do problema fundamental, a partir da Eq.7.2):

$$N * (x, \hat{x}) = EA \frac{du^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (7.5)$$

Uma das soluções possíveis para a Eq. (7.4) é:

$$u^*(x, \hat{x}) = \alpha r + \beta \quad (7.6)$$

onde: $r = |x - \hat{x}|$.

Se a Eq. (7.4) for integrada no domínio e utilizada a propriedade do Delta de Dirac, tem-se:

$$\left[EA u^*(x - \hat{x}) \right]_0^L = -1 \quad (7.7)$$

As derivadas da Eq. (7.6) são:

$$u^*(x - \hat{x}) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } x - \hat{x} \geq 0 \\ -\alpha, & \text{se } x - \hat{x} < 0 \end{cases}$$

que levadas na Eq. (7.7), resulta em: $EAu''(L - \hat{x}) - EAu''(0 - \hat{x}) = -1$, de onde $\alpha = -1/(2EA)$

Assim, o valor da solução da Eq. (7.6), fica:

$$u''(x - \hat{x}) = -\frac{1}{2EA}r + \beta \quad (7.8)$$

Como o valor de β pode ser tomado arbitrariamente, lhe atribuindo valor nulo, tem-se:

$$u''(x - \hat{x}) = -\frac{1}{2EA}r = -\frac{1}{2EA}|x - \hat{x}| \quad (7.9)$$

Substituindo a Eq. (7.9) na segunda parcela da Eq. (7.5), obtém-se a expressão para a força normal do problema fundamental.

$$N^*(x - \hat{x}) = EAu''(x - \hat{x}) = -\frac{1}{2}\text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (7.10)$$

onde: sgn é a função sinal que é igual a 1 se $x > \hat{x}$, sendo igual a -1 quando $\hat{x} > x$. (vide anexo)

7.4 A equação Integral do efeito axial

Seja o problema de valor de contorno (PVC) definido pelos valores de contorno indicados nas Eqs. (7.11a-d) para a barra mostrada na Figura 4(a) e pela Eq.(7.3) na qual se aplica a técnica dos resíduos ponderados (TRP) obtendo-se a Eq. (7.12):

$$\begin{aligned} u(x=0) &= u_i \\ u(x=L) &= u_j \\ f_x(x=0) &= f_i \\ f_x(x=L) &= f_j \end{aligned} \quad (7.11a-d)$$

$$\int_0^L [EA \frac{d^2 u}{dx^2} + p_x(x)] u^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (7.12)$$

onde: $u^*(x, \hat{x})$ representa a função ponderadora de deslocamentos (ou função peso), que é obtida da solução do problema fundamental, x , $\hat{x}$ e $f_x(x,)$ são, na ordem, a coordenada do ponto campo, do ponto fonte e as forças de corpo.

Integrando por partes a Eq. (7.12), tem-se:

$$\left[EA \frac{du}{dx}(x) u^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L \frac{du}{dx} EA u^*(x, \hat{x}) + p_x(x) u^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (7.13)$$

Substituindo as equações força-deslocamentos, Eq. (7.2) na Eq. (7.13), obtém-se:

$$\left[N(x) u^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L \left[\frac{du(x)}{dx} N^*(x, \hat{x}) - p_x(x) u^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \quad (7.14)$$

Agora integrando por partes, a Eq. (7.14), e substituindo a Eq.(7.5) obtém-se:

$$\left[N(x) u^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[u(x) N^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \int_0^L \left[u(x) N^*(x, \hat{x}) + p_x(x) u^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \quad (7.15)$$

Substituindo Eq. (7.5), na Eq. (7.4), tem-se:

$$\frac{dN^*}{dx}(x, \hat{x}) + \delta(x, x) = 0 \quad (7.16)$$

Aplicando a propriedade de filtro do delta de Dirac na Eq. (7.15), após a introdução da Eq. (7.16)), obtém-se:

$$u(\hat{x}) - \left[N(x) u^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[u(x) N^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L \left[p_x(x) u^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \quad (7.17)$$

ou, a Eq. (7.18), que é a equação integral para pontos colocados no domínio Ω :

$$u(\hat{x}) - u(0)N^*(0, \hat{x}) + u(L)N^*(L, \hat{x}) + N(0)u^*(0, \hat{x}) - N(L)u^*(L, \hat{x}) - \int_0^L [p_x(x)u^*(x, \hat{x})]dx = 0 \quad (7.18)$$

Para a completa definição da equação integral indicada na Eq. (7.18) há que se calcular o termo das forças de corpo, ou seja, a integral de domínio que finaliza o primeiro membro dessa equação. A Eq. (7.18) requer, também, os valores das soluções fundamentais.

7.5 A representação algébrica do efeito axial

Fazendo a colocação do ponto fonte nas extremidades da barra, no contorno, quando:

$\hat{x} \rightarrow 0 = \lim_{\xi \rightarrow 0} (0 + \xi)$ e $\hat{x} \rightarrow L = \lim_{\xi \rightarrow 0} (L - \xi)$, na Eq. (7.18), tem-se:

Para $\hat{x} \rightarrow 0$:

$$u(0) - u(0)N^*(0, 0 + \xi) + u(L)N^*(L, 0 + \xi) + N(0)u^*(0, 0 + \xi) - N(L)u^*(L, 0 + \xi) = \int_0^L [p_x(x)u^*(x, 0)]dx \quad (7.19)$$

Para $\hat{x} \rightarrow L$:

$$u(L) - u(0)N^*(0, L - \xi) + u(L)N^*(L, L - \xi) + N(0)u^*(0, L - \xi) - N(L)u^*(L, L - \xi) = \int_0^L [p_x(x)u^*(x, L)]dx \quad (7.20)$$

Reescrevendo a Eq. (7.19) e a Eq. (7.20) com notação matricial, tem-se:

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -N^*(0, 0 + \xi) & N^*(L, 0 + \xi) \\ -N^*(0, L - \xi) & N^*(L, L - \xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(L) \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} u^*(0, 0 + \xi) & -u^*(L, 0 + \xi) \\ u^*(0, L - \xi) & -u^*(L, L - \xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(0) \\ N(L) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} f_x(0) \\ f_x(L) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.21)$$

onde as forças de corpo são:

$$\begin{aligned}
 f_{xi} = f_x(0) &= \int_0^L p_x(x) u^*(x, 0) dx \\
 f_{xj} = f_x(L) &= \int_0^L p_x(x) u^*(x, L) dx
 \end{aligned} \tag{7.22a-b}$$

Através da Eq. (7.9) e da Eq. (7.10), calculam-se os valores das soluções fundamentais para as extremidades da barra devidas à aplicação da fonte em cada uma dessas extremidades:

a) para a fonte na extremidade i

b) para a fonte na extremidade j

$$\begin{aligned}
 u^*(0, 0 + \xi) &= 0 & u^*(0, L - \xi) &= -\frac{L}{2EA} = -\beta_x \\
 u^*(L, 0 + \xi) &= -\frac{L}{2EA} = -\beta_x & u^*(L, L - \xi) &= 0 \\
 N^*(0, 0 + \xi) &= 1/2 & N^*(0, L - \xi) &= 1/2 \\
 N^*(L, 0 + \xi) &= -1/2 & N^*(L, L - \xi) &= -1/2
 \end{aligned} \tag{7.23a-h}$$

Sendo, portanto, α_x e β_x indicados na Eq. (7.24a-b):

$$\begin{aligned}
 \alpha_x &= -\frac{1}{2} \\
 \beta_x &= \frac{L}{2EA}
 \end{aligned} \tag{7.24a-b}$$

As forças nas extremidades da barra (as forças de corpo) são obtidas substituindo a Eq. (7.16) nas Eqs. (7.22a-b)

$$\begin{aligned}
 f_{xi} = f_x(0) &= \frac{1}{2EA} \int_0^L p_x(x) |x| dx = \frac{p_x L^2}{4EA} \\
 f_{xj} = f_x(L) &= \frac{1}{2EA} \int_0^L p_x(x) |x - L| dx = \frac{p_x L^2}{4EA}
 \end{aligned} \tag{7.25a-b}$$

Substituindo na Eq. (7.21), as igualdades indicadas nas Eqs. (7.23a-h) e Eqs. (7.25a-b), obtém-se a representação algébrica do esforço axial:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \alpha_x \\ \alpha_x & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_x \\ \beta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{xj} \end{Bmatrix} \quad (7.26-a)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{L}{2EA} \\ \frac{L}{2EA} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{xj} \end{Bmatrix} \quad (7.26-b)$$

8. OS SISTEMAS DE REFERÊNCIA LOCAIS UNIFICADOS

A unificação dos sistemas de referência locais de cada barra que aqui é desenvolvida tem por objetivo principal possibilitar a adequação rápida e segura das equações (e dos resultados) obtidas na análise de problemas em que se verifique a necessidade de reescrevê-las levando em conta outros referenciais.

O procedimento aplicado é simples e os resultados dele afloram imediatamente, sendo bastante, apenas, uma inspeção física do problema e sua interpretação no sistema de referência a ser adotado. No TCC, a utilização de um sistema de referência unificado para cada elemento da estrutura a ser analisada é decorrente da ideia de utilização das matrizes (operadores matemáticos) de mudança de referencial de aplicação corrente no MEF, na solução desses mesmos problemas de estruturas reticuladas, nos quais se aplica o MEC.

Todas as grandezas grafadas com uma barra estão referidas ao sistema local de coordenadas unificado.

8.1 Problemas independentes

Cada representação algébrica dos efeitos independentes escrita com notação mais concisa, no SCL, referida através da expressão: $\{u\} + [h]\{u\} = [g]\{p\} + \{f\}$, será indicada no SCLU, como:

$$\{u\} + [h]\{u\} = [g]\{p\} + \{f\} \quad (8.1a)$$

$$\{\bar{u}\} + [\bar{h}]\{\bar{u}\} = [\bar{g}]\{\bar{p}\} + \{\bar{f}\} \quad (8.1b)$$

onde:

$$[\bar{h}] = [\eta_h]^{-1} [h] [\eta_h]$$

$$[\bar{g}] = [\eta_g]^{-1} [g] [\eta_g]$$

$$\{u\} = [\eta_h] \{\bar{u}\}$$

$$[p]\{p\} = [\eta_g] \{\bar{p}\}$$

$$\{\bar{f}\} = [\eta_h]^{-1} \{f\} \quad (8.2a-e)$$

$\{u\}$, $[h]$ e $[g]$, e $\{\bar{u}\}$, $[\bar{h}]$ e $[\bar{g}]$ são, na ordem, o vetor dos deslocamentos nas extremidades da barra, a matriz de influência dos deslocamentos e a dos esforços, nas extremidades da barra, referidos ao SCL referidos a SCLU. As matrizes $[\eta_h]$ e $[\eta_g]$ relacionam, respectivamente, os deslocamentos e os esforços no SCL com os seus respectivos no SCLU.

8.1.1 O efeito axial

Nas Figuras 5 e 6 estão mostrados, respectivamente, os sistemas locais de coordenadas (SCL) utilizados na avaliação da contribuição do efeito axial (de tração) no desempenho da barra como elemento de treliça e o sistema local de coordenadas unificado, (SLCU) adotado.

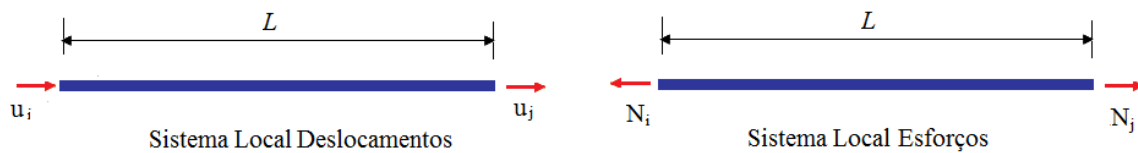


Figura 5 – SCL para a avaliação da contribuição do efeito axial.

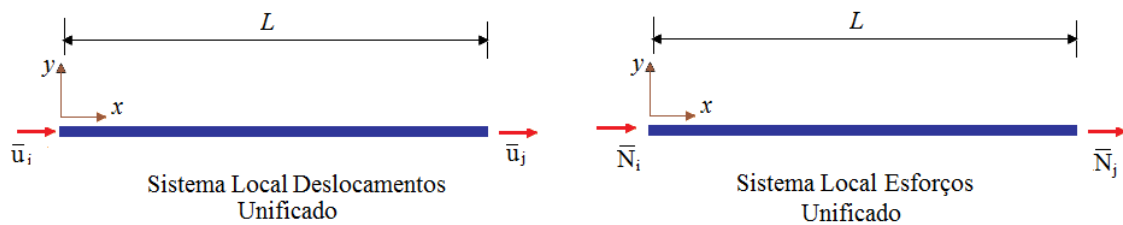


Figura 6 – SCLU para a avaliação da contribuição do efeito axial.

Comparando o sentido de cada deslocamento e de cada esforço no SCL com a direção positiva do eixo correspondente do SCLU, mostrados nas duas figuras acima, conclui-se que:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} \quad (8.3)$$

que em notação mais concisa fica: $\{u\} = [\eta_h] \{\bar{u}\}$,

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{N}_j \end{Bmatrix} \quad (8.4)$$

ou:

$$\{N\} = [\eta_g] \{\bar{N}\},$$

e,

$$\begin{Bmatrix} f_{ui} \\ f_{uj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}_{ui} \\ \bar{f}_{uj} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Ou: } \{f_u\} = [\eta_h] \{\bar{f}_u\}$$

$$[\bar{h}] = [\eta_h]^{-1} [h] [\eta_h]$$

Substituindo as Eqs. (8.3) e (8.4) na Eq. (8.1b) obtém-se a representação algébrica do efeito axial no SCLU.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{N}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{xj} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Onde $[\hat{h}] = \begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} \end{bmatrix}$ e $[g] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$ são as matrizes de influência da representação

algébrica do efeito axial referidas ao SCL, que são integrantes da Eq. (7.25a).

Assim a Eq. (8.5) pode ser reescrita com a utilização das matrizes: $[\eta_h]$ e $[\eta_g]$, como indicado a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \alpha_x \\ \alpha_x & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\beta_x \\ -\beta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{N}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{ui} \\ \bar{f}_{uj} \end{Bmatrix} \quad (8.6a)$$

ou:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{L}{2EA} \\ -\frac{L}{2EA} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{N}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{ui} \\ \bar{f}_{uj} \end{Bmatrix} \quad (8.6b)$$

8.2 Problemas combinados

A representação algébrica de barra de treliça é feita inicialmente no SCLU para em seguida ser reescrita no SCG. No SCLU ela é obtida pela superposição dos efeitos aos quais a barra está submetida, neste caso, apenas ao efeito axial. Assim, em notação concisa a representação algébrica no SCLU pode ser escrita como na Eq. (8.7 a-b), e quando referida ao SCG, segundo a Eq. (8.8).

$$[I]\{\bar{u}\} + [\hat{h}]\{\bar{u}\} = [g]\{\bar{p}\} + \{\bar{f}\}$$

$$[h]\{\bar{u}\} = [g]\{\bar{p}\} + \{\bar{f}\} \quad (8.7a-b)$$

E, quando referida ao SCG, o sistema algébrico combinado fica:

$$[I]\{U\} + [\hat{H}]\{\bar{u}\} = [G]\{P\} + \{F\}$$

$$[\hat{H}]\{U\} = [G]\{P\} + \{F\} \quad (8.8a-b)$$

onde: $[I]$, $[\hat{h}]$ e $[g]$ são, na ordem, a matriz identidade, a matriz de influência de deslocamentos e a matriz de influência de forças da barra. Todas são quadradas cuja ordem é igual à quantidade de GDL considerados; $[h] = [I] + [\hat{h}]$, e $\{u\}$, $\{p\}$ e $\{f\}$ são, na ordem, os vetores dos deslocamentos, dos esforços nodais e das forças de corpo da barra. Todos com a quantidade de linhas igual à quantidade de GDL considerados. As matrizes e os vetores indicados com letras maiúsculas, têm a mesma definição dos seus correspondentes indicados com letras minúsculas. Sendo que enquanto estas estão referidas ao SCLU aquelas estão referidas ao SCG.

Embora a barra de treliça só responda axialmente, são considerados dois graus de liberdade em cada uma das suas extremidades e, bem assim, em cada um dos nós da treliça plana. Em razão disso, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{L}{2EA} & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{N}_j \\ \bar{V}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{p_x i} \\ \bar{f}_{p_y i} \\ \bar{f}_{p_x j} \\ \bar{f}_{p_y j} \end{Bmatrix} \quad (8.9)$$

$$\text{onde: } f_{p_x i} = f_{p_x j} = \frac{p_x(x)L^2}{4EA}, f_{p_y i} = \frac{5}{3} f_{p_y j} = \frac{5p_y(x_1)L^4}{48EI_z} \text{ e } \alpha \text{ pode assumir qualquer valor}$$

inclusive o valor zero.

9. O SISTEMA DE COORDENADAS GLOBAIS E A MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

A representação algébrica da estrutura (treliça plana ou espacial, pórtico plano ou espacial padrão ou enrijecido por núcleo) requer que as contribuições advindas das barras sejam convenientemente acumuladas de forma a descrever o comportamento da estrutura como um todo. Em busca desse objetivo algumas transformações nos sistemas algébricos locais unificados das barras devem ser efetuadas, obtendo-se assim os sistemas algébricos globais dessas mesmas barras.

A princípio, a superposição dos campos vetoriais (esforços e deslocamentos) de cada extremidade de barra deve ser feita através de uma soma vetorial (magnitude e orientação) nos nós comuns. Para que estes vetores sejam somados algebricamente ou escalarmente (apenas suas magnitudes), eles precisam necessariamente estar na mesma direção para que suas contribuições sejam corretamente consideradas.

Para tanto, deve-se assegurar para cada membro que as matrizes de influência e o seu vetor de carregamento estejam no mesmo sistema de coordenadas. Os campos no sistema local unificado podem ser referenciados ao global a partir das relações geométricas entre os eixos de mesmo nome desses sistemas. Assim, os deslocamentos, os esforços e as forças externas no SCLU são correlacionados com suas respectivas contrapartes globais como:

$$\{u\} = [R]\{U\}, \quad \{p\} = [R]\{P\} \text{ e } \{f\} = [R]\{F\} \quad (9.1a-c)$$

Define-se, então, uma relação entre as matrizes de influência locais unificadas (referidas ao sistema centrado no CG quando forem de treliças e as de influência globais, a partir da matriz de transformação $[R]$ como mostrado a seguir: substituindo na Eq. (8.1a) as Eqs. (9.1a-c), obtém-se:

$$\{U\} + [R]^T [\hat{h}] [R] \{U\} = [R]^T [g] [R] \{P\} + [R]^T [R] \{F\} \quad (9.2)$$

Comparando a Eq. (8.2) com a Eq. (7.8a), tem-se:

$$[\hat{H}] = [R]^T [\hat{h}] [R], \quad G = [R]^T g [R] \text{ e } [F] = [R]^T \{f\} \quad (9.3a-c)$$

A matriz de transformação para a treliça plana utilizada na Eq. (9.2), é dada na Eq. (9.4)

$$[R] = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C] \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

onde, $[C] = \begin{bmatrix} C_x & C_y \\ -C_y & C_x \end{bmatrix}$ e $[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, C_x e C_y são os cossenos diretores da barra em relação aos eixos do SCG, sendo $C_x = \cos \theta_x = \frac{X_j - X_i}{L}$, $C_y = \cos \theta_y = \frac{Y_j - Y_i}{L}$ e o comprimento da barra, como indicado na Figura 7.

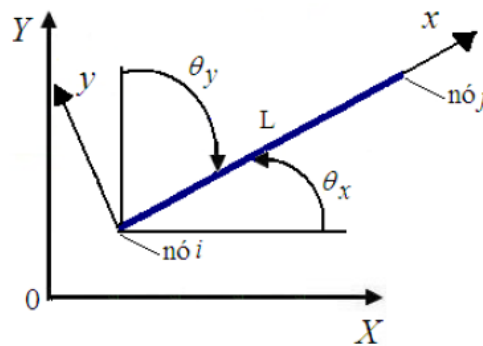


Figura 7 – Coordenadas globais OXY, coordenadas locais oxy.

10. REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DA ESTRUTURA

Quando duas ou mais barras convergirem para o mesmo nó deve ser levado em conta a continuidade dos deslocamentos e as condições de equilíbrio. No caso das treliças a definição de um nó virtual nas extremidades dessas barras é suficiente para a verificação do equilíbrio nó a nó da estrutura.

10.1 Representação algébrica da treliça plana

Para a discussão sobre a montagem do sistema global das treliças planas serão consideradas (por simplicidade e concisão) duas barras convergentes. Neste caso isola-se o nó 2 e indica-se as barras (1) e (2) que convergem a ele, conforme ilustrado na Figura 8.

Quando duas ou mais barras convergirem para o mesmo nó deve ser levado em conta a compatibilidade dos deslocamentos e as condições de equilíbrio. Por simplicidade e concisão tomar-se-ão duas barras convergentes, as barras (1) e (2), conforme indicado na Figura 9.

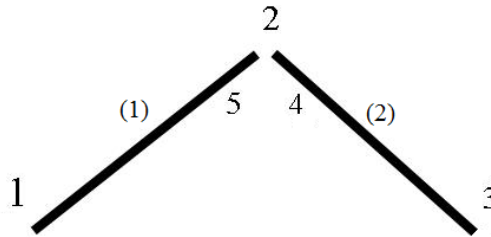


Figura 8 – Barras de treliça convergindo.

As Eq. (10.1) e Eq. (10.2) indicam, na ordem, as representações algébricas para as barras (1) e (2) no sistema global:

$$\begin{cases} [H_{11}^{(1)}]\{U_1\} + [H_{12}^{(1)}]\{U_5\} = [G_{11}^{(1)}]\{P_1\} + [G_{12}^{(1)}]\{P_5\} \\ [H_{21}^{(1)}]\{U_1\} + [H_{22}^{(1)}]\{U_5\} = [G_{21}^{(1)}]\{P_1\} + [G_{22}^{(1)}]\{P_5\} \end{cases} \quad (10.1)$$

$$\begin{cases} [H_{22}^{(2)}]\{U_4\} + [H_{23}^{(2)}]\{U_3\} = [G_{22}^{(2)}]\{P_4\} + [G_{23}^{(2)}]\{P_3\} \\ [H_{32}^{(2)}]\{U_4\} + [H_{33}^{(2)}]\{U_3\} = [G_{32}^{(2)}]\{P_4\} + [G_{33}^{(2)}]\{P_3\} \end{cases} \quad (10.2)$$

Aplicando-se as condições de compatibilidade de deslocamento nas seções à esquerda e à direita no nó 2, tem-se:

11. APLICAÇÕES

11.1 Introdução

Neste item serão apresentados resultados da análise de duas treliças planas a partir da formulação apresentada.

Os resultados aqui obtidos via MEC serão validados a partir de resultados obtidos analiticamente ou através do soft Ftool.

11.2 Análise da treliça da Figura 10

Esta treliça é composta por duas barras, uma horizontal e a outra vertical. Cada uma delas é, portanto, paralela a um dos eixos do sistema de referência global.

11.2.1 Caracterização da estrutura: carregamento, geometria das barras e da estrutura, material constituinte, sistema global de referência e discretização.

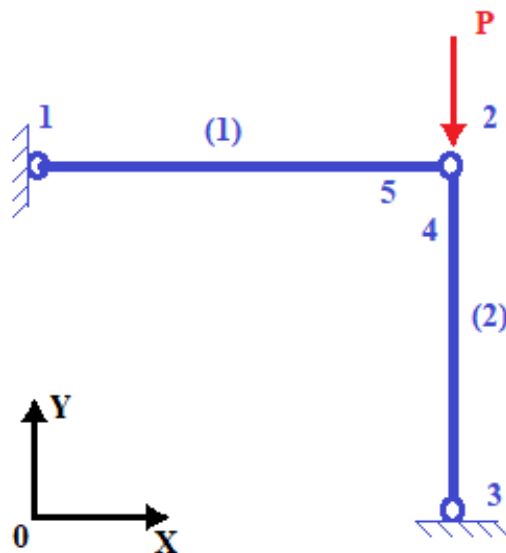


Figura 10 – Treliça da aplicação 1.

Ambas, as barras, têm comprimento igual a 4, 0m e seção transversal quadrada de área igual a $4,0\text{cm}^2$. O material constituinte tem módulo de deformação longitudinal igual a 2.100KN/cm^2 . A estrutura está submetida a ação de uma força concentrada vertical para baixo de 2000kN no nó 2.

11.2.2 Solução

A equação matricial Eq. (11.1) que repete a Eq. (8.9) é a representação do efeito axial relacionada ao sistema de referência local unificado para cada uma das barras de treliça plana.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{L}{2EA} & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{N}_j \\ \bar{V}_j \end{Bmatrix} \quad (11.1)$$

Com o objetivo de obter a equação matricial global que é a representação algébrica da estrutura, as equações obtidas para cada uma das barras a partir da Eq.(11.1), deverão ser reescritas agora referidas ao sistema global de referência, SGR. Para tal fim utilizam-se as matrizes de transformação, $[R]$.

A matriz de transformação para a treliça plana é dada na Eq. (9.4), tendo a seguinte expressão geral: $[R] = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C] \end{bmatrix}$ onde, $[C] = \begin{bmatrix} C_x & C_y \\ -C_y & C_x \end{bmatrix}$ e $[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

C_x e C_y são os cossenos diretores da barra em relação aos eixos do SCG, como indicado na Figura 11, que aqui é reapresentada.

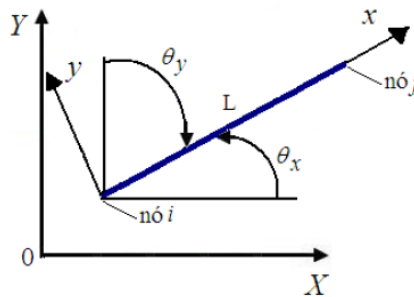


Figura 11 – Coordenadas globais OXY, coordenadas locais Oxy (reapresentada).

Assim, para a barra (1) da treliça em análise, com $\theta_x = 0^\circ$: tem-se $\cos \theta_x = 1$ e

$\cos \theta_y = 0$. Logo tem-se: $[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e a matriz de transformação para as grandezas

associadas à barra (1) é igual a matriz identidade $[I]_{4 \times 4}$, composta por quatro submatrizes 2×2 . Como indicada a seguir:

$$[R]^{(1)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

Já para a barra (2), com $\theta_x = -90^\circ$ tem-se: $\cos \theta_x = 0$ e $\cos \theta_y = -1$. Logo tem-se:

$[C] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e a matriz de transformação para as grandezas associadas à barra (2) é dada por:

$$[R]^{(2)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

Substituindo adequadamente as relações: $\{u\} = [R]\{U\}$, $\{p\} = [R]\{P\}$, $[\hat{H}] = [R]^T [\hat{h}] [R]$, $[G] = [R]^T [g] [R]$ e $[I]\{U\} + [\hat{H}]\{U\} = [H]\{U\}$ na Eq. (8.7-b) (8.8b) com a matriz de transformação da barra (1) indicada na Eq. (11.2) e a da barra (2), na Eq. (11.3), tem-se a Eq. (11.4) que é a representação algébrica da estrutura referida ao SGR.

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} \quad (11.4)$$

Com a matriz $[R]^{(1)} = [I]$ as matrizes de influência, de deslocamentos e de cargas da equação $[h]\{\bar{u}\} = [g]\{\bar{p}\}$ para a barra (1) que é referida ao SCLU serão iguais às matrizes de mesmo nome referidas ao SRG, ou seja as matrizes $[H]^{(1)}$ e $[G]^{(1)}$. Enquanto a obtenção das matrizes $[H]^{(2)}$ e $[G]^{(2)}$ da barra (2) requer o algebrismo matricial indicado nas Eqs. (11.5) e (11.6):

$$[H]^{(2)} = [R]^{(2)T} [h]^{(2)} [R]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{0}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$[H]^{(2)} = [R]^{(2)T} [h]^{(2)} [R]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

$$[G]^{(2)} = [R]^{(2)T} [g]^{(2)} [R]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{L}{2EA} & 0 \\ 0 & -\alpha_{(2)} & 0 & 0 \\ -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$[G]^{(2)} = [R]^{(2)T} [g]^{(2)} [R]^{(2)} = \begin{bmatrix} -\alpha_{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2EA} \\ 0 & 0 & \alpha_{(2)} & 0 \\ 0 & -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

$$[H]^{(1)} = \begin{bmatrix} [H]_{11}^{(1)} & [H]_{12}^{(1)} \\ [H]_{21}^{(1)} & [H]_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (11.7)$$

$$[G]^{(1)} = \begin{bmatrix} [G]_{11}^{(1)} & [G]_{12}^{(1)} \\ [G]_{21}^{(1)} & [G]_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{(1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{L}{2EA} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{L}{2EA} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{(1)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

$$[H]^{(2)} = \begin{bmatrix} [H]_{22}^{(2)} & [H]_{23}^{(2)} \\ [H]_{32}^{(2)} & [H]_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (11.9)$$

$$[G]^{(2)} = \begin{bmatrix} [G]_{22}^{(2)} & [G]_{23}^{(2)} \\ [G]_{32}^{(2)} & [G]_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L}{2EA} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L}{2EA} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (11.10)$$

Agora, com as matrizes de influência das Eqs. (11.5) até (11.10) calculadas, tem-se a representação de cada barra no SCG, tal como mostrado, respectivamente, nas Eqs. (10.1) e (10.2), aqui rerepresentadas:

$$\begin{cases} [H]_{11}^{(1)}\{U_1\} + [H]_{12}^{(1)}\{U_5\} = [G]_{11}^{(1)}\{P_1\} + [G]_{12}^{(1)}\{P_5\} \\ [H]_{21}^{(1)}\{U_1\} + [H]_{22}^{(1)}\{U_5\} = [G]_{21}^{(1)}\{P_1\} + [G]_{22}^{(1)}\{P_5\} \end{cases} \quad (10.1)$$

$$\begin{cases} [H]_{22}^{(2)}\{U_4\} + [H]_{23}^{(2)}\{U_3\} = [G]_{22}^{(2)}\{P_4\} + [G]_{23}^{(2)}\{P_3\} \\ [H]_{32}^{(2)}\{U_4\} + [H]_{33}^{(2)}\{U_3\} = [G]_{32}^{(2)}\{P_4\} + [G]_{33}^{(2)}\{P_3\} \end{cases} \quad (10.2)$$

Nas quais são introduzidas as condições de compatibilidade de deslocamento nas seções à esquerda e à direita no nó 2, bem como as condições de equilíbrio do referido nó, respectivamente, indicadas nas Eqs. (11.11) e (11.12), para a obtenção da representação algébrica da estrutura, como indicado na Eq. (11.13) a seguir:

$$\{U_2\} = \{U_4\} = \{U_5\} \quad (11.11)$$

$$\{P_5\} + \{P_4\} - \{F\} = \{0\} \quad (11.12)$$

$$\begin{bmatrix} H_{11}^{(1)} & H_{12}^{(1)} & 0 & 0 & -G_{12}^{(1)} \\ H_{21}^{(1)} & H_{22}^{(1)} & 0 & 0 & -G_{22}^{(1)} \\ 0 & H_{32}^{(2)} & H_{33}^{(2)} & -G_{32}^{(2)} & 0 \\ 0 & H_{22}^{(2)} & H_{23}^{(2)} & -G_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \{U_3\} \\ \{P_4\} \\ \{P_5\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{21}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{33}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{G}_{23}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{0\} \\ \{P_3\} \\ \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (11.13)$$

Com a substituição dos valores das matrizes de influência, a Eq. (11.13) fica:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EA} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{L}{2EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ P_{H4} \\ P_{V4} \\ P_{H5} \\ P_{V5} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \\ P_5 \\ P_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_4 \end{Bmatrix} \quad (11.14)$$

Substituindo na Eq. (11.14) os valores conhecidos dos deslocamentos e das forças nodais, tem-se:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EA} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{(1)} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{L}{2EA} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{(2)} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 U_2 \\
 V_2 \\
 0 \\
 0 \\
 P_{H4} \\
 P_{V4} \\
 P_{H5} \\
 P_{V5}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\alpha_{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 P_1 \\
 P_2 \\
 0 \\
 0 \\
 P_5 \\
 P_6 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -2000
 \end{Bmatrix}
 \quad (11.15)$$

Onde: U_i e V_i com i variando de 1 a 3 indicam, respectivamente os deslocamentos horizontal e vertical do nó i referido ao SCG. P_1 , P_2 , P_5 e P_6 representam as reações dos apoios – nos nós 1 e 3 -, sendo que aquelas com índice ímpar são horizontais enquanto as outras são verticais. P_{H4} e P_{V4} representam os esforços horizontal e vertical no nó 4 e, analogamente, P_{H5} e P_{V5} , no nó 5.

Resolvendo o sistema linha por linha, isto é, equação por equação, tem-se:

- da equação correspondente à linha 1: $-\frac{1}{2}U_2 = \frac{L}{2EA}P_{H5}$, sendo: $U_2 = 0$, então $P_{H5} = 0$
- da equação correspondente à linha 2: $0 = -\alpha_{(1)}P_2 \Rightarrow P_2 = 0$ para qualquer valor de $\alpha_{(1)}$
- da equação correspondente à linha 3: $\frac{1}{2}U_2 = -\frac{L}{2EA}P_1$, sendo: $U_2 = 0$, então $P_1 = 0$
- da equação correspondente à linha 4: $-\alpha_{(1)}P_{V5} = 0 \Rightarrow P_{V5} = 0$
- da equação correspondente à linha 5: $-\alpha_{(2)}P_5 = 0 \Rightarrow P_5 = 0$
- da equação correspondente à linha 6: $V_2 = \frac{L}{EA}P_{V4}$
- da equação correspondente à linha 7: $-\alpha_{(2)}P_{H4} = 0 \Rightarrow P_5 = 0$
- da equação correspondente à linha 8: $V_2 = -\frac{L}{EA}P_6 \Rightarrow P_6 = P_{V4}$
- da equação correspondente á linha 9: $P_{H4} + P_{H5} = 0$
- da equação correspondente à linha 10: $P_{V4} + P_{V5} = 2.000$, sendo $P_{V5} = 0$, então:
 $P_{V4} = 2.000$

Das dez equações acima indicadas as Eqs. (11.16a-j) são obtidas as grandezas incógnitas. Sendo as reações de apoio indicadas na Eq. (11.17a) e os deslocamentos nodais indicados, na Eq. (11.18a). Assim como os esforços nas extremidades das barras referidos ao SLR estão indicados nas Eqs. (11.19a) e (11.20a) a seguir:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0kN \\ 0,0kN \\ 0,0kN \\ 2.000,0kN \end{Bmatrix} \quad (11.17a)$$

$$\begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0cm \\ -0,09524 \times 10^{-4} cm \end{Bmatrix} \quad (11.18a)$$

$$\{p\}_{(1)} = \begin{Bmatrix} 0,0kN \\ 0,0kN \\ 0,0kN \\ 0,0kN \end{Bmatrix} \quad (11.19a)$$

$$\{p\}_{(2)} = \begin{Bmatrix} -2.000,00kN \\ 0,00kN \\ 2.000,00kN \\ 0,00kN \end{Bmatrix} \quad (11.20a)$$

11.2.3 Resultados obtidos via Ftool para as reações, deslocamentos e esforços nas extremidades das barras.

Visto que o software F-tool resolve suas estruturas através do método matricial dos deslocamentos, podemos comparar os resultados obtidos com as soluções dada por esta ferramenta.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 2000 \end{Bmatrix} \quad (11.17b)$$

$$\begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,583 \times 10^{-20} cm \\ -0,09524 \times 10^{-4} cm \end{Bmatrix} \quad (11.18b)$$

$$\{p\}_{(1)} = \begin{Bmatrix} 0,0kN \\ 0,0kN \\ 0,0kN \\ 0,0kN \end{Bmatrix} \quad (11.19b)$$

$$\{p\}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 2.000,0kN \\ 0 \\ -2.000,0kN \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.20b)$$

11.3 Análise da treliça da Figura 12.

11.3.1 Caracterização da estrutura: carregamento, geometria das barras e da estrutura, material constituinte, sistema global de referência e discretização

Tem-se nesta Figura 12 mais uma treliça composta por duas barras, uma inclinada a 45° com a horizontal e a outra vertical. Esta tem comprimento igual a 4,0m e seção transversal quadrada lado igual a $4,0\text{cm}^2$. O material constituinte tem módulo de deformação longitudinal igual a 21.000 kPa. Ela está submetida a ação de uma força concentrada horizontal para positiva com intensidade de 2kN atuando no nó 2.

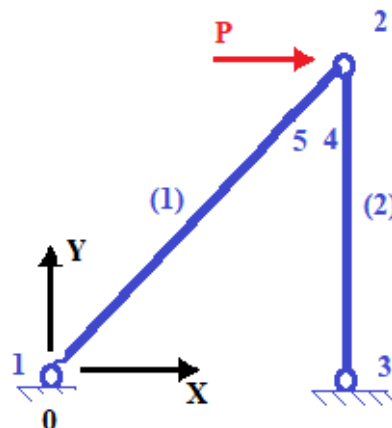


Figura 12 – Treliça da aplicação 2.

11.3.2 Solução

Após a discretização da estrutura e o estabelecimento do SCG, considera-se expressão geral da equação que traduz a representação do efeito axial em uma barra de treliça plana relacionada ao sistema de referência local unificado.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{L}{2EA} & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{N}_j \\ \bar{V}_j \end{Bmatrix} \quad (11.21)$$

Em seguida obtém-se as matrizes de transformação para cada uma das barras da treliça. Para tanto utiliza-se a expressão geral da matriz:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta_x & \cos\theta_y & 0 & 0 \\ -\cos\theta_y & \cos\theta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_x & \cos\theta_y \\ 0 & 0 & -\cos\theta_y & \cos\theta_x \end{bmatrix}$$

Onde $\cos\theta_x$ e $\cos\theta_y$ são os cossenos diretores da barra em relação aos eixos do SCG.

Para as barra (1) da treliça em estudo tem-se: com $\theta_x = \theta_y = 45^\circ$ e $\cos\theta_x = \cos\theta_y = 0,707$ enquanto para a barra (2): $\theta_x = 90^\circ$ e $\theta_y = 0^\circ$ com $\cos\theta_x = 0$ e $\cos\theta_y = 1$. Com estes valores são obtidas as matrizes:

$$[R]^{(1)} = 0,707 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.22)$$

$$[R]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.23)$$

Com as matrizes de influência de deslocamentos e de esforços e com a matriz de transformação de cada barra calculam-se as matrizes $[H] = [R]^T [h][R]$ e $[G] = [R]^T [g][R]$ para em seguida montar a representação de cada barra no SCG, ou seja: $[H]\{U\} = [G]\{P\}$.

$$[H]^{(1)} = [R]^{(1)T} [h]^{(1)} [R]^{(1)} = 0,707^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$[H]^{(1)} = [R]^{(1)T} [h]^{(1)} [R]^{(1)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.24)$$

$$[G]^{(1)} = [R]^{(1)T} [g]^{(1)} [R]^{(1)} = 0,707^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{L_{(1)}}{2EA} & 0 \\ 0 & -\alpha_{(1)} & 0 & 0 \\ \frac{L_{(1)}}{2EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$[G]^{(1)} = [R]^{(1)T} [g]^{(1)} [R]^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_{(1)}}{2} & \frac{\alpha_{(1)}}{2} & -\frac{L_{(1)}}{4EA} & -\frac{L_{(1)}}{4EA} \\ \frac{\alpha_{(1)}}{2} & -\frac{\alpha_{(1)}}{2} & \frac{L_{(1)}}{4EA} & \frac{L_{(1)}}{4EA} \\ \frac{L_{(1)}}{4EA} & \frac{L_{(1)}}{4EA} & \frac{\alpha_{(1)}}{2} & -\frac{\alpha_{(1)}}{2} \\ \frac{L_{(1)}}{4EA} & \frac{L_{(1)}}{4EA} & -\frac{\alpha_{(1)}}{2} & \frac{\alpha_{(1)}}{2} \end{bmatrix} \quad (11.25)$$

$$[H]^{(2)} = [R]^{(2)T} [h]^{(2)} [R]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$[H]^{(2)} = [R]^{(2)T} [h]^{(2)} [R]^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.26)$$

$$[G]^{(2)} = [R]^{(2)T} [g]^{(2)} [R]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{L_{(2)}}{2EA} & 0 \\ 0 & -\alpha_{(2)} & 0 & 0 \\ \frac{L_{(2)}}{2EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$[G]^{(2)} = [R]^{(2)T} [g]^{(2)} [R]^{(2)} = \begin{bmatrix} -\alpha_{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{L_{(2)}}{2EA} \\ 0 & 0 & \alpha_{(2)} & 0 \\ 0 & \frac{L_{(2)}}{2EA} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.27)$$

Agora, com as matrizes de influência das Eqs. (11.24) até (11.27) calculadas, tem-se a representação de cada barra no SCG, tal como mostrado nas Eqs. (10.1) e (10.2)

$$\begin{cases} [H_{11}^{(1)}]\{U_1\} + [H_{12}^{(1)}]\{U_5\} = [G_{11}^{(1)}]\{P_1\} + [G_{12}^{(1)}]\{P_5\} \\ [H_{21}^{(1)}]\{U_1\} + [H_{22}^{(1)}]\{U_5\} = [G_{21}^{(1)}]\{P_1\} + [G_{22}^{(1)}]\{P_5\} \end{cases} \quad (10.1)$$

$$\begin{cases} [H_{22}^{(2)}]\{U_4\} + [H_{23}^{(2)}]\{U_3\} = [G_{22}^{(2)}]\{P_4\} + [G_{23}^{(2)}]\{P_3\} \\ [H_{32}^{(2)}]\{U_4\} + [H_{33}^{(2)}]\{U_3\} = [G_{32}^{(2)}]\{P_4\} + [G_{33}^{(2)}]\{P_3\} \end{cases} \quad (10.2)$$

Nas quais são introduzidas as condições de compatibilidade de deslocamento nas seções à esquerda e à direita no nó 2, e as condições de equilíbrio no nó 2, respectivamente indicadas nas duas expressões a seguir

$$\{U_2\} = \{U_4\} = \{U_5\} \quad (11.28)$$

$$\{P_5\} + \{P_4\} - \{F\} = \{0\} \quad (11.29)$$

Substituindo os valores das matrizes indicadas e as demais grandezas conhecidas, as forças e os deslocamentos nodais, na Eq.(11.30), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11}^{(1)} \\ H_{21}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H_{12}^{(1)} \\ H_{22}^{(1)} \\ H_{32}^{(2)} \\ H_{22}^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{33}^{(2)} \\ H_{23}^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_{32}^{(2)} \\ -G_{22}^{(2)} \\ I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -G_{12}^{(1)} \\ -G_{22}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \{U_3\} \\ \{P_4\} \\ \{P_5\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}^{(1)} \\ G_{21}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{33}^{(2)} \\ \hat{G}_{23}^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{0\} \\ \{P_3\} \\ \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (11.30)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L_{(1)}}{4EA} & \frac{L_{(1)}}{4EA} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L_{(1)}}{4EA} & \frac{L_{(1)}}{4EA} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_{(1)}}{2} & \frac{\alpha_{(1)}}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_{(1)}}{2} & -\frac{\alpha_{(1)}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{L_{(2)}}{2EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_2 \\ V_2 \\ 0 \\ P_{H4} \\ P_{V4} \\ P_{H5} \\ P_{V5} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_{(1)}}{2} & \frac{\alpha_{(1)}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_{(1)}}{2} & -\frac{\alpha_{(1)}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{L_{(1)}}{4EA} & -\frac{L_{(1)}}{4EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{L_{(1)}}{4EA} & -\frac{L_{(1)}}{4EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L_{(2)}}{2EA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \\ P_5 \\ P_6 \\ 0 \\ 0 \\ 2000 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.31)$$

Resolvendo o sistema linha por linha, isto é, equação por equação, tem-se:

- da equação correspondente à linha1: $-(U_2 + V_2) + \frac{L_{(1)}}{EA}(P_{H5} + P_{V5}) = \frac{\alpha_{(1)}}{2}(P_1 - P_2)$

- da equação correspondente à linha 2: $-(U_2 + V_2) + \frac{L_{(1)}}{EA}(P_{H5} + P_{V5}) = \frac{\alpha_{(1)}}{2}(-P_1 + P_2)$
- da equação correspondente à linha 3: $(U_2 + V_2) + 2\alpha_{(1)}(-P_{H5} + P_{V5}) = -\frac{L_{(1)}}{EA}(P_1 + P_2)$
- da equação correspondente à linha 4:

$$(U_2 + V_2) + 2\alpha_{(1)}(P_{H5} - P_{V5}) = -\frac{L_{(1)}}{EA}(P_1 + P_2)$$
- da equação correspondente à linha 5: $-\alpha_{(2)}P_5 = 0 \Rightarrow P_5 = 0$
- da equação correspondente à linha 6: $-V_2 + \frac{L}{EA}P_{V4} = 0$
- da equação correspondente à linha 7: $\alpha_{(2)}P_{H4} = 0 \Rightarrow P_{H4} = 0$
- da equação correspondente à linha 8: $V_2 = -\frac{L_{(1)}}{EA}P_6$, logo $P_6 = P_{V4}$
- da equação correspondente á linha 9:

$$P_{H4} + P_{H5} = 2000, \text{ sendo: } P_{H4} = 0 \Rightarrow P_{H5} = 2000$$
- da equação correspondente à linha 10: $P_{V4} + P_{V5} = 0$

de onde são obtidas as grandezas incógnitas.

Sendo as reações de apoio e os deslocamentos nodais indicados, respectivamente, na Eq. (11.32a) e (11.33a) e os esforços nas extremidades das barras nas equações Eq. (11.34a) e (11.35a).

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2000 \\ -2000 \\ 0 \\ 2000 \end{Bmatrix} \quad (11.32a)$$

$$\begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,365cm \\ -0,0952cm \end{Bmatrix} \quad (11.33a)$$

$$\{p\}_{(1)} = \begin{Bmatrix} 2.828,427kN \\ 0 \\ -2.828,427kN \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.34a)$$

$$\{p\}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 2.000,00kN \\ 0 \\ -2.000,00kN \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.35a)$$

11.3.3 Resultados obtidos via Ftool para as reações, deslocamentos e esforços nas extremidades das barras.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2000 \\ -2002,5 \\ 0 \\ 2002,5 \end{Bmatrix} \quad (11.32b)$$

$$\begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,3652cm \\ -0,09546cm \end{Bmatrix} \quad (11.33b)$$

$$\{p\}_{(1)} = \begin{Bmatrix} -2.830,2kN \\ 0 \\ 2.830,2kN \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.34b)$$

$$\{p\}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 2.002,5kN \\ 0 \\ -2.002,5kN \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.35b)$$

12. CONCLUSÕES

Neste TCC foi utilizada uma técnica conveniente para a obtenção das matrizes de influência de treliças planas simples nas quais chega em cada apoio apenas uma barra. A formulação mostrou-se apropriada pois sua aplicação possibilitou a determinação das reações de apoio, os deslocamentos dos nós não vinculados e os esforços nas extremidades das barras componentes da estrutura. Os valores das grandezas calculadas obtidos a partir da estratégia aqui discutida apresentaram ótima aproximação aos valores das mesmas grandezas obtidos via F-tool ou mesmo analiticamente.

REFERENCIAS

CLOUGH, R.W.; Wilson, E.L. Early Finite Element Research at Berkely, In: Fifth U.S. National Conference on Computational Mechanics, 1990.

CAVALCANTI, M.C.R. Análise por elementos de contorno de meios poro elásticos saturados pela teoria de Biot (2002).

MARTA, L.F., Análise de Estruturas – Conceitos e Métodos Básicos. Editora LTC. 2ª Edição.2010.

SANTOS, R. S., Uma estratégia para análise estática de pórticos planos e espaciais utilizando-se o método dos elementos de contorno. Universidade Federal de São João Del-Rei; Associação Brasileira de métodos Computacionais em Engenharia; Nono Simpósio de Mechanica Computacional, 26 a 28 de maio de 2010. São João Del-Rei - MG; 2010.

CRUZ, J. M.F., Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo Método dos Elementos de Contorno. Tese (Doutorado); UFPB/CT, João Pessoa – PB, 2012.

ANEXO

A função sgn é a função sinal que é igual a 1 se $x > \hat{x}$, sendo igual a -1 quando $\hat{x} > x$.

O delta de Dirac (Paul Adrien Maurice **Dirac** (1902-1984) físico teórico britânico) tem a seguinte definição:

$$\delta(x, \hat{x}) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = \hat{x} \\ 0, & \text{se } x \neq \hat{x} \end{cases}$$

onde: x é o ponto de leitura do efeito (ponto campo), e $\hat{x}$ é o ponto de aplicação da fonte (ponto fonte). Algumas propriedades do delta de Dirac são:

$$\int_{\Omega} \delta(x, \hat{x}) d\Omega = 1$$

$$\int_{\Omega} u(x) \delta(x, \hat{x}) d\Omega = u(\hat{x})$$