



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



**Efeitos topológicos de uma distorção de uma linha vertical em
uma espiral vertical em sistemas quânticos não-relativísticos**

Willdauany Cristina de Freitas da Silva

Tese de Doutorado

João Pessoa - PB

23 de Julho de 2021

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Willdauany Cristina de Freitas da Silva

**Efeitos topológicos de uma distorção de uma linha vertical em
uma espiral vertical em sistemas quânticos não-relativísticos**

Tese de Doutorado realizada sob a orientação do prof. Dr. Knut Bakke Filho e apresentada ao Departamento de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Doutora em Física.

Orientador: Dr. Knut Bakke Filho

**João Pessoa - PB
23 de Julho de 2021**

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586e Silva, Willdauany Cristina de Freitas da.

Efeitos topológicos de uma distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical em sistemas quânticos não-relativísticos / Willdauany Cristina de Freitas da Silva. - João Pessoa, 2021.
110 f. : il.

Orientação: Knut Bakke Filho.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Deslocação tipo-espiral. 3. Anel unidimensional. 4. Fio cilíndrico. 5. Oscilador Harmônico. 6. Efeito Aharonov-Bohm. 7. Níveis de Landau. 8. Efeitos de rotação. 9. Deslocação tipo-hélice. I. Bakke Filho, Knut. II. Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado da aluna **Willdauany Cristina de
Freitas da Silva**, candidata ao Título de Doutor
em Física na Área de Concentração Física da
Matéria Condensada.

1 Aos vinte e três dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e um, às 09:00, reuniram-
2 se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar a
3 candidata ao grau de Doutor em Física na área de Física da Matéria Condensada,
4 **Willdauany Cristina de Freitas da Silva**. A comissão examinadora foi composta pelos
5 professores doutores: *Knut Bakke Filho* (UFPB), orientador e presidente da banca
6 examinadora, *Cleverson Filgueiras* (UFPB), *Herondy Francisco Santana Mota* (UFPB),
7 *Humberto Belich Junior* (UFES), *Eduardo Passos* (UFCG). Dando início aos trabalhos,
8 o Prof. Knut Bakke Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir,
9 passou a palavra para que a candidata fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese
10 intitulado “*Efeitos topológicos de uma distorção de uma linha vertical em uma espiral*
11 *vertical sobre sistemas quânticos não-relativísticos*”. Concluída a exposição, a candidata
12 foi arguida pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: “**aprovada**”. Assim
13 sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor
14 em Física na forma da lei. E para constar, eu, Jose Sérgio Trindade Silva, redigi esta ata
15 que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba,
16 **23 de julho de 2021.**

17

Prof. Dr. Knut Bakke Filho

Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Cleverson Filgueiras

PPGF/UFPB

Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota

PPGF/UFPB

Prof. Dr. Humberto Belich Junior

UFES

Prof. Dr. Eduardo Passos

UFCG

Knut Bakke Filho

Cleverson Filgueiras

Herondy F.S. Mota

Humberto Belich Jr.

Eduardo Passos

18 Link da reunião

19 meet.google.com/mnm-cfwz-kej

Link da reunião

Jose Sérgio Trindade Silva

JST

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao professor Knut Bakke Filho, pela orientação ao decorrer do desenvolvimento dos trabalhos durante o doutorado, onde sempre esteve disponível para ajudar.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro. Ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba (DF/UFPB), bem como aos professores e todos os colegas de curso que acompanhara durante o doutorado, pelo suporte para a realização deste trabalho.

Lista de publicações

Os resultados deste trabalho deram origem as seguintes publicações:

1. SILVA, W. C. F. da; BAKKE, K. Aharonov Bohm-type effect in the background of a distortion of a vertical line into a vertical spiral. Eur. Phys. J. C, v. 79, n. 7, p. 559, 2019;
2. SILVA, W. C. F. da; BAKKE, K. Non-relativistic effects on the interaction of a point charge with a uniform magnetic field in the distortion of a vertical line into a vertical spiral spacetime. Class. Quant. Grav., v. 36, n. 23, p. 235002, 2019.
3. SILVA, W. C. F. da; BAKKE, K. Quantum aspects of a quantum particle in a cylindrical wire in the presence of a screw dislocation. Eur. Phys. J. Plus, v. 134, n. 4, p. 131, 2019.
4. SILVA, W. C. F. da; BAKKE, K.; VITÓRIA, R. L. L. Non-relativistic quantum effects on the harmonic oscillator in a spacetime with a distortion of a vertical line into a vertical spiral. Eur. Phys. J. C, v. 79, n. 8, 2019.
5. SILVA, W. da; Bakke, K. Topological effects of a spiral dislocation on quantum rings. Ann. Phys. (N. Y.), v. 421, p. 168277, 2020.

Lista de Figuras

2.1	Corte transversal perpendicular eixo X_3 , mostrando o contorno C em torno do eixo, o deslocamento e o vetor de Burger (Fonte: (KATANAIEV, 2005)). .	9
2.2	a) Deslocação linear de um corpo; b) Corte transversal perpendicular ao eixo X^3 (Fonte: (KATANAIEV, 2005)).	9
2.3	Deslocação linear com vetor de Burger paralelo à linha de deslocamento $\overline{AB}$ (Fonte: (KATANAIEV, 2005)).	10
3.1	Superfície aberta I limitada por uma curva fechada C . Ref. (JACKSON, 1998)	26
3.2	Corrente gerada por um ímã atravessando uma espira. Ref. Google Imagens (JACKSON, 1998)	27
3.3	Ímã com uma superfície fechada em torno de um dos polos. Ref. Google Imagens	27
3.4	Esquema de uma partícula com carga q , que orbita um solenóide transportando uma corrente I , contendo em seu interior um campo de fluxo constante. Ref. (GRIFFITHS, 2011)	35

Resumo

Nesta tese investigamos os efeitos da topologia de uma deslocação tipo-hélice, descrita pela distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical sob sistemas quânticos não-relativísticos. Nosso foco é em sistemas mesoscópicos, tais como fio cilíndrico e anel unidimensional, tanto em um referencial inercial, quanto para um referencial em rotação em um meio elástico na presença da distorção. Investigamos também os efeitos da distorção do meio elástico no Oscilador Harmônico e nos níveis de Landau. Estendemos nossa discussão para explorar os efeitos da topologia de uma deslocação tipo-espiral, descrita pela distorção de um círculo em uma espiral, em sistemas quânticos não-relativísticos. Nesta abordagem exploramos os efeitos da topologia do defeito e os efeitos de rotação em sistemas tais como fio cilíndrico e anel unidimensional.

Palavras Chaves: Deslocação tipo-hélice, deslocação tipo-espiral, anel unidimensional, fio cilíndrico, Oscilador Harmônico, efeito Aharonov-Bohm, níveis de Landau, efeitos de rotação.

Abstract

We investigate the topological effects of a screw dislocation, that corresponds to the distortion of a vertical line in a vertical spiral on non-relativistic quantum systems. Our focus is on mesoscopic systems, such as the cylindrical wire and one-dimensional ring. We study both systems in a nonrotating and a rotating reference frame. We also investigate the effects of the distortion of the elastic medium on the Harmonic Oscillator and on the Landau levels. We extend our discussion to explore the effects of the topology of a spiral dislocation, that corresponds to the distortion of a circle in a spiral on non-relativistic quantum systems. In this approach we explore the effects of defect topology and rotation effects in systems such as cylindrical wire and one-dimensional ring.

Keywords: Screw dislocation, spiral dislocation, one-dimensional ring, cylindrical wire, Harmonic Oscillator, Aharonov-Bohm effect, Landau levels, rotation effects.

Sumário

1	Introdução	2
2	Introdução à defeitos topológicos lineares	6
2.1	Teoria de defeitos	6
2.1.1	Deslocações	8
2.1.1.1	Campos de deslocações	10
2.1.1.2	Deslocação tipo-espiral	13
2.1.1.3	Deslocação tipo-hélice	14
2.2	Operador diferencial de segunda ordem	15
3	Sistemas quânticos não-relativísticos	17
3.1	Equação de Schrödinger	17
3.2	Oscilador Harmônico	20
3.2.1	Teoria clássica	20
3.2.2	Teoria quântica	21
3.2.2.1	Método analítico	22
3.3	Partícula em um campo eletromagnético	24
3.3.1	O operador Hamiltoniano	28
3.3.2	Invariância de calibre	29
3.3.2.1	Invariância de calibre da Equação de Schrödinger	31
3.3.3	Partícula carregada em um campo magnético uniforme	31

3.3.4	Efeito Aharonov-Bohm para estados ligados	34
3.4	Efeitos de rotação em sistemas quânticos	36
3.4.1	Abordagem da teoria clássica	37
3.4.2	Abordagem da teoria quântica	38
4	Partícula em um meio elástico com uma uma distorção de uma linha ver- tical em uma espiral vertical	41
4.1	Partícula quântica confinada por fio cilíndrico	42
4.1.1	Confinamento por um anel unidimensional	44
4.2	Partícula confinada em uma caixa cilíndrica	45
4.3	Oscilador harmônico	50
4.4	Interação de uma carga pontual com um campo magnético uniforme	55
5	Efeitos da rotação em um meio elástico com uma distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical	61
5.1	Partícula confinada em um fio cilíndrico	62
5.1.1	Confinamento por um anel unidimensional	63
5.2	Partícula confinada em uma caixa cilíndrica	64
6	Partícula em um meio elástico com uma deslocação tipo-espiral	68
6.1	Partícula confinada em um fio cilíndrico	69
6.1.1	Efeitos associados à topologia do defeito	69
6.1.1.1	Fio cilíndrico	69
6.1.1.2	Anel unidimensional	71
6.1.2	Efeitos associados a topologia do defeito e rotação	72
6.1.2.1	Confinamento por um fio cilíndrico	72
6.1.2.2	Confinamento por um anel unidimensional	74
6.2	Partícula confinada entre duas superfícies cilíndricas	74
7	Conclusões e perspectivas	79

A	Equações diferenciais de segunda ordem	84
A.1	Equação modificada de Mathieu	84
A.2	Equação confluyente de Heun	87
	Referências Bibliográficas	97

Capítulo 1

Introdução

No estudo da física da matéria condensada há um interesse particular em relação aos defeitos topológicos lineares (AURELL, 1999; FILGUEIRAS; SILVA, 2015; AYAKO et al., 2004). Uma das motivações está no fato destes defeitos modificarem as propriedades eletrônicas do meio elástico (DEXTER; SEITZ, 1952; JASZEK, 2001), gerando efeitos associados à curvatura sobre as propriedades espectrais, magnéticas e de transporte de nanoestruturas (SHOCKLEY, 1953; CLAEYS; SIMOEN, 2009). Atraindo uma atenção em particular para os efeitos da torção associados à presença do defeito topológico nos estudos de semicondutores (FIGIELSKI, 2002).

A descrição geométrica dos defeitos topológicos tem dado perspectivas de pesquisas que exploram uma relação entre a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica. Objetos como cordas cósmicas (LINET, 1985) e anéis gravitacionais (CHO; PARK; HAN, 1991) também são conhecidos como defeitos topológico. Sendo estes analisados analogamente aos sistemas de matéria condensada (HISCOCK, 1985; VILENKIN, 1985). Áreas como gravitação (BEZERRA, 1989), teoria quântica de campos (VITORIA R.L.L. FURTADO, 2016) entre outras também exploram os efeitos associados à distorções no espaço-tempo.

A geometria de Riemann-Cartan possibilita conectar o estudo de defeitos em sólidos com a geometria diferencial (PUNTIGAM; SOLENG, 1997), na qual o elemento de linha de um espaço-tempo descreve a deformação do meio através de sua parte espacial. Além da geometria de Riemann-Cartan, descrita por Katanaev e Volovich (KATANAEV; VOLOVICH,

1992), temos que a deformação de um meio elástico pode ser descrita através processo de Volterra (VOLTERRA, 1907), o qual consiste em descrever defeitos que surgem nos sólidos através do processo de cortar e colar um meio elástico.

Dentre os defeitos descritos pelo processo de Volterra voltamos nossa atenção as deslocções, uma vez que essas distorções são defeitos topológicos de interesse no estudo de sólidos (FILGUEIRAS et al., 2016; SONG; BIERMAN; MORIN, 2010). Estudos com deslocções, mostram que a presença destas em cristais alteram propriedades em materiais semicondutores (CLAEYS; SIMOEN, 2009). Propriedades tais como resistividade (GALLAGHER, 1952) e condutividade (SOHEIBI et al., 2017a), foram estudadas em cristais na presença de deslocções. Além disto, demonstrou-se que estas podem alterar a mobilidade de portadores de carga em semicondutores (LOGAN; PEARSON; KLEINMAN, 1959; KRYLOW; AULEYTNER, 1969). Também existem trabalhos que exploram os efeitos associados a uma partícula quântica em um meio elástico na presença de deslocções (BAUSCH; SCHMITZ; TURSKI, 1998; SOHEIBI et al., 2017b).

Em relação aos tipos de deslocções, podemos citar como exemplos a deslocção tipo-hélice e a deslocção tipo-espiral. Uma das deslocções tipo-hélice é a descrita pela distorção de curva circular em uma espiral vertical (MARQUES et al., 2001). O principal efeito associado a esta, é uma redefinição do número quântico de momento angular, que é visto como um análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959; NETTO; FURTADO, 2008).

O efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959) consiste em ter níveis de energia que dependem da fase geométrica. Este efeito impulsiona estudos envolvendo deslocções (FIGIELSKI et al., 1998; AZEVEDO, 2002), uma vez que o vetor que descreve os defeitos topológicos lineares, conhecido como vetor de Burger, atua como o fluxo magnético (AZEVEDO; MORAES, 1998). Podemos citar trabalhos que investigam este efeito envolvendo uma deslocção tipo-hélice, tais como, estudo dos efeitos associados com esta em anéis quânticos (NETTO; CHESMAN; FURTADO, 2008), um gás de elétrons confinado por uma caixa cilíndrica (FILGUEIRAS; SILVA, 2015), um elétron em um campo magnético uniforme (FURTADO; BEZERRA; MORAES, 2001).

Sistemas quânticos, tais como fios cilíndricos, anéis quânticos (FILGUEIRAS; SILVA,

2015), pontos quânticos (LOSS; GOLDBART; BALATSKY, 1990), são de interesse em matéria condensada, devido as alterações em seus espectros de energia, quando estão na presença de defeitos topológicos (FURTADO; RIBEIRO; AZEVEDO, 2002). Além destes sistemas, há na literatura um interesse em investigar os efeitos de defeitos topológicos para partículas quânticas sujeitas ao oscilador harmônico (Maia; Bakke, 2018; FURTADO; MORAES, 2000; PINTO, 1993). Entre esses estudos, podemos citar o oscilador na presença de uma desclinação, de um monopólo global, de uma deslocação tipo-hélice (FURTADO; MORAES, 2000) e na presença de uma deslocação tipo-espiral (Maia; Bakke, 2018).

Outro sistema de interesse em matéria condensada é a interação de um campo magnético uniforme com uma carga elétrica pontual, pois este é o modelo mais simples para descrever o efeito Hall quântico (PRANGE; (EDS.), 1990). Essa interação gera os níveis de Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1977). Para este sistema encontramos estudos com defeitos topológicos associados a desclinações (MUNIZ; BEZERRA; CUNHA, 2014), deslocações tipo-hélice (NETTO; FURTADO, 2008) e tipo-espiral (MAIA; BAKKE, 2020).

Dentre os estudos que investigam o efeito Aharonov-Bohm para estados ligados, há uma extensão para referenciais em rotação com velocidade angular constante (DANTAS; FURTADO, 2013). Trabalhos envolvendo anéis quânticos (MERLIN, 1993; OLIVEIRA, 2019) e níveis de Landau (MAIA; BAKKE, 2020), para referenciais em rotação, motivam a análise dos efeitos da rotação em sistemas na presença de defeitos topológicos.

Com base no exposto, fomos motivados a investigar efeitos associados à presença de defeitos topológicos sobre sistemas quânticos. Estudaremos sistemas quânticos não-relativísticos em referenciais inerciais e estendemos o estudo para referenciais em rotação, analisando os autovalores de energia. Nosso foco está no estudo dos efeitos topológicos associados a distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical sobre sistemas mesoscópicos, em busca de análogos ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados, pois estes efeitos são explorados em áreas da física, como por exemplo, Matéria Condensada (DATTA; BANDYOPADHYAY, 1987; WU; MAHLER, 1991). Bem como, exploramos efeitos de rotação. Por fim, estendemos nossa discussão para estudar os efeitos da topologia de uma deslocação em espiral sobre tais sistemas.

A estrutura desta tese tem início com uma introdução, abrangendo a base teórica e

matemática necessária ao desenvolvimento do trabalho. O segundo capítulo está dividido em duas partes, ambas através da aproximação de Katanaev-Volovich (KATANAEV; VOLOVICH, 1992): a primeira consiste em uma introdução a teoria dos defeitos em sólidos; na segunda parte iremos descrever as deslocções, tipo-hélice e tipo-espiral. Finalizamos o capítulo apresentando o operador diferencial de segunda ordem no contexto da geometria Riemanniana, que será utilizado nos estudos dos sistemas.

No terceiro capítulo faremos uma síntese sobre sistemas quânticos não-relativísticos. Iniciaremos com uma revisão sobre a Equação de Schrödinger, seguida de uma revisão sobre o Oscilador Harmônico unidimensional. Posteriormente introduzimos a equação de Schrödinger que descreve a interação de um elétron (sem spin) com um campo eletromagnético. A partir desta discutiremos os níveis de Landau e efeito Aharonov-Bohm para estados ligados. Para finalizarmos este capítulo descreveremos a influência de referenciais sob rotação em sistemas clássicos e quânticos. Neste capítulo manteremos os sistemas de unidades adotados nas respectivas referências.

O quarto, quinto e sexto capítulos são compostos pelos sistemas, resultados e análises que geraram esta tese. Nestes adotaremos o sistema de unidades naturais, no qual $c = \hbar = 1$.

No quarto capítulo iremos abordar os efeitos da topologia de uma distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical nos seguintes sistemas: um fio cilíndrico, um anel unidimensional, caixa cilíndrica, Oscilador Harmônico e uma partícula em um campo magnético uniforme.

No quinto capítulo discutiremos os efeitos associados à rotação e da topologia de uma distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical sobre um fio cilíndrico, um anel unidimensional e uma caixa cilíndrica.

No sexto capítulo estendemos nossa discussão, estudando os efeitos associados a uma deslocção tipo-espiral sobre um fio cilíndrico, um anel unidimensional e entre duas superfícies cilíndricas. Incluímos neste capítulo a análise dos efeitos de rotação sobre um fio cilíndrico e um anel unidimensional na presença do defeito.

E por fim, no sétimo capítulo apresentaremos nossas conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Introdução à defeitos topológicos lineares

Uma das formas de descrever defeitos topológicos nos sólidos é através da geometria diferencial, onde a teoria dos defeitos traz consigo uma importante interpretação física da geometria de Riemann-Cartan (KATANAEV; VOLOVICH, 1992). Além desta, podemos usar um processo conhecido como processo de Volterra para descrever as distorções em um meio elástico (VOLTERRA, 1907), uma vez que este nos permite classificar os defeitos topológicos.

Neste capítulo faremos uma breve introdução aos defeitos topológicos, com base na teoria de Katanaev e Volovich (KATANAEV; VOLOVICH, 1992). Bem como introduziremos o operador diferencial de segunda ordem utilizado na geometria diferencial.

2.1 Teoria de defeitos

Materiais cristalinos podem conter deformações que foram introduzidas durante a solidificação ou como consequência de tensões (CALLISTER W. D. AND RETHWISCH, 2009). Do ponto de vista matemático, a deformação de um meio elástico pode ser introduzida através de um campo de deslocamento infinitesimal na métrica (KATANAEV; VOLOVICH, 1992). Se, por exemplo, consideramos um ponto x_i numa rede cristalina, temos que a ação

de forças externas sobre a rede faz com que os átomos mudem de posição, para um ponto x'_i , ou seja,

$$x_i \rightarrow x'_i = x_i + u_i(x), \quad (2.1)$$

onde $u_i(x)$ é definido como o campo de deslocamento. Após este deslocamento, a distância entre dois pontos vizinhos na rede será ¹

$$dx'_i = dx_i + \partial_j u_i(x) dx_j. \quad (2.2)$$

Dado que comprimento desta distância é $ds' = \sqrt{(dx_i)^2}$ e

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j(x) + \partial_j u_i(x)), \quad (2.3)$$

é um tensor simétrico, chamado de tensor de deformação, no qual para manter uma aproximação linear considera-se $\partial_j u_i(x) \ll 1$. A distância entre dois pontos na rede, definida em (2.2) e o tensor de deformação, em (2.3), são utilizados para estudos das deformações dos sólidos, na teoria da elasticidade (KLEINERT, 1989).

Além da teoria da elasticidade nos sólidos, uma outra forma de estudar um meio elástico com defeito, é através da teoria de defeitos, na qual se usa a geometria Riemanniana para descrever as deformações. Nesta abordagem, considera-se que os deslocamentos na rede, (2.1), são translações infinitesimais no espaço (KLEINERT, 1989). Para definir a distância e o comprimento entre dois vetores, na geometria Riemanniana usa-se a métrica. Assim, temos que a distância infinitesimal entre dois pontos, no espaço com a deformação, é definida por² (D'INVERNO, 1992)

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j, \quad (2.4)$$

que também é conhecida como elemento de linha, no qual $g_{ij}(x)$ é chamado de tensor métrico

¹Os índices i, j representam as coordenadas do espaço.

²Vamos adotar os índices para descrever apenas as coordenadas espaciais, desconsiderando a coordenada temporal, pois nossa análise será não-relativística. Estamos adotando a convenção de Eisnten para representar a soma sobre os índices (LANDAU L. D., 1976).

(ou simplesmente de métrica), e pode ser escrito como (KATANAEV, 2005)

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \epsilon_{ij}, \quad (2.5)$$

cujos tensor de deformação é dado em (2.3).

Podemos citar como exemplo um elemento de linha na ausência de deformação, no espaço euclidiano, em coordenadas cilíndricas, (r, φ, z) , como sendo

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad (2.6)$$

para o qual o tensor métrico é

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

onde os índices latínicos maiúsculos indicam a ausência de deformação do meio elástico.

O uso dessas definições da geometria diferencial, para descrição de defeitos topológicos, foi proposta por Katanaev e Volovich (KATANAEV; VOLOVICH, 1992). Eles formularam, através da geometria de Riemann-Cartan, um modo de descrever as deformações em um meio elástico, fazendo uso do tensor métrico (2.5).

Outra forma de descrever os defeitos topológicos em um meio elástico é através do processo de Volterra (VOLTERRA, 1907). Este consiste em caracterizar as deformações, através do processo de cortar e colar um meio elástico. É possível encontrar na literatura, as deformações descritas por este processo (PUNTIGAM; SOLENG, 1997). Contudo, iremos restringir nossa discussão a deformações que surgem através da simetria translacional, conhecidas como deslocamentos.

2.1.1 Deslocamentos

As deslocamentos são defeitos topológicos lineares, associados a translações na rede cristalina. Fisicamente, Katanaev e Volovich descrevem uma deslocamento como um corte feito

em um corpo definido por uma curva, seguido de uma translação em uma direção arbitrária (KATANAEV; VOLOVICH, 1992). Tomemos como exemplo, a figura (2.1). Nela, dado um sistema de coordenadas, (X^1, X^2, X^3) , tomamos um contorno fechado C em torno do eixo X_3 , que é o eixo perpendicular a X^1, X^2 , fazemos um deslocamento infinitesimal u_i e então, consideramos um aumento finito $\mathbf{b}$ neste deslocamento.

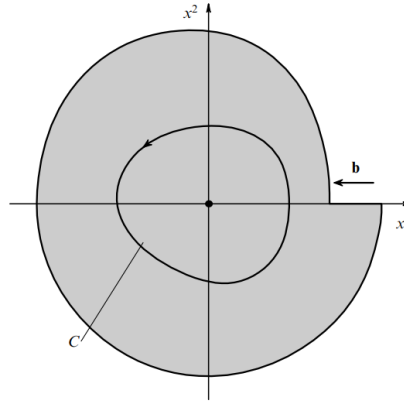


Figura 2.1: Corte transversal perpendicular eixo X_3 , mostrando o contorno C em torno do eixo, o deslocamento e o vetor de Burger (Fonte: (KATANAEV, 2005)).

Este aumento $\mathbf{b}$ na deslocação, é conhecido como vetor de Burger e é usado para descrever deslocações no processo de Volterra (VOLTERRA, 1907). Na figura (2.1), temos que o vetor de Burger é perpendicular à linha de deslocação, isto caracteriza uma deslocação do tipo-borda. Esta linha de deslocação é paralela ao eixo X^3 , como podemos ver na figura (2.2 a)), na qual a linha de deslocação está representada pelo segmento entre os pontos **A** e **B**.

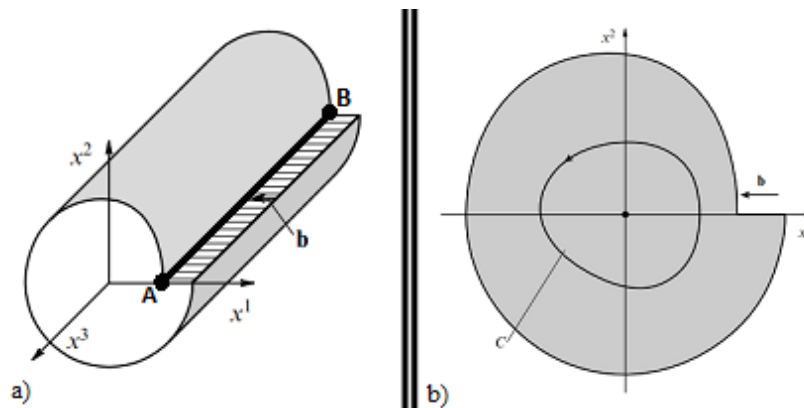


Figura 2.2: a) Deslocação linear de um corpo; b) Corte transversal perpendicular ao eixo X^3 (Fonte: (KATANAEV, 2005)).

Uma outra deformação é descrita quando o vetor de Burger é paralelo à linha de deslocamento: esta é definida como uma deslocação tipo-hélice. Tomemos como exemplo a figura (2.3)

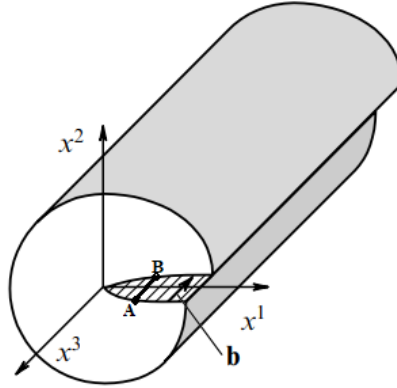


Figura 2.3: Deslocação linear com vetor de Burger paralelo à linha de deslocamento $\overline{AB}$ (Fonte: (KATANAIEV, 2005)).

Assim temos que, dependendo da relação entre o vetor de Burger e a linha de deslocamento, podemos descrever deslocações de borda e tipo-hélice pelo processo de Volterra (VOLTERRA, 1907). Vamos agora discutir a descrição destes defeitos através da geometria diferencial.

2.1.1.1 Campos de deslocações

Nosso interesse agora é explorar como as deslocações alteram a métrica do meio em que estão. Esta discussão é feita por Katanaev e Volovich (VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005).

Conhecendo a posição de cada ponto num corpo material ou espaço, é possível descrever a deformação, ou mudança na configuração geométrica deste, matematicamente. Dado que num tempo inicial ($t = 0$), as coordenadas da posição de um ponto A em um corpo é X^A , para um sistema de coordenadas X qualquer. Num tempo posterior t , a deformação neste corpo é descrita por

$$x^k = x^k(X^A, t) \quad (2.8)$$

Considerando então que o corpo possui uma deformação local, nas vizinhanças do

ponto A, para um deslocamento infinitesimal dX^A , o vetor deformação desse deslocamento é $dx^k = F_A^k dX^A$, onde F_A^k é definido como a deformação local, ou gradiente de deformação. Este é usado para descrever a deformação nas vizinhanças de um ponto num corpo e o índice k representa as coordenadas do sistema de coordenadas adotado. Com isto, temos que dx^k é análogo a dx'_i , notação usada na descrição da teoria elástica em (2.2), para um deslocamento entre dois pontos numa rede.

Sendo ds o comprimento de dx^k , na presença de um campo de deslocação, temos que a distância entre dois pontos vizinhos, na região da deformação é dada por

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \eta_{AB} F_i^A F_j^B dx^i dx^j, \quad (2.9)$$

onde $g_{ij} = \eta_{AB} F_i^A F_j^B$ é o tensor métrico de um corpo com uma deformação local.

Na descrição da geometria diferencial, para diferentes pontos em um corpo, na região onde há uma deformação local, há um campo de deformação $\mathbf{F}^k$, cujas componentes são F_i^A . Nessa abordagem, uma deformação local $F_k^A(X^k)$ é denominada um campo de deslocação se $\nabla \times \mathbf{F}^k \neq 0$.

Considerando as deslocações descritas pelo processo de Volterra (VOLTERRA, 1907), encontramos em (VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005) suas descrições através das deformações locais, bem como o tensor métrico que as representa.

Para uma deslocação de borda, em um plano de coordenadas (X^1, X^2) , na vizinhança de um ponto A, temos que a deformação local é dada por

$$F_i^A(X^1, X^2) = \begin{pmatrix} 1 & F_2^1 & 0 \\ F_1^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

e com esta, temos que o tensor métrico definido como g_{ij} será:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + F_1^2 F_1^2 & F_1^2 + F_2^1 & 0 \\ F_1^2 + F_2^1 & 1 + F_2^1 F_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Enquanto que para uma deslocação tipo-hélice, num plano de coordenadas (X^1, X^2) , a deformação local é dada por

$$F_i^A(X^1, X^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ F_1^3 & F_2^3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

e para esta o tensor métrico é dado por

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + (F_2^3)^2 & F_2^3 \\ 0 & F_2^3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Quando discutimos deslocações descritas no processo de Volterra (VOLTERRA, 1907), definimos a relação entre os tipos de deslocações e o vetor de Burger. Através da teoria dos defeitos, na geometria diferencial, também é possível conectar a descrição das deslocações com o vetor de Burger. Isto ocorre para o caso particular em que $\nabla \times \mathbf{F}^k \neq 0$. Considerando um sistema de coordenadas, por exemplo, em três dimensões, (X^1, X^2, X^3) , tomando uma curva C , em torno de um corpo com uma deslocação, como na figura (2.1), temos que

$$b^k = (\nabla \times \mathbf{F}^k) \cdot \mathbf{n}, \quad (2.14)$$

onde $\mathbf{n}$ representa um vetor unitário normal ao plano do caminho C , em volta do corpo com a deformação, e b^k denota as componentes do vetor de Burger $\mathbf{b}$.

É importante ressaltar que, se $\mathbf{b}$ está no plano delimitado pelo caminho C , teremos uma deslocação de borda e se $\mathbf{b}$ for normal ao plano, teremos uma deslocação tipo-hélice. Enquanto que, na descrição do processo de Volterra, para uma deslocação de borda, o vetor de Burger é perpendicular a linha do deslocamento, figura (2.2). Além disto, uma deslocação de borda em termos dos campos de deslocação, na geometria diferencial, é uma descrição particular de uma deslocação tipo-esprial (VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005), a qual iremos abordar na próxima discussão.

Na literatura encontramos as definições para estes defeitos, bem como a descrição de

seus respectivos campo de deslocções e métricas (KATANAEV; VOLOVICH, 1992; VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005; KATANAEV, 2005).

Vamos agora descrever os campos de deformações e as métricas para os defeitos topológicos utilizados no desenvolvimento desta tese. Passaremos a adotar o sistema de coordenadas cilíndricas, (r, φ, z) , para tais descrições. E iremos adotar o parâmetro $\beta = \frac{|\mathbf{b}|}{2\pi} =$ constante, para caracterizar o vetor de Burger $\mathbf{b}$, assim temos que $\beta \propto |\mathbf{b}|$ (FURTADO; MORAES, 1999). Por este valor ser da ordem do espaçamento interatômico na rede cristalina, define-se que o parâmetro β é muito pequeno (KATANAEV, 2005). Estudos da presença de deslocções em nanomateriais, dimensionam o valor do vetor de Burger de acordo com o material estudado (CMENG et al., 2013; MORIN; JIN, 2010).

2.1.1.2 Deslocação tipo-espiral

Uma deslocação espiral é um defeito topológico linear, proveniente da translação de um meio elástico (VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005). Este pode ser descrito pela distorção de uma linha radial em uma espiral ou pela distorção de um círculo em uma espiral. Esta segunda forma é também conhecida como uma deslocação de borda.

Para uma deslocação em espiral do tipo-borda, a deformação local é dada por (VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005)

$$F_i^A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

e partindo desta obtêm-se a seguinte métrica

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 \\ \beta & \beta^2 + r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Com (2.16) temos que o elemento de linha (2.9) para este defeito é

$$ds^2 = dr^2 + 2\beta dr d\varphi + (\beta^2 + r^2)d\varphi^2 + dz^2, \quad (2.17)$$

onde $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ e $-\infty \leq z \leq \infty$.

2.1.1.3 Deslocação tipo-hélice

Outro defeito topológico linear, é a deslocação tipo-hélice. Esta pode ser descrita de duas formas (VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005).

No primeiro caso considera-se a distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical. Para este defeito a deformação local é dada por (VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005)

$$F_i^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Partindo de (2.18), obtêm-se o tensor métrico na forma

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

e com (2.19) o elemento de linha para esta deformação é escrito como

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + 2\beta d\varphi dz + dz^2, \quad (2.20)$$

onde $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ e $-\infty \leq z \leq \infty$.

O segundo caso para a descrição de uma deslocação tipo-hélice é a partir da distorção de uma curva circular em uma espiral vertical, cuja deformação local é descrita como (VA-

LANIS; PANOSKALTSIS, 2005)

$$F_i^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

com esta, teremos que o tensor métrico será

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 + \beta^2 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

E a partir de (2.22), temos que o elemento de linha para este defeito é

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + (dz + \beta d\varphi)^2, \quad (2.23)$$

com $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ e $-\infty \leq z \leq \infty$.

2.2 Operador diferencial de segunda ordem

Nesta tese iremos resolver a equação de Schrödinger para sistemas quânticos na presença de defeitos topológicos. Esta equação carrega um operador diferencial de segunda ordem. Reservamos então esta seção, para descrever este operador no contexto da geometria diferencial.

Na geometria Riemanniana o operador diferencial de segunda ordem é conhecido como operador de Laplace-Beltrami, definido como o divergente do gradiente de uma função e é escrito como (JOST, 2011)

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right), \quad (2.24)$$

onde g é o determinante do tensor métrico e g^{ij} é a matriz inversa de g_{ij} , dada em (2.5).

Finalizamos então este capítulo apresentando o operador Hamiltoniano, como sendo um

exemplo de aplicação na Física do operador de Laplace-Beltrami. Destacando sua utilização na Mecânica Quântica, em específico através da Equação de Schrödinger, que faz uso deste operador (DEWITT, 1952). Este é descrito do seguinte modo (GRIFFITHS, 1994)

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2, \quad (2.25)$$

onde μ é a massa de uma partícula livre e $\hbar$ é a constante de Plank dividida por 2π (GRIFFITHS, 1994). Substituindo (2.24) em (2.25), obtemos (MARQUES et al., 2001)

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right). \quad (2.26)$$

Temos então em (2.26) o operador Hamiltoniano no contexto da geometria Riemanniana.

Neste capítulo fizemos uma síntese de definições referentes a defeitos topológicos, estabelecidas tanto na geometria diferencial (KATANAEV; VOLOVICH, 1992), quanto no processo de Volterra (VOLTERRA, 1907). Apresentamos os campos de deformação, a métrica e os elementos de linha de deslocamentos do tipo-espiral e do tipo-hélice. A ênfase deste trabalho está da deslocamento tipo-hélice descrita pela distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical, cujo elemento de linha é apresentado na equação (2.20). Outro defeito topológico de interesse neste trabalho tem sua métrica expressa na equação (2.17). Esta deformação é descrita pela distorção de um círculo em uma espiral e será explorada no sexto capítulo. Finalizamos o capítulo apresentando o operador Hamiltoniano no contexto da geometria Riemanniana.

Introduzidos os defeitos topológicos, iremos no próximo capítulo revisar sistemas quântico não-relativísticos, tais como: Oscilador Harmônico e níveis de Landau. Iremos também abordar no próximo capítulo os efeitos da rotação em sistemas quânticos.

Capítulo 3

Sistemas quânticos não-relativísticos

O estudo do comportamento de sistemas físicos é de grande interesse, buscando abranger fenômenos desde escalas quânticas até escalas cosmológicas. Podemos citar diversos artigos com essas análises, tais como dados nas seguintes referências (SOUZA; BAZEIA L. LOSANO; MENEZES, 2012; HISCOCK, 1985; BEZERRA, 1997; MAIA, 2018; SILVA, 2017; PUNTIGAM; SOLENG, 1997; MARQUES et al., 2001; VILENKIN, 1985; BAKKE; FURTADO, 2010; FURTADO; BEZERRA; MORAES, 2001).

As interações dos sistemas físicos, tais como, gravitacional, eletromagnética, termodinâmicas, são resultante de forças, classificadas de acordo com sua origem. Uma das formas de analisar os efeitos dessas interações é através dos autovalores da Equação de Schrödinger, correspondentes aos autovalores da energia, que nos permite estudar as propriedades dos sistemas através da análise destes autovalores.

No que diz respeito a sistemas quânticos, o estudo dos autovalores da energia pode ser feito atribuindo a Equação de Schrödinger os potenciais provenientes das interações presentes.

Este capítulo é dedicado a revisar sistemas quânticos não-relativísticos, os quais serão abordados ao longo desta tese.

3.1 Equação de Schrödinger

Nesta seção iremos fazer uma revisão da Equação de Schrödinger. Esta discussão é bem explorada nos livros introdutórios e avançados de Mecânica Quântica (GRIFFITHS, 1994; SAKURAI; NAPOLITANO, 2017; COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1977; MERZBACHER, 1998).

Segundo o princípio de de Broglie (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1977), as partículas de matéria podem ser escrita através da função de onda, que pode ser escrita como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (3.1)$$

onde ω é a frequência de oscilação da onda, $\mathbf{k}$ o vetor que aponta a direção de propagação da onda e $\mathbf{r}$ é o vetor posição.

Em coordenadas cartesianas o vetor posição é definido por

$$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (3.2)$$

onde $\hat{i}, \hat{j}$ e $\hat{k}$ formam uma base de vetores unitários.

Por se tratar de um objeto distribuído no espaço, para poder associá-la ao estado de uma partícula, como o elétron, por exemplo, Born, atribuiu uma interpretação estatística a função de onda ψ . Nesta interpretação temos que $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ é a densidade probabilidade de encontrar a partícula no ponto $\mathbf{r}$ no instante t (GRIFFITHS, 1994).

Para uma partícula de massa μ , a função de onda obedece a Equação de Schrödinger, dada por (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1977)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H}(\mathbf{r}, \hat{p}, t) \psi(\mathbf{r}, t), \quad (3.3)$$

onde $\hat{H}(\mathbf{r}, \hat{p}, t)$ é o operador Hamiltoniano, que na Mecânica Quântica é o observável corres-

pondente a energia total de um sistema e $\hat{p}$ é o operador momento linear dado por

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla. \quad (3.4)$$

Ao definir o operador Hamiltoniano podemos considerar as interações da partícula através de potenciais. Por exemplo, na presença de um potencial escalar $V(\mathbf{r}, t)$, o operador Hamiltoniano pode ser escrito como (MERZBACHER, 1998)

$$\hat{H}(\mathbf{r}, \hat{p}, t) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \hat{p}^2 + V(\mathbf{r}, t). \quad (3.5)$$

Deste modo, podemos reescrever (3.3) da seguinte forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t), \quad (3.6)$$

onde ∇^2 é o operador diferencial de segunda ordem dado em (2.24).

Diante de um potencial independente do tempo $V(\mathbf{r})$ é comum resolver a Equação de Schrödinger (3.6) através do método de separação de variáveis, encontrando soluções para a parte espacial e para a parte temporal separadamente (GRIFFITHS, 1994). Dessa forma, a função de onda pode ser escrita como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})\chi(t). \quad (3.7)$$

Substituindo (3.7) em (3.6) para um potencial escalar independente do tempo, $V(\mathbf{r})$, obtemos

$$\frac{i\hbar}{\chi(t)} \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{\phi(\mathbf{r})} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \quad (3.8)$$

Analisando (3.8) vemos que, o lado esquerdo trata-se de uma função que depende apenas do tempo, enquanto que o lado direito depende apenas da posição. Isso torna possível igualar cada lado a uma constante, que por momento chamaremos de E . Resolvendo o lado

esquerdo de (3.8) encontramos a solução para $\chi(t)$, dada por

$$\chi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \quad (3.9)$$

enquanto que o lado direito de (3.8) pode ser escrito como

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\phi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) = E\phi(\mathbf{r}), \quad (3.10)$$

que é a Equação de Schrödinger independente do tempo.

A equação (3.5) nos permite reescrever (3.10) da seguinte forma

$$\hat{H}\phi(\mathbf{r}) = E\phi(\mathbf{r}), \quad (3.11)$$

com isto concluímos que a constante E representa a energia do sistema.

A solução $\phi(\mathbf{r})$, para a equação de Schrödinger independente do tempo (3.10), nos fornece os chamados estados estacionários (GRIFFITHS, 1994; MERZBACHER, 1998).

3.2 Oscilador Harmônico

Nesta seção iremos introduzir o Oscilador Harmônico do ponto de vista clássico e em seguida na teoria quântica.

3.2.1 Teoria clássica

O interesse no estudo do Oscilador Harmônico deve-se ao fato de muitos sistemas físicos poderem ser descritos através de sua equação de movimento (MELO, 2010; REIF, 1965; KITTEL, 1953). Uma das principais características deste sistema está no fato de que podemos descrevê-lo expandindo um potencial $V(x)$ em torno de um ponto de equilíbrio, ao considerarmos pequenas oscilações.

Tomando como exemplo o sistema formado por uma massa μ conectada a uma mola, cuja força restauradora é $F = -kx$. A energia potencial clássica, associada a força restau-

radora da mola é dada por (SYMON, 1996)

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(x) dx = \frac{1}{2} k x^2 \quad (3.12)$$

onde k é a constante da mola e x o deslocamento em relação a posição de equilíbrio $x_0 = 0$.

Agora tomemos a expansão por Taylor de uma potencial $V(x)$ (SYMON, 1996)

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (3.13)$$

Sendo x_0 um ponto de mínimo, temos que $V'(x_0) = 0$. Consideramos então pequenas oscilações em torno deste ponto de equilíbrio, de modo a poder desprezar termos superiores a x^2 . Uma vez que a diferença de potencial $V(x) - V(x_0)$ fornece a energia potencial de um sistema, ou seja, $U(x) = V(x) - V(x_0)$, ao considerarmos pequenas oscilações para este potencial, obtemos através de (3.12) e (3.13) que $V''(x) = k$.

E com isto podemos escrever

$$U(x) = V(x) - V(x_0) = \frac{1}{2} k x^2, \quad (3.14)$$

como sento a energia potencial do oscilador, ao fazer $x_0 = 0$ (THORNTON STEPHEN T., 2012).

Vemos então que é possível obter a energia potencial clássica do Oscilador Harmônico, no caso unidimensional, expandindo um potencial em torno de um ponto de equilíbrio, ao considerarmos pequenas oscilações deste. Vale ressaltar que a frequência do oscilador ω é descrita em termos da constante da mola, da seguinte forma $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$.

Aqui fizemos uma breve revisão sobre o Oscilador Harmônico na abordagem clássica. Passemos agora a uma abordagem através da Mecânica Quântica. Ressaltando que em ambas perspectivas os deslocamentos na vizinhança do ponto de equilíbrio podem ser interpretados como perturbações.

3.2.2 Teoria quântica

Para descrever o oscilador na teoria quântica vamos seguir a discussão feita no Griffiths (GRIFFITHS, 1994).

Na mecânica quântica, analisando o caso unidimensional, o problema do oscilador torna-se resolver a Equação de Schrödinger para o potencial

$$V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2. \quad (3.15)$$

onde a constante k pode ser escrita em termos da frequência de oscilação, como $k = \mu^2\omega^2$. Assim, substituindo (3.15) em (3.10), obtemos a Equação de Schrödinger para (3.15)

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 \psi = E\psi(x), \quad (3.16)$$

Na literatura é possível encontrar duas formas de resolver (3.16), são os chamados método algébrico e método analítico. Aqui iremos considerar apenas o método analítico.

3.2.2.1 Método analítico

Para resolver (3.16) começamos por uma mudança de variável, na qual definimos $\xi = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}x$, assim reescrevemos a Equação de Schrödinger como

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = (\xi^2 - K)\psi(x), \quad (3.17)$$

onde $K = \frac{2E}{\hbar\omega}$ representa a energia do sistema. Desse modo, resolvendo (3.17) encontramos os valores permitidos para a energia.

Em busca de uma solução para (3.17) vamos analisar o limite assintótico para grandes oscilações, ou seja, quando $x \rightarrow \pm\infty$. Isto resulta em $\xi \rightarrow \pm\infty$. Desse modo ξ^2 é um termo dominante em (3.17), que pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} \approx \xi^2 \psi(x), \quad (3.18)$$

cuja solução aproximada é

$$\psi(\xi) \approx Ae^{-\xi^2/2} + Be^{\xi^2/2}. \quad (3.19)$$

Contudo, é necessário que a função de onda seja finita, para ser normalizável. Para isto impomos que quando $\xi \rightarrow \pm\infty$, $\psi(\xi \rightarrow \pm\infty) = 0$ e isto só é possível tomando $B = 0$ em (3.19). Desse modo, a solução geral para (3.17) pode ser escrita como

$$\psi(\xi) = e^{-\xi^2/2} H(\xi), \quad (3.20)$$

onde $H(\xi)$ é uma função desconhecida. Substituindo (3.20) em (3.17) obtemos

$$H''(\xi) - 2\xi H'(\xi) + (K - 1)H(\xi) = 0. \quad (3.21)$$

Para resolvermos (3.21) faremos uso do método de Frobenius, escrevendo $H(\xi)$ como uma série de potencias, ou seja,

$$H(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi^i. \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.21) e fazendo $i \rightarrow j + 2$ obtemos a relação de recorrência

$$a_{j+2} = \frac{(2j + 1 - K)}{(j + 2)(j + 1)} a_j \quad (3.23)$$

e com ela é possível obter todos os coeficientes necessários para gerar a solução de (3.22). Esta solução precisa convergir para um valor finito, para que a solução da função de onda seja normalizável. Isso ocorre quando $j_{max} = n$. Dessa forma devemos impor $a_{n+2} = 0$, para $n = 0, 1, 2, \dots$. Nessas condições a série é truncada quando

$$2n + 1 - K = 0. \quad (3.24)$$

Logo, (3.24) nos fornece os níveis de energia do Oscilador Harmônico Unidimensional como

sendo

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (3.25)$$

A equação (3.25) mostra que o espectro de energia do oscilador é discreto. Tomando como exemplo $n = 0$, o estado fundamental, temos que a menor energia para este sistema é

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad (3.26)$$

Também é possível verificar através de (3.25) que os níveis de energia são igualmente espaçados e separados por um valor correspondente a $\hbar\omega$.

A discussão do Oscilador Harmônico pode ser estendida, de modo a construir a função de onda para o estado fundamental. Isto é feito escolhendo $a_1 = 0$ em (3.22) e substituindo o resultado para $H(\xi)$ em (3.20). Após a normalização obtemos a função de onda para o estado fundamental do Oscilador Harmônico como sendo

$$\psi_0(\xi) = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{\mu\omega}{\hbar}\xi^2}. \quad (3.27)$$

Assim como obtemos $\psi_0(x)$ podemos obter a função de onda para os n níveis de energia. Os polinômios $H_n(\xi)$ são conhecidos como polinômios de Hermite (ARFKEN, 2007). Estes nos fornecem a seguinte relação para os coeficientes de (3.22)

$$|a_n| = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}. \quad (3.28)$$

Usando a condição de normalização de (3.27), podemos obter as funções de onda normalizadas para o oscilador na forma

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi). \quad (3.29)$$

Finalizamos aqui nossa discussão a respeito do Oscilador Harmônico, resolvendo a Equação de Schrödinger para o caso unidimensional, em coordenadas cartesianas. A análise deste sistema pode ser expandida para outros sistemas de coordenadas e para mais de uma

dimensão. Aqui nossa abordagem fez uso do método analítico, nos permitindo expressar as soluções da função de onda do oscilador em função dos polinômios de Hermite. As soluções polinomiais foram obtidas ao usarmos o método de Frobenius. Este método, bem como os polinômios de Hermite, são ferramentas utilizadas na resolução de Equações Diferenciais de Segunda Ordem.

3.3 Partícula em um campo eletromagnético

Nesta seção iremos revisar definições e informações úteis a nosso trabalho provenientes do eletromagnetismo. Sabemos que fenômenos magnéticos são de interesse da ciência, devido a interação de campos magnéticos com a matéria. A influência de campos magnéticos em sistemas físicos é objeto de diversos estudos, tanto em matéria condensada (BUENO M. J. ADN FURTADO; CARVALHO, 2012; FILGUEIRAS et al., 2016; FURTADO; MORAES, 1999), como em outras áreas da física (CUNHA et al., 2016; CLAUDIO.; NASCIMENTO; RIBEIRO, 2006; MUNIZ; BEZERRA; CUNHA, 2014).

A abordagem clássica para o magnetismo, bem como as leis que o regem e algumas configurações geradoras deste campo pode ser encontrada em livros de eletrodinâmica ou de eletromagnetismo (HALLIDAY; WALKER, 2016; TIPLER PAUL. A., 2006; ASSIS, 1992; MACHADO, 2000; JACKSON, 1998).

O campo magnético surge do movimento de cargas elétricas, e pode ser representado por linhas de campo (HALLIDAY; WALKER, 2016). Uma partícula de carga q movendo-se com uma velocidade $\mathbf{v}$, numa região com um campo magnético $\mathbf{B}$, experimenta uma força magnética

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.30)$$

Contudo para determinação do valor de $\mathbf{B}$ é necessário especificar a configuração que de cargas elétricas que o origina, podendo ser um fio longo, um anel, solenoide.

Na Mecânica Clássica, a depender do tipo de interação entre os corpos podemos verificar a ação de forças. Em relação as interações eletromagnéticas, podemos citar algumas

forças que regem os fenômenos nessas interações, tais como a força de Coulomb, força magnética, força elétrica e a força de Lorentz (ASSIS, 1992). Podemos descrever algumas destas interações através das Equações de Maxwell (no sistema de unidades Gaussianos) (JACKSON, 1998). Seguimos então enunciando estas e fazendo uma breve descrição de cada.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Lei de Gauss} \quad (3.31a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{Lei de Ampère} \quad (3.31b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{Lei de Faraday} \quad (3.31c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Lei de Gauss para o magnetismo} \quad (3.31d)$$

• Lei de Gauss

A lei de Gauss relaciona os campos elétricos nos pontos de uma superfície gaussiana (fechada) à carga total envolvida pela superfície (HALLIDAY; WALKER, 2016). Esta superfície envolve uma distribuição de carga ρ , cuja carga líquida é dada por q . O fluxo elétrico ϕ através de uma superfície é proporcional a intensidade do campo elétrico que atravessa a superfície. Deste modo tem-se em (3.31a) que a lei de Gauss, na qual ϵ é a constante de permissividade elétrica, no vácuo esta é denotada por ϵ_0 .

Uma das implicações da Lei de Gauss é a constatação de que todas as cargas em excesso de um condutor isolado se concentram na superfície externa do condutor. Com isto tem-se que o campo no interior de um condutor carregado é nulo.

• Lei de Ampère

Sendo μ a constante de permeabilidade magnética de um meio, no caso do vácuo usamos μ_0 , tem-se em (3.31b) a Lei de Ampère. Na qual $\mathbf{J}$ é a densidade da corrente

I , que passa através curva fechada C , como podemos ver na Fig. 3.3

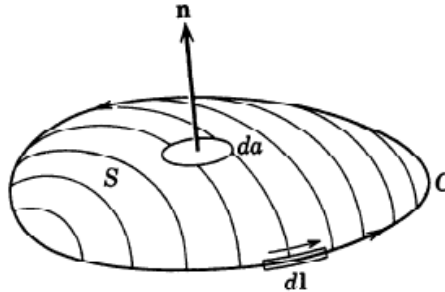


Figura 3.1: Superfície aberta I limitada por uma curva fechada C . Ref. (JACKSON, 1998)

- **Lei de Faraday**

A lei da Indução de Faraday, descrita em (3.31c), trata da correlação entre os campos magnético e elétrico. Se o fluxo magnético ϕ_B através de uma área limitada por uma espira condutora varia com o tempo, uma corrente e uma força eletromotriz são produzidas na espira. Este processo é denominado indução (HALLIDAY; WALKER, 2016).

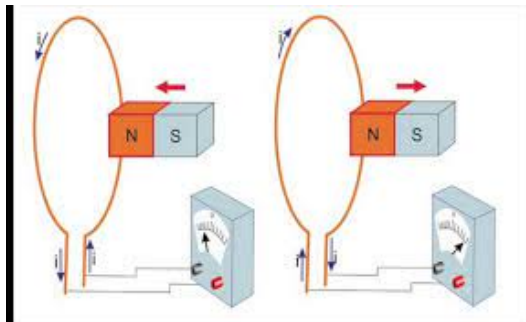


Figura 3.2: Corrente gerada por um ímã atravessando uma espira. Ref. Google Imagens (JACKSON, 1998)

- **Lei de Gauss para o magnetismo**

De acordo com (3.31d), lei de Gauss para campos magnéticos, o fluxo magnético através de uma superfície gaussiana (que é uma superfície fechada) é nulo (HALLIDAY; WALKER, 2016). É possível também verificar esta lei é através das linhas de campos. Envolvendo um dos pólos de um ímã com uma superfície fechada S , vide Fig.3.3.

Onde o número de linhas de campo que atravessam a superfície entrando é igual ao número que sai. Com isto tem-se o fluxo magnético através da superfície S nulo.

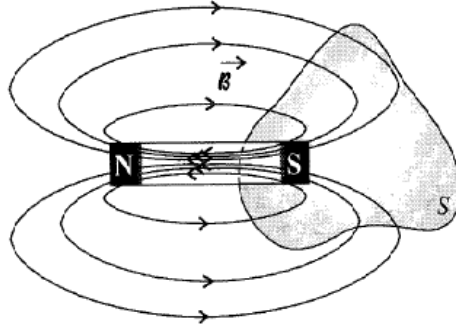


Figura 3.3: Ímã com uma superfície fechada em torno de um dos polos. Ref. Google Imagens

Uma das consequências da lei de Gauss é a não existência dos monopólos magnéticos, ao menos não foram ainda detectados experimentalmente.

Descrevemos então através de (3.31a) - (3.31d) as Equações de Maxwell. Uma vez que estas resumem as leis do eletromagnetismo, sendo utilizadas na análise de uma variedade de fenômenos elétricos, magnéticos e óticos (HALLIDAY; WALKER, 2016)

3.3.1 O operador Hamiltoniano

Revistas algumas leis que regem os fenômenos estudados pelo magnetismo clássico, passamos a observar a dinâmica de uma partícula de carga q submetida a um campo magnético $\mathbf{B}$ e um campo elétrico $\mathbf{E}$. Essa experimentara a força de Lorentz (CORSON; LORRAIN; LORRAIN, 1988), representada pela soma das forças elétricas e magnéticas

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{ele} + \mathbf{F}_{mag} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.32)$$

regendo seu movimento nas regiões onde os campos são nulos. Podemos ainda expressar os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ em termos de potenciais. Na equação (3.31d) temos que o fluxo através de uma superfície fechada é nulo, nos permitindo construir um campo vetorial $\mathbf{A}$, conhecido na

literatura com potencial vetor, de tal forma que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.33)$$

Considerando ainda campos estáticos, pela lei de Faraday (3.31d) temos que existe uma função escalar denominada potencial escalar eletromagnético ϕ , onde

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (3.34)$$

Por essas relações, conseguimos demonstrar que a energia potencial, que da origem a força é Lorentz (SILVA, 2017) é

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = q\phi - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}. \quad (3.35)$$

Uma das formas de analisar a dinâmica de uma partícula na presença destes campos é através Equação de Schrödinger, que descreve a interação dos campos com uma partícula. Para isto, vamos expressar o operador Hamiltoniano em função dos potenciais vetor e escalar, dados em (3.33) e (3.34), respectivamente. Para obtenção deste Hamiltoniano partimos da teoria clássica, na qual a densidade de lagrangiana para tal sistema é dada por

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\mu v^2 + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - V(\mathbf{r}, t), \quad (3.36)$$

cujos termos representam respectivamente, a energia cinética, a energia de interação e a energia potencial.

Para expressar o Hamiltoniano da partícula de massa μ e carga q calculamos o momento conjugado como (NETO, 2004)

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \mu \mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{A}, \quad (3.37)$$

e com ele obtemos

$$\mathcal{H} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L} = \frac{1}{2\mu} \left[\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + V(\mathbf{r}, t). \quad (3.38)$$

Este é o Hamiltoniano clássico, para uma partícula na presença dos campos elétrico e magnético. Quando passamos para o caso quântico, teremos que a partícula passa a ser descrita pela função de onda e as grandezas clássicas passam a ser operadores, $\mathbf{p} \rightarrow \hat{p} = -i\hbar\nabla$, $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rightarrow \frac{1}{i\hbar}\hat{H}(\mathbf{r}, \hat{p}, t)$. Com essa formulação (3.38) se torna (MERZBACHER, 1998)

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\hat{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + V(\mathbf{r}, t). \quad (3.39)$$

Temos então em (3.39) o operador Hamiltoniano para uma partícula de massa μ e carga q , na presença de um campo eletromagnético. Na qual $V(\mathbf{r}, t)$ representa um potencial escalar, $\mathbf{A}$ representa um potencial vetor e $\hat{p}$ é o operador momento linear. O sistema de coordenadas adotado nesta descrição é o Gaussiano, onde c é a velocidade da luz e $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, ou seja, a constante de Planck dividida por 2π (CORSON; LORRAIN; LORRAIN, 1988).

3.3.2 Invariância de calibre

No que diz respeito a uma partícula carregada em um campo eletromagnético é importante ressaltar que a função de onda, discutida na seção (3.1), não é unicamente definida pela Equação de Schrödinger, estando condicionada a escolha dos potenciais escalar $V(\mathbf{r}, t)$ e vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Estes, por sua vez, devem obedecer as transformações de *gauge*, também conhecidas como transformações de calibre. Assim, reservamos esse tópico do texto para esclarecer o que seria uma transformação de calibre e sua importância em nosso estudo.

Classicamente, com a evolução temporal, variáveis dinâmicas como posição e momento não sofrem alteração se adicionarmos valores constantes no espaço e no tempo. Contudo, na Mecânica Quântica, esta adição, mesmo num estado estacionário, resulta em uma alteração na dependência temporal (LANDAU; LIFSHITZ, 1977). Ou seja, se fizermos $V(\mathbf{r}, t) \rightarrow V(\mathbf{r}, t) + V_0$, onde V_0 é um valor constante no espaço e no tempo, vemos que a função de onda, que como discutimos na seção (3.1) traz consigo as informações da partícula, adquire uma fase global. Isto ocorre, pois na Mecânica Quântica estes potenciais são funções do operador posição, $\hat{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ da partícula e geralmente o operador momento $\hat{p}$ e o potencial vetor $\mathbf{A}$, não comutam.

O intuito das transformações de calibre é nos garantir que, independentemente do

calibre escolhido não haverá interferência na solução das equações físicas. Fixar o calibre de um sistema significa fazer a escolha mais apropriada para a resolver as suas equações de movimento. Deste modo mantemos a conservação da carga.

No Hamiltoniano para uma partícula na Mecânica Quântica, na presença de um campo eletromagnético, o momento conjugado passa a ser um operador de modo que

$$\left[\hat{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 = \hat{p}^2 + \frac{q^2}{c^2} \mathbf{A}^2 - \frac{q}{c} (\hat{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \hat{p}). \quad (3.40)$$

Calculando o comutador $[\hat{p}, \mathbf{A}]$, lembrando que $\hat{x}_i, \hat{p}_j$ não comutam e $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ temos que

$$(\hat{p}_i \cdot A_i) f(x_i) = \hat{p}_i \cdot (A_i f(x_i)) - A_i \cdot (\hat{p}_i \psi(\mathbf{r})). \quad (3.41)$$

Substituindo (3.4) em (3.41) obtemos

$$(\hat{p}_i \cdot A_i) f(x_i) = -i\hbar \nabla \cdot (A_i f(x_i)) - A_i \cdot (\hat{p}_i f(x_i)). \quad (3.42)$$

Um exemplo, no qual $\mathbf{A}$ e $\hat{p}$ comutam é o chamado de calibre de Coulomb, onde $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Sabendo desta necessidade de transformações, que preservem as equações de modo que sejam invariantes e não alterem a densidade de probabilidade da partícula, bem como não modifique a intensidade dos campos, voltamos nossa discussão para as equações de Maxwell. Dado o campo magnético $\mathbf{B}$ e o campo elétrico $\mathbf{E}$ expressos por (3.33) e (3.34), respectivamente, temos que as transformações de calibre que deixam as equações invariantes são (LANDAU; LIFSHITZ, 1977)

$$V(\mathbf{r}, t) \rightarrow V(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, t) \quad (3.43a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla f(\mathbf{r}, t), \quad (3.43b)$$

onde $f(\mathbf{r}, t)$ é uma função arbitrária.

3.3.2.1 Invariância de calibre da Equação de Schrödinger

Dada as transformações de calibre, que mantêm a invariância das equações que regem os campos abordados, vamos agora analisar a invariância de calibre da equação de Schrödinger, para uma partícula num campo eletromagnético.

Observamos que dada a função de onda

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = e^{iqf(\mathbf{r}, t)/\hbar} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (3.44)$$

podemos escrever a Equação de Schrödinger para o Hamiltoniano de (3.39) como

$$i\hbar \frac{\partial \psi'(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\mu} \left[\hat{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 \psi'(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \psi'(\mathbf{r}, t), \quad (3.45)$$

e utilizando as transformações (3.43a) e (3.43b) verificamos que esta é invariante para tais calibres. A escolha deste calibre garante a conservação do momento linear do sistema.

3.3.3 Partícula carregada em um campo magnético uniforme

Nos trabalhos que deram origem a esta tese (SILVA; BAKKE, ; SILVA; BAKKE; VITORIA, 2019; SILVA; BAKKE, 2019b; SILVA; BAKKE, 2019a; SILVA; Bakke, 2020), são discutidos efeitos que surgem nas interações dos sistemas propostos. Iremos agora fazer uma breve discussão em torno de dois desses efeitos que provem da interação com um campo magnético.

Após estudar a dinâmica para uma partícula carregada num campo eletromagnético, vamos refinar nossa abordagem, nos restringindo a um campo magnético uniforme, tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -B_0 \hat{z}, \quad (3.46)$$

ou seja, um campo na direção do eixo z . Nesse caso, uma escolha de calibre para o potencial vetor é o calibre de Landau (MELO, 2010), dado por, $A_y = -B_0 x$, $A_x = A_z = 0$.

Como discutimos na seção (3.1), considerando que nosso potencial não depende do tempo, pelo método de separação de variáveis verificamos que podemos utilizar a Equação de Schrödinger independente do tempo (3.10). Passaremos a adotar nessa discussão coordenadas cilíndricas, de modo que a componente não nula do potencial vetor é $A_\varphi = -B_0 r$.

Com o uso do Hamiltoniano (3.39) independente do tempo, (3.10) se torna

$$\frac{1}{2\mu} \left[\hat{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (3.47)$$

onde E representa a energia total da partícula. Portanto, fazendo uso do calibre de Coulomb e seguindo (3.41) obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] + i \frac{qB}{2\mu} \hbar \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{q^2 B^2}{8\mu} r^2 \psi = E\psi(r, \varphi, z). \quad (3.48)$$

Uma vez que o Hamiltoniano expresso pelo lado direito de (3.48) comuta com as componentes $\hat{L}_z$ e $\hat{p}_z$ dos operadores de momento angular e linear, temos que seus autovalores se conservam, o que nos permite escrever uma solução para $\psi(r, \varphi, z)$ da forma

$$\psi(r, \varphi, z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} R(r) e^{il\varphi} e^{ip_z z/\hbar}. \quad (3.49)$$

Definindo $\omega = \frac{qB_0}{\mu c}$, e substituindo (3.49) em (3.48), obtemos a equação radial

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(R'' + \frac{R'}{r} - \frac{l^2 R}{r^2} \right) + \left[E - \frac{p_z^2}{2\mu} - \frac{\mu \omega^2}{8} r^2 - \frac{\hbar \omega l}{2} \right] \psi = E\psi. \quad (3.50)$$

Fazendo agora uma mudança de variável $\xi = (\mu \omega / 2 \hbar) r^2$, (3.50) torna-se (SILVA, 2013)

$$\xi R''(\xi) + R'(\xi) + \left(-\frac{\xi}{4} + \varsigma - \frac{l^2}{4\xi} \right) R(\xi) = 0, \quad (3.51)$$

onde $\varsigma = \frac{1}{\hbar \omega} \left(E - \frac{k^2}{2\mu} \right) - \frac{\mu}{2}$.

Analogamente ao oscilador (3.25), adotando o método analítico (3.2.2.1), ao analisarmos os limites assintóticos de (3.51), ou seja, $\xi \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow \infty$, temos que a função de onda $R(\xi) = 0$. Com isto, propõe-se uma solução para (3.51) da forma $R(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{|l|/2} u(\xi)$,

resultando em

$$\xi u''(\xi) + (l - \xi + 1)u'(\xi) + \left(\varsigma - \frac{l}{2} - \frac{1}{2}\right)u(\xi) = 0, \quad (3.52)$$

que é uma equação hipergeométrica confluyente (ARFKEN, 2007), cuja solução pode ser escrita como $u(\xi) = {}_1F_1 \left[-\left(\varsigma - \frac{|l|}{2} - \frac{1}{2}\right), |l| + 1, \xi \right]$.

Seguindo o método de Frobenius, para (3.52) encontramos uma relação de recorrência análoga a (3.23), cuja condição de truncamento é dada por $n = \varsigma - \frac{|l|}{2} - \frac{1}{2}$ (SILVA, 2013). Esta condição nos fornece

$$E_{n,l} = \hbar\omega \left(n + \frac{|l|}{2} + \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2\mu}, \quad (3.53)$$

onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ é o número quântico de modos radiais e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ é o número quântico de momento angular. A equação (3.53) representa os níveis de energia para uma partícula carregada em um campo magnético uniforme, estes níveis de energia são conhecidos como níveis de Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1977). Note que a soma $n + \frac{|l|}{2} + \frac{l}{2}$ fornece um número inteiro, ou seja, $n + \frac{|l|}{2} + \frac{l}{2} = n_x = 0, 1, 2, 3, \dots$. Isto nos permite reescrever (3.53) na forma: $E_{n_x} = \hbar\omega \left(n_x + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2\mu}$. Esta forma dos níveis de energia é obtida através do *gauge* de Landau (este caso é dado em coordenadas cartesianas onde as componentes do potencial vetor são dadas por: $A_y = -B_0x$, $A_x = A_z = 0$).

O fenômeno conhecido como quantização de Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1977) é observado em vários sistemas, dando origem a trabalhos que envolvem o estudo de partículas carregadas em meio a um campo magnético constante e uniforme (MARQUES et al., 2001; BUENO M. J. ADN FURTADO; CARVALHO, 2012; FILGUEIRAS et al., 2016; FURTADO; MORAES, 1999; CUNHA et al., 2016; CLAUDIO.; NASCIMENTO; RIBEIRO, 2006; MUNIZ; BEZERRA; CUNHA, 2014; MELO, 2010).

3.3.4 Efeito Aharonov-Bohm para estados ligados

Aharonov e Bohm (AHARONOV; BOHM, 1959) demonstraram que a descrição dos sistemas quânticos, no eletromagnetismo através do potencial escalar e potencial vetor, é mais

adequadas que a descrição através dos campos elétrico e magnético. O efeito Aharonov-Bohm é abordado em diversos trabalhos (FURTADO; BEZERRA; MORAES, 2001; SILVA; BAKKE, ; FILGUEIRAS et al., 2016; JENSEN; KUCERA, 1993; SILVA; BAKKE, 2019a; SILVA; Bakke, 2020; BAKKE; NASCIMENTO; FURTADO, 2008; BEZERRA, 1987; BEZERRA, 1989).

O efeito Aharonov-Bohm nos fornece um significado físico real para o potencial vetor, sendo definido como o efeito do potencial vetor sobre uma partícula carregada numa região onde os campos são nulos.

A importância desta observação é devido ao fato de que do ponto de vista clássico o potencial vetor era utilizado apenas como ferramenta matemática para auxiliar no cálculo dos campos, contudo em sistemas quânticos observou-se que este passa a ter um significado físico (GRIFFITHS, 2011).

As previsões teórica de Aharonov e Bohm possuem comprovação experimental (TONOMURA et al., 1986). No experimento realizado foi detectada uma mudança de fase da partícula, demonstrada uma quantificação do fluxo e verificado que a diferença de fase na partícula carregada é gerada pelo potencial vetor, nas regiões onde o campo é nulo.

Como exemplo, para descrição do efeito, inicialmente vamos considerar uma partícula carregada de carga q , restrita a mover-se em uma trajetória circular de raio R , em torno um solenoide ideal, extremamente longo, de raio $a < R$, percorrido por uma corrente I , como podemos observar na figura 3.4.

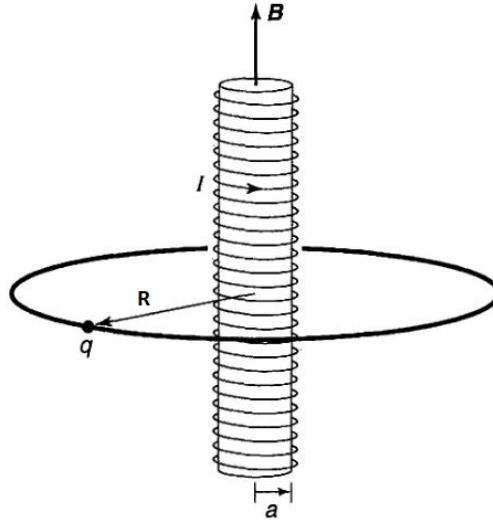


Figura 3.4: Esquema de uma partícula com carga q , que orbita um solenoide transportando uma corrente I , contendo em seu interior um campo de fluxo constante. Ref. (GRIFFITHS, 2011)

Nessas condições temos que o campo magnético interno, para $r < a$, será uniforme e o campo externo nulo, para $r > a$. Porém o potencial vetor na região externa não é nulo, e é dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (r > a), \quad (3.54)$$

onde o fluxo magnético que atravessa o solenoide é $\Phi = \pi a^2 B$.

Para analisar este sistema, resolvemos a Equação de Schrödinger independente do tempo (3.10), para o potencial (3.54), analogamente ao que foi discutido para uma partícula em um campo magnético uniforme na seção (3.3.3).

Neste caso a função de onda só depende do ângulo azimutal φ , assim teremos que (3.47) se torna

$$\frac{1}{2\mu} \left[-\frac{\hbar^2}{R^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} + \left(\frac{q\phi}{2\pi R} \right)^2 + i \frac{\hbar q \Phi}{\pi R^2} \frac{d}{d\varphi} \right] \psi(\varphi) = E \psi(\varphi). \quad (3.55)$$

Definindo

$$\varrho \equiv \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \quad \varepsilon \equiv \frac{2\mu R^2 E}{\hbar^2} - \varrho^2 \quad (3.56)$$

podemos reescrever (3.55) como

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} - 2i\varrho + \frac{d\psi}{d\varphi} + \varepsilon\psi = 0. \quad (3.57)$$

Observadas as condições de periodicidade onde, $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$, ou seja, $\psi(\varphi)$ é periódica, com período 2π , podendo ser escrita como $\psi(\varphi) = Ae^{i\lambda\varphi}$, obtemos

$$\lambda = \varrho \pm \frac{R}{\hbar} \sqrt{2\mu E}. \quad (3.58)$$

A continuidade de $\psi(\varphi)$ em $\varphi = 2\pi$, exige que λ seja um número inteiro, assim tomando $\lambda = l$, obtemos

$$E_l = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \left(l - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2, \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (3.59)$$

A equação (3.59) nos fornece os níveis de energia, e demonstra que apesar da partícula estar fora do solenoide, sua energia depende do fluxo magnético que está em seu interior, mesmo com o campo na localização da partícula sendo nulo.

Esta dependência dos níveis de energia do fluxo magnético Φ (fase geométrica (GRIFFITHS, 1994)), corresponde ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959).

3.4 Efeitos de rotação em sistemas quânticos

Assim como o campo magnético a rotação também é de nosso interesse, havendo diversos trabalhos que analisam sua influência na matéria (MAIA; BAKKE, 2019b; JENSEN; KUCERA, 1993; DANTAS; FURTADO; NETTO, 2014; PAGE, 1975; TSAI; NEILSON, 1988). Estes, partiram de estudos dos efeitos da rotação da Terra na função de onda de nêutrons (PAGE, 1975; WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979; ANANDAN; SUZUKI, 2004), estimulados a investigar como partículas quânticas se comportam em referenciais não-inerciais. Isto nos despertou o interesse de investigar sistemas, na presença de defeitos topológicos em sistemas sob rotação.

Reservamos esta seção para introduzir sistemas quânticos em referenciais em rotação.

Aqui mostraremos como acoplar ao Hamiltoniano do sistema a informação da variação de velocidade.

Iniciaremos nossa revisão por uma abordagem clássica para referenciais em rotação. Em seguida, discutiremos referenciais sob rotação, do ponto de vista quântico.

3.4.1 Abordagem da teoria clássica

Nosso interesse é analisar o comportamento da matéria para referenciais submetidos a rotação. Partiremos da densidade lagrangeana para referenciais inerciais com energia potencial U dada por (LANDAU L. D., 1976)

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - U, \quad (3.60)$$

onde $v_0 = |\mathbf{v}_0|^2$ é a velocidade de um eixo fixo. Ao rotacionarmos um sistema de eixos coordenados, com velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$, em relação a este fixo, teremos que $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$.

A equação (3.60), pode ser obtida através das equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}}, \quad (3.61)$$

sendo estas independentes da escolha do referencial.

Ao introduzir a informação do movimento de rotação dos eixos na equação (3.60), obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu v^2 + \mu \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{2}\mu (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - U, \quad (3.62)$$

como sendo a densidade lagrangeana de uma partícula num sistema de referência arbitrário qualquer que rotaciona mas não translada.

Considerando que a energia de uma partícula pode ser obtida utilizando (3.38), onde $\mathbf{p} = \partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{v}$, a energia deste sistema será (SILVA, 2017)

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{1}{2}\mu |(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})|^2 + U. \quad (3.63)$$

Através da substituição de (3.62) em (3.61), conseguimos obter a equação de movimento

$$\mu d\mathbf{v}/dt = -\partial U/\partial \mathbf{r} + 2\mu(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) + \mu \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad (3.64)$$

na qual verifica-se as informações das forças proveniente da rotação, sendo cada termo referente a uma força. Se considerarmos um sistema de referência com rotação uniforme e sem aceleração translacional, ou seja, $\boldsymbol{\Omega} = \text{constante}$, o termo $\mu \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega})$ representa a força centrífuga. A não uniformidade da rotação é representada por $\mu \mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}$ e também vemos o termo proveniente da força de Coriolis (MALVERN, 1969), $2\mu \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$ e depende da velocidade da partícula.

Voltando nossa atenção para (3.63), vemos a existência de um termo que surge do potencial centrífugo e este é proporcional a velocidade angular, $-\frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2$. Substituindo a velocidade $\mathbf{v}$, referente ao eixo rotacionado, em termos de $\mathbf{v}_0$, velocidade do eixo fixo, chegamos a expressão para a energia da partícula num referencial sob rotação, na abordagem clássica, na forma

$$E = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - \mu \mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + U = \frac{1}{2}\mu v_0^2 + U - \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (3.65)$$

Comparando então as energias do referencial fixo com o sob rotação, conseguimos ver que apesar do momento angular em ambos referenciais não mudar, ou seja, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_0$ e $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ são iguais, a energia dada em (3.65) é modificada pelo momento angular $\mathbf{L}$, e podemos escrever

$$E = E_0 - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (3.66)$$

Esta abordagem clássica nos permite fazer uma analogia com uma partícula quântica e assim obter o operador Hamiltoniano para uma partícula quântica num referencial sob rotação. Contudo, é importante ressaltar que além da influência dos campos de força centrífugo e de Coriolis, uma rotação constante não altera as propriedades macroscópicas de um sistema (ANANDAN; SUZUKI, 2004), mostrando assim que a rotação da Terra não influencia em experimentos do ponto de vista macroscópico.

3.4.2 Abordagem da teoria quântica

Discutiremos agora a influência de uma referencial em rotação sob uma partícula quântica de massa μ , numa abordagem não-relativística. Partindo de um referencial em rotação F' com velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$ (constante no tempo), em relação a um referencial F_0 . Considerando que a velocidade e o operador momento angular orbital da partícula são

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (3.67a)$$

$$\hat{L} = \mathbf{r} \times \hat{p}, \quad (3.67b)$$

teremos que o Hamiltoniano do sistema em relação a F' será (ANANDAN; SUZUKI, 2004)

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}(\hat{p} - \mu\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - \frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2, \quad (3.68)$$

ou ainda,

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}[\hat{p} - 2\mu\mathbf{a}]^2 + V. \quad (3.69)$$

Esse Hamiltoniano é obtido da mesma forma que (3.66), apenas considerando que do ponto de vista quântico o momento linear $\mathbf{p}$ e o momento angular $\mathbf{L}$ são agora os operadores $\hat{p}$ e $\hat{L}$, respectivamente. Podemos escrever (3.69) a partir de (3.68), considerando o calibre de Coulomb (GRIFFITHS, 2011), no qual

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \quad (3.70)$$

e o potencial escalar centrífugo

$$V = -\frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2, \quad (3.71)$$

enfatizando que estamos desconsiderando o efeito do acoplamento do spin a rotação.

Por fim escrevendo (3.68) em termos do operador momento angular orbital (3.67b)

obtemos

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} \hat{p}^2 - \boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{L}. \quad (3.72)$$

Em (3.72) vemos que o Hamiltoniano quântico pode ser escrito da mesma forma que o Hamiltoniano clássico (3.66).

Com base nesta discussão, na qual consideramos um referencial sob rotação, verificamos que há o aparecimento do potencial vetor, dado em (3.70), para o campo rotacional. Desta forma, a partícula no referencial em rotação F' , pode perceber o vetor Ω , completamente análogo ao percebido nos campos magnético e elétrico, para um sistema de referencial inercial (HARRIS JONATHAN H., 1980). Isto demonstra como a rotação altera a energia do sistema.

Capítulo 4

Partícula em um meio elástico com uma uma distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical

O intuito deste capítulo é estudar sistemas compostos por uma partícula quântica em um meio elástico, na presença de uma deslocação tipo-hélice. A deslocação abordada neste estudo é definida pela distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical (2.20). Para isto, resolveremos a Equação de Schrödinger para sistemas quânticos não-relativísticos, de modo a obter os níveis de energia. Iremos também discutir os efeitos associados as interações nesses sistemas.

Neste capítulo estaremos trabalhando com o espaço, na presença da deslocação tipo-hélice. Apresentamos então os sistemas quânticos de interesse, da seguinte forma: a primeira seção é destinada a estudar uma partícula quântica confinada por um fio cilíndrico e por um anel unidimensional; na segunda seção abordamos o confinamento por uma caixa cilíndrica; na terceira seção analisamos os efeitos do Oscilador Harmônico devido a presença do defeito topológico; e na quarta seção, exploramos os efeitos associados a uma carga interagindo com um campo magnético, com o defeito como pano de fundo para o sistema.

Os sistemas e discussões deste capítulo são baseadas em alguns de nossos trabalhos (SILVA; BAKKE, ; SILVA; BAKKE; VITORIA, 2019; SILVA; BAKKE, 2019b; SILVA;

BAKKE, 2019a). Ressaltando que passaremos a adotar o sistemas de unidades naturais, no qual $c = \hbar = 1$ e utilizaremos em nossos sistemas coordenadas cilíndricas, (r, φ, z) .

4.1 Partícula quântica confinada por fio cilíndrico

No capítulo dois, apresentamos o elemento de linha para uma deslocação tipo-hélice. Na equação (2.20) temos o elemento de linha, quando esta deslocação é definida pela distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical, partindo de sua métrica dada na equação (2.19). Com o intuito de estudar uma partícula confinada por fio cilíndrico, bem como por um anel unidimensional, passamos a considerar um raio fixo em nosso sistema. Ou seja, fazendo $r = R$ em (2.20), obtemos (NETTO; CHESMAN; FURTADO, 2008)

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + 2\beta d\varphi dz + dz^2. \quad (4.1)$$

Para obtenção do Hamiltoniano deste sistemas podemos extrair da equação (4.1) as seguintes informações

$$g = |g_{ij}| = R^2 - \beta^2, \quad (4.2)$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2 - \beta^2} & -\frac{\beta}{R^2 - \beta^2} \\ -\frac{\beta}{R^2 - \beta^2} & \frac{R^2}{R^2 - \beta^2} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Substituindo (4.2) e (4.3) em (2.24), construímos o operador de Laplace-Beltrami para nosso sistema,

$$\nabla^2 = \frac{1}{(R^2 - \beta^2)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2\beta \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]. \quad (4.4)$$

Com (4.4), obtemos a equação de Schrödinger para uma partícula quântica, confinada por um fio cilíndrico, na presença da deslocação tipo-hélice (2.20), na forma

$$-2\mu E\psi = \frac{1}{(R^2 - \beta^2)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2\beta \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi. \quad (4.5)$$

O operador Hamiltoniano expresso através de (4.4), comuta com a componente $\hat{p}_z$ do operador momento linear, o que nos permite escrever a solução para (4.5) na forma $\psi(\varphi, z) = e^{ikz}f(\varphi)$. Substituindo esta solução em (4.5) obtemos

$$f''(\varphi) - 2ik\beta f'(\varphi) + [2\mu E(R^2 - \beta^2) - k^2 R^2]f(\varphi) = 0, \quad (4.6)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem. A solução para (4.6), pode ser escrita como $f(\varphi) = e^{\lambda\varphi}$, onde λ é um parâmetro a ser determinado. Utilizando esta solução em (4.6), obtemos a seguinte equação do segundo grau

$$\lambda^2 - 2ik\beta\lambda + [2\mu E(R^2 - \beta^2) - k^2 R^2] = 0. \quad (4.7)$$

Resolvendo (4.7) encontramos que

$$\lambda = ik\beta \pm i[(2\mu E - k^2)(R^2 - \beta^2)]^{1/2}. \quad (4.8)$$

Como a função de onda obedece a condição de contorno $f(\varphi) = f(\varphi + 2\pi)$, isto nos permite escrever $\lambda = il$, com $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Dessa forma encontramos

$$E_l = \frac{k^2}{2\mu} + \frac{(l - \beta k)^2}{2\mu(R^2 - \beta^2)}, \quad (4.9)$$

que são os níveis de energia para uma partícula quântica confinada por um fio cilíndrico, na presença de uma deslocação tipo-hélice, definida por uma distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical.

Analisando o resultado obtido em (4.9), temos que o primeiro termo desta equação corresponde a energia cinética translacional, proveniente do movimento livre da partícula na direção z . Enquanto que o segundo termo, corresponde a energia cinética rotacional com em relação ao eixo z . Neste sistema o número quântico l é associado com a componente z do momento angular. E apesar da partícula não estar confinada no eixo z , por estarmos estudando fios quânticos, também obtemos estados ligados, pois para estes sistemas os níveis de energia são bidimensionais (NETTO; CHESMAN; FURTADO, 2008; RIDLEY, 2017;

RAZEGHI, 2002).

Ainda em (4.9), observamos duas contribuições provenientes da presença do defeito topológico em nossa abordagem. Podemos citar primeiramente o termo $r_0 = \sqrt{R^2 - \beta^2}$, que pode ser visto como um raio efetivo r_0 . Outra contribuição se dá pelo acoplamento entre o número quântico referente ao momento angular l e o parâmetro do defeito β , isto nos fornece um momento angular efetivo $\gamma = l - \beta k$. Esta redefinição no número quântico de momento angular, corresponde a um análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959; TONOMURA et al., 1986).

Partindo do resultado obtido pelo confinamento por um fio cilíndrico, podemos ainda estender nossa discussão comparando-o com o estudo feito por (NETTO; CHESMAN; FURTADO, 2008). Neste, investiga-se os efeitos de uma partícula quântica confinada por um fio cilíndrico na presença de outro defeito, que também corresponde a uma deslocação tipo-hélice, descrita pela distorção de uma curva circular em uma espiral vertical. Para este defeito, também foi observado uma alteração no número quântico de momento angular, oriunda da presença do defeito.

Outra observação relevante em nosso resultado é que tomando $\beta = 0$, recuperamos o espectro de energia para uma partícula quântica confinada por um fio cilíndrico, na ausência de um defeito topológico.

4.1.1 Confinamento por um anel unidimensional

Encontrado os níveis de energia para o confinamento por um fio cilíndrico na equação (4.9), iremos agora abordar o confinamento por um anel unidimensional. Uma maneira prática de fazer isto, é limitando a configuração do fio cilíndrico ao plano $z = 0$. Isto pode ser feito tomando $k = 0$ na equação (4.9). Com isto obtemos

$$E_l = \frac{l^2}{2\mu(R^2 - \beta^2)}. \quad (4.10)$$

A equação (4.10) corresponde ao espectro de energia de uma partícula confinada por um anel unidimensional, na presença de uma deslocação tipo-hélice, descrita pela distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical.

Neste caso, a contribuição do defeito para os níveis de energia está apenas no raio efetivo $r_0 = \sqrt{R^2 - \beta^2}$, pois reduzindo nosso sistema ao plano $z = 0$ não há modificação no momento angular. Assim como para o estudo feito por (NETTO; CHESMAN; FURTADO, 2008), a presença do defeito no anel unidimensional, não modifica o número quântico de momento angular l , logo não há efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados para este caso (AHARONOV; BOHM, 1959; TONOMURA et al., 1986) .

4.2 Partícula confinada em uma caixa cilíndrica

Até o momento apresentamos a análise de sistemas em uma dimensão, anel quântico, e em duas dimensões, fio cilíndrico, ambos na presença de uma deslocação tipo-hélice. Nesta seção buscamos soluções analíticas da Equação de Schrödinger para uma partícula quântica desconsiderando o spin, confinada por uma caixa cilíndrica, na presença de uma distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical (SILVA; BAKKE, ; SILVA; BAKKE, 2019a). Para isto, partiremos do elemento de linha que caracteriza este defeito, dado em (2.20).

Podemos descrever uma caixa cilíndrica a partir do seguinte potencial (GRIFFITHS, 1994)

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \leq R \\ \infty, & \text{se } r > R, \end{cases} \quad (4.11)$$

onde R é o raio da caixa cilíndrica.

Para expressar o Hamiltoniano deste sistema, vamos primeiro calcular o determinante e a matriz inversa da métrica (2.19), assim temos que

$$g = |g_{ij}| = r^2 - \beta^2, \quad (4.12)$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 - \beta^2} & -\frac{\beta}{r^2 - \beta^2} \\ 0 & -\frac{\beta}{r^2 - \beta^2} & \frac{r^2}{r^2 - \beta^2} \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Substituindo (4.12) e (4.13) em (2.24), construímos o operador de Laplace-Beltrami para nosso sistema,

$$\nabla^2 = \frac{1}{(r^2 - \beta^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \left[(r^2 - \beta^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{1}{(r^2 - \beta^2)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2\beta \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]. \quad (4.14)$$

A partir de (4.14) obtemos a Equação de Schrödinger independente do tempo, para uma partícula em um meio na presença da deslocação, na forma

$$E\psi = -\frac{1}{2\mu} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{r}{(r^2 - \beta^2)} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{(r^2 - \beta^2)} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right]. \quad (4.15)$$

Iremos agora investigar soluções para (4.15), com base nas condições de confinamento (SILVA; BAKKE, ; SILVA; BAKKE, 2019a) dadas em (4.11).

Devido as componentes $\hat{p}_z = -i\partial_z$ e $\hat{L}_z = -i\partial_\varphi$, dos operadores momento linear e momento angular, cujos autovalores são, respectivamente, $k = \text{constante}$ e $l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$, comutarem com o operador Hamiltoniano, representado pelo lado direito de (4.15), podemos escrever a solução para (4.15) como

$$\psi(r, \varphi, z) = e^{il\varphi + ikz} R(r). \quad (4.16)$$

Substituindo (4.16) em (4.15), obtemos uma equação radial para a Equação de Schrödinger, na forma

$$R''(r) + \frac{r}{(r^2 - \beta^2)} R'(r) - \frac{(l - \beta k)^2}{(r^2 - \beta^2)} R(r) + (2\mu E - k^2) R(r) = 0. \quad (4.17)$$

A equação (4.17) é uma equação diferencial de segunda ordem. Investigamos se há na literatura alguma abordagem matemática que nos auxilie a resolve-la. Assim, denotando os parâmetros

$$\begin{aligned} \lambda &= (l - \beta k)^2 + 2q^2, \\ q^2 &= \frac{\beta^2}{4} (2\mu E - k^2) \end{aligned} \quad (4.18)$$

e adotando a mudança de variável $r = \beta \cosh y$, a equação radial (4.17) torna-se

$$R'' + [2q^2 \cosh(2y) - \lambda] R = 0. \quad (4.19)$$

A equação (4.19) é conhecida como equação modificada de Mathieu ou equação radial de Mathieu (via apêndice A.1) (ARFKEN, 2007; ABRAMOWITZ; STEGUM, 1965; MCLACHLAN, 1947).

Com intuito de encontrar soluções para (4.19), faremos a seguinte reparametrização (MULER-KIRSTENH, 2006)

$$x = \beta \sqrt{2\mu E - k^2} \cosh y = 2q \cosh y, \quad (4.20)$$

onde o parâmetro β caracteriza o defeito. Assim, a equação radial (4.19) passa a ser

$$R'' + \frac{1}{x}R' - \frac{1}{x^2} [\lambda R + 2q^2 (R + 2R'')] + R = 0. \quad (4.21)$$

Como β assume valores muitos pequenos, pois como foi discutido no capítulo dois, os campos de deslocação são valores infinitesimais, nos permitindo então, desprezar valores proporcionais a β^2 . Isto nos fornece que

$$\lambda R + 2q^2 (R + 2R'') \approx (l - \beta k)^2 R. \quad (4.22)$$

Se definirmos $\gamma = (l - \beta k)$, (4.21) passa a ser escrita como

$$R'' + \frac{l}{x}R' - \frac{\gamma^2}{x^2}R + R = 0. \quad (4.23)$$

Nos deparamos aqui com mais uma equação diferencial, esta por sua vez conhecida como Equação diferencial de Bessel (ARFKEN, 2007; ABRAMOWITZ; STEGUM, 1965), cuja solução geral é conhecida e dada por

$$f(x) = AJ_{|l|}(\tau x) + BN_{|l|}(\tau x) \quad (4.24)$$

onde $J_{|l|}(\tau x)$ e $N_{|l|}(\tau x)$ são as funções de Bessel (ARFKEN, 2007; ABRAMOWITZ; STEGUM, 1965) de primeira e segunda ordem, respectivamente. Para encontrar a solução deste sistema, buscaremos resolver (4.23) mediante as condições de confinamento (4.11).

Ao observarmos a simetria cilíndrica do problema, vemos que na origem há uma divergência na solução (4.24). Pois quando $r \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$, e a função de Bessel $N_{|\gamma|}(\tau x)$ diverge na origem (JACKSON, 1998). Em razão disto, tomamos $B = 0$ em (4.24) e a solução para (4.23) passa a ser

$$R(x) = AJ_{|\gamma|}(\tau x). \quad (4.25)$$

Ainda analisando as condições de contorno do nosso sistema, temos que o confinamento pelo potencial (4.11) nos impõe que para um valor fixo de $x \rightarrow x_0$, a função de onda é nula. Ou seja, para um raio fixo r_0 , $x \rightarrow x_0 = \beta\sqrt{2\mu E - k^2} \cosh y_0$ e

$$R(x_0) = 0. \quad (4.26)$$

Satisfazendo essa condição, ao substituir (4.25) em (4.23), encontramos as soluções descritas por

$$\Theta_{n,\gamma} = \beta\sqrt{2\mu E - k^2} \cosh y_0, \quad (4.27)$$

onde $\Theta_{n,\gamma}$ é o n -ésimo zero da γ -ésima função de Bessel (GRIFFITHS, 1994). E (4.27) nos fornece

$$E_{n,l} = \frac{\Theta_{n,\gamma}^2}{2\mu\beta^2 \cosh^2 y_0} + \frac{k^2}{2\mu}, \quad (4.28)$$

na qual considerando a mudança de variável que fizemos para obter (4.8), $r_0 = \beta \cosh y_0$, podemos reescrever (4.28) como

$$E_{n,l} = \frac{\Theta_{n,\gamma}^2}{2\mu r_0^2} + \frac{k^2}{2\mu}. \quad (4.29)$$

A equação (4.29) nos fornece os níveis de energia para uma partícula quântica, desconsiderando o spin, confinada por uma caixa cilíndrica, em um meio elástico, na presença de um defeito definido pela distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical, em termos do número quântico de modos radiais n e do número quântico de momento angular l , expresso através de γ .

A solução (4.27) é dada em função dos zeros da função de Bessel (ARFKEN, 2007). Estes, por sua vez, são escritos em termos dos parâmetros n e γ , que representam, respectivamente, os números quânticos associados aos modos radiais e ao momento angular. Nesse

resultado (4.29), o segundo termo corresponde a energia cinética translacional, proveniente da liberdade de movimento da partícula na direção z .

Na busca pela solução para a equação de Schrödinger radial (4.22) definimos $\gamma = l - \beta k$. Vemos através de (4.28) que γ representa um número quântico de momento angular efetivo. Ou seja, a presença do defeito representado pelo parâmetro β , produz uma redefinição do número quântico de momento angular, onde $l \rightarrow l - \beta k$. Observamos que esta redefinição existe mesmo que a partícula não esteja interagindo com o defeito e isto é um análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959), discutido no capítulo três. Este efeito foi investigado em sistemas quânticos, nos quais os níveis de energia de uma partícula dependem do número quântico de momento angular efetivo (BAKKE; NASCIMENTO; FURTADO, 2008; BEZERRA, 1987; BEZERRA, 1989; AHARONOV; BOHM, 1959).

Vamos estender nossa discussão tomando um caso particular para a solução dada em (4.29). Como as energias permitidas surgem da solução da função de Bessel (4.25), tomamos com base na literatura um caso particular, no qual quando $x_0 \gg 1$ e o valor do parâmetro $|l|$ na função é fixo, podemos escrever a função de Bessel como (BEZERRA, 1997; ARFKEN, 2007; ABRAMOWITZ; STEGUM, 1965)

$$J_{|\gamma|}(x_0) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x_0}} \cos\left(x_0 - \frac{|\gamma|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (4.30)$$

Substituindo então (4.30) na condição (4.26) obtemos

$$E_{n,l} \approx \frac{\pi^2}{2\mu r_0^2} \left[n + \frac{1}{2}|l - \beta k| + \frac{3}{4} \right]^2 + \frac{k^2}{2\mu}, \quad (4.31)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ é o número quântico relacionado aos modos radiais e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ é o número quântico do momento angular.

Assim, concluímos que tanto para este caso particular, quanto para a solução (4.29), mesmo não existindo interação entre a partícula quântica e o defeito topológico, há influência da topologia do defeito nos níveis de energia. Esta influência é observada através da interpretação do número quântico de momento angular l . Correspondendo então, a um efeito do

tipo Aharonov-Bohm, representado através da redefinição do número quântico de momento angular, devido ao termo βk , nos fornecendo um momento angular efetivo $\gamma = l - \beta k$.

E por fim, tomando $\beta = 0$, recuperamos os níveis de energia de uma partícula quântica sem spin, confinada em uma caixa cilíndrica (DAVID, 2006).

4.3 Oscilador harmônico

Nosso intuito nesta seção é investigar os efeitos topológicos de uma deslocação tipo-hélice, descrita pela distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical sobre o Oscilador Harmônico Bidimensional. Para isto, acoplamos ao Hamiltoniano (2.25) o potencial referente ao oscilador dado em (3.15), em coordenadas cilíndricas. Com isto obtemos

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{\mu\omega^2 r^2}{2} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + \frac{\mu\omega^2 r^2}{2}, \quad (4.32)$$

como sendo o operador Hamiltoniano para nosso sistema. Através de (4.32) obtemos a equação de Schrödinger independente do tempo, na forma

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_k[\sqrt{g}g^{kj}\partial_j]\psi + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2\psi. \quad (4.33)$$

Substituindo (4.12), (4.13) na equação (4.33), obtemos

$$E\psi = -\frac{1}{2\mu}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{r}{(r^2 - \beta^2)}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{(r^2 - \beta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \beta\frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2\psi. \quad (4.34)$$

Em busca de uma solução para (4.34), com base na comutatividade das componentes $\hat{p}_z = -i\partial_z$ e $\hat{L}_z = -i\partial_\varphi$, dos operadores de momento linear e angular, cujos autovalores são, respectivamente, $k = \text{constante}$ e $l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$, com o operador Hamiltoniano (4.32), podemos usar (4.16) como solução para (4.33). Essa solução nos fornece

$$R'' + \frac{r}{(r^2 - \beta^2)}R' - \frac{(l - \beta k)^2}{(r^2 - \beta^2)}R - \mu^2\omega^2 r^2 R + (2\mu E - k^2)R = 0. \quad (4.35)$$

Reparametrizando (4.35), fazendo $\gamma = l - \beta k$ e $\tau = 2\mu E - k^2$, podemos reescrever (4.35)

como

$$R'' + \frac{r}{(r^2 - \beta^2)} R' - \frac{\gamma^2}{(r^2 - \beta^2)} R - \mu^2 \omega^2 r^2 R + \tau R = 0. \quad (4.36)$$

Temos assim em (4.36) a Equação de Schrödinger radial para nosso sistema.

Como (4.36) se trata de uma equação diferencial de segunda ordem, vamos agora fazer uma mudança de variável, que nos permita procurar uma solução para esta na literatura.

Adotando então $x = \frac{r^2}{\beta^2}$, (4.36) se torna

$$4xR'' + \frac{(4x - 2)}{(x - 1)} R' - \frac{\gamma^2}{(x - 1)} R - \mu^2 \omega^2 \beta^4 x R + \beta^2 \tau R = 0. \quad (4.37)$$

Para escrever uma solução apropriada, vamos então fazer uma análise assintótica em (4.37). Assim vemos que, quando $x \rightarrow \infty$, a função precisa ser bem comportada e neste limite podemos escrever (4.37) como

$$R''(x) \approx \frac{\mu^2 \omega^2 \beta^4}{4} R(x), \quad (4.38)$$

que nos permite adotar a seguinte solução

$$R(x) = e^{-\frac{\mu\omega\beta^2}{2}x} f(x), \quad (4.39)$$

onde $f(x)$ é uma função desconhecida.

Substituindo (4.39) em (4.37) obtemos

$$\begin{aligned} f''(x) + \left[\frac{1}{(x - 1)} - \frac{1}{2x(x - 1)} - \mu\omega\beta^2 \right] f'(x) - \frac{\gamma^2}{4x(x - 1)} f(x) \\ - \frac{\mu\omega\beta^2}{2(x - 1)} f(x) + \frac{\mu\omega\beta^2}{4x(x - 1)} f(x) + \frac{\beta^2 \tau}{4x} f = 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

esta é conhecida com equação confluyente de Heun (vide apêndice A.2)(SILVA; BAKKE; VITORIA, 2019; RONVEAUX; ARSCOTT, 1995; FIZIEV, 2009).

A forma geral da equação confluyente de Heun é

$$H''(x) + \left[\alpha + \frac{\sigma + 1}{x} + \frac{\lambda + 1}{x - 1} \right] H'(x) + \left[\frac{\mu}{x} + \frac{\nu}{x - 1} \right] H(x) = 0 \quad (4.41)$$

e sua solução é dada pela função confluyente de Heun, expressa por

$$H(x) = H_C(\alpha, \sigma, \lambda, \delta, \eta; x), \quad (4.42)$$

onde μ e ν , são definidos como

$$\mu = \frac{\alpha}{2}(1 + \sigma) - \frac{\sigma}{2}(1 + \lambda) - \frac{\lambda}{2} - \eta \quad (4.43a)$$

$$\nu = \frac{\alpha}{2}(1 + \sigma) + \frac{\sigma}{2}(1 + \lambda) + \frac{\lambda}{2} + \eta + \delta. \quad (4.43b)$$

Assim, podemos escrever a solução para (4.40) como

$$f(x) = H_C \left(-\mu\omega\beta^2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\beta^2\tau}{4}, \frac{3}{8} - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\beta^2\tau}{4}; x \right). \quad (4.44)$$

Em busca de uma solução polinomial para $f(x)$, faremos uso do método de Frobenius (ARFKEN, 2007; GRIFFITHS, 1994), no qual a solução para (4.40) pode ser escrita como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (4.45)$$

Substituindo (4.45) em (4.40) obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} [-4\mu\omega\beta^2 k - 2\mu\omega\beta^2 + \tau\beta^2] + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k-1} [-4k(k-1) - 2k] \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k [4k(k-1) + 4k + 4k\mu\omega\beta^2 - \gamma^2 + \mu\omega\beta^2 - \tau\beta^2] = 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Façamos agora com que todos os termos estejam na mesma ordem em x . Assim, reescrevendo

(4.46) temos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} x^k [4k^2 + 4k\mu\omega\beta^2 - \gamma^2 + \mu\omega\beta^2 - \tau\beta^2] a_k + \sum_{k=-1}^{\infty} x^k [(k+1)(-4k-2)] a_{k+1} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} x^k [-4\mu\omega\beta^2(k-1) - 2\mu\omega\beta^2 + \tau\beta^2] a_{k-1} = 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Como todos os termos na equação (4.47) estão na mesma ordem de x , abrindo os primeiros termos dos somatórios, usando o princípio da combinação linear de termos e desprezando os termos de ordem $\mathcal{O}(\beta^3)$, por β ser muito pequeno, concluímos que

$$a_1 = \left[-\frac{\beta^2}{2}(\tau - \mu\omega) + \frac{\gamma^2}{2} \right] a_0, \quad (4.48a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \{ [-4\mu\omega\beta^2(k-1) - 2\mu\omega\beta^2 + \tau\beta^2] a_{k-1} + [(k+1)(-4k-2)] a_{k+1} \\ & + [4k^2 + 4k\mu\omega\beta^2 - \gamma^2 + \mu\omega\beta^2 - \tau\beta^2] a_k \} = 0. \end{aligned} \quad (4.48b)$$

Definindo

$$\theta = \frac{\tau}{\mu\omega} - 2 \quad (4.49)$$

e tomando $k \rightarrow k+1$, chegamos a seguinte relação

$$a_{k+2} = \frac{2 \left[(k+1)(k+1 + \mu\omega\beta^2) - \frac{\beta^2}{4}(\tau - \mu\omega) - \frac{\gamma^2}{4} \right]}{(k+2)(2k+3)} a_{k+1} - \frac{\mu\omega\beta^2[\theta - 4k]}{2(k+2)(2k+3)} a_k, \quad (4.50)$$

que é conhecida como relação de recorrência (GRIFFITHS, 1994).

Uma solução polinomial para (4.46) é alcançada quando a série termina, ou seja, obtemos um polinômio de grau n quando $a_{n+1} = 0$ e $\theta = 4n$, onde n está relacionando com o número quântico de modos radiais, tal que $n = 0, 1, 2, \dots$. Isto define o que chamamos de truncamento da série.

Procurando soluções para estados ligados, vamos construir, como exemplo, um po-

linômio de primeiro grau para $f(x)$. Fazendo $n = 1$, temos que $a_{n+1} = d_2 = 0$ e $\theta = 4$. Aplicando essa condição a (4.48b) e negligenciando termos de $\mathcal{O}(\beta^3)$, obtemos

$$\omega_{1,l} = \frac{1}{6\mu\beta^2\gamma^2}(\gamma^4 - 4\gamma^2) + \frac{\tau_{1,l}(\gamma^2 - 1)}{3\gamma^2\mu}. \quad (4.51)$$

A equação (4.51) nos fornece os valores permitidos para a frequência de ciclotron, para um polinômio de grau $n = 1$. Esta nos mostra que, a frequência angular do Oscilador Harmônico tem um conjunto de valores discretos, que nos permite construir uma solução polinomial de primeira ordem para (4.44).

Por (4.51) verificamos também que, os valores permitidos da frequência angular do Oscilador Harmônico, são determinados pelos números quânticos n, l e através do parâmetro β , que caracteriza o defeito. Para outros modos radiais, $n = 2, 3, 4, \dots$, é possível obter outras expressões para a frequência $\omega_{n,l}$ associada a cada n .

Retomando a definição de θ , dada em (4.49), temos que

$$\tau_{1,l} = 6\mu\omega_{1,l}. \quad (4.52)$$

Substituindo então, (4.52) em (4.51), dado que definimos $\tau = 2\mu E - k^2$, obtemos

$$E_{1,l} = \frac{\gamma^4 - 4\gamma^2}{2\mu\beta^2(2 - \gamma^2)} + \frac{k^2}{2\mu}. \quad (4.53)$$

A equação (4.53) nos fornece as energias permitidas associadas ao modo radial $n = 1$, para uma partícula quântica em uma abordagem não-relativística, confinada por um Oscilador Harmônico num espaço com uma deslocação tipo-hélice, definida pela distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical.

Comparando o resultado obtido em (4.53) com o espectro de energia do Oscilador Harmônico, a qual descrevemos em uma dimensão em (3.25), podemos verificar que há duas contribuições da topologia nas energias permitidas, ou seja, a presença do defeito altera o espectro de energia do oscilador. Assim temos as seguintes contribuições: a presença de β^{-2} no primeiro termo e uma contribuição em função de β no número quântico de momento angular, o que corresponde a um momento angular efetivo dado por γ . Uma vez que defini-

mos $\gamma = l - \beta k$, essa contribuição proveniente do defeito, mesmo que não haja interação da partícula com o defeito, é interpretado como um análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959; TONOMURA et al., 1986; NETTO; CHESMAN; FURTADO, 2008; Maia; Bakke, 2018; FURTADO; MORAES, 2000).

Estendendo nossa análise, podemos observar também que, satisfeitas as condições de truncamento para o polinômio de grau 1 (4.48b), $f(x)$, dada em (4.45), pode ser escrita como $f(x) = 1 + a_1 x$. Nesse caso, tomando $a_0 = 1$, teremos que a função de onda radial (4.39), se torna

$$R_{1,l}(x) = e^{-\frac{\mu\omega\beta^2}{2}x}(1 + a_1 x). \quad (4.54)$$

Para cada valor de n é possível obter uma expressão para a frequência angular $\omega_{n,l}$, e por consequência, uma nova expressão para o espectro de energia.

Ressaltamos ainda que, os valores permitidos para $E_{n,l}$, podem ser obtidos seguindo a mesma discussão, ou seja, buscando soluções polinomiais para (4.44). E por fim, tomando o limite $\beta \rightarrow 0$ em (4.34), recuperamos a equação de Schrödinger para o Oscilador Harmônico na ausência do defeito (FURTADO; MORAES, 2000).

4.4 Interação de uma carga pontual com um campo magnético uniforme

Vamos agora abordar um espaço com uma deslocação tipo-hélice, definida por uma distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical, como cenário para analisar os efeitos não-relativísticos da interação de uma carga pontual com um campo magnético uniforme.

Ressaltando que assim como nas seções anteriores, iremos utilizar o sistema de coordenadas cilíndricas (r, φ, z) , adotar unidade naturais ($\hbar = c = 1$) e considerar a ausência de spin.

No capítulo três, discutimos o comportamento de sistemas quânticos na presença de um campo magnético, revisando na literatura os efeitos associados. Vimos que o Hamiltoniano

para um sistema submetido a um campo magnético acopla o potencial vetor como em (3.39). Além disto, no capítulo dois, vimos que o operador diferencial de segunda ordem, para estudar sistemas físicos é o operador Laplace-Beltrami definido em 2.24.

Dado que pretendemos analisar a influência da presença de defeitos topológicos em um sistema na presença de campo magnético, nosso hamiltoniano pode ser descrito como (MARQUES et al., 2001; FURTADO; MORAES, 1999; NETTO; FURTADO, 2008)

$$\hat{H} = -\frac{1}{2\mu} \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_j - iqA_j) [\sqrt{g} g^{jk} (\partial_k - iqA_k)] \quad (4.55)$$

onde A_k é a componente covariante do potencial quadri-vetor eletromagnético, $A_\mu = (A_0, A_k)$ e i, j, k referem-se as coordenadas do nosso sistema.

Como dito anteriormente, o cenário para nosso sistema é um defeito topológico descrito pela métrica (2.19) (SILVA; BAKKE, 2019b), composto por uma carga pontual interagindo com um campo magnético uniforme externo dado por $\mathbf{B}$. Nossa escolha para o campo magnético será $\mathbf{B} = -B_0 \hat{z}$, onde B_0 é constante. Com o intuito de estudar a interação de uma carga pontual com este campo, podemos escolher um calibre para o potencial vetor, desde que este satisfaça a condição (3.33). Para isto vamos considerar que a única componente não nula será A_φ , ou seja, $A_r = A_z = 0$.

Substituindo as informações da métrica do defeito (2.19), bem como os valores de g e g^{ij} dados em (4.12) e (4.13), respectivamente em (4.55), obtemos o Hamiltoniano para o sistema proposto e com este a Equação de Schrödinger independente do tempo da forma

$$\begin{aligned} -2\mu E\psi = & \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{r}{r^2 - \beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 - \beta^2} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 \psi \\ & + \frac{2iqA_\varphi}{(r^2 - \beta^2)} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right] \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{q^2 A_\varphi^2}{r^2 - \beta^2} \psi. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Em busca de resolver (4.56), satisfazendo a condição de calibre (3.43b), definimos a componente do quadri-vetor como $A_\varphi = -\frac{B_0 r^2}{2}$ (SILVA; BAKKE, 2019b). Assim (4.56)

passa a ser escrita como

$$\begin{aligned} -2\mu E\psi = & \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{r}{r^2 - \beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 - \beta^2} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 \psi \\ & + \frac{iqB_0 r^2}{r^2 - \beta^2} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right] \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{q^2 B_0^2 r^4}{4(r^2 - \beta^2)} \psi, \end{aligned} \quad (4.57)$$

na qual, tomando a frequência de ciclotron $\omega = \frac{qB_0}{\mu}$, podemos reescrever (4.57) como

$$\begin{aligned} -2\mu E\psi = & \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{r}{r^2 - \beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 - \beta^2} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 \psi \\ & + \frac{i\omega\mu r^2}{r^2 - \beta^2} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right] \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\mu^2 \omega^2 r^4}{4(r^2 - \beta^2)} \psi. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Observando a conservação da componente do operador momento angular $\hat{L}_z = -i\partial_\varphi$ e da componente do operador momento linear $\hat{p}_z = -i\partial_z$ em (4.58), podemos escrever a solução para a equação de Schrödinger como

$$\psi(r, \varphi, z) = e^{ikz + il\varphi} R(r), \quad (4.59)$$

onde $k = \text{constante}$ e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, são os respectivos autovalores de $\hat{p}_z = -i\partial_z$ e $\hat{L}_z = -i\partial_\varphi$.

Substituindo a solução (4.59) em (4.58), obtemos

$$\begin{aligned} -2\mu E R(r) = & R''(r) + \frac{r}{r^2 - \beta^2} R'(r) - \frac{1}{r^2 - \beta^2} [l - \beta k]^2 R(r) \\ & - \frac{\mu\omega r^2}{r^2 - \beta^2} [l - \beta k] R(r) - k^2 R(r) - \frac{\mu^2 \omega^2 r^4}{4(r^2 - \beta^2)} R(r). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Definindo $\gamma = l - \beta k$ e $\tau = 2\mu E - k^2$, podemos reescrever (4.60) como

$$\begin{aligned} R''(r) + \frac{r}{r^2 - \beta^2} R'(r) - \frac{\gamma^2}{r^2 - \beta^2} R(r) \\ - \frac{\mu\omega r^2 \gamma}{r^2 - \beta^2} R(r) - \frac{\mu^2 \omega^2 r^4}{4(r^2 - \beta^2)} R(r) + \tau R(r) = 0, \end{aligned} \quad (4.61)$$

que é a equação radial para nosso sistema.

Em busca de uma solução para a equação (4.61), faremos uma mudança de variável. Definindo uma variável $y = r^2/\beta^2$, nossa equação radial se torna

$$4yR''(y) + \frac{4y-2}{y-1}R'(y) - \frac{\gamma^2}{y-1}R(y) - \frac{\mu\omega\gamma\beta^2y}{y-1}R(y) - \frac{\mu^2\omega^2\beta^4y^2}{4(y-1)} + \tau\beta^2R(y) = 0. \quad (4.62)$$

Analisando o comportamento da equação (4.62) nos limites assintóticos, ou seja, para $y \rightarrow 0$ e $y \rightarrow \infty$ e impondo que a função de onda é bem comportada no infinito, teremos que, quando $y \rightarrow \infty$, $R(y) \rightarrow 0$. Desse modo, podemos escrever uma solução para (4.62) na seguinte forma

$$R(y) = e^{-\frac{\mu\omega\beta^2}{4}y} f(y). \quad (4.63)$$

Substituindo (4.63) em (4.62), obtemos a seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned} f''(y) + \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{2y(y-1)} - \frac{\mu\omega\beta^2}{2} \right] f'(y) - \frac{1}{y-1} \left[\frac{\mu\omega\beta^2}{4} + \frac{\mu\omega\beta^2\gamma}{4} + \frac{\mu^2\omega^2\beta^4}{16} \right] f(y) \\ + \frac{1}{2y(y-1)} \left[\frac{\mu\omega\beta^2}{4} - \frac{\gamma^2}{2} \right] f(y) + \frac{\tau\beta^2}{4y} f(y) = 0, \end{aligned} \quad (4.64)$$

conhecida na literatura como equação confluyente de Heun (vide apêndiceA.2) (SILVA; BAKKE; VITORIA, 2019; RONVEAUX; ARSCOTT, 1995; FIZIEV, 2009).

Na seção anterior, discutimos a equação de Heun dada em (4.41) e expressamos sua solução na equação (4.42), bem como fazemos essa discussão no apêndice (A.2). Com isto, podemos escrever a solução para (4.64) na forma

$$f(y) = H_C \left(-\frac{\mu\omega\beta^2}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\tau\beta^2}{4} - \frac{\mu\omega\gamma\beta^2}{4} - \frac{\mu^2\omega^2\beta^4}{16}, \frac{3}{8} - \frac{\tau\beta^2}{4} - \frac{\gamma^2}{4}; y \right). \quad (4.65)$$

Em busca de uma solução polinomial para $f(y)$, faremos novamente o uso do método de Frobenius (ARFKEN, 2007; GRIFFITHS, 1994), no qual a solução para (4.64) pode ser escrita como

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k y^k. \quad (4.66)$$

Usando (4.66) em (4.64) obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} d_k y^{k+1} \left[-\frac{\mu\omega\beta^2}{2} \left(k + \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) + \frac{\beta^2\tau}{4} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} d_k y^{k-1} \left[-k^2 + \frac{k}{2} \right] + \\ & \sum_{k=0}^{\infty} d_k y^k \left[k^2 + \frac{\mu\omega\beta^2}{2} \left(k + \frac{1}{4} \right) - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\beta^2\tau}{4} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Façamos agora com que todos os termos estejam na mesma ordem em y , reescrevendo (4.67) teremos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} y^k \left[k^2 + \frac{\mu\omega\beta^2}{2} \left(k + \frac{1}{4} \right) - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\beta^2\tau}{4} \right] d_k + \sum_{k+1=0}^{\infty} y^k \left[-(k+1)^2 + \frac{k+1}{2} \right] d_{k+1} + \\ & \sum_{k-1=0}^{\infty} y^k \left[-\frac{\mu\omega\beta^2}{2} \left(k - \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) + \frac{\beta^2\tau}{4} \right] d_{k-1} = 0. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Como todos os termos na equação (4.68) estão na mesma ordem de y , abrindo os primeiros termos dos somatórios, usando o princípio da combinação linear de termos e desprezando os termos de ordem $\mathcal{O}(\beta^3)$, por β ser muito pequeno, concluímos que

$$d_1 = \left[\frac{\beta^2}{2} \left(\frac{\mu\omega}{2} - \tau \right) - \frac{\gamma^2}{2} \right] d_0, \quad (4.69a)$$

$$\begin{aligned} \left[(k+1) \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] d_{k+1} &= \left[k^2 + \frac{\mu\omega\beta^2}{2} \left(k + \frac{1}{4} \right) - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\beta^2\tau}{4} \right] d_k \\ &+ \left[-\frac{\mu\omega\beta^2}{2} \left(k\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) + \frac{\beta^2\tau}{4} \right] d_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.69b)$$

Definindo na equação (4.69b)

$$\theta = \frac{1}{2\mu\omega} (\mu\omega + \mu\omega\gamma - \tau) \quad (4.70)$$

e tomando $k \rightarrow k+1$, chegamos a seguinte relação

$$\begin{aligned} d_{k+2} &= \frac{\left[(k+1)(2k+2 + \mu\omega\beta^2) + \frac{\beta^2}{2} \left(\frac{\mu\omega}{2} - \tau \right) - \frac{\gamma^2}{2} \right]}{(k+2)(2k+3)} d_{k+1} \\ &- \frac{\mu\omega\beta^2 (k + \theta)}{(k+2)(2k+3)} d_k, \end{aligned} \quad (4.71)$$

conhecida como relação de recorrência (GRIFFITHS, 1994).

Uma solução polinomial para (4.66) é alcançada quando a série termina, ou seja, obtemos um polinômio de grau n quando $d_{n+1} = 0$ e $\theta = -n$, onde n está relacionado com o número quântico de modos radiais, tal que $n = 0, 1, 2, \dots$. Isto define o que chamamos de truncamento da série.

Como exemplo, vamos construir um polinômio de primeiro grau para $f(y)$. Fazendo $n = 1$ temos que $d_{n+1} = d_2 = 0$ e $\theta = -1$. Aplicando essa condição a (4.71) obtemos

$$\omega_{1,l} = \frac{2\tau_{1,l}}{3\mu} + \frac{(\gamma^4 - 4\gamma^2)}{3\mu\beta^2(\gamma^2 - 2)} \quad (4.72)$$

que são os valores permitidos para a frequência de cíclotron para um polinômio de grau $n = 1$ e por essas condições (4.70) nos fornece a relação

$$\tau_{1,l} = \mu\omega_{1,l}[\gamma + 3]. \quad (4.73)$$

Substituindo (4.72) em (4.73) encontramos

$$E_{1,l} = \frac{(\gamma^4 - 4\gamma^2)(\gamma + 3)}{2\mu\beta^2(2 - \gamma^2)(2\gamma + 3)} + \frac{k^2}{2\mu}, \quad (4.74)$$

que são os níveis de energia permitidos associados ao modo radial $n = 1$, quando uma carga pontual de massa μ interage com um campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0\hat{z}$ em um meio na presença de uma distorção de linha vertical em uma espiral vertical. Os níveis expressos por (4.74) são escritos em termos de γ , que pode ser considerado como um número quântico de momento angular efetivo, uma vez que, $\gamma = l - \beta k$ e l é o número quântico de momento angular.

A equação (4.74) nos fornece um caso particular para os níveis de energia permitidos, considerando o modo radial $n = 1$. Se compararmos com os níveis de energia conhecidos como níveis de Landau (3.53) (LANDAU; LIFSHITZ, 1977), discutidos no capítulo três, que são resultados para uma carga pontual interagindo com um campo magnético uniforme na ausência de defeito, podemos concluir que a topologia do espaço considerado, altera o espectro de energia.

Com este resultado verificamos as seguintes contribuições: o segundo termo de (4.74) é a energia cinética translacional proveniente da liberdade de movimento da partícula na direção z ; no primeiro termo podemos observar as contribuições provenientes do defeito topológico através do termo β^{-2} e do parâmetro γ . A presença de γ nos níveis de energia (4.74), resignifica o número quântico de momento angular efetivo e de acordo com (MARQUES et al., 2001; FURTADO; BEZERRA; MORAES, 2001; FURTADO; MORAES, 1999; NETTO; CHESMAN; FURTADO, 2008), isto da origem ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959).

Por fim, temos que tomando o limite $\beta \rightarrow 0$, recuperamos em (4.58) a Equação de Schrödinger para uma carga pontual, um elétron (por exemplo), interagindo com um campo magnético uniforme na ausência de defeitos (MARQUES et al., 2001).

Capítulo 5

Efeitos da rotação em um meio elástico com uma distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical

Como visto no capítulo três, o movimento de um referencial em rotação, com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$ é descrito por (3.72). Numa aproximação não-relativística, o operador momento angular é modificado pela torção, com uma influência na componente z , com uma contribuição adicional. Quando esta torção é em específico uma deslocação tipo-hélice, que corresponde a distorção de uma curva circular em uma espiral vertical (2.23), como mostrado por (BEZERRA, 1997; DANTAS; FURTADO; NETTO, 2014), o operador $\hat{L}_z$ se transforma em um operador efetivo $\hat{L}_z^{\text{eff}} = -i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \xi \frac{\partial}{\partial z} \right)$, onde ξ é o parâmetro que descreve esta deslocação.

Em analogia a distorção de uma curva circular em uma espiral vertical (BEZERRA, 1997; DANTAS; FURTADO; NETTO, 2014), temos que a topologia da distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical (2.20), também modifica a componente z do operador de momento angular, que passa a ser escrito como

$$\hat{L}_z \rightarrow \hat{L}_z^{\text{eff}} = -i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (5.1)$$

No capítulo anterior estudamos alguns sistemas quânticos na presença de uma des-

locação tipo-hélice, em referenciais inerciais. Com intuito de verificar os efeitos da rotação em alguns desses sistemas, estruturamos este capítulo da seguinte forma: a primeira seção consiste na análise de um sistema descrito por uma partícula quântica confinada por um fio cilíndrico (4.5), num referencial sob uma rotação uniforme, seguida de uma abordagem na qual o confinamento passa a ser por um anel unidimensional sob rotação; na segunda seção, nossa proposta é estudar o comportamento de uma partícula confinada por uma parede de potencial (caixa cilíndrica 4.11), num referencial em rotação.

5.1 Partícula confinada em um fio cilíndrico

Estamos em busca de soluções para a Equação de Schrödinger, para uma partícula quântica confinada por um fio cilíndrico (4.23) num referencial sob uma rotação uniforme $\hat{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$, na presença de uma distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical, cujo elemento de linha é (2.20).

Como dito anteriormente, a presença do defeito topológico altera a componente z do operador de momento angular e este passa a ser escrito como (5.1). Substituindo (4.4) e (5.1) em (3.72) obtemos a Equação de Schrödinger para nosso sistema na forma

$$E\psi = -\frac{1}{2\mu} \frac{1}{(R^2 - \beta^2)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2\beta \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi + i\Omega \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi. \quad (5.2)$$

Observando que $[\hat{H}, \hat{p}_z] = 0$, onde $\hat{H}$ é o operador Hamiltoniano que fornece o lado direito de (5.2), podemos escrever uma solução do tipo $\psi(\varphi, z) = e^{ikz} f(\varphi)$ para (5.2). Isto nos fornece a seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$f''(\varphi) - 2i[k\beta + \mu\Omega(R^2 - \beta^2)]f'(\varphi) + [2\mu(R^2 - \beta^2)(E - \beta\Omega k) - k^2 R^2]f(\varphi) = 0. \quad (5.3)$$

Uma solução possível para (5.3) é $f(\varphi) = e^{\bar{\lambda}\varphi}$, onde $\bar{\lambda}$ é um parâmetro a ser determinado. Fazendo uso desta solução, encontramos a seguinte equação de segundo grau

$$\bar{\lambda}^2 - 2i[k\beta + \mu\Omega(R^2 - \beta^2)]\bar{\lambda} + [2\mu(R^2 - \beta^2)(E - \beta\Omega k) - k^2 R^2] = 0, \quad (5.4)$$

cujas soluções são

$$\bar{\lambda} = i\{k\beta + \mu\Omega(R^2 - \beta^2) \pm \sqrt{[k\beta + \mu\Omega(R^2 - \beta^2)]^2 + 2\mu(E - \beta k\Omega)(R^2 - \beta^2) - k^2 R^2}\}. \quad (5.5)$$

Com base na condição de contorno $f(\varphi) = f(\varphi + 2\pi)$, podemos escrever $\bar{\lambda} = il$, com $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Assim obtemos

$$E_l = \frac{(l - k\beta)^2}{2\mu(R^2 - \beta^2)} - \Omega(l - \beta k) + \frac{k^2}{2\mu}, \quad (5.6)$$

que são as energias permitidas para uma partícula confinada por um fio cilíndrico, na presença de uma deslocação tipo-hélice, descrita pela distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical em um referencial sob rotação, em termos do número quântico de momento angular l .

Assim como em (4.9), observamos em (5.6) uma redefinição do número quântico de momento angular, onde $l \rightarrow \gamma = l - \beta k$, o que configura um análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959), produzido pela presença do defeito topológico. Além desta contribuição, temos no primeiro termo de (5.6), que o defeito gera um raio efetivo $r_0 = \sqrt{R^2 - \beta^2}$. Vemos então, através deste primeiro termo, que a rotação não altera o raio efetivo. Em contrapartida, constatamos no segundo termo uma nova contribuição nos níveis de energia, no qual há um acoplamento entre a velocidade angular e o número quântico de momento angular efetivo, $\Omega\gamma$, configurando um análogo ao termo de Page-Werner *et al.* (PAGE, 1975; WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979; HEHL; NI, 1990). E o terceiro termo no espectro de energia é referente a energia cinética translacional, proveniente da liberdade de movimento da partícula no eixo z . Apesar da partícula não estar confinada no eixo z , por estarmos estudando fios quânticos, também obtemos estados ligados, pois para estes sistemas os níveis de energia são bidimensionais (NETTO; CHESMAN; FURTADO, 2008; RIDLEY, 2017; RAZEGHI, 2002).

5.1.1 Confinamento por um anel unidimensional

Vamos agora considerar o caso unidimensional, no qual o confinamento é feito por um anel. Assim como fizemos para obter (4.10), restringimos nosso sistema ao plano $z = 0$, tomando $k = 0$, configurando então um confinamento por um anel unidimensional em um referencial em rotação, na presença do defeito. Adotando isto em (5.6), obtemos o seguinte espectro de energia

$$E_l = \frac{l^2}{2\mu(R^2 - \beta^2)} - \Omega l \quad (5.7)$$

em termos do número quântico de momento angular l . Em comparação com o caso do fio cilíndrico (5.6), vemos que para o anel unidimensional não há a presença do número quântico de momento angular efetivo, o que nos diz que não há análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados. Para este resultado observamos também o acoplamento entre a velocidade angular e o número quântico de momento angular, Ωl , como uma nova contribuição as energias permitidas, quando comparado ao caso na ausência de rotação (4.10). Além disto, temos que não há contribuição da rotação para o raio efetivo $r_0 = \sqrt{R^2 - \beta^2}$, uma vez que este se dá pela presença do defeito.

Por fim, em ambos os resultados, (5.6) e (5.7), tomando $\Omega = 0$ recuperamos os resultados obtidos em (4.9) e (4.10), ou seja, para os sistemas na ausência de rotação. Bem como se tomamos $\beta = 0$ e $\Omega = 0$ em (5.7), recuperamos o espectro de energia para uma partícula quântica confinada em um anel unidimensional, na ausência do defeito topológico e da rotação.

5.2 Partícula confinada em uma caixa cilíndrica

Iremos agora investigar a solução para equação (4.15), para uma partícula confinada por uma parede de potencial em um referencial em rotação.

Vimos no capítulo quatro, que o operador Hamiltoniano para uma partícula quântica na presença da distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical é obtido substituindo o operador de Laplace-Beltrami dado em (4.14) na equação (2.24).

Substituindo essas informações em (3.72), conseguimos então expressar a Equação de

Schrödinger independente do tempo em um referencial sob rotação, na presença de uma deslocação tipo-hélice, como sendo

$$E\psi = -\frac{1}{2\mu} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{r}{(r^2 - \beta^2)} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{(r^2 - \beta^2)} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] + i\Omega \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi. \quad (5.8)$$

Observando que $[\hat{H}, \hat{p}_z] = 0$ e $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$, onde $\hat{H}$ é o operador Hamiltoniano que fornece o lado direito de (5.8), podemos escrever uma solução do tipo $\psi(r, \varphi, z) = e^{il\varphi + ikz} R(r)$ para (5.8), assim como fizemos na ausência de rotação em (4.15). Aplicando esta solução, bem como fazendo a mudança de variável $r = \beta \cosh y$ e reparametrizando com (4.20), obtemos a equação radial para nosso sistema como sendo

$$R'' + \frac{1}{x} R' - \frac{1}{x^2} [\bar{\lambda} R + 2Q^2 (R + 2R'')] + R = 0, \quad (5.9)$$

para os parâmetros

$$\begin{aligned} \gamma &= l - \beta k \\ \bar{\lambda} &= \gamma^2 + 2Q^2 \\ Q^2 &= \frac{\beta^2}{4} [2\mu(E + \Omega\gamma) - k^2]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Como já discutimos o parâmetro β é muito pequeno e nos permite desprezar o termos proporcionais a β^2 , o que nos fornece

$$\bar{\lambda} R + 2Q^2 (R + 2R'') \approx \gamma^2 R. \quad (5.11)$$

Logo (5.9) passa a ser escrita como

$$R'' + \frac{l}{x} R' - \frac{\gamma^2}{x^2} R + R = 0. \quad (5.12)$$

Assim como (4.23), (5.12) também é uma equação diferencial de Bessel (ARFKEN, 2007; ABRAMOWITZ; STEGUM, 1965), cuja solução é dada em (4.24). Podemos encontrar a solução deste sistema seguindo o mesmo procedimento feito para a partícula confinada em

uma caixa cilíndrica na ausência de rotação. Utilizando a discussão de (4.24) até (4.26), onde aplicamos as condições devido ao confinamento, expressas em (4.11), obtemos uma solução para (5.12) na forma

$$E_{n,l} = \frac{\Theta_{n,\gamma}^2}{2\mu\beta^2 \cosh^2 y_0} + \frac{k^2}{2\mu} - \Omega\gamma. \quad (5.13)$$

Retomando $r_0 = \beta \cosh y_0$, podemos reescrever (5.12) como

$$E_{n,l} = \frac{\Theta_{n,\gamma}^2}{2\mu r_0^2} + \frac{k^2}{2\mu} - \Omega\gamma, \quad (5.14)$$

lembrando que $\Theta_{n,\gamma}$ dado em (4.27) são os zeros da função de Bessel.

Temos assim em (5.13), o espectro de energia para uma partícula quântica, desconsiderando o spin, confinada por uma caixa cilíndrica, em um referencial sob rotação, na presença de um defeito topológico, definido pela distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical. Os níveis de energia são dados em termos do número quântico de modos radiais n e do número quântico de momento angular l , expresso através de γ , que representa um momento angular efetivo.

Na equação (5.14) podemos observar que a presença do defeito provoca o aparecimento do momento angular efetivo γ , como havíamos discutido no caso para a ausência de rotação, esta redefinição é um análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligado (AHARONOV; BOHM, 1959). Além disto podemos também observar um acoplamento entre a rotação e o número de momento angular no termo $\Omega\gamma$, que é um análogo ao termo de Page-Werner *et al.* (PAGE, 1975; WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979; HEHL; NI, 1990). E fazendo $\Omega = 0$ recuperamos os níveis de energia para a abordagem na ausência de rotação (4.29).

Podemos ainda estender nossa discussão tomando um caso particular. Assim como fizemos na ausência de rotação, quando $x_0 \gg 1$ e o parâmetro $|l|$ é fixo a função de Bessel é conhecida e expressa por (4.30) (BEZERRA, 1997; ARFKEN, 2007; ABRAMOWITZ; STEGUM, 1965). Substituindo esta solução na condição de contorno (4.26), obtemos a solução para a nosso sistema com rotação (5.14) na forma

$$E_{n,l} \approx \frac{\pi^2}{2\mu r_0^2} \left[n + \frac{1}{2}|\gamma| + \frac{3}{4} \right]^2 + \frac{k^2}{2\mu} - \Omega\gamma, \quad (5.15)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ é o número quântico relacionado aos modos radiais e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ é o número quântico do momento angular. Logo, para este caso particular, obtemos um espectro discreto de energia. E neste observamos que o termo γ é uma redefinição do número quântico de momento angular. Com isto concluímos que existe um análogo para o efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959).

Nesta solução particular, também temos o acoplamento da rotação com o número quântico de momento angular efetivo, $\Omega\gamma$ análogo ao termo de Page-Werner *et al.* (PAGE, 1975; WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979; HEHL; NI, 1990). E podemos verificar que tomando $\Omega = 0$ recuperamos os níveis de energia de (4.31).

Por fim, observa-se que tanto em (5.4) quanto em (5.15) tomando $\beta = 0$, obtemos os níveis de energia para uma partícula confinada por uma caixa cilíndrica sob efeito de rotação.

Capítulo 6

Partícula em um meio elástico com uma deslocação tipo-espiral

Nos capítulos anteriores, estudamos sistemas quânticos na presença de uma deslocação tipo-hélice, descrita pela distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical. Outro defeito topológico de nosso interesse é a deslocação tipo-espiral, definida pela distorção de um círculo em uma espiral. Descrito pelo elemento de linha 2.20, este defeito é objeto de estudo em alguns trabalhos (SILVA; Bakke, 2020; Maia; Bakke, 2018; MAIA; BAKKE, 2020).

Com intuito de estudar sistemas compostos por uma partícula quântica em um meio elástico na presença de uma deslocação tipo-espiral, resolveremos a Equação de Schrödinger, de modo a obter os níveis de energia para os sistemas propostos. Além disto discutiremos os efeitos associados as interações entre o meio e a partícula.

Para isto, iremos estruturar este capítulo da seguinte forma: na primeira seção abordaremos sistemas em uma e duas dimensões, com o estudo de uma partícula quântica confinada por um fio cilíndrico e por um anel unidimensional, primeiramente na ausência de rotação seguindo com a análise na presença de rotação nos sistemas; a segunda seção é destinada a estudar o confinamento entre duas superfícies cilíndricas, partindo da Equação de Schrödinger em três dimensões. Em todos os casos usaremos a distorção de uma curva em uma espiral como pano de fundo, também denominada deslocação tipo-espiral.

6.1 Partícula confinada em um fio cilíndrico

O elemento de linha para uma deslocação tipo-espiral foi descrito na equação (2.17), e sua métrica em (2.16). Para estudar uma partícula confinada por um fio cilíndrico, bem como por um anel unidimensional, passamos a considerar um raio fixo em nosso sistema, ou seja, fazendo $r = R$. Com isto em (2.17), obtemos (NETTO; CHESMAN; FURTADO, 2008; TAN; INKSON; SRIVASTAVA, 1994)

$$ds^2 = (\beta^2 + R^2)d\varphi^2 + dz^2, \quad (6.1)$$

onde β é o parâmetro que caracteriza o defeito e está conectado com o vetor de Burger, como discutimos no capítulo dois.

Partindo (6.1) temos que

$$g = |g_{ij}| = R^2 + \beta^2, \quad (6.2)$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2 + \beta^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Com essas informações vamos agora construir os Hamiltonianos que nos permitem estudar os sistemas na presença e na ausência de rotação.

6.1.1 Efeitos associados à topologia do defeito

Vamos explorar primeiramente o confinamento de uma partícula quântica por um fio cilíndrico. Em seguida abordaremos o confinamento por um anel unidimensional na presença de uma deslocação tipo-espiral. Ambas situações considerando um referencial inercial.

6.1.1.1 Fio cilíndrico

Para construir o operador Hamiltoniano para um sistema na presença de uma deslocação tipo-espiral confinada por um fio cilíndrico, vamos substituir (6.2) e (6.3) em (2.24). Com isto obtemos o operador de Laplace-Beltrami na forma (SILVA; Bakke, 2020)

$$\nabla^2 = \frac{1}{(R^2 + \beta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (6.4)$$

Com (6.4) obtemos a equação de Schrödinger para este sistema, como sendo

$$-2\mu E\psi = \left[\frac{1}{(R^2 + \beta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi. \quad (6.5)$$

Verificamos em (6.5) a conservação da componente $\hat{p}_z$ do operador momento linear, nos permitindo escrever a seguinte solução para (6.5)

$$\psi(\varphi, z) = e^{ikz} f(\varphi). \quad (6.6)$$

Substituindo (6.6) em (6.5), obtemos a seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$f''(\varphi) - 2ik\beta f'(\varphi) + [2\mu E - k^2] (R^2 + \beta^2) f(\varphi) = 0, \quad (6.7)$$

cuja solução pode ser escrita como $f(\varphi) = e^{\lambda\psi}$, onde λ é um parâmetro a ser determinado. Fazendo uso desta solução na equação (6.7), obtemos a seguinte equação do segundo grau

$$\lambda^2 + [2\mu E - k^2] (R^2 + \beta^2) = 0. \quad (6.8)$$

Definindo $\tau = 2\mu E - k^2$ e resolvendo (6.8) encontramos que

$$\lambda = \pm i \sqrt{\tau (R^2 + \beta^2)}. \quad (6.9)$$

Uma vez que $f(\varphi)$ obedece a condição de contorno $f(\varphi) = f(\varphi + 2\pi)$, podemos escrever

$\lambda = il$ com $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, o que nos fornece

$$E_l = \frac{k^2}{2\mu} + \frac{l^2}{2\mu(R^2 + \beta^2)}, \quad (6.10)$$

como sendo os níveis de energia para uma partícula quântica confinada por um fio cilíndrico, na presença de uma deslocação tipo-espiral, definida por uma distorção de um círculo em uma espiral.

Com base no obtido em (6.10) temos que o primeiro termo desta equação corresponde a energia cinética translacional, proveniente do movimento livre da partícula na direção z . Apesar da partícula não estar confinada no eixo z , por estarmos estudando fios quânticos, também obtemos estados ligados, pois para estes sistemas os níveis de energia são bidimensionais (NETTO; CHESMAN; FURTADO, 2008; RIDLEY, 2017; RAZEGHI, 2002). E o segundo termo corresponde a energia cinética rotacional em relação ao eixo z . Neste sistema o número quântico l é associado com a componente z do momento angular, onde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Comparado com o resultado obtido para a deslocação tipo-hélice (4.9), temos agora que a presença do defeito não altera o número quântico de momento angular. Isto significa que não há análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados.

Ainda em (6.10), observamos que a contribuição proveniente da presença do defeito topológico em nossa abordagem está em $r_0 = \sqrt{R^2 + \beta^2}$, que pode ser visto como um raio efetivo. Por fim, tomando $\beta = 0$ recuperamos o espectro de energia para uma partícula quântica confinada por um fio cilíndrico na ausência do defeito topológico.

6.1.1.2 Anel unidimensional

Agora vamos considerar o confinamento feito por um anel unidimensional. Esse sistema é descrito restringindo nosso sistema ao plano $z = 0$, tomando $k = 0$. Adotando isto em (6.10), obtemos o seguinte espectro de energia (SILVA; Bakke, 2020)

$$E_l = \frac{l^2}{2\mu(R^2 + \beta^2)} \quad (6.11)$$

em termos do número quântico de momento angular l .

Assim como para o fio cilíndrico (6.10), vemos que o defeito topológico representado pelo parâmetro β gera um raio efetivo $r_0 = \sqrt{R^2 + \beta^2}$, e em comparação com o mesmo sistema para uma deslocação tipo-hélice verificamos que não há alteração do número quântico de momento angular l . Logo não há análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados nesta abordagem.

Por fim, tomando $\beta = 0$ recuperamos os espectros de energia para uma partícula quântica confinada um anel unidimensional na ausência de defeito topológico.

6.1.2 Efeitos associados a topologia do defeito e rotação

Em analogia ao feito no capítulo cinco, onde abordamos o defeito topológico proveniente de uma deslocação tipo-hélice, vamos agora analisar o efeito da rotação quando passamos a considerar uma deslocação tipo-espiral. Vamos estudar o confinamento de uma partícula quântica primeiramente por um fio cilíndrico e em seguida por um anel unidimensional.

Ao considerar uma sistema de referência em rotação, com uma velocidade angular constante $\Omega = \Omega_z$, temos que seu movimento é descrito por (3.72) (ANANDAN; SUZUKI, 2004; BAKKE; NASCIMENTO; FURTADO, 2008; MAIA; BAKKE, 2020). Diferentemente das deslocações tipo-hélice, uma deslocação espiral não altera a componente z do operador de momento angular (MAIA; BAKKE, 2020), sendo este definido por

$$\hat{L}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (6.12)$$

6.1.2.1 Confinamento por um fio cilíndrico

Nessa primeira abordagem estamos em busca de soluções para Equação de Schrödinger, para uma partícula quântica na presença de uma deslocação tipo-espiral, num referencial em rotação, confinada por um fio cilíndrico.

Dado que $\frac{1}{2\mu} \hat{p}^2$ em (3.72) é obtido por (6.4), e substituindo-o juntamente com (6.12) em (3.72) construímos o operador Hamiltoniano do nosso sistema, em rotação, como sendo

$$\hat{H} = -\frac{1}{2\mu} \nabla^2 + i\Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (6.13)$$

Através de (6.13) temos que a Equação de Schrödinger para este sistema é

$$E\psi = -\frac{1}{2\mu} \left[\frac{1}{(R^2 + \beta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi + i\Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi. \quad (6.14)$$

Em busca de uma solução para (6.14) observamos que $[\hat{H}, \hat{p}_z] = 0$, onde $\hat{H}$ é o operador Hamiltoniano dado em (6.13). Isto nos permite escrever uma solução do tipo $\psi(\varphi, z) = e^{ikz} f(\varphi)$ para (6.14), nos fornecendo a seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$f''(\varphi) - 2i\mu\Omega (R^2 + \beta^2) f'(\varphi) + [(2\mu E - k^2) (R^2 + \beta^2)] f(\varphi) = 0. \quad (6.15)$$

Tomando como solução $f(\varphi) = e^{\bar{\lambda}\varphi}$, para (6.15), onde $\bar{\lambda}$ é um parâmetro a ser determinado, e definindo $\tau = 2\mu E - k^2$ encontramos a seguinte equação de segundo grau

$$\bar{\lambda}^2 - 2i\mu\Omega (R^2 + \beta^2) \bar{\lambda} + \tau (R^2 + \beta^2) = 0, \quad (6.16)$$

cuja solução é

$$\bar{\lambda} = i \left\{ \mu\Omega (R^2 + \beta^2) \pm \sqrt{[\mu\Omega (R^2 + \beta^2)]^2 + \tau (R^2 + \beta^2)} \right\}. \quad (6.17)$$

A condição de contorno $f(\varphi) = f(\varphi + 2\pi)$ nos permite escrever $\bar{\lambda} = il$, onde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, nos fornecendo

$$E_l = \frac{l^2}{2\mu (R^2 + \beta^2)} - l\Omega + \frac{k^2}{2\mu}. \quad (6.18)$$

A equação (6.18) nos fornece as energias permitidas para uma partícula quântica confinada por um fio cilíndrico na presença de uma deslocação tipo-espiral, descrita pela distorção de um círculo em uma espiral, em um referencial sob rotação, em termos no número quântico de momento angular l .

Verificamos em (6.18), que a presença do defeito contribui no espectro de energia, com o aparecimento de um raio efetivo $r_0 = \sqrt{R^2 + \beta^2}$ e que a rotação não altera este raio. Além disto, constatamos no segundo termo uma nova contribuição, a qual acopla a rotação com

o número quântico de momento angular $l\Omega$, configurando um análogo ao termo de Page-Werner *et al.* (PAGE, 1975; WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979; HEHL; NI, 1990). E o terceiro termo no espectro de energia é referente a energia cinética translacional, proveniente da liberdade de movimento da partícula no eixo z .

6.1.2.2 Confinamento por um anel unidimensional

Vamos agora considerar o confinamento por um anel unidimensional. Assim como fizemos para obter (6.11), ou seja, restringiremos nosso sistema ao plano $z = 0$, tomando $k = 0$. Adotando esta condição em (6.18), obtemos o seguinte espectro de energia

$$E_l = \frac{l^2}{2\mu(R^2 + \beta^2)} - l\Omega \quad (6.19)$$

em termos do número quântico de momento angular l .

Em comparação com o caso do fio cilíndrico (6.18), vemos que para o anel unidimensional a contribuição do defeito também se dá através do raio, gerando um raio efetivo $r_0 = \sqrt{R^2 + \beta^2}$. Além disto, há o acoplamento da velocidade angular com o número quântico de momento angular, $l\Omega$. Quando comparado ao caso na ausência de rotação (6.11) vemos que há uma nova contribuição nos níveis de energia, isto é um análogo ao termo de Page-Werner *et al.* (PAGE, 1975; WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979; HEHL; NI, 1990). Também verificamos que não há contribuição da rotação para o raio efetivo r_0 .

Por fim, em ambos os resultados, (6.18) e (6.19) em comparação para os mesmos confinamentos na presença de uma deslocação tipo-hélice, (5.6) e (5.7), temos que para a deslocação tipo-espiral não há modificação no número quântico de momento angular. Ou seja, a presença deste defeito não produz um análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959). Além disto, tomando $\Omega = 0$ recuperamos os resultados obtidos em (6.10) e (6.11), ou seja, para os sistemas na ausência de rotação. Bem como, se tomamos $\beta = 0$ e $\Omega = 0$ em (6.19), recuperamos o espectro de energia para uma partícula quântica confinada em um anel unidimensional, na ausência de defeito topológico e de rotação.

6.2 Partícula confinada entre duas superfícies cilíndricas

Até o momento apresentamos a análise de sistemas em uma dimensão (anel quântico) e em duas dimensões (fio cilíndrico), ambos na presença de uma deslocação tipo-espiral. Nesta seção buscamos soluções analíticas da Equação de Schrödinger para uma partícula quântica desconsiderando o spin, confinada entre duas superfícies cilíndricas, na presença de uma deslocação tipo-espiral, definida pela distorção de um círculo em uma espiral (SILVA; Bakke, 2020). Vamos então analisar a Equação de Schrödinger em três dimensões.

Partindo do elemento de linha para a deslocação tipo-espiral definido em (2.17), e fazendo uso de sua métrica (2.16), obtemos

$$g = |g_{ij}| = r^2 \quad (6.20)$$

e

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\beta^2}{r^2} & -\frac{\beta}{r^2} & 0 \\ -\frac{\beta}{r^2} & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Substituindo (6.20) e (6.21) através de (2.24) e (2.25) obtemos o seguinte operador Hamiltoniano

$$\hat{H} = -\frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{\beta^2 + r^2}{r^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{r^2 - \beta^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\beta}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \right) + \frac{\beta}{r^3} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]. \quad (6.22)$$

Com a equação (6.22) temos que a Equação de Schrödinger independente do tempo, para uma partícula quântica em um meio elástico na presença de uma deslocação tipo-espiral

(MAIA; BAKKE, 2019a) é

$$E\psi = -\frac{1}{2\mu} \left(1 + \frac{\beta^2}{r^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3}\right) \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\beta}{\mu r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{2\mu r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{2\mu} \frac{\beta}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (6.23)$$

Uma vez que (6.22) comuta com as componentes dos operadores momento angular orbital $\hat{L}_z$ e momento linear $\hat{p}_z$, podemos propor uma solução para (6.23) do tipo (MAIA; BAKKE, 2019b)

$$\psi(r, \varphi, z) = e^{il\varphi + ikz} \times \exp\left(il \tan^{-1}\left(\frac{r}{\beta}\right)\right) \times f(r), \quad (6.24)$$

onde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e $k = \text{constante}$. Denotando $\tau = 2\mu E - k^2$, ao substituirmos a solução de (6.24) em (6.23) obtemos a seguinte equação radial

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{r^2}\right) f'' + \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3}\right) f' - \frac{l^2}{(r^2 + \beta^2)} f + \tau^2 f = 0. \quad (6.25)$$

Para solucionar (6.25) faremos uma mudança de variável e investigamos se existe na literatura alguma abordagem matemática que nos ajude a resolvê-la. Fazendo então uma mudança de variável $x = \sqrt{r^2 + \beta^2}$, encontramos

$$f'' + \frac{1}{x} f' - \frac{l^2}{x^2} f + \tau^2 f = 0. \quad (6.26)$$

Na literatura temos que (6.26) corresponde a equação diferencial de Bessel (ARFKEN, 2007; ABRAMOWITZ; STEGUM, 1965), já citada anteriormente em (4.24). Cujas soluções gerais são conhecidas e dadas por

$$f(x) = AJ_{|l|}(\tau x) + BN_{|l|}(\tau x) \quad (6.27)$$

onde $J_{|l|}(\tau x)$ e $N_{|l|}(\tau x)$ são as funções de Bessel (WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979) de primeira e segunda ordem, respectivamente. Logo para encontrar a solução do nosso sistema, buscaremos resolver agora (6.26).

Nosso interesse aqui é investigar os efeitos do confinamento por paredes cilíndricas. Para isto, iremos assumir que a partícula está restrita a mover-se entre duas superfícies cilíndricas, representadas através da fixação dos raios (BEZERRA, 1997; BAKKE; FURTADO, 2011). Tomando r_a , para o raio do cilindro interno e r_b , para o raio cilindro externo, ou seja, $r_b > r_a$, temos que $x_a < x < x_b$. Assim nossa variável x passa a ser

$$\begin{aligned} x_a &= \sqrt{r_a^2 + \beta^2} \\ x_b &= \sqrt{r_b^2 + \beta^2}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

O confinamento nos fornece as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} f(x_a) &= 0, \\ f(x_b) &= 0, \end{aligned} \quad (6.29)$$

ou seja, a função de onda radial é nula nas paredes dos cilindros e fora delas. Quando aplicamos as condições de contorno a solução geral (6.27), obtemos

$$J_{|l|}(\tau x_a) N_{|l|}(\tau x_b) - J_{|l|}(\tau x_b) N_{|l|}(\tau x_a) = 0. \quad (6.30)$$

Uma das abordagens na literatura para resolver (3.30) é considerar um caso particular, no qual $\tau x_a \gg 1$ e $\tau x_b \gg 1$, para um l fixo. Desse modo é possível usar a expansão assintótica de Hankel, expressa por (BEZERRA, 1997; ABRAMOWITZ; STEGUM, 1965)

$$\begin{aligned} J_{|l|}(x_i) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi y_i}} \left[\cos\left(x_i - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4l^2-1}{8y_i} \sin\left(x_i - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ N_{|l|}(x_i) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi y_i}} \left[\sin\left(x_i - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4l^2-1}{8x_i} \cos\left(y_i - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right], \end{aligned} \quad (6.31)$$

onde x_i assume os valores dos parâmetros τx_a e τx_b . Substituindo (6.31) em (6.30) conseguimos uma expressão aproximada em termos da energia E , da forma

$$2\mu E - k^2 \approx \frac{n^2 \pi^2}{(x_b - x_a)^2} + \frac{4l^2 - l}{4x_a x_b}. \quad (6.32)$$

Utilizando os respectivos valores de x expressos em (6.28), obtemos

$$E_{n,l} \approx \frac{n^2 \pi^2}{2\mu \left(\sqrt{r_b^2 + \beta^2} - \sqrt{r_a^2 + \beta^2} \right)^2} + \frac{4l^2 - 1}{8\mu \sqrt{(r_b^2 + \beta^2)(r_a^2 + \beta^2)}} + \frac{k^2}{2\mu}. \quad (6.33)$$

Na equação (6.33) temos os níveis de energia para a partícula quântica confinada entre duas superfícies cilíndricas, na presença de uma deslocação espiral em termos dos números quânticos n, l , que são respectivamente, o número quântico de modos radiais, $n = 0, 1, 2, \dots$ e número quântico de momento angular, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Partindo deste resultado podemos observar que o defeito topológico induz o surgimento de raios efetivos $x_a = \sqrt{r_a^2 + \beta^2}$ e $x_b = \sqrt{r_b^2 + \beta^2}$ nos níveis de energia, porém não modifica o número quântico de momento angular l . Ou seja, não há um análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados neste sistema (AHARONOV; BOHM, 1959). Diferentemente do que ocorre quando o defeito topológico é uma deslocação tipo-hélice, com a qual verificou-se que há uma redefinição do número quântico de momento angular (BEZERRA, 1997; MARQUES et al., 2001; NETTO; CHESMAN; FURTADO, 2008).

Temos ainda em (6.33) que o terceiro termo no espectro de energia é referente a energia cinética translacional, proveniente da liberdade de movimento da partícula no eixo z . Por fim, quando tomamos $\beta = 0$, recuperamos os níveis de energia para uma partícula quântica confinada por duas superfícies cilíndricas com paredes impenetráveis na ausência de defeitos topológicos (BEZERRA, 1997; BAKKE; FURTADO, 2011; NETTO; CHESMAN; FURTADO, 2008).

Capítulo 7

Conclusões e perspectivas

Nesta tese estudamos sistemas físicos na presença de defeitos topológicos. Uma vez que os efeitos associados a defeitos na topologia são de interesse de áreas como matéria condensada, gravitação, engenharia de materiais, entre outras, como observa-se nas referências apresentadas ao longo do texto. Para nosso estudo construímos o Hamiltoniano e de posse deste resolvemos a Equação de Schrödinger para cada sistema de interesse, obtendo então os níveis de energia e discutindo os efeitos associados as nossas abordagens. Partindo dos resultados e discussões apresentamos agora nossas conclusões e futuras perspectivas.

Na estruturação da tese trazemos nos capítulos dois e três, uma revisão teórica dos conhecimentos físicos e suportes matemáticos para estruturarmos nossos sistemas. Nos capítulos quatro, cinco e seis, apresentamos, resolvemos e discutimos nossos sistemas, analisando as contribuições provenientes da topologia do defeito a estes.

Os defeitos topológicos abordados em nossas análises foram uma deslocação tipo-hélice (VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005), definida pela distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical e uma deslocação tipo-espiral, definida pela distorção de um círculo em uma espiral (SILVA; BAKKE, ; SILVA; BAKKE, 2019b; SILVA; BAKKE, 2019a). Tendo a primeira maior ênfase em nosso trabalho, uma vez que a segunda é objeto de estudo de outro autor (Maia; Bakke, 2018; MAIA; BAKKE, 2020).

No capítulo quatro, em específico, construímos e resolvemos a equação de Schrödinger para uma partícula quântica numa abordagem não-relativística na presença de um deslocação

tipo-hélice. Esta abordagem foi feita para os seguintes sistemas: confinamento por um fio cilíndrico, confinamento por um anel unidimensional, confinamento em uma caixa cilíndrica, sistema em um Oscilador Harmônico, e na presença de um campo magnético uniforme. A partir dos resultados obtidos nos sistemas, verificamos que em todos há de alguma forma a influência do defeito na topologia, vamos então a seguir explicitar essas contribuições.

O confinamento por um fio cilíndrico nos mostrou que a presença de uma deslocação tipo-hélice trouxe aos níveis de energia duas contribuições relevantes (SILVA; BAKKE,). A primeira está no aparecimento de um raio efetivo, $r_0 = \sqrt{R^2 - \beta^2}$ no termo correspondente a energia cinética rotacional. A segunda também está neste termo, no qual constatamos uma redefinição no número quântico de momento angular l , onde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, que se torna $\gamma = l - \beta k$, um número quântico de momento angular efetivo. Essa alteração nos diz que a presença do defeito gera um efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959), ou seja, a partícula sofre influência do defeito mesmo em regiões onde não há efeito. Após a discussão sobre o fio cilíndrico estendemos nossa análise com um confinamento por anel unidimensional (SILVA; BAKKE,). Isto foi feito restringindo o movimento da partícula ao plano $z = 0$. Nesse caso não foi constatada alteração no número quântico de momento angular l , logo não constatamos análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados. Contudo para este sistema verificamos o aparecimento do raio efetivo $\gamma = l - \beta k$, proveniente na presença do defeito. E por fim, nesses sistemas, ao tomarmos $\beta = 0$, recuperamos os resultados da literatura para esses sistemas na ausência do defeito.

Após o abordar um fio cilíndrico e um anel unidimensional, nosso estudo passou a ser o sistema tridimensional. A primeira análise em três dimensões se deu através do confinamento por uma parede rígida de potencial (SILVA; BAKKE, 2019a), também conhecido como caixa cilíndrica. Neste caso encontramos que o espectro de energia é dado em termos dos zeros das funções de Bessel (ARFKEN, 2007; ABRAMOWITZ; STEGUM, 1965), $\Theta_{n,\gamma}$ e esta por sua vez tem como um de seus parâmetro $\gamma = l - \beta k$. E é através deste parâmetro que identificamos um dos efeitos gerados pela presença do defeito. Mais uma vez verificamos uma redefinição no número quântico de momento angular l , onde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, caracterizando assim, um análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (BAKKE;

FURTADO, 2011). Além deste efeito verificamos também no espectro um raio efetivo proveniente da presença do defeito, sendo definido por $r_0 = \beta \cosh y_0$.

Outro sistema que analisamos foi o efeito do Oscilador Harmônico na presença de uma deslocação tipo-hélice (SILVA; BAKKE; VITORIA, 2019). Assim como nos outros sistemas, neste também constatamos efeitos da topologia do defeito nos níveis de energia, podendo citar duas contribuições provenientes do defeito. Ressaltando, que isto foi possível pois conseguimos soluções analíticas da Equação de Schrödinger. Para este sistema explicitamos como obter as expressões que fornecem o espectro de energia, para cada modo radial n , e deixamos como exemplo o resultado para o número quântico de modo radial $n = 1$. Destacando as contribuições encontradas, temos na primeira delas uma redefinição no número quântico de momento angular l , o qual é representado por um valor efetivo $\gamma = l - \beta k$. Isto nos diz que há um análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959). A segunda contribuição foi constatada em nossa busca pelas soluções polinomiais para a Equação Confluente de Heun. Verificamos que os valores para a frequência angular do Oscilador Harmônico são determinados pelos números quânticos $\{n, l\}$ e por β , que representa o parâmetro do defeito. Assumindo um conjunto de valores discretos, dos quais mostramos como exemplo a expressão para os valores permitidos para a frequência angular do oscilador, bem como a função de onda, associados ao modo radial $n = 1$.

O último sistema que exploramos no capítulo quatro, abrangeu a interação de uma carga pontual numa aproximação não-relativística com um campo magnético uniforme num meio com a deslocação tipo-hélice. Através do espectro encontrado para este sistema, verificamos que este é alterado devido a presença da distorção. Constatamos o aparecimento de um número quântico de momento angular efetivo $\gamma = l - \beta k$, o que podemos definir como o efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959). Além disto, constamos os efeitos da topologia nos níveis de Landau.

No capítulo cinco, estendemos nossa proposta explorando os efeitos provenientes na rotação em sistemas na presença de uma distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical. Abrangendo o confinamento por um fio cilíndrico, por um anel unidimensional e por uma caixa cilíndrica. Nesses sistemas verificamos contribuições da rotação e da topologia do defeito nos espectros de energia obtidos.

Além das contribuições na ausência de rotação, citadas no capítulo quatro, tais como a presença de raio efetivo e análogos ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959), verificamos contribuições da rotação nesses sistemas. Ao estudarmos o fio cilíndrico e a caixa cilíndrica, verificamos um acoplamento entre a velocidade angular e o número quântico de momento angular efetivo γ , caracterizando um análogo ao termo de Page-Werner *et al.* (WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979). Quando passamos para o anel unidimensional, como não há alteração do número quântico de momento angular, identificamos o termo de Page-Werner *et al.* (WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979), ou seja, um acoplamento entre Ω e l . Nestas análises constatamos que apesar da rotação contribuir para os níveis de energia, não é a partir desta que surge uma redefinição no número quântico de momento angular γ .

Queremos enfatizar também que ao compararmos com confinamento por um fio cilíndrico e por um anel unidimensional na ausência de rotação, verificamos que não há influência da rotação no raio efetivo. Esta modificação do raio tem sua origem devido a presença da distorção do meio. E como última observação em relação aos efeitos da rotação, verificamos que no limite onde tomamos a velocidade do referencial $\Omega = 0$, recuperamos os resultados obtidos na ausência de rotação para os mesmos sistemas.

O capítulo seis, foi reservado para a discussão de sistemas nos quais uma partícula quântica numa abordagem não-relativística está em um meio elástico na presença de um deslocamento tipo-espiral (SILVA; Bakke, 2020) nas seguintes condições: confinada em um fio cilíndrico e anel unidimensional, na ausência e na presença de rotação e confinada entre superfícies cilíndricas. E para estes apresentaremos aqui as referentes conclusões.

De modo geral, com os sistemas estudados constatamos que a presença da distorção de uma linha curva em uma espiral vertical não altera o número quântico de momento angular, ou seja, não encontramos análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959) proveniente da deslocamento espiral. Contudo, há influências da topologia nos níveis de energia. Podemos citar que tanto no confinamento por um fio cilíndrico quanto por um anel unidimensional, vemos que a distorção gera uma contribuição no espectro de energia criando um raio efetivo $r_0 = \sqrt{R^2 + \beta^2}$.

Em seguida analisamos os efeitos da rotação nesses sistemas e observamos como efeito

um acoplamento entre a velocidade angular Ω e o número quântico de momento angular. Isto é o conhecido como termo de Page-Werner *et al.* (WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979). Em adicional, verificamos também que não há influência da rotação no raio efetivo, o qual tem apenas contribuição do defeito.

Ainda no que diz respeito a deslocação tipo-espiral, ao realizarmos o confinamento entre superfícies cilíndricas, encontramos no espectro de energia raios efetivos, $x_a = \sqrt{r_a^2 + \beta^2}$ e $x_b = \sqrt{r_b^2 + \beta^2}$, gerados pelo defeito na topologia.

Em resumo, vemos que os defeitos topológicos, distorção de uma linha vertical em uma espiral vertical e distorção de uma linha curva em uma espiral, alteram os espectros de energia dos sistemas quânticos. Verificamos efeitos tais como, modificação do número quântico de momento angular, nos fornecendo o efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959). Além disto verificamos como efeitos de rotação, o acoplamento do número quântico de momento angular e a velocidade angular, ou seja, o termo de Page-Werner *et al.* (WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979), além de alterações nos raios citados.

E estas são as conclusões extraídas com os resultados do nosso trabalho, diante das quais nos deixou possibilidades a serem exploradas. Vamos então expor nossas perspectivas para novos trabalhos.

No desenvolvimento desta tese estudamos sistemas que podem ser explorados nos contextos da teoria quântica de campos, da gravitação e da física da matéria condensada.

Ainda na abordagem não-relativística, temos em aberto a possibilidade de estudar os efeitos da rotação e da topologia de uma deslocação tipo-hélice sobre o Oscilador Harmônico e os efeitos da rotação sobre os níveis de Landau nesta topologia. Bem como estudar o efeito Hall Quântico para este defeito (HOLDER; GRANATO, 1969).

Outras extensões consistem em fazer os limites relativísticos de nossos sistemas. Isto inclui o Oscilador de Dirac (HAMZAVI; IKHDAIR; FALAYE, 2014) e o Oscilador de Klein-Gordon (VITORIA R.L.L. FURTADO, 2016). Com estes sistemas podemos analisar a dinâmica quântica relativística de um campo escalar sujeito a potenciais no espaço-tempo para uma deslocação tipo-hélice. Nos possibilitando também investigar os efeitos associados

a rotação na abordagem relativística para os defeitos estudados.

No contexto da Física da Matéria Condensada temos como perspectiva explorar propriedades termodinâmicas e ópticas (YOU; JOHNSON, 2007; BAHAR; UNGAN, 2020; HOLDER; GRANATO, 1969). Propriedades como calor específico, magnetização e polarização, podem ser analisadas tanto nos sistemas estudados nesta tese quanto nos propostos aqui como perspectivas.

Apêndice A

Equações diferenciais de segunda ordem

Na literatura encontramos métodos de soluções para algumas equações diferenciais de segunda ordem. Estas soluções são úteis para nosso trabalho, pois na perspectiva de solucionar a Equação de Schrödinger em nossos sistemas precisamos resolver as equações diferenciais encontradas. Diante disto, destinamos os apêndices para discutir duas dessas equações, sendo elas a Equação Modificada de Mathieu e a Equação Confluyente de Heun.

A.1 Equação modificada de Mathieu

Este apêndice é destinado a apresentar a Equação Modificada de Mathieu, também conhecida como Equação Radial de Mathieu, bem como um método de solução para esta. Essa abordagem pode ser encontrada nas referências: (ARFKEN, 2007; ABRAMOWITZ; STEGUM, 1965; MCLACHLAN, 1947).

As funções de Mathieu originaram-se a partir da determinação dos modos vibracionais de uma membrana, em coordenadas elípticas. Quando em um problema cilíndrico a condição de contorno se torna elíptica as equações diferenciais de segunda ordem (EDO de segunda ordem) se tornam Equações de Mathieu ou angular e/ou radial.

A Equação Modificada de Mathieu, também conhecida como Equação Radial de

Mathieu, é dada por

$$R''(\xi) + (2q \cos 2\xi - \lambda)R(\xi) = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde λ é chamado de número característico, para λ e q sendo reais.

Sendo ξ, η, z as coordenadas elípticas definidas como $0 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \eta \leq 2\pi$ e $-\infty \leq z < \infty$, um dos conjuntos de soluções para (A.1) é chamado de Função Modificada de Mathieu. Cujas características é a não periodicidade em relação a z .

As Funções Radiais (Modificadas) de Mathieu são definidas como

$$Ce_{2n+p}(\xi, q) = ce_{2n+p}(\eta, q), \quad p = 0, 1; \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{A.2a})$$

$$Se_{2n+p}(\xi, q) = se_{2n+p}(\eta, q), \quad p = 0, 1; \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.2b})$$

e em contraste com a Equação Angular de Mathieu, que trás como característica a periodicidade. A equação radial por sua vez, não é periódica, é oscilatória.

Em problemas físicos em coordenadas elípticas a EDO Radial de Mathieu é análoga a EDO de Bessel em coordenadas cilíndricas.

Com base em sua paridade as soluções de (A.2) se subdividem em funções de Mathieu pares e ímpares, sendo elas:

- para $q > 0$

$$Je_{2n}(\xi, q) = Ce_{2n}(\xi, q), \quad Je_{2n+1}(\xi, q) = Ce_{2n+1}(\xi, q); \quad (\text{A.3a})$$

$$Jo_{2n}(\xi, q) = Se_{2n}(\xi, q), \quad Jo_{2n+1}(\xi, q) = Se_{2n+1}(\xi, q); \quad (\text{A.3b})$$

regular ou da primeira espécie

$$Ne_n(\xi, q) \quad No_n(\xi, q) \quad \text{irregular ou da segunda espécie e} \quad (\text{A.3c})$$

- para $q < 0$

$$Ie_n(\xi, q) \quad Io_n(\xi, q) \quad \text{regular ou da primeira espécie} \quad (\text{A.4a})$$

$$Ke_n(\xi, q) \quad Ko_n(\xi, q) \quad \text{irregular ou da segunda espécie} \quad (\text{A.4b})$$

.

E assim como as equações de Bessel, podemos definir funções de Mathieu correspondentes as funções de Hankel.

Nas referencias citadas podemos encontrar os zeros das funções modificadas de Mathieu, permitindo explora-los de acordo com o problema abordado.

Vale ressaltar que diferentemente da Wquação Angular de Mathieu, que conta com a periodicidade em η , a equação radial possui abordagem matemática menos explorado.

A.2 Equação confluyente de Heun

Uma outra EDO encontrada em nossos sistemas foi a Equação Confluyente de Heun, a qual foi explorada com base nas seguintes referências (SILVA; BAKKE; VITORIA, 2019; RONVEAUX; ARSCOTT, 1995; FIZIEV, 2009; BEZERRA; VIEIRA; COSTA, 2014; BIRKANDAN; HORTACSU, 2017; HORTACSU, 2018).

A equação de Heun é uma equação diferencial de segunda ordem (EDO), com quatro pontos singulares e é descrita em sua forma geral como

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + \left[\frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{x-1} + \frac{\epsilon}{x-f} \right] \frac{dH}{dx} - \frac{\alpha\sigma x - q}{x(x-1)(x-f)} H(x) = 0, \quad (\text{A.5})$$

onde ϵ é um parâmetro definido em termos de outros parâmetros $\epsilon = \alpha + \sigma + 1 - \lambda - \mu$.

Seja a equação diferencial de segunda ordem linear homogênea com coeficientes variáveis

$$b_0(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + b_1(x) \frac{dy(x)}{dx} + b_2(x) y(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} + \mathcal{P}_1(x) \frac{dy}{dx} + \mathcal{P}_2(x) y = 0, \quad (\text{A.6})$$

onde $\mathcal{P}_1(x) = \frac{b_1(x)}{b_0(x)}$ e $\mathcal{P}_2(x) = \frac{b_2(x)}{b_0(x)}$ são ambas funções analíticas em um ponto ordinário x_0 . Se no mínimo uma das funções $\mathcal{P}_1(x)$ e $\mathcal{P}_2(x)$ não é analítica em x_0 , este ponto é considerado singular. Os pontos singulares podem ser de dois tipos, singular regular e singular irregular, e são caracterizados pelas funções

$$\mathcal{Q}_1(x) = (x - x_0) \mathcal{P}_1(x); \quad \mathcal{Q}_2(x) = (x - x_0) \mathcal{P}_2(x), \quad (\text{A.7})$$

respectivamente. Sendo $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ analíticas em x_0 , estas caracterizam um ponto singular; se pelo menos uma não for analítica em x_0 , então é um ponto singular irregular. E dessa forma podem ser calculados os pontos regulares e/ou irregulares.

No caso de $x_0 \rightarrow \infty$, estabelecemos $x = \frac{1}{z}$ na equação (A.6), e esta passa a ser escrita na forma

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \mathcal{P}_1(z) \frac{dy}{dz} + \mathcal{P}_2(z) y = 0. \quad (\text{A.8})$$

Quando (A.5) tem dois pontos singulares regulares é chamada de Equação Confluyente

Heun e é escrita na forma

$$H''(x) + \left[\alpha + \frac{\sigma + 1}{x} + \frac{\gamma + 1}{x - 1} \right] H'(x) + \left[\frac{\mu}{x} + \frac{\nu}{x - 1} \right] H(x) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Chamamos as soluções analíticas para (A.9) de funções de Heun. Observemos nesta três pontos singulares, dois regulares, em $z = 0$ e $z = 1$ e um irregular $z = \infty$. Temos que a solução para (A.9) é escrita como

$$H(x) = H_C(\alpha, \sigma, \gamma, \delta, \eta; x), \quad (\text{A.10})$$

onde μ e ν , são definidos como

$$\mu = \frac{\alpha}{2}(1 + \sigma) - \frac{\sigma}{2}(1 + \gamma) - \frac{\gamma}{2} - \eta \quad (\text{A.11a})$$

$$\nu = \frac{\alpha}{2}(1 + \sigma) + \frac{\sigma}{2}(1 + \gamma) + \frac{\gamma}{2} + \eta + \delta. \quad (\text{A.11b})$$

Em busca de uma solução polinomial para (A.10), faremos uso do método de Frobenius (ARFKEN, 2007; GRIFFITHS, 1994), no qual a solução para (A.9) pode ser escrita como

$$H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (\text{A.12})$$

Substituindo (A.12) em (A.9) e tomando a combinação linear dos termos. obtemos as seguintes relações

$$a_1 = -\frac{\mu}{\sigma + 1} a_0 \quad (\text{A.13a})$$

$$\begin{aligned} a_{k+2} = & \frac{[(k+1)(k+2+\sigma+\gamma-\alpha) - \mu]}{(k+2)(k+2+\sigma)} a_{k+1} \\ & + \frac{[\alpha k + \mu + \nu]}{(k+2)(k+2+\sigma)} a_k, \end{aligned} \quad (\text{A.13b})$$

onde (A.13b) é conhecida como relação de recorrência. Podemos ainda reescrever as relações

(A.13a) e (A.13b) substituindo (A.11) nelas, com isto obtemos

$$a_1 = -\frac{[\alpha(1+\sigma) - \beta(1+\gamma) - \gamma - 2\eta]}{2(\beta+1)}a_0 \quad (\text{A.14a})$$

$$a_{k+2} = -\frac{[2(k+1)(k+2+\sigma+\gamma-\alpha) - \alpha(1+\sigma) + \sigma(1+\gamma) + \gamma + 2\eta]}{2(k+2)(k+2+\sigma)}a_{k+1} \quad (\text{A.14b})$$

Uma forma de definir polinômios confluentes de Heun de grau finito n , para $n = 1, 2, 3, \dots$, é impondo as seguintes condições

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 0 \\ \delta &= -\alpha \left[n + \frac{1}{2}(2 + \sigma + \lambda) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Essas expressões nos permite construir soluções polinomiais para a Equação Confluyente de Heun partindo de seus parâmetros.

Referências Bibliográficas

ABRAMOWITZ, M.; STEGUM, I. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publications Inc, 1965.

AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 115, p. 485–491, 1959.

ANANDAN, J.; SUZUKI, J. *Relativity in Rotating Frames, Fundamental Theories of Physics*. [S.l.]: Springer, Dordrecht., 2004. v. 135.

ARFKEN, G. B. *Física matemática: métodos matematicos para engenharia e física*. 6 th. ed. [S.l.: s.n.], 2007.

ASSIS, A. K. T. *Curso de Eletrodinamica de Weber*. Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP: Instituto de Física GLEB WATAGHIN, 1992.

AURELL, E. Torsion and electron motion in quantum dots with crystal lattice dislocations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 32, n. 4, p. 571–584, 1999.

AYAKO, H. et al. Direct evidence for atomic defects in graphene layers. *Nature*, American Chemical Society, v. 430, p. 870–873, 2004.

AZEVEDO, S. Charged particle with magnetic moment in a space with a screw dislocation. *Physics Letters A*, v. 306, n. 1, p. 21–24, 2002. ISSN 0375-9601.

AZEVEDO, S.; MORAES, F. Topological aharonov-bohm effect around a disclination. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 246, n. 3-4, p. 374–376, 1998.

BAHAR, M. K.; UNGAN, F. Magneto-optical specifications of rosen-morse quantum dot with screw dislocation. *International Journal of Quantum Chemistry*, v. 120, n. 11, p. e26186, 2020.

BAKKE, K.; FURTADO, C. Anandan quantum phase for a neutral particle with fermi-walker reference frame in the cosmic string background. *European Physical Journal C*, v. 69, p. 531–539, 10 2010.

BAKKE, K.; FURTADO, C. The analogue of the aharonov-bohm effect for bound states for neutral particles. *Modern Physics Letters A*, v. 26, n. 18, p. 1331–1341, 2011.

BAKKE, K.; NASCIMENTO, J. R.; FURTADO, C. Geometric phase for a neutral particle in the presence of a topological defect. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 78, p. 064012, 2008.

BAUSCH, R.; SCHMITZ, R.; TURSKI, L. A. Single-particle quantum states in a crystal with topological defects. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 80, p. 2257–2260, Mar 1998.

BEZERRA, V. B. Gravitational analogue of the aharonov-bohm effect in four and three dimensions. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 35, p. 2031–2033, 1987.

BEZERRA, V. B. Gravitational analogs of the aharonov-bohm effect. *Journal of Mathematical Physics*, v. 30, n. 12, p. 2895–2899, 1989.

BEZERRA, V. B. Global effects due to a chiral cone. *Journal of Mathematical Physics*, v. 38, n. 5, p. 2553–2564, 1997.

BEZERRA, V. B.; VIEIRA, H. S.; COSTA, A. A. The Klein-Gordon equation in the spacetime of a charged and rotating black hole. *Class. Quant. Grav.*, v. 31, n. 4, p. 045003, 2014.

BIRKANDAN, T.; HORTACSU, M. Quantum field theory applications of heun type functions. *Reports on Mathematical Physics*, Elsevier BV, v. 79, n. 1, p. 81–87, 2017.

BUENO M. J. ADN FURTADO, C. d. M.; CARVALHO, A. M. Landau levels in graphene layers with topological defects. *The European Physical Journal B*, v. 85, n. 2, 2012.

CALLISTER W. D. AND RETHWISCH, D. *Materials science and engineering: an introduction*. 8 th. ed. [S.l.]: John Wiley, Sons, Inc., 2009.

CHO, Y. M.; PARK, D. H.; HAN, C. G. Gravitational anyon. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 43, p. 1421–1423, 1991.

Dislocations in germanium: Mechanical properties. In: CLAEYS, C.; SIMOEN, E. (Ed.). *Extended Defects in Germanium: Fundamental and Technological Aspects*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 1–63.

CLAUDIO., F.; NASCIMENTO, J.; RIBEIRO, L. Landau quantization of neutral particles in an external field. *Physics Letters A*, v. 358, n. 5, p. 336–338, 2006.

CMENG, F. et al. Screw dislocation driven growth of nanomaterials. *Acc. Chem. Res.*, American Chemical Society, v. 46, p. 1616–1626, 2013.

COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. *Quantum mechanics*. New York, NY: Wiley, 1977. Trans. of : Mécanique quantique. Paris : Hermann, 1973.

CORSON, D.; LORRAIN, F.; LORRAIN, P. *Electromagnetic fields and waves*. 3 th ed.. ed. New York: W.H. Freeman and Company, 1988.

- CUNHA, M. S. et al. Relativistic landau levels in the rotating cosmic string spacetime. v. 76, n. 9, 2016.
- DANTAS, L.; FURTADO, C. Induced electric dipole in a quantum ring. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 377, n. 41, p. 2926–2930, 2013.
- DANTAS, L.; FURTADO, C.; NETTO, A. S. Quantum ring in a rotating frame in the presence of a topological defect. *Physics Letters A*, v. 379, 2014.
- DATTA, S.; BANDYOPADHYAY, S. Aharonov-bohm effect in semiconductor microstructures. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 58, p. 717–720, 1987.
- DAVID, C. W. *The Particle in a Box (and in a Circular Box)*. 2006. Disponível em: https://opencommons.uconn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1013&context=chem_educ.
- DEWITT, B. S. Point transformations in quantum mechanics. 1952.
- DEXTER, D. L.; SEITZ, F. Effects of dislocations on mobilities in semiconductors. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 86, p. 964–965, 1952.
- D’INVERNO, R. A. *Introducing Einstein’s relativity*. [S.l.]: Clarendon Press, 1992.
- FIGIELSKI, T. Dislocations as electrically active centres in semiconductors half a century from the discovery. *Journal of Physics: Condensed Matter*, IOP Publishing, v. 14, n. 48, p. 12665–12672, 2002.
- FIGIELSKI, T. et al. Solid-state aharonov-bohm effect at dislocations in semiconductors. *Philosophical Magazine Letters*, Taylor e Francis, v. 77, n. 4, p. 221–227, 1998.
- FILGUEIRAS, C. et al. Landau quantization, aharonov-bohm effect and two-dimensional pseudoharmonic quantum dot around a screw dislocation. *Physics Letters A*, v. 380, n. 45, p. 3847–3853, 2016.
- FILGUEIRAS, C.; SILVA, E. O. 2deg on a cylindrical shell with a screw dislocation. *Physics Letters A*, v. 379, n. 36, p. 2110–2115, 2015.
- FIZIEV, P. P. Novel relations and new properties of confluent heun’s functions and their derivatives of arbitrary order. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 43, n. 3, 2009.
- FURTADO, C.; BEZERRA, V.; MORAES, F. Quantum scattering by a magnetic flux screw dislocation. *Physics Letters A*, v. 289, n. 3, p. 160–166, 2001.
- FURTADO, C.; MORAES, F. Landau levels in the presence of a screw dislocation. *Europhysics Letters (EPL)*, v. 45, n. 3, p. 279–282, 1999.
- FURTADO, C.; MORAES, F. Harmonic oscillator interacting with conical singularities. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 33, n. 31, p. 5513, 2000.

- FURTADO, C.; RIBEIRO, C. A. de L.; AZEVEDO, S. Aharonov-Bohm effect in the presence of a density of defects. *Phys. Lett. A*, v. 296, p. 171–175, 2002.
- GALLAGHER, C. J. Plastic deformation of germanium and silicon. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 88, p. 721–722, Nov 1952.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics*. 1 th. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1994. New Jersey.
- GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinamica*. 3 ed.. ed. [S.l.]: Pearson Addison Wesley, 2011. Sao Paulo.
- HALLIDAY, R. R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física, volume 3: eletromagnetismo*. 10 ed.. ed. Rio de Janeiro: [s.n.], 2016. Tradução de: Fundamentals of physics, 10th ed.
- HAMZAVI, M.; IKHDAIR, S. M.; FALAYE, B. J. Dirac bound states of anharmonic oscillator in external fields. *Annals of Physics*, v. 341, p. 153–163, 2014.
- HARRIS JONATHAN H., S. M. D. A review of the aharonov-carmi thought experiment concerning the inertial and electromagnetic vector potentials. *Foundations of Physics*, American Physical Society, v. 10, p. 151–162, 1980.
- HEHL, F. W.; NI, W.-T. Inertial effects of a dirac particle. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 42, p. 2045–2048, 1990.
- HISCOCK, W. A. Exact gravitational field of a string. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 31, p. 3288–3290, 1985.
- HOLDER, J.; GRANATO, A. V. Thermodynamic properties of solids containing defects. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 182, p. 729–741, Jun 1969.
- HORTACSU, M. Heun functions and some of their applications in physics. *Advances in High Energy Physics*, Hindawi Limited, v. 2018, p. 1–14, 2018.
- JACKSON, J. D. *Classical eletrodynamics*. [S.l.]: John Wiley, Sons, Inc., 1998. v. 3rd ed.
- JASZEK, R. Carrier scattering by dislocations in semiconductors. *Journal of Materials Science: Materials in Electronics*, 2001 Kluwer Academic Publishers, v. 12, 2001.
- JENSEN, B.; KUCERA, J. On a gravitational aharonov-bohm effect. *Journal of Mathematical Physics*, v. 34, n. 11, p. 4975–4985, 1993.
- JOST, J. . *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. 6 th. ed. [S.l.]: Springer, Berlin, Heidelberg, 2011.
- KATANAIEV, M.; VOLOVICH, I. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity. *Annals of Physics*, v. 216, n. 1, p. 1–28, 1992.
- KATANAIEV, M. O. Geometric theory of defects. *UFN - Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, v. 175, n. 7, p. 705–733, 2005.

- KITTEL, C. *Introduction to Solid State Physics*. 1st ed. ed. Sao Paulo: New York: John Wiley e sons, Inc, 1953.
- KLEINERT, H. *Gauge fields in condensed matter: Gauge fields in solids*. [S.l.]: World Scientific, 1989. v. 2.
- KRYLOW, J.; AULEYTNER, J. Electric properties of dislocations in n-type germanium. *physica status solidi (b)*, v. 32, n. 2, p. 581–588, 1969.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory)*. 3th. ed. [S.l.]: Pergamon Press, 1977. v. 3.
- LANDAU L. D., L. E. M. *Mechanics - Couerse of theoretical physics*. 5 th. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1976. v. 1.
- LINET, B. The static metrics with cylindrical symmetry describing a model of cosmic strings. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 17, n. 11, p. 1109–1115, 1985.
- LOGAN, R. A.; PEARSON, G. L.; KLEINMAN, D. A. Anisotropic mobilities in plastically deformed germanium. *Journal of Applied Physics*, v. 30, n. 6, p. 885–895, 1959.
- LOSS, D.; GOLDBART, P.; BALATSKY, A. V. Berry's phase and persistent charge and spin currents in textured mesoscopic rings. *Phys. Rev. Lett.*, v. 65, p. 1655–1658, 1990.
- MACHADO, K. D. *Teoria do eletromagnetismo*. Ponta Grossa-Parana: Editora UEPG - Campus Universitario Uvaranas, 2000. v. 1.
- Maia, A.; Bakke, K. Harmonic oscillator in an elastic medium with a spiral dislocation. *Physica B Condensed Matter*, 2018.
- MAIA, A.; BAKKE, K. Effects of rotation on the landau levels in an elastic medium with a spiral dislocation. *Annals of Physics*, v. 419, 2020.
- MAIA, A. V. D. M. *Oscilador Harmônico num meio Elastico com uma Deslocacao Espiral*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraiba, 2018.
- MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. On an electron in an elastic medium with a spiral dislocation. *International Journal of Modern Physics A*, v. 34, n. 27, 2019.
- MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. Topological and rotating effects on the dirac field in the spiral dislocation spacetime. *The European Physical Journal C*, v. 79, n. 7, 2019.
- MALVERN, L. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1969. Series in engineering of the physical sciences.
- MARQUES, G. d. A. et al. Landau levels in the presence of topological defects. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 34, n. 30, p. 5945–5954, 2001.
- MCLACHLAN, N. *Theory and applications of Mathieu functions*. Oxford: Clarendon Press, 1947.

- MELO, J. L. d. *Quantizacao de Landau para quadrupolo eletrico*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba-UFPB, João Pessoa, 2010.
- MERLIN, R. Rotational anomalies of mesoscopic rings. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 181, n. 5, p. 421–423, 1993.
- MERZBACHER, E. *Quantum mechanics*. 3 th. ed. New York, NY: John Wiley, Sons, Inc., 1998. ISSN 0-471-88702-1.
- MORIN, S. A.; JIN, S. Screw dislocation-driven epitaxial solution growth of zno nanowires seeded by dislocations in gan substrates. *Nano Lett.*, American Chemical Society, v. 10, p. 3459–3463, 2010.
- MULER-KIRSTENH, J. *Introduction to quantum mechanics: Schrodinger equation and path integral*. Singapore: Word Scientific,, 2006.
- MUNIZ, C.; BEZERRA, V.; CUNHA, M. Landau quantization in the spinning cosmic string spacetime. *Annals of Physics*, v. 350, p. 105–111, 07 2014.
- NETO, J. B. *Mecanica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana*. 1th. ed. Sao Paulo: Livraria da fisica, 2004.
- NETTO, A. L. S.; FURTADO, C. Elastic landau levels. *Journal of Physics: Condensed Matter*, v. 20, n. 12, p. 125209, 2008.
- NETTO, A. S.; CHESMAN, C.; FURTADO, C. Influence of topology in a quantum ring. *Physics Letters A*, v. 372, n. 21, p. 3894–3897, 2008.
- OLIVEIRA, R. R. S. Topological and noninertial effects in an aharonov-bohm ring. *General Relativity and Gravitation*, v. 51, n. 9, p. 120, 2019.
- PAGE, L. A. Effect of earth's rotation in neutron interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 35, p. 543–543, Aug 1975.
- PINTO, F. Rydberg atoms in curved space-time. *Phys. Rev. Lett.*, v. 70, p. 3839–3843, 1993.
- PRANGE, R. E.; (EDS.), G. S. *The Quantum Hall Effect*. New York: Springer-Verlag, 1990.
- PUNTIGAM, R. A.; SOLENG, H. H. Volterra distortions, spinning strings, and cosmic defects. *Classical and Quantum Gravity*, v. 14, n. 5, 1997.
- RAZEGHI, M. *Fundamentals of solid state engineering*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, New York, 2002.
- REIF, F. *Statistical Thermal Physics*. 1st ed. ed. Sao Paulo: Tokyo: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1965.
- RIDLEY, B. K. *Hybrid phonons in nanostructures*. [S.l.]: Oxford University Press, 2017. v. 20.

RONVEAUX, A.; ARSCOTT, F. M. *Heun's differential equations*. [S.l.]: Oxford University Press, 1995.

SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017.

SHOCKLEY, W. Some predicted effects of temperature gradients on diffusion in crystals. *Phys. Rev.*, v. 91, p. 1563–1564, 1953.

SILVA, J. E. B. D. *NIVEIS DE LANDAU-CORIOLIS*. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA, 2013.

SILVA, W. C. F. *Efeitos da rotacao e campo magnetico em uma particula quantica confinada a superficie de um toro*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2017.

SILVA, W. C. F.; BAKKE, K.; VITORIA, R. L. L. Non-relativistic quantum effects on the harmonic oscillator in a spacetime with a distortion of a vertical line into a vertical spiral. *The European Physical Journal C*, v. 79, n. 8, 2019.

SILVA, W. C. F. da; BAKKE, K. Quantum aspects of a quantum particle in a cylindrical wire in the presence of a screw dislocation.

SILVA, W. C. F. da; BAKKE, K. Aharonov–Bohm-type effect in the background of a distortion of a vertical line into a vertical spiral. *Eur. Phys. J. C*, v. 79, n. 7, p. 559, 2019.

SILVA, W. C. F. da; BAKKE, K. Non-relativistic effects on the interaction of a point charge with a uniform magnetic field in the distortion of a vertical line into a vertical spiral spacetime. *Class. Quant. Grav.*, v. 36, n. 23, p. 235002, 2019.

SILVA, W. da; Bakke, K. Topological effects of a spiral dislocation on quantum rings. *Annals of Physics*, 2020.

SOHEIBI, N. et al. Screw dislocation and external fields effects on the Kratzer pseudodot. *The European Physical Journal B*, v. 90, n. 11, p. 212, 2017.

SOHEIBI, N. et al. Screw dislocation and external fields effects on the kratzer pseudodot. *The European Physical Journal B*, Hindawi Limited, v. 90, 2017.

SONG, J.; BIERMAN, M. J.; MORIN, S. A. A new twist on nanowire formation: Screw-dislocation-driven growth of nanowires and nanotubes. *J. Phys. Chem. Lett.*, American Chemical Society, v. 1, p. 1472–1480, 2010.

SOUZA, M. A. M.; BAZEIA L. LOSANO, L.; MENEZES, R. Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descricao analitica para defeitos topologicos. *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, v. 6, n. 1, 2012.

SYMOM, K. R. *Mecanica*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1996.

TAN, W.; INKSON, J. C.; SRIVASTAVA, G. P. A microscopic study of landau level states in quantum wires. *Semiconductor Science and Technology*, v. 9, p. 1305–1315, 1994.

THORNTON STEPHEN T., M. J. B. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2012. (13:978-0-495-55610-7).

TIPLER PAUL. A., M. G. *Física para cientistas e engenheiros volume 2: eletricidade e magnetismo; ótica*. 5 ed.. ed. Rio de Janeiro: [s.n.], 2006. v. 2. Tradução de: Physics for scientists and engineers, 5th ed.

TONOMURA, A. et al. Evidence for aharonov-bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 56, p. 792–795, 1986.

TSAI, C.-H.; NEILSON, D. New quantum interference effect in rotating systems. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 37, p. 619–621, 1988.

VALANIS, K. C.; PANOSKALTSIS, V. P. Material metric, connectivity and dislocations in continua. v. 175, p. 77–103, 2005.

VILENKIN, A. Cosmic strings and domain walls. *Physics Reports*, v. 121, n. 5, p. 263–315, 1985.

VITORIA R.L.L. FURTADO, C. B. K. On a relativistic particle and a relativistic position-dependent mass particle subject to the klein-gordon oscillator and the coulomb potential. *Annals of Physics*, v. 370, p. 128–136, New York 2016.

VOLTERRA, V. Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Elsevier, v. 3e série, 24, p. 401–517, 1907.

WERNER, S. A.; STAUDENMANN, J. L.; COLELLA, R. Effect of earth's rotation on the quantum mechanical phase of the neutron. *Phys. Rev. Lett.*, v. 42, p. 1103–1106, 1979.

WU, C. H.; MAHLER, G. Quantum network theory of transport with application to the generalized aharonov-bohm effect in metals and semiconductors. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 43, p. 5012–5023, 1991.

YOU, J. H.; JOHNSON, H. T. Effect of screw dislocation density on optical properties in n-type wurtzite gan. *Journal of Applied Physics*, v. 101, n. 2, p. 023516, 2007.