



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

# **Testes de Modificações da Gravitação em Curtas Distâncias e a Interferometria de Nêutrons**

**Jesriel Matias da Rocha**

Dissertação de Mestrado

JOÃO PESSOA

- 2021 -



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## **Testes de Modificações da Gravitação em Curtas Distâncias e a Interferometria de Nêutrons**

**Jesriel Matias da Rocha**

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia, a apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

JOÃO PESSOA

- 2021 -

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

R672t Rocha, Jesriel Matias da.

Testes de modificações da gravitação em curtas distâncias e a interferometria de nêutrons / Jesriel Matias da Rocha. - João Pessoa, 2021.  
146 f. : il.

Orientação: Fábio Leal de Melo Dahia.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Dimensões extras. 3. Branas. 4. Modificações da gravidade. 5. Vínculos interferométricos. I. Dahia, Fábio Leal de Melo. II. Título.

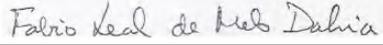
UFPB/BC

CDU 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Dissertação de **Mestrado** do aluno **Jesriel Matias da Rocha**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

1 Aos vinte e seis dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e um, às 10:00, reuniram-se,  
2 se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao  
3 grau de Mestre em Física na área de Gravitação e Cosmologia, **Jesriel Matias da Rocha**. A  
4 comissão examinadora composta pelos professores doutores: Fábio Leal de Melo Dahia  
5 (DF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Carlos Augusto Romero Filho  
6 (DF/UFPB) e Victor Ignácio Afonso (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Fábio Leal  
7 de Melo Dahia comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra o  
8 candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação  
9 intitulado “*Testes de modificações da gravitação em curtas distâncias e a interferometria de*  
10 *nêutrons*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora que emitiu  
11 o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir  
12 o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu, José Sérgio  
13 Trindade Silva, lavrei esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca  
14 Examinadora. João Pessoa, **26 de fevereiro de 2021**.

15

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia	
<i>Orientador - UFPB</i>	
Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho	
<i>UFPB</i>	
Prof. Dr. Victor Ignácio Afonso	
<i>UFCG</i>	

16 Link da reunião: [meet.google.com/xuw-ascp-dnb](https://meet.google.com/xuw-ascp-dnb)

*Dedico à Talita Rocha.*

# *Agradecimentos*

Em primeiro lugar agradeço ao meu Deus, o Todo-poderoso, Deus de Israel, que com sua infinita misericórdia me trouxe até aqui. A ele rendo todo o meu louvor.

Agradeço à minha linda esposa, a qual tem estado ao meu lado nos últimos 6 anos. Sem seu auxílio, carinho, sabedoria e conforto não saberia como enfrentar muitos momentos difíceis que passei na minha vida. Sou grato à minha família, em especial aos meus pais que, desde cedo me incentivaram a conhecer a ciência e a me debruçar nos livros. Por eles tenho total admiração. Agradeço também aos meus tios Moisés e Marineide, que durante toda a minha graduação e parte do Mestrado me receberam em sua casa para passar a semana na capital. Foi um ato de amor que não esquecerei.

Também sou muito grato ao meu orientador, Prof. Fábio Dahia. É simplesmente uma inspiração para mim. Com certeza as nossas discussões, sua forma criativamente elucidativa de passar conhecimento e o exemplo de físico que se tornou para mim, ficarão para sempre em minha memória.

Dessa feita, outros professores também marcaram a minha jornada acadêmica. Agradeço ao Professor Joel que sempre inspira seus alunos, agradeço por toda a ajuda que me deu. Agradeço ao Professor Carlos Romero que sempre bem humorado ensinava de uma forma muito didática, também gostaria de citar os professores Gabriel, Sérgio, Edmundo, entre outros. Quero também agradecer ao Prof. Dr. Adiel da Silva Lemos, o qual me ajudou muito para que eu conseguisse finalizar essa dissertação.

Agradeço aos meus amigos do Departamento da Física, Fabiano, Mauro, Matheus, Willames, Jabes, Jefferson e Emanuel pelas conversas riquíssimas sobre física e o apoio mútuo que temos uns com os outros.

Finalizo agradecendo aos demais amigos pela valiosa parceria.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

# *Resumo*

Com o advento das teorias de branas, houve uma renovação no interesse em estudar dimensões extras, em especial, devido à implicação de que a gravitação é amplificada em domínios de curtas distâncias nesses cenários. Motivados por essa previsão, muitos experimentos foram realizados a fim de testar tais modificações na gravidade em escalas de comprimento cada vez menores. Entre esses experimentos destacamos a interferometria de nêutrons, um dos temas centrais do nosso trabalho.

Nos experimentos de interferometria de nêutrons, os efeitos das dimensões extras se manifestariam através da interação gravitacional entre o nêutron e o meio material que ele atravessa no interior do interferômetro. Porém, em modelos de branas sem espessura o potencial gravitacional interno produzido por uma fonte extensa, que descreveria essa interação, não pode ser calculado, uma vez que ele diverge.

Diante dessa limitação, recorreremos ao modelo de branas com espessura. Nesse modelo é possível determinar uma quantidade muito relevante nesse tipo de problema, o comprimento de espalhamento direto do nêutron, com o qual podemos identificar qual quantidade física desse modelo poderá ser vinculada pela interferometria de nêutrons.

Como veremos, o comprimento de espalhamento direto obtido nesse novo cenário é dependente do modelo nuclear. Uma maneira de evitarmos essa dependência é considerar experimentos interferométricos nos quais a fonte que provoca o deslocamento da fase do nêutron é um campo elétrico, como no teste do efeito Aharonov-Casher (AC).

Diferentemente do que estabelece a teoria newtoniana, segundo a qual a massa de repouso da matéria é o que gera o campo gravitacional, no caso do experimento AC, seriam a própria energia do campo elétrico e sua pressão, as origens do campo gravitacional. Dessa forma, como a fonte que gera o desvio na fase de onda do nêutron é não-bariônica e relativística, argumentamos que esse experimento pode ser visto como testes do comportamento de curto alcance dos parâmetros pós-newtonianos que medem quanta gravidade é produzida pela energia interna e pela pressão, de acordo com o

formalismo PPN.

**Palavras-chave:** dimensões extras, branas, modificações da gravidade, vínculos interferométricos.

# *Abstract*

The advent of braneworld theories has renewed the interest in studying extra dimensions, in particular, due to the implication that gravitation is amplified in short distance domains in these scenarios. Motivated by this prediction, many experiments were carried out in order to test such modifications in gravity on ever smaller length scales. Among these experiments, we highlight neutron interferometry, one of the central themes of our work.

In neutron interferometry experiments, the effects of the extra dimensions would manifest themselves through the gravitational interaction between the neutron and the material medium the particle passes through inside the interferometer. However, in zero-thick branes models the internal gravitational potential produced by an extended source, which would describe this interaction, cannot be calculated, since it diverges.

In view of this limitation, we consider this question in the context of a thick brane scenario. In this model, it is possible to determine a very relevant quantity in this type of problem, the direct scattering length of the neutron, with which we can identify which physical quantity of this model can be constrained by neutron interferometry.

As we will see, the length of direct scattering obtained in this new scenario depends on the nuclear model. One way to avoid this dependency is to consider interferometric experiments in which the source that causes the neutron phase shift is an electric field, as in the Aharonov-Casher (AC) effect test.

Contrary to what Newtonian theory establishes, that the resting mass of matter generates the gravitational field, in the case of the AC experiment, the energy of the electric field and its pressure would be the origins of the gravitational field. Thus, as the source that generates the deviation in the neutron wave phase is non-baryonic and relativistic, we argue that this experiment can be seen a test of the short-range behavior of post-Newtonian parameters that measure how much gravity is produced by internal energy and pressure, according to the PPN formalism.

**Keywords:** extra dimensions, modifications of gravity, braneworlds, interferometric bonds.

# Lista de Figuras

2.1	Dimensão extra no modelo de K-K. As quatro dimensões espaciais formam um cilindro onde as três dimensões usuais $(x^1, x^2, x^3)$ são infinitas (não compactas) e a 4ª dimensão espacial ( $z$ ) é um círculo de raio $R$ . Figura retirada da referência [32]. . . . .	12
2.2	Torre de Kaluza-Klein. Figura retirada de [33]. . . . .	15
2.3	Potencial escalar que fornece a solução do tipo parede de domínio. Figura retirada de [32]. . . . .	18
2.4	Solução do tipo parede de domínio. Figura retirada de [32]. . . . .	19
2.5	Densidade de energia da brana localizada em $z = 0$ . Figura retirada de [32]. . . . .	21
2.6	Espectro de massa dos Férmions presos na brana. O hiato entre o modo zero e os modos contínuos é proporcional a $h\nu$ . A parte contínua tem início em $m_5 = h\nu$ . Figura retirada da referência [39]. . . . .	26
2.7	Na figura da esquerda temos a representação de uma dimensão extra compacta. Já na figura da direita, o cilindro é representado por um espaço “aberto” com as identificações topológicas. Figura retirada da referência [32]. . . . .	30
2.8	Superfície Gaussiana em torno da linha de imagens topológicas. Figura adaptada de [43]. . . . .	31
2.9	Representação de um potencial gerado por uma massa $M$ em um espaço extra dimensional. O eixo vertical indica a direção da dimensão extra. . . . .	34
2.10	Representação da influência de uma imagem topológica sobre um ponto num espaço extra dimensional. . . . .	35

2.11 Simetria Orbifold. Adaptado de Gabella <i>et al</i> [8]. . . . .	45
2.12 Figura esquemática mostrando as duas branas, oculta e visível, separadas por uma distância $\pi R$ ao longo da dimensão extra. Adaptada de Gabella <i>et al</i> [8]. . . . .	47
2.13 Gráfico do fator de dobra positivo e negativo em função da coordenada da dimensão extra. Adaptado de [48]. . . . .	48
2.14 Gráfico do fator de dobra em função da coordenada da dimensão extra com os sinais ajustados para a compactação. Adaptado de [48]. . . . .	50
2.15 Funções de Bessel. Figura retirada da referência [43]. . . . .	58
2.16 Dimensão extra no modelo RSII. Figura retirada de [43]. . . . .	60
3.1 Desenho esquemático do experimento de curto alcance Eöt-Wash, composto por um pêndulo de torção e uma base atrativa giratória. A separação vertical entre a fonte e o detector não está em escala e a blindagem não é mostrada. Figura retirada de [12]. . . . .	65
3.2 Esquema do segundo experimento realizado pelo grupo Eöt-Wash. Os quatro espelhos planos retangulares, abaixo das três esferas, foram usados para o monitoramento da torção. Figura retirada da referência [14]. . . . .	66
3.3 Limites às violações de Yukawa para a Lei da Gravitação do inverso do quadrado. As linhas rotuladas por Eöt-Wash 2004, Eöt-Wash 2006, Irvine, Colorado e Stanford mostram limites experimentais obtidos por esses respectivos grupos. A região acima das linhas sólidas apresenta limites sobre violações do tipo Yukawa para o potencial gravitacional e descarta quaisquer desvios na Lei do inverso do quadrado. Figura retirada de [15]. . . . .	67
3.4 Vínculos impostos sobre os parâmetros de Yukawa utilizando o Efeito Casimir. Tabela retirada da referência [20]. . . . .	70

3.5	Limites para os desvios do potencial newtoniano originados da espectroscopia do átomo de hidrogênio na transição dos estados $1S - 3S$ comparados com outros limites existentes para os átomos $dd\mu^+$ , $\bar{p}He^+$ e $HD^+$ . Figura obtida da referência [60]. . . . .	73
3.6	Comparação dos limites espectroscópicos para os parâmetros de Yukawa vindos da frequência de transição $1S - 3S$ (linha pontilhada) com limites empíricos determinados por outros fenômenos. Figura retirada da referência [60]. . . . .	74
3.7	Representação de um espalhamento duplo, onde um dos feixes de elétrons não polarizados é inicialmente espalhado por núcleos com alto número atômico $Z$ em uma folha-alvo. Figura retirada de [20]. . . . .	75
3.8	Limites para o parâmetro $(\frac{\alpha}{2} + \tilde{\alpha})$ . A linha pontilhada é extraída da análise da influência do acoplamento spin-órbita gravitacional para a separação dos estados $2P_{1/2}$ e $2P_{3/2}$ do Hidrogênio. Figura retirada da referência [60]. . . . .	79
3.9	Vínculos inferiores sobre a massa de Planck $M_D$ em função de $\sigma$ . Figura retirada de [69]. . . . .	81
3.10	Vínculos superiores sobre o raio da dimensão extra $R$ em função de $\sigma$ . Figura retirada da referência [69]. . . . .	82
4.1	Diagrama esquemático de um interferômetro de Nêutrons e detectores de $^3He$ . Figura retirada da referência [26]. . . . .	84
4.2	Representações do interferômetro de nêutrons inclinado na direção do feixe incidente. Na figura da direita fica mais explícita a dependência do ângulo $\phi$ em termos dos comprimentos $H$ e $H_0$ . . . . .	85
4.3	Esquema geral de um interferômetro. Figura retirada da referência [74].	85

4.4	Esquema de um interferômetro de cristal perfeito de silício. Figura retirada de [71]. . . . .	89
4.5	A diferença de contagem dos nêutrons, $I_0 - I_H$ , como função do ângulo de rotação do interferômetro. Figura retirada de [26]. . . . .	90
4.6	Esboço de um interferômetro de cristal perfeito monolítico. Uma diferença de caminho óptico é obtida girando uma placa plana de alumínio. Figura retirada da referência [71]. . . . .	92
4.7	Vínculos sobre os parâmetros de Yukawa. A linha rotulada por (1) denota os vínculos obtidos por Nesvizhevsky e Protasov [25] os quais usaram nêutrons ultra frios. A linha (2) representa os vínculos obtidos por Zimmer e Kaiser [81] na interação nêutron-elétron. A linha (3) vem da análise de Adelberger [9] com vários experimentos. A linha (4) vem do método das duas placas explicado nessa seção e a linha (5) advêm do método da difração, também abordado nessa seção. Figura retirada da referência [24]. . . . .	93
5.1	Vínculos da Interferometria de Nêutrons (NI, na sigla em inglês) sobre o parâmetro de Yukawa, $\alpha$ , relacionado com modificações do parâmetro pós-newtoniano $\gamma$ , em comparação aos limites obtidos pelo MTV-G e os limites espectroscópicos. . . . .	112

# Conteúdo

## Lista de Figuras

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão Teórica</b>	<b>7</b>
2.1	A Teoria de Kaluza Klein	7
2.2	A Condição Cilíndrica	9
2.3	Mecanismo de Compactação de Klein	11
2.3.1	Topologia de um Círculo ( $S^1$ )	11
2.3.2	Escala Pequena	15
2.4	Modelo ADD	16
2.4.1	Localização da Matéria	17
2.4.1.1	Confinamento da Matéria	17
2.4.1.2	Densidade de Energia na Brana	20
2.4.1.3	Localização de Férmions	21
2.4.2	Potencial Gravitacional em Dimensões Extras	26
2.4.3	Potencial Gravitacional Em Um Espaço Com Uma Dimensão Extra Compacta	29
2.4.4	Compactação Toroidal	34
2.4.5	Cálculo das Correções Para o Potencial Devido as Dimensões Extras	38
2.4.6	Gravitação e o comprimento de Planck	41

2.5	Cenário de Branas	44
2.5.1	Modelo Randall-Sundrum do Tipo I (RSI)	44
2.5.1.1	Linearização da Gravidade na Brana	51
2.5.1.2	Espectro de Massa dos Grávitons	54
2.5.2	Modelo Randall-Sundrum do Tipo II	59
<b>3</b>	<b>Testes Experimentais da Gravitação em Curtas Distâncias</b>	<b>62</b>
3.1	Parametrização	63
3.2	Balança de torção: Teste da Lei do inverso do quadrado	64
3.2.1	O experimento de Eöt-Wash 2004	64
3.2.2	O experimento de Eöt-Wash 2006	66
3.3	Vínculos do Efeito Casimir	68
3.4	Vínculos Espectroscópicos	70
3.4.1	Frequência de Transição $1S - 3S$ do Hidrogênio	71
3.4.2	Acoplamento Spin-Órbita	75
3.4.3	Frequência de Transição $1S - 2S$ do Hidrogênio	79
<b>4</b>	<b>A Interferometria de Nêutrons</b>	<b>83</b>
4.1	O Experimento COW	83
4.2	Vínculos obtidos da interferometria dos nêutrons	91
<b>5</b>	<b>Novos Vínculos Sobre Modificações da Gravitação Impostos Pela Interferometria de Nêutrons</b>	<b>96</b>
5.1	Potencial Interno de uma Fonte Extensa no Cenário de Brana Fina	99

5.2 Fonte Bariônica . . . . .	101
5.3 Fonte Não-Bariônica . . . . .	105
5.4 Vínculos da Interferometria de Nêutrons . . . . .	108
5.5 Potenciais Pós-Newtonianos . . . . .	110
<b>6 Conclusões</b>	<b>113</b>
Apêndice A . . . . .	115
Volumes em dimensões extras . . . . .	115
Apêndice B . . . . .	119
Fórmula do Somatório de Poisson . . . . .	119
Apêndice C . . . . .	121
Cálculo do Potencial Gravitacional Anômalo no Interior de um Capacitor	121

# 1 Introdução

A busca dos físicos pela “beleza”, pelo “simples”, pela explicação da natureza da forma mais bela remonta de alguns séculos. Gigantes da física tomaram para si este pensamento que tornou-se ainda mais disseminado. O próprio Newton fala [1] “(...) and whence arises all that Order and Beauty which we see in the World?”<sup>1</sup> De Newton, Maxwell, Einstein, Dirac, entre outros, o que vemos é a busca incessante por teorias e modelos físicos que expliquem a natureza da melhor e mais elegante forma possível. Nesse caminho, o já citado Albert Einstein, em sua Teoria da Relatividade Especial, nos presenteou com a ideia de que tempo e espaço não poderiam ser vistas como conceitos separados, mas como um palco onde todas as coisas no universo estariam. Dez anos depois, Einstein conclui sua Teoria Geral da Relatividade mostrando uma subversão no conceito que tínhamos até então sobre o que era a gravidade. Após esse feito, como Maxwell que unificou fenômenos que pareciam desconexos, a saber, a eletricidade com o magnetismo, Einstein tentou unificar todas as interações em uma só teoria. Ele almejava que pudesse unificar a recém nascida Teoria Geral da Relatividade com o Eletromagnetismo de Maxwell. Essa teoria, que se tornou sua busca final, mostrou-se mais tortuosa do que se esperava. Foi durante esse período que Kaluza [2] propõe o que viria a ser chamado de “Milagre de Kaluza”. Em seu artigo que completa 100 anos nesse ano de 2021, Kaluza demonstrou que ao adicionar um dimensão espacial a mais naquele cenário 4-dimensional que Einstein ajudou a estabelecer (além da condição cilíndrica), é possível unificar o Eletromagnetismo com a Teoria da Relatividade Geral em uma única teoria [2]. Com esse feito, nasce uma teoria de dimensões extras.

Alguns anos após a publicação de Kaluza, Klein contribuiu com alguns refinamentos [3], propondo a ideia de compactação da dimensão extra para tornar a teoria de Kaluza fenomenologicamente consistente. Nesse cenário pentadimensional que Klein idealizou, a dimensão extra possuiria um comprimento na escala de Planck. Dessa forma o caráter aparentemente quadridimensional do nosso universo, estaria justifi-

---

<sup>1</sup>“(...) e de onde surge toda aquela Ordem e Beleza que vemos no Mundo?” Tradução livre.

cado [3]. Após isso, teorias inspiradas na teoria de Kaluza-Klein emergem. Em 1998 o modelo que viria a ser conhecido como *Modelo ADD* [4] surge, mas agora com uma proposta mais interessante do ponto de vista fenomenológico. Nesse modelo, ao contrário do concebido por Kaluza e Klein, o Modelo ADD trazia uma nova escala de comprimento para o raio de compactação. Agora, o raio de compactação poderia ser muito maior, alcançando a escala submilimétrica [4]. Com isso, o Modelo ADD recebeu uma atenção expressiva por parte da comunidade científica. Embora o Modelo tenha trazido essa nova escala de compactação, ele surge com o objetivo de resolver o chamado *Problema da Hierarquia* que, de maneira sucinta, decorre do fato de observarmos uma enorme diferença entre a força gravitacional e as demais forças. É comum para demonstrar o quão fraca é a gravidade em comparação com as outras forças, o exemplo de um ímã suspenso por uma pessoa conectado a um outro ímã (por exemplo) por meio do campo magnético suspensos a uma altura do solo. Nesse exemplo o campo magnético que conecta os dois ímãs consegue, pasmem, vencer o campo gravitacional gerado pelo planeta Terra. A proposta do modelo ADD é que a gravidade, diferentemente das outras interações escaparia para a outra dimensão. Com isso, ocorreria um efeito de diluição da força gravitacional, provendo assim, uma explicação para o problema da hierarquia [4]. Posto dessa forma, o Problema da Hierarquia parece ter sido resolvido, entretanto o Modelo ADD acaba por trazer outro problema de hierarquia sendo agora entre a escala de compactação e a escala eletro-fraca. Ocorre que, num universo com uma única dimensão extra, se assumirmos que a escala de compactação é da mesma ordem da escala eletro-fraca, o comprimento da dimensão extra teria que ser cerca de vinte vezes o tamanho da Terra até Lua, algo que já teria sido detectado! Dessa forma, o modelo ADD acaba descartando um universo pentadimensional. Com esse problema da hierarquia em aberto, outros modelos de dimensões extras também são propostos com o intuito de também prover uma explicação para essa enorme discrepância entre a força gravitacional e as outras forças da natureza. Entre eles temos outros modelos de branas, como os de Randall-Sundrum [5] [6] [7] [8] que consideram no primeiro caso duas branas (primeiro tipo) e no segundo caso apenas uma única brana. O bônus

desse modelo que propõe uma explicação para o Problema da Hierarquia é que, diferentemente do modelo ADD, ele não é incompatível fenomenologicamente ao conceber um universo com uma única dimensão extra mas com um raio de compactação muito menor do que o previsto pelo modelo ADD com uma dimensão extra.

Após essas e outras teorias com dimensões extras serem propostas, muitos experimentos foram realizados a fim de estudar as implicações dessas teorias [9] [10]. O modelo ADD, por exemplo, previa um desvio na lei do inverso do quadrado de Newton em curtas distâncias. O desafio agora era ter experimentos com precisão o suficiente para medir esses desvios. Como não houve uma detecção direta desses desvios, os experimentos realizados impuseram limites para os parâmetros dessas teorias extra dimensionais. Com isso em mente, vários grupos de físicos usando diversos fenômenos da natureza buscaram, em experimentos, indícios de uma alteração no potencial gravitacional em escalas de comprimento cada vez menores. Grupos como o Eöt-Wash [11] [14] [15] se destacaram com experimentos de balanças de torção onde a escala de comprimento no estudo chegou em cerca de  $54\mu\text{m}$  [16]! Outros físicos buscaram desvios no potencial gravitacional utilizando o já conhecido Efeito Casimir [17] [18] [19], Espectroscopia [20] [21] [22], entre outros fenômenos da natureza. Entre esses experimentos, a Interferometria de Nêutrons [23] [24] [25] mostrou-se muito promissora nos estudos de desvios da lei do inverso do quadrado, técnica essa que fornece um dos vínculos mais fortes na escala entre  $10^{-12}\text{m}$  e  $10^{-9}\text{m}$  e a qual daremos atenção especial nesse trabalho.

Em experimentos de Interferometria de nêutrons, um feixe de nêutrons incidentes é dividido em dois subfeixes os quais seguem caminhos distintos. Ao se recombinarem no final do trajeto, formam um padrão de interferência que pode ser detectado [26] [27] [28] [71]. Um desses subfeixes, ao atravessar uma região com um meio material ou preenchida com um campo elétrico, por exemplo, acumulará uma fase adicional ao longo desse caminho, em razão da interação do nêutron com aquele meio. No final do trajeto uma diferença de fase entre os subfeixes (um submetido a interação e o outro livre) pode ser medida, trazendo informações sobre aquela interação sob investigação.

Entretanto, acontece que, se quisermos calcular a contribuição do potencial gravitacional num cenário de branas sem espessura nessa região de interação do subfeixe temos uma limitação: esse potencial gravitacional interno diverge, impedindo-nos de calcular um desvio da fase adicional decorrente dessa interação gravitacional entre o nêutron e o meio [28].

Contudo, se considerarmos um cenário de branas com espessura, conseguimos calcular o potencial gravitacional interno e, conseqüentemente, calcular o desvio da fase adicional causada por essa nova interação [28].

Essa dissertação está organizada como se segue. No capítulo 2 faremos uma revisão das teorias de dimensões extras, abordando sua motivação inicial com Kaluza e os refinamentos trazidos por Klein. Neste capítulo estudaremos o modelo ADD que surge com o objetivo de explicar o problema da hierarquia, suas implicações e previsões, como os desvios na lei do inverso do quadrado de Newton. No final do capítulo abordaremos mais cenários de branas, onde discutiremos os modelos de Randall-Sundrum (RSI e RSII), os quais surgem com a mesma motivação do modelo ADD.

No capítulo 3 abordaremos os vínculos experimentais sobre a gravitação de curta distância impostos por alguns experimentos usando diferentes fenômenos físicos, a saber: testes utilizando balança de torção, Efeito Casimir e Espectroscopia. A parametrização em ênfase utilizada nesse capítulo será a de Yukawa.

No capítulo 4 focaremos na Interferometria de nêutrons, iniciando com o famoso experimento COW [27] [26], onde mostraremos os efeitos da gravitação na fase da onda do nêutron obtidos por Colella *et al.* Após isso, falaremos de alguns vínculos experimentais impostos pela interferometria de nêutrons sobre os parâmetros de Yukawa. A razão de iniciar esse capítulo com o experimento COW vem do seu impacto histórico (razão pela qual muitos experimentos subsequentes utilizaram o experimento COW como inspiração em estudos com gravitação não-newtoniana), sendo um dos primeiros experimentos que demonstrou um efeito puramente quântico (o desvio da fase na função de onda do nêutron) causado pela gravitação.

No capítulo 5 estudaremos detalhadamente sobre os efeitos das dimensões extras na interferometria de nêutrons com uma fonte bariônica mas agora num cenário de branas com espessura. Considerando a brana com espessura, podemos calcular o potencial interno explicitamente e, com isso, determinar qual quantidade física que a interferometria de nêutrons é capaz de vincular.

Como veremos, essa quantidade depende do modelo nuclear. Uma maneira de superar esse aspecto limitante é considerar experimentos nos quais o desvio da fase de onda do nêutron é causado por uma fonte não-bariônica. Um exemplo desse tipo de experimento foi utilizado a fim de testar o efeito Aharonov-Casher (AC) [82], onde, devido a interação entre o nêutron e o campo elétrico, ocorre uma mudança de fase na onda do nêutron, à medida que os feixes cruzam o interior das câmaras eletrostáticas.

Da teoria da Relatividade Geral, sabemos que todos os tipos de energia podem curvar o espaço-tempo. Então, nesse experimento do tipo Aharonov-Casher, também ocorrerá uma interação entre os nêutrons incidentes e o campo gravitacional produzido pelo campo elétrico. Com isso, poderemos calcular o desvio da fase de onda adicional gerado por essa interação. Após isso estudaremos como obtêr novos vínculos experimentais para modificações de curto alcance da gravitação.

Como também veremos, os limites interferométricos obtidos nesse trabalho podem ser considerados em um contexto mais geral de teorias métricas e seus parâmetros Pós-newtonianos [28] [66]. Em razão disso, os vínculos obtidos com essa fonte não-bariônica poderão ser vistos como limites para desvios de curta distâncias dos parâmetros pós-newtonianos  $\beta_3$  e  $\beta_4$  que quantificam a capacidade da energia interna e pressão, respectivamente, de curvar o espaço-tempo em comparação à massa de repouso da matéria [89].

Em uma classe restrita de teorias métricas, os valores desses parâmetros PPN são fixados, a saber  $\beta_3 = 1$  e  $\beta_4 = \gamma$ , onde  $\gamma$  é outro parâmetro PPN que está relacionado com a curvatura da parte espacial do espaço-tempo. Dessa forma, pelas razões que citamos acima, o coeficiente  $\alpha$  que obtemos com a interferometria de nêutrons está relacionado

com modificações de curtas distâncias de  $\gamma$ , fazendo com que estabeleçamos vínculos sobre esse parâmetro pós-newtoniano [28].

Ao final desse capítulo veremos que os vínculos da interferometria sobre o parâmetro  $\gamma$  são mais fortes do que os vínculos impostos pelo experimento MTV-G [65] e pela Espectroscopia [60] [20] na escala de comprimento entre  $1,4 \times 10^{-7} \text{m}$  e  $10^{-4} \text{m}$ .

Após esse capítulo teremos a conclusão da dissertação e três apêndices.

## 2 *Revisão Teórica*

Nesse capítulo discutiremos sobre o surgimento da teoria de dimensões extras e alguns modelos propostos nesse cenário, suas implicações e previsões. Iniciaremos com a motivação inicial de Kaluza em propor um universo pentadimensional e, logo em seguida, falaremos dos incrementos trazidos por Klein. Após isso discutiremos sobre alguns modelos de brana, como o modelo ADD, onde discorreremos sobre a localização da matéria, efeitos de uma teoria n-dimensional sobre o potencial gravitacional e uma breve discussão sobre a gravitação e o comprimento de Planck. Encerraremos o capítulo falando sobre os modelos de Randall-Sundrum e suas implicações sobre o espéctro de massa dos grávitons.

### 2.1 A Teoria de Kaluza Klein

No ano de 1915 Albert Einstein publica seu artigo pelo qual viria a ser conhecido não apenas da Alemanha, mas em todo o mundo. Nesse novo artigo, Einstein demonstra que a gravidade, que até então era entendida numa visão newtoniana de força, na verdade poderia ser vista como um fenômeno geométrico. Num grau de genialidade, ele generaliza sua teoria da relatividade especial, publicada no seu *annus mirabilis* e incorpora a gravidade nesse novo palco 4-dimensional que ele havia pavimentado em 1905. Assim, a Teoria Geral da Relatividade pode ser entendida como uma *teoria da gravidade* nas quatro dimensões do espaço-tempo. Mas Einstein queria mais, ele acreditava que o eletromagnetismo e a gravitação deveriam ser unificadas em uma única teoria explicando, assim, todos os fenômenos. Após anos de estudos, não teve êxito. É nesse contexto que surge a primeira hipótese de unificação utilizando uma teoria com dimensões extras, formulada pelo físico-matemático alemão Theodor Kaluza [2].

Em um artigo publicado em 1921, Kaluza propõe a unificação entre a teoria do eletromagnetismo de Maxwell e a Relatividade Geral de Einstein levando em consideração

um espaço-tempo de cinco dimensões. Kaluza assumiu que a dimensão extra seria uma dimensão espacial  $z$ , de forma que o conjunto completo das coordenadas em um espaço-tempo  $(4 + 1)$ -dimensional seria  $(x^\mu, z)$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ .

Em perfeita analogia com a Relatividade Geral [29], pode-se formar, em 5D, um Tensor de Ricci  $R_{AB}$ , um Escalar de Ricci  $R$  e o tensor de Einstein

$$G_{AB} \equiv R_{AB} - \frac{1}{2}Rg_{AB}, \quad (2.1)$$

onde  $g_{AB}$ ,  $(A, B = 0, 1, 2, 3, 4)$  é a métrica 5-dimensional.

As equações de campo de Einstein logicamente esperadas seriam

$$G_{AB} = \kappa T_{AB}, \quad (2.2)$$

com alguma constante de acoplamento  $\kappa$  e o tensor momento energia  $T_{AB}$ .

Entretanto, esse último ( $T_{AB}$ ) é desconhecido, então, de Kaluza e Klein (do qual falaremos nas próximas páginas) em diante muito trabalho foi realizado com a suposição de que o universo em dimensões mais altas estaria vazio, implicando que

$$G_{AB} = 0, \quad (2.3)$$

ou, equivalentemente

$$R_{AB} = 0. \quad (2.4)$$

Kaluza estava interessado no eletromagnetismo e percebeu que  $g_{AB}$  poderia ser expresso numa forma que envolvesse o 4-potencial  $A_\mu$ , que aparece na Teoria de Maxwell. Neste mundo onde uma das dimensões é o tempo e as outras quatro são dimensões espaciais, a métrica  $g_{AB}$  quando vista do espaço-tempo físico contém as seguintes partes:

$$g_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, \dots, 3) \quad (2.5)$$

a métrica do espaço-tempo ordinário;

$$g_{\mu z} = g_{z\nu}, \quad (2.6)$$

um 4-campo vetorial;

$$g_{zz}, \quad (2.7)$$

um campo escalar.

Assim, no geral, nós identificamos a parte quadri-dimensional de  $g_{AB}$  como sendo  $g_{\mu\nu}$ , a parte  $g_{\mu\nu}$  com  $A_\mu$  (o potencial eletromagnético) e a parte  $g_{zz}$  com  $\phi$  (o campo escalar). Uma maneira de parametrizar  $g_{AB}$  é a seguinte:

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa^2 \phi^2 A_\mu A_\nu & \kappa \phi^2 A_\mu \\ \kappa \phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

A assinatura da métrica 4-dimensional é tomada como sendo  $(+ - - -)$  e utilizamos as unidades  $c = \hbar = 1$ .

## 2.2 A Condição Cilíndrica

Kaluza ainda impôs a condição cilíndrica à sua teoria, ou seja, exigiu que a derivada de todas as componentes da métrica  $g_{AB}$  com respeito à quinta dimensão seja nula [30]:

$$\frac{\partial g_{AB}}{\partial z} = 0. \quad (2.9)$$

Essa exigência vem do fato de não observarmos uma dimensão extra. Não vemos uma quinta dimensão na natureza, assim, os fenômenos físicos ocorreriam em uma variedade 4-dimensional inserida em um universo de 5 dimensões. Esse é um vínculo fortíssimo que reduz a complexidade algébrica da teoria para um nível tratável.

O tensor de Ricci e os símbolos de Christoffel em cinco dimensões são definidos em termos da métrica  $g_{AB}$  exatamente como em quatro dimensões [29]:

$$R_{AB} = \partial_C \Gamma_{AB}^C - \partial_B \Gamma_{AC}^C + \Gamma_{CD}^C \Gamma_{AB}^D - \Gamma_{BD}^C \Gamma_{AC}^D, \quad (2.10)$$

$$\Gamma_{AB}^C = \frac{1}{2} g^{CD} (\partial_A g_{DB} + \partial_B g_{DA} - \partial_D g_{AB}). \quad (2.11)$$

Podemos utilizar a condição cilíndrica da equação (2.9) na equação (2.10). Com a métrica dada pela equação (2.8), o tensor de Ricci em 5 dimensões ( $R_{AB} = 0$ ) se reduz às seguintes equações de campo [31] [34]:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2 \phi^2}{2} T_{\mu\nu}^{EM} - \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu (\partial_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \square \phi), \quad (2.12)$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = -3 \frac{\partial^\mu \phi}{\phi} F_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

$$\square \phi = \frac{\kappa^2 \phi^3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

onde  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - R g_{\mu\nu}/2$  é o tensor de Einstein em 4 dimensões,  $T_{\mu\nu}^{EM} \equiv g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/4 - F_\rho^\alpha F_{\sigma\alpha}$  é o tensor energia-momento eletromagnético,  $\nabla^\mu$  é a derivada covariante e  $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ . Se o campo escalar for constante no espaço-tempo, então, as duas primeiras equações acima são justamente as equações de Einstein e as equações de Maxwell a menos de uma constante multiplicativa:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \phi^2 T_{\mu\nu}^{EM}, \quad (2.15)$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0. \quad (2.16)$$

Contudo, a condição  $\phi = cte$  só é consistente com a equação (2.14) quando  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 0$ .

Em resumo, a Teoria de Kaluza é uma descrição da gravidade, eletromagnetismo e um campo escalar.

O caso original de Kaluza,  $\phi = 1$ , faz as equações (2.12) e (2.13) serem identificadas

como as equações de Einstein em Maxwell em 4D, mas derivadas no vácuo em 5D, uma consequência que muitas vezes é referida como o “milagre” de Kaluza-Klein. Entretanto, essas equações não possuem contribuição do campo escalar. Este último poderia ser muito importante particularmente em aplicações em física de partículas.

Com a suposição dada pela equação (2.9), Kaluza obteve êxito, derivando as equações de campo do eletromagnetismo e da gravidade em 4 dimensões por meio de uma única teoria de cinco dimensões, demonstrando que a TGR, quando interpretada como uma teoria de cinco dimensões no vácuo, ( $G_{AB} = 0$ ), contém a Relatividade Geral em quatro dimensões na presença de um campo eletromagnético, ( $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{EM}$ ), juntamente com as leis de Maxwell do eletromagnetismo.

## 2.3 Mecanismo de Compactação de Klein

Em 1926 o matemático Oscar Klein introduziu alguns aperfeiçoamentos na teoria de Kaluza. Antes de tudo, é bom enfatizar que a compactação é distinta da condição cilíndrica, sendo ela apenas um mecanismo que explica a natureza aparentemente quadridimensional do universo. Klein assumiu que a 5ª coordenada deveria ter a topologia de um círculo [3] e a escala de comprimento muito pequena. Nas próximas páginas iremos discutir os efeitos dessa hipótese.

### 2.3.1 Topologia de um Círculo ( $S^1$ )

Considere um campo escalar  $\phi(x^\mu, z)$  definido no espaço de 5 dimensões. Se a quinta dimensão tem a topologia de um círculo, então, devemos ter:

$$\phi(x^\mu, z) = \phi(x^\mu, z + 2\pi R), \quad (2.17)$$

onde  $R$  representa o raio da quinta dimensão (ver Figura 2.1).

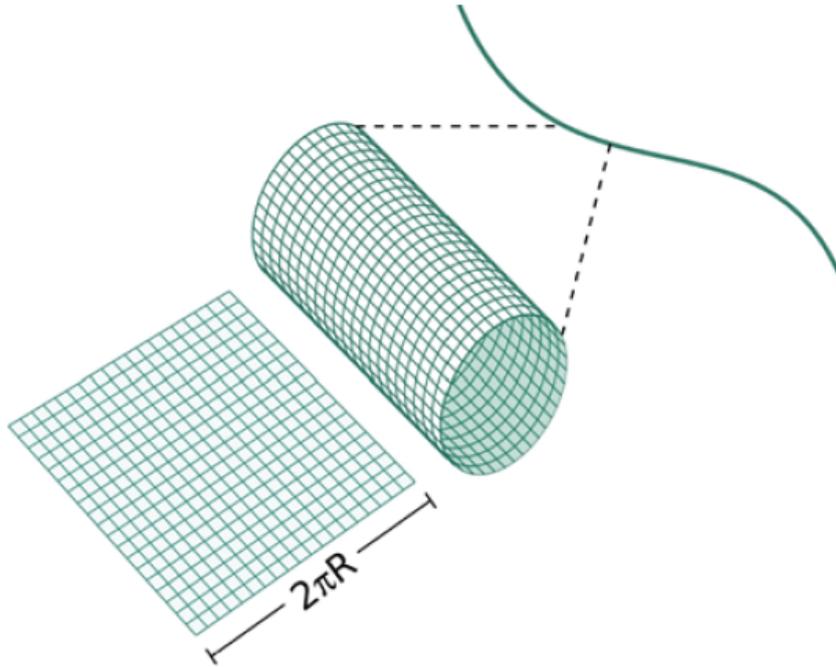


Figura 2.1: Dimensão extra no modelo de K-K. As quatro dimensões espaciais formam um cilindro onde as três dimensões usuais ( $x^1, x^2, x^3$ ) são infinitas (não compactas) e a 4ª dimensão espacial ( $z$ ) é um círculo de raio  $R$ . Figura retirada da referência [32].

Na verdade, podemos concluir que qualquer campo será periódico com respeito à quinta coordenada. Desta forma, todos os campos podem ser expandidos em séries de Fourier:

$$g_{\mu\nu}(x^\mu, z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{\mu\nu}^{(n)}(x^\mu) e^{inz/R}, \quad (2.18)$$

$$\phi(x^\mu, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{inz/R}, \quad (2.19)$$

$$A_\mu(x^\mu, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_\mu^{(n)}(x^\mu) e^{inz/R}, \quad (2.20)$$

onde o índice  $n$  refere-se ao  $n$ -ésimo modo de Fourier. Como podemos ver, os campos são independentes da coordenada extra apenas no modo zero ( $n = 0$ ).

Vamos agora discutir os efeitos da quinta dimensão sobre o campo escalar. Por simplicidade, vamos admitir que o cilindro que aparece da compactação (veja novamente a Figura 2.1) é homogêneo e que a métrica é plana. Em cinco dimensões, a equação de

Klein-Gordon para um campo escalar sem massa é:

$$\square_{(5)}\phi = 0, \quad (2.21)$$

onde  $\square_{(5)} = \square + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  é o operador D'Lambertiano em cinco dimensões. A equação (2.21) pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Seguindo esse método, escrevemos:

$$\phi(x^\mu, z) = \chi(x^\mu) \varphi(z), \quad (2.22)$$

então, substituindo a equação (2.22) na equação (2.21) obtemos:

$$\frac{1}{\chi(x^\mu)} \square \chi(x^\mu) + \frac{1}{\varphi(z)} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} = 0. \quad (2.23)$$

O primeiro termo desta equação é uma função apenas de  $x^\mu$  e o segundo termo é uma função apenas de  $z$ . A única maneira desta equação ser satisfeita para todos os valores de  $x^\mu$  e  $z$  é que cada termo seja igual a uma constante e que a soma destas constantes seja igual a zero, assim temos:

$$\frac{1}{\chi(x^\mu)} \square \chi(x^\mu) = C, \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{\varphi(z)} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} = -C. \quad (2.25)$$

Da equação (2.24) temos ainda

$$\square \chi(x^\mu) = C \chi(x^\mu). \quad (2.26)$$

Esta equação nada mais é que a equação de Klein-Gordon num espaço-tempo de 4 dimensões onde a constante  $C$  representa a massa do campo. Agora, resolvendo a equação (2.25), encontramos:

$$\varphi(z) = A \sin(\sqrt{C}z) + B \cos(\sqrt{C}z). \quad (2.27)$$

Desta forma, utilizando as devidas condições de contorno dadas pela equação (2.17), ou seja:

$$\phi(0) = \phi(2\pi R), \quad (2.28)$$

verificamos que os valores permitidos para a constante de separação são:

$$C = \frac{n^2}{R^2}, \quad (2.29)$$

onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Portanto,  $C$  é não-negativa, então, podemos escrever  $C = m^2$ . Isto reforça a interpretação de que esta constante faz o papel da massa para o campo quadridimensional. De fato, para cada valor permitido de  $m$ , temos:

$$\square \chi^{(n)}(x^\mu) = m_n^2 \chi^{(n)}(x^\mu), \quad (2.30)$$

onde

$$m_n = \frac{n}{R}. \quad (2.31)$$

Sendo assim, do ponto de vista quadridimensional,  $\phi(x^\mu, z)$  pode ser decomposto em um modo zero ( $n = 0$ ) sem massa, ( $\phi^{(0)}$ ), e num conjunto de modos que chamaremos genericamente de **Modos de Kaluza-Klein** (*Modos KK*). Cada modo KK carrega uma energia de ordem  $n/R$  (a ordem da massa de repouso) e, portanto, não podem ser excitados em processos envolvendo energias inferiores àquele patamar (ver Figura 2.2).

De um ponto de vista quadridimensional, cada modo KK pode ser interpretado como um tipo diferente de partícula com massa  $m_n = |n|/R$ .

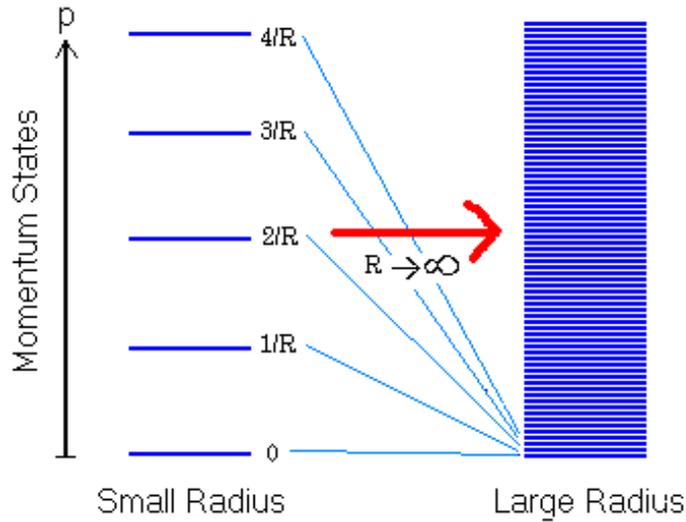


Figura 2.2: Torre de Kaluza-Klein. Figura retirada de [33].

### 2.3.2 Escala Pequena

Se  $R$  for suficientemente pequeno, a energia necessária para estimular os modos com  $n \neq 0$  seria tão grande que estaria fora do alcance experimental e, assim, somente o modo zero ( $n = 0$ ), que independe da coordenada  $z$ , seria observado, como é exigido pela teoria de Kaluza. A dimensão extra seria então detectada quando a energia disponível nos aceleradores for da ordem de:

$$E \sim \frac{1}{R}. \quad (2.32)$$

Então, para tentar explicar o fato de que até então nenhuma dimensão extra tinha sido observada, Klein adotou a escala de compactação como sendo da ordem do comprimento de Planck [34], ou seja,

$$l_p \equiv \left( \frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-35} m. \quad (2.33)$$

Desta forma a massa dos estados excitados seriam da ordem da massa de Planck, ou seja,  $M_p \approx 10^{19}$  GeV. Com esse patamar de energia se justificaria a não detecção das

dimensões extras, mesmo com os atuais aceleradores de partículas sendo executados em escalas de energia ( $E \sim \mathcal{O}(\text{TeV})$ )<sup>1</sup>. Nesse contexto, a aparente quadridimensionalidade do nosso universo observado foi explicada e a condição cilíndrica, denotada fisicamente pela equação (2.9), foi justificada fisicamente.

## 2.4 Modelo ADD

Entre os modelos de dimensões extras temos o modelo ADD [4], também conhecido como Modelo de Dimensões Extras de Grande Escala, cuja sigla vem dos físicos Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, e Gia Dvali. Em contraste com o modelo proposto por Kaluza-Klein, que possui dimensões extras compactas com comprimentos da ordem do comprimento de Planck, no modelo ADD as dimensões extras, *que ainda são compactas*, podem atingir a escala de comprimento submilimétrica, sem conflitos com a experiência [35].

Historicamente, podemos dizer que o modelo ADD surge como uma tentativa de resolver o chamado *problema da Hierarquia* [36]. De forma resumida, este problema consiste na enorme discrepância de magnitude entre a força gravitacional e as outras forças<sup>2</sup>. O modelo se baseia na hipótese de que a matéria e os campos estão confinados numa hipersuperfície (quadridimensional) e, apenas a gravidade pode se propagar ao longo da dimensão extra.

Quando Klein introduziu a ideia de compactação da dimensão extra no modelo teórico de Kaluza, ele imaginava a compactação como um mecanismo que explica a natureza aparentemente quadridimensional do universo. De fato, uma dimensão extra enrolada em um pequeno círculo com um tamanho próximo ao comprimento de Planck seria indetectável.

No modelo ADD as dimensões extras estão escondidas por meio de um mecanismo

---

<sup>1</sup>O nível atual de energia nos aceleradores é de 14TeV.

<sup>2</sup>Um exercício bastante comum quando iniciamos os estudos em Eletricidade e magnetismo é verificar que a força elétrica é cerca de  $10^{39}$  vezes mais intensa que a gravitacional.

de confinamento da matéria e dos campos na hipersuperfície. O confinamento é uma ideia já bem conhecida na literatura e nas próximas subseções vamos ilustrar esse mecanismo estudando o modelo de localização de férmions numa parede de domínio proposto por Rubakov e Shaposhnikov [37] [38] [39], no qual o modo zero dos férmions está preso à parede e não pode se propagar ao longo da dimensão extra. Em seguida, discutiremos as características da gravitação nesse modelo.

## 2.4.1 Localização da Matéria

Nosso universo de (3+1)-dimensões pode ser imaginado como uma hipersuperfície imersa em um espaço de dimensões extras, na qual toda a matéria ordinária se encontra presa. A esta hipersuperfície 3D imersa em um universo de dimensões superiores damos o nome de 3-brana, onde o número 3 se refere ao número de dimensões espaciais da hipersuperfície. Desta forma, uma brana é uma subvariedade em um espaço ambiente maior [4].

### 2.4.1.1 Confinamento da Matéria

Da perspectiva da teoria de campos, o mecanismo de aprisionamento de matéria à hipersuperfície quadridimensional, denominada brana, pode ser entendido como o confinamento de matéria em uma parede de domínio [38] [39]. Para ilustrar esse mecanismo de confinamento, vamos construir uma teoria de localização de férmions em um modelo que admite a existência de uma dimensão extra  $z$ . Consideremos um campo escalar  $\varphi = \varphi(x^\mu, z)$ , cuja ação é dada por:

$$S = \int d^4x dz \left[ \frac{1}{2} (\partial_A \varphi)^2 - V(\varphi) \right], \quad (2.34)$$

onde  $A = 0, 1, 2, 3, 4$  e  $V(\varphi)$  é o potencial escalar.

A fim de obter uma solução do tipo parede de domínio, vamos considerar o seguinte

potencial:

$$V(\varphi) = \frac{\lambda^2}{8} (\varphi^2 - \nu^2)^2, \quad (2.35)$$

cujo comportamento está ilustrado na Figura (2.3):

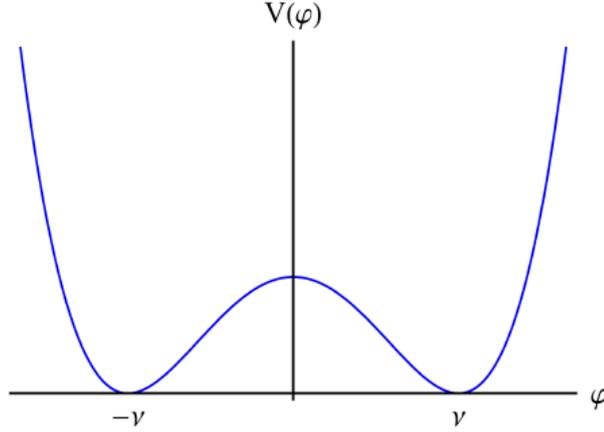


Figura 2.3: Potencial escalar que fornece a solução do tipo parede de domínio. Figura retirada de [32].

Para este potencial temos dois valores de menor energia,  $\varphi = -\nu$  e  $\varphi = \nu$ . Notamos ainda que, para  $\varphi = 0$ , existe um máximo instável.

Para obter a equação dinâmica do campo, devemos utilizar as equações de Euler-Lagrange [40]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_A \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_A \varphi)} \right] = 0. \quad (2.36)$$

Aplicando a lagrangiana dada pela equação (2.34) na equação (2.36), obtemos:

$$\square_A \varphi + \frac{dV}{d\varphi} = 0, \quad (2.37)$$

onde  $\square^{(5)} = \partial_A^2 = \eta^{AB} \partial_A \partial_B$ , assim:

$$\partial_0^2 \varphi - \partial_\mu^2 \varphi + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_0 (\varphi_0^2 - \nu^2) = 0. \quad (2.38)$$

Queremos, agora, obter uma solução conhecida como parede de domínio. Para isso,

vamos considerar uma solução estacionária e que depende apenas de  $z$ . Neste caso, a equação de campo se reduz a:

$$-\frac{d^2\varphi_0(z)}{dz^2} + \frac{\lambda^2}{2}\varphi_0(\varphi_0^2 - \nu^2) = 0. \quad (2.39)$$

Podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[ \left( \frac{d\varphi_0}{dz} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_0^2 - \nu^2)^2 \right] = 0 \quad (2.40)$$

A solução que procuramos tem a seguinte forma:

$$\varphi_0(z) = \nu \tanh\left(\frac{\lambda\nu z}{2}\right). \quad (2.41)$$

Observe que:  $\varphi_0(z \rightarrow -\infty) = -\nu$  e  $\varphi_0(z \rightarrow +\infty) = +\nu$ . Por isto, essa solução é conhecida como *Parede de Domínio* (ver Figura 2.4), porque ela separa os dois estados

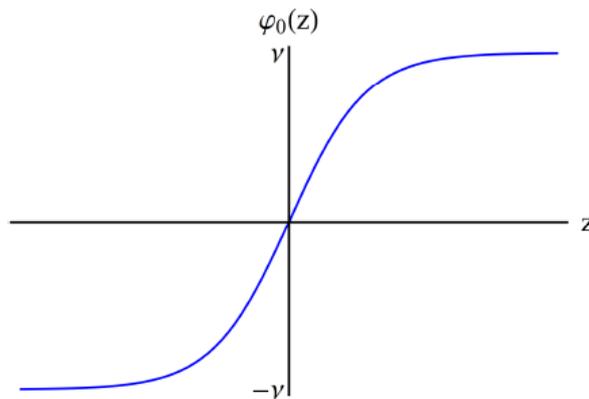


Figura 2.4: Solução do tipo parede de domínio. Figura retirada de [32].

de menor energia do campo  $\varphi$ . Em outras palavras, esta configuração de campo conecta os estados fundamentais  $\varphi = \nu$  em  $z = +\infty$  e  $\varphi = -\nu$  em  $z = -\infty$ . Ela também costuma ser chamada de *Kink*.

### 2.4.1.2 Densidade de Energia na Brana

Vamos agora discutir algumas propriedades da parede de domínio. Consideremos inicialmente a densidade de energia correspondente ao kink. Seja  $\mathcal{H}_0$  a densidade de Hamiltoniana associada ao campo  $\varphi$ . Esta grandeza, como sabemos, tem unidades de densidade de energia. Como estamos considerando um espaço com cinco dimensões ( $1 + 4$ ),  $\mathcal{H}_0$  terá unidades de energia por 4-volume (4 dimensões espaciais). Assim, integrando  $\mathcal{H}_0$  com respeito à dimensão extra, obtemos a densidade de energia (energia por 3-volume) do campo:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_0 dz. \quad (2.42)$$

Como sabemos, a Hamiltoniana  $\mathcal{H}_0$  é dada por  $\mathcal{H}_0 = \Pi\dot{\varphi} - \mathcal{L}$ , onde  $\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$  é o momento canonicamente conjugado a  $\dot{\varphi}$ .

Segue, então, que para o campo escalar, temos:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} (\partial_A \varphi)^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\varphi^2 - \nu^2)^2. \quad (2.43)$$

Notamos que  $\varphi = -\nu$  e  $\varphi = +\nu$  são soluções da equação de movimento, equação (2.37), com energia zero, pois, para esta solução,  $\mathcal{H}_0 = 0$ .

Considerando a solução  $\varphi_0$  do tipo parede de domínio, dada pela equação (2.41), encontramos

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\lambda^2 \nu^4}{4} \frac{1}{\cosh^4\left(\frac{\lambda \nu z}{2}\right)}. \quad (2.44)$$

Temos portanto a seguinte distribuição de energia, ilustrada na figura 2.5:

Com isso concluímos que a energia está concentrada em torno de  $z = 0$  [39]. Quanto maior  $\lambda$ , maior a concentração. Da equação (2.44) podemos dizer que  $\lambda$  tem unidade de inverso de comprimento e pode ser interpretado como o inverso da espessura da brana.

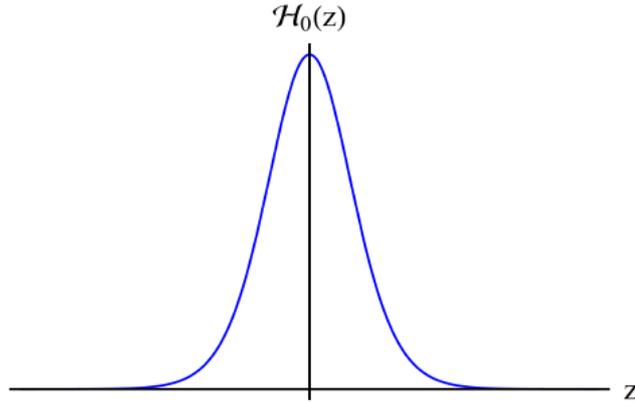


Figura 2.5: Densidade de energia da brana localizada em  $z = 0$ . Figura retirada de [32].

Conhecendo  $\mathcal{H}_0$ , podemos agora calcular a densidade de energia da parede de domínio. Da equação (2.42), temos:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 v^4}{\cosh^4\left(\frac{\lambda v z}{2}\right)} dz = \frac{2\lambda v^3}{3}. \quad (2.45)$$

No limite  $\lambda \rightarrow \infty$ , em que a espessura da parede vai a zero, se  $\sigma$  for mantido constante, a parede de domínio dará origem uma estrutura conhecida como 3-brana.

#### 2.4.1.3 Localização de Férmions

Vamos agora introduzir férmions neste modelo. Sabemos que férmions são descritos por espinores ( $\psi$ ), e que a equação de movimento dos férmions é a equação de Dirac [41]:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (2.46)$$

onde  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac, que obedecem a seguinte álgebra:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} 1, \quad (2.47)$$

onde  $\gamma$  é unitário e anti-hermitiano, ou seja,  $(\gamma^i)^\dagger = (\gamma^i)^{-1}$  e  $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$ .

Assim, temos a equação de Dirac em um espaço-tempo de quatro dimensões. A

partir da equação (2.46) podemos escrever a seguinte ação

$$S = \int d^4x (i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi), \quad (2.48)$$

de onde vem a seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (2.49)$$

Agora vamos escrever a equação de Dirac para um espaço-tempo de cinco dimensões. Neste caso as matrizes de Dirac são:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu, \quad (2.50)$$

$$\Gamma^z = -i\gamma^5, \quad (2.51)$$

onde  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , explicitamente,  $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2\times 2} \\ 1_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix}$ .

As matrizes  $\Gamma^A$  satisfazem a mesma álgebra das matrizes  $\gamma^\mu$ , ou seja,

$$\Gamma^A\Gamma^B + \Gamma^B\Gamma^A = 2g^{AB}1. \quad (2.52)$$

Admitindo que a lagrangeana do campo de Dirac em 5D tem a mesma forma da equação (2.49), ou seja,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\Gamma^A\partial_A\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (2.53)$$

a ação será então dada por

$$S_{1/2} = \int d^4x dz (i\bar{\psi}\Gamma^A\partial_A\psi - m\bar{\psi}\psi), \quad (2.54)$$

o que implica a seguinte equação para o campo de Dirac em 5D:

$$(i\Gamma^A\partial_A - m)\Psi = 0. \quad (2.55)$$

Vamos, agora, estudar o comportamento dos férmions, descritos pelo campo de Dirac, numa parede de domínio [37] [38] [39]. Para isto, vamos admitir que o férmion interage com o campo escalar por meio de uma interação do tipo Yukawa.

Neste caso a ação da interação toma a seguinte forma:

$$S_{int} = -h \int d^4x dz \phi \bar{\Psi} \Psi, \quad (2.56)$$

onde  $h$  é uma constante de acoplamento.

Assim, a ação total será a ação do campo de Dirac mais a ação da interação, ou seja,  $S = S_{1/2} + S_{int}$ , com o campo  $\phi$  descrito pela solução  $\phi_0$ , da parede de domínio:

$$S = \int d^4x dz (i\bar{\psi} \Gamma^A \partial_A \psi - m\bar{\psi} \psi - h\phi_0 \bar{\Psi} \Psi). \quad (2.57)$$

Para o caso em que consideramos um férmion sem massa, ou seja,  $m = 0$ , temos:

$$S = \int d^4x dz (i\bar{\psi} \Gamma^A \partial_A \psi - h\phi_0 \bar{\Psi} \Psi). \quad (2.58)$$

A partir desta ação obtemos a seguinte equação de movimento:

$$i\Gamma^A \partial_A \Psi - h\phi_0 \Psi = 0, \quad (2.59)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$i\Gamma^z \partial_z \Psi + i\Gamma^\mu \partial_\mu \Psi - h\phi_0 \Psi = 0. \quad (2.60)$$

Vamos tentar resolver a equação acima pelo método da separação de variáveis. Então, propomos  $\Psi_{(5)}(x, z) = \psi(x) f(z)$ , onde  $\psi(x)$  é o espinor de Dirac em 4D. Obtemos então

$$i\Gamma^z \psi(x) \partial_z f(z) + i\Gamma^\mu f(z) \partial_\mu \psi(x) - h\phi_0 \psi(x) f(z) = 0. \quad (2.61)$$

Podemos dividir a expressão acima pela função  $f(z)$ , logo:

$$i\Gamma^z \psi(x) \frac{\partial_z f(z)}{f(z)} + i\Gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - h\phi_0 \psi(x) = 0. \quad (2.62)$$

Se impusermos a seguinte restrição ao espinor:

$$\gamma^5 \psi = -\psi, \quad (2.63)$$

obteremos da equação (2.62) (usando também a equação (2.51)) a seguinte equação:

$$\left[ \frac{1}{f(z)} \partial_z f(z) + h\phi_0 \right] \psi(x) - i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0. \quad (2.64)$$

Portanto, para satisfazer a equação acima devemos ter que

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = m\psi(x), \quad (2.65)$$

onde a constante  $m$  é interpretada como a massa do spinor em 4D. Assim a equação (2.64) será:

$$\frac{df(z)}{dz} = (m - h\phi_0) f(z). \quad (2.66)$$

Para o caso de uma partícula sem massa  $m = 0$ , ou seja, para o *modo zero*, temos:

$$\frac{df(z)}{dz} = -h\phi_0 f(z). \quad (2.67)$$

A equação (2.67) pode ser facilmente resolvida, resultando em:

$$f(z) = \exp\left(-h \int_0^z \phi_0(z) dz\right). \quad (2.68)$$

O espinor  $\psi(x)$  satisfaz a equação de Dirac quadridimensional (veja novamente a equação (2.65)). Podemos ainda observar que o confinamento dos férmions à parede

de domínio está assegurado, pois, para  $z$  muito grande, a função de onda é suprimida exponencialmente. Sendo assim, garantimos a localização do modo zero fermiônico sobre a brana e reproduzimos a física quadridimensional usual [32].

No entanto, devemos lembrar que a equação (2.63) impõe uma condição para o espinor  $\psi(x)$ . Ora, sabemos que o espinor pode ser escrito em função de duas componentes:

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

onde  $\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  e  $\psi_R = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$  são os espinores de Weyl. Em termos desses espinores, a equação (2.63) é equivalente à condição  $\psi_L = -\psi_R$ , ou seja, os espinores de Weyl não são independentes entre si. Para o modo zero ( $m = 0$ ), a condição da equação (2.63), portanto, não implica nenhuma restrição física, já que as partículas de massa nula apresentam quiralidade (ou helicidade) bem definida.

A solução para o modo zero pode ser escrita, então, como:

$$\psi_0 = \exp\left(-h \int_0^z \phi_0(z) dz\right) \psi_L(x). \quad (2.70)$$

A partir desta equação podemos concluir que o modo zero fermiônico (férmions 4D) está localizado próximo de  $z = 0$ , isto é, na parede de domínio e que para  $|z|$  muito grande, o modo zero cai exponencialmente ao longo da dimensão extra.

A partir de equação (2.66) podemos determinar os valores possíveis para  $m$  o que constitui uma espécie de massa dos modos KK. De acordo com Rubakov [38] o espectro de massa tem a seguinte característica apresentada na Figura 2.6.

A característica fundamental deste espectro é que existe um salto entre o modo zero e os demais modos proporcionais a  $m_5 = h\nu$ . Assim, se  $\nu$  for muito grande, então os modos com massa estariam inacessíveis do ponto de vista experimental. Desta maneira, o modelo torna-se compatível com os dados empíricos [37] [38].

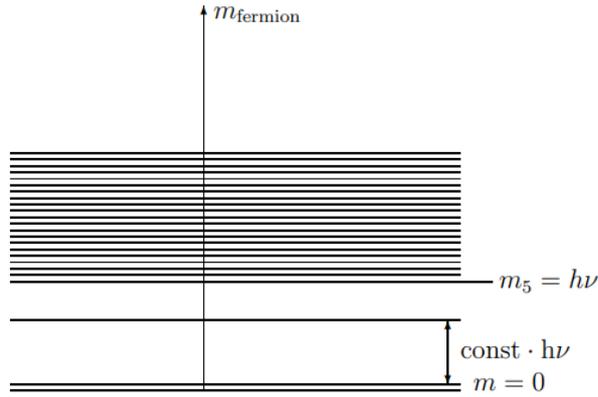


Figura 2.6: Espectro de massa dos Férmions presos na brana. O hiato entre o modo zero e os modos contínuos é proporcional a  $h\nu$ . A parte contínua tem início em  $m_5 = h\nu$ . Figura retirada da referência [39].

## 2.4.2 Potencial Gravitacional em Dimensões Extras

No modelo ADD a matéria e os campos estão localizados na brana. Nesse modelo, o único campo que não está “aprisionado” é o campo gravitacional. Nesta subseção iremos discutir os efeitos da dimensão extra sobre o potencial gravitacional. Vamos começar nossa discussão estudando os efeitos das dimensões extras no potencial gravitacional newtoniano. No contexto clássico, o campo  $\vec{g}$  satisfaz a equação:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho, \quad (2.71)$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa de matéria.

Vamos usar essa equação para determinar o campo gravitacional de um corpo de massa  $m$  com simetria esférica. Considere um corpo de massa  $m$ , uma 2-esfera  $S^2(r)$  (Ver apêndice A) de raio  $r$  centrada em torno do corpo massivo e uma 3-bola  $B^3(r)$  cujo contorno é a 2-esfera. Integramos ambos os lados da equação (2.71) sobre a 3-bola [41], temos:

$$\int_{B^3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) dV = -4\pi G \int_{B^3} \rho dV. \quad (2.72)$$

Utilizando o Teorema da divergência do lado esquerdo da equação acima e levando

em consideração que a integral da densidade de matéria sobre todo o volume da 3-bola nos fornece a massa total do corpo, nós temos:

$$\int_{S^2} \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi Gm. \quad (2.73)$$

Para um corpo com simetria esférica,  $g(r)$  é radial e depende apenas de  $r$ . Assim, sobre a superfície de  $S^2(r)$ , temos:

$$g \int_{S^2} dA = -4\pi Gm, \quad (2.74)$$

onde a área da esfera é  $4\pi r^2$ , assim:

$$g(r) = -\frac{Gm}{r^2}, \quad (2.75)$$

ou,

$$\vec{g}(r) = -\frac{Gm}{r^2} \hat{e}_r, \quad (2.76)$$

onde  $\hat{e} = r/|r|$  é o vetor unitário na direção do raio da esfera.

Este é, portanto, o resultado já conhecido para o campo gravitacional de um corpo de massa  $m$  em um espaço-tempo de 4 dimensões. Vamos agora calcular o campo gravitacional deste mesmo corpo agora em um espaço com  $n$  dimensões espaciais. Então, novamente consideremos o corpo de massa  $m$  e uma esfera  $S^{n-1}(r)$  de raio  $r$  centrada no corpo de massa  $m$ , esta esfera é o contorno da Bola  $B^n(r)$ . Novamente, integramos ambos os lados da equação (2.71) sobre a Bola  $B^n(r)$ :

$$\int_{B^n} (\nabla \cdot g) dV = -4\pi G^{(n)} \int_{B^n} \rho dV. \quad (2.77)$$

Contudo,

$$\int_{B^n} (\nabla \cdot g) dV \equiv \Phi_m, \quad (2.78)$$

onde  $\Phi_m$  é o fluxo de  $g$  através de  $S^{n-1}(r)$ .

Da equação (2.77), temos

$$\Phi_m = -4\pi G^{(n)}m. \quad (2.79)$$

Por outro lado, calculando o lado esquerdo da equação (2.77), por meio do Teorema da divergência, obtemos:

$$\Phi_m = g(r) \text{Vol}(S^{n-1}). \quad (2.80)$$

Mas o volume de uma esfera em um espaço de dimensões extras é determinado por (Apêndice A):

$$\text{Vol}(S^{n-1}(r)) = r^{n-1} \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \quad (2.81)$$

Portanto, utilizando as equações (2.80) e (2.81) na equação (2.79), temos:

$$\vec{g}(r) = -\frac{2\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{n/2-1}} \frac{G^{(n)}m}{r^{n-1}} \hat{e}_r. \quad (2.82)$$

Para o caso usual em que temos 3 dimensões espaciais ( $n = 3$ ), recobramos a Lei de Newton do inverso do quadrado da distância. Em dimensões superiores, o campo gravitacional cai mais rápido para distâncias grandes. Na proximidade do corpo massivo, contudo, o campo cresce mais rapidamente.

O campo gravitacional é conservativo, assim:

$$\vec{\nabla} \times \vec{g}(r) = 0. \quad (2.83)$$

Isso nos permite concluir que  $g$  pode ser representado como o gradiente de uma função escalar. Assim, podemos escrever:

$$\vec{g}(r) = -\vec{\nabla}\phi, \quad (2.84)$$

onde  $\phi$  é chamado de potencial gravitacional.

No caso de um campo radial, o potencial  $\phi$  poderá ter no máximo uma dependência em  $r$ , desta forma a equação (2.84) se reduz a:

$$\nabla\phi = \frac{d\phi}{dr}\hat{e}_r = -g(r). \quad (2.85)$$

Se utilizarmos a equação (2.82), teremos:

$$\phi(r) = -\frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2-1}(n-2)}\frac{Gm}{r^{n-2}}. \quad (2.86)$$

Este, portanto, é o potencial gravitacional para longas distâncias gerado por uma massa num espaço com  $n$  dimensões espaciais. Devemos ressaltar que as dimensões consideradas aqui não são compactas, algo que será considerado na próxima subseção.

### 2.4.3 Potencial Gravitacional Em Um Espaço Com Uma Dimensão Extra Compacta

Nosso objetivo nessa subseção é determinar de forma explícita o potencial por uma massa que se encontra em um universo multidimensional no qual a dimensão extra é compacta.

Imaginemos que um certo observador esteja localizado num ponto  $\mathcal{O}$ , este observa a massa localizada em um ponto do universo. Como a dimensão extra é compacta e possui a topologia de um círculo, as linhas de força/campo que se originam da massa  $m$  darão voltas em torno do espaço até atingir o observador localizado no ponto  $\mathcal{O}$  [42], como mostra a Figura 2.7.

Para termos uma ideia desse efeito topológico, façamos o seguinte procedimento. Imagine que cortamos o cilindro de modo a obter um plano onde a massa encontra-se no centro (figura abaixo):

Temos agora um plano onde a massa  $m$  se encontra no centro. O observador será

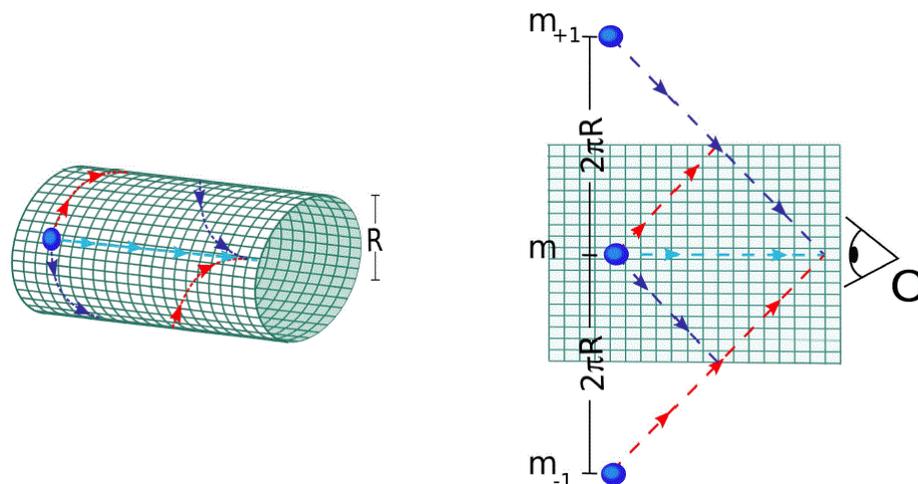


Figura 2.7: Na figura da esquerda temos a representação de uma dimensão extra compacta. Já na figura da direita, o cilindro é representado por um espaço “aberto” com as identificações topológicas. Figura retirada da referência [32].

atingido pelas linhas de força que se originam da massa. Entretanto, do ponto de vista do observador, ele não está sofrendo ação de apenas um *única* massa, mas sim de várias outras massas ( $m_1, m_2, \dots$ ) espalhadas ao longo de uma linha que passa pelo centro da massa (ver Figura 2.7). A essas supostas massas observadas pelo observador em  $\mathcal{O}$  daremos o nome de **imagens topológicas** (ou massas imagem). A distância entre as massas será de  $2\pi R$ , que é justamente o tamanho do comprimento da dimensão extra (nessa topologia). Imaginemos agora que o observador se encontra a uma distância  $r$  muito maior que  $R$  (o raio da dimensão extra). Nesse caso, as massas estariam aparentemente distribuídas uniforme e continuamente ao longo da linha que passa pela massa *real*. Desse modo, dada a simetria do problema (a forma com que as massas estão dispostas), podemos utilizar a Lei de Gauss para calcular o campo gerado por essa linha de massa (ver Figura 2.8).

O cilindro de altura  $h$  corresponde a nossa superfície gaussiana. Vale atentar para o fato de que, como estamos num espaço com quatro dimensões espaciais, a base desse cilindro é uma esfera, em vez de um círculo.

Consideramos a Lei de Gauss representada na equação (2.73) onde a integral de

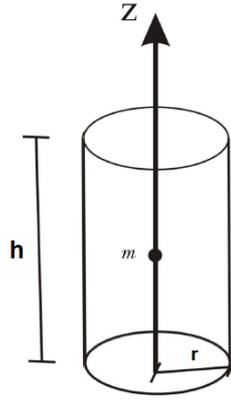


Figura 2.8: Superfície Gaussiana em torno da linha de imagens topológicas. Figura adaptada de [43].

área é realizada sobre a superfície gaussiana:

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G_5 M_{int}, \quad (2.87)$$

onde  $M_{int}$  é a quantidade de massa contida na linha contínua (para essa distância  $r$ ) dentro da superfície gaussiana cilíndrica. Ora, as massas topológicas estão dispostas ao longo de uma linha que passa por cada uma delas e, a distância de separação de uma imagem pra outra é  $2\pi R$ , assim, o número de massas imagens contidas numa linha de comprimento  $h$  (o comprimento da superfície gaussiana) será igual a  $h/2\pi R$ . Com isso, temos que  $M_{int}$  será:

$$M_{int} = \frac{h}{2\pi R} m. \quad (2.88)$$

Dada a simetria da distribuição da matéria, podemos concluir que  $\vec{g}$  terá simetria cilíndrica, isto é, a direção do campo resultante será perpendicular à dimensão extra. Assim,  $\vec{g}$  é perpendicular à dimensão extra e dependerá apenas da coordenada radial  $r$  da superfície gaussiana. Segue então que:

$$g(r) \int dA = -4\pi G_5 \left( \frac{h}{2\pi R} m \right). \quad (2.89)$$

Lembre que a base dessa superfície gaussiana é uma esfera, assim, a área do cilindro

será  $(4\pi r^2)h$ . Portanto,

$$g(r)(4\pi r^2)h = -4\pi G_5 \left( \frac{h}{2\pi R} m \right) \quad (2.90)$$

$$\vec{g}(r) = -\frac{G_5 m}{2\pi R} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r. \quad (2.91)$$

O potencial gravitacional será então:

$$V(r) = -\left( \frac{G_5 m}{2\pi R} \right) \frac{1}{r}. \quad (2.92)$$

Se fizermos a identificação

$$G_4 = \frac{G_5}{2\pi R}, \quad (2.93)$$

obtemos:

$$V(r) = -\frac{G_4 m}{r}. \quad (2.94)$$

Portanto, para grandes distâncias comparadas com o raio da dimensão extra ( $r \gg R$ ), recuperamos a conhecida *Lei do inverso do quadrado de Newton*.

Procederemos de modo análogo e generalizaremos para o caso em que o espaço possui  $\delta$  dimensões extras. Nesse caso, o hiper-cilindro  $C$  de comprimento  $h$  está centrado em torno da linha de massas imagens  $\delta$ -dimensional e a base do cilindro é uma esfera 3-dimensional. A Lei de Gauss em  $(\delta + 4)$ -dimensional será:

$$\int_C \vec{g} \cdot d\vec{A} = -S^{(3+\delta)} G_{(4+\delta)} M_{int} \quad (2.95)$$

onde

$$S^{(D)} = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \quad (2.96)$$

é a área da superfície de uma esfera de raio unitário em  $D$  dimensões (ver Apêndice A).

Desse modo, devido a simetria radial, encontramos

$$g \times (4\pi r^2) \times h^\delta = -S^{(3+\delta)} G_{(4+\delta)} \frac{h^\delta}{(2\pi R)^\delta} m. \quad (2.97)$$

Finalmente, podemos escrever:

$$g = -\frac{S^{(3+\delta)} G_{(4+\delta)} m}{4\pi V_\delta r^2}, \quad (2.98)$$

onde

$$V_\delta = (2\pi R)^\delta \quad (2.99)$$

é o volume do espaço suplementar.

Para recuperar a Lei do inverso do quadrado de Newton para a força gravitacional, basta-nos fazer a identificação:

$$G_{(4)} = \frac{S^{(3+\delta)} G_{(4+\delta)}}{4\pi V_\delta}. \quad (2.100)$$

Até o momento, lançamos atenção sobre o estudo do potencial gravitacional gerado por uma massa  $m$  em um espaço com  $\delta$  dimensões extras em uma região afastada da fonte. Nesse caso, vimos que a conhecida *Lei do inverso do quadrado* é reproduzida. De outro modo, se estamos interessados no potencial gerado pela massa  $m$  para pontos próximos a fonte, teremos aproximadamente<sup>3</sup>:

$$g = -G_{(4+\delta)} \frac{m}{r^{\delta+2}}. \quad (2.101)$$

Finalmente, podemos escrever em termos do potencial gravitacional:

$$V = -G_{(4)} \frac{m}{r}, \quad (r \gg R) \quad (2.102)$$

$$V = -G_{(4+\delta)} \frac{m}{r^{\delta+1}}, \quad (r \ll R). \quad (2.103)$$

---

<sup>3</sup>Para esse cálculo devemos fazer uso da simetria esférica ao invés da cilíndrica.

Observe que, no regime ( $r \ll R$ ) encontramos um novo quadro: o potencial produzido por uma massa sofre uma amplificação no cenário de branas ADD. Esse resultado representa um desvio à Lei do inverso do quadrado de Newton! Sendo assim, nesse regime, se espera detectar efeitos mensuráveis das dimensões extras sobre os experimentos que buscam desvios na força gravitacional.

#### 2.4.4 Compactação Toroidal

Vamos assumir que o espaço-tempo é  $(n + 4)$ -dimensional, onde as  $n$  dimensões extras  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ , estão compactadas em círculos, cada círculo com raio  $R$ . Assim, considerando que o potencial gravitacional produzido satisfaz a equação de Poisson, podemos escrever o potencial gerado por uma massa  $M$  que está a uma distância  $\mathcal{R} = (r^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ , onde  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  (ver a Figura 2.9):

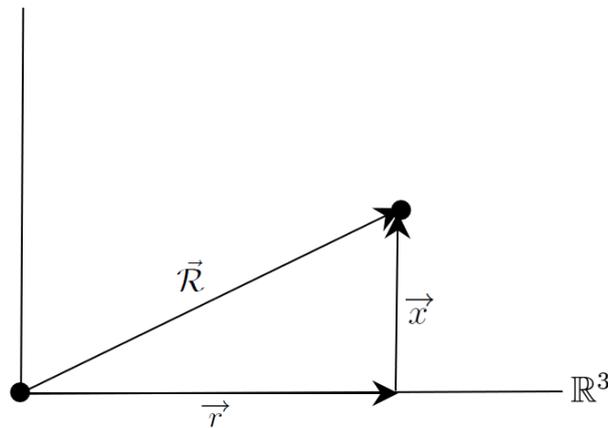


Figura 2.9: Representação de um potencial gerado por uma massa  $M$  em um espaço extra dimensional. O eixo vertical indica a direção da dimensão extra.

Assim, temos:

$$V_M = -\frac{G_{n+4}M}{|r|^{n+1}} = -\frac{G_{n+4}M}{(r^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (2.104)$$

Podemos identificar cada imagem topológica por uma sequência de  $n$  números inteiros  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  que nos dá a localização da massa no espaço suplementar. Assim, vamos considerar agora um vetor  $\vec{T}_1$  que localiza a imagem topológica  $m_1$ , (Figura

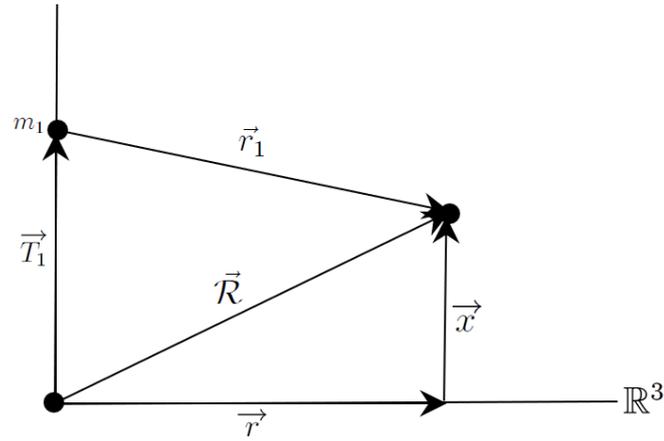


Figura 2.10: Representação da influência de uma imagem topológica sobre um ponto num espaço extra dimensional.

abaixo).

Em termos das componentes:

$$\vec{T}_1 = (0, 0, 0, x_1 = 2\pi R, 0, \dots, 0). \quad (2.105)$$

Sendo assim, podemos escrever o vetor  $T$  para qualquer imagem topológica  $m$  na forma:

$$\vec{T}_m = l(0, m_1, m_2, \dots, m_n) = l(0, m), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.106)$$

e  $l = 2\pi R$ , na topologia toroidal.

Se quisermos determinar o potencial gerado pela massa imagem  $m_1$  relacionamos o vetor  $\vec{r}_1$  com o vetor  $\vec{T}_1$  que localiza essa massa imagem (Figura 2.10) teremos:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \vec{T}_1 \quad (2.107)$$

$$\vec{r}_1 = (r, x - lm_1). \quad (2.108)$$

Logo, o potencial gerado pela imagem pontual identificado por  $m$  é dado por:

$$V_m = -\frac{G_{n+4}M}{|\vec{\mathcal{R}} - \vec{T}_m|^{n+1}} = -\frac{G_{n+4}M}{(r^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - 2\pi Rm_i)^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (2.109)$$

Assim, o potencial gerado por todas as imagens topológicas é escrito em termos do somatório:

$$V_{n+4} = -\sum_i \frac{G_{n+4}M}{(r^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - 2\pi Rm_i)^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (2.110)$$

Para curtas distâncias, isto é, considerando que  $r \ll R$ , então o termo  $m = 0$  domina na soma (já que o potencial total produzido pelas massas imagens é simplesmente a soma do potencial gerado por cada imagem topológica) [44]:

$$V_{n+4} = -\frac{G_{n+4}M}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \quad (2.111)$$

$$= -\frac{G_{n+4}M}{\mathcal{R}^{n+1}}, \quad (2.112)$$

fazendo com que recuperemos a conhecida Lei de Newton  $(n + 1)$ -dimensional.

Agora tomaremos o caso em que os  $R$ 's são pequenos, comparados com  $\vec{r}$ . Para longas distâncias, isto é, considerando  $r \gg R$ , as massas imagens estariam, para um observador, muito próximas. Com isso, poderíamos tratá-las como uma distribuição contínua de massa e, com isso, aproximar o potencial total produzido por estas a uma integral. Para isso substituiremos  $\vec{x}_m = \vec{x} - 2\pi\vec{R}_m$ , onde  $\vec{R}_m = R(m_1, m_2, \dots, m_n)$  na equação (2.110). Observe que o vetor  $\vec{x}_m$  encontra-se em uma rede e cada célula dessa rede de imagens topológicas possui o volume  $\xi_n = (2\pi R)^n$ , que é o volume do toro. Com isso, o número de imagens topológicas contidas em cada célula do toro será:

$$dN = \frac{d^n x}{\xi_n}, \quad (2.113)$$

e o potencial gerado por esse número será:

$$dV_{n+4} = -\frac{G_{n+4}M}{\xi_n} \sum_m \frac{1}{(r^2 + x_m^2)^{\frac{n+1}{2}}} d^n x. \quad (2.114)$$

Assim, se considerarmos o potencial gerado por todas as imagens topológicas termos, da equação (2.114):

$$V_{n+4} \simeq -\frac{G_{n+4}M}{\xi_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} d^n \vec{x},$$

onde usamos o fato de que o volume do toro é pequeno comparado com  $r$ . Podemos calcular essa última integral fazendo uma mudança de variáveis para coordenadas esféricas e usando a superfície de uma esfera unitária  $(n-1)$ -dimensional [45],  $\Omega_n = 2\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^{-1}$ :

$$\begin{aligned} V_{n+4} &\simeq -\frac{G_{n+4}M}{\xi_n} \int_0^\infty \frac{\Omega_n x^{n-1}}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx, \\ &= -\frac{G_{n+4}M\Omega_n}{\xi_n} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx, \\ &= -\frac{G_{n+4}M\Omega_n}{\xi_n} \left( \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \frac{1}{r} \right), \\ &= -\frac{G_{n+4}M\Omega_n}{2\xi_n} \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Comparando a equação (2.115) com o potencial gravitacional clássico newtoniano, podemos escrever uma relação entre a constante gravitacional em  $(n+4)$  dimensões com a constante gravitacional newtoniana  $G_4$ :

$$G_{n+4} = \frac{2\xi_n}{\Omega_n}.$$

## 2.4.5 Cálculo das Correções Para o Potencial Devido as Dimensões Extras

A fim de obter um resultado mais exato, utilizaremos o potencial gerado por *todas* as massas topológicas, considerando novamente a topologia toroidal e que as dimensões extras estão compactadas:

$$V_{n+4} = - \sum_i \frac{G_{n+4}M}{\left(r^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - 2\pi R m_i)^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (2.116)$$

Vamos utilizar a fórmula especial da *Fórmula do Somatório de Poisson* para simplificar a soma n-dimensional (Apêndice B).

Para o nosso caso, temos que  $t = x_i$  e  $T = 2\pi R$  (Apêndice B). Aplicando a *FSP*, temos:

$$V_{n+4} = - \frac{G_{n+4}M}{\xi_n} \sum_i e^{-i\tilde{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\tilde{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x}}}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} d^n \mathbf{x}, \quad (2.117)$$

onde introduzimos  $\tilde{\mathbf{m}} \equiv \left(\frac{m_1}{R}, \frac{m_2}{R}, \dots, \frac{m_n}{R}\right)$ .

Podemos simplificar a integração fixando o nosso vetor  $\tilde{\mathbf{m}}$  em uma direção preferencial, que denotaremos pelo versor  $\hat{i}_1$ . Dessa forma o produto interno presente na integração se tornará simplesmente:

$$\tilde{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x} = \tilde{m} x_1. \quad (2.118)$$

Assim, nosso potencial ficará da seguinte forma:

$$V_{n+4} = - \frac{G_{n+4}M}{\xi_n} \sum_m e^{-i\tilde{m} x_1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\tilde{m} x_1}}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} d^n \mathbf{x}. \quad (2.119)$$

Agora, substituindo o elemento de “volume”  $d^n \mathbf{x}$  por (Apêndice A)

$$d^n \mathbf{x} = S^{n-1}(\rho) dx_1 d\rho,$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \rho^{n-2} dx_1 d\rho. \quad (2.120)$$

onde  $S^{n-1}(\rho)$  é a área superficial de uma esfera  $(n-1)$ -dimensional com raio  $\rho$ .

Assim, usando a equação (2.120) reescrevemos a equação (2.119) na seguinte forma

$$V_{n+4} = -\frac{G_{n+4}M}{\xi_n} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sum_m e^{-i\tilde{m}x_1} \int \int \frac{\rho^{n-2}}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} e^{i\tilde{m}x_1} dx_1 d\rho. \quad (2.121)$$

Agora, fazemos uma transformação de coordenadas para coordenadas esféricas, em que

$$x_1 = x \cos \theta, \quad (2.122)$$

$$\rho = x \sin \theta, \quad (2.123)$$

cujo Jacobiano será  $x dx d\theta$ , com  $x$  sendo o raio nessa transformação de coordenadas.

Logo, da equação (2.121), usando as equações (2.122) e (2.123), teremos:

$$\begin{aligned} V_{n+4} &= -\frac{G_{n+4}M}{\xi_n} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sum_m e^{-i\tilde{m}x \cos \theta} \int \int \frac{(x \sin \theta)^{n-2}}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} e^{i\tilde{m}x \cos \theta} x dx d\theta, \\ &= -\frac{G_{n+4}M}{\xi_n} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sum_m e^{-i\tilde{m}x \cos \theta} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\pi e^{i\tilde{m}x \cos \theta} (\sin \theta)^{n-2} d\theta \end{aligned}$$

Da expressão anterior, temos que a parte angular da integral no lado direito pode ser resolvida utilizando a fórmula 8.411(8) de [46], de modo que:

$$\int_0^\pi d\theta e^{i|\tilde{m}| \cos \theta x} \sin^{n-2} \theta = \frac{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n-1}{2}} |\tilde{m}|^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(x|\tilde{m}|) x^{1-\frac{n}{2}}. \quad (2.124)$$

Assim,

$$V_{n+4} = -\frac{G_{n+4}M \pi^{n/2} 2^{n/2}}{\xi_n} \sum_m \frac{e^{-i\tilde{m}x \cos \theta}}{|\tilde{m}|^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^\infty dx \frac{x^{n/2} J_{n/2-1}(x|\tilde{m}|)}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (2.125)$$

Logo, resolvendo a integral a partir da fórmula 6.565(3) de [46],

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{n/2} J_{n/2-1}(x|\tilde{m}|)}{(r^2+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{|\tilde{m}|^{n/2-1} \sqrt{\pi} e^{-r|\tilde{m}|}}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \frac{1}{r}, \quad (2.126)$$

finalmente obtemos:

$$V_{n+4} = -\frac{G_4 M}{r} \sum_m e^{-r|\tilde{m}|} e^{-ix\tilde{m}} \quad (2.127)$$

$$= -\frac{G_4 M}{r} \sum_m e^{-r|\tilde{m}|}. \quad (2.128)$$

onde tomamos<sup>4</sup>  $x = 0$  [44].

Podemos ter uma primeira aproximação tomando somente os maiores termos [44] [45], i.e.,  $|m| = 0$  e  $|m| = 1$ . Isso corresponde ao primeiro e segundo estado **KK**. Logo, conseguimos:

$$V_{n+4} \simeq -\frac{G_4 M}{r} (1 + \alpha e^{-r/R}), \quad (2.129)$$

onde  $\alpha$  diz respeito à degenerescência (i.e., quantas dimensões compactas estão com o mesmo raio  $R$ , que é o raio de compactação).

Para o caso de uma única dimensão extra, podemos calcular o potencial exato re escrevendo o somatório na equação (2.128). Note que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (e^{-\frac{r}{R}})^m = \sum_{m=0}^{\infty} (e^{-\frac{r}{R}})^m - 1. \quad (2.130)$$

Dessa forma, temos que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (e^{-\frac{r}{R}})^{|m|} = \frac{2}{1 - e^{-\frac{r}{R}}} - 1 = \coth\left(\frac{r}{2R}\right). \quad (2.131)$$

---

<sup>4</sup>Vale atentar que essa condição vem da ideia de que a matéria e os campos (exceto a o gravitacional) estão presos na brana. Então, do ponto de vista de um observador preso na brana, as coordenadas  $x$  da dimensão extra são nulas, nisso,  $x = 0$ .

Logo, o potencial gravitacional exato pode ser escrito da seguinte forma:

$$V_5 = -\frac{G_4 M}{r} \coth\left(\frac{r}{2R}\right). \quad (2.132)$$

## 2.4.6 Gravitação e o comprimento de Planck

Antes de encerrarmos o assunto sobre o Modelo ADD, é importante estudar como a constante gravitacional está relacionada com o comprimento de Planck. Após isso finalizaremos com uma breve discussão sobre o problema da hierarquia.

Há casos em que é mais conveniente estudar a gravitação utilizando o sistema de unidades de Planck, onde as três unidades básicas, centímetro, grama e segundo, são substituídas por novas unidades de comprimento, massa e tempo, de modo que as constantes fundamentais  $(G, \hbar, c)$  tomam valor unitário. Expressando essas novas unidades em termos de  $(G, \hbar, c)$ , teremos:

$$l_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,61 \times 10^{-33} \text{ cm}, \quad (2.133)$$

$$t_P = \frac{l_P}{c} = 5,4 \times 10^{-44} \text{ s}, \quad (2.134)$$

$$M_P = \sqrt{\frac{c\hbar}{G}} = 2,17 \times 10^{-5} \text{ g}, \quad (2.135)$$

as quais são chamadas de *Comprimento de Planck*, *Tempo de Planck* e *Massa de Planck*, respectivamente, que representariam a escala onde os efeitos da gravitação quântica se tornariam relevantes [41].

O próximo passo é generalizar essas relações para um espaço  $n$ -dimensional, onde  $n$  indica dimensões totais. Da equação (2.133) e com base na análise dimensional, o comprimento de Planck é expresso como [41]:

$$\begin{aligned} \left(l_P^{(n)}\right)^{n-2} &= \frac{G^{(n)} \hbar}{c^3}, \\ &= l_P^2 \frac{G^{(n)}}{G}, \end{aligned} \quad (2.136)$$

onde  $G^{(n)}$  é a constante gravitacional nesse espaço  $n$ -dimensional cuja unidade é

$$\begin{aligned} [G^{(n)}] &= [G] \frac{\left[ \left( l_P^{(n)} \right)^{n-2} \right]}{[l_P^2]}, \\ &= [G] \frac{L^{n-2}}{L^2}, \\ &= [G] L^{n-4}. \end{aligned} \tag{2.137}$$

Tomando o caso especial de uma dimensão extra ( $n = 5$ ), teremos

$$[G^{(5)}] = [G] L. \tag{2.138}$$

Assim, em 5 dimensões, a constante gravitacional extra dimensional possui um fator de comprimento multiplicativo em relação ao caso 4-dimensional,  $[G]$ . Além disso, como mostrado na equação (2.136), definimos a constante gravitacional  $G^{(n)}$  fundamental no universo  $n$ -dimensional, uma vez estabelecido algum valor para o comprimento de Planck  $l_P^{(n)}$  nesse universo. Para um universo 4-dimensional o valor efetivo do comprimento de Planck seria  $l_P = 10^{-33}\text{cm}$ , enquanto que o valor fundamental  $\left( l_P^{(n)} \right)$  seria medido no espaço maior.

A equação (2.137) nos mostra a relação entre  $[G]$  e  $[G^{(n)}]$ , o que, de fato, corrobora com a equação (2.93). Se generalizarmos agora a equação (2.93) para  $n$  dimensões, obteremos

$$\frac{G^{(n)}}{G^{(4)}} = (l_c)^{n-4}, \tag{2.139}$$

onde  $l_c = 2\pi R$  é o comprimento da dimensão extra, cuja topologia é uma pequena circunferência de raio  $R$ .

Com as equações (2.136) e (2.139) podemos encontrar a relação entre o comprimento fundamental de Planck num universo  $n$ -dimensional e o comprimento de Planck efetivo no universo 4-dimensional. Substituindo a equação (2.139) na equação (2.136),

teremos:

$$l_c = l_P^{(n)} \left( \frac{l_P^{(n)}}{l_P} \right)^{\frac{2}{n-4}}. \quad (2.140)$$

Se admitirmos que o comprimento de Planck no espaço  $n$ -dimensional é da mesma ordem que a escala eletro-fraca ( $\sim 10^{-18}$ cm) e, lembrando que  $l_P = 10^{-33}$ cm, obtemos, da equação (2.140), o seguinte resultado:

$$l_c = 10^{-18} (10^{15})^{\frac{2}{n-4}} \text{ cm}. \quad (2.141)$$

Para o caso de uma dimensão extra ( $n = 5$ ), teremos

$$l_c \sim 10^{12} \text{ cm} \sim 10^7 \text{ km}, \quad (2.142)$$

o que é quase vinte vezes a distância entre a Terra e a Lua!

Caso esse fosse o comprimento da dimensão extra, a sua detecção já teria sido efetuada. Com isso, o modelo ADD descarta o caso de um universo com apenas 1 dimensão extra. Agora, se considerarmos 2 dimensões extras ( $n = 6$ ), teremos que o comprimento da dimensão extra será [41]:

$$l_c \sim 0,01 \text{ mm}, \quad (2.143)$$

uma escala de comprimento onde a gravitação newtoniana vem sendo explorada [14].

Para distâncias maiores que a escala de compactação ( $R$ ), recuperamos o aparente caráter 4-dimensional do nosso universo. Entretanto, à medida que nos aproximamos dessa escala de compactação, o efeito das dimensões extras sobre a gravitação começam a se revelar e, para distâncias menores que o comprimento da dimensão extra, o potencial sofrerá uma correção, aparecendo, assim, um potencial anômalo, justificando a busca incansável de muitos físicos por desvios na lei do inverso do quadrado, o que indicaria a existência de dimensões extras.

## 2.5 Cenário de Branas

Na seção anterior apresentamos o modelo ADD que tem como principal motivação a possibilidade de resolver o problema da Hierarquia. Entretanto, ao apresentar a hipótese de que a gravidade, por ser a única a se propagar na dimensão extra, sofreria uma diminuição na sua intensidade, explicando assim a conhecida diferença descomunal entre a gravidade e as outras forças da natureza, o modelo ADD traz-nos uma nova hierarquia entre a escala de compactação e a eletro-fracas. Na busca por eliminar essa nova hierarquia surge, em 1999, o modelo proposto por Lisa Randall e Raman Sundrum, o modelo que viria a ser conhecido como o modelo Randall-Sundrum [5] [6] [7].

Os modelos de Randall-Sundrum (RS), assim como o modelo ADD, são modelos de brana. Mas, eles se distinguem do ADD por mostrar que um modelo de cinco dimensões não é incompatível com os dados experimentais. Isso é possível, como iremos verificar nesta seção, admitindo-se que o espaço ambiente possui uma constante cosmológica negativa ajustada à tensão da brana.

O modelo RS do tipo 1 [5] (que a partir de agora chamaremos de RSI) propõem a existência de duas branas em vez de uma única. Neste modelo, cada brana é caracterizada por uma densidade de matéria por unidade de 3-volume. Chamamos essa densidade de tensão da brana. Neste modelo a dimensão extra está compactada devido a existência dessas duas branas. No modelo RS do tipo 2 (RSII) [6] uma das branas é retirada, de maneira que a dimensão extra terá um comprimento infinito, ou seja, a dimensão extra deixaria de ser compacta.

### 2.5.1 Modelo Randall-Sundrum do Tipo I (RSI)

Este é um modelo no qual a dimensão extra está compactada devido a introdução de duas branas no espaço ambiente.

O modelo Randall-Sundrum considera que o espaço-tempo tem  $(4+1)$  dimensões,

ou seja, existe uma dimensão extra e esta é compactada em um círculo [8] cujas metades superior e inferior são identificadas. Dito de outra forma, isto significa que a topologia de nosso espaço é do tipo  $S^1/Z_2$  [5], onde  $S^1$  é a topologia da esfera unidimensional e  $Z_2$  é o grupo multiplicativo  $\{-1, 1\}$  [8] (ver Figura 2.11). Nesta topologia, o ponto com coordenada  $\theta$  é identificado com o ponto de coordenada  $-\theta$ , o que significa que esta condição incorpora periodicidade à dimensão extra. Os pontos fixos dessa topologia,  $\theta = 0$  em  $z = 0$  e  $\theta = \pi$  em  $z = z_c = \pi R$  são os pontos onde estão localizadas as duas branas. Cada brana possui uma densidade de energia também chamada de tensão da brana ( $\sigma$ ). A brana com tensão positiva ( $+\sigma$ ) está em  $z = 0$  e a outra, com tensão negativa ( $-\sigma$ ), está localizada em  $z = z_c$ . Dessa forma  $z_c$  mede o comprimento da dimensão extra, onde  $z_c \equiv R\theta$ , e  $R$  corresponde ao raio da dimensão extra.

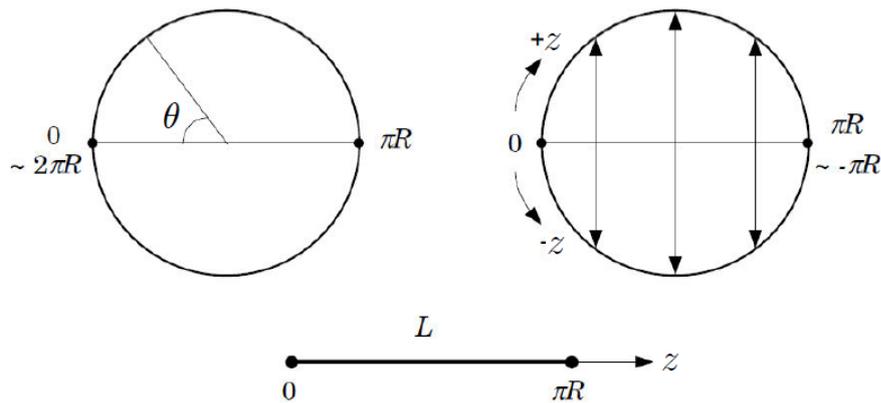


Figura 2.11: Simetria Orbifold. Adaptado de Gabella *et al* [8].

Por conveniência vamos representar a métrica em um sistema de coordenadas dado pelas quatro coordenadas usuais  $x^\mu$  do nosso universo, mais uma coordenada  $z$  para parametrizar a dimensão extra, onde a definimos perpendicular à brana, a fim de não haver termos cruzados  $dx^\mu dz$  na nossa métrica. Também precisamos que a métrica satisfaça a simetria global de Poincaré, visto que o mundo 4D proveniente dessa solução 5D deve parecer plano e estático [47]. Assim sendo, podemos tomar o *ansatz* a seguir [5] [8]:

$$ds^2 = a^2(z) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2, \quad (2.144)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski 4-D e  $a(z)$  é o fator de deformação ou de dobra (warping factor), cujo comportamento será determinado ainda nessa subseção.

As equações de Einstein no espaço ambiente são:

$$R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R = T_{AB}, \quad (2.145)$$

onde  $T_{AB}$  é o tensor momento-energia, o qual possui uma contribuição da constante cosmológica do espaço ambiente  $\Lambda$  e da tensão das branas, de maneira que

$$T_{AB} = \Lambda g_{AB} + 8\pi G_{(5)}\tau_{AB}, \quad (2.146)$$

onde  $G_{(5)}$  é constante gravitacional em cinco dimensões e  $\tau_{AB}$ , que descreve o conteúdo energético da brana, é dado por

$$\tau_{\mu\nu} = \sigma g_{\mu\nu}^{(5)}\delta(z) - \sigma g_{\mu\nu}^{(5)}\delta(z - z_c), \quad (2.147)$$

onde  $T_{Az} = 0$ , o que significa que não há fluxo de energia e momento entre a brana e o espaço ambiente [43].

A equação acima, equação (2.147), nos mostra que há, na verdade, duas branas, uma em  $z = 0$  e outra em  $z = \pi R$ , paralelas entre si e separadas ao longo da dimensão extra (Figura 2.12). Uma delas é a que nós habitamos que, por conveniências futuras, escolhemos que seja a  $z = z_c$ , e a denotamos por brana visível, enquanto a outra,  $z = 0$ , chamamos de brana oculta. Note que a existência da segunda brana foi necessária para que a dimensão extra seja compacta.

Assim, obtemos as componentes do tensor de Einstein [43]:

$$G_{\mu\nu} = -g^{(5)} \left[ 3 \left( \frac{a'}{a} \right)^2 + 3 \left( \frac{a''}{a} \right) \right], \quad (2.148)$$

$$G_{\mu z} = 0, \quad (2.149)$$

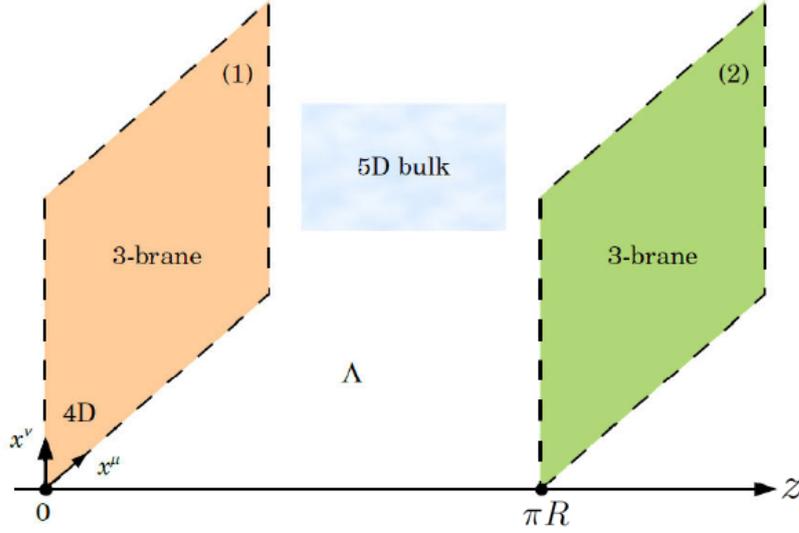


Figura 2.12: Figura esquemática mostrando as duas branas, oculta e visível, separadas por uma distância  $\pi R$  ao longo da dimensão extra. Adaptada de Gabella *et al* [8].

$$G_{zz} = -g_{zz}^{(5)} \left[ 6 \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \right], \quad (2.150)$$

onde o símbolo “'” denota derivada com relação à coordenada  $z$ .

Temos as componentes do Tensor de Einstein. Podemos, assim, finalmente escrever as equações de campo de Einstein.

Assim, utilizando as componentes obtidas juntamente com o tensor energia momento dado pela equação (2.146), temos [43]

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_{(5)} [\sigma g_{\mu\nu}^{(5)} \delta(z) - \sigma g_{\mu\nu}^{(5)} \delta(z - z_c)] + \Lambda g_{\mu\nu}^{(5)}, \quad (2.151)$$

$$G_{\mu z} = 0, \quad (2.152)$$

$$G_{zz} = 8\pi G_{(5)} \Lambda_{zz}^{(5)}. \quad (2.153)$$

Portanto, a equação (2.152) é automaticamente satisfeita e as equações (2.151) e (2.153) nos dão as equações abaixo:

$$\left( \frac{a'}{a} \right)^2 + \left( \frac{a''}{a} \right) = 8\pi G_{(5)} [\sigma \delta(z) - \sigma \delta(z - z_c)] + \Lambda, \quad (2.154)$$

$$-6 \left( \frac{a'}{a} \right)^2 = \Lambda. \quad (2.155)$$

No intervalo  $0 < z < z_c$  os termos com deltas na equação (2.154) serão nulos e as equações acima nos darão o seguinte resultado

$$a'' = \kappa^2 a, \quad (2.156)$$

que nos fornecerá o fator de deformação, cujo comportamento encontra-se na Figura 2.13,

$$a(z) = e^{\pm \kappa z}, \quad (2.157)$$

onde

$$\kappa^2 = -\frac{1}{6}\Lambda. \quad (2.158)$$

Observe que a solução só é compatível com  $\Lambda < 0$ , o que significa que o espaço-tempo *entre* as branas tem geometria anti-de Sitter ( $AdS_5$ ) [5]. Assim, podemos ver o comportamento do fator de dobra na seguinte figura:

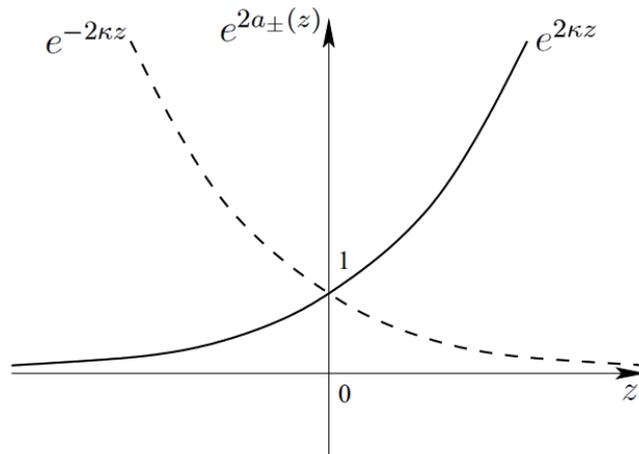


Figura 2.13: Gráfico do fator de dobra positivo e negativo em função da coordenada da dimensão extra. Adaptado de [48].

Obtemos o fator de deformação no intervalo  $0 < z < z_c$ , mas, nos falta considerar os pontos em que as branas se encontram. Dito isso, vamos agora estudar a equação

(2.154) nos pontos  $z = 0$  e  $z = z_c$ . Integrando  $z$  no intervalo  $-\varepsilon < z < \varepsilon$ , com  $\varepsilon$  pequeno, podemos determinar o efeito da brana de tensão positiva sobre a solução. Observando que a equação (2.154) pode ser reescrita como:

$$-3 \frac{d}{dz} (a'a) = 8\pi G_{(5)} a^2 [\sigma \delta(z) - \sigma \delta(z - z_c)] + \Lambda a^2, \quad (2.159)$$

obtemos, após a integração em torno de  $z = 0$ , a seguinte relação:

$$-3a'a|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 8\pi G_{(5)} \sigma. \quad (2.160)$$

No espaço  $S^1/Z_2$ , os campos devem ser simétricos com relação às branas, uma vez que  $\theta$  e  $-\theta$  correspondem ao mesmo ponto. Assim,  $a'$  é descontínua em  $z = 0$  (e também em  $z = z_c$ ).

Em torno de  $z = 0$ , temos:

$$a'(\varepsilon) = -\kappa e^{-\kappa\varepsilon}, \quad (2.161)$$

$$a'(-\varepsilon) = \kappa e^{-\kappa\varepsilon}. \quad (2.162)$$

Logo, da equação (2.160), no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos a relação:

$$6\kappa = 8\pi G_{(5)} \sigma. \quad (2.163)$$

De maneira análoga, integrando a equação (2.154) em torno de  $z_c$ , obtemos

$$-3a'a|_{z_c-\varepsilon}^{z_c+\varepsilon} = 8\pi G_{(5)} (e^{-2z_c}) \sigma. \quad (2.164)$$

Levando em conta a simetria de reflexão em torno da brana em  $z_c$ , temos:

$$a'(z_c + \varepsilon) = \kappa e^{-\kappa(z_c - \varepsilon)}, \quad (2.165)$$

$$a'(z_c - \varepsilon) = -\kappa e^{-\kappa(z_c - \varepsilon)}. \quad (2.166)$$

Observe que nos pontos especiais  $z = 0$  e  $z = z_c$  o fator de deformação  $a$  possui descontinuidades nas derivadas. Para que isso aconteça, o nosso fator de deformação deve ser escrito em termos de um módulo, de modo que:

$$a(z) = e^{\kappa|z|}$$

Logo, a equação 2.164 reproduz exatamente a condição dada pela equação 2.160 e, o fator de deformação, considerando os pontos fixos  $z = 0$  e  $z = z_c$ , está graficamente representado na Figura 2.14:

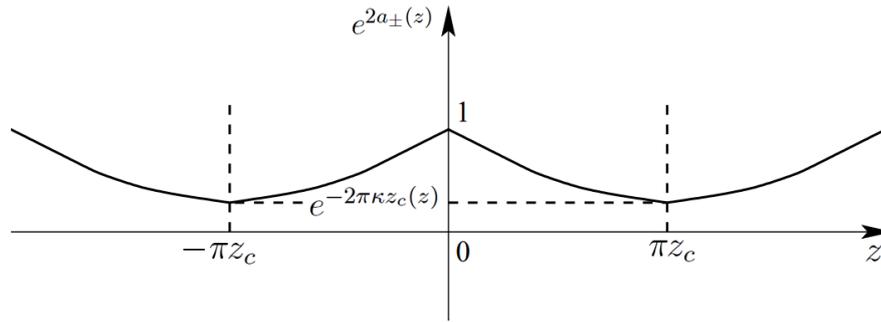


Figura 2.14: Gráfico do fator de dobra em função da coordenada da dimensão extra com os sinais ajustados para a compactação. Adaptado de [48].

Observe ainda que, conhecendo as equações (2.158) e (2.163) fica fácil determinar a tensão da brana. Da equação (2.163) temos que

$$\sigma^2 = \frac{36}{64\pi^2 G_{(5)}^2} \kappa^2, \quad (2.167)$$

Substituindo o resultado da equação (2.158) na equação (2.167) teremos

$$\sigma^2 = \frac{36}{64\pi^2 G_{(5)}^2} \left( -\frac{1}{6} \Lambda \right),$$

$$\sigma^2 = -\frac{3}{32} \frac{\Lambda}{\pi^2 G_{(5)}^2}.$$

### 2.5.1.1 Linearização da Gravidade na Brana

Um dos critérios importantes para verificar a validade das soluções é examinar se no regime de campo fraco as soluções obtidas reproduzem o comportamento já conhecido. A nossa métrica dada pela equação (2.144) não leva em conta a presença de matéria de forma que, a métrica induzida na brana é a do espaço de Minkowski 4-dimensional. Vamos assumir que ao incluir flutuações gravitacionais<sup>5</sup>, a métrica toma a seguinte forma

$$ds^2 = g_{AB}dx^A dx^B, \quad (2.168)$$

onde

$$g_{\mu\nu} = a^2(z) \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^\mu, z), \quad (2.169)$$

$$g_{zz} = -1, \quad (2.170)$$

ou seja,

$$ds^2 = [a^2(z) \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^\mu, z)] dx^\mu dx^\nu - dz^2. \quad (2.171)$$

O tensor  $h_{\mu\nu}$  é o termo da perturbação que satisfaz a condição  $h_{\mu\nu} \ll 1$ , de forma que podemos ignorar quantidades deste tipo com ordem maior que um. Além disso, vamos adotar um sistema de coordenadas no qual as componentes  $h_{\mu z} = 0$  [5].

A partir da métrica, podemos encontrar as Equações de Einstein. Se introduzimos matéria na brana (a causa da perturbação da métrica), as equações de campo serão

$$G_{AB} = 8\pi G_{(5)} T_{AB}^{mat} + 8\pi G_{(5)} \tau_{AB}^{brana} + \Lambda g_{AB}, \quad (2.172)$$

onde  $T_{AB}^{mat}$  e  $\tau_{AB}^{brana}$  são os tensores energia-momento da matéria e da brana respectivamente e  $\Lambda$  é a constante cosmológica no espaço ambiente. As equações de Einstein

<sup>5</sup>Aqui  $h_{\mu\nu}$  representa flutuações tensoriais em torno do espaço de Minkowski e é chamado de gráviton na teoria efetiva em 4-D [47].

podem ainda ser escritas da seguinte forma:

$$R_{AB} = 8\pi G_{(5)} \left( T_{AB}^{mat} - \frac{1}{3} T_{CD}^{mat} g^{CD} g_{AB} \right) + 8\pi G_{(5)} \left( \tau_{AB}^{brana} - \frac{1}{3} \tau_{CD}^{brana} g^{CD} g_{AB} \right) - \frac{2}{3} \Lambda g_{AB}. \quad (2.173)$$

Desenvolvendo o lado direito das equações (2.173), obtemos [43]:

$$R_{\sigma\nu} = 8\pi G_{(5)} \delta(z) \left( T_{\sigma\nu}^{mat} - \frac{1}{3} T_{\alpha}^{\alpha(mat)} \eta_{\sigma\nu} \right) - 8\pi G_{(5)} \frac{\sigma}{3} (\delta(z) - \delta(z - z_c)) \times \\ \times [a^2(z) \eta_{\sigma\nu} + h_{\sigma\nu}] - \frac{2}{3} \Lambda [a^2(z) \eta_{\sigma\nu} + h_{\sigma\nu}], \quad (2.174)$$

$$R_{\sigma z} = 0, \quad (2.175)$$

$$R_{zz} = \frac{8\pi G_{(5)}}{3} \delta(z) a^{-2} T_{\sigma}^{\sigma} + \frac{8\pi G_{(5)}}{3} [4\sigma (\delta(z) - \delta(z - z_c))]. \quad (2.176)$$

Usando a equação (2.154), que se aplica para a métrica de fundo, obtemos (ao aplicar nas três equações anteriores) [43],

$$\frac{1}{2} a^{-2}(z) [h_{\nu,\sigma,\mu}^{\mu} + h_{\sigma,\rho,\mu}^{\rho} - \eta^{\mu\rho} h_{\sigma\nu,\rho,\mu} - h_{\mu,\sigma,\nu}^{\mu}] + \frac{1}{2} h_{\sigma\nu}'' + \\ + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{a'}{a} \right) h_{\mu}^{\mu} - \left( \frac{a'}{a} \right)^2 h_{\mu}^{\mu} \right] \eta_{\sigma\nu} + 2\kappa [\delta(z) - \delta(z - z_c)] h_{\sigma\nu} - 2\kappa^2 h_{\sigma\nu} \\ = 8\pi G_{(5)} \delta(z) \left( T_{\sigma\nu}^{mat} - \frac{1}{3} T_{\alpha}^{\alpha(mat)} \right), \quad (2.177)$$

$$-\frac{1}{2} a^{-2} (h_{\nu,\mu}^{\nu} - h_{\mu,\rho}^{\rho}) + \left( \frac{a'}{a^3} \right) (h_{\nu,\mu}^{\nu} - h_{\mu,\nu}^{\nu}) = 0, \quad (2.178)$$

$$-\frac{1}{2} a^{-2} h_{\mu}^{\mu} + \frac{a'}{a^3} h_{\mu}^{\mu} + \left[ \frac{a''}{a^3} - \left( \frac{a'^2}{a^4} \right) \right] h_{\mu}^{\mu} = \frac{8\pi G_{(5)} a^2}{3} \delta(z) T^{(mat)}. \quad (2.179)$$

É possível mostrar que, no vácuo, podemos escolher um *gauge* (sistema de coordenadas) no qual  $h_{\mu\nu}$  é transverso e possui traço nulo [5], ou seja, satisfaz às condições:

$$h_{\nu,\mu}^{\mu} = \partial_{\mu} h_{\nu}^{\mu} = h_{\nu}^{\mu} = 0. \quad (2.180)$$

Observe que, impondo o gauge da equação (2.180), as equações (2.178) e (2.179) são satisfeitas na região externa automaticamente. Assim, nossa atenção se volta para a equação (2.177) que, na região externa à fonte assume a seguinte forma

$$h''_{\sigma\nu} - 4 [\kappa^2 - \kappa\delta(z) + \kappa\delta(z - z_c)] h_{\sigma\nu} - a^{-2} \partial^\mu \partial_\mu h_{\sigma\nu} = 0. \quad (2.181)$$

Para determinar a solução da equação (2.181), vamos estudar a equação no intervalo  $0 < z < z_c$ . Neste intervalo, os termos proporcionais a delta se anulam e a equação se reduz a:

$$h''_{\sigma\nu} - 4\kappa^2 h_{\sigma\nu} - a^{-2} \partial^\mu \partial_\mu h_{\sigma\nu} = 0. \quad (2.182)$$

Uma vez encontradas as soluções da equação (2.182), os efeitos das deltas de Dirac sobre as soluções serão determinados, integrando-se a equação (2.181), em torno de  $z = 0$  e  $z = z_c$ .

Considere primeiro a brana localizada em  $z = 0$ . Integrando a equação (2.181) no intervalo  $-\varepsilon < z < \varepsilon$  para  $\varepsilon$  pequeno, encontramos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \{h''_{\sigma\nu} - 4 [\kappa^2 - \kappa\delta(z) + \kappa\delta(z - z_c)] h_{\sigma\nu} - a^{-2} \partial^\mu \partial_\mu h_{\sigma\nu}\} dz = 0. \quad (2.183)$$

O segundo e quinto termos da integração se anulam para  $\varepsilon \rightarrow 0$  se admitimos que a métrica é contínua sobre a brana. Assim, utilizando as propriedades da delta de Dirac, temos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{[h'_{\sigma\nu}(\varepsilon) - h'_{\sigma\nu}(-\varepsilon)] + 4\kappa h_{\sigma\nu}(0)\} = 0. \quad (2.184)$$

No espaço  $S^1/Z_2$  os campos devem ser simétricos em relação a brana. Segue então, que  $h'_{\sigma\nu}(0^+) = -h'_{\sigma\nu}(0^-)$ , logo [4] [49]:

$$(h'_{\sigma\nu} + 2\kappa h_{\sigma\nu})|_{z=0} = 0. \quad (2.185)$$

Usando o mesmo raciocínio para a brana em  $z = z_c$ , encontramos

$$(h'_{\sigma\nu} + 2\kappa h_{\sigma\nu})|_{z=z_c} = 0. \quad (2.186)$$

As equações (2.185) e (2.186) podem ser entendidas como condições de contorno que devem ser impostas às soluções da equação (2.182), a fim de que sejam também soluções da equação (2.181).

Como veremos mais adiante, esta condição de contorno implicará a quantização do espectro de massa dos grávitons visto pelos observadores quadrimencionais.

### 2.5.1.2 Espectro de Massa dos Grávitons

Estamos interessados em discutir a solução da equação (2.182). Vamos tentar resolver aquelas equações empregando o método de separação de variáveis. Assim, propomos que a solução tem a forma

$$h_{\sigma\nu}(x^\mu, z) = \Psi(z) \Phi_{\sigma\nu}(x^\mu). \quad (2.187)$$

Substituindo a equação (2.187) na equação (2.182), obtemos

$$\Phi_{\sigma\nu}(x^\mu) \partial_z^2 \Psi(z) - \Psi(z) a^{-2} \square \Phi_{\sigma\nu}(x^\mu) - 4\kappa^2 [\Psi(z) \Phi_{\sigma\nu}(x^\mu)] = 0. \quad (2.188)$$

Rearranjando os termos podemos verificar que a equação (2.188) possui solução se existir alguma constante  $C$  tal que

$$\Psi''(z) - 4\kappa^2 \Psi(z) + a^{-2} C \Psi(z) = 0, \quad (2.189)$$

$$\square \Phi_{\sigma\nu}(x^\mu) = -C \Phi_{\sigma\nu}(x^\mu). \quad (2.190)$$

Fazendo  $C = m^2$  podemos reescrever a equação (2.190) na forma:

$$\square\Phi_{\sigma\nu}(x^\mu) + m^2\Phi_{\sigma\nu}(x^\mu) = 0. \quad (2.191)$$

Esta equação é uma equação de Klein-Gordon para um campo  $\Phi_{\sigma\nu}(x^\mu)$  de massa  $m$ . O campo  $\Phi_{\sigma\nu}(x^\mu)$  depende apenas das coordenadas da brana. Assim, pode ser interpretado como o campo de um “gráviton” (perturbação linear da métrica) de massa  $m$ , pelos observadores confinados na brana. Para cada  $m$  permitido, corresponderá um campo  $\Phi_{\sigma\nu}^{(m)}(x^\mu)$ , que é conhecido como modo *KK*.

A outra equação que obtemos com o método da separação de variáveis é:

$$\Psi_{(m)}''(z) - 4\kappa^2\Psi_{(m)}(z) + \frac{m^2}{a^2}\Psi_{(m)}(z) = 0. \quad (2.192)$$

Da equação (2.192), temos que uma solução em particular importante é o caso de  $m = 0$ . Para este valor, a equação diferencial acima se reduz à

$$\Psi_{(0)}''(z) - 4\kappa^2\Psi_{(0)}(z) = 0. \quad (2.193)$$

Esta é uma equação bem conhecida e a solução que satisfaz as condições de contorno dadas pelas equações (2.185) e (2.186) é:

$$\Psi_{(0)}(z) = C_0 e^{-2\kappa z}, \quad (2.194)$$

onde  $C_0$  é uma constante.

Esta solução é conhecida como o **modo zero** ( $m = 0$ ), que é de fundamental importância para a recuperação do comportamento quadridimensional do campo gravitacional na brana, para longas distâncias.

Por meio de uma mudança de coordenadas, onde fazemos  $x = \frac{m}{\kappa} e^{\kappa z}$  [43], obtemos

da equação (2.192):

$$\frac{d^2\Psi(x^\mu)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\Psi(x^\mu)}{dx} + \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) \Psi(x^\mu) = 0. \quad (2.195)$$

Esta equação pode ser reconhecida como uma equação diferencial de Bessel com índice  $n = 2$ . A solução mais geral para este tipo de equação tem a seguinte forma [50]

$$\Psi_{(m)}(z) = AJ_2\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}\right) + BN_2\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}\right), \quad (2.196)$$

onde  $J_2(z)$  e  $N_2(z)$  são as funções de Bessel de ordem 2 de primeira e segunda espécies respectivamente. Para determinar as constantes  $A$  e  $B$ , devemos impor as condições de contorno (equações (2.185) e (2.186)) em  $z = 0$  e  $z = z_c$ .

De acordo com a condição de contorno imposta em  $z = 0$ , temos portanto

$$AJ_2'\left(\frac{m}{\kappa}\right) + BN_2'\left(\frac{m}{\kappa}\right) + \frac{2\kappa}{m}AJ_2\left(\frac{m}{\kappa}\right) + \frac{2\kappa}{m}BN_2\left(\frac{m}{\kappa}\right) = 0. \quad (2.197)$$

Podemos utilizar a seguinte relação de recorrência [50] para as funções de Bessel<sup>6</sup>

$$J_n'(z) = J_{n-1}(z) - \frac{n}{z}J_n(z). \quad (2.198)$$

Logo, usando a equação (2.198) na equação (2.197), obtemos

$$AJ_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) + BN_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) = 0. \quad (2.199)$$

Assim,

$$\frac{A}{B} = -\frac{N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)}. \quad (2.200)$$

---

<sup>6</sup>A mesma relação de recorrência é válida para  $N_n(z)$ .

Dessa forma, temos

$$\Psi(z) = C_m \left[ J_1 \left( \frac{m}{\kappa} \right) N_2 \left( \frac{m}{\kappa} e^{\kappa z} \right) - N_1 \left( \frac{m}{\kappa} \right) J_2 \left( \frac{m}{\kappa} e^{\kappa z} \right) \right], \quad (2.201)$$

onde  $C_m$  é uma constante de normalização.

Agora vamos impor a condição de contorno em  $z = z_c$ , obtemos

$$J_1 \left( \frac{m}{\kappa} \right) N_1 \left( \frac{m}{\kappa} e^{\kappa z_c} \right) + N_1 \left( \frac{m}{\kappa} \right) J_1 \left( \frac{m}{\kappa} e^{\kappa z_c} \right) = 0, \quad (2.202)$$

ou seja,

$$\frac{J_1 \left( \frac{m}{\kappa} e^{\kappa z_c} \right)}{N_1 \left( \frac{m}{\kappa} e^{\kappa z_c} \right)} = - \frac{J_1 \left( \frac{m}{\kappa} \right)}{N_1 \left( \frac{m}{\kappa} \right)}. \quad (2.203)$$

Os valores permitidos para  $m$  são as raízes da equação (2.203). Portanto, o espectro de massa dos grávitons será determinado pelo conjunto de soluções da equação (2.203). Vimos que  $m = 0$  é uma solução. Queremos agora determinar o próximo valor permitido,  $m_1$ . Se admitirmos que  $m_1$  é pequeno comparado com  $\kappa$ , então, podemos expandir as funções de Bessel do lado direito da equação.

Para pequenos valores de seus argumentos, as funções tem a seguinte expansão:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} - \frac{x^{n+2}}{2^{n+2} (n+1)!} + \dots, \quad (2.204)$$

$$N_n(x) = -\frac{(n-1)!}{\pi} \left( \frac{2}{x} \right)^n + \dots \quad (2.205)$$

Assim, para  $n = 1$ , o caso de interesse, em primeira aproximação, encontramos:

$$J_1 \left( \frac{m}{\kappa} \right) = \frac{m}{2\kappa}, \quad (2.206)$$

$$N_1 \left( \frac{m}{\kappa} \right) = -\frac{1}{\pi} \frac{2\kappa}{m}. \quad (2.207)$$

Agora consideremos a razão  $\frac{J_1 \left( \frac{m}{\kappa} \right)}{N_1 \left( \frac{m}{\kappa} \right)}$ , quando  $m \ll \kappa$ , o lado direito da equação

(2.203) será dado por:

$$\frac{J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)} \sim \pi \left(\frac{m}{2\kappa}\right)^2. \quad (2.208)$$

Logo, em primeira ordem de  $m/\kappa$ , podemos escrever:

$$\frac{J_1\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c}\right)}{N_1\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c}\right)} \simeq 0. \quad (2.209)$$

Segue então que, para satisfazer a equação (2.203) devemos ter

$$J_1\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c}\right) \simeq 0. \quad (2.210)$$

Portanto,  $m_1$  corresponde à primeira raiz da função  $J_1\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c}\right)$ .

O comportamento da função de Bessel  $J_1(x)$  é ilustrado pelo gráfico da Figura 2.15:

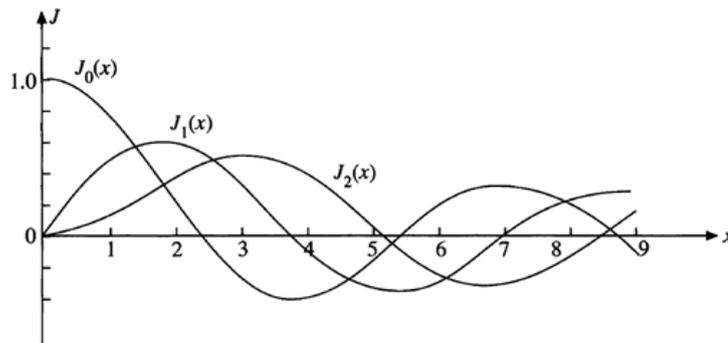


Figura 2.15: Funções de Bessel. Figura retirada da referência [43].

Uma análise gráfica para a função  $J_1(x)$  nos mostra que  $J_1\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c}\right)$  possui infinitas raízes. A primeira destas raízes está em  $\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c} = 0$ , ou seja, correspondendo a um gráviton sem massa (modo zero). Para a raiz seguinte, temos  $\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c} \simeq 3,8$ . Esta segunda raiz representa o primeiro modo com massa do gráviton, existindo assim um salto no espectro da massa dos grávitons de modo análogo ao que ocorre com o espectro do gráviton na teoria de Kaluza-Klein. O próximo nível, neste espectro, seria representado pela raiz seguinte, ou seja, a terceira raiz da função de Bessel e assim por diante. Logo

para  $J_1\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c}\right) \simeq 0$ , devemos ter que

$$\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c} \simeq \text{const.}, \quad (2.211)$$

onde, para as primeiras raízes, essa constante é da ordem de 1. Assim, para os primeiros valores de  $m$  teríamos

$$m \simeq \kappa e^{-\kappa z_c}. \quad (2.212)$$

Notamos que a massa dos grávitons depende do tamanho da dimensão extra. Assim, se escolhermos  $z_c$  suficientemente pequeno, podemos garantir que a massa do 1º modo KK seja muito grande ( $m \sim \kappa$ ). Neste caso a energia necessária para excitar o primeiro modo massivo seria muito alta e fora do alcance dos nossos instrumentos experimentais. Por causa disto, os grávitons com massa ainda não teriam sido detectados. Estes grávitons massivos não podem ser vistos por um observador quadridimensional que habita a brana. Para este observador *apenas os grávitons sem massa* podem ser observados na escala de energia atual [43].

## 2.5.2 Modelo Randall-Sundrum do Tipo II

Vamos agora tratar do segundo modelo do cenário RS, o qual denominamos por RSII. Neste modelo, a brana de tensão negativa é retirada de cena. Fazemos com que sua posição  $z_c$  esteja a uma distância infinita da brana de tensão positiva (ver Figura 2.16) e desta maneira a dimensão extra deixa de ser compacta e passa a ser uma dimensão extra de comprimento infinito.

Vimos anteriormente que os *modos KK* eram caracterizados pela constante  $m$ . Vimos também que os valores permitidos de  $m$  formavam um conjunto discreto e dependiam de  $z_c$ . Obtemos uma expressão para o modo zero e vemos que, à medida que  $z_c \rightarrow \infty$  os modos KK tornavam-se contínuos.

À primeira vista, poderíamos pensar que essa característica seria fenomenologica-

mente desastrosa para o modelo, uma vez que os modos KK leves (grávitons com massa pequena) seriam acessíveis mesmo a baixas energias e poderiam colocar a teoria em conflito com os testes experimentais. No entanto, é possível mostrar que devido a existência de um modo zero normalizável, o campo gravitacional apresenta um comportamento quadrimensional para longas distâncias [43].

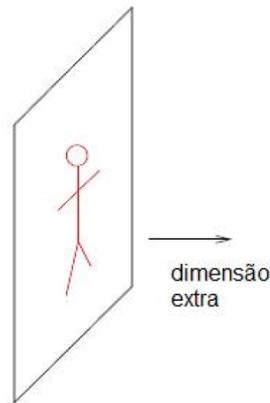


Figura 2.16: Dimensão extra no modelo RSII. Figura retirada de [43].

Seguindo novamente o processo de linearização das equações de Einstein nesse cenário de brana. Poderemos determinar as correções causadas pelas dimensões extras [43] [20]. Como a função de Green  $G(x, z; x', z')$  representa a função potencial, essas correções causadas no potencial gravitacional poderão ser determinadas a partir do cálculo dessa função de  $G(x, z; x', z')$ .

No modelo Randall-Sundrum do tipo 1, os valores permitidos de  $m$  (que foram interpretados como sendo as massas dos grávitons) caracterizavam um conjunto discreto de soluções e dependiam do comprimento da dimensão extra:

$$m \simeq \kappa e^{-\kappa z_c}.$$

Mas agora, tomando o limite em que  $z_c \rightarrow \infty$  (Modelo RSII), a condição de contorno estudada na seção anterior (equação (2.186)) não pode mais ser aplicada. Com isso,  $m$  pode assumir valores reais não negativos [20], fazendo com que o espectro torne-se contínuo (Veja novamente a Figura (2.2)).

Com o modo zero sendo normalizado no RSII [43], teremos o comportamento 4-dimensional conhecido para o campo gravitacional mais um termo de correção para longas distâncias [43]:

$$G(x, z; x', z') = -\frac{k}{4\pi R} \left( 1 - \frac{1}{\pi^2 k^2 R^2} \right). \quad (2.213)$$

Assim, como podemos ver da equação (2.213), a contribuição do modo KK com massa implicará numa correção na função de Green [43].

# 3 Testes Experimentais da Gravitação em Curtas Distâncias

Uma vez que revisamos os modelos de dimensão extras vamos, neste momento, estudar as implicações fenomenológicas deste espaço extra-dimensional. Neste capítulo vamos apresentar vínculos experimentais de diversos sistemas físicos para o raio da dimensão extra, para a massa de Planck como também para os parâmetros de Yukawa,  $\alpha$  e  $\lambda$ . Para isso, vamos nos concentrar no modelo ADD que, como vimos no capítulo anterior, é um modelo de branas onde o espaço extra-dimensional é compacto e de grande escala. Neste espaço, todos os campos do modelo padrão estariam aprisionados na brana, exceto a gravidade que se propagaria ao longo das dimensões extras.

Como vimos no capítulo anterior, a teoria envolvendo dimensões extras surge com a unificação como sendo um dos principais objetivos. Entretanto, a enorme discrepância entre a força gravitacional e as outras forças torna-se um grande problema para uma teoria unificadora [51]. Teorias alternativas ao modelo ADD foram propostas tendo como objetivo resolver esse problema. Também vimos que o modelo ADD prevê um desvio da lei do inverso do quadrado de Newton. Com isso, ao procurarmos por desvios da lei do inverso do quadrado podemos lançar luz sobre essa nova teoria.

Além dos testes da lei do inverso do quadrado como balança de torção e o Efeito Casimir, essa nova teoria pode ser testada e revelada a partir de outros fenômenos físicos, como por exemplo: *fenômenos astrofísicos* (relacionados à explosão de super novas e à produção de neutrinos), *fenômenos cosmológicos*, *experimentos espectroscópicos* e *Interferometria*. Contudo, falaremos apenas de alguns experimentos realizados em laboratório, por isso não abordaremos testes envolvendo fenômenos astrofísicos ou cosmológicos. Neste capítulo trataremos de alguns vínculos sobre as dimensões extras presente nos experimentos de balança de torção, aqueles envolvendo o efeito Casimir e espectroscopia. A Interferometria será abordada em detalhes nos próximos capítulos.

### 3.1 Parametrização

A Lei da gravitação de Newton vem sendo testada com rigor desde a sua formulação. Com isso, como vimos, testes de desvios da lei do inverso do quadrado e, consequentemente, do potencial gravitacional dariam indícios de dimensões extras no universo. Estes desvios vem sendo buscados experimentalmente e os limites são impostos por meio de parametrizações. Duas parametrizações bastante usadas são as de Yukawa e a da Lei de potências.

A parametrização por meio do potencial de Yukawa é dada por meio da adição do potencial newtoniano com o potencial de Yukawa:

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} (1 + \alpha e^{-r/\lambda}). \quad (3.1)$$

No potencial de Yukawa, como vimos no capítulo anterior,  $\alpha$  está relacionado com o número de dimensões extras e  $\lambda$  é uma escala de comprimento associada à escala de compactação da dimensão extra [51]. Como veremos, os limites obtidos usando essa parametrização serão dados por meio de um gráfico de  $\alpha \times \lambda$ .

Já a parametrização feita com base na correção da Lei de potência para o potencial newtoniano, é dada por [52] [4]

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \left[ 1 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^\delta \right], \quad (3.2)$$

onde  $r_0$  tem dimensão de comprimento e  $\delta$  é o número de dimensões extras.

Nas próximas seções iremos examinar os diferentes vínculos determinados por vários experimentos sobre desvios da lei do inverso do quadrado usando a parametrização de Yukawa.

## 3.2 Balança de torção: Teste da Lei do inverso do quadrado

Até alguns anos atrás, era amplamente aceito que a gravidade obedece a Lei do inverso do quadrado para distâncias maiores que o comprimento de Planck<sup>1</sup>, embora os testes da gravitação fossem apenas realizados com boa precisão para separações maiores que 1cm [53]. Após uma grande quantidade de especulações teóricas a gravidade começou a ser testada abaixo de 1mm, visando, claro, a busca por desvios da gravidade newtoniana. Esses desvios aventam a possibilidade de detecção de dimensões extras, mas vale a pena ressaltar que essa é apenas uma das motivações causadas por esse desvio. Existem extensões do modelo padrão da física de partículas que prevêem a existência de bósons adicionais que indiretamente poderiam interferir na lei da gravidade do inverso do quadrado em certos domínios [54] [55] e algumas teorias  $F(R)$  também fazem previsões semelhantes [56].

A maioria dos experimentos sensíveis à gravidade foram executados com balanças de torção, algo que ainda hoje é usado e, um dos grupos que se destacou nesses experimentos usando balança de torção foi o de Eöt-Wash da universidade de Washington [11]. Analisaremos a seguir os experimentos desse grupo nos anos de 2004 e 2006 .

### 3.2.1 O experimento de Eöt-Wash 2004

O dispositivo experimental, utilizado no experimento Eöt-Wash de 2004, para medir a gravidade em curtas distâncias foi um pêndulo de torção de baixas frequências, conforme mostra a Figura 3.1.

Este dispositivo consistia de um anel de Alumínio (chamado de detector) com dez orifícios, igualmente espaçados, suspenso por uma fina fibra de Tungstênio e, logo abaixo, consistia de dois discos coaxiais giratórios de cobre, com dez orifícios semelhantes (chamados de atrator) e que atuavam como a massa atratora do dispositivo.

---

<sup>1</sup> $l_P = \sqrt{G\hbar/c^3} = 1,6 \times 10^{-33}\text{cm}$

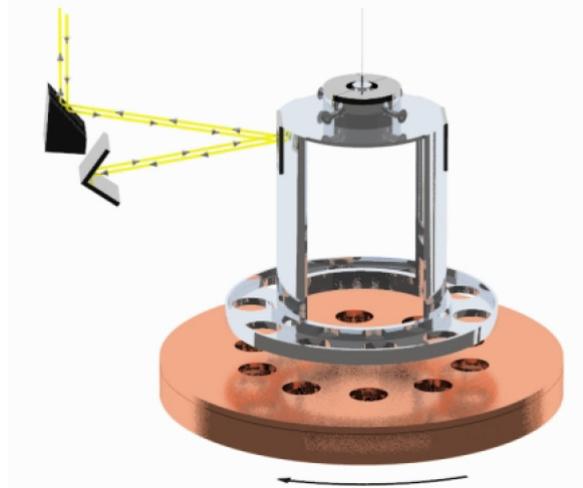


Figura 3.1: Desenho esquemático do experimento de curto alcance Eöt-Wash, composto por um pêndulo de torção e uma base atrativa giratória. A separação vertical entre a fonte e o detector não está em escala e a blindagem não é mostrada. Figura retirada de [12].

Estes discos atraíam o pêndulo gravitacionalmente, que gira num sentido e no outro dez vezes a cada volta<sup>2</sup>. Os furos no disco inferior foram rodados azimutalmente por  $18^\circ$  em comparação com os furos superiores. Essa geometria reduz o sinal da gravidade newtoniana (para “grandes” separações), entretanto tem pouco efeito sobre um sinal de curto alcance. O espelho montado acima do anel funcionava como autocolimador e media o torque do pêndulo através do brilho de um laser emitido [11] (ver novamente a Figura 3.1).

Caso não haja desvios da Lei do inverso do quadrado de Newton, os orifícios inferiores (as massas faltantes) produzirão um torque no anel do pêndulo que diminui, em certa magnitude, a torção induzida pelo disco superior. Entretanto, se a força gravitacional variar em curtas distâncias, ou seja, se houver um desvio, o torque induzido pelo disco inferior não cancelará o torque do disco superior e, com isso, veremos um sinal de torção.

Para esse experimento, o potencial foi parametrizado por um potencial do tipo Yukawa e, a melhor sensibilidade alcançada no experimento foi para  $\lambda \approx 1.5\text{mm}$ , restringindo  $|\alpha| < 0,0079$  com 95% de confiança [11]. Outro importante parâmetro, o raio

<sup>2</sup>Para uma visualização desse experimento recomendamos a referência [13].

da dimensão extra, foi restringido para  $R \leq 160\mu m$ . Para duas dimensões temos um limite inferior para a massa de unificação:  $M \geq 1,7 \text{ TeV}/c^2$ .

### 3.2.2 O experimento de Eöt-Wash 2006

Após o primeiro experimento, uma evolução com relação à sensibilidade era esperada. Assim, o segundo experimento do grupo Eöt-Wash, agora em 2006, trazia melhorias, tornando possível realizar o experimento numa escala de comprimento ainda menor [14]. No novo experimento, os corpos de testes foram 42 orifícios feitos no detector e na fonte, como podemos ver na Figura 3.2.

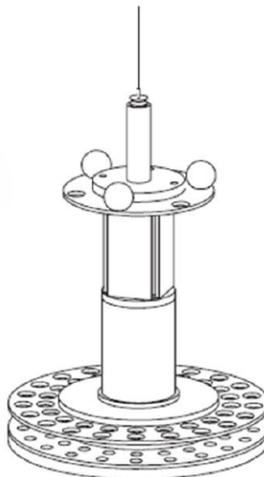


Figura 3.2: Esquema do segundo experimento realizado pelo grupo Eöt-Wash. Os quatro espelhos planos retangulares, abaixo das três esferas, foram usados para o monitoramento da torção. Figura retirada da referência [14].

O tamanho relativo dos orifícios foi melhorado fazendo com que aumentasse o torque da interação de curto alcance e, ao mesmo tempo, diminuísse o torque newtoniano. Assim como o seu antecessor, nesse experimento de 2006 o torque foi medido por um autocolimador, que também foi melhorado. Novamente, um disco foi colocado inferiormente ao primeiro disco para cancelar a interação gravitacional newtoniana. Caso a Lei do inverso do quadrado de Newton se mantivesse em curtas distâncias, esse disco cancelaria o torque induzido pelo disco superior. Com o aumento na quantidade

de orifícios, o cancelamento do efeito gravitacional newtoniano foi alcançado em um grau de precisão mais alto.

Após três experimentos, onde a espessura do disco compensador, o ângulo de suspensão e a frequência de rotação foram variadas [14], o melhor resultado obtido foi para  $\lambda \approx 600\mu m$ , restringindo  $|\alpha| < 0,0037$ , para um nível de confiança de 95%. A figura abaixo mostra o limite existente entre  $|\alpha|$  para testes do inverso do quadrado em intervalos inferiores a 1 cm, mostrado em função de  $\lambda$ . Nela encontramos vínculos de alguns experimentos, dentre eles os dois realizados pelo grupo Eöt-Wash (2004 e 2006).

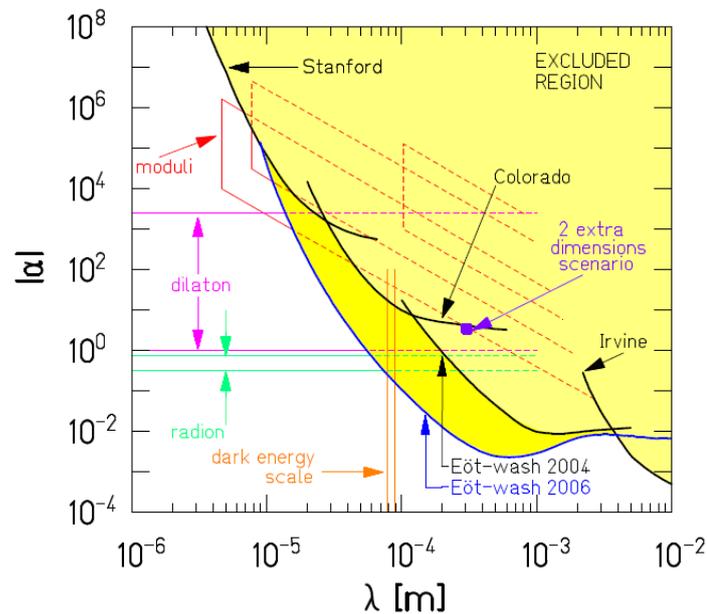


Figura 3.3: Limites às violações de Yukawa para a Lei da Gravitação do inverso do quadrado. As linhas rotuladas por Eöt-Wash 2004, Eöt-Wash 2006, Irvine, Colorado e Stanford mostram limites experimentais obtidos por esses respectivos grupos. A região acima das linhas sólidas apresenta limites sobre violações do tipo Yukawa para o potencial gravitacional e descarta quaisquer desvios na Lei do inverso do quadrado. Figura retirada de [15].

Observe que o experimento Eöt-Wash 2006 restringiu ainda mais o vínculo sobre a escala de dimensão extra; veja que, para  $|\alpha| = 1$  o valor de  $\lambda$  fica limitado a  $\lambda < 56\mu m$ . Para este resultado, o tamanho máximo da escala de compactação da dimensão extra foi  $R < 44\mu m$ . Para duas dimensões extras de mesmo tamanho, um limite inferior de massa de unificação foi imposto:  $M \geq 3,2 \text{ TeV}/c^2$ .

No ano de 2020 tivemos mais uma atualização no experimento usando a balança de torção do grupo de Washington [16], onde, para uma distância de separação entre o pêndulo e o atrator abaixo de  $52\mu\text{m}$ , obteve-se um limite mais restritivo para o parâmetro de Yukawa e o raio de compactação,  $\lambda < 38,6\mu\text{m}$  e  $R < 30\mu\text{m}$ .

### 3.3 Vínculos do Efeito Casimir

Outro fenômeno físico utilizado em testes de modificação da gravitação em curtas distâncias é o Efeito Casimir [17] [18], em homenagem ao físico holandês Hendrik Brugt Gerhard Casimir que teorizou o fenômeno em 1948. Uma forma de observarmos o Efeito Casimir é colocando duas placas metálicas condutoras, porém eletricamente neutras, paralelas entre si e separadas por uma distância da ordem de micrômetros no interior de uma câmara selada com vácuo no seu interior. Uma vez feito isso, o inesperado acontece: uma força atrativa entre as placas surge.

Casimir mostrou que a força de atração destas placas deveria ser inversamente proporcional à quarta potência da distância que as separam, que denotamos por  $a$  :

$$F = -A \frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4}, \quad (3.3)$$

onde  $A$  é a área de cada placa.

Esse é um efeito inesperado do ponto de vista da física clássica, onde o conceito de vácuo traz consigo o significado de completa ausência de matéria. Mas com a física quântica alcançamos uma nova compreensão sobre o vácuo. Foi-nos introduzido o conceito chamado de *Energia de ponto zero*, o qual se refere a uma energia decorrente de flutuações quânticas que não podem ser eliminadas por nenhum processo físico, sendo assim, algo intrínseco da própria natureza. Em um certo sentido, essa energia está relacionada com a energia mínima do oscilador harmônico quântico que não é nula, mas  $E_0 = h\nu/2$ . Assim, o efeito Casimir pode ser explicado através dessa nova compreensão,

sendo assim, uma consequência dessa energia de ponto zero.

Se considerarmos um campo eletromagnético numa região extensa onde temos o vácuo, as frequências de oscilação desse campo irão variar de zero a infinito. Se confinarmos o campo eletromagnético em uma região espacial limitada, é conhecido o fato que este espectro de frequência torna-se discreto devido as condições de contorno, a exemplo do poço quadrado infinito na mecânica quântica. O efeito Casimir surge dessa alteração do espectro da frequência de vibração do campo eletromagnético dado o confinamento gerado pelas placas metálicas. Note que essa alteração do espectro ocorre mesmo quando as condições de contorno são impostas no vácuo, devido a energia do ponto zero.

Calculando a energia do vácuo desconsiderando as placas, obtemos um valor infinito. Mas, o mesmo acontece se calcularmos a energia do vácuo *entre* as placas. Embora esses valores sejam infinitos, a diferença entre essas energias (sem as placas e com as placas) é finita e possui um significado físico. Essa diferença finita de energia pode ser interpretada como a energia necessária para se introduzir as placas no vácuo. Assim, temos que o efeito Casimir é uma manifestação macroscópica das propriedades microscópicas do vácuo quântico. Ou ainda, é um efeito puramente quântico resultante da modificação das oscilações das frequências do campo eletromagnético, devido a presença de fronteiras materiais, *i.e.*, as placas, quando comparada com o espaço sem fronteiras [17] [18].

Como sabemos, essas placas irão se atrair gravitacionalmente. Se essa interação for de acordo com a Lei do inverso do quadrado de Newton, a força gravitacional entre elas será muito pequena. Mas, se considerarmos o cenário de dimensões extras, esperaríamos que fosse detectado uma força anômala além da força de Casimir, resultante dessa amplificação do potencial para distâncias pequenas. Ora, uma vez que essa força anômala não foi detectada dentro do erro experimental, pode-se impôr vínculos para os parâmetros de Yukawa.

Testes utilizando o Efeito Casimir foram realizados com essa finalidade. Lembremos

que, da parametrização de Yukawa (equação 3.1),  $\lambda$  mede a escala onde ocorreria a modificação da gravitação. Além disso, para cada valor de  $\lambda$  teremos um vínculo diferente para  $\alpha$  e, quanto menor  $\lambda$  menor será o vínculo imposto para  $\alpha$ . Isso explica, como veremos na tabela abaixo, a diferença enorme entre os vínculos impostos pelos experimentos de balança de torção e os vínculos impostos usando o Efeito Casimir, pois, eles estão vinculando o  $\alpha$  em escalas de comprimento *diferentes*. A figura abaixo mostra os vínculos impostos sobre os parâmetros de Yukawa [19] utilizando o Efeito Casimir:

Experimento	Vínculo para os parâmetros $\alpha$ e $\lambda$
Lamoreaux (1997)	$\alpha < 2 \times 10^8$ para $\lambda = 5\mu\text{m}$
Sushkov et. al (2001)	$\alpha < 2 \times 10^9$ para $\lambda = 1\mu\text{m}$
Masuda (2009)	$\alpha < 3 \times 10^{10}$ para $\lambda = 1\mu\text{m}$
Decca et al (2005, 2007)	$\alpha < 3 \times 10^{13}$ para $\lambda = 100\text{nm}$
Harris et al 2000	$\alpha < 3 \times 10^{19}$ para $\lambda = 10\text{nm}$
Bezerra et al (2011)	$\alpha < 2.8565 \times 10^{25}$ para $\lambda = 10\text{nm}$ , $\alpha < 1.470 \times 10^{14}$ para $\lambda = 100\text{nm}$ e $\alpha < 1.1212 \times 10^{11}$ para $\lambda = 1000\text{nm}$

Figura 3.4: Vínculos impostos sobre os parâmetros de Yukawa utilizando o Efeito Casimir. Tabela retirada da referência [20].

### 3.4 Vínculos Espectroscópicos

Sabe-se que os vínculos mais fortes para o desvio da lei do inverso do quadrado de Newton na escala de Angstrom, usando a espectroscopia, vem da análise das transições do Hélio antiprotônico [10] [57]. Esse elemento é formado em laboratório, onde no lugar de um dos dois elétrons do Hélio natural, substitui-se por um antipróton [58]. Com essa mudança, temos que a interação gravitacional entre o núcleo e o antipróton é aumentada em cerca de 2000 vezes<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>A massa do antipróton é cerca de 1836 vezes a massa do elétron.

A princípio poderíamos pensar que seria uma grande vantagem em usar esse elemento, já que a distância entre o antipróton e o núcleo é menor que o raio de Bohr<sup>4</sup> (para o estado fundamental desse elemento) e isso nos ajudaria na busca por desvios da gravidade na escala de milésimos de Angstroms. Mas temos um problema, devido a proximidade do antipróton com o núcleo, o hélio antiprotônico possui uma vida extremamente curta, cerca de  $10^{-12}$ s! Isso se deve ao processo de aniquilação de matéria-antimatéria [59]. Com esse tempo de vida ínfimo, estudar o hélio antiprotônico com a tecnologia atual torna-se inviável.

Entretanto, existe uma fração desse átomo que são sintetizados em laboratórios que possuem um alto número quântico, em estados de Rydberg [20] [60]. Nesses casos, em estados com número atômico  $n \sim 40$ , a distância relativa do antipróton para o núcleo é aproximadamente  $a_0$ , o raio de Bohr. Para essa distância, a probabilidade da função de onda dessa antipartícula se sobrepor ao núcleo é diminuída e, por isso, o tempo de vida do elemento aumenta para a ordem de microssegundos [59], dentro das nossas capacidades laboratoriais atuais. Esses estados de Rydberg foram investigados por espectroscopia de laser com precisão relativa de algumas partes em  $10^{-9}$  [59]. Comparando os dados experimentais com os cálculos teóricos, baseados na QED, verificou-se um acordo entre os resultados [10]. Com esse resultado obteve-se alguns limites para os parâmetros de Yukawa. Com  $1\sigma$  de nível de confiança obteve-se  $\alpha < 10^{28}$  para  $\lambda \sim 1\text{Å}$  [25].

### 3.4.1 Frequência de Transição $1S - 3S$ do Hidrogênio

O objetivo dessa subseção é discutir possíveis desvios do potencial gravitacional newtoniano na escala atômica usando a espectroscopia. Por isso, vamos comparar os vínculos dos parâmetros de Yukawa determinados da espectroscopia do Hidrogênio com os conhecidos do Hélio antiprotônico. Falamos da vantagem em utilizar o Hélio an-

---

<sup>4</sup>Isso porque agora a distância relativa entre o antipróton e o núcleo foi diminuída, uma vez que o Raio de Bohr está relacionado com a massa do antipróton,  $a_0 = \epsilon_0 \frac{\hbar^2}{\pi m_p^2}$ .

tiplotônico em razão da interação gravitacional ser cerca de 2000 vezes maior que o do Hidrogênio, e isso faria dele um ótimo candidato para buscas por desvios da gravidade na escala atômica, entretanto, os dados espectroscópicos do hidrogênio são muito mais precisos. Para se ter uma ideia, o valor experimental da frequência de transição  $1S - 2S$  é  $f_{1S-2S}^{\text{exp}} = 2466061413187035$  Hz [22], com um erro experimental de  $\delta_{\text{exp}} = 10\text{Hz}$ , que foi medida com uma precisão relativa da ordem de  $10^{-14}$ . Caso a incerteza experimental fosse da mesma ordem de magnitude da incerteza experimental, o acordo entre  $f_{1S-2S}^{\text{exp}}$  e  $f_{1S-2S}^{\text{teórico}}$  colocaria um vínculo muito forte para os parâmetros de Yukawa. Contudo, o valor dessa frequência de transição é um dos valores mais precisos em um conjunto de dados usado para determinar certas constantes fundamentais, entre elas a de Rydberg (Ver tabela XVII em [61]). Como o valor de algumas constantes dependem diretamente dessa frequência, o uso de um erro associado com essa frequência deve ser usado com muita cautela.

Em razão disso vamos considerar, daqui para frente, a transição  $1S - 3S$ . A precisão relativa alcançada para essa transição é da ordem<sup>5</sup> de  $10^{-12}$  [21]. Embora a frequência da transição  $1S - 3S$  não seja tão precisa quanto a da transição  $1S - 2S$ , agora temos uma vantagem que é o fato da frequência da transição  $1S - 3S$  não pertencer ao conjunto de dados do CODATA [61] para determinar constantes fundamentais.

Os valores experimental [21] e teórico [62] para a frequência da transição  $1S - 3S$  são, respectivamente:

$$f_{1S-3S}^{\text{exp}} = 2922743278671.6(1.4)\text{kHz}, \quad (3.4)$$

$$f_{1S-3S}^{\text{teórico}} = 2922743278671.5(2.6)\text{kHz}, \quad (3.5)$$

onde a incerteza é expressa entre parênteses. Se admitirmos que as incertezas experimental e teórica são independentes, o erro combinado é  $\delta f = \sqrt{\delta_{te}^2 + \delta_{\text{exp}}^2} \simeq 3,0\text{kHz}$  [60]. Isso demonstra o acordo entre a precisão teórica e experimental da frequência de transição. Assim, temos que qualquer interação hipotética, como a interação gravitaci-

---

<sup>5</sup>Mesma ordem para a o valor teórico.

onal modificada, não deve introduzir correções para a frequência em uma quantidade  $\Delta f$  maior que o erro combinado,  $\delta f$ . É essa a condição pela qual os vínculos para os parâmetros de Yukawa serão determinados.

Essa correção,  $\Delta f$ , pode ser calculada usando o método de perturbação. Relembrando, estamos investigando o átomo de Hidrogênio, nisso, a interação gravitacional entre o próton e o hidrogênio é descrita pela hamiltoniana

$$H_G^{(0)} = m_e \varphi, \quad (3.6)$$

onde  $\varphi(r) = -(Gm_p/r)(1 + \alpha e \exp(-r/\lambda))$  é o potencial gravitacional modificado em razão das dimensões extras produzido pelo próton. Assim, devido o potencial atrativo, essa nova interação diminuirá a energia de cada estado  $\psi$  por uma quantidade  $\langle H_G^{(0)} \rangle$ , o valor médio de  $H_G^{(0)}$  no estado  $\psi$ ; a interação gravitacional mudará as energias dos estados  $1S$  e  $3S$ , resultando num aumento na diferença de energia entre eles. Isso implica uma correção da frequência de transição, na primeira ordem, dada por

$$\Delta f = \frac{\langle H_G^{(0)} \rangle_{3S} - \langle H_G^{(0)} \rangle_{1S}}{h}, \quad (3.7)$$

onde  $h$  é a constante de Planck.

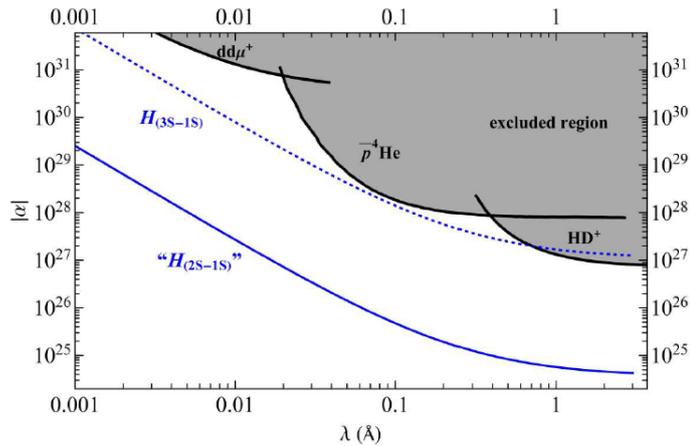


Figura 3.5: Limites para os desvios do potencial newtoniano originados da espectroscopia do átomo de hidrogênio na transição dos estados  $1S - 3S$  comparados com outros limites existentes para os átomos  $dd\mu^+$ ,  $\bar{p}He^+$  e  $HD^+$ . Figura obtida da referência [60].

Determinada a correção  $\Delta f$  podemos utilizar a condição  $\Delta f < \delta f$  para determinar os vínculos buscados. Na Figura 3.5 vemos os vínculos dos parâmetros de Yukawa impostos pela condição  $\Delta f < \delta f$ .

Observe que os limites obtidos usando a frequência de transição  $1S - 3S$  são um pouco mais forte que os limites do Hélio antiprotônico ( $\bar{p}He$ ) como também da espectroscopia do  $dd\mu^+$  (molécula formada por dois dêuterons e um múon) e de  $HD^+$  (molécula ionizada constituída por um Hidrogênio e um Deutério). Do gráfico vemos que, para  $\lambda = 1\text{\AA}$ ,  $\alpha < 1,7 \times 10^{27}$ , com um nível de confiança de  $1\sigma$ .

Nessa seção o foco foi a espectroscopia mas também é interessante comparar os vínculos encontrados aqui com outros limites derivados de outras fontes da natureza, como ilustrado na Figura 3.6.

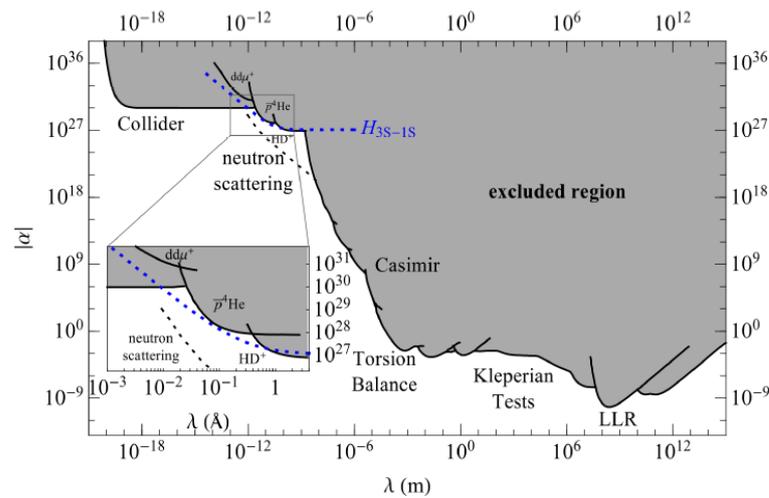


Figura 3.6: Comparação dos limites espectroscópicos para os parâmetros de Yukawa vindos da frequência de transição  $1S - 3S$  (linha pontilhada) com limites empíricos determinados por outros fenômenos. Figura retirada da referência [60].

Como podemos ver nesse quadro mais geral, os vínculos obtidos por  $H_{1S-2S}$  são mais fracos que os vínculos obtidos pelo Colisor para um  $\lambda$  pequeno, por  $HD^+$ , para  $\lambda > 0,6\text{\AA}$  e para espalhamento de nêutrons para qualquer  $\lambda$ .

### 3.4.2 Acoplamento Spin-Órbita

No espaço curvo, é conhecido o fato que a direção final de um vetor que é transportado paralelamente ao longo de um caminho fechado não coincide com a direção inicial dele. Bem, baseado nisso, esperamos que ao se mover num campo gravitacional, uma partícula sofrerá uma mudança no seu spin, ou seja, uma precessão [63]. Esse efeito já foi diretamente verificado no regime clássico pelo GRAVITY PROBE B, onde mediu-se a mudança na orientação do eixo de um giroscópio que movia-se ao longo de uma geodésica em volta da Terra [64].

Já no domínio microscópico, a precessão do spin de um elétron induzida por um campo gravitacional foi investigada pelo experimento chamado MTV-G<sup>6</sup> [65] que, baseado na ideia de Nevill F. Mott de detecção do spin por duplo espalhamento, consiste de uma fonte de radiação de Estôncio, uma folha de espalhamento primário, um polarímetro Mott, uma folha de espalhamento secundário e uma câmara de rastreamento de elétrons. A Figura 3.7 mostra um esquema simplificado do espalhamento realizado pelo MTV-G.

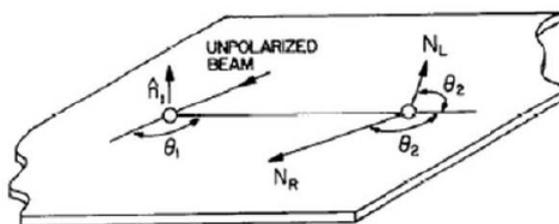


Figura 3.7: Representação de um espalhamento duplo, onde um dos feixes de elétrons não polarizados é inicialmente espalhado por núcleos com alto número atômico  $Z$  em uma folha-alvo. Figura retirada de [20].

Nesse experimento, além da interação eletromagnética, considerou-se uma interação gravitacional entre o elétron e o núcleo, amplificada pela existência das dimensões extras. Com isso, o espalhamento do elétron seria afetado por esse campo através de uma

<sup>6</sup>Sigla em inglês para “Polarímetro Mott para experimentos de Violação-T”. A letra “G” refere-se à gravidade.

hamiltoniana (que veremos mais adiante) da parte gravitacional [20]. Como não se observou efeitos adicionais na precessão do spin de um elétron, foram impostos vínculos sobre os parâmetros de Yukawa.

Esse experimento foi realizado em 2011, em TRIUMF<sup>7</sup>, e obteve-se um novo vínculo para o parâmetro  $\alpha$  [65] (ver Figura 3.7).

Como sabemos, o spin de uma partícula é uma propriedade quântica e, por estarmos tratando de uma precessão do spin causado pela gravidade, faz-se necessário tratar o problema usando o formalismo da mecânica quântica.

Para isso, faremos uso da equação de Dirac no espaço curvo. Em primeira aproximação, é razoável assumir que o próton produz um campo gravitacional estático e esfericamente simétrico. Dessa forma, podemos escrever a métrica desse espaço-tempo nas coordenadas isotrópicas, como [60]

$$ds^2 = -c^2 w^2 dt^2 + v^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.8)$$

onde as funções  $w$  e  $v$  são funções que dependem das coordenadas  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Estas funções  $w$  e  $v$ , no limite de campo fraco, podem ser expressas em termos de potenciais, tais como

$$w = 1 + \frac{\varphi}{c^2}, \quad (3.9)$$

$$v = 1 - \frac{\tilde{\varphi}}{c^2}. \quad (3.10)$$

A Teoria Geral da Relatividade não faz distinção entre  $\varphi$  e  $\tilde{\varphi}$ , fazendo  $\varphi = \tilde{\varphi}$ . Mas, como a nossa proposta é estudar desvios da gravitação na escala atômica, tomaremos  $\varphi \neq \tilde{\varphi}$ . Ou seja, o parâmetro de Yukawa  $\tilde{\alpha}$  associado ao potencial  $\tilde{\varphi}$  não é, necessariamente, igual a  $\alpha$ .

A possibilidade do potencial  $\tilde{\varphi}$  ser diferente do potencial newtoniano foi aventada

---

<sup>7</sup>Centro nacional de aceleradores de partículas do Canadá.

pelo formalismo pós-newtoniano (PPN), que surge em 1964 com o propósito de testar teorias métricas, a exemplo da Teoria da Relatividade Geral e a Teoria de Brans-Dick (no regime de campo fraco) [66]. O próprio parâmetro  $\alpha$  pode ser escrito em termos de um parâmetro PPN. Pela parametrização de Yukawa, temos que

$$\tilde{\varphi}(r) = \frac{GM}{r} (1 + \tilde{\alpha}), \quad (3.11)$$

no limite  $r \ll \lambda$ . Assim, concluímos que essa combinação  $(1 + \tilde{\alpha})$  desempenha o papel do parâmetro  $\gamma$  do formalismo PPN [66]. Parâmetro esse que, através de experimentos de deflexão da luz e atraso temporal, foi determinado como sendo  $\gamma = 1 + (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$  [67].

Voltando para esse problema em questão, se utilizarmos a equação de Dirac no espaço-tempo curvo utilizando as funções  $w$  e  $v$  no limite de campo fraco, é possível mostrar que o acoplamento spin-órbita do elétron pode ser induzido pelo campo gravitacional produzido pelo núcleo do átomo de acordo com a Hamiltoniana [20]:

$$H_{G_{SO}} = \frac{1}{mc^2} \frac{1}{r} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} \right) \vec{S} \cdot \vec{L}, \quad (3.12)$$

onde  $\vec{S}$  é o operador de spin e  $\vec{L}$  é o momento angular orbital da partícula. Esse termo,  $H_{G_{SO}}$ , da hamiltoniana geral é chamado de termo de interação spin-órbita gravitacional [20]. Assim como o acoplamento spin-órbita eletromagnético é responsável por uma separação dos níveis de energia com o mesmo momento angular, o acoplamento spin-órbita gravitacional causará uma mudança adicional nesses estados.

Existem cálculos teóricos precisos das frequências de transição do Hidrogênio baseados na QED. Por exemplo, para a frequência de transição entre  $2P_{1/2}$  e  $2P_{3/2}$  [61]:

$$f_{2P_{1/2}-2P_{3/2}}^{teórico} = 10969041.571(41)\text{kHz}. \quad (3.13)$$

Baseados nos experimentos das frequências de transição  $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$  e  $2P_{3/2} - 2S_{1/2}$

determinou-se a frequência de transição entre  $2P_{1/2}$  e  $2P_{3/2}$  [68]:

$$f_{2P_{1/2}-2P_{3/2}}^{\text{exp}} = 10969045(15)\text{kHz}. \quad (3.14)$$

Veja que os valores experimental e teórico concordam dentro do erro combinado  $\delta f = 15\text{kHz}$ . Por isso, a contribuição advinda da interação spin-órbita gravitacional,  $\Delta f_{so}$ , não pode ultrapassar esse erro combinado.

Ora, vimos na equação (3.12) que o termo de interação spin órbita gravitacional é proporcional ao produto interno  $\vec{S} \cdot \vec{L}$  e, isso nos mostra que, dependendo da orientação entre eles,  $H_{G_{so}}$  contribuirá com uma energia positiva ou negativa. E é esse efeito que aumentará a separação de energia entre esses estados. Assim, em primeira aproximação, a contribuição adicional na frequência de transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$ , gerada pela interação spin-órbita gravitacional é dada por [60]:

$$\Delta f_{so} = \frac{\Delta E_{G_{so}}}{h}, \quad (3.15)$$

que será diretamente proporcional a  $(\frac{\alpha}{2} + \tilde{\alpha})$  [20].

Como essa contribuição do acoplamento spin-órbita gravitacional na frequência de transição depende do fator  $(\frac{\alpha}{2} + \tilde{\alpha})$ , logo, ela está relacionada com  $\tilde{\varphi}$ . Ora, a contribuição do potencial  $\varphi$  na transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$  é menor que o erro experimental, fazendo com que a desprezemos. Assim, podemos desprezar o potencial  $\varphi$  em  $\Delta f_{so}$ . O que isso quer nos dizer? Bem, podemos concluir que a análise da influência da interação spin-órbita gravitacional na estrutura fina dos estados pode ser vista como um teste de um potencial pós-newtoniano no domínio atômico.

Na Figura 3.8 ilustramos os vínculos para esse parâmetro  $(\frac{\alpha}{2} + \tilde{\alpha})$  em termos de  $\lambda$ .

Como podemos ver, para  $\lambda > 1,5 \times 10^{-3}\text{Å}$ , os limites determinados pela transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$  são mais fortes que os encontrados pelo experimento MTV-G. Para  $\lambda = 1\text{Å}$ , temos que  $\alpha < 2,1 \times 10^{33}$  [60], cerca de 4 ordens de magnitude a menos que o do

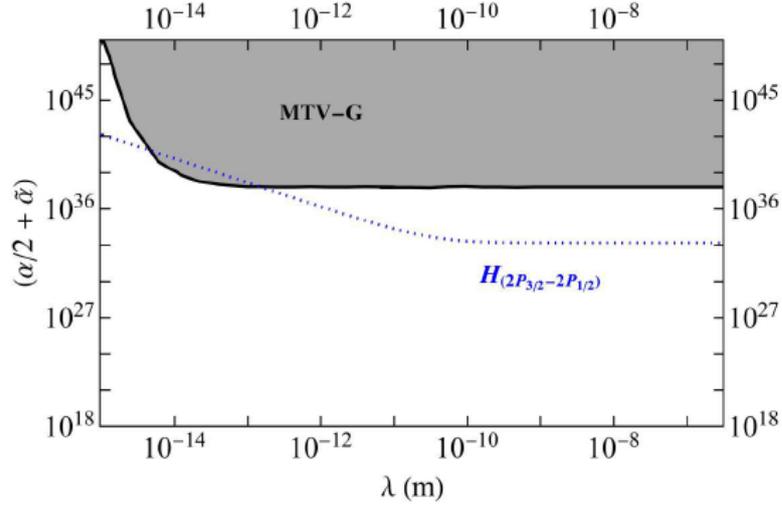


Figura 3.8: Limites para o parâmetro  $(\frac{\alpha}{2} + \tilde{\alpha})$ . A linha pontilhada é extraída da análise da influência do acoplamento spin-órbita gravitacional para a separação dos estados  $2P_{1/2}$  e  $2P_{3/2}$  do Hidrogênio. Figura retirada da referência [60].

experimento MTV-G.

Embora a transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$  não forneça vínculos tão fortes quanto da transição  $1S - 3S$ , e conseqüentemente da transição  $1S - 2S$ , não devemos negar o fato de que a transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$  traz-nos um novo “ingrediente” ao estabelecer vínculos sobre o comportamento de um potencial pós-newtoniano, de grande importância para algumas teorias métricas.

### 3.4.3 Frequência de Transição $1S - 2S$ do Hidrogênio

Vimos no primeiro capítulo que o modo zero espinorial é dado por:

$$\Psi_0(x, z) = \exp\left(-h \int \phi_0(z) dz\right) \psi_0(x). \quad (3.16)$$

Ora, o campo espinorial pode ser escrito de forma geral como

$$\Psi_0(x, z) = \chi(z) \psi(x),$$

onde  $\chi(z)$  é uma função do espaço suplementar e  $\psi(x)$  é um espinor em  $4D$ .

No cenário de branas, vamos imaginar que a matéria está localizada na brana e, por simplicidade, vamos supor que a função  $\chi(z)$  é uma gaussiana [69]:

$$\chi(z) = \left(\frac{2}{\pi\sigma^2}\right)^{\delta/4} \exp\left(-\sum_{i=1}^{\delta} \frac{z_i^2}{\sigma^2}\right), \quad (3.17)$$

que se encontra em torno do centro dessa brana com desvio padrão  $\sigma$ . Essa largura  $\sigma$  deve ser menor que a espessura da brana, que é menor que  $10^{-19}\text{m}$ , de acordo com os limites experimentais [4].

Bem, o átomo encontra-se na brana, por isso devemos entender como se dá o comportamento do elétron e do próton nesse cenário. Também vimos no primeiro capítulo que, para um espaço extradimensional cuja topologia é toroidal, o potencial gerado pelas imagens topológicas pode ser expresso da seguinte forma

$$V(R) = -\frac{G_{4+\delta}m}{R^{\delta+1}} - \sum_i \frac{G_{4+\delta}m}{|\vec{R} - \vec{R}'_i|^{\delta+1}}, \quad (3.18)$$

onde  $m$  é uma massa puntiforme e  $\vec{R}'_i$  é o vetor posição das massas topológicas que, em termos das componentes é escrito como

$$\vec{R}'_i = l(0, 0, 0, m_1, m_2, \dots, m_\delta), \quad (3.19)$$

onde os termos  $[m_1, m_2, m_3, \dots, m_\delta]$  são números inteiros.

Vamos considerar o primeiro termo dessa soma, já que ele dá a maior contribuição dessa soma (veja a seção 2.4.4). Supondo que a massa do próton está distribuída de maneira uniforme no núcleo, podemos escrever o potencial gerado pelo próton da seguinte forma [69]:

$$V(R) = -G_{4+\delta} \int \dots \int \frac{\rho(R')}{|R - R'|^{\delta+1}} d^{3+\delta}R', \quad (3.20)$$

onde  $\rho = |\Psi_p|^2 m_p$  é a densidade de massa e  $\Psi_p = \chi(z) \psi_p(x)$  é a função de onda o

próton nesse espaço extradimensional.

Novamente, a partir da teoria de perturbação, podemos calcular o desvio na energia de um determinado estado atômico. Nossa hamiltoniana será  $H_G = m_e V(R)$ , que nos mostra a contribuição gravitacional na hamiltoniana atômica. Dessa forma temos que o desvio na energia de um estado  $\psi$  será [69]:

$$\delta E_\psi^g = \int \dots \int |\Psi_e|^2 m_e V(R) d^{3+\delta} R, \quad (3.21)$$

onde  $\Psi_e(x, z) = \chi(z) \psi_e(x)$  é a função de onda do elétron. Graças a essa interação gravitacional, o espectro de energia do Hidrogênio será alterado, considerando as funções de onda do estado  $1S$  e  $2S$ , respectivamente:

$$\psi_{1S} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}, \quad (3.22)$$

$$\psi_{2S} = \frac{1}{\sqrt{8\pi a_0^3}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0}. \quad (3.23)$$

Assim, ficamos aptos para calcular o desvio de energia desses estados [69],  $|\delta E_{2S}^g - \delta E_{1S}^g|$ , que dependerá do número de dimensões extras [69].

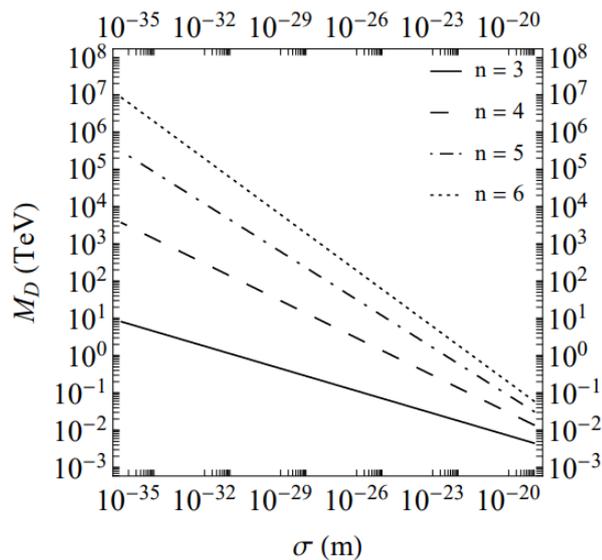


Figura 3.9: Vínculos inferiores sobre a massa de Planck  $M_D$  em função de  $\sigma$ . Figura retirada de [69].

O valor da frequência experimental no átomo de Hidrogênio é conhecido e, admitindo que o efeito das dimensões extras seja menor que a soma quadrática dos erros experimental e teórico [69], podemos determinar os vínculos para a massa de Planck, conforme a Figura 3.9. Observe que para as branas mais finas os vínculos para  $M_D$  são cada vez mais fortes.

Outro parâmetro importante é o próprio  $R$  que, determinados os vínculos para  $M_D$ , podemos também encontrar limites (ver Figura 3.10) a partir da relação [69] [20]:

$$M_D^{2+\delta} = \frac{(\hbar/c)^\delta \hbar c}{G_{(4+\delta)}} \frac{(2\pi)^\delta \Gamma\left(\frac{3+\delta}{2}\right)}{2\pi^{(\delta+3)/2} (2+\delta)}. \quad (3.24)$$

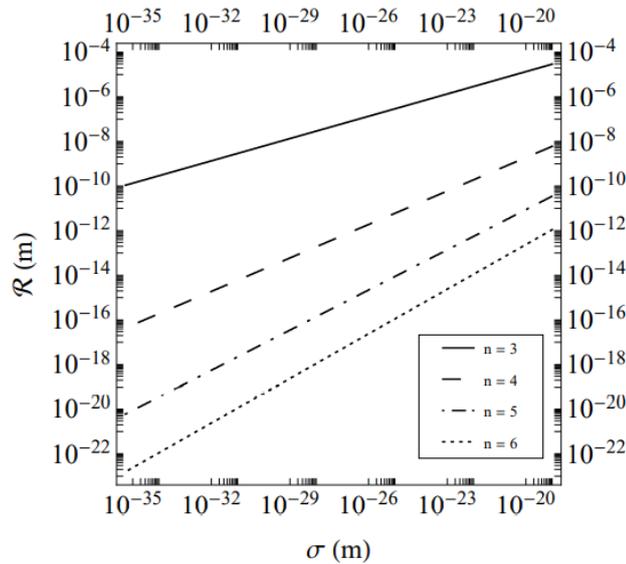


Figura 3.10: Vínculos superiores sobre o raio da dimensão extra  $R$  em função de  $\sigma$ . Figura retirada da referência [69].

## 4 *A Interferometria de Nêutrons*

A busca por desvios do potencial newtoniano em curtas distâncias motivou cada vez mais experimentos usando diversos fenômenos físicos, como vimos no capítulo anterior. Nesse capítulo também discutiremos sobre limites impostos sobre os parâmetros de Yukawa mas agora utilizando a interferometria de nêutrons como experimento de foco. Iniciaremos o capítulo discutindo sobre o experimento realizado por Colella, Overhauser e Werner que, posteriormente ficou conhecido como o experimento COW [26] [27]. Iniciaremos com este experimento devido o seu grande impacto na área da interferometria de nêutrons, uma vez que, por meio deste, mostrou-se com grande precisão que a fase quântica do nêutron é afetada pelo potencial gravitacional da Terra ao fazer com que um feixe de nêutrons passe por um caminho sujeito a um potencial gravitacional. Após essa seção inicial, falaremos sobre alguns vínculos obtidos pela interferometria e, ao final, compararemos com outros experimentos com diferentes fenômenos físicos.

### 4.1 O Experimento COW

O experimento COW, como ficou conhecido em homenagem aos realizadores: Colella, Overhauser e Werner, consistiu de um interferômetro de nêutrons cuja finalidade era investigar a influência gravitacional da Terra na fase da função de onda do nêutron [26] [27]. Nesse experimento, as ondas dos nêutrons eram coerentemente divididas e separadas no potencial de gravidade. As amplitudes são divididas por difração de Bragg a partir de cristais de Silício perfeitos. Tal modelo de interferômetro foi originalmente desenvolvido para raio-x [70], mas Rauch *et al* adaptou para nêutrons térmicos em 1974. Essa experiência foi realizada no reator da Universidade de Michigan, 2MW.

Nesse experimento um feixe de nêutrons monocromáticos com comprimento de onda  $\lambda$  entra em um interferômetro de placa tripla padrão ao longo de uma linha ho-

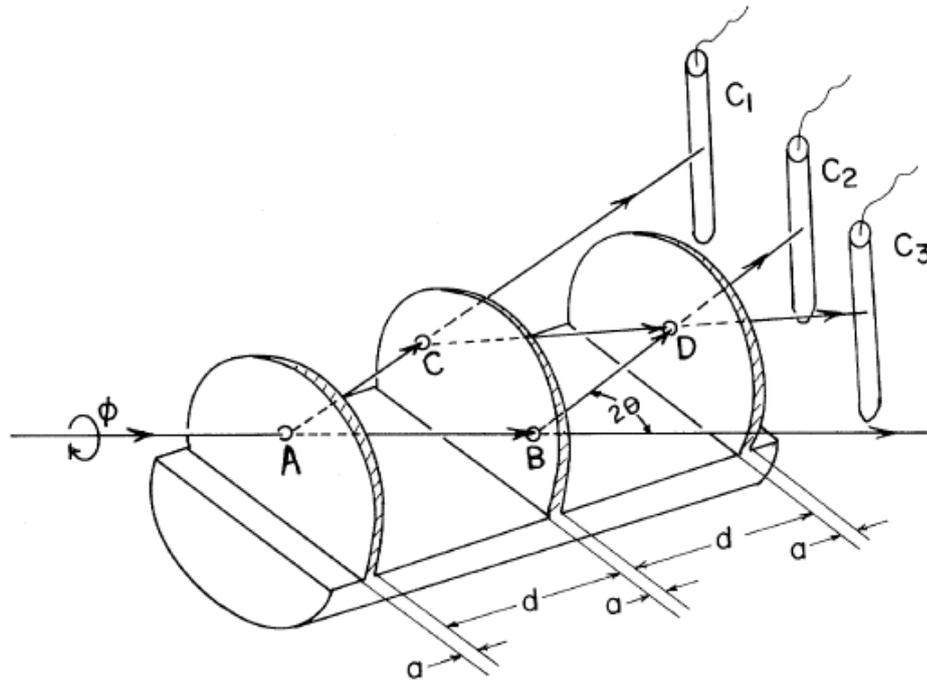


Figura 4.1: Diagrama esquemático de um interferômetro de Nêutrons e detectores de  $^3\text{He}$ . Figura retirada da referência [26].

rizontal com um momento inicial  $p_0 = \hbar k_0$  (Figura 4.1 e 4.2). O nêutron é dividido em dois pacotes de onda no ponto A seguindo os caminhos de sub-feixes ABD e ACD. Após isso, os pacotes de onda do nêutron se misturam e se recombinaem na terceira placa de cristal no ponto D que, por estar elevado por uma altura  $H$  em relação à base do interferômetro, tem um potencial maior acima da Terra do que o ponto de entrada, sendo este potencial  $mgH = gH_0 \sin(\phi)$ . No experimento, a contagem dos nêutrons (que veremos mais adiante) foi realizada à medida que o interferômetro era girado em um ângulo  $\phi$ , conforme a Figura 4.1. Três detectores de  $^3\text{He}$  foram usados para monitorar o feixe não interagente ( $C_1$ ) e os dois feixes que sofreram a interferência ( $C_2$  e  $C_3$ ), conforme mostra a Figura 4.1.

A pergunta que surge é a seguinte: há alguma mudança na função de onda do nêutron após o reencontro das duas funções de ondas na terceira placa, sendo que um feixe atravessou um potencial gravitacional e o outro feixe não interagiu? A resposta dessa pergunta pode ser encontrada, como veremos, na fase quantum mecânica do nêutron.

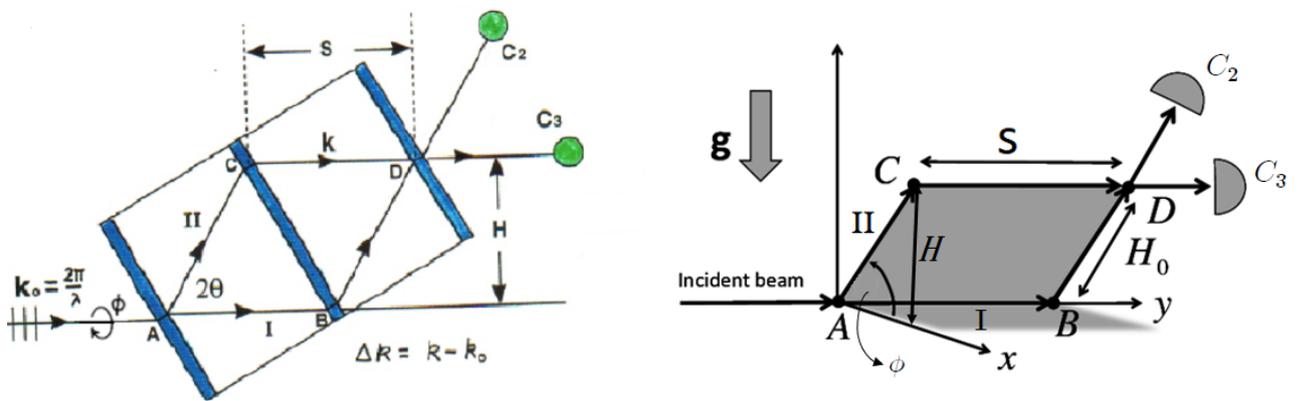


Figura 4.2: Representações do interferômetro de nêutrons inclinado na direção do feixe incidente. Na figura da direita fica mais explícita a dependência do ângulo  $\phi$  em termos dos comprimentos  $H$  e  $H_0$ .

Topologicamente falando, o interferômetro usado no experimento COW é equivalente a um anel, como mostra a Figura (4.3). Em algum ponto  $A$  no anel uma onda incidente entra e é coerentemente dividida em duas partes: uma se propaga no sentido horário no caminho  $I$  e a outra no sentido anti-horário no caminho  $II$  ao redor do anel. Em algum ponto  $B$  no lado oposto do anel, essas duas ondas coerentes são recombinadas de modo a serem detectadas pelo observador, que interpreta os resultados em termos de interferência construtiva e destrutiva de ondas. Mas, claro, apenas as partículas são detectadas, uma por uma, e o padrão de interferência é notado apenas após muitos nêutrons serem detectados.

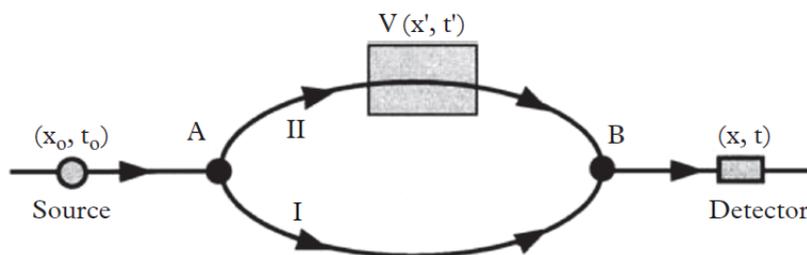


Figura 4.3: Esquema geral de um interferômetro. Figura retirada da referência [74].

Ao sair da fonte, a função de onda do nêutron é descrita em termos da posição  $x_0$  no tempo  $t_0$ . Os subfeixes percorrerão dois caminhos separados espacialmente num

interferômetro como mostra a Figura (4.3). A fase acumulada em ambos os caminhos é uma integral de linha sobre a lagrangiana  $\mathcal{L}$  no espaço tempo, dada por<sup>1</sup> [71] [72]:

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\hbar} \int \mathcal{L} dt'. \quad (4.1)$$

Como ilustração, vamos tomar os dois caminhos percorridos pelos dois feixes do interferômetro (Figura 4.3). Para cada caminho, a fase acumulada será dada pela equação (4.1). Agora, se calcularmos a *diferença de fase* entre os caminhos percorridos pelo nêutron teremos o seguinte resultado:

$$\Delta\Phi = \Phi_{II} - \Phi_I \quad (4.2)$$

Ora, por uma transformação de Legendre, a lagrangiana está relacionada com a hamiltoniana [73], de modo que:

$$\mathcal{L} = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{H}, \quad (4.3)$$

onde  $\vec{v} = d\vec{s}/dt$ . Assim, podemos reescrever a equação (4.1) da seguinte forma, onde a integração no espaço vai de um  $x_0$  (a fonte) até o detector, em  $x(t)$ :

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x \vec{p} \cdot d\vec{s} - \frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H} dt' = \int \vec{k} \cdot d\vec{s} - \int_{t_0}^t \omega dt'. \quad (4.4)$$

Avaliando as integrais de linha da equação (4.1) ao longo de cada caminho percorrido, teremos:

$$\Phi_I(x, t) = \frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x \vec{p}_I \cdot d\vec{s} - \frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}_I dt', \quad (4.5)$$

e

$$\Phi_{II}(x, t) = \frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x \vec{p}_{II} \cdot d\vec{s} - \frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}_{II} dt'. \quad (4.6)$$

---

<sup>1</sup>Para um estudo sobre a equação (4.1) recomendamos fortemente a leitura da referência [72].

Dada a conservação de energia, os últimos termos das equações (4.5) e (4.6) se cancelam quando fizermos a diferença entre  $\Phi_I$  e  $\Phi_{II}$ . Assim, a diferença de fase para as ondas atravessando os dois caminhos será dada por uma integral ao longo de um caminho fechado:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(x, t) &= \Phi_{II}(x, t) - \Phi_I(x, t), \\ &= \frac{1}{\hbar} \left( \int_{x_0}^x \vec{p}_{II} \cdot d\vec{s} - \int_{x_0}^x \vec{p}_I \cdot d\vec{s} \right),\end{aligned}\quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{\hbar} \oint \vec{p} \cdot d\vec{s}.\quad (4.8)$$

Para nossa situação particular, consideraremos que os momentos lineares dos feixes em cada caminho serão constantes. Com isso, da equação (4.8), teremos que a diferença de fase do nêutron será simplesmente [71]:

$$\Delta\Phi = \Delta k \cdot s,\quad (4.9)$$

onde  $s$  é o comprimento que o feixe percorre em um dos caminhos.

No experimento COW, o feixe que percorreu o caminho  $II$  foi submetido ao potencial gravitacional terrestre, resultando numa alteração no momento do nêutron. Da conservação da energia, podemos determinar a variação do momento do nêutron da seguinte forma:

$$\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + mgH.\quad (4.10)$$

Dessa equação podemos facilmente obter

$$k^2 - k_0^2 = -\frac{2m^2 gH}{\hbar^2}.\quad (4.11)$$

Da equação (4.11) podemos escrever

$$k^2 = k_0^2 - \frac{2m^2 gH}{\hbar^2}.\quad (4.12)$$

Extraindo a raiz quadrada da equação anterior<sup>2</sup> e, já colocando o  $k_0$  em evidência, teremos:

$$k = k_0 \sqrt{1 - \frac{2m^2 g H}{\hbar^2 k_0^2}}. \quad (4.13)$$

Considerando o termo  $2m^2 g H / \hbar^2 k_0^2 \ll 1$ , podemos fazer uma expansão de modo que:

$$\begin{aligned} k &\simeq k_0 \left( 1 - \frac{m^2 g H}{\hbar^2 k_0^2} \right), \\ &= k_0 - \frac{m^2 g H}{\hbar^2 k_0}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Assim, determinamos a variação do momento  $\Delta k = k - k_0$  do nêutron:

$$\Delta k = -\frac{2\pi m^2 g H \lambda}{h^2}, \quad (4.15)$$

onde usamos o fato que  $\hbar = h/2\pi$  e  $k_0 = 2\pi/\lambda$  [75], sendo  $\lambda$  o comprimento de onda do nêutron.

Utilizando esse resultado na equação (4.9), podemos encontrar o desvio da fase do interferômetro induzido pela gravidade. Lembrando que  $H = H_0 \sin \phi$  (Figura 4.2), escrevemos:

$$\Delta \Phi = -\frac{2\pi m^2 g A \lambda}{h^2} \sin \phi, \quad (4.16)$$

onde  $A$  é a área do paralelograma fechado pelo caminho do feixe,  $A = H_0 s$ .

No experimento COW, os detectores  $C_2$  e  $C_3$  eram responsáveis pela contagem dos nêutrons que saíam da terceira placa do interferômetro [26]. Essa contagem é obtida através da medida da intensidade dos feixes do inteferômetro. Como vimos, o feixe de nêutrons ao adentrar no interferômetro se divide em dois subfeixes, os quais atravessam o aparato em dois caminhos  $I$  e  $II$  (ver Figura 4.4). A onda no caminho  $I$  chega no detector após sofrer uma transmissão (**t**) na primeira placa, uma reflexão (**r**) na se-

<sup>2</sup>Aqui só levamos em conta a solução positiva.

gunda placa e outra reflexão ( $\mathbf{r}$ ) na última placa. No caminho  $II$ , a sequência é  $\mathbf{rrt}$ . Por questões de simetria, caso não houvesse nada entre um dos caminhos (amostra ou um potencial de outra natureza) essas duas ondas serão iguais em fase e amplitude. As fases  $\Phi_I$  e  $\Phi_{II}$  acumuladas em cada caminho (equação (4.1)) podem tornar-se diferentes como no caso do experimento COW, onde o nêutron experimenta uma interação gravitacional em apenas um dos caminhos. Com isso, a intensidade do feixe “0” será dada por

$$I_0 = |\psi_I + \psi_{II}|^2 = |\mathbf{trr}\psi_0 e^{i\Phi_I} + \mathbf{rrt}\psi_0 e^{i\Phi_{II}}|^2, \quad (4.17)$$

onde  $\psi_0$  é a função de onda incidente.

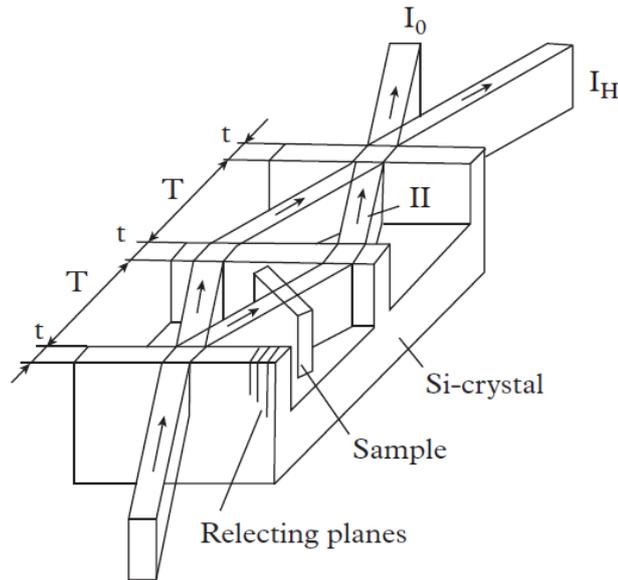


Figura 4.4: Esquema de um interferômetro de cristal perfeito de silício. Figura retirada de [71].

Lembrando que  $\Delta\Phi = \Phi_{II} - \Phi_I$  é a diferença de fase, pode-se mostrar [71] que a intensidade do feixe  $\mathbf{0}$  é escrita como:

$$I_0(\Delta\Phi) = A[1 + \cos \Delta\Phi], \quad (4.18)$$

onde a constante  $A$  é dada por  $A = |\psi|^2 |\mathbf{r}|^4 |\mathbf{t}|^2$ .

Utilizando o mesmo raciocínio, podemos encontrar que a intensidade do feixe **H** é

$$I_H(\Delta\Phi) = |\mathbf{trr}\psi_0 e^{i\Phi_I} + \mathbf{rrr}\psi_0 e^{i\Phi_{II}}|^2 = B - A \cos \Delta\Phi, \quad (4.19)$$

onde  $B = |\psi|^2 [|\mathbf{t}|^4 |\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{r}|^6]$ .

Com isso, da conservação da partícula, teremos que a soma dessas intensidades será igual a uma constante:

$$I_0 + I_H = \text{const.} \quad (4.20)$$

Contudo, a diferença entre essas intensidades dependerá da diferença de fase na onda do feixe de nêutrons:

$$I_0 - I_H = A - B + 2A \cos \Delta\Phi. \quad (4.21)$$

O que a equação (4.21) evidencia é que essa diferença entre as intensidades dos feixes é, como podemos ver, uma função senoidal cuja dependência do ângulo de rotação no experimento de COW (veja novamente a equação (4.16)<sup>3</sup>) é mostrada na Figura (4.5):

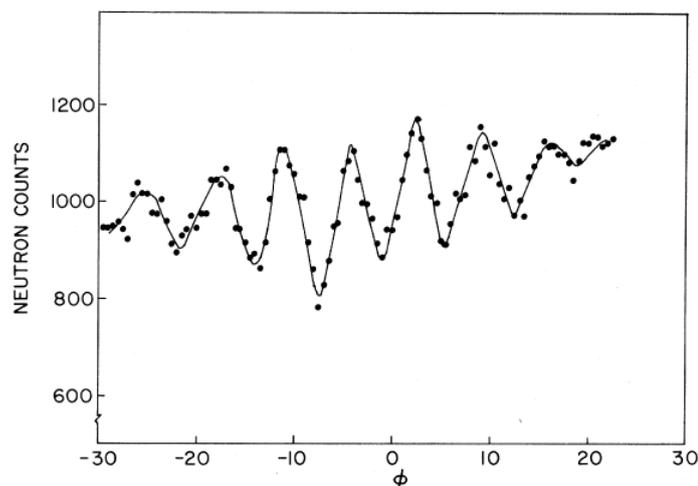


Figura 4.5: A diferença de contagem dos nêutrons,  $I_0 - I_H$ , como função do ângulo de rotação do interferômetro. Figura retirada de [26].

<sup>3</sup>Há uma sutileza que o leitor deve perceber com relação à figura 4.5. A dependência das intensidades com relação ao ângulo de rotação  $\phi$  no caso COW não é simplesmente  $\cos \phi$ , mas  $\cos(\sin \phi)$ , explicando o comportamento senoidal da figura 4.5.

A beleza desse experimento aparece quando o analisamos do ponto de vista da mecânica quântica. No experimento COW, o controle sobre o feixe de nêutron é tal que um único nêutron atravessa o aparato por vez e, ainda assim, observa-se o efeito gravitacional sobre a fase da onda do nêutron. Isso nos leva à interpretação, via mecânica quântica, de que o nêutron incidente que atravessou o experimento sente **simultaneamente** potenciais distintos!

## 4.2 Vínculos obtidos da interferometria dos nêutrons

Como vimos nos capítulos anteriores, o Modelo ADD prevê um desvio da lei do inverso do quadrado de Newton em curtas distâncias.

A busca por esses desvios no potencial gravitacional motivou muitos experimentos em escalas de comprimento cada vez menores. Como discutimos anteriormente, caso houvesse a detecção de desvios no conhecido potencial newtoniano, isso poderia ser um indício de um cenário extradimensional.

Motivados por essa busca, os primeiros testes envolvendo a interferometria de nêutrons e a gravidade não-newtoniana foram executados. Como o nêutron permite um estudo apropriado para uma busca de tal interação hipotética em uma escala de comprimento muito abaixo da escala milimétrica [76]- [79], vários experimentos envolvendo gravidade não newtoniana e experimentos com nêutrons (como interferometria) foram propostos. Em 1986 (11 anos após o experimento do COW), Bertolami [23], ao analisar os efeitos de uma suposta modificação na gravitação do tipo Yukawa no experimento COW, obteve o seguinte vínculo sobre os parâmetros dessa parametrização na seguinte forma:

$$|\alpha| \lambda^2 < 3,43 \times 10^3 \text{m}^2. \quad (4.22)$$

Como a interferometria de nêutrons é adequada na busca por desvios na lei do inverso do quadrado de Newton para escalas de comprimento pequenas, outros expe-

rimentos foram propostos, como o de Geoffrey L. Greene e Vladimir Gudkov [24] que, inspirados no interferômetro de cristais perfeitos [80] como da Figura 4.6, propuseram novos limites para essa nova interação.

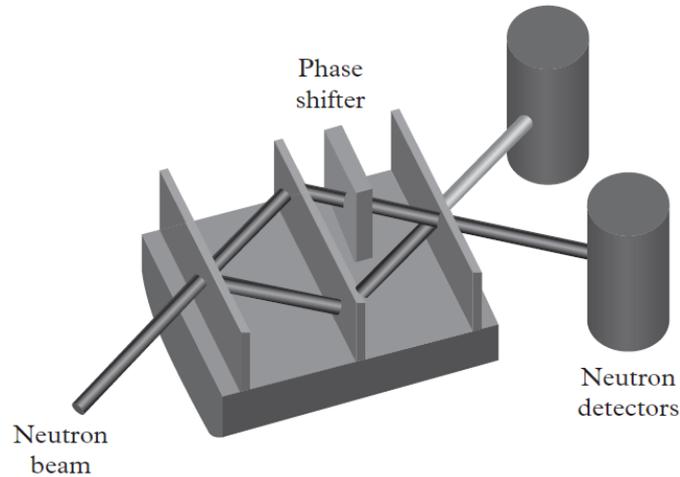


Figura 4.6: Esboço de um interferômetro de cristal perfeito monolítico. Uma diferença de caminho óptico é obtida girando uma placa plana de alumínio. Figura retirada da referência [71].

A diferença deste interferômetro para o do COW é que os caminhos são horizontais, mas ao longo de um deles há duas placas de ouro, que o subfeixe deve atravessar. Uma das placas é fixa e a outra, por um método de translação, poderá mover-se na faixa da ordem de 100 microns ao longo do caminho do feixe. A diferença de fase do nêutron aparecerá ao introduzirmos as placas no caminho de um dos feixes, uma vez que haverá, nesse caminho, interações nucleares entre o nêutron e os átomos das placas. Vale ressaltar que, se a distância entre essas duas placas colocadas no caminho do feixe, que denotaremos por  $L$ , for muito maior que o parâmetro  $\lambda$  do potencial do tipo Yukawa, não haverá mudança na fase da onda do nêutron. Agora, caso a separação entre essas placas variar de  $L = 0$  a  $L \geq \lambda$ , haverá um desvio na fase do nêutron. Considerando as interações associadas à essas duas placas como uma perturbação, o desvio da fase foi calculado:

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi G\alpha m_n \pi \lambda^3}{k_0} \left( \frac{2m_n}{\hbar^2} \right) (1 - e^{-L/\lambda}), \quad (4.23)$$

onde  $m_n$  é a massa do nêutron,  $\rho$  é a densidade uniforme das placas e  $k_0$  é o vetor de onda do nêutron no vácuo. Para uma sensibilidade experimental da fase de cerca de  $10^{-4}$  rad, usando uma placa de ouro ( $\rho = 19,6\text{g/cm}^3$ ) e nêutrons térmicos com um comprimento de onda de cerca de  $3\text{\AA}$ , devemos detectar o desvio gravitacional com

$$\alpha\lambda^3 \leq 3 \times 10^{-3}\text{m}^3. \quad (4.24)$$

Para  $\lambda = 10\text{nm}$  [24], isso nos daria  $\alpha \leq 3 \times 10^{21}$  (ver Figura 4.7).

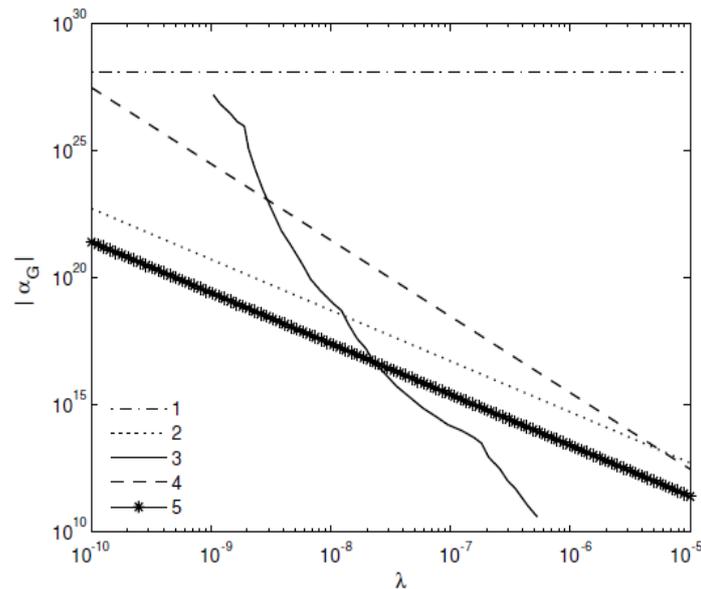


Figura 4.7: Vínculos sobre os parâmetros de Yukawa. A linha rotulada por (1) denota os vínculos obtidos por Nesvizhevsky e Protasov [25] os quais usaram nêutrons ultra frios. A linha (2) representa os vínculos obtidos por Zimmer e Kaiser [81] na interação nêutron-elétron. A linha (3) vem da análise de Adelberger [9] com vários experimentos. A linha (4) vem do método das duas placas explicado nessa seção e a linha (5) advêm do método da difração, também abordado nessa seção. Figura retirada da referência [24].

Outro método estudado por Greene e Gudkov nessa mesma referência foi o método de difração que consiste em analisar o comportamento do nêutron em outros tipos de espalhamentos além do espalhamento direto, discutido anteriormente no contexto da interferometria. Para espalhamentos de nêutrons por um átomo, a amplitude de espalhamento total nesse cenário com uma interação gravitacional hipotética será expressa

como [86]:

$$f(\vec{q}) = f_{nu}(\vec{q}) + f_{ne}(\vec{q}) + f_G(\vec{q}), \quad (4.25)$$

onde  $f_{nu}(\vec{q})$  é a amplitude de espalhamento entre o nêutron com o núcleo,  $f_{ne}(\vec{q})$  é a amplitude do espalhamento entre o nêutron e a nuvem de elétrons e  $f_G(\vec{q})$  é a amplitude de espalhamento devido a interação gravitacional hipotética e  $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ , é a mudança no momento do nêutron provocado pela interação.

Na aproximação de Born, a amplitude de espalhamento será dada por [81]:

$$f_{int}(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V_{int}(r) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) d^3r, \quad (4.26)$$

onde  $V_{int}(r)$  é o potencial que descreve a interação. As outras amplitudes de espalhamento da equação (4.25) podem ser calculadas a partir da equação (4.26) apenas substituindo o potencial  $V_{int}$  pelo potencial de Fermi para a interação nuclear ( $V_{nu}(r) = 2\pi\hbar\delta(r) b/m$ ) [71],  $f_{nu}(\vec{q})$ , e pelo potencial de interação entre o nêutron e o elétron no caso da amplitude de espalhamento  $f_{ne}(\vec{q})$ .

Em interferometria de nêutrons é comum utilizar o espalhamento direto em que  $\vec{q} = 0$  [24], ou seja, sem mudança no momento do nêutron. Veja que esse é o caso da transmissão. Lembremos que o nêutron incidente está interagindo com os núcleos, mas os núcleos estão presos a uma rede. Então, o nêutron passa sem excitar os modos de vibração da rede, de modo que o nêutron não será desviado. Com isso, o efeito sobre o nêutron será simplesmente o desvio da fase. Para esse caso, considerando a interação hipotética da gravidade anômala, podemos escrever o comprimento de espalhamento direto em termos da amplitude de espalhamento  $f_G(\vec{q} = 0)$  [81]:

$$b_G = -f_G(0) \quad (4.27)$$

Essa quantidade tem grande relevância nos experimentos de interferometria. Com ela, podemos calcular o potencial médio sentido pelo nêutron ao atravessar um meio. É

esse potencial, chamado de potencial óptico do nêutron, que determina o deslocamento de fase adquirido pelo feixe de nêutrons no interior do interferômetro. O potencial óptico é dado por [81]:

$$U_{opt} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} N (b + Zb_{ne} + b_G), \quad (4.28)$$

onde  $N$  é o número de densidade,  $Z$  é o número da carga total e  $b_{ne}$  é o comprimento de espalhamento devido a interação nêutron-elétron.

Na abordagem de Greene e Gudkov, ao considerar três espalhamentos com diferentes valores de  $\vec{q}$  (onde um desses espalhamentos era com  $\vec{q} = 0$ ), obtêm-se três equações independentes com três incógnitas. Dessa forma, ao assumir uma precisão relativa da medida do comprimento do espalhamento do nêutron em cerca de  $10^{-5}$  fm, impuseram um novo vínculo para os parâmetros de Yukawa:

$$\alpha\lambda^2 \leq 25,6\text{m}^2. \quad (4.29)$$

Esse resultado está mostrado na Figura 4.7, onde comparou-se esse resultado com outros vínculos para os parâmetros de Yukawa fornecidos por outros experimentos com nêutrons.

# 5 *Novos Vínculos Sobre Modificações da Gravitação Impostos Pela Interferometria de Nêutrons*

Cenários de branas [4] [5] [6] [7] [8], nos quais nosso universo ordinário quadridimensional está imerso em um espaço ambiente maior, têm motivado muitos estudos sobre as modificações da gravidade em curtas distâncias [10].

Como dito no capítulo 2, diferentemente da teoria inicial de Kaluza-Klein, o modelo ADD [4] apresenta uma teoria de branas onde os campos, com exceção da gravidade, estariam confinados nessa brana. Assim, a diluição do campo gravitacional por todo o espaço ambiente poderia ser a razão da fraqueza da gravidade em comparação às outras forças e, com isso, poderia ser uma explicação para o já citado problema da hierarquia [4] [5] [6] [7] [8].

Nesses cenários de branas, efeitos das dimensões extras no campo gravitacional podem tornar-se significantes na escala de compactação  $R$ . Assim, dimensões extras com um tamanho muito maior que o comprimento de Planck são fenomenologicamente factíveis, uma vez que a gravidade vem sendo testada empiricamente no domínio submilimétrico apenas recentemente [10] [14].

Como vimos no capítulo 2, uma predição da existência de dimensões extras de grande escala, de acordo com modelos de branas, é uma amplificação do campo gravitacional em curtas distâncias ( $r \ll R$ ), implicando que a teoria pode ser experimentalmente testada. Essa possibilidade, como mostrado nos capítulos 3 e 4, motivou a busca por sinais de desvios do potencial gravitacional usando balanças de torção, experimentos usando o Efeito Casimir, a espectroscopia e a interferometria de nêutrons, por exemplo.

Considerando testes experimentais, modificações da gravidade são geralmente parametrizadas pelas medidas de uma energia potencial adicional do tipo Yukawa  $\alpha GMm \times \exp(-r/\lambda)/r$ , onde  $M$  e  $m$  são as massas das partículas interagentes e  $G$  é a constante do potencial newtoniano. Experimentos de diversas áreas impõem limites sobre o fator de amplificação  $\alpha$  em diferentes alcances do parâmetro da escala de comprimento,  $\lambda$  [10].

A parametrização de Yukawa é muito útil pois ela pode conter modificações com diferentes origens teóricas [54]. O modelo ADD também prevê uma correção do mesmo tipo para o potencial gravitacional externo produzido por uma partícula no domínio de grandes distâncias ( $r \gg R$ ) [44]. Nesse caso, o parâmetro  $\alpha$  é proporcional ao número de dimensões extras,  $\delta$ . A exata relação depende da topologia do espaço suplementar e a escala de comprimento na qual a estabilização do seu volume é levada em consideração [44]. Por sua vez, em curtas distâncias, é previsto que o potencial gravitacional exiba um comportamento do tipo Lei de Potências, isto é, proporcional a  $(R/r)^{\delta+1}$  [4].

É importante lembrar que ambas as parametrizações de Yukawa e Lei de Potências são válidas para partículas pontuais. Em configurações onde as funções de onda de partículas se sobrepõem, o potencial gravitacional interno da fonte deve ser considerado. Acontece que, dentro de uma fonte extensa, o potencial gravitacional não é calculado no cenário de brana com espessura nula com  $\delta \geq 2$  [69] [83]. Uma forma de contornar essa dificuldade é levar em conta um modelo de brana com espessura, que permite, por exemplo, estimar a influência das dimensões extras no deslocamento de energia dos estados  $S$  nos átomos de Hidrogênio [69].

Experimentos baseados na Interferometria de nêutrons constituem um importante teste da gravidade não padrão e nos fornece um dos vínculos mais fortes sobre os parâmetros de Yukawa  $\alpha$  entre as escalas  $10^{-12}\text{m}$  e  $10^{-9}\text{m}$  [25].

Como mostrado no capítulo anterior, nesse tipo de experimento nêutrons incidentes são divididos em dois feixes que seguem caminhos espacialmente separados e são re-combinados formando um padrão de interferência na intensidade detectada do fluxo do

nêutron [26] [27] [71]. Uma diferença de fase quântica é obtida quando os feixes parciais atravessam as placas materiais, regiões com campo magnético ou elétrico, campo gravitacional (como o COW), entre outros, dependendo do experimento proposto.

De maneira geral, a maioria das análises são baseadas na parametrização de Yukawa. Entretanto, quando o nêutron está em contato com o meio, sua fase é afetada pelo potencial interno. Para ter uma estimativa dos efeitos das dimensões extras, consideraremos cenários de branas finas para evitar problemas de divergência. Na seção 5.2 desse capítulo determinaremos o comprimento de espalhamento direto da interação gravitacional anômala na ordem principal, identificando, assim, a quantidade física do modelo de dimensão extra que a interferometria de nêutrons é capaz de vincular. Como esperado, essa quantidade depende de um parâmetro relacionado com a localização da matéria na brana. Como veremos, ela depende do modelo nuclear do núcleo atômico que constitui o material.

Uma maneira de superar esse aspecto limitante é considerar experimentos nos quais a causa do desvio da fase seja uma fonte não-bariônica. Um exemplo é o experimento concebido para testar o efeito Aharonov-Casher (AC) [82], no qual a diferença de fase surge da interação entre o nêutron e o campo elétrico à medida que os feixes cruzam o interior das câmaras eletrostáticas.

De acordo com a teoria da Relatividade Geral, todos os tipos de energia são capazes de curvar o espaço-tempo. Então, nesse experimento, nêutrons incidentes também interagem com o campo gravitacional produzido pelo campo elétrico. Calcularemos o desvio da fase adicional devido essa interação e discutiremos a possibilidade de extrair vínculos independentes para as modificações da gravidade do experimento AC.

Esses limites interferométricos podem ser considerados em um contexto mais geral de teorias métricas e seus parâmetros Pós-newtonianos [66]. Como veremos, os vínculos obtidos da fonte não-bariônica podem ser vistos como limites para desvios de curta distâncias dos parâmetros pós-newtonianos que quantificam a capacidade da energia interna e pressão de curvar o espaço-tempo em comparação à massa de repouso da

matéria.

Para uma classe de teorias métricas, os vínculos da interferometria obtidos aqui podem ser comparados com os vínculos extraídos do experimento MTV-G e da espectroscopia, vistos no capítulo 2, considerando modificações de curtas distâncias do parâmetro pós-newtoniano  $\gamma$  (relacionado com a curvatura da parte espacial do espaço-tempo). Como veremos, a interferometria de nêutron estabelece os vínculos mais fortes na escala de comprimento entre  $1,4 \times 10^{-7} \text{m}$  e  $10^{-4} \text{m}$  [28].

## 5.1 Potencial Interno de uma Fonte Extensa no Cenário de Brana Fina

De acordo com o modelo ADD (seção 2.4), o espaço-tempo possui um certo número  $\delta$  de dimensões extras compactas do tipo-espaço. Nesse cenário, o espaço de fundo (o background) é plano e o espaço suplementar tem um volume  $(2\pi R)^\delta$ . A matéria e os campos do modelo padrão encontram-se confinados na brana e, por causa disso, a distribuição de momento-energia desses campos podem ser descrita por um tensor do tipo [83]

$$T_{AB} = \eta_A^\mu \eta_B^\nu T_{\mu\nu}(x) f(z), \quad (5.1)$$

onde adotamos a seguinte notação: índices gregos vão de 0 até 3 e os índices latinos vão de 0 a  $3 + \delta$ . O espaço ordinário é representado por  $x$  enquanto que as coordenadas do espaço suplementar compacto são descritas pela coordenada  $z$ . O tensor  $\eta_{AB}$  é a métrica de Minkowski. Para uma brana idealizada de espessura nula, a função  $f(z)$  é uma distribuição do tipo delta de Dirac. Mas, para o caso de uma brana fina,  $f(z)$  é alguma regularização dessa distribuição singular.

Os campos confinados são a fonte de um campo gravitacional no espaço ambiente que obedecem uma versão das equações de Einstein em dimensões superiores (veja novamente a equação (2.2)). No regime de campo fraco, a métrica é aproximadamente

dada por

$$g_{AB} = \eta_{AB} + h_{AB}, \quad (5.2)$$

que satisfaz as equações de Einstein linearizadas:

$$\square h_{AB} = -\frac{16\pi G_D}{c^4} \bar{T}_{AB}, \quad (5.3)$$

onde o símbolo  $\square$  é o operador D'Alembertiano associado à métrica de Minkowski com a assinatura  $(-, +, +, \dots +)$  e

$$\bar{T}_{AB} = T_{AB} - \frac{1}{\delta + 2} \eta_{AB} T^C_C. \quad (5.4)$$

É importante lembrar que a equação acima é válida no gauge harmônico, definido pela condição

$$\partial_A \left( h^{AB} - \frac{1}{2} \eta^{AB} h^C_C \right) = 0. \quad (5.5)$$

A fim de recuperar os resultados de Relatividade Geral para grandes distâncias, a constante  $G_D$  deve estar relacionada com a constante gravitacional newtoniana de acordo com a equação [4] [83]

$$G_D = G (2\pi R)^\delta, \quad (5.6)$$

e a estabilização do volume do espaço suplementar deve estar garantido por um mecanismo apropriado em grandes distâncias [84].

Para curtas distâncias o termo dominante da solução não depende da topologia do espaço suplementar. No regime estático, a solução da equação (5.3), nessa ordem de aproximação, é dada por [28]:

$$h_{AB}(\vec{X}) = \frac{16\pi\Gamma\left(\frac{\delta+3}{2}\right) G_D}{(\delta+1) 2\pi^{(\delta+3)/2} c^4} \int \frac{\bar{T}_{AB}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^{1+\delta}} d^{3+\delta} X', \quad (5.7)$$

onde  $\vec{X}$  e  $\vec{X}'$  são coordenadas espaciais no espaço ambiente.

Ignorando a topologia, estamos tomando uma estimativa conservadora da intensidade do potencial. Para ilustrar isso, considere a topologia de um toro como um exemplo. Como consequência da periodicidade ao longo de cada direção transversal da brana (resultante desta topologia), o potencial resultante pode ser visto como uma superposição de potenciais produzidos por uma rede de imagens topológicas da fonte regularmente espaçadas nas dimensões extras não compactas (veja novamente a equação (2.110)). Portanto, considerando apenas o termo da equação (5.7), não estamos levando em conta a contribuição de todas as imagens topológicas.

No contexto de um experimento de interferometria, a equação (5.7) nos dá o potencial gravitacional  $(3 + \delta)$  dimensional produzido pela fonte que causa a fase adicional, que pode ser uma placa material ou um campo elétrico, que consideraremos ainda nesse capítulo. Por sua vez, o acoplamento do nêutron incidente com este campo gravitacional pode ser extraído, na aproximação de raio óptico, da lagrangiana de uma partícula teste com massa  $m$  que se move na brana:

$$\mathcal{L} = mc (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2}, \quad (5.8)$$

onde  $\dot{x}^\mu$  significa a derivada das coordenadas da partícula com respeito ao seu tempo próprio. Como o movimento dessa partícula está restringido na brana,  $g_{\mu\nu}$  é a métrica induzida em  $z = 0$ . Para uma partícula não-relativística segue que, da equação (5.8), a interação gravitacional é descrita pela energia potencial  $U_G = m\varphi$ , onde  $\varphi = -h_{00}c^2/2$  é o potencial gravitacional modificado, calculado da equação (5.7).

## 5.2 Fonte Bariônica

Ao atravessar o meio material no interferômetro, o nêutron interage com os núcleos atômicos via força gravitacional anômala. Cada núcleo pode ser tratado como uma

fonte não-relativística com um tensor momento energia dado aproximadamente por

$$T_{\mu\nu} = \rho_N u_\mu u_\nu,$$

onde  $\rho_N$  é a massa bariônica própria do núcleo e  $u^\mu$  é a sua 4-velocidade. No referencial em repouso do meio,  $u^\mu = c\delta_0^\mu$  em primeira aproximação. Assim, segue que o potencial gravitacional de um único núcleo avaliado num ponto  $\vec{x}$  na brana é dado por:

$$\varphi(\vec{x}) = -\hat{G}_D \int \frac{\rho_N f(z)}{(|\vec{x} - \vec{x}'|^2 + z^2)^{\frac{1+\delta}{2}}} d\vec{x}' d^\delta z, \quad (5.9)$$

onde, por conveniência, definimos  $\hat{G}_D = 4G_D\Omega_\delta$  e  $\Omega_\delta = \Gamma\left(\frac{\delta+3}{2}\right) / (\delta+2)\pi^{(\delta+1)/2}$ .

Como mencionamos anteriormente, se  $f(z)$  é uma distribuição delta (para o caso de brana sem espessura), o potencial não pode ser calculado em nenhum ponto do interior no caso de uma dimensão extra maior que um. Entretanto, considerando que a brana tem uma espessura e que a massa bariônica do núcleo está distribuída ao longo da dimensão extra de acordo com alguma função regular  $f(z)$  (veja a equação (2.68) e a discussão que tivemos sobre a função  $f(z)$ ), podemos estimar o potencial externo. Na ordem principal, é possível mostrar que o potencial interno é proporcional à distribuição de densidade da massa bariônica  $\rho_N(\vec{x})$  do núcleo. Portanto, essa interação interna não pode ser distinguida da interação forte dominante entre o nêutron e o núcleo, que é descrito por um potencial semi empírico do tipo Wood-Saxel [85].

Um método instrutivo, embora não rigoroso, de estimar a ordem da magnitude do potencial  $\varphi(\vec{x})$  é considerar que, devido a distribuição de massa nas dimensões extras, o nêutron e a fonte estão separados na direção  $z$  por uma distância efetiva  $\sigma$ , cujo valor exato depende de  $f(z)$ . Nessa distância, somente uma fração da fonte dentro de uma 3-Bola de raio  $\sigma$  na direção paralela da brana contribui significativamente para o potencial. Assim, o potencial será proporcional a  $G_D(\sigma^3\rho_N)/\sigma^{\delta+1}$  e, conseqüentemente, proporcional à distribuição de densidade nessa aproximação, como mencionado acima.

Interferômetros de cristais perfeitos de silício utilizam nêutrons lentos com um com-

primento de onda  $\lambda_n$  da ordem de Ângstrom. Assim, a interação nuclear cuja ação efetiva está restrita ao tamanho do núcleo, pode ser aproximada por um pseudopotencial de Fermi. A média desse potencial no meio é dada por [71]:

$$V_F = \frac{2\pi\hbar^2 N}{m} b, \quad (5.10)$$

onde o parâmetro  $b$  é o comprimento de espalhamento direto e  $N$  é a densidade atômica do material. Os efeitos do então chamado potencial óptico do nêutron no desvio da fase do feixe de nêutron pode ser determinado empiricamente. De acordo com os dados disponíveis, o valor extraído de  $b$  é aproximadamente proporcional a  $A^{1/3}$ , onde  $A$  é a massa atômica do núcleo [86]. Se existe uma interação hipotética como da equação (5.9), então o valor medido de  $b$  deve conter uma pequena contribuição da sua parte interna (como discutimos na seção 4.2), que denotaremos por  $b_G^{int}$ . Entretanto, ela pode ser indistinguível do comprimento de espalhamento nuclear devido as razões que mostramos acima. Embora o nêutron incidente também tenha outras interações com o átomo que pode influenciar o parâmetro  $b$ , estas interações são mais fracas que a força nuclear e podem ser ignoradas aqui, para nossos propósitos.

A parte extensa do potencial da equação (5.9) também nos dá uma contribuição para o comprimento de espalhamento que, a princípio, pode ser diferenciado do comprimento de espalhamento nuclear. Fora do núcleo, o potencial gravitacional depende das características internas dos núcleos e sua forma funcional varia consideravelmente com o número de dimensões. Como um exemplo, vamos considerar o caso de 5 dimensões extras ( $\delta = 5$ ). Modelando o núcleo por uma 3-esfera de um raio  $R_N$ , no espaço 3-dimensional ordinário, com uma densidade de massa uniforme, segue que, da equação (5.9), este potencial de um único núcleo com massa total  $M$  é dado por [28]:

$$\varphi_{ext}(\vec{x}) = -\frac{4\pi}{3} R^3 \hat{G}_D \rho_N \frac{1}{(r^2 - R_N^2)^3}, \quad (5.11)$$

$$= -\frac{\hat{G}_D M}{(r^2 - R_N^2)^3}. \quad (5.12)$$

Essa expressão é obtida no limite de brana sem espessura. Em volta do núcleo, o potencial externo é diferente do potencial produzido por uma massa pontual e diverge em  $R_N$ . Considerando isso, uma maneira de estimar o  $b_G^{ext}$ , na aproximação de Born, seria tomar (veja novamente a seção 4.2)

$$b_G^{ext} = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_{R_N+\sigma}^{\infty} m\varphi_{ext}(\vec{x}') d^3\vec{x}', \quad (5.13)$$

onde  $\sigma$  é a escala de comprimento na qual o limite de brana fina não é válido, que é da ordem da espessura da brana, como mencionamos antes. Na ordem principal, encontramos

$$b_G^{ext} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left( \hat{G}_D \frac{\pi m M}{4R_N\sigma^2} \right). \quad (5.14)$$

Em geral, para um número de dimensões extras  $\delta > 3$ , temos resultados similares que podem ser resumidos em uma única fórmula. Escrevendo  $G_D$  em termos da constante newtoniana  $G$  e a escala de compactação  $R$  das dimensões ocultas, encontramos

$$b_G^{ext} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left( \vartheta_\delta \frac{R^\delta}{R_N\sigma^{\delta-3}} GMm \right), \quad (5.15)$$

onde  $\vartheta_\delta$  é um coeficiente cujo valor depende do números de dimensões ocultas. A equação (5.15) pode ser reescrita de uma forma que pareça que poderia ser obtida da parametrização de Yukawa. Para isso, teríamos que reinterpretar o fator de amplificação como

$$\alpha = \vartheta_\delta \frac{R^{\delta-2}}{4\pi R_N\sigma^{\delta-3}}. \quad (5.16)$$

Esse novo parâmetro  $\alpha$  pode assumir valores muito mais altos em comparação ao padrão, que é proporcional a  $\delta$ , como predito pela teoria original ADD para longas distâncias [44] [9].

Em princípio,  $b_G^{ext}$  poderia ser distinguido do comprimento de espalhamento nuclear devido sua dependência peculiar da massa atômica. De fato, seguindo o método descrito na referência [86], poderíamos conferir se os dados empíricos, coletados de

diferentes tipos de materiais, são compatíveis com um comprimento de espalhamento extra que é proporcional a  $M/R_N$  e, portanto, a  $A^{2/3}$ . Entretanto, nossa habilidade para estabelecer um vínculo claro sobre os parâmetros de teorias de dimensões extras está limitado pelo fato que  $b_G^{ext}$  depende também do modelo nuclear.

### 5.3 Fonte Não-Bariônica

Podemos evitar essa dependência no modelo nuclear considerando um deslocador de fase não-bariônico como uma fonte para o campo gravitacional dentro do interferômetro. Existe um experimento [88] projetado para testar uma versão do então chamado efeito Aharonov-Casher [82], no qual feixes de nêutrons atravessam o interior de um capacitor, acumulando desvios de fase devido a interação entre o campo elétrico  $\vec{E}$  e o momento magnético do nêutron  $\vec{\mu}$  determinado pelo acoplamento spin-órbita:

$$\frac{\mu}{mc} \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}),$$

onde  $\vec{\sigma}$  representa as matrizes de Pauli. Os resultados empíricos são consistentes com as previsões teóricas.

Em contato com o campo elétrico, o nêutron incidente não interage via força nuclear, mas interage gravitacionalmente. De fato, de acordo com a Relatividade Geral, a energia e o estresse do campo elétrico dentro do capacitor produz um campo gravitacional que afeta o movimento dos nêutrons. A teoria padrão prediz um efeito desprezível que não é detectado dentro da precisão atual dos instrumentos experimentais. Entretanto, no contexto da teoria gravitacional modificada, tal como modelos de dimensões de grande escala, a amplificação esperada da gravidade em curtas distâncias poderia ser testada sem ser mascarada pela interação nuclear, mesmo no caso quando a escala de comprimento da interação anômala é menor que o tamanho do núcleo.

Nesse experimento com fonte não-bariônica, o campo é aproximadamente uniforme

e sua direção, que denotaremos por  $x_2$ , é perpendicular a direção  $x_1$  do feixe de nêutrons. No sistema internacional de unidades, o tensor de energia-estresse do campo eletromagnético é dado por

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = \epsilon_0 c^2 \left( F_{\mu\lambda} F_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \quad (5.17)$$

onde  $F_{\mu\nu}$  é o tensor eletromagnético e  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica no vácuo. Dentro do capacitor, as componentes não-nulas do tensor eletromagnético são  $F_{20} = -F_{02} = E/c$ , onde  $E$  é a intensidade do campo elétrico. Portanto, na forma matricial, o tensor eletromagnético é escrito como:

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Esse tensor descreve uma distribuição de estresse anisotrópica com uma densidade de energia  $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ . Nas direções ortogonais do campo  $\vec{E}$ , as pressões efetivas medidas serão  $P_1 = P_3 = P_{\perp} = u$ . Mas, na direção paralela, a configuração do campo dá origem a tensão  $P_2 = P_{\parallel} = -u$ .

Levando em conta que  $T^{(EM)}$  possui traço nulo, segue que, das equações (5.4), (5.7) e (5.18), que a interação gravitacional com o nêutron não-relativístico pode ser descrita pelo potencial

$$\chi(\vec{x}) = -\frac{(\delta + 2) \hat{G}_D}{(\delta + 1) c^2} \int \frac{u(\vec{x}) f(z)}{(|\vec{x} - \vec{x}'|^2 + z^2)^{\frac{1+\delta}{2}}} d^3 x' d^\delta z, \quad (5.19)$$

que é maior que o potencial produzido por uma fonte não-relativística com a mesma densidade de energia por um fator  $(\delta + 2) / (\delta + 1)$ .

Como já mencionamos antes, na idealização de brana sem espessura, o potencial

diverge em qualquer ponto  $\vec{x}$  onde  $u$  é não-nulo, no caso de  $\delta \geq 2$ . Entretanto, o potencial interno pode ser calculado no cenário de brana com espessura, admitindo que o confinamento do campo elétrico na brana é descrito por uma distribuição regular e normalizada,  $f(z)$ . Por questão de simplicidade vamos assumir a hipótese realística que  $R$  é muito menor que os lados do capacitor. Num ponto interior  $\vec{x}$ , longe da borda do capacitor, a maior contribuição para o potencial vem da região  $B_3(R)$  que corresponde à vizinhança esférica de raio  $R$  nas 3 dimensões ordinárias. Para  $\delta > 2$ , na ordem principal, temos (ver Apêndice C):

$$\chi(\vec{x}) = -\frac{2\pi\zeta\hat{G}_D}{\varepsilon^{\delta-2}}\epsilon_0\frac{E^2}{c^2}, \quad (5.20)$$

onde o coeficiente  $\zeta$  é

$$\zeta = \frac{\delta(\delta+2)}{8(\delta+1)}\frac{\Gamma(\frac{\delta-2}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{\delta+1}{2})}. \quad (5.21)$$

O próximo termo tem a ordem relativa de  $\varepsilon/R$ , no mínimo (ver Apêndice C). O potencial  $\chi$  também depende do parâmetro  $\varepsilon$ , que é definido como

$$\frac{1}{\varepsilon^{\delta-2}} = \frac{2}{\delta} \int \frac{f_e(z)}{|z|^{\delta-2}} d^\delta z, \quad (5.22)$$

que é a média da função  $1/z^{\delta-2}$  com respeito à distribuição  $f(\vec{z})$ . Como foi apontado por [87], na ordem principal, os efeitos gravitacionais da fonte não dependem de muitos detalhes dos campos localizados, mas de um momento particular da distribuição do campo no espaço suplementar.

A parte da fonte que encontra-se fora da região  $B_3(R)$  fornece uma contribuição para o potencial resultante que tem uma ordem relativa de  $(\varepsilon/R)^{\delta-2}$ .

Na próxima seção discutiremos sobre o efeito deste potencial sobre o nêutron incidente.

## 5.4 Vínculos da Interferometria de Nêutrons

Por questão de simplicidade, vamos considerar uma pequena mudança no experimento mencionado na seção anterior. Vamos admitir que apenas um dos feixes parciais atravessa a região preenchida com o campo elétrico, enquanto o outro feixe é blindado. Dentro do capacitor, o nêutron também irá interagir com o campo elétrico através da interação gravitacional anômala. Essa interação extra fornecerá um desvio de fase adicional ao feixe. Considerando que é uma interação de curto alcance, o segundo feixe não será afetado pelo potencial anômalo. Assim, a fase relativa entre os dois caminhos será dada por [71]

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\hbar} \int_C \Delta\vec{p} \cdot d\vec{s}, \quad (5.23)$$

onde  $\Delta\vec{p}$  é a variação do momento linear do nêutron causada pela interação gravitacional anômala em relação ao momento linear  $\vec{p}_0$  do nêutron livre. A integração é realizada ao longo do caminho do primeiro feixe dentro do capacitor. Vale lembrar que nessa aproximação estamos desconsiderando a contribuição da cauda do potencial.

A variação do momento linear pode ser determinada da conservação da energia e pode ser expressa em termos do comprimento de onda do nêutron incidente como vimos no caso COW (veja novamente a seção 4.1):

$$\frac{p_z^2}{2m} + m\chi(x) = E = \frac{p_0^2}{2m}.$$

Ao longo da direção do movimento (eixo  $x_1$ , dentro do capacitor), encontramos que

$$\Delta p_1 = -\frac{m^2\chi\lambda_n}{h}, \quad (5.24)$$

onde nesse trecho  $\chi$  é uma constante e é dada pela equação (5.20), na ordem principal. Portanto, substituindo a equação (5.24) na equação (5.23), a diferença de fase

adquirida pelo feixe após atravessar o capacitor de comprimento  $L$  é:

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi^2 m^2}{h^2} \left( \frac{\zeta \hat{G}_D}{\varepsilon^{\delta-2}} \epsilon_0 \frac{E^2}{c^2} \right) \lambda_n L. \quad (5.25)$$

Mais uma vez, um fato interessante acerca da equação (5.25) é que ela também pode ser formalmente derivada da parametrização de Yukawa. Se tomarmos  $\lambda = R$  e reinterpretar o parâmetro  $\alpha$  de Yukawa como

$$\alpha = \frac{(2\pi)^\delta \zeta \Omega R^{\delta-2}}{\varepsilon^{\delta-2}}, \quad (5.26)$$

então, a equação (5.25) poderia ser reescrita como

$$\Delta\Phi = \frac{G\alpha\lambda^2 m^2 \epsilon_0 E^2 \lambda_n L}{h^2 c^2}, \quad (5.27)$$

isto é, na mesma forma que obteríamos de um campo gravitacional descrito pela parametrização de Yukawa. Assim, considerando que a parametrização Yukawa pode levar em conta modificações da gravidade com outras origens físicas além de dimensões ocultas, então, a fim de ser o mais genérico possível a partir do ponto de vista fenomenológico, vamos expressar nossos resultados em termos dos parâmetros de Yukawa daqui em diante.

No experimento AC, a intensidade do campo elétrico é  $E = 30\text{kV/mm}$ ,  $L = 2,53\text{cm}$  e o comprimento do nêutron é  $\lambda_n = 1.477\text{\AA}$  [88]. O desvio de fase predito,  $\Phi = 1,5\text{mrad}$  [88], causado pela interação entre  $\vec{\mu}$  e o campo elétrico do capacitor, é compatível com as medições dentro de um erro da ordem de  $\eta \sim 10^{-3}$  [88]. Portanto, efeitos adicionais de qualquer interação hipotética não poderia ultrapassar o erro  $\eta$ .

A princípio, o desvio da fase gravitacional, que depende de  $E^2$  (equação (5.27)), pode ser distinguido do efeito Aharonov-Casher, que é proporcional a  $E$ . Assim, parece razoável esperar que possamos obter vínculos para a interação gravitacional anômala da análise de um experimento desse tipo. Com o objetivo de fazer uma estimativa, vamos

assumir que o procedimento empírico de testar a gravidade modificada produzida pelo campo elétrico do capacitor tem uma precisão da ordem de  $\eta$ . Assim, segue que, da equação (5.27) temos:

$$\alpha\lambda^2 < 0,26 \times 10^{20} \text{m}^2 \left( \frac{\eta}{10^{-3}} \right) \left( \frac{\text{\AA}}{\lambda_n} \right) \left( \frac{\text{cm}}{L} \right) \left( \frac{30\text{kV/mm}}{E} \right)^2. \quad (5.28)$$

Embora esse limite seja muito fraco comparado com os tradicionais vínculos baseados em fontes bariônicas, devemos enfatizar que a equação (5.28) pode ser estendida para escalas de comprimento menores que o tamanho do núcleo e também ser válida para modelos de dimensões extras, desde que os parâmetros de Yukawa sejam devidamente interpretados, como discutimos nessa seção.

## 5.5 Potenciais Pós-Newtonianos

Estritamente falando, o potencial  $\chi$  não pode ser interpretado como uma modificação no potencial newtoniano uma vez que sua fonte não é a massa de repouso. Em vez disso, o potencial  $\chi$  deve ser considerado como um desvio de curta distância da correção de um potencial pós-newtoniano, dado que a energia elétrica agindo como uma fonte do campo gravitacional não possui correspondência na teoria newtoniana.

No limite de campo fraco, teorias métricas alternativas podem ser distinguidas por meio dos valores dos parâmetros que agem como um acoplamento gravitacional efetivo, relacionado com potenciais pós-newtonianos. No formalismo PPN, existem 10 parâmetros. Dois deles,  $\beta_3$  e  $\beta_4$  (segundo a notação de [89]), são de importância especial aqui. Eles medem quanta gravidade é produzida pela energia não-bariônica interna e pela pressão, respectivamente, em comparação com as previsões da Relatividade Geral.

O potencial  $\chi$  é influenciado por uma combinação da densidade de energia  $u$  e a pressão média  $\hat{P}$  associada com o campo elétrico. Assim, em acordo com esse forma-

lismo mais geral, no qual uma classe mais ampla de teorias métricas pode ser consideradas (não apenas modelos de dimensões extras), o parâmetro  $\alpha$  na equação (5.28) deve ser modificado por uma combinação de dois parâmetros de Yukawa, associados com modificações de curta distância dos parâmetros pós-newtonianos  $\beta_3$  e  $\beta_4$ .

Em geral, os parâmetros pós-newtonianos são independentes e seus valores são determinados fenomenologicamente. Entretanto, para uma classe restrita de teorias métricas que satisfazem as leis de conservação globais completas e que são livres de posição espacial preferencial,  $\beta_3 = 1$  automaticamente [66]. Isso implica que todos os tipos de energia tem a mesma capacidade de curvar o espaço-tempo. Por outro lado, o acoplamento gravitacional associado com a pressão não é fixado nessa classe de teorias, mas deve satisfazer a relação  $\beta_4 = \gamma$  [66], onde  $\gamma$  é outro parâmetro pós-newtoniano, que está associado com a curvatura das seções puramente espaciais do espaço-tempo.

A predição da teoria da Relatividade Geral,  $\gamma = 1$ , tem sido confirmada por testes tais como o do experimento realizado com a ajuda da nave Cassini, que investigou o atraso temporal e a deflexão das ondas de rádio sob a influência do campo gravitacional do sol [90]. O valor empírico  $\gamma = 1 + (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$  é o mais rigoroso para esse parâmetro na escala de comprimento do raio solar [90].

Como vimos no capítulo 3, no domínio microscópico esse parâmetro também tem sido investigado examinando possíveis efeitos de modificações da gravidade de curto alcance através da análise do acoplamento spin-órbita, que depende de  $\gamma$ , obtidos pelo MTV-G. A ausência de qualquer sinal anômalo nos dados estabelece alguns limites nos desvios de curto alcance do parâmetro  $\gamma$ . Também no capítulo 3 vimos que existem vínculos extraídos da espectroscopia do átomo de hidrogênio. A análise da transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$  também impõe vínculos independentes no comportamento de curtas distâncias desse parâmetro pós-newtoniano.

É interessante comparar esses dois vínculos com o vínculo obtido da interferometria de nêutrons (Figura 5.1) uma vez que, para uma classe restrita de teorias métricas, o coeficiente  $\alpha$  na equação (5.28) pode ser visto efetivamente como o parâmetro de

Yukawa relacionado com modificações de curta distância de  $\gamma$ , i.e.,  $\gamma(r) = (1 + \alpha e^{-r/\lambda})$ .

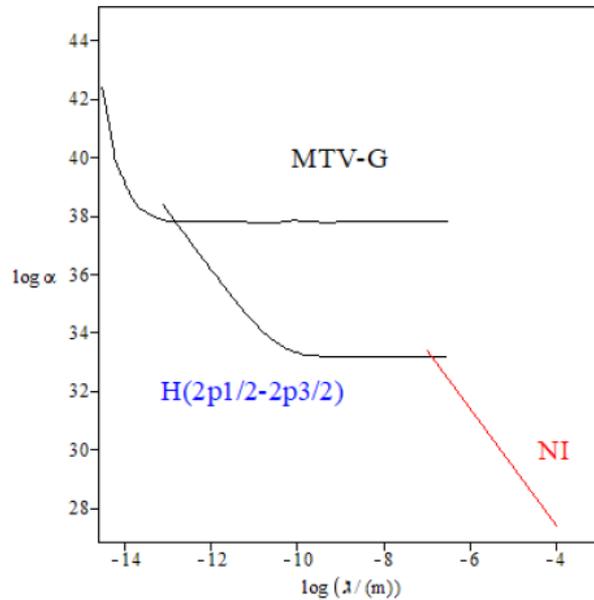


Figura 5.1: Vínculos da Interferometria de Nêutrons (NI, na sigla em inglês) sobre o parâmetro de Yukawa,  $\alpha$ , relacionado com modificações do parâmetro pós-newtoniano  $\gamma$ , em comparação aos limites obtidos pelo MTV-G e os limites espectroscópicos.

Observe que entre  $1,4 \times 10^{-7} \text{m}$  e  $10^{-4} \text{m}$  os vínculos obtidos aqui são mais fortes que os vínculos impostos pelo experimento MTV-G e a espectroscopia [28].

## 6 Conclusões

A motivação de buscas por desvios da lei do inverso do quadrado decorrentes de previsões de teorias de dimensões extras ganhou um grande impulso nas últimas décadas. No entanto, modelos teóricos de branas sem espessura e com mais de uma dimensão extra apresentam limitações quanto ao seu uso em interferometria de nêutrons. Nesse caso, ao se calcular o potencial interno de uma amostra ao qual o nêutron é submetido, nos deparamos com divergências, impedindo uma compreensão completa da interação gravitacional do nêutron com a fonte bariônica da amostra. Com isso, quando descrevermos os vínculos obtidos da interferometria de nêutrons, não fica claro qual quantidade está sendo vinculada ao utilizarmos a parametrização de Yukawa.

Como vimos, o modelo ADD prevê um termo de correção para o potencial gravitacional newtoniano. Para grandes distâncias em relação a fonte, essa correção é do tipo Yukawa e o coeficiente de amplificação é dado por  $\alpha = 2\delta$ , sob certas condições topológicas. A utilização dessa correção via parametrização de Yukawa é válida para experimentos como da balança de torção, por exemplo, uma vez que as massas interagentes estão separadas. Entretanto, nos experimentos de interferometria de nêutrons, o nêutron interage com o núcleo da amostra. Em termos de função de onda, ocorre uma superposição das ondas do nêutron com o núcleo atômico. Esse fato inviabilizaria o uso da parametrização de Yukawa. Além disso, se, mesmo assim, empregarmos a parametrização nesse experimento proposto, observamos que os vínculos obtidos são muito fracos em comparação com os outros vínculos obtidos usando fontes bariônicas.

Como vimos, essas dificuldades envolvendo as divergências do potencial interno podem ser contornadas num cenário de branas com espessura. Ao utilizar esse modelo, conseguimos calcular o comprimento de espalhamento direto  $b_G^{ext}$  associado com a interação gravitacional. Esse comprimento de espalhamento pode ser distinguido do comprimento de espalhamento nuclear, e é proporcional a  $R^\delta / R_N \sigma^{\delta-3}$ , onde  $R$  é o raio de compactação,  $R_N$  é o raio do núcleo e  $\sigma$  é um parâmetro da ordem do comprimento

da brana.

A determinação desse comprimento de espalhamento direto  $b_G^{ext}$  nos permite obter vínculos experimentais e, a partir de sua análise, escrever esses vínculos em termos dos parâmetros de Yukawa. Entretanto, como dito no parágrafo anterior,  $b_G^{ext}$  é inversamente proporcional a  $R_N$ , ou seja, depende do modelo nuclear que estamos estudando. A fim de evitar essa dependência, consideramos um campo elétrico como a fonte que provoca o deslocamento da fase do nêutron no experimento. Por se tratar de uma fonte não-bariônica relativística, os vínculos impostos desse novo experimento são, na verdade, vínculos para desvios de curtas distâncias de parâmetros pós-newtonianos, relacionados com os coeficientes  $\beta_3$  e  $\beta_4$  que medem a capacidade que a pressão e a energia interna possuem de curvar o espaço-tempo.

De uma maneira geral, em teorias métricas distintas, os coeficientes pós-Newtonianos assumem diferentes valores. Como vimos, para uma certa classe de teorias métricas que satisfazem a todas as leis globais de conservação, os parâmetros pós-Newtonianos não são completamente independentes. E, como vimos,  $\beta_3 = 1$ , o que significa que todas as formas de energia interna curvam o espaço-tempo com a mesma intensidade. Por sua vez,  $\beta_4 = \gamma$ , onde  $\gamma$  corresponde a uma medida da capacidade da massa de repouso de curvar as seções puramente espaciais do espaço-tempo.

Modificações desse parâmetro  $\gamma$  foram investigados em curtas distâncias com base no experimento MTV-G e nos testes espectroscópicos. Ambos, explorando o acoplamento spin-órbita do elétron mediado pelo campo gravitacional produzido pelo núcleo do átomo. Como vimos, os vínculos obtidos aqui, através da interferometria de nêutrons, são os vínculos mais fortes, quando comparados com os do experimentos MTV-G e da espectroscopia, na escala de comprimento entre  $1,4 \times 10^{-7} \text{m}$  e  $10^{-4} \text{m}$ .

# Apêndice A

## Volumes em dimensões extras

No contexto de teorias de dimensões extras, é comumente usado os termos “volume”, “esfera”, “3-Bola”. Por isso, uma análise sobre Esferas e seus volumes são de grande importância no estudos de teorias com dimensões extras. Por isso, partiremos para suas definições.

Consideraremos um espaço tridimensional cujas coordenadas são  $x_1, x_2, x_3$ . Neste espaço, a 3-Bola ( $B^3$ ) será a região definida por

$$B^3(R) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2, \quad (\text{A-1})$$

que está envolvida pela 2-Esfera

$$S^2(R) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, \quad (\text{A-2})$$

onde os índices superiores em  $B^3(R)$  e  $S^2(R)$  denotam a dimensionalidade do espaço que estamos considerando.

Como ilustração, tomaremos como exemplo um espaço de dimensões inferiores. Em um espaço com apenas duas dimensões,  $B^2$  é um disco em duas dimensões envolvido por um círculo de raio unitário  $S^1$ . Uma vez conhecidas as equações (A-1) e (A-2), podemos generalizar essas definições de *Bolas* e *Esferas* para um espaço com  $n$  dimensões arbitrárias, onde as *Bolas* e *Esferas* formam um sub-espaço de  $\mathbb{R}^n$ . Assim, uma *Bola* pode ser definida como se segue:

$$B^n(R) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2. \quad (\text{A-3})$$

Esta região está envolvida por uma *Esfera*  $S^{n-1}(R)$ :

$$S^{n-1}(R) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = R^2. \quad (\text{A-4})$$

A fim de evitar complicações ao nos referirmos a definições como perímetro, área, volume, iremos nos referir a estas definições como “volume”. Com isso, não precisamos nos preocupar ao lidar com essas definições em um espaço com  $n$  dimensões. Assim, se o espaço possui uma única dimensão, tomamos o volume como sendo o comprimento. Se o espaço possui duas dimensões o volume será a área e, nesse contexto, os espaços de dimensões superiores possuirão apenas volume.

Assim, com essa redefinição, os volumes das esferas em uma (1) e em duas dimensões serão

$$\text{Vol}(S^1(R)) = 2\pi R, \quad (\text{A-5})$$

$$\text{Vol}(S^2(R)) = 4\pi R^2. \quad (\text{A-6})$$

Observe que o volume da esfera tem unidades de comprimento elevadas à potência da dimensão espacial. Então, podemos relacionar o volume de uma esfera de raio  $R$  com o volume de uma esfera de raio unitário da seguinte forma:

$$\text{Vol}(S^{n-1}(R)) = R^{n-1} \text{Vol}(S^{n-1}). \quad (\text{A-7})$$

Perceba que usando a equação (A-7) recuperamos as expressões (A-5) e (A-6).

Observe que o volume de uma Esfera  $(n - 1)$  –dimensional aparece na equação (A-7). Assim, resta-nos deduzir o volume da *Esfera* de raio unitário  $S^{n-1}$ . No espaço  $\mathbb{R}^n$ , a coordenada radial é definida por:

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2. \quad (\text{A-8})$$

Consideremos a seguinte integral  $I_n$ :

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} dx_1 dx_2 \dots dx_n e^{-r^2}. \quad (\text{A-9})$$

A resolução dessa integral será dada em duas etapas. Primeiramente, se calcularmos o produto de  $n$  integrais gaussianas, obteremos:

$$I_n = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} dx_i e^{-x_i^2}, \quad (\text{A-10})$$

$$= (\sqrt{\pi})^n, \quad (\text{A-11})$$

$$= \pi^{\frac{n}{2}}. \quad (\text{A-12})$$

Agora vamos “fatiar” o espaço  $\mathbb{R}^n$  em cascas esféricas concêntricas. Desta maneira, a região  $r = cte$  corresponde a esfera  $S^{n-1}(r)$ . Com isso, o volume entre cascas esféricas localizadas em  $r$  e  $r + dr$  é igual a:

$$Vol(S^{n-1}(r))dr, \quad (\text{A-13})$$

e, por isso, a integral  $I_n$  assume a seguinte forma:

$$I_n = \int_0^{\infty} dr Vol(S^{n-1}(r)) e^{-r^2}. \quad (\text{A-14})$$

Utilizando a equação (A-7), temos:

$$I_n = Vol(S^{n-1}) \int_0^{\infty} dr r^{n-1} e^{-r^2}. \quad (\text{A-15})$$

Aqui, faremos uma mudança de coordenadas onde definiremos  $t = r^2$ . Segue, então, que:

$$I_n = Vol(S^{n-1}) \int_0^{\infty} dt e^{-t} r^{\frac{n}{2}-1}. \quad (\text{A-16})$$

Lembrando da definição da função gama [50]:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1}, \quad (\text{A-17})$$

podemos reescrever a equação (A-14) como:

$$I_n = \frac{1}{2} \text{Vol}(S^{n-1}) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \quad (\text{A-18})$$

Então, comparando a equação (A-10) com a equação (A-16), finalmente encontramos:

$$\text{Vol}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \quad (\text{A-19})$$

Tomando, por exemplo, os casos onde  $n$  é igual a 2, 3 e 4, obtemos:

$$\text{Vol}(S^1) = \text{Vol}(S^{2-1}) = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi, \quad (\text{A-20})$$

$$\text{Vol}(S^2) = \text{Vol}(S^{3-1}) = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = 4\pi, \quad (\text{A-21})$$

$$\text{Vol}(S^3) = \text{Vol}(S^{4-1}) = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2, \quad (\text{A-22})$$

respectivamente.

Então, usando a equação (A-17) obtemos:

$$\text{Vol}(S^{n-1}(R)) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^{n-1}. \quad (\text{A-23})$$

Assim, podemos escrever o volume de uma esfera  $n - 1$  dimensional de raio  $R$ .

## Apêndice B

### Fórmula do Somatório de Poisson

A Fórmula do Somatório de Poisson (FSP) é geralmente escrita na seguinte forma:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{k}{T}\right) e^{\frac{2\pi i k t}{T}}, \quad (\text{B-1})$$

onde  $T$  é o período e  $g\left(\frac{k}{T}\right)$  é a transformada de Fourier de  $f(t)$ , tal que:

$$g\left(\frac{k}{T}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i k \tau}{T}} f(\tau) d\tau. \quad (\text{B-2})$$

Iniciamos assumindo que

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t + nT) \quad (\text{B-3})$$

e, uma vez que  $F(t)$  é uma função periódica em  $t$ , a escrevemos como uma série de Fourier:

$$F(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{k}{T}\right) e^{\frac{2\pi i k t}{T}}. \quad (\text{B-4})$$

Como um exemplo direto da FSP, tomemos a igualdade:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi z} = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 \pi / z}. \quad (\text{B-5})$$

Para prová-la, identificamos que nossa função  $f(t)$  será  $f(t) = e^{-t^2}$  e  $T = \sqrt{\pi z}$ .

Então, escrevemos:

$$F(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi z}. \quad (\text{B-6})$$

Então, usando a *FSP*:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi z} = \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{k}{\sqrt{\pi z}}\right). \quad (\text{B-7})$$

A transformada de Fourier é dada por:

$$g\left(\frac{k}{\sqrt{\pi z}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i k t}{\sqrt{\pi z}}} e^{-t^2} dt. \quad (\text{B-8})$$

$$= \sqrt{\pi} e^{-k^2\pi/z}. \quad (\text{B-9})$$

Assim, voltando pra equação (B-7):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi z} = \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sqrt{\pi} e^{-k^2\pi/z} \quad (\text{B-10})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2\pi/z}, \quad (\text{B-11})$$

justamente a igualdade que queríamos provar.

## Apêndice C

### Cálculo do Potencial Gravitacional Anômalo no Interior de um Capacitor

Seja o potencial na região interior  $\vec{x}$  do capacitor, compreendida na região da 3-Bola de raio  $R$ :

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) &= -\frac{\hat{G}_D}{(\delta+1)c^2} \left( u \int_B \frac{f(z)}{(\xi^2+z^2)^{\frac{1+\delta}{2}}} d^3\xi d^\delta z \right), \\ &= -\frac{\hat{G}_D}{(\delta+1)c^2} \left( 4\pi u \int_0^R \frac{f(z)}{(\xi^2+z^2)^{\frac{1+\delta}{2}}} \xi^2 d\xi d^\delta z \right).\end{aligned}\quad (\text{C-1})$$

Para integrar a equação (C-1) com respeito a  $\xi$ , vamos fazer a seguinte transformação de coordenadas:

$$\xi = z \tan \theta. \quad (\text{C-2})$$

Com isso, teremos

$$d\xi = z \sec^2 \theta d\theta. \quad (\text{C-3})$$

Para  $\xi = R$ , logo  $\theta = \theta_0$ , onde

$$\theta_0 = \arctan \left( \frac{R}{z} \right).$$

Note que efetivamente  $0 < z < \varepsilon$ , uma vez que  $f(z)$  deve cair rapidamente fora da brana. Segue que  $\theta_0$  tem valor em torno de  $\pi/2$ . Assim, podemos fazer a seguinte transformação

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \arctan \left( \frac{R}{z} \right) = \int_0^{R/z} \left( \frac{1}{1+x^2} \right) dx, \\ &= \int_0^\infty \left( \frac{1}{1+x^2} \right) dx - \int_{R/z}^\infty \left( \frac{1}{1+x^2} \right) dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2} - \int_{R/z}^{\infty} \left( \frac{1}{1+x^2} \right) dx, \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_{R/z}^{\infty} \frac{(1+1/x^2)^{-1}}{x^2} dx, \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_{R/z}^{\infty} \frac{1}{x^2} \left( 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots \right) dx, \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{z}{R} + \frac{z^3}{3R^3} + \dots
\end{aligned} \tag{C-4}$$

Agora voltemos para a equação (C-1). Com respeito a essa nova coordenada  $\theta$ , a integral agora pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{x}) &= -\frac{\hat{G}_D}{(\delta+1)c^2} \left( 4\pi u \int_0^{+\theta_0} \int_0^{+\theta_0} \frac{f(z)}{z^{1+\delta} (\sec^2 \theta)^{\frac{1+\delta}{2}}} z^2 \tan^2 \theta (z \sec^2 \theta) d\theta d^\delta z \right), \\
&= -\frac{\hat{G}_D}{(\delta+1)c^2} \left( 4\pi u \int_0^{+\theta_0} \int_0^{+\theta_0} \frac{f(z)}{z^{\delta-2} (\sec^2 \theta)^{\frac{1+\delta}{2}}} \tan^2 \theta (\sec^2 \theta) d\theta d^\delta z \right), \\
&= -\frac{\hat{G}_D}{(\delta+1)c^2} \left( 4\pi u \int_0^{+\theta_0} \int_0^{+\theta_0} \frac{f(z)}{z^{\delta-2}} \sin^2 \theta (\cos^{\delta-3} \theta) d\theta d^\delta z \right).
\end{aligned} \tag{C-5}$$

Para  $\delta > 2$ , vamos considerar a integrais separadamente. Tomemos primeiramente a integral em  $\theta$ , que denotaremos por  $I(\theta_0)$ , assim:

$$I(\theta_0) = \int_0^{+\theta_0} \sin^2 \theta (\cos^{\delta-3} \theta) d\theta. \tag{C-6}$$

Vamos definir

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

de modo que

$$d\alpha = -d\theta.$$

Nessa mudança de coordenadas, para  $\theta = 0$ ,  $\alpha$  será igual a  $\pi/2$  e, para  $\theta = \theta_0$ ,  $\alpha$  será igual a  $\pi/2 - \theta_0 \simeq z/R$ . Ora, sabendo que

$$\cos \theta = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha,$$

e que

$$\sin \theta = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha,$$

logo, a integral em  $\theta$  poderá ser escrita como

$$\begin{aligned} I(\theta_0) &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha (\sin^{\delta-3} \alpha) d\alpha - \int_0^{z/R} \cos^2 \alpha (\sin^{\delta-3} \alpha) d\alpha, \\ &= I(\pi/2) - \int_0^{z/R} \alpha^{\delta-3} d\alpha, \\ &= I(\pi/2) - \frac{1}{\delta-2} (z/R)^{\delta-2}. \end{aligned} \quad (\text{C-7})$$

Portanto, a ordem relativa do segundo termo é  $(\varepsilon/R)^{\delta-2}$ . Assim, em primeira aproximação, teremos:

$$I(\theta_0) = I(\pi/2) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(\frac{\delta-2}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{\delta+1}{2})} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{\delta-2}{2})\sqrt{\pi}}{(\delta-1)\Gamma(\frac{\delta-1}{2})}. \quad (\text{C-8})$$

Portanto, teremos

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= -\frac{\hat{G}_D}{(\delta+1)c^2} \left( 4\pi u \gamma \int \frac{f(z)}{z^{\delta-2}} d^\delta z \right), \\ &= -\frac{\hat{G}_D}{(\delta+1)c^2} \left( \frac{4\pi\gamma}{\varepsilon^{\delta-2}} \right) u(\vec{x}), \end{aligned} \quad (\text{C-9})$$

onde

$$\frac{1}{\varepsilon^{\delta-2}} = \int \frac{f(z)}{z^{\delta-2}} d^\delta z. \quad (\text{C-10})$$



# *Bibliografia*

- [1] Newton, I. In *Opticks*, (1704, 2nd. Ed. 1718), Book 3, Query 28, 343-5.
- [2] Kaluza, T., On the Unification Problem in Physics. Disponível em <https://arxiv.org/pdf/1803.08616.pdf>
- [3] Klein, O. *Quantum Theory and Five-Dimensional Relativity Theory*, 1991. The Oskar Klein Memorial Lectures, 67–80. doi:10.1142/9789814368728\_0006
- [4] Hamed, N. A.; Dimopoulos, S.; Dvali, G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter, *Physics Letters B*, Volume 429, Issues 3-4, 1998, Pages 263-272.
- [5] Randall, L.; Sundrum, R. A Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.* 83, 3370 (1999).
- [6] Randall, L.; Sundrum, R. An Alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.* 83, 4690 (1999).
- [7] Sundrum, R. Effective field theory for a three-brane universe. *Phys. Rev. D* . 59, 085009 (1999).
- [8] M. Gabella. The Randall-Sundrum model. IPPC,EPFL, 2006.
- [9] E. G. Adelberger, B. R. Heckel, and A. E. Nelson, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 53, 77 (2003).
- [10] Murata, J.;Tanaka, S.. A review of short-range gravity experiments in the LHC era. *Class. Quantum Grav.* 32 (2015) 033001 (32pp).
- [11] The Eöt-Wash Group: Laboratory Tests of Gravitational and sub-Gravitational Physics. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/hep-ph/0405262.pdf>.
- [12] <https://www.npl.washington.edu/eotwash/inverse-square-law>.

- [13] <https://www.learner.org/series/physics-for-the-21st-century/gravity/gravity-video/>.
- [14] Kapner, D. J.; Cook, T. S.; Adelberger, E. G.; et. al. Tests of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale. *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 021101.
- [15] Kapner, D. et al. Tests of the gravitational inverse-square law below the dark energy length scale. *Phys. Rev. Lett.*, v. 98, p. 021101, 2007.
- [16] J. G. Lee, E. G. Adelberger, T. S. Cook, S. M. Fleischer, and B. R Heckel. *New Test of the Gravitational  $1/r^2$  Law at Separations down to  $52 \mu\text{m}$* . arXiv:2002.11761.
- [17] H. Casimir, On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates, *Indag. Math.* 10 (1948), 261-263.
- [18] Pinto, M. V. C.; Farina, C; Tort, A. O Efeito Casimir. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 22, no. 1, Março, 2000.
- [19] Giudice, G. F.; Rattazzi, R.; Wells, J. D. Quantum gravity and extra dimensions at high-energy colliders. *Nucl. Phys. B* 544 (1999).
- [20] Luna, G. C. Testes de Modificações da Gravitação na Escala Atômica. Tese (Obtenção do título de doutora em física) - Departamento de física da Universidade Federal da Paraíba, 2020.
- [21] Fleurbaey, H.; Galtier, S.; Thomas, S.; et al. New Measurement of the  $1S - 3S$  Transition Frequency of Hydrogen: Contribution to the Proton Charge Radius Puzzle. *Physical Review Letters*, 120, 183001 (2018).
- [22] Parthey, C. G.; Matveev, A. ; Alnis, J. et al. Improved Measurement of the Hydrogen  $1S - 2S$  Transition Frequency. *Physical Review Letters*, 107, 203001 (2011).
- [23] O. Bertolami, *Modern Physics Letters A*, Volume 1, Issue 06, pp. 383-388 (1986). doi:10.1142/S0217732386000476

- [24] Geoffrey L. Greene e Vladimir Gudkov, Phys. Re. C 75, 015501 (2007), DOI: 10.1103/PhysRevC.75.015501.
- [25] V. V. Nesvizhevsky and K. V. Protasov, Class. Quantum Grav. 21, 4557–4566, (2004).
- [26] A. W. Overhauser and B. Colella, Phys. Rev. Lett. 33, 1237 (1974).
- [27] R. Colella, A. W. Overhauser, and S. A. Werner, Phys. Rev. Lett. 34, 1472 (1975).
- [28] J. M. Rocha, F. Dahia. Neutron Interferometry and Tests of Short-Range Modifications of Gravity. [arXiv:2103.04218](https://arxiv.org/abs/2103.04218)
- [29] Wesson, Paul S., Overduin, J. M., *Principles of space-time-matter : cosmology, particles and waves in five dimensions*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2019.
- [30] Kaku, M. Quantum Field Theory: A modern introduction. Oxford University Press, 1993.
- [31] Morgado, A. 5D Kaluza-Klein theories - a brief review. Departamento de Física, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal, 2013.
- [32] Lemos, A. S. Efeitos das Dimensões Extras em Sistemas Atômicos e o Problema do Raio do Próton. Tese (Obtenção do título de doutor em física) - Departamento de física da Universidade Federal da Paraíba, 2018.
- [33] <https://www.sukidog.com/jpierre/strings/extradim.htm>. Visitado em 27/01/2021.
- [34] Overduin, J.M.; Wesson, P.S. Kaluza-Klein gravity. Physics Reports, Volume 283, Issues 5–6, 1997, Pages 303-378.
- [35] C. D. Hoyle, U. Schmidt, B. R. Heckel, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, D. J. Kapner and H. E. Swanson, Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law: A search for ‘large’ extra dimensions,”Phys. Rev. Lett. 86, 1418 (2001) [hep-

- ph/0011014]; Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law,"Phys. Rev. D 70, 042004 (2004) [hep-ph/0405262].
- [36] Aquino, P. M.. Física além do Modelo Padrão em Teorias de Dimensões Extras. Dissertação (Mestrado em Ciências). Instituto de Física, São Paulo, 2007.
- [37] Rubakov, V.A.; Shaposhnikov, M.E. Extra space-time dimensions: Towards a solution to the cosmological constant problem. Physics Letters B, Volume 125, Issues 2-3, 1983, Pages 139-143.
- [38] Rubakov, V.A.; Shaposhnikov, M.E. Do we live inside a domain wall?. Physics Letters B, Volume 125, Issues 2-3, 1983, Pages 136-138.
- [39] Rubakov, V. A. Large and infinite extra dimensions: An Introduction. Phys. Usp. 44 (2001) 871.
- [40] Neto, J. B.. Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana. Editora livraria da física, 2<sup>a</sup> ed. 2013.
- [41] Zwiebach, B. A First Course in String Theory. Cambridge University Press, 2004.
- [42] Freeman, W. H. The Once and Future Cosmos: Scientific American Special Edition, 2002.
- [43] Silva, A. A. Um Estudo Sobre Dimensões Extras. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, 2009.
- [44] A. Kehagias, K. Sfetsos. Deviations from the  $1/r^2$  Newton law due to extra dimensions. Phys.Lett. B472 (2000) 39-44, arXiv:hep-ph/9905417.
- [45] Bühlmann, M. Gravitational Law in Extra Dimensions. KTH Stockholm, 2013.
- [46] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of integrals, series and products, corrected and enlarged edition, 1980 Academic Press.
- [47] Oliveira Junior, Raimundo Ivan de. Modelos de Randall Sundrum e estabilização do raio da dimensão extra. Dissertação de Mestrado, 2017.

- [48] Yoonbai Kim, Chong Oh Lee, Ilbong Lee, and JungJai Lee. Brane world of warp geometry: An introductory review. arXiv preprint hep-th/0307023, 2003.
- [49] F. Dahia, C. Romero, Phys.Lett. B 651:232 (2007).
- [50] Carmen, L. R. B. Notas de Física matemática ed. Livraria da Física, 2006.
- [51] Liu, M. Y. Z.; Han, Z. H.; Wang, Y.C., et. al. Preliminary limits on deviation from the inverse-square law of gravity in the solar system: A power-law parametrization. 2014.
- [52] Hammad, Fayçal & Landry, Alexandre & Mathieu, Kaleb. Prospects for testing the inverse-square law and gravitomagnetism using quantum interference. International Journal of Modern Physics D. 30. 2150004. 10.1142/S0218271821500048. (2020)
- [53] Long, G. C.; Chang, H.; Price, J.. Experimental status of gravitational strength forces in the sub-centimeter regime. Nucl. Phys. B529, 23 (1999).
- [54] Adelberger, E. G.; Gundlach, J. H.; Heckel, B. R.; et. al. Torsion balance experiments: A low-energy frontier of particle physics. Prog. Part. Nucl. Phys. 62 (2009) 102.
- [55] Yao, W. M.; et al. Review of Particle Physics. J. Phys. G 33, 1 (2006).
- [56] Stelle, K. S. Classical Gravity with Higher Derivatives. Gen. Rel. Grav. 9 (1978) 353.
- [57] Salumbides, E.J. ; Ubachs, W. ; Korobov, V.I. Bounds on fth forces at the sub-Alength scale. Journal of Molecular Spectroscopy, Volume 300, 2014, Pages 65-69.
- [58] M. Iwasaki, S.N. Nakamura, K. Shigaki, et al, Phys. Rev. Lett. 67, 1246–1249, (1991).

- [59] Hori, M.; Sótér, A.; Barna, D. Two-photon laser spectroscopy of antiprotonic helium and the antiproton-to-electron mass ratio. *Nature*, volume 475, pages 484-488 (2011).
- [60] Lemos, A. S.; Luna, G. C.; Maciel, E.; Dahia, F. Spectroscopic tests for short-range modifications of Newtonian and post-Newtonian potentials. *Class.Quant.Grav.* 36 (2019) no. 24, 245021.
- [61] Mohr, P.J.; Taylor, B.N.; Newell, D.B. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010. *Rev. Modern Phys.* 84, 1527 (2012).
- [62] Jentschura, U. D.; Kotochigova, S.; Le Bigot, E. O.; et al. Precise Calculation of Transition Frequencies of Hydrogen and Deuterium Based on a Least-Squares Analysis. *Physical Review Letters*, 95, 163003 (2005).
- [63] L. I. Schiff, *Phys. Rev. Lett.* 4, 215 (1960).
- [64] C. W. F. Everitt et al., *Phys. Rev. Lett.* 106, 221101 (2011).
- [65] Tanaka, S.; Nakayaa, Y.; Ninomiyaa, K. MTV-G Experiment: Probing Non-Standard Strong Gravitational Field at Nuclear Scale Using Geodetic Precession. *Physics of Particles and Nuclei*, 2014, Vol. 45, No. 1, pp. 237—240.
- [66] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (revised ed.). Cambridge Univ. Press (1993).
- [67] Bertotti, B.; Less, L. Tortora, P. A. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, volume 425, pages 374-376 (2003).
- [68] Lundeen, S; Pipkin, F. Separated Oscillatory Field Measurement of the Lamb Shift in H,  $n = 2$ . *Metrologia*. 22. 9. 10.1088/0026-1394/22/1/003 (2005).
- [69] Dahia, F; Lemos, A. S. Constraints on extra dimensions from atomic spectroscopy. *Phys. Rev. D* 94 (2016) no.8, 084033.
- [70] U. Bonse and M. Hart, *Appl. Phy. Lett.* 6, 155 (1965).

- [71] Helmut Rauch and Samuel A. Werner, *Neutron Interferometry: Lessons in Experimental Quantum Mechanics, Wave-Particle Duality, and Entanglement*, Second Edition, 2015.
- [72] E.G. Beltrametti and J. M. Levy-Leblond. *Advances in Quantum Phenomena*. Plenum Press. New York, 1995.
- [73] H. Goldstein *Classical Mechanics* (2nd Edit. Addison-Wesley) (1980).
- [74] S. A. Werner. *Class. Quantum Grav.* 11 (1994) A207-A226.
- [75] J.J. Sakurai, J Napolitano, *Mecânica Quântica Moderna*, 2<sup>a</sup> Ed., Porto Alegre, 2013.
- [76] Kaoru Taketani 2012 *J. Phys.: Conf. Ser.* 340 012050.
- [77] W. Michael Snow, *Phys. Today* 66 (3), 50 (2013); doi: 10.1063/PT.3.1918.
- [78] Yu. N. Pokotilovski, *Physics of Atomic Nuclei*, 2006, Vol. 69, No. 6, pp. 924–931.
- [79] Roger Pynn, *Neutron Scattering—A PRIMER*, *Los Alamos Science*, 1990.
- [80] H. Rauch and S. Werner, *Neutron Interferometry* (Oxford University Press, USA, 2000).
- [81] O. Zimmer and N. Kaiser, arXiv:hep-ph/0602127 (2006).
- [82] Aharonov Y., Casher A. *Phys. Rev. Lett.* 53, 319 (1984).
- [83] Gian E Giudice, Riccardo Rattazzi and James D. Wells, *Nuclear Physics B*, 544 3-38, (1999).
- [84] I. Antoniadis, K. Benakli, A. Laugier, T. Maillard, *Nucl. Phys. B* 662, 40 (2003).
- [85] A. Frank et al. / *Physics Letters B* 582 (2004) 15–20.
- [86] V. V. Nesvizhevsky, G. Pignol, and K. V. Protasov, *Phys. Rev. D* 77, 034020 (2008).
- [87] E. Dahia, E. Maciel and A.S. Lemos. *Eur.Phys.J.* C78, no.6, 526 (2018).

- [88] Cimmino A., Opat G. I., Klein A.G., Kaiser H., Werner S.A., Arif M., Clothier R. Phys. Rev. Lett. 68, 380 (1989).
- [89] Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A. Gravitation. San Francisco. W.H. Freeman and Co, p.1066-1095 (1973).
- [90] B. Bertotti, L. Iess, P. Tortora. Nature. 425, 374–376. (2003).