

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática



Teoria do Grau e Aplicações

por

Aurílio Rodrigues Machado Filho

Dezembro/2022

João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Curso de Bacharelado em Matemática

Teoria do Grau e Aplicações

por

Aurílio Rodrigues Machado Filho

sob a orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Bacharelado em Matemática.

Dezembro/2022

João Pessoa - PB

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M149t Machado Filho, Aurílio Rodrigues.
Teoria do Grau e aplicações / Aurílio Rodrigues
Machado Filho. - João Pessoa, 2022.
93 p. : il.

Orientação: Manassés Xavier de Souza.
TCC (Curso de Bacharelado em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Grau topológico de Brouwer. 2. Grau topológico de
Leray e Schauder. 3. Aplicações da Teoria do Grau
Topológico. I. Souza, Manassés Xavier de. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

Teoria do Grau e Aplicações

por

Aurílio Rodrigues Machado Filho

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Bacharelado em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovado em: 09 / 12 / 2022.

COMISSÃO EXAMINADORA



Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB (Orientador)



Prof. Dr. Uberlândia Batista Severo - UFPB



Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB

Dezembro/2022

Agradecimentos

- A meus familiares, em especial a minha Mãe, Karla Maria Belarmino Serra, a minha eterna gratidão, por me dar suporte para eu chegar até aqui, tanto no financeiro quanto na incentivação.
- Ao Professor Manassés Xavier de Souza que me orientou neste trabalho, bem como pelos anos de orientação na iniciação científica. Além disso, pela atenção e principalmente pelas suas experiências que muito contribuíram a concluir uma grande e importante etapa da minha vida.
- A Professora Flávia Jerônimo Barbosa, pelo estímulo e orientações que me deu, mesmo antes da minha entrada na Graduação, bem como ao professor João Marcos Bezerra do Ó por me orientar nos estudos da graduação e em uma iniciação científica.
- A todos os meus amigos do laboratório Milênio, em especial a Marcelo José Miranda Cunha Filho por sempre tirar dúvidas minhas durante a graduação. Agradeço a João Henrique Santos de Andrade, Flávio Domingos Teixeira de Araújo, Jaqueline Nascimento de Lima e Assuério André Cavalcante que compartilharam comigo esses anos de estudos, sabendo cultivar a amizade e discussões sobre temas apresentados na Graduação de Matemática.
- Aos professores do Departamento de Matemática da UFPB pelos conhecimentos transmitidos, em especial, aos professores Uberlandio Batista Severo, Everaldo Souto de Medeiros e Daniel Marinho Pellegrino.
- Deixo meu agradecimento em especial a Joyce Saraiva Sindeaux por me ajudar a revisar esse texto e por sempre me apoiar a seguir em frente.
- Ao CNPq pelo apoio financeiro.
- Finalmente, gostaria de agradecer aos professores: Uberlandio Batista Severo e a João Marcos Bezerra do Ó que aceitaram participar da banca e, assim, colaborar com este trabalho.

A minha família.

RESUMO

Neste trabalho, faremos um estudo da Teoria do Grau Topológico que tem grande aplicabilidade em Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e Equações Diferenciais Parciais (EDP). Construiremos a Teoria do Grau Topológico em três etapas: na primeira, construiremos o Grau Topológico em dimensões finita, mais precisamente, estudaremos o Grau Topológico de Brouwer. Na segunda etapa, será estudado o Grau Topológico em dimensão infinita, de modo mais preciso, o Grau Topológico de Leray & Schauder. Na Terceira etapa, estudaremos aplicações dessa teoria, na qual destacamos sua aplicabilidade em soluções de EDP's.

Palavras-Chave: O Grau Topológico de Brouwer; O Grau Topológico de Leray & Schauder; Aplicações da Teoria do Grau Topológico.

ABSTRACT

In this work, we will study the Topological Degree Theory that has great applicability in Ordinary Differential Equations (ODE) and Partial Differential Equations (PDE). We will construct Topological Degree Theory in three stages: In the first stage, we will construct Topological Degree in finite dimensions, more precisely, we will study Brouwer Topological Degree. In the second step we will study the Topological Degree in infinite dimension, more precisely, the Topological Degree of Leray-Schauder. In the third stage we study some applications, in which we highlight its applicability in EDP's.

Keywords: The Brouwer Degree; The Leray & Schauder Degree; Applications of Degree Theory.

SUMÁRIO

Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	x
1 Preliminares	1
2 O grau Topológico de Brouwer	4
2.1 O grau Topológico de Brouwer	4
2.1.1 Unicidade do Grau Topológico de Brouwer	5
2.1.2 Construção do Grau Topológico de Brouwer	13
2.1.3 Propriedades do Grau Topológico de Brouwer	20
2.2 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e Aplicações	31
3 O Grau Topológico de Leray e Schauder	42
3.1 O Grau Topológico de Brouwer em Espaço Vetorial de Dimensão Finita	42
3.2 O Grau Topológico de Leray e Schauder	48
3.3 Propriedades do Grau Topológico de Leray e Schauder	56
3.4 Teoremas do Ponto Fixo de Schauder e Schaeffer	65
3.5 Existência de solução para um problema sublinear	72

NOTAÇÕES

Aqui estão algumas notações adotadas ao longo do texto:

- I_d - Aplicação identidade;
- ∂A - Fronteira do conjunto A ;
- $\overline{A}$ - Fecho do conjunto A ;
- $C(A) = C(A, \mathbb{R}^n) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R}^n; f \text{ é contínua em } A\}$;
- $C^k(A) = C^k(A, \mathbb{R}^n) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R}^n; f \text{ é } k \text{ vezes diferenciáveis em } A\}$;
- $B(x, r) = B_r(x)$ - Bola de centro x e raio r ;
- $\overline{B(x, r)}$ - Bola fechada de centro x e raio r ;
- $\rho(x, A) = \text{dist}(x, A) = \inf\{|x - y| : y \in A\}$ - $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{R}^n$;
- $\|f\|_0 = \|f\|_\infty = \max_{x \in A} |f(x)|$ - $f \in C(A)$ e $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto;
- $\text{sgn } f$ - Sinal da função f ;
- $\text{conv}(D)$ - Fecho convexo de D ;
- $f'(x)$ - Derivada de f no ponto x ;
- $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ - Norma euclidiana do vetor x em $\mathbb{R}^n$;

- $|\cdot|$ - norma de um elemento de $\mathbb{R}$.
- $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$ - Suporte da Função f ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - Produto interno;
- $\text{div}(f) = \langle \nabla, f \rangle$ - Divergente da função f ;
- $\|\cdot\|$ - Norma de um vetor (depende do contexto);
- $\rightharpoonup$ - Convergência fraca;
- $\rightarrow$ - Convergência forte;
- $L^p(\Omega)$ - Espaço de Lebesgue, onde $\Omega \subset \mathbf{R}^n$;
- $H_0^1(\Omega)$ - Espaço de Sobolev, onde $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, apresentaremos uma das ferramentas básicas utilizadas pelo ramo da Matemática que é conhecido como Análise Funcional Não Linear. Podemos definir o ramo amplamente como aquele que lida com resolver problemas não lineares, incluindo equações (também equações diferenciais e integrais) ou problemas de otimização. Vale enfatizar que este assunto é indispensável no estudo referente à questões de existência e multiplicidade de soluções.

Começemos com uma questão de importância matemática fundamental: Dado uma função f , um domínio A e um ponto de imagem y , para quantos $x \in A$ temos

$$f(x) = y? \tag{1}$$

Por definição, funções injetivas sempre teriam um ou zero e funções sobrejetivas sempre teriam pelo menos um. Claro que tal resposta em geral é delicada. No entanto, podemos pensar quando podemos encontrar uma função que nos indicaria que pelo menos algum x existe, em vez de exigir que saibamos o número exato de tais soluções. Além disso, também seria interessante se a função fosse topologicamente estável, pois possivelmente poderíamos conectar alguns cenários complicados à cenários mais simples e bem compreendidos.

Dito isto, dedicaremos este trabalho a um dos métodos topológicos da Análise Funcional Não Linear em dimensões finita e infinita, chamado o Grau Topológico que dispõe-se a compreender em quais condições obtemos soluções da equação do

tipo (1). Tal assunto é indispensável no estudo de propriedades qualitativas de soluções para vários tipos de problemas analíticos, especialmente aqueles referentes a questões de existência e multiplicidade de soluções.

Vale enfatizar que sempre buscaremos responder perguntas como:

- Existe uma solução da equação no conjunto especificado?
- Qual é a estrutura do conjunto de soluções?
- Como o conjunto de soluções muda quando alteramos os parâmetros do problema?

Resumindo, queremos apresentar a Teoria do Grau em duas etapas: Na primeira será feita o estudo do Grau Topológico de Brouwer que vale em espaços vetoriais de dimensão finita e na segunda etapa será estudado o Grau de Leray e Schauder que vale em espaços vetoriais de dimensão infinita, que teve por base o trabalho da Tese de Doutorado de Henry Berestycki [3] de 1975.

Para estruturar o trabalho organizamos da seguinte forma:

No Capítulo 1 veremos alguns resultados preliminares de Análise Funcional, Teoria da Medida e Integração, Álgebra linear que serão usados nos capítulos seguintes.

No Capítulo 2, trataremos o Grau Topológico de Brouwer. Inicialmente, por redução a casos mostraremos que assumindo a existência de uma função satisfazendo as propriedades da Definição 2.1.1, então essa função é única e, além disso, obtemos uma indicação de como ela deve ser definida. Logo em seguida, definiremos o Grau Topológico de Brouwer e discutiremos algumas de suas propriedades, na qual se destaca a propriedade de existência de solução da equação (1) (na qual podemos encontrar na Proposição (P_8)). Por fim, abordaremos aplicações do Grau de Brouwer, na qual destacamos o Teorema de Ponto Fixo de Brouwer, isso porque este teorema será chave fundamental para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

No Capítulo 3, vamos estudar o Grau Topológico em espaços de Banach de dimensão infinita, conhecido como Grau de Leray e Schauder. Veremos nesse capítulo que o Grau Topológico de Leray e Schauder é uma generalização do Grau Topológico

de Brouwer. Dessa forma, neste capítulo, definiremos o Grau Topológico de Leray e Schauder e provaremos que as propriedades válidas no Grau Topológico de Brouwer também são satisfeitas nesse contexto. Por fim, na última seção, usando a teoria do Grau de Leray e Schauder demonstraremos o Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer, o qual juntamente com os resultados de Schauder são usados para mostrar a existência de solução para a seguinte classe de problemas elípticos quasilineares, por exemplo,

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Aqui, enunciaremos alguns resultados importantes que serão necessários para uma melhor compreensão do trabalho a ser desenvolvido. Em determinados pontos de nosso trabalho, faremos referências aos seguintes resultados:

Teorema 1.0.1 (Teorema da Função Inversa, [13]). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k , com $k \geq 1$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in U$ é tal que $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é invertível, então existe uma bola aberta $B = B(a, \delta) \subset U$ tal que a restrição $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto V tal que $f(a) \in V$.*

Teorema 1.0.2 (Teorema da Mudança de Variáveis, [13]). *Sejam $h : U \rightarrow V$ um difeomorfismo de classe C^1 entre os abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$, $X \subset U$ um compacto J -mensurável e $f : h(X) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então, $f \circ h : X \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_{h(X)} f(y) dy = \int_X f(h(x)) \cdot |\det h'(x)| dx.$$

Teorema 1.0.3 (Teorema de Fubini, [13]). *Seja $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ integrável no produto dos retângulos $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$. Para todo $x \in A$, seja $f_x : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_x(y) = f(x, y)$ e ponhamos*

$$\varphi(x) = \int_{\underline{B}} f_x(y) dy \quad e \quad \psi(x) = \overline{\int_B f_x(y) dy}.$$

As funções $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{R}$, assim definidas, são integráveis, com

$$\int_A \varphi(x) dx = \int_A \psi(x) dx = \int_{A \times B} f(x, y) dx dy$$

isto é,

$$\int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_A \left(\int_{\underline{B}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Teorema 1.0.4 (Teorema da Aproximação de Weierstrass, [14]). *Seja $C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ um paralelepípedo compacto no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Dada uma função contínua $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma sequência de polinômios a n variáveis que converge uniformemente para f em C . Se f possui todas as derivadas parciais mistas até a ordem k e elas são contínuas em C , então as derivadas desses polinômios também convergem uniformemente em C para as derivadas correspondentes de f .*

Teorema 1.0.5 ([6], p. 35 a 37). *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua. Então existe uma função contínua $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$ para $x \in A$.*

Teorema 1.0.6 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, [2]). *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis, as quais convergem em quase toda parte para uma função mensurável f a valores reais. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g, \forall n$, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Teorema 1.0.7 (Desigualdade de Hölder, [2]). *Seja $f \in L^p(A)$ e $g \in L^q(A)$, onde $p \geq 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1(A)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(A)} \leq \|f\|_{L^p(A)} \cdot \|g\|_{L^q(A)}.$$

Teorema 1.0.8 ([5]). *Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja (x_n) uma sequência limitada. Então, existe $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ que converge fracamente em X , isto é, existe $x \in X$ tal que*

$$x_{n_j} \rightharpoonup x \in X.$$

Definição 1.0.1 (Imersão Contínua, [1]). Dizemos que o espaço normado $(X, \|\cdot\|_X)$ está imerso continuamente no espaço $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ se:

- i) X for subespaço vetorial de Y ,
- ii) A aplicação identidade $i : X \rightarrow Y$ tal que $i(x) = x$ é contínua, isto é, existe $M > 0$ tal que $\|i(x)\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall x \in X$.

Teorema 1.0.9 (Imersões de Sobolev, [1]). Considere $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira suave. Então, as seguintes imersões são contínuas:

$$H_0^1(A) \hookrightarrow \begin{cases} L^s(A); & 1 \leq s \leq 2^* = \frac{2N}{N-2} \text{ para } N \geq 3 \\ L^s(A); & 1 \leq s < \infty \text{ para } N = 1 \text{ ou } N = 2 \end{cases}$$

Definição 1.0.2 (Operador Linear Compacto, [10]). Um operador linear $T : X \rightarrow Y$ é dito compacto, se toda sequência limitada $(x_n) \subset X$ é levada em uma sequência $(y_n = T(x_n))$ que admite uma subsequência convergente em Y .

Definição 1.0.3 (Imersão Compacta, [1]). Dizemos que o espaço normado $(X, \|\cdot\|_X)$ está imerso compactamente no espaço $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ se $I_d : X \rightarrow Y$ tal que $I_d(x) = x$ é um operador linear compacto.

Teorema 1.0.10 (Teorema da Imersão Compacta de Rellich-Kondrachov, [1]). Considere $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira suave. Então, as seguintes imersões são compactas:

$$H_0^1(A) \hookrightarrow \begin{cases} L^s(A); & 1 \leq s < 2^* = \frac{2N}{N-2} \text{ para } N \geq 3 \\ L^s(A); & 1 \leq s < \infty \text{ para } N = 1 \text{ ou } N = 2 \end{cases}$$

Teorema 1.0.11 (Teorema da Representação de Riesz, [5]). Seja X um espaço de Hilbert. Então qualquer funcional linear limitado $h(x)$ definido em X ($x \in X$) pode ser escrito exclusivamente como $h(x) = \langle x, y \rangle_X$ para algum $y \in X$ (o elemento y é referido como o “representante Riesz”).

CAPÍTULO 2

O GRAU TOPOLÓGICO DE BROUWER

O objetivo desta secção é estudar resultados necessários de Teoria do Grau Topológico de Brouwer e como aplicação demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer com base nos livros [7] [13] e [6].

2.1 O grau Topológico de Brouwer

Desde das disciplinas de Cálculo percebemos que analisar a solubilidade de um polinômio de grau $n \geq 3$ é um trabalho difícil mesmo o polinômio sendo uma função de classe C^∞ . Durante a história da Matemática presenciamos que muito dos problemas em Análise Funcional Não-Linear podem ser reduzidos a encontrar soluções para uma equação do tipo

$$f(x) = y \tag{2.1}$$

sobre um determinado espaço de Banach adequado. No entanto, se consideramos funções reais, o Teorema do Valor Intermediário fornece condições suficientes para a existência de tais raízes. Posto isso, veremos que a Teoria do Grau Topológico tenta generalizar o Teorema do Valor Intermediário no sentido de dar respostas sobre a

solubilidade da equação (2.1), isto é, oferecer informações sobre a existência, multiplicidade e natureza dessa solução. Mais precisamente, a Teoria do Grau Topológico nos diz que:

Considere X um espaço Vetorial normado, $A \subset X$ aberto e limitado, $y \in X$ tal que $y \notin \partial A$ e $f : X \rightarrow X$. O grau Topológico será uma função que associa cada tripla (f, A, y) a um número inteiro, a qual denotaremos por d (em muitos livros é usado deg). Mais precisamente,

Definição 2.1.1. *Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua, $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, e $y \in \mathbb{R}^n \setminus \partial A$. O grau topológico é uma função d que associa cada tripla (f, A, y) a um número inteiro e que satisfaz:*

$$(d_1) - d(I_d, A, y) = 1, \quad \forall y \in A.$$

$$(d_2) - d(f, A, y) = d(f, A_1, y) + d(f, A_2, y), \text{ para quaisquer dois abertos disjuntos } A_1, A_2 \subset A \text{ tais que } y \notin f(\overline{A} \setminus (A_1 \cup A_2)).$$

$$(d_3) - (\text{Invariância por homotopia}) \ (H(t, \cdot), A, y(t)) \text{ independe do valor de } t \in [0, 1] \text{ sempre que } H : [0, 1] \times A \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ e } y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ forem contínuas e } y(t) \notin H(t, \partial A), \forall t \in [0, 1].$$

2.1.1 Unicidade do Grau Topológico de Brouwer

Assumindo a existência de uma função d com as propriedades (d_1) , (d_2) e (d_3) , mostraremos a seguir, por redução de casos, que tal função é única e, além disso, obteremos uma indicação de como ela deve ser definida.

A primeira etapa de nosso trabalho será mostrar que a função d é unicamente determinada por seu valor em funções de classe $\overline{C}^\infty(A) = \bigcap_{k \geq 1} \overline{C}^k(A)$, onde $\overline{C}^k(A) = C^k(A) \cap C(\overline{A})$. Para tanto, vamos introduzir o conceito de funções regularizantes e algumas preliminares.

Definição 2.1.2. *Denotamos a distância de um ponto fixado x até o conjunto A por:*

$$\rho(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Definição 2.1.3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ associe a função $\phi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\phi_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha^{-n} c \exp\left(\frac{-1}{1 - \left|\frac{x}{a}\right|^2}\right) & , \text{ se } \left|\frac{x}{a}\right| < 1 \\ 0 & , \text{ se } \left|\frac{x}{a}\right| \geq 1. \end{cases}$$

onde $c = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{-1}{1 - |x|^2}\right) dx\right)^{-1}$ para garantir que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\alpha(x) dx = 1$.

Observação 2.1.1. Com alguns cálculos simples podemos mostrar que $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ a função ϕ_α possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens e em todas as variáveis. Assim, temos que $(\phi_\alpha)_{\alpha>0}$ estão em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, note que, como essa família é identicamente nula fora de $B(0, \alpha)$, temos que $\text{supp}(\phi_\alpha) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \phi_\alpha(x) \neq 0\}} = \overline{B(0, \alpha)}$.

Os próximos resultados serão úteis para a justificativa de que o grau de uma função contínua poder ser calculado através de uma aproximação por uma função C^∞ .

Proposição 2.1.1 ([6], p. 3 e 4). Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e $\varepsilon > 0$. Então, existe $g_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|f(x) - g_\varepsilon(x)\|_2 \leq \varepsilon, \quad \forall x \in A.$$

Proposição 2.1.2 ([6], p. 3 e 4). Sejam $f \in \overline{C}^1(A)$ e $\delta > 0$ tal que $A_\delta = \{x \in A : \rho(x, \partial A) \geq \delta\} \neq \emptyset$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $g_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\max_{x \in A} \|f(x) - g_\varepsilon(x)\|_2 + \max_{x \in A_\delta} \|f'(x) - g'_\varepsilon(x)\|_2 \leq \varepsilon.$$

Observação 2.1.2. Considere $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e limitado, $f \in C(\overline{A})$ e $y \notin f(\partial A)$. Uma vez que A é limitado, ∂A é compacto e f é contínua, o conjunto $f(\partial A)$ é compacto e, portanto, $\alpha = \rho(y, f(\partial A)) > 0$. De acordo com a Proposição 2.1.1, existe $g_\alpha \in \overline{C}^\infty(A)$ tal que $\|f - g_\alpha\|_\infty < \alpha$. Se definirmos $H : [0, 1] \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $H(t, x) = (1 - t)f(x) + tg_\alpha(x)$ e $y(t) = y$, temos que, para todo $t \in [0, 1]$, H é contínua e

$$\begin{aligned} \|H(t, x) - y\|_2 &= \|(f(x) - y) - t(f(x) - g_\alpha(x))\|_2 \geq \|f(x) - y\|_2 - t\|f(x) - g_\alpha(x)\|_2 \\ &\geq \|f(x) - y\|_2 - \|f - g_\alpha\|_\infty \geq \alpha - \|f - g_\alpha\|_\infty > 0, \quad \forall x \in \partial A. \end{aligned}$$

Assim, $y(t) \notin H(t, \partial A)$ e aplicando (d_3) , temos que $d(f, A, y) = d(g_\alpha, A, y)$, isto é, nessas condições podemos calcular o grau de f que é contínua através da aproximação $g_\alpha \in C^\infty$.

Definição 2.1.4. Dados $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ função de classe $C^1(A)$, sabemos que a derivada de f em $x \in A$ é dada pela jacobiana em x , que denotaremos por $J_f(x)$. Pontos regulares são definidos como pontos $x \in A$ tais que $J_f(x) \neq 0$. Caso contrário, x é dito ponto crítico. Se $f(x) = y$ para algum ponto crítico x , então y é dito valor singular. Caso contrário, se y não é imagem de qualquer ponto crítico via f , então y é chamado de valor regular. Denotaremos por S_f o conjunto dos pontos de críticos da função f .

Nosso próximo passo será reduzir o problema de unicidade do grau a pontos regulares, mais precisamente, o objetivo será mostrar que se f satisfaz certas condições então o conjunto $f(S_f)$ pode ser desprezível, isto é, tem medida n -dimensional nula.

Proposição 2.1.3. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $f \in \overline{C}^\infty(A)$ e $y \notin f(\partial A)$. Se y é um valor regular de f , então $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito.

Prova. Dividiremos a demonstração desta proposição em duas partes.

Afirmção 2.1.1. Os pontos $f^{-1}(y)$ são isolados.

De fato, como y é um valor regular de f , temos que $J_f(x_0) \neq 0$, portanto, pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe $U = B_\varepsilon(x_0)$ tal que $f|_U$ é um difeomorfismo. Logo, para cada $x_0 \in f^{-1}(y)$, podemos tomar $U = B_\varepsilon(x_0)$ tal que $f^{-1}(y) \cap B_\varepsilon(x_0) = x_0$. Concluindo que todos os elementos de $f^{-1}(y)$ são isolados.

Afirmção 2.1.2. $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito.

Suponha que $f^{-1}(y)$ seja um conjunto com infinitos elementos. Logo, existe uma sequência de pontos distintos $(x_n) \subset A$ em $f^{-1}(y)$, e portanto,

$$(x_n) \subset A \subset \overline{A}.$$

Como A é limitado, segue que $\overline{A}$ é compacto, logo existe uma subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ tal que

$$x_{n_j} \rightarrow x_0 \in \overline{A}.$$

Como f é contínua e a sequência (x_n) é de pontos isolados, segue que

$$y = f(x_{n_j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(x_0) = y.$$

Isso significa que $x_0 \in \overline{A} \cap f^{-1}(y)$, e como $y \notin f(\partial A)$, então $y \in f(A)$. Mas como x_0 pertence ao conjunto de pontos isolados $f^{-1}(y)$, temos uma contradição, pois chegamos que x_0 é o limite de uma sequência de elementos de A . Portanto, $f^{-1}(y)$ é finito. ■

Proposição 2.1.4. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f \in \overline{C}^\infty(A)$ tais que $y_0 \notin f(\partial A)$. Então existe $\alpha > 0$ tal que $d(f, A, y) = d(f, A, y_0)$, $\forall y \in B_\alpha(y_0)$.*

Prova. Considere $\alpha = \rho(y_0, f(\partial A)) > 0$. Daí, $B_\alpha(y_0) \cap f(\partial A) = \emptyset$. Defina agora,

$$H(t, x) = f(x) \text{ e } y(t) = ty_0 + (1 - t)y,$$

com $y \in B_\alpha(y_0)$ e $t \in [0, 1]$. Assim, temos que

- $H(t, x) = f(x)$ é contínua por hipótese.
- $y(t)$ é contínua, pois é uma função afim.
- $y(t) \notin H(t, \partial A)$, $\forall t \in [0, 1]$.

De fato, como

$$f(\partial A) \cap B_\alpha(y_0) = \emptyset,$$

segue do fato que

$$y(t) \in B_\alpha(y_0) \text{ e } H(t, \partial A) = f(\partial A)$$

que $y(t) \notin H(t, \partial A)$.

Assim, concluímos que $d(H(t, x), A, y(t))$ independe de $t \in [0, 1]$ e, por (d_3) , aplicando para $t = 1$ e $t = 0$, segue que

$$d(f, A, y) = d(f, A, y_0), \quad \forall y \in B_\alpha(y_0),$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema 2.1.1 (Sard [6], p. 5 a 7). *Seja $f \in C^1(A)$. Então, $f(S_f)$ tem medida nula.*

Observação 2.1.3. *Pela Proposição 2.1.4 e pelo Teorema 2.1.1 concluímos que, quando vamos calcular $d(f, A, y)$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que y é um valor regular de f .*

Agora veremos como se comporta o grau referente a uma transformação linear, mas antes disso apresentaremos um resultado, decorrente de (d_2) , que é bastante útil durante a teoria:

Proposição 2.1.5. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $f \in C(\overline{A})$ e $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $y \notin f(\partial A)$ (que é equivalente a y ser valor regular), então:*

$$(a) \ d(f, \emptyset, y) = 0;$$

$$(b) \ \text{Se } A_1 \subset A \text{ é aberto e } y \notin f(\overline{A} \setminus A_1), \text{ então } d(f, A_1, y) = d(f, A, y);$$

$$(c) \ \text{Se } f \in \overline{C}^\infty(A), \ y \notin f(S_f(A)) \text{ e } f^{-1}(y) = \emptyset, \text{ então } d(f, A, y) = 0.$$

Prova. (a) Considerando $A_1 = A$ e $A_2 = \emptyset$, então A_1 e A_2 são subconjuntos abertos e disjuntos de A e $y \notin f(\overline{A} \setminus (A_1 \cup A_2)) = f(\partial A)$. Assim, estamos nas condições da propriedade (d_2) e, portanto,

$$d(f, A, y) \stackrel{(d_2)}{=} d(f, A_1, y) + d(f, A_2, y) = d(f, A, y) + d(f, \emptyset, y),$$

onde concluímos que $d(f, \emptyset, y) = 0$.

(b) Considerando $A_1 = A$ e $A_2 = \emptyset$, então A_1 e A_2 são subconjuntos abertos e disjuntos de A e $y \notin f(\overline{A} \setminus (A_1 \cup A_2)) = f(\partial A)$. Assim, estamos nas condições da propriedade (d_2) e, portanto, pelo item (a) temos que

$$d(f, A, y) \stackrel{(d_2)}{=} d(f, A_1, y) + d(f, A_2, y) = d(f, A, y) + d(f, \emptyset, y) \stackrel{(a)}{=} d(f, A_1, y).$$

(c) Observe que temos $f^{-1}(y) = \emptyset \iff y \notin f(\overline{A})$. Assim, considerando $A_1 = A_2 = \emptyset$ temos que $y \notin f(\overline{A} \setminus (A_1 \cup A_2)) = f(\overline{A})$ e, portanto, por (d_2) e (a), temos que

$$d(f, A, y) \stackrel{(d_2)}{=} d(f, \emptyset, y) + d(f, \emptyset, y) \stackrel{(a)}{=} 0.$$

Assim, concluímos a prova. ■

Teorema 2.1.2. *Sejam $f \in \overline{C}^\infty(A)$, $y \notin f(\partial A \cup S_f(A))$ e $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Então existe $r > 0$ tal que*

$$d(f, A, y) = \sum_{i=1}^m d(f'(x_i), B(0, r), 0).$$

Prova. Como por hipótese $f^{-1}(y)$ é um subconjunto finito de A , que é um aberto, então existem $\varepsilon_i > 0$ com $i \in \{1, \dots, m\}$ tais que

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\varepsilon_i}(x_i).$$

Daí, escolhendo $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$, temos que

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i).$$

em que as bolas $B_\varepsilon(x_i)$ são duas a duas disjuntas. Utilizando a definição de derivada no ponto x_i , obtemos que

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + E(x - x_i), \text{ onde } \lim_{\|x - x_i\|_2 \rightarrow 0} \frac{E(x - x_i)}{\|x - x_i\|_2} = 0. \quad (2.2)$$

Por outro lado, por (d_2) e pela Proposição 2.1.5 (b), segue que

$$d(f, A, y) \stackrel{(d_2)}{=} d\left(f, \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i), y\right) \stackrel{(b)}{=} \sum_{i=1}^m d(f, B_\varepsilon(x_i), y).$$

Afirmção 2.1.3. *Existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(f, B_\delta(x_i), y) = d(f'(x_i)(x - x_i), B_\delta(x_i), 0).$$

De fato, seja $C = f'(x_i)$. Como $\det C \neq 0$ segue que C é invertível e, portanto,

$$\|x\|_2 = \|C^{-1}Cx\|_2 \leq \|C^{-1}\|_2 \|Cx\|_2 \Rightarrow \|Cx\|_2 \geq c \cdot \|x\|_2, \quad (2.3)$$

com $c = \|C^{-1}\|_2^{-1}$. Daí, por (2.2) temos que, dado $\tilde{\varepsilon} = \frac{c}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\|E(x - x_i)\|_2}{\|x - x_i\|_2} < \frac{c}{2}, \text{ sempre que } |x - x_i| < \delta. \quad (2.4)$$

Assim, para $x \in B_\delta(x_i)$, definimos $y(t) = ty$ e

$$\begin{aligned} h(t, x) &= tf(x) + (1 - t)C(x - x_i) \\ &\stackrel{(2.2)}{=} t[f(x_i) + C(x - x_i) + E(x - x_i)] + (1 - t)C(x - x_i) \\ &= y(t) + C(x - x_i) + tw(x - x_i). \end{aligned}$$

Temos que $y(t)$ e $h(t, x)$ são contínuas. Vejamos que para todo $t \in [0, 1]$, $y(t) \notin h(t, \partial B_\delta(x_i))$. De fato, se $t \in [0, 1]$ e $\|x - x_i\|_2 = \delta$, então

$$\begin{aligned}
 \|h(t, x) - y(t)\|_2 &= \|C(x - x_i) + tE(x - x_i)\|_2 \\
 &\geq \|C(x - x_i)\|_2 - t\|E(x - x_i)\|_2 \\
 &\stackrel{(2.3)}{\geq} c\|x - x_i\|_2 - \|E(x - x_i)\|_2 \\
 &\stackrel{(2.4)}{>} c\|x - x_i\|_2 - \frac{c}{2}\|x - x_i\|_2 \\
 &= \left(\frac{c}{2}\right)\|x - x_i\|_2 \\
 &= \frac{c}{2\delta} > 0.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, pela propriedade (d_3) do grau, temos

$$d(f, B_\delta(x_i), y) = d(C(x - x_i), B_\delta(x_i), 0), \quad (2.5)$$

que demonstra a Afirmação 2.1.3.

Agora seja $r > 0$ tal que $B_\delta(x_i) \subset B_r(0)$. Como $C = f'(x_i)$ é um isomorfismo, então x_i é a única solução de

$$Cx - Cx_i = 0,$$

e podemos usar novamente o resultado (b) da Proposição 2.1.5 para obter que

$$d(C(x - x_i), B_\delta(x_i), 0) = d(C(x - x_i), B_r(0), 0). \quad (2.6)$$

Por fim, sejam $H : [0, 1] \times B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$H(t, x) = C(x - tx_i) \text{ e } Y(t) = 0.$$

Naturalmente, $Y(t)$ e $H(t, x)$ são contínuas e como $|x_i| < r$, segue que $C(x - tx_i) \neq 0$ para todo $x \in \partial B_r(0)$ e todo $t \in [0, 1]$, pois, caso contrário,

$$\begin{aligned}
 C(x - tx_i) = 0 &\iff x - tx_i = 0 \\
 &\iff x = tx_i \\
 &\Rightarrow \|x\|_2 = \|tx_i\|_2 \\
 &\Rightarrow r = t\|x_i\|_2 < r.
 \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo $0 \notin H(t, \partial B_r(0))$. Usando (d_3) novamente temos

$$d(C(x - x_i), B_r(0), 0) = d(Cx, B_r(0), 0). \quad (2.7)$$

Daí, juntando as informações, temos que

$$\begin{aligned}
 d(f, B_\delta(x_i), y) &\stackrel{(2.5)}{=} d(C(x - x_i), B_\delta(x_i), 0) \\
 &\stackrel{(2.6)}{=} d(C(x - x_i), B_r(0), 0) \\
 &\stackrel{(2.7)}{=} d(Cx, B_r(0), 0) \\
 &= d(f'(x_i), B_r(0), 0).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(f, A, y) = \sum_{i=1}^m d(f'(x_i), B(0, r), 0),$$

como queríamos demonstrar. ■

Por fim, em ordem de concluir a demonstração da unicidade da função d vamos verificar que $d(B, B(0, r), 0)$ é unicamente determinada se B é uma transformação linear com $\det B \neq 0$, isto é, a última etapa da demonstração de unicidade consiste em demonstrar que $d(B, B(0, r), 0) = \text{sgn}(\det(B))$, onde $\text{sgn}(\det(B))$ denota o sinal do determinante da matriz B . Esse fato relativamente simples possui uma demonstração extensa e a omitiremos aqui. Direcionamos o leitor que veja a referência [6], páginas 8 a 11 ou [7].

Teorema 2.1.3 (Unicidade do Grau). *Seja $\mathcal{D}$ a coleção de todos os subconjuntos abertos e limitados de $\mathbb{R}^n$ e*

$$M = \{(f, A, y) : A \in \mathcal{D}, f \in C(\overline{A}) \text{ e } y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial A)\}.$$

Então, existe no máximo uma função $d : M \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfazendo as propriedades $(d_1) - (d_3)$. Além do mais, tais propriedades implicam que $d(B, A, 0) = \text{sgn}(\det B)$ para aplicações lineares B com $\det B \neq 0$ e $0 \in A$.

Prova. Suponhamos que existem duas funções d_1 e d_2 satisfazendo as propriedades do grau topológico de Brouwer. Sejam $f \in C(\overline{A})$ e $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial A)$, então pela Proposição 2.1.1, temos que

$$d_1(f, A, y) = d_1(g, A, y), \quad \text{onde } g \in \overline{C}^\infty(A) \text{ e } \|f - g\|_\infty < \rho(y, f(\partial A)).$$

Portanto, pelo Teorema 2.1.2 segue que

$$d_1(g, A, y) = \sum_{i=1}^m d_1(g'(x_i), B(0, r), 0), \quad \text{onde } x_i \in f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}.$$

Finalmente, obtemos que

$$d_1(g, A, y) = \sum_{i=1}^m d_1(g'(x_i), B(0, r), 0) = \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}(\det g'(x_i)).$$

De forma análoga verificamos que $d_2(f, A, y) = \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}(\det g'(x_i))$, concluindo então que $d_1(f, A, y) = d_2(f, A, y)$. ■

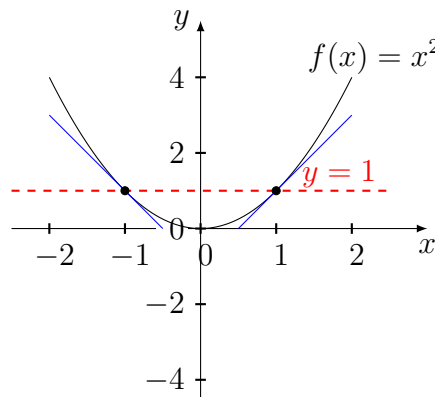
2.1.2 Construção do Grau Topológico de Brouwer

Agora definiremos o grau em três etapas. Na primeira, faremos uma definição restrita a valores regulares de $f \in \overline{C}^1(A)$. Na segunda, generalizaremos a primeira definição para qualquer valor de $f \in \overline{C}^2(A)$. Por fim, na terceira etapa, ampliaremos a definição de grau para a sua forma mais genérica, definindo-o para $f \in C(\overline{A})$.

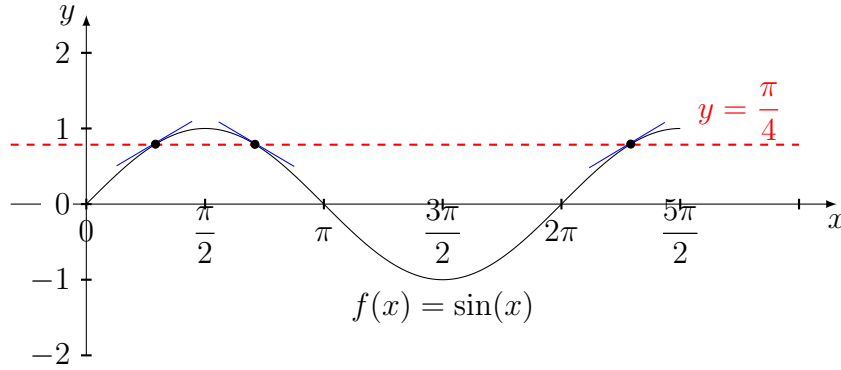
Definição 2.1.5 (O caso regular - y valor regular). *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $f \in \overline{C}^1(A)$ e $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial A \cup S_f)$. Então definimos:*

$$d(f, A, y) = \begin{cases} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_f(x) & , \text{ se } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \text{ se } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases} \quad (2.8)$$

Exemplo 2.1.1. *Note que se $f : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = x^2$ e $y = 1$, então $d(f, (-2, 2), 1) = 0$.*



Exemplo 2.1.2. *Note que se $f : \left(0, \frac{5\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = \sin(x)$ e $y = \frac{\pi}{4}$, então segue que $d\left(f, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = 1$.*



Observação 2.1.4. *O Exemplo 2.1.1, nos diz que se o Grau Topológico de Brouwer é zero, então a equação (2.1) pode ter solução ou não.*

Para generalizar a Definição 2.1.5 de modo a abranger tanto valores regulares quanto valores singulares, isto é, eliminar a hipótese $y \notin f(S_f)$, vamos inicialmente substituir $\sum \text{sgn } J_f(x)$ por uma integral apropriada, de modo a facilitar o nosso trabalho.

Proposição 2.1.6 (A expressão integral do Grau). *Sejam A , f e y como na Definição 2.1.5 e $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ a família de funções regularizantes dada pela Definição 2.1.3. Então existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(y, f)$ tal que*

$$d(f, A, y) = \int_A \phi_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x) dx, \quad (2.9)$$

para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Prova. Dividiremos a demonstração em dois casos:

Passo 1: Suponha o que $f^{-1}(y) = \emptyset$. Assim, tomamos $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \rho(y, f(A))$ para obtermos $\phi_\varepsilon(f(x) - y) = 0$, resultando $d(f, A, y) = 0$.

Passo 2: Para o caso $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Daí, pela Afirmação 2.1.2 podemos supor que $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$, e assim, pelo Teorema da Aplicação Inversa (Teorema 1.0.1), existem bolas $B(x_i, \delta)$ disjuntas tais que $f|_{B(x_i, \delta)}$ é um difeomorfismo sobre uma vizinhança V_i de y e

$$\text{sgn } J_f(x) = \text{sgn } J_f(x_i) \text{ em } B(x_i, \delta).$$

Assim, tomando $r > 0$ tal que

$$B(y, r) \subset \bigcap_{i=1}^m V_i,$$

e denotando

$$U_i = B(x_i, \delta) \cap f^{-1}(B(y, r)) \text{ e } \bigcap_{i=1}^m U_i = U,$$

existe $\beta > 0$ tal que

$$|f(x) - y| \geq \beta, \quad \forall x \in \overline{A} \setminus \left(\bigcap_{i=1}^m U_i \right) = \overline{A} \setminus U,$$

pois se isso não fosse verdade, teríamos uma sequência $(f(x_n))$, com $x_n \in \overline{A} \setminus U$, convergindo para y . O que é impossível porque toda vizinhança suficientemente próxima de y é homeomorfa a algum $B(x_i, \delta)$ via f . Visto isso, se $0 < \varepsilon < \beta$, então

$$\left\| \frac{f(x) - y}{\varepsilon} \right\|_2 > 1, \quad \forall x \in A \setminus U \quad \Rightarrow \quad \phi_\varepsilon(f(x) - y) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_A \phi_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x) dx &= \sum_{i=1}^m \int_{U_i} \phi_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{U_i} \phi_\varepsilon(f(x) - y) \operatorname{sgn}(J_f(x)) |J_f(x)| dx \\ &= \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}(J_f(x_i)) \int_{U_i} \phi_\varepsilon(f(x) - y) |J_f(x)| dx. \end{aligned}$$

Assim, a fim de concluir a demonstração, é suficiente mostrar que

$$\int_{U_i} \phi_\varepsilon(f(x) - y) |J_f(x)| dx = 1.$$

Com efeito, como

- $J_f(x) = J_{f-y}(x)$, pois y é mantido constante.
- $f(U_i) - y = B(0, r)$.
- $f - y : U_i \rightarrow B(0, r)$ é um difeomorfismo.

Daí, tomando $\varepsilon < r$ e usando o Teorema de Mudança de Variáveis (Teorema 1.0.2)

$$\begin{aligned} \int_{U_i} \phi_\varepsilon(f(x) - y) |J_f(x)| dx &= \int_{U_i} \phi_\varepsilon(f(x) - y) |J_{f-y}(x)| dx \\ &= \int_{B(0, r)} \phi_\varepsilon(x) dx \\ &= \int_{\overline{B(0, r)}} \phi_\varepsilon(x) dx \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assim, considerando $\varepsilon_0 = \min\{\beta, r\}$ temos que

$$\begin{aligned}
 \int_A \phi_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x) dx &= \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}(J_f(x_i)) \int_{U_i} \phi_\varepsilon(f(x) - y) |J_f(x)| dx \\
 &= \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}(J_f(x_i)) \\
 &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(J_f(x)) \\
 &= d(f, A, y), \quad \text{para } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,
 \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Uma vez definido o grau para valores regulares, vamos modificar a definição de modo a abranger também os valores singulares. Observe que definimos o grau para $f \in \overline{C}^1$, y valor regular e y não pertencente a imagem da fronteira. Agora, queremos definir o grau onde y não seja valor regular, mas para tirarmos essa restrição, vamos restringir um pouco a regularidade da função f para $\overline{C}^2$ para retirarmos a hipótese de que y seja valor regular, mais precisamente:

Proposição 2.1.7. *Sejam então $f \in \overline{C}^2(A)$, $y_0 \notin f(\partial A)$ e $\alpha = \rho(y_0, f(\partial A)) > 0$. Fixemos $y_1, y_2 \in B(y_0, \alpha)$ valores regulares de f . Definamos $\delta = \alpha - \max\{\|y_1 - y_0\|_2, \|y_2 - y_0\|_2\}$. Usando a Proposição 2.1.6 obtemos $0 < \varepsilon < \delta$ tal que*

$$d(f, A, y_i) = \int_A \phi_\varepsilon(f(x) - y_i) J_f(x) dx \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Então estas duas integrais são iguais, isto é,

$$\int_A [\phi_\varepsilon(f(x) - y_2) - \phi_\varepsilon(f(x) - y_1)] J_f(x) dx = 0.$$

Prova. Defina a função

$$w(x) := (y_1 - y_2) \int_0^1 \phi_\varepsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2)) dt$$

Afirmção 2.1.4. $\phi_\varepsilon(x - y_2) - \phi_\varepsilon(x - y_1) = \operatorname{div}(w(x)) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_j}(x)$.

De fato, inicialmente denotaremos o j -ésima componente de um vetor y_1 por y_1^j nesta subseção ao invés do usual y_j . Analogamente para y_2 . Derivando sob o sinal

da integral e utilizando a regra da cadeia, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w_j}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(y_1^j - y_2^j) \int_0^1 \phi_\varepsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2)) dt \right] \\
 &= (y_1^j - y_2^j) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} [\phi_\varepsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2))] dt \\
 &= (y_1^j - y_2^j) \int_0^1 \phi'_\varepsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2)) \cdot e_j dt.
 \end{aligned}$$

Daí, denotando $r(t) := x - y_1 + t(y_1 - y_2)$, temos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(w(x)) &= \sum_{j=1}^n \left[(y_1^j - y_2^j) \int_0^1 \phi'_\varepsilon(r(t)) \cdot e_j dt \right] \\
 &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n [(y_1^j - y_2^j) \phi'_\varepsilon(r(t)) \cdot e_j] dt \\
 &= \int_0^1 \left[\phi'_\varepsilon(r(t)) \cdot \sum_{j=1}^n (y_1^j - y_2^j) \cdot e_j \right] dt \\
 &= \int_0^1 \phi'_\varepsilon(r(t)) \cdot (y_1 - y_2) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \phi_\varepsilon(r(t)) dt \\
 &= \phi_\varepsilon(r(1)) - \phi_\varepsilon(r(0)) \\
 &= \phi_\varepsilon(x - y_2) - \phi_\varepsilon(x - y_1),
 \end{aligned}$$

o que conclui a Afirmação 2.1.4.

Afirmação 2.1.5. *Se $r := \alpha - (\delta - \varepsilon) < \alpha$, então $\operatorname{supp}(w(x)) \subset \overline{B(y_0, r)}$.*

Com efeito, se $\|x - y_0\|_2 > r$ e $t \in [0, 1]$, temos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}
 \|x - y_1 + t(y_1 - y_2)\|_2 &\geq \|x - y_0\|_2 - \|y_0 - y_1 + t(y_1 - y_2)\|_2 \\
 &> r - \|y_0 - y_1 + t(y_1 - y_2)\|_2 \\
 &= r - \|(1 - t)y_0 - y_1\|_2 + t\|y_0 - y_2\|_2 \\
 &\geq r - (1 - t)\|y_0 - y_1\|_2 + t\|y_0 - y_2\|_2 \\
 &\geq r - \max\{\|y_0 - y_1\|_2, \|y_0 - y_2\|_2\} \\
 &= \alpha - (\delta - \varepsilon) - \max\{\|y_0 - y_1\|_2, \|y_0 - y_2\|_2\} \\
 &= \alpha - (\alpha - \max\{\|y_1 - y_0\|_2, \|y_2 - y_0\|_2\} - \varepsilon) \\
 &\quad - \max\{\|y_0 - y_1\|_2, \|y_0 - y_2\|_2\} \\
 &= \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Logo, se $x \notin \overline{B(y_0, r)}$, então $\|x - y_1 + t(y_1 - y_2)\|_2 > \varepsilon$, implicando assim que

$$\phi_\varepsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2)) = 0$$

para $t \in [0, 1]$ pela definição de ϕ_ε . Portanto, $\text{supp}(w(x)) \subset \overline{B(y_0, r)}$, resultando em

$$f(\partial A) \cap \text{supp}(w) = \emptyset,$$

pois, caso contrário, teríamos $\overline{B(y_0, r)} \cap f(\partial A) \neq \emptyset$. Dada a interseção vazia, e as escolhas de y_1, y_2 , e ε , é possível demonstrar a existência de uma $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{supp}(v) \subset A$ e para todo $x \in A$

$$\text{div}(w(f(x)))J_f(x) = [\phi_\varepsilon(f(x) - y_2) - \phi_\varepsilon(f(x) - y_1)]J_f(x) = \text{div}(v(x)). \quad (2.10)$$

Para estudar a construção da v , veja [7] página 14. Seja $a > 0$ a medida de uma aresta grande o suficiente para que $A \subset [-a, a]^n := Q$. Pelo que foi afirmado até então, temos que

$$\begin{aligned} \int_Q \text{div}(v(x)) dx &= \int_A \text{div}(v(x)) dx \\ &= \int_A [\phi_\varepsilon(f(x) - y_2) - \phi_\varepsilon(f(x) - y_1)] \cdot J_f(x) dx \\ &= d(f, A, y_2) - d(f, A, y_1). \end{aligned}$$

Portanto, para demonstrar nossa afirmação inicial, é suficiente mostrar que a integral de $\text{div}(v(x))$ é nula no cubo Q . De fato, pela definição do divergente e o fato que $v_j(a) = v_j(-a) = 0$ (pois $\text{supp } v \subset A \subset Q$), segue que

$$\begin{aligned} \int_Q \text{div}(v(x)) dx &= \int_Q \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_Q \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)(x) dx \\ &\stackrel{\text{Teorema 1.0.3}}{=} \sum_{j=1}^n \left(\int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(x) dx_j dx' \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde $dx' := \prod_{i \neq j} dx_i$. ■

Com isso, encerramos o processo de generalização da Definição 2.1.5 de modo a abranger tanto valores regulares como singulares. Podemos, portanto, eliminar a hipótese $y \notin f(S_f)$ e introduzir a definição abaixo.

Definição 2.1.6. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $f \in \overline{C}^2(A)$ e $y \notin f(\partial A)$. Então definimos $d(f, A, y) = d(f, A, y_1)$, onde y_1 é um valor regular de f tal que $|y_1 - y| < \rho(y, f(\partial A))$ e $d(f, A, y_1)$ é dado pela Definição 2.1.5.*

A fim de finalizar nossa construção vamos mostrar que o grau dado pela Definição 2.1.6 é o mesmo para funções $\overline{C}^2(A)$ suficientemente próximas a uma função contínua dada. Começamos com um caso especial do Teorema da Função Implícita que é adequado para nosso propósito.

Proposição 2.1.8 ([13]). *Seja $h : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável de forma que $h(t_0, x_0) = 0$ e $J_{h(t_0, \cdot)}(x_0) \neq 0$ para algum $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^n \times A$. Então existe um intervalo $(t_0 - r, t_0 + r)$, uma bola $B(x_0, \delta) \subset A$ e uma função contínua $z : (t_0 - r, t_0 + r) \rightarrow B(x_0, \delta)$ tal que $z(t_0) = x_0$ e $x(t)$ é a única solução de $h(t, x) = 0$ em $B(x_0, \delta)$.*

Proposição 2.1.9 ([6], p. 16 a 18). *Sejam $f \in \overline{C}^2(A)$ e $y \notin f(\partial A)$. Então para $g \in \overline{C}^2(A)$ existe um $\delta = \delta(f, g, y) > 0$ tal que $d(f + tg, A, y) = d(f, A, y)$ sempre que $|t| < \delta$.*

Observação 2.1.5. *Podemos então concluir que o grau é o mesmo para todas as funções C^2 suficientemente próximas de uma função contínua. De fato, sejam $f \in C(\overline{A})$, $y \notin f(\partial A)$ e $\alpha = \rho(y, f(\partial A))$. Consideremos duas funções $g, \tilde{g} \in \overline{C}^2(A)$ tais que*

$$\|g - f\|_\infty < \alpha \quad \text{e} \quad \|\tilde{g} - f\|_\infty < \alpha,$$

e definimos

$$H(t, x) = g(x) + t(\tilde{g}(x) - g(x)) \quad \text{e} \quad \phi(t) = d(H(t, \cdot), A, y), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Observe que $H(0, x) = g(x)$ e a partir das hipóteses temos $g(x) \neq y$, observe também que $H(1, x) = \tilde{g}(x)$ e de forma análoga $\tilde{g}(x) \neq y$. Temos também que

$$\|g(x) - \tilde{g}(x)\|_2 \leq \|g(x) - f(x)\|_2 + \|\tilde{g}(x) - f(x)\|_2 < \alpha + \alpha = 2\alpha.$$

dessa forma, para $t_0 \in (0, 1)$ e $x \in \partial A$ temos

$$\|H(t_0, x) - y\|_2 = \|(g(x) - y) - t_0(g(x) - \tilde{g}(x))\|_2 \geq \|g(x) - y\|_2 - t_0\|g(x) - \tilde{g}(x)\|_2 > 0.$$

Logo, para $t_0 \in [0, 1]$ temos $y \notin H(t_0, \partial A)$ e, portanto, $d(h(t_0, \cdot), A, y)$ está bem definida. Assim, podemos aplicar a Proposição 2.1.9 na aplicação

$$H(t, x) = h(t_0, x) + (t - t_0)(\tilde{g}(x) - g(x)),$$

e concluir que $\phi(t)$ é constante em uma vizinhança de t_0 , isto é, ϕ é localmente constante. Desta maneira, ϕ é contínua em $[0, 1]$ e, como este intervalo é um conjunto conexo, $\phi([0, 1])$ também é conexo. Sendo, $\phi([0, 1]) \subset \mathbb{Z}$, concluímos que $\phi([0, 1])$ é constituído de apenas um ponto, isto é, ϕ é constante em $[0, 1]$. Em particular,

$$d(g, A, y) = d(\tilde{g}, A, y).$$

Finalmente, exibiremos uma definição final para o grau, como consequência dos resultados expostos até o momento:

Definição 2.1.7. *Sejam $f \in C(\overline{A})$ e $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial A)$. Então definimos $d(f, A, y) = d(g, A, y)$, em que $g \in \overline{C}^2(A)$ é uma função tal que $|g - f|_0 < \rho(y, f(\partial A))$ e $d(g, A, y)$ é dado pela Definição 2.1.6.*

2.1.3 Propriedades do Grau Topológico de Brouwer

O objetivo desta seção é apresentar algumas propriedades usuais da função grau construída, que serão úteis para algumas aplicações.

Definição 2.1.8. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Se $\phi \in C(\overline{A}, \mathbb{R}^n)$ e $y \in \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial A)$, então (ϕ, A, y) é uma tripla admissível para o grau topológico de Brouwer.*

Proposição 2.1.10. *As seguintes propriedades são válidas:*

(P_1) - (Normalização) *Sejam $I_d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a função identidade e A um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$. Então,*

$$d(I_d, A, y) = 1, \quad \forall y \in A.$$

(P_2) - (Translação) *Seja (f, A, y) uma tripla admissível. Então,*

$$d(f, A, y) = d(f - y, A, 0).$$

(P₃) - (Aditividade) Seja (f, A, y) uma tripla admissível. Se $A_1, A_2 \subset A$ são abertos e disjuntos com $y \notin f(A \setminus (A_1 \cup A_2))$, então

$$d(f, A, y) = d(f, A_1, y) + d(f, A_2, y).$$

(P₄) - (Excisão) Seja (f, A, y) uma tripla admissível e considere um conjunto compacto $K \subset A$ tal que $y \notin f(K)$. Então,

$$d(f, A, y) = d(f, A \setminus K, y).$$

(P₅) - (Invariância Homotópica) Sejam A um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, $H : A \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva contínua tal que $y(t) \notin H_t(\partial A)$, para todo $t \in [0, 1]$. Então, $d(H_t, A, y(t))$ não depende de t ;

(P₆) - (Continuidade em relação à função f) Seja (f, A, y) uma tripla admissível. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para toda função contínua $g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ com

$$\sup_{x \in A} \|g(x) - f(x)\| < \varepsilon,$$

a tripla (g, A, y) é admissível e

$$d(f, A, y) = d(g, A, y).$$

(P₇) - (Invariância local) Seja (f, A, y) uma tripla admissível. Então, existe uma vizinhança V de y tal que, para todo $z \in V$, $d(f, A, z)$ está bem definido e

$$d(f, A, z) = d(f, A, y).$$

(P₈) - (Existência de solução) Seja (f, A, y) uma tripla admissível. Se

$$d(f, A, y) \neq 0,$$

então $f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$.

(P₉) - (Propriedade do bordo) Sejam (f, A, y) e (g, A, y) triplas admissíveis. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial A$. Então,

$$d(f, A, y) = d(g, A, y).$$

(P₁₀) - (O Grau é Constante em Componentes Conexas de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial A)$) Seja (f, A, y) uma tripla admissível. Se y_1 e y_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial A)$, tem-se que

$$d(f, A, y_1) = d(f, A, y_2).$$

(P₁₁) Seja (f, A, y) uma tripla admissível. Se $d(f, A, y) \neq 0$, então $f(A)$ é uma vizinhança de y , isto é, existe $\delta > 0$ tal que $B(y, \delta) \subset f(A)$. Em particular, se $f(A)$ está contido num subespaço próprio de $\mathbb{R}^n$ temos que $d(f, A, y) = 0$.

(P₁₂) - (Mudança de variável) Sejam (f, A, y) uma tripla admissível, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^2 e $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado tal que $g(E) = A$. Se $p = g^{-1}(y)$, então $(g^{-1} \circ f \circ g, E, p)$ é uma tripla admissível e

$$d(f, A, y) = d(g^{-1} \circ f \circ g, E, p).$$

(P₁₃) - (Função oposta) Se (f, A, y) for uma tripla admissível, então $(-f, A, -y)$ será admissível e

$$d(-f, A, -y) = (-1)^n d(f, A, y).$$

Aqui, n é a dimensão do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

(P₁₄) Seja (f, A, y) for uma tripla admissível. Se $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família de conjuntos abertos contidos em A , dois a dois disjuntos, e y um ponto tal que $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Então, $d(f, A, y) = 0$ a menos de um número finito de índices $i \in I$ e mais

$$d(f, A, y) = \sum_{i \in I} d(f, A_i, y).$$

Prova. (P₁)– De fato, observe que

$$I_d^{-1}(y) = \{y\} \text{ e } J_{I_d}(y) = \det I_d(y) = 1.$$

Logo,

$$d(I_d, A, y) = \text{sgn } J_{I_d}(y) = 1.$$

(P₂)– Seja

$$\alpha = \text{dist}(y, f(\partial A)) = \text{dist}(0, f(\partial A) - y).$$

Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass (Teorema 1.0.4), tomemos uma função $g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 tal que

$$\sup_{x \in \bar{A}} \|(g(x) - y) - (f(x) - y)\|_2 = \sup_{x \in \bar{A}} \|g(x) - f(x)\|_2 < \alpha.$$

Daí, usando a Definição 2.1.7, segue que

$$d(f, A, y) = d(g, A, y) \quad (2.11)$$

e

$$d(f - y, A, 0) = d(g - y, A, 0). \quad (2.12)$$

Agora, sabendo que $y \notin g(\partial U)$, temos $\text{dist}(y, g(\partial A)) = \beta > 0$. Assim, aplicando o Teorema 2.1.1 (Sard), tome z valor regular de g em A tal que $\|z - y\|_2 < \beta$. Pela Definição 2.1.6,

$$d(g, A, y) = d(g, A, z). \quad (2.13)$$

Por outro lado, como

$$\text{dist}(0, g(\partial A) - y) = \text{dist}(y, g(\partial A)) = \beta$$

e

$$\sup_{x \in \bar{A}} \|(g(x) - y) - (g(x) - z)\|_2 = \|z - y\|_2 < \beta,$$

então, aplicando novamente a Definição 2.1.6,

$$d(g - y, A, 0) = d(g - z, A, 0). \quad (2.14)$$

Finalmente, definindo $h(x) = g(x) - z$, notamos que $g(x) = z$ se, e somente se, $h(x) = 0$ e que $h'(x) = g'(x)$ para todo $x \in A$. Desta forma, temos $g^{-1}(z) = h^{-1}(0)$, portanto

$$d(g, A, z) = \sum_{x \in g^{-1}(z) \cap A} \text{sgn } g'(x) = \sum_{x \in h^{-1}(0) \cap A} \text{sgn } h'(x) = d(h, A, 0).$$

Logo,

$$d(g, A, z) = d(g - z, A, 0), \quad (2.15)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
 d(f, A, y) &\stackrel{(2.11)}{=} d(g, A, y) \\
 &\stackrel{(2.13)}{=} d(g, A, z) \\
 &\stackrel{(2.15)}{=} d(g - z, A, 0) \\
 &\stackrel{(2.14)}{=} d(g - y, A, 0) \\
 &\stackrel{(2.12)}{=} d(f - y, A, 0).
 \end{aligned}$$

(P_3)— Como

$$\partial A, \partial A_1, \partial A_2 \subset \bar{A} \setminus (A_1 \cup A_2),$$

considere $\varepsilon > 0$ tal que $\text{dist}(y, f(\bar{A} \setminus (A_1 \cup A_2))) = \varepsilon$. Dessa forma, como fizemos no item anterior, podemos tomar uma função $g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 tal que

$$\sup_{x \in \bar{A}} \|g(x) - f(x)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dessa forma, $y \notin g(\bar{A} \setminus (A_1 \cup A_2))$. De fato, se $x \in \bar{A} \setminus (A_1 \cup A_2)$ é tal que $g(x) = y$, então

$$\|g(x) - f(x)\|_2 = \|y - f(x)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

o que é uma contradição. Assim, pela Definição 2.1.7

$$d(f, A, y) = d(g, U, y). \tag{2.16}$$

Além disso, para $x \in \partial A$, temos

$$\|y - g(x)\|_2 \geq \|y - f(x)\|_2 - \|g(x) - f(x)\|_2 > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto, $\text{dist}(y, g(\partial A)) > \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, usando o Teorema 2.1.1 (Sard), tome $z \in \mathbb{R}^m \setminus g(\partial A \setminus (A_1 \cup A_2))$, onde z é valor regular de g em A e $\|z - y\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Daí, pela Definição 2.1.6, segue que

$$d(g, A, y) = d(g, A, z). \tag{2.17}$$

Logo, de (2.17) e (2.16), temos que

$$d(f, A, y) = d(g, A, z). \tag{2.18}$$

De forma análoga, concluímos que

$$d(f, A_1, y) = d(g, A_1, z) \quad (2.19)$$

e

$$d(f, A_2, y) = d(g, A_2, z). \quad (2.20)$$

Finalmente, observe que, se $g^{-1}(z) = \emptyset$, temos que

$$d(g, A, z) = d(g, A_1, z) = d(g, A_2, z) = 0.$$

Caso contrário, $g^{-1}(z) \neq \emptyset$, e temos que existe $x \in g^{-1}(z)$ tal que $x \in A_1 \setminus \partial A$ ou $x \in A_2 \setminus \partial A$, pois $z \notin g(\overline{A} \setminus (A_1 \cup A_2))$, ou seja, não existe $x \in \overline{A} \setminus (A_1 \cup A_2)$ tal que $g(x) = z$. Logo,

$$\begin{aligned} d(g, A, z) &= \sum_{x \in g^{-1}(z)} \operatorname{sgn} J_g(x) \\ &= \sum_{x \in g^{-1}(z) \subset A_1} \operatorname{sgn} J_g(x) + \sum_{x \in g^{-1}(z) \subset A_2} \operatorname{sgn} J_g(x) \\ &= d(g, A_1, z) + d(g, A_2, z). \end{aligned}$$

Assim, em qualquer dos casos

$$d(g, A, z) = d(g, A_1, z) + d(g, A_2, z),$$

Portanto, usando (2.18), (2.19) e (2.20), temos que

$$d(f, A, y) = d(f, A_1, y) + d(f, A_2, y)$$

(P_4)—] Pela Propriedade (P_3), temos que

$$d(f, A, y) = d(f, A \setminus K, y) + d(f, \emptyset, y).$$

Além disso, da Proposição 2.1.5 (a)

$$d(f, \emptyset, y) = 0.$$

Logo,

$$d(f, A, y) = d(f, A \setminus K, y).$$

(P_5)— Note que a função

$$(x, t) \mapsto \|y(t) - H_t(x)\|_2$$

é contínua e positiva no compacto $\partial A \times [0, 1]$ e, portanto, tem um mínimo $\varepsilon > 0$. Por outro lado, H é uniformemente contínua no compacto $\overline{A} \times [0, 1]$, portanto existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - t'| < \delta \text{ e } \|x - x'\|_2 < \delta \Rightarrow \|H_t(x) - H_{t'}(x')\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Agora, fixe $t_0 \in [0, 1]$. Vamos mostrar que a função

$$t \mapsto d(H_t, A, y(t))$$

é constante em uma vizinhança de t_0 e, como t_0 é arbitrário, é constante no conexo $[0, 1]$. De fato, pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, existe uma função $g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 tal que

$$\|g(x) - H_{t_0}(x)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in \overline{A}.$$

Daí, temos

$$\|g(x) - H_t(x)\|_2 \leq \|g(x) - H_{t_0}(x)\|_2 + \|H_{t_0}(x) - H_t(x)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para todo $x \in \overline{A}$ e para todo t satisfazendo $|t - t_0| < \delta$. Assim, como ε é o mínimo da função $\|y(t) - H_t(x)\|_2$, segue que

$$\|g(x) - H_t(x)\|_2 \leq \|y(t) - H_t(x)\|_2 \tag{2.21}$$

para todo $x \in \overline{A}$ e para $|t - t_0| < \delta$. Em particular, para $x \in \partial A$ e $t = t_0$, temos

$$\|g(x) - H_{t_0}(x)\|_2 < \text{dist}(y(t_0), H_{t_0}(\partial A)). \tag{2.22}$$

Portanto, $g(x) \neq y(t_0)$ para todo $x \in \partial A$. Como $g(\partial A)$ é compacto, concluímos que

$$\text{dist}(y(t_0), g(\partial A)) > 0.$$

Dessa forma, podemos dizer que $|t - t_0| < \delta$ implica que

$$\|y(t) - y(t_0)\|_2 < \text{dist}(y(t_0), g(\partial A)). \tag{2.23}$$

Agora, usando (2.22) e a Definição 2.1.7, temos que

$$d(H_t, A, y(t)) = d(g, A, y(t)).$$

Logo, aplicando (P_2) (translação), segue que

$$d(H_t, A, y(t)) = d(g - y(t), A, 0).$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \|(g - y(t)) - (g - y(t_0))\|_2 &= \|y(t) - y(t_0)\|_2 \\ &\stackrel{(2.23)}{<} \text{dist}(y(t_0), g(\partial A)) \\ &= \text{dist}(0, (g - y(t_0))(\partial A)) \end{aligned}$$

e aplicando a Definição 2.1.7, temos

$$d(H_t, A, y(t)) = d(g - y(t_0), A, 0).$$

Logo, a função

$$t \mapsto d(H_t, A, y(t))$$

é localmente constante e, consequentemente, constante no conexo $[0, 1]$.

(P_6) — Considere

$$r = \text{dist}(y, f(\partial A))$$

e fixe $g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua com

$$\sup_{x \in \bar{A}} \|g(x) - f(x)\|_2 < \frac{r}{2}.$$

Para mostrar que (g, A, y) é tripla admissível basta mostrarmos que $y \notin g(\partial A)$.

Com efeito, fixado $x \in \partial A$, segue que

$$\|y - g(x)\|_2 \geq \|y - f(x)\|_2 - \|f(x) - g(x)\|_2 \geq \frac{r}{2}.$$

Logo, $y \notin g(\partial A)$. Agora, defina $H : \bar{A} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Mostraremos agora que $H(x, t) \neq y$, $\forall x \in \partial A$ e $\forall t \in [0, 1]$. De fato, fixado $x \in \partial A$ e $t \in [0, 1]$. Então,

$$\begin{aligned} \|H(x, t) - f(x)\|_2 &= \|(1-t)f(x) + tg(x) - f(x) + tf(x) - tf(x)\|_2 \\ &= \|(1-t)f(x) + tg(x) - (1-t)f(x) - tf(x)\|_2 \\ &= t\|g(x) - f(x)\|_2 \\ &\leq t \cdot \frac{r}{2} = \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $H(x, t) \neq y$, $\forall x \in \partial A$ e $\forall t \in [0, 1]$. Desta forma, podemos aplicar a propriedade (P_5) (Invariância Homotópica) e concluir que

$$d(H_0, A, y) = d(H_1, A, y) \Rightarrow d(f, A, y) = d(g, A, y).$$

(P_7) – Sejam

$$\alpha = \text{dist}(y, f(\partial A)) \text{ e } V = B_\alpha(y).$$

Fixe $z \in V$ e considere as funções $H : \bar{A} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$H(x, t) = f(x) \text{ e } y(t) = ty + (1-t)z.$$

Como V é um conjunto convexo, $y(t) \in V$, $\forall t \in [0, 1]$. Além disso, $V \cap f(\partial A) = \emptyset$. Portanto, pela definição de H , temos

$$H_t(\partial A) = f(\partial A), \forall t \in [0, 1] \Rightarrow y(t) \notin H_t(\partial A), \forall t \in [0, 1].$$

Dessa forma, aplicando a Propriedade (P_5) (Invariância Homotópica) e podemos concluir que

$$d(f, A, z) = d(f, A, y).$$

(P_8) – Suponha $f^{-1}(y) \cap A = \emptyset$. Então,

$$\text{dist}(y, f(\partial A)) \geq \text{dist}(y, f(\bar{A})) = \varepsilon > 0. \quad (2.24)$$

Pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass, existe uma função $g : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 tal que

$$\sup_{x \in \bar{A}} \|g(x) - f(x)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pela Definição 2.1.7,

$$d(f, A, y) = d(g, A, y).$$

Além disso, para $x \in \overline{A}$, temos

$$\|y - g(x)\|_2 \geq \|y - f(x)\|_2 - \|g(x) - f(x)\|_2 > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isso implica que

$$\text{dist}(y, g(\overline{A})) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dessa forma, $g^{-1}(y) \cap A = \emptyset$ e y é valor regular de g em A . Assim, podemos usar a Definição 2.1.6 e Definição 2.1.5 donde concluimos que

$$d(f, A, y) = d(g, A, y) = 0.$$

Isso contraria a hipótese. Portanto,

$$f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset.$$

(P_9)– Considere a homotopia

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Como $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial A$, então, para todo $x \in \partial A$ e para todo $t \in [0, 1]$, temos

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tf(x) = f(x) = g(x).$$

Dessa forma, $H(x, t) \neq y$ para todo $(x, t) \in \partial A \times [0, 1]$. Sendo assim, aplicando a Propriedade (P_5) (Invariância Homotópica), concluimos que

$$d(H_0, A, y) = d(H_1, A, y) \Rightarrow d(f, A, y) = d(g, A, y).$$

[(P_{10}) - (P_{14})] Para as demonstrações dessas propriedades direcionamos o leitor a referência [7]. ■

Mostraremos agora como aplicar a Teoria do Grau Topológico de Brouwer e suas propriedades.

Exemplo 2.1.1. *Mostre que o sistema*

$$(*) \quad \begin{cases} 2x + y + \sin(x + y) = 0 \\ x - 2y + \cos(x + y) = 0 \end{cases}$$

tem uma solução em $B(0, r)$ com $r > \frac{1}{\sqrt{5}}$.

De fato, primeiramente, note que

Afirmção 2.1.6. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado e $f, g : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ são aplicações contínuas tais que $\|g(x)\|_2 < \|f(x)\|_2$ para todo $x \in \partial A$, então*

$$d(f + g, A, 0) = d(f, A, 0).$$

Com efeito, considere a homotopia

$$H(t, x) = f(x) + t \cdot g(x).$$

Daí, $0 \notin H(t, \partial A)$, $\forall t \in [0, 1]$, pois dado $x \in \partial A$, temos que

$$\|H(t, x)\|_2 \geq \|f(x)\|_2 - t\|g(x)\|_2 \geq \|f(x)\|_2 - \|g(x)\|_2 > 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Portanto, pela invariância por homotopia, isto é, pela Propriedade (P_5) , obtemos que

$$d(H(1, \cdot), A, 0) = d(H(0, \cdot), A, 0) \Rightarrow d(f + g, A, 0) = d(f, A, 0).$$

Dessa forma, considerando

$$f(x, y) = (2x + y, x - 2y) \text{ e } g(x, y) = (\sin x + y, \cos x + y),$$

temos que

$$\|g(x, y)\|_2 = 1$$

e

$$\|f(x, y)\|_2 = \sqrt{(2x + y)^2 + (x - 2y)^2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Assim, para todo $(x, y) \in \partial B(0, r)$ tal que $r > \frac{1}{\sqrt{5}}$, temos que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r > \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \|f(x, y)\|_2 > 1 = \|g(x, y)\|_2.$$

Portanto,

$$d(f + g, B(0, r), 0) = d(f, B(0, r), 0).$$

Mas, observe que

$$(x, y) \in f^{-1}((0, 0)) \iff x = y = 0.$$

Além disso,

$$(0, 0) \notin f(\partial B(0, r) \cup S_f),$$

pois

$$J_f(x, y) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -5.$$

Dessa forma,

$$d(f, B(0, r), 0) = -1 \neq 0,$$

e assim, pela existência de solução, ou seja, pela Propriedade (P_8) , segue que

$$(f + g)^{-1}(0, 0) \neq \emptyset.$$

E conseqüentemente o sistema do Exemplo 2.1.1 tem uma solução em $B(0, r)$ com $r > \frac{1}{\sqrt{5}}$.

2.2 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e Aplicações

Apresentaremos nessa seção aplicações do grau de Brouwer. Uma delas é o Teorema do Ponto fixo de Brouwer. Tal Teorema é bastante útil para compreensão da topologia dos espaços euclidianos e também, o ponto de partida para a demonstração de outros teoremas como o Teorema do Ponto Fixo de Schauder e o Teorema do Ponto Fixo de Schaefer como veremos no próximo capítulo.

Encontrar pontos fixos em determinadas funções, é uma tarefa de extrema importância na matemática, pois, por exemplo, vários problemas de equações diferenciais podem ser transformados em problemas de ponto fixo entre espaços de funções como veremos a seguir.

Definição 2.2.1. *Seja $f : D \rightarrow D$ uma função contínua. Dizemos que $x \in D$ é um ponto fixo para f se $f(x) = x$.*

Definição 2.2.2. *Dizemos que $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo, se dados $x, y \in D$, temos*

$$x + \lambda(y - x) \in D, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Definição 2.2.3. *O fecho convexo de $D \subset \mathbb{R}^n$ é a interseção de todos os conjuntos convexos que contêm D . Denotaremos, nesse texto, o fecho convexo por $\text{conv}(D)$*

Lema 2.2.1 ([6], p. 19 e 20.). *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto qualquer e B o conjunto de todas as combinações convexas de elementos de D , isto é,*

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i ; \lambda_i \in [0, 1], x_i \in D, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nessas condições temos $B = \text{conv}(D)$.

A título de ilustração consideremos $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma função contínua. Se tivermos

$$f(a) = a \text{ ou } f(b) = b,$$

naturalmente já teremos encontrado pontos fixos para a função, por isso, podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$f(a) > a \text{ e } f(b) < b.$$

Daí, considere a função definida por

$$g(x) = f(x) - x,$$

temos que buscar um ponto fixo para f é buscar uma solução para a equação $g(x) = 0$. Mas, note que

$$g(a) = f(a) - a > 0 \text{ e } g(b) = f(b) - b < 0.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, deve existir $c \in [a, b]$ tal que

$$g(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) = c.$$

Assim, nessas condições, a função f admite ponto fixo. O teorema seguinte é uma generalização natural deste resultado.

Teorema 2.2.1 (Ponto Fixo de Brouwer). *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto convexo não-vazio e $f : D \rightarrow D$ uma função contínua. Então f tem um ponto fixo.*

Prova. Dividiremos a demonstração em dois Passos:

Passo 1 : Demonstraremos inicialmente o Teorema para $D = \overline{B_r(0)}$.

Suponha que $D = \overline{B_r(0)}$. Daí, podemos supor que f não possui ponto fixo em ∂D , pois, caso contrário, teríamos um ponto fixo. Assim, definindo $h : [0, 1] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$h(t, x) = x - tf(x).$$

Então, temos que $0 \notin h([0, 1] \times \partial D)$, pois se existem $x_0 \in \partial D$ e $t_0 \in [0, 1]$ tal que

$$\begin{aligned} h(t_0, x_0) = 0 & \Rightarrow x_0 - t_0 f(x_0) = 0 \\ & \Rightarrow x_0 = t_0 f(x_0) \\ & \Rightarrow \|x_0\|_2 = \|t_0 \cdot f(x_0)\|_2 \\ x_0 \in \partial D & \Rightarrow r = t_0 \cdot \|f(x_0)\|_2 \\ f(D) \subset D & \Rightarrow r \leq t_0 \cdot r \\ t_0 \in [0, 1] & \Rightarrow t_0 = 1 \\ & \Rightarrow f(x_0) = x_0. \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois não existe ponto fixo na fronteira. Assim, usando a propriedade de invariância por homotopia do grau, temos que

$$d(H(1, \cdot), \text{int}(D), 0) = d(H(0, \cdot), \text{int}(D), 0),$$

que implica

$$d(I_d - f, \text{int}(D), 0) = d(I_d, B_r(0), 0) = 1.$$

Logo, a equação $x - f(x) = 0$ possui pelo menos uma solução em D .

Passo 2 : Demonstraremos o caso geral, isto é, D um conjunto compacto, convexo e não-vazio.

Com efeito, como D é compacto e f é contínua, então existe uma extensão contínua de f no $\mathbb{R}^n$ (Teorema 1.0.5, vale salientar que ela não é única em geral) tal

que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad \text{se } x \in D; \\ \left(\sum_{i \geq 1} 2^{-i} \phi_i(x) \right)^{-1} \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \phi_i(x) f(a^i) & , \quad \text{se } x \notin D. \end{cases}$$

onde $\{a^1, a^2, \dots\}$ é um subconjunto enumerável denso em D e

$$\phi_i(x) = \max \left\{ 2 - \frac{x - a^i}{d(x, D)}, 0 \right\}.$$

Denote por

$$X = \text{conv}(f(D)) = \cap \{C_i; C_i \text{ é convexo tal que } f(D) \subset C_i\}.$$

Afirmção 2.2.1. $\tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{X}$.

De fato, se $x \in D$, então

$$\tilde{f}(x) = f(x) \in f(D) \subset \text{conv}(f(D)) \subset \overline{X},$$

isto é,

$$\tilde{f}(x) \in \overline{X}.$$

Agora se $x \notin D$, note que

$$\tilde{f}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^m 2^{-i} \phi_i(x) \right)^{-1} \sum_{i=1}^m 2^{-i} \phi_i(x) f(a^i)$$

Daí, S_m é uma combinação convexa de $f(a^1), f(a^2), \dots, f(a^m)$ que são elementos de $f(D)$. Assim,

$$S_m \in X,$$

isto é, $\tilde{f}(x)$ é limite de uma sequência de elementos de X , ou seja, $\tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{X}$. Mas,

$$\begin{aligned} f(D) \subset D & \Rightarrow \overline{\text{conv}(f(D))} \subset \overline{\text{conv}(D)} \\ & \xRightarrow{D \text{ convexo e fechado}} \overline{X} \subset \overline{\text{conv}(D)} = \overline{D} = D \\ & \Rightarrow \tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subset D. \end{aligned}$$

Por fim, como D é limitado existe um r suficientemente grande de forma que $D \subset \overline{B_r(0)}$. Assim, pelo Passo 1, existe um $x \in \overline{B_r(0)}$ tal que

$$\tilde{f}(x) = x.$$

Mas $\tilde{f}(x) \in D$, o que implica que $x \in D$. Logo, da definição de $\tilde{f}$ obtemos que

$$\tilde{f}(x) = f(x) = x.$$

Como queríamos demonstrar. ■

Observação 2.2.1. *O Teorema 2.2.1 permanece válido se D for somente homeomorfo a um compacto convexo. De fato, suponha que $D = h(D_0)$ com D_0 compacto convexo e h um homeomorfismo. Então,*

$$h^{-1} \circ f \circ h : D_0 \rightarrow D_0$$

é contínua. Logo, para algum $x_0 \in D_0$ temos

$$h^{-1}(f(h(x_0))) = x_0 \quad \Rightarrow \quad f(h(x_0)) = h(x_0).$$

Exibiremos agora algumas aplicações do Teorema 2.2.1, enfatizando esse importante Teorema.

Proposição 2.2.1 (Perrom-Frobenius). *Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz com $a_{ij} \geq 0$. Então existe $\lambda \geq 0$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$ tal que $x_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e $Ax = \lambda x$, isto é, A tem um autovetor não-negativo correspondente a um autovalor não-negativo.*

Prova. Considere o conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ e } \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

Afirmção 2.2.2. *D é um conjunto não-vazio, convexo e compacto (fechado e limitado).*

De fato, sejam $x, y \in D$ e

$$S = \{z \in \mathbb{R}^n : z = tx + (1-t)y, t \in [0, 1] \text{ e } z_i = tx_i + (1-t)y_i.\}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n z_i &= \sum_{i=1}^n tx_i + (1-t)y_i \\
 &= \sum_{i=1}^n tx_i + \sum_{i=1}^n (1-t)y_i \\
 &= t \sum_{i=1}^n x_i + (1-t) \sum_{i=1}^n y_i \\
 &\stackrel{x, y \in D}{=} t + (1-t) = 1.
 \end{aligned}$$

Portanto, $S \subset D$, isto é, D é convexo. Mostraremos agora que D é compacto. Inicialmente, mostraremos que D é limitado. Seja $x \in D$, então

$$x_i \leq 1 \Rightarrow x_i^2 \leq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq n \Rightarrow \|x\|_2 = \sqrt{n},$$

Logo, D é limitado. Finalmente, para mostrarmos que D é fechado, considere a sequência $(x^m) \subset D$ tal que

$$x^m \rightarrow x \in D,$$

mas

$$x^m \rightarrow x \iff x_i^m \rightarrow x_i,$$

e como $x_i \geq 0$ e

$$\sum_{i=1}^m x_i^m \rightarrow \sum_{i=1}^m x_i = 1,$$

segue que $x \in D$, ou seja, D é fechado. O que prova a afirmação.

Agora, se $Ax = 0$ para algum $x \in D$, então, o resultado está provado para $\lambda = 0$. Suponha $Ax \neq 0$ em D . Lembre que as entradas da matriz A e as coordenadas do vetor x são não-negativas, então Ax possui coordenadas $(Ax)_i$ não-negativas. Daí, como $Ax \neq 0$, pelo menos uma das coordenadas $(Ax)_i$ é positiva. Logo,

$$\sum_{i=1}^n (Ax)_i \geq \alpha > 0,$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Desta forma, a função definida em D por

$$f(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (Ax)_i} \cdot Ax,$$

é contínua em D e $f(D) \subset D$. Com efeito, sejam $x \in D$ e $y = f(x)$, então

$$0 \leq y_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (Ax)_i} \cdot (Ax)_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (Ax)_i} \cdot \left(\sum_{i=1}^n (Ax)_i \right) = 1$$

Assim, $f(x) \in D$, isto é $f(D) \subset D$. Portanto, pelo Teorema de Brouwer (Teorema 2.2.1) a função f tem ponto fixo em D , isto é, existe $x_0 \in D$ tal que:

$$f(x_0) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (Ax_0)_i} \cdot Ax_0 = x_0 \Rightarrow Ax_0 = \lambda \cdot x_0,$$

onde $\lambda = \sum_{i=1}^n (Ax_0)_i$. ■

Exibiremos agora um exemplo muito interessante, onde será usado o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (Teorema 2.2.1) para garantir a existência de solução em um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Exemplo 2.2.1. *Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:*

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = u' = f(t, u) \\ u(0) = x \in \overline{B(0, r)}. \end{cases}$$

em que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 periódica na variável t , ou seja,

$$f(t + T, x) = f(t, x)$$

para algum $T \in \mathbb{R}_+$ e para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. O objetivo é escolher uma bola $\overline{B(0, r)}$ de forma que o problema possua solução única $u(t, x)$ em $[0, \infty)$. Para tanto, definamos

$$P_t(x) = u(t; x)$$

e suponhamos que f satisfaz a seguinte condição de fronteira:

$$\langle f(t, x), x \rangle = \sum_{i=1}^n f_i(t, x) x_i < 0, \quad \text{para } t \in [0, w] \text{ e } \|x\| = r.$$

Afirmção 2.2.3. $P_t : \overline{B(0, r)} \rightarrow \overline{B(0, r)}$ qualquer que seja $t > 0$.

Com efeito, suponha que num instante t a solução de (P) atinge a fronteira da bola. Daí,

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2\langle u'(t), u(t) \rangle = 2f(t, u(t)) \cdot u(t) < 0.$$

o que mostra que a norma de $u(t)$ é decrescente perto do instante t . Assim, se a função atinge a fronteira da bola ela automaticamente volta para dentro da bola. Como as soluções de (P) variam continuamente com as condições iniciais, sabemos que P_t é contínua. Estamos então em condições de aplicar o Teorema de Brouwer (Teorema 2.2.1) garantindo assim a existência de um ponto fixo x_w para a função P_w . Assim, a equação tem uma solução com a propriedade de que

$$u(0; x_w) = x_w = u(w; x_w)$$

e que satisfaz

$$(P') \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = u' = f(t, u), & \text{em } (0, w) \\ u(0) = u(w) = x_w \in \overline{B(0, r)}. \end{cases}$$

A ideia é estender $u(t, x_w)$ w -periodicamente. Assim, considerando $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$v(t) = u(t - kw, x_w),$$

em $[kw, (k+1)w]$, obtemos uma solução w -periódica do sistema (P) . A conclusão é que $u(t, x)$ é uma solução w -periódica do sistema se, e somente se, x é um ponto fixo do operador P_w . Este operador é conhecido como operador de Poincaré.

Proposição 2.2.2. Não existe função contínua $f : \overline{B(0, r)} \rightarrow \partial B(0, r)$ que deixe fixo todos os pontos da fronteira.

Prova. De fato, suponha que existe uma aplicação contínua $f : \overline{B(0, r)} \rightarrow \partial B(0, r)$ tal que

$$f(x) = x, \quad \forall x \in \partial B(0, r).$$

Considere também $g : \overline{B(0, r)} \rightarrow \partial B(0, r)$ onde

$$g(x) = -f(x).$$

Daí, a aplicação g satisfaz as hipóteses exigidas no Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (Teorema 2.2.1), pois g é contínua, $\overline{B(0, r)}$ que é um compacto e convexo e $g(\overline{B(0, r)}) \subset \overline{B(0, r)}$. Portanto, existe $x_0 \in \partial B(0, r)$ tal que

$$x_0 = g(x_0) = -f(x_0) = -x_0,$$

onde $\|x_0\| = r$, o que é um absurdo. ■

Definição 2.2.4. *Se $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$, então dizemos que B é uma retração de A se existe uma função contínua $r : A \rightarrow B$ tal que $r|_B = I_B$, onde I é a função identidade.*

O resultado a seguir, que pode ser atribuído a Bohl, foi redescoberto independentemente por Borsuk e é chamado de teorema de não-retração de Borsuk.

Teorema 2.2.2. *Não há retratação $r : \overline{B(0, r)} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \partial B(0, r)$.*

Prova. Se tal retração r existe, então, pela Propriedade do bordo (P_9), temos

$$d(r, B(0, r), 0) = d(I, B(0, r), 0) = 1$$

e, portanto, r tem pelo menos um zero em $B(0, R)$, uma contradição com $\|r(x)\| = r$ para cada $x \in \overline{B(0, r)}$. ■

Observação 2.2.2. *O Teorema 2.2.2 também segue do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (Teorema 2.2.1). De fato, se existe uma retração $r : \overline{B(0, r)} \rightarrow \partial B(0, r)$, então $-r : \overline{B(0, r)} \rightarrow \partial B(0, r)$ tem pelo menos um ponto fixo x_0 pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (Teorema 2.2.1). Por suposição*

$$r = \|-r(x_0)\|_2 = \|x_0\|_2,$$

de modo que $x_0 \in \partial B(0, r)$, e portanto,

$$x_0 = r(x_0).$$

Dessa forma,

$$r(x_0) = -r(x_0) \quad \Rightarrow \quad r(x_0) = 0,$$

uma contradição.

Por fim, o próximo resultado que apresentaremos nessa seção é equivalente ao Teorema de Brouwer (Teorema 2.2.1) para a bola, mais precisamente:

Teorema 2.2.3. *Suponha que não exista $f : \overline{B(0, r)} \rightarrow \partial B(0, r)$ contínua tal que $f(x) = x$ para todo $x \in \partial B(0, r)$. Então $g : \overline{B(0, r)} \rightarrow \overline{B(0, r)}$ contínua possui um ponto fixo.*

Prova. Suponha, por absurdo, que $g : \overline{B(0, r)} \rightarrow \overline{B(0, r)}$ é contínua e $g(x) \neq x$ para todo $x \in B(0, r)$. Assim, para cada $x \in B(0, r)$, existe um segmento de reta passando por x e $g(x)$. Seja $h(x)$ a intersecção da semi-reta com origem em $g(x)$ e que passa por x com a fronteira de $B(0, r)$, isto é,

$$h(x) = g(x) + t(x)(x - g(x))$$

com $\|h(x)\|_2 = r$ e $t(x) > 0$. Vamos mostrar que $h : \overline{B(0, r)} \rightarrow \partial B(0, r)$ é contínua e $h(x) = x$ para $x \in \partial B(0, r)$, contrariando a hipótese. Ora, para que $h(x)$ seja contínua, basta que $t : B(0, r) \rightarrow \mathbb{R}_+$ seja contínua. Da condição que $\|h(x)\|_2 = r$, segue que

$$\|h(x)\|_2^2 = \langle h(x), h(x) \rangle = \langle g + t(x - g), g + t(x - g) \rangle = r^2,$$

e assim,

$$\|t(x)\|_2^2 |x - g(x)|^2 + 2t(x) \langle g(x), (x - g(x)) \rangle + \|g(x)\|_2^2 - r^2 = 0,$$

resolvendo essa equação em $t(x)$, tem-se que

$$\delta = 4[\langle g(x), (x - g(x)) \rangle^2 + \|x - g(x)\|_2^2 (r^2 - \|g(x)\|_2^2)] > 0$$

e, portanto, temos

$$t(x) = \frac{-2\langle g(x), (x - g(x)) \rangle + \sqrt{\delta}}{2\|x - g(x)\|_2^2} > 0,$$

o que mostra que $t(x)$ é contínua, pois $\|x - g(x)\|_2 \neq 0$ em $B(0, r)$. Naturalmente, $h(x) = x$ em $\partial B(0, r)$, de acordo com a definição de $h(x)$. Assim, chegamos a contradição esperada.

■

Observação 2.2.3. *Vale salientar que os seguintes Teoremas são equivalentes :*

- $\forall n \in \mathbb{N}$, S^n não é contrátil.
- (Teorema de Bohl) : *Seja $n \in \mathbb{N}$. Toda aplicação contínua $f : B^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tem ao menos uma das seguintes propriedades:*

(i) *f possui um ponto fixo.*

(ii) *Existem $x \in S^n$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que $x = \lambda \cdot f(x)$.*

- (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) : $\forall n \in \mathbb{N}$ B^n possui a propriedade do ponto fixo.
- (Teorema de Borsuk) : $\forall n \in \mathbb{N}$, não existe retração de B^{n+1} em S^n .

Para os detalhes da demonstração desse fato, citemos a referência [9].

CAPÍTULO 3

O GRAU TOPOLÓGICO DE LERAY E SCHAUDER

3.1 O Grau Topológico de Brouwer em Espaço Vetorial de Dimensão Finita

A intenção dessa seção é estender a definição de Grau Topológico de Brouwer para um espaço vetorial normado qualquer de dimensão finita. Veremos na Seção 3.2, que basta estudar entre espaços euclidianos, pois a extensão é bastante natural para qualquer outro espaço de dimensão finita.

Mas antes, abordaremos alguns resultados que utilizaremos a partir de agora. De agora seguiremos as referências [3] e [7].

Definição 3.1.1. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $y \notin f(\partial A)$. Se existe uma solução isolada $x_0 \in A$ da equação*

$$f(x) = y,$$

pode-se definir o Índice de f em x_0 com relação a y , e é denotado por

$$i(f, x_0, y).$$

Ele é definido como sendo

$$i(f, x_0, y) := d(f, B(x_0, r), y)$$

em que $r > 0$ é fixado de maneira que, na bola $B(x_0, r)$, a equação $f(x) = y$ tem como solução apenas o ponto x_0 .

Observação 3.1.1. Observe que utilizando a Propriedade de excisão do Grau Topológico de Brouwer, isto é, (P_8) e considerando o compacto

$$K = \overline{B(x_0, r)} \setminus B(x_0, \varepsilon) \quad \text{para } 0 < \varepsilon < r,$$

temos que

$$i(f, x_0, y) = d(f, B(x_0, \varepsilon), y), \quad \forall \varepsilon \approx 0^+.$$

Definição 3.1.2. Seja B uma matriz quadrada de ordem $n \times n$. Um número real $\mu \in \mathbb{R}$ é um valor característico de B , se existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$\mu Bx = x.$$

Observe que μ é um valor característico de B se $\mu \neq 0$ e $\lambda := \frac{1}{\mu}$ é um autovalor de B .

Definição 3.1.3. A multiplicidade de um valor característico μ será a multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda = \frac{1}{\mu}$ que é raiz do polinômio característico.

Proposição 3.1.1. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado contendo a origem. Seja $f : \overline{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$f(x) = x - T(x), \quad x \in \overline{A},$$

onde $T \in C^1(\overline{A})$ e $T(0) = 0$. Suponha ainda que $J_f(0) \neq 0$. Então

$$i(f, 0, 0) = (-1)^\beta$$

em que β denota a soma das multiplicidades algébricas dos valores característicos de $T'(0)$ contidos em $(0, 1)$.

Prova. Note que $x_0 = 0$ é uma solução da equação $f(x) = 0$, pois

$$f(0) = 0 - T(0) = 0.$$

Uma vez que $J_f(0) \neq 0$, segue do Teorema da Aplicação Inversa que existe $r > 0$ tal que f é uma bijeção de $B(0, r)$ sobre sua imagem e, portanto, $x_0 = 0$ é a única solução da equação $f(x) = 0$ na bola $B(0, r)$. Desta maneira, podemos considerar o índice

$$i(f, 0, 0).$$

Assim, segue da definição do grau para o caso regular que

$$i(f, 0, 0) = d(f, B(0, r), 0) = \text{sgn} (J_f(0))$$

o que implica que

$$i(f, 0, 0) = \text{sgn} \det(I - T'(0)). \quad (3.1)$$

Mas encarando $T'(0)$ como uma matriz sobre o corpo dos números complexos, sabemos da Álgebra linear que toda matriz quadrada $n \times n$ complexa é semelhante a uma matriz triangular superior. isto é,

$$T'(0) \approx \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{14} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{a}_{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_n \end{bmatrix},$$

onde $\lambda_i \in \mathbb{C}$ é um autovalor de $T'(0)$. Assim,

$$I - T'(0) \approx \begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{14} \\ \mathbf{0} & 1 - \lambda_2 & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{a}_{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 - \lambda_n \end{bmatrix},$$

de onde segue que

$$\det(I - T'(0)) = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i) \stackrel{(3.1)}{\Rightarrow} i(f, 0, 0) = \text{sgn} \left(\prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i) \right).$$

Note que podemos desconsiderar as raízes complexas, pois se λ_j é complexa, então $\overline{\lambda_j}$ também é uma raiz e, assim, como 1 não é autovalor de $I_d - T'(0)$, pois $J_f(0) = \det(I_d - T'(0)) \neq 0$, implicando que $I_d - T'(0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva, temos que

$$(1 - \lambda_j)(1 - \overline{\lambda_j}) = (1 - \lambda_j)\overline{(1 - \lambda_j)} = |1 - \lambda_j|^2 > 0.$$

Consequentemente,

$$i(f, 0, 0) = \operatorname{sgn} \left(\prod_{i \in L} (1 - \lambda_i) \right),$$

em que L é o conjunto dos índices tais que $\lambda_i \in \mathbb{R}$. De modo similar, os autovalores $\lambda_s \in \mathbb{R}$ que verificam $1 - \lambda_s > 0$, ou seja, $\lambda_s < 1$, também podem ser desconsiderados do produto. Portanto,

$$i(f, 0, 0) = \operatorname{sgn} \left(\prod_{i \in L'} (1 - \lambda_k) \right),$$

com $L' \subset L$ e $\lambda_k > 1$. Concluindo, pela análise acima que

$$i(f, 0, 0) = \operatorname{sgn} \left(\prod_{i \in L'} (1 - \lambda_k) \right) = (-1)^\beta.$$

onde $\beta = \sum_{k \in L'} m(\lambda_k)$ e $m(\lambda_k)$ é a multiplicidade do autovalor λ_k de $T'(0)$. ■

Corolário 3.1.1. *Seja $f_\lambda(x) = x - \lambda T(x)$, com $T \in C^1(\overline{A})$ e $T(0) = 0$. Então, $i(f_\lambda, 0, 0)$ está bem definido para $\lambda \neq \mu_i$, onde μ_i é um valor característico de $T'(0)$. Além disso, $i(f_\lambda, 0, 0)$ é multiplicado pelo fator $(-1)^{m_j}$ quando λ passa pelo valor característico μ_j de multiplicidade algébrica m_j .*

Prova. Definamos

$$\tilde{T} := \lambda T.$$

Daí, note que $J_{f_\lambda}(0) \neq 0$. Com efeito,

$$J_{f_\lambda}(0) = \det(I_d - \tilde{T}'(0)) \neq 0,$$

pois se

$$\det(I_d - \tilde{T}'(0)) = 0,$$

então 1 é autovalor de

$$I_d - \tilde{T}'(0),$$

ou seja,

$$\tilde{T}'(0)x = x \quad \Rightarrow \quad \lambda T'(0)x = x.$$

O que é um absurdo, pois λ não é um valor característico de $T'(0)$. Assim, de maneira análoga a Proposição 3.1.1

$$i(f_\lambda, 0, 0) = \operatorname{sgn}(J_{f_\lambda}(0)) = \operatorname{sgn} \det(I - \tilde{T}'(0)) = \operatorname{sgn} \prod_{i=1}^n (1 - \tilde{\lambda}_i),$$

onde $\tilde{\lambda}_i$ é um autovalor de $\tilde{T}'(0)$. Com isso, tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{T}'(0) \cdot x &= \tilde{\lambda}_i x \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot T'(0) \cdot x = \tilde{\lambda}_i \cdot x \\ &\Rightarrow \quad \lambda \cdot \lambda_i \cdot x = \tilde{\lambda}_i \cdot x \\ &\Rightarrow \quad \tilde{\lambda}_i = \lambda \cdot \lambda_i = \frac{\lambda}{\mu_i}, \end{aligned}$$

onde λ_i é o autovalor de $T'(0)$. Portanto,

$$i(f_\lambda, 0, 0) = \operatorname{sgn} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_i}\right).$$

Observe que quando λ passa pelo valor característico μ_i , $1 - \frac{\lambda}{\mu_i}$ muda de sinal e assim o índice é multiplicado por um fator $(-1)^{m_i}$. ■

Observação 3.1.2. Na Proposição 3.1.1 e no Corolário 3.1.1, basta supormos que T é Frechet-diferenciável na origem com $T(0) = 0$. De fato, sendo T Frechet-diferenciável em $x = 0$, temos

$$T(x) = T(0) + T'(0)x + h(x)|x|, \quad \text{com } \lim_{|x| \rightarrow 0} h(x) = 0.$$

Logo,

$$|(x - T'(0)x) - (x - T(x))| = |h(x)||x|$$

e, portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta < \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ tal que se $|x| \leq \delta$, então $|h(x)| < \varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Assim,

$$\|(I_d - T) - (I_d - T'(0))\|_{C(\overline{B(0, \delta)})} < \varepsilon.$$

Daí, pela propriedade do grau de Brouwer,

$$d(I_d - T, B(0, \delta), 0) = d(I_d - T'(0), B(0, \delta), 0) \Rightarrow i(f, 0, 0) = d(I_d - T'(0), B(0, \delta), 0).$$

Agora, daremos início ao Grau Topológico em Espaços Vetoriais de dimensão finita. Dito isso, sejam $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado real de dimensão finita n , $A \subset V$ um aberto e limitado e $y \in V$ com $y \notin f(\partial A)$, onde $f : \bar{A} \rightarrow V$ é uma aplicação contínua. Então, o grau topológico de Brouwer pode ser estudado de maneira análoga ao que fizemos no $\mathbb{R}^n$ da seguinte maneira:

Primeiramente, vamos fixar $\beta_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base para V e consideremos o isomorfismo linear (o qual é um homeomorfismo) $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$T(v_1) = e_1, \quad \dots, T(v_n) = e_n,$$

em que $C = \{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Dessa forma, considerando $f_1 : T(\bar{A}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f_1 = T \circ f \circ T^{-1}$, temos que $T(A) \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $T(y) \notin f_1(\partial T(A))$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow T & & \downarrow T \\ T(A) & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Definição 3.1.4. *Sob as condições anteriores, definimos*

$$d(f, A, y) = d_{\mathbb{R}^n}(f_1, T(A), T(y)).$$

Uma pergunta natural que surge é saber se mudando a base de V , o grau topológico de Brouwer é alterado. No que segue, seja β_1 uma outra base de V , $f_1 = M^{-1} \circ f \circ M$, onde $M(A_1) = A$, $M(y_1) = y$ e M é a matriz mudança de base. Veja que, se $f(x) = y$ e $M(x_1) = x$ temos que

$$f_1(x_1) = (M^{-1} \circ f)(M(x_1)) = (M^{-1} \circ f)(x) = M^{-1}(f(x)) = M^{-1}(y) = y_1.$$

Uma resposta a tal pergunta é encontrada no lema que segue.

Lema 3.1.1. *O grau topológico de Brouwer é independente da base escolhida em V , isto é, se $\alpha = \{w_1, \dots, w_n\}$ é outra base de V e $S : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que $S(w_1) = e_1, \dots, S(w_n) = e_n$, então*

$$d_{\mathbb{R}^n}(T \circ f \circ T^{-1}|_{T(A)}, T(A), T(y)) = d_{\mathbb{R}^n}(S \circ f \circ S^{-1}|_{S(A)}, S(A), S(y))$$

Prova. Primeiramente, note que

$$d_{\mathbb{R}^n}(S \circ f \circ S^{-1}|_{S(A)}, S(A), S(y)) = \sum_{q \in S \circ f^{-1}(y)} \text{sgn } J_{S \circ f \circ S^{-1}}(q).$$

Mas,

$$J_{S \circ f \circ S^{-1}}(q) = \det(S \circ f \circ S^{-1})'(q) = \det(S(f(S^{-1}(q)))f'(S^{-1}(q))S^{-1}(q)).$$

Daí, se B é a matriz associada à f' , C é a matriz associada à $S \circ f' \circ S^{-1}$ e M associada à S na base α , temos que

$$\det(C) = \det(M \circ B \circ M^{-1}) = \det(B).$$

Logo,

$$J_{S \circ f \circ S^{-1}}(q) = \det(S(f(S^{-1}(q)))f'(S^{-1}(q))S^{-1}(q)) = \det(f'(S^{-1}(q))).$$

Portanto,

$$d_{\mathbb{R}^n}(S \circ f \circ S^{-1}|_{S(A)}, S(A), S(y)) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn } \det f'(x) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn } J_f(x).$$

Analogamente,

$$d_{\mathbb{R}^n}(T \circ f \circ T^{-1}|_{T(A)}, T(A), T(y)) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn } J_f(x).$$

Dessa forma,

$$d_{\mathbb{R}^n}(T \circ f \circ T^{-1}|_{T(A)}, T(A), T(y)) = d_{\mathbb{R}^n}(S \circ f \circ S^{-1}|_{S(A)}, S(A), S(y)).$$

Assim, concluimos a prova. ■

3.2 O Grau Topológico de Leray e Schauder

Nesse início, vamos considerar $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua, com $m < n$. Encarando $\mathbb{R}^m$ como subespaço de $\mathbb{R}^n$, então

$$d_{\mathbb{R}^n}(f, A, y) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m, \quad y \notin f(\partial A).$$

De fato, suponha que $d_{\mathbb{R}^n}(f, A, y_0) \neq 0$ para algum $y_0 \in \mathbb{R}^m$ com $y_0 \notin f(\partial A)$. Se $p = \rho(y_0, f(\partial A)) > 0$, então $B_{\mathbb{R}^n}(y_0, p) \subset f(A)$, pois se $z \in B(y_0, p)$ temos que

$$d_{\mathbb{R}^n}(f, A, z) = d_{\mathbb{R}^n}(f, A, y_0) \neq 0,$$

donde existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$, ou seja, $z \in f(A)$, mas $B(y_0, p) \subset f(A) \subset \mathbb{R}^m$, o que é um absurdo, pois todo subespaço que tem dimensão menor do que n tem interior vazio, mas chegamos que $y_0 \in \text{int}(\mathbb{R}^m) = \emptyset$.

Para contornarmos esse problema, se $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o operador identidade, então consideramos a aplicação $I_d - f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$. Observe que se $(I_d - f)(x) = y$ para $y \in \mathbb{R}^m$ e para algum $x \in \bar{A}$, então

$$x = f(x) + y \in \mathbb{R}^m,$$

isto é, a solução x já está em $A \cap \mathbb{R}^m$. Portanto, se espera que $d_{\mathbb{R}^n}(I_d - f, A, y)$ possa ser calculado por meio do grau m -dimensional de $(I_d - f)|_{\bar{A} \cap \mathbb{R}^m}$. Temos então que um lema crucial para a construção do grau de Leray-Schauder:

Lema 3.2.1. *Sejam $f : \bar{A} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, com $m < n$ e $y \in \mathbb{R}^m \setminus (I_d - f)(\partial A)$. Então,*

$$d_{\mathbb{R}^n}(I_d - f, A, y) = d_{\mathbb{R}^m}((I_d - f)|_{\bar{A} \cap \mathbb{R}^m}, A \cap \mathbb{R}^m, y).$$

Prova. Primeiramente, observe que

$$y \notin (I_d - f)(\partial_{\mathbb{R}^m}(A \cap \mathbb{R}^m)),$$

pois $\partial_{\mathbb{R}^m}(A \cap \mathbb{R}^m) \subset \partial A \cap \mathbb{R}^m \subset \partial A$. Considere agora

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x), \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m \text{ vezes}}),$$

e pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass, seja $g \in C^2(\bar{A}, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\|f - g\| < \frac{\rho_0}{4}, \quad \text{onde } \rho_0 = \text{dist}(y, (I_d - f)(\partial A)).$$

E, se for o caso, mude y para $z \in \mathbb{R}^m \setminus ((I_d - g)(S_{I_d - g}))$ tal que

$$\|z - y\| < \frac{\rho_0}{4}.$$

Dai,

$$d_{\mathbb{R}^n}(I_d - f, A, y) = d_{\mathbb{R}^n}(I_d - g, A, z).$$

Portanto, basta provarmos para o caso em que $f \in C^2(\bar{A}, \mathbb{R}^m)$ e y um valor regular de $I_d - f$. Como

$$(I_d - f)(x) = x - f(x) = (x_1 - f_1(x), \dots, x_m - f_m(x), x_{m+1}, \dots, x_n),$$

então para todo $x \in A \cap \mathbb{R}^m$, temos

$$J_{I_d - f}(x) = \det \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n - \frac{\partial f}{\partial(\mathbb{R}^m)}(x) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial f}{\partial(\mathbb{R}^{n-m})}(x) \\ I_{n-m} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

de onde segue que

$$J_{(I_d - f)}(x) = \det \left(I_m - \frac{\partial f}{\partial(\mathbb{R}^m)}(x) \right) \cdot \det(I_{n-m}) = J_{(I_d - f)|_{\bar{A} \cap \mathbb{R}^m}}(x), \forall x \in (I_d - f)^{-1}(y).$$

Mas, como vimos antes do lema,

$$(I_d - f)^{-1}(y) = [(I_d - f)|_{\bar{A} \cap \mathbb{R}^m}]^{-1}(y).$$

Logo, usando a definição de grau,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^n}(I_d - f, A, y) &= \sum_{x \in (I_d - f)^{-1}(y)} \text{sgn } J_{(I_d - f)}(x) \\ &= \sum_{x \in [(I_d - f)|_{\bar{A} \cap \mathbb{R}^m}]^{-1}(y)} \text{sgn } J_{(I_d - f)|_{\bar{A} \cap \mathbb{R}^m}}(x) \\ &= d_{\mathbb{R}^m}((I_d - f)|_{\bar{A} \cap \mathbb{R}^m}, A \cap \mathbb{R}^m, y). \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos a prova. ■

Corolário 3.2.1. *Sejam E_n um espaço normado com $\dim E_n = n$, E_m um subespaço de E_n com $\dim E_m = m < n$, $A \subset E_n$ um aberto e limitado, $f : \bar{A} \rightarrow E_m$ contínua e $y \in E_m \setminus (I_d - f)(\partial A)$. Então,*

$$d(I_d - f, A, y) = d((I_d - f)|_{\bar{A} \cap E_m}, A \cap E_m, y).$$

Com o auxílio do Corolário 3.2.1, estenderemos a definição do grau a uma primeira classe de aplicações entre espaços de dimensão infinita, chamada as perturbações de

posto finito da identidade. Daqui em diante, considere E um espaço de Banach real (de dimensão infinita) e A designará um conjunto aberto e limitado de E . Para $A, B \subset E$, denotamos por $\text{dist}(A, B)$ a distância entre os conjuntos A e B , isto é,

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{\|a - b\|; a \in A \text{ e } b \in B\},$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma de E . Seja $T \in C(\overline{A}, E)$ uma aplicação tal que a imagem de $T(T(\overline{A}))$ esteja contida num subespaço de dimensão finita de E , a qual é chamada de aplicação de posto finito. A aplicação $\phi = I_d - T$ é chamada uma perturbação de posto finito da identidade.

Definição 3.2.1. *Sejam $y \in E$ com $y \in \phi(\partial A)$, F um subespaço de E de dimensão finita, contendo $T(\overline{A})$ e o ponto y . Definimos*

$$d(\phi, A, y) := d(\phi|_{\overline{A} \cap F}, A \cap F, y).$$

Observe que $d(\phi|_{\overline{A} \cap F}, A \cap F, y)$ é o Grau Topológico de Brouwer, $A \cap F$ é um aberto e limitado de F e $\partial_F(A \cap F) \subset \partial(A) \cap F$, ou seja, $b \notin \phi(\partial_F(A \cap F))$.

Observação 3.2.1. *A Definição 3.2.1 independe da escolha do subespaço F de dimensão finita. De fato, sejam F_1 e F_2 dois subespaços de dimensão finita de E tais que $T(\overline{A}) \subset F_1, F_2$ e $y \in F_1, F_2$. Assim, como $F_1 \cap F_2$ é um subespaço de F_1 e F_2 contendo $T(\overline{A})$ e y . Agora, aplicando o Corolário 3.2.1, obtemos*

$$d(\phi|_{\overline{A} \cap F_1}, A \cap F_1, y) = d(\phi|_{\overline{A} \cap F_1 \cap F_2}, A \cap F_1 \cap F_2, y) = d(\phi|_{\overline{A} \cap F_2}, A \cap F_2, y).$$

O próximo passo é considerar o grau para as perturbações compactas da identidade.

Definição 3.2.2. *Dizemos que uma aplicação $T : A \rightarrow E$ é dita compacta se T é contínua sobre $\overline{A}$ e $T(\overline{A})$ é relativamente compacto.*

Observação 3.2.2. *Toda aplicação de posto finito limitada é compacta. No geral, $T : E \rightarrow E$ é compacto (não necessariamente linear) quando:*

- i) T é contínua;*

ii) Se $U \subset E$ é limitado, então $T(U)$ é relativamente compacto (o fecho é compacto).

Apresentaremos agora um fato que pode ser provado usando argumentos clássicos da Análise Funcional, que é a seguinte proposição:

Proposição 3.2.1. *Seja $Q(\overline{A}, E)$ o conjunto de todas as aplicações compactas $T : \overline{A} \rightarrow E$. Então*

- a) $Q(\overline{A}, E)$ é um espaço vetorial;
- b) A função $\|\cdot\|_\infty : Q(\overline{A}, E) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|T\|_\infty = \sup_{x \in \overline{A}} \|T(x)\|$ é uma norma sobre $Q(\overline{A}, E)$
- c) $(Q(\overline{A}, E), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Lema 3.2.2. *Seja $K \subset E$ um compacto. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um subespaço de dimensão finita F_ε de E e uma aplicação $g_\varepsilon : K \rightarrow F_\varepsilon$ contínua ($g_\varepsilon \in C(K, F_\varepsilon)$) tais que*

$$\|x - g_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in K.$$

Prova. Para cada $\varepsilon > 0$, pela compacidade de K , existem $y_1, \dots, y_{p(\varepsilon)} \in K$ tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{p(\varepsilon)} B(y_j, \varepsilon).$$

Considere então

$$F_\varepsilon := [y_1, \dots, y_{p(\varepsilon)}],$$

subespaço gerado. Temos que $\dim(F_\varepsilon) < \infty$. Agora, para $j = 1, \dots, p(\varepsilon)$, definamos as funções $b_j : K \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$b_j(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - y_j\| & , \text{ se } x \in B(y_j, \varepsilon) \\ 0 & , \text{ se } x \notin B(y_j, \varepsilon). \end{cases}$$

Observe que as funções b_j 's são contínuas em K e

$$\sum_{j=1}^{p(\varepsilon)} b_j(x) > 0, \quad \forall x \in K,$$

pois

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{p(\varepsilon)} B(y_j, \varepsilon).$$

A função $g_\varepsilon : K \rightarrow F_\varepsilon$ é definida por

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{p(\varepsilon)} b_j(x)} \cdot \sum_{j=1}^{p(\varepsilon)} b_j(x) y_j, \quad x \in K.$$

Vê-se, facilmente, que $g_\varepsilon \in C(K, F_\varepsilon)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|g_\varepsilon(x) - x\| &= \left\| \frac{1}{\sum_{j=1}^{p(\varepsilon)} b_j(x)} \cdot \sum_{j=1}^{p(\varepsilon)} b_j(x) y_j - x \right\| \\ &= \frac{1}{\sum_{j=1}^{p(\varepsilon)} b_j(x)} \cdot \left\| \sum_{j=1}^{p(\varepsilon)} b_j(x) y_j - \sum_{j=1}^{p(\varepsilon)} b_j(x) \cdot x \right\| \\ &= \frac{1}{\sum_{j=1}^{p(\varepsilon)} b_j(x)} \cdot \left\| \sum_{j=1}^{p(\varepsilon)} b_j(x) (y_j - x) \right\| \\ &\leq \frac{\sum_{j=1}^{p(\varepsilon)} b_j(x)}{\sum_{j=1}^{p(\varepsilon)} b_j(x)} \cdot \|y_j - x\| < \varepsilon, \quad \forall x \in K. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. ■

Definição 3.2.3. Se $T : \bar{A} \rightarrow E$ é compacta, a aplicação

$$\phi = I_d - T$$

é chamada de *perturbação compacta da identidade*.

Lema 3.2.3. Seja $\phi = I_d - T$ uma perturbação compacta da identidade ($T \in Q(\bar{A}, E)$). Então,

- i) ϕ é fechada, isto é, a imagem por ϕ de um fechado é um fechado;
- ii) ϕ é própria, ou seja, a imagem inversa por ϕ de um compacto é um compacto.

Prova. (i) - Considere $F \subset \bar{A}$ um fechado e mostremos que $\phi(F)$ é um fechado de E . Seja

$$(z_n) \subset \phi(F) \text{ tal que } z_n \rightarrow z \text{ em } E.$$

Temos que $z_n = \phi(u_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, com $(u_n) \subset F$. Daí, pela compacidade de T , podemos extrair uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) tal que $T(u_{n_k}) \rightarrow w$ em E . Portanto,

$$u_{n_k} = \phi(u_{n_k}) + T(u_{n_k}) = z_{n_k} + T(u_{n_k}) \rightarrow z + w,$$

donde $z + w \in F$, pois F é fechado. Logo,

$$z_{n_k} = \phi(u_{n_k}) \rightarrow \phi(z + w),$$

o que implica que $z = \phi(z + w)$, isto é, $z \in \phi(F)$, ou seja, $\phi(F)$ é fechado.

(ii) - Seja $K \subset E$ um compacto e mostremos que $\phi^{-1}(K)$ é compacto. Seja (u_n) uma sequência em $\phi^{-1}(K)$. Logo, $\phi(u_n)$ é uma sequência em K e, portanto, podemos extrair uma subsequência $(\phi(u_{n_k}))$ de $(\phi(u_n))$ que é convergente. Como T é compacta, podemos extrair uma subsequência $(\phi(u_{n_{k_j}}))$ de $(\phi(u_{n_k}))$ que converge. Desde que

$$u_{n_{k_j}} = \phi(u_{n_{k_j}}) + T(u_{n_{k_j}}),$$

então $(u_{n_{k_j}})$ é uma subsequência convergente de (u_n) , mostrando que $\phi^{-1}(K)$ é compacto. ■

Observação 3.2.3. Consideremos $T \in Q(\bar{A}, E)$, $\phi = I_d - T$, $\phi \in C(\bar{A}, E)$ e $y \in E \setminus \phi(\partial A)$. De acordo com o Lema 3.2.3, $\phi(\partial A)$ é fechado e, portanto, $r := \text{dist}(y, \phi(\partial A)) > 0$. Além disso,

$$K = \overline{T(\bar{A})},$$

é um compacto. Então, aplicando Lema 3.2.2, obtemos um subespaço de dimensão finita $F_{\frac{r}{2}}$ de E e uma aplicação $g_{\frac{r}{2}} \in C(K, F_{\frac{r}{2}})$ tais que

$$\|x - g_{\frac{r}{2}}(x)\| < \frac{r}{2}, \quad \forall x \in K.$$

Logo, a imagem da aplicação $T_r := g_{\frac{r}{2}} \circ T$ está contida em $F_{\frac{r}{2}}$, o qual é de dimensão finita. Ademais,

$$\phi_r := I_d - T_r$$

é uma perturbação de posto finito da identidade. Por outro lado, temos que

$$\|T(x) - T_r(x)\| = \|T(x) - g_{\frac{r}{2}}(T(x))\| \leq \frac{r}{2}$$

e

$$\|b - \phi(x)\| = \|b - x + T(x)\| \geq r, \quad \forall x \in \partial A.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|b - \phi_r(x)\| &= \|b - x + T_r(x)\| = \|b - x + T(x) - T(x) + T_r(x)\| \\ &\geq \|b - x + T(x)\| - \|T(x) - T_r(x)\| \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}, \quad \forall x \in \partial A, \end{aligned}$$

donde $\text{dist}(y, \phi_r(\partial A)) \geq \frac{r}{2}$. Dessa forma, o grau $d(\phi_r, A, y)$ está bem definido e é esse grau que vai nos permitir definir $d(\phi, A, y)$.

Definição 3.2.4. Sejam $\phi : \bar{A} \rightarrow E$ uma perturbação compacta da identidade, isto é,

$$\phi = I_d - T, \quad \text{com } T \in Q(\bar{A}, E)$$

e $y \notin \phi(\partial A)$. Então, definimos o grau $d(\phi, A, y)$ por

$$d(\phi, A, y) := d(\phi_r, A, y),$$

onde ϕ_r é uma perturbação de posto finito da identidade, verificando:

$$\|\phi(x) - \phi_r(x)\| \leq \frac{r}{2}, \quad \forall x \in \bar{A}, \text{ onde } r = \text{dist}(y, \phi(\partial A)).$$

Observação 3.2.4. Pelo que foi visto antes da definição, em consequência do Lema 3.2.2, tal aplicação ϕ_r existe e $\phi_r = I_d - g_{\frac{r}{2}} \circ T$.

Proposição 3.2.2. A definição de grau, dada acima, faz sentido, isto é, independe da escolha de ϕ_r .

Prova. Sejam $\phi_1 = I_d - T_1$ e $\phi_2 = I_d - T_2$ duas perturbações de dimensão finita da identidade, $T_1(\bar{A}) \subset F_1$, $T_2(\bar{A}) \subset F_2$, onde F_1 e F_2 são dois subespaços de dimensão finita de E , e ϕ_1, ϕ_2 verificam

$$\|\phi(x) - \phi_1(x)\| \leq \frac{r}{2} \quad \text{e} \quad \|\phi(x) - \phi_2(x)\| \leq \frac{r}{2}, \quad \forall x \in \bar{A}.$$

Seja F um subespaço de dimensão finita de E contendo $F_1 + F_2$ e o ponto y . Por definição do grau das perturbações de dimensão finita da identidade, temos:

$$d(\phi_1, A, y) = d(\phi_1|_{\bar{A} \cap F}, A \cap F, y) \quad \text{e} \quad d(\phi_2, A, y) = d(\phi_2|_{\bar{A} \cap F}, A \cap F, y).$$

Pondo $\Phi_\theta = \theta\phi_1|_{\bar{A} \cap F} + (1-\theta)\phi_2|_{\bar{A} \cap F}$, onde $\theta \in [0, 1]$ e observando que $\partial_F(A \cap F) \subset \partial A \cap F$, temos

$$\text{dist}(y, \Phi_\theta(\partial_F(A \cap F))) \geq \frac{r}{2}, \quad \forall \theta \in [0, 1].$$

De fato, seja $x \in \partial_F(A \cap F)$ qualquer. Temos que

$$\begin{aligned} \|b - \Phi_\theta(x)\| &= \|b - \phi(x) + \phi(x) - \theta\phi_1(x) - (1-\theta)\phi_2(x)\| \\ &= \|b - \phi(x) + \theta\phi(x) + (1-\theta)\phi(x) - \theta\phi_1(x) - (1-\theta)\phi_2(x)\| \\ &\geq \|b - \phi(x)\| - \theta\|\phi(x) - \phi_1(x)\| - (1-\theta)\|\phi(x) - \phi_2(x)\| \\ &\geq r - \frac{\theta r}{2} - \frac{(1-\theta)r}{2} = \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Logo, pela invariância do Grau de Brouwer por homotopia, obtemos para $\theta = 0$ e $\theta = 1$,

$$d(\phi_1, A, y) = d(\phi_2, A, y),$$

ou seja, segue que a definição dada é independente da escolha de ϕ_r . ■

Portanto, podemos definir o grau topológico das perturbações compactas da identidade em dimensão infinita. Além disso, $d(\phi, A, y)$ é chamado do grau de Leray-Schauder da aplicação ϕ com relação ao aberto limitado A e ao ponto $y \in E \setminus \phi(\partial A)$.

3.3 Propriedades do Grau Topológico de Leray e Schauder

No que segue, como antes, sejam $A \subset E$ aberto e limitado, $T \in Q(\bar{A}, E)$, $\phi = I_d - T$ e $b \in E \setminus \phi(\partial A)$. Da mesma forma como no grau de Brouwer, obteremos algumas propriedades fundamentais do grau de Leray-Schauder:

Proposição 3.3.1. *As seguintes propriedades são válidas:*

$(\tilde{P}_1)$ - *(Continuidade em relação ao operador T) Existe uma vizinhança U de T em $Q(\bar{A}, E)$ tal que para todo $S \in U$, temos que $y \notin (I - S)(\partial A)$ e*

$$d(I_d - S, A, y) = d(\phi, A, y).$$

($\tilde{P}_2$) - (Invariância do Grau de Leray-Schauder por homotopia compacta) Seja $H \in C(\overline{A} \times [0, 1], E)$ definida por

$$H(u, t) = u - S(u, t), \quad (u, t) \in \overline{A} \times [0, 1],$$

onde $S \in Q(\overline{A} \times [0, 1], E)$. Se $y \notin H(\partial A \times [0, 1])$, então

$$d(H(\cdot, t), A, y) \equiv \text{constante}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

($\tilde{P}_3$) - (Translação) Seja $y \notin \phi(\partial A)$. Então,

$$d(\phi, A, y) = d(\phi - y, A, 0).$$

($\tilde{P}_4$) - (Constância do grau nas componentes conexas de $E \setminus \phi(\partial A)$) Se y_1 e y_2 estão na mesma componente conexa de $E \setminus \phi(\partial A)$, tem-se que

$$d(\phi, A, y_1) = d(\phi, A, y_2).$$

($\tilde{P}_5$) - (Aditividade) Se $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, A_1, A_2 são abertos e limitados de E e $y \notin \phi(\partial A_1), \phi(\partial A_2)$, então

$$d(\phi, A, y) = d(\phi, A_1, y) + d(\phi, A_2, y).$$

($\tilde{P}_6$) - (Normalização)

$$d(I, A, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in A \\ 0, & \text{se } y \notin \overline{A} \end{cases}$$

($\tilde{P}_7$) - (Existência de solução) Se $y \notin \phi(\overline{A})$, então, $d(\phi, A, y) = 0$.

($\tilde{P}_8$) Se $d(\phi, A, y) \neq 0$, então $\phi(A)$ é uma vizinhança de y , isto é, existe $\delta > 0$ tal que

$$B(y, \delta) \subset \phi(A).$$

($\tilde{P}_9$) Se $\phi(A)$ está contido em um subespaço de E , diferente de E , então $d(\phi, A, y) = 0$, $\forall y \notin \phi(\partial A)$.

($\tilde{P}_{10}$) - (Excisão) Se K é um fechado em A e se $y \notin \phi(K)$, então

$$d(\phi, A, y) = d(\phi, A \setminus K, y).$$

($\tilde{P}_{11}$) Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família de abertos, dois a dois disjuntos, contido em A com

$$\phi^{-1}(y) \subset \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Então $d(\phi, A_i, y) \neq 0$, somente para um número finito de índices $i \in I$ e

$$d(\phi, A, y) = \sum_{i \in I} d(\phi, A_i, y).$$

($\tilde{P}_{12}$) - (Propriedade do bordo) Seja $\Phi = I_d - S$, onde $S \in Q(\bar{A}, E)$ tal que $\Phi(x) = \phi(x)$, $\forall x \in \partial A$, então

$$d(\phi, A, y) = d(\Phi, A, y).$$

($\tilde{P}_{13}$) Não existe uma perturbação compacta da identidade que seja retração da bola unitária $B(0, 1)$ em sua fronteira $\partial B(0, 1)$. Em outras palavras, não existe $\phi \in C(\overline{B(0, 1)}, \partial B(0, 1))$, da forma $\phi = I_d - T$, onde $T \in Q(\overline{B(0, 1)}, E)$ tal que

$$\phi|_{\partial B(0, 1)} = I_d|_{\partial B(0, 1)}.$$

Prova. ($\tilde{P}_1$)— Seja $r = \text{dist}(y, \phi(\partial A))$ e consideremos a vizinhança U de T em $Q(\bar{A}, E)$ dada por

$$U = \left\{ S \in Q(\bar{A}, E); \|S - T\|_{\infty, \bar{A}} < \frac{r}{2} \right\}.$$

Seja $S \in U$ e ponha $\Phi = I_d - S$. Se $x \in \partial A$, então

$$\begin{aligned} \|y - \Phi(x)\| &= \|y - x + S(x)\| \\ &= \|y - x + T(x) + S(x) - T(x)\| \\ &\geq \|y - \phi(x)\| - \|S(x) - T(x)\| \\ &\geq r - \frac{r}{2} \\ &= \frac{r}{2}, \end{aligned}$$

donde $\text{dist}(y, \Phi(\partial A)) \geq \frac{r}{2}$ e $y \notin \Phi(\partial A)$. Mostremos agora que o grau de Φ e de ϕ são iguais. De acordo com o Lema 3.2.2, existem duas perturbações de posto finito da identidade, $\phi_1 = I_d - T_1$ e $\Phi_1 = I_d - S_1$ tais que

$$\|\phi(x) - \phi_1(x)\| < \frac{r}{4} \quad e \quad \|\Phi(x) - \Phi_1(x)\| < \frac{r}{4}, \quad \forall x \in \bar{A}.$$

Escolhamos um subespaço de dimensão finita F de E , contendo $T_1(\bar{A})$, $S_1(\bar{A})$ e y . Por definição, temos

$$d(\phi, A, y) = d(\phi_1, A, y) = d(\phi_1|_{\bar{A} \cap F}, A \cap F, y)$$

e

$$d(\Phi, A, y) = d(\Phi_1, A, y) = d(\Phi_1|_{\bar{A} \cap F}, A \cap F, y)$$

Considere agora,

$$F_\theta := \theta\phi_1|_{\bar{A} \cap F} + (1 - \theta)\Phi_1|_{\bar{A} \cap F},$$

para $\theta \in [0, 1]$. Seja $u \in \partial_F(A \cap F) \subset \partial A \cap F$. Temos

$$\begin{aligned} \|y - F_\theta(u)\| &= \|b - \phi(u) + \phi(u) - \theta\phi_1(u) - (1 - \theta)\Phi(u)\| \\ &= \|b - \phi(u) + \theta\phi(u) + (1 - \theta)\phi(u) - (1 - \theta)\Phi(u) + (1 - \theta)\Phi(u) \\ &\quad - \theta\phi_1(u) - (1 - \theta)\Phi(u)\| \\ &\geq \|b - \phi(u)\| - \theta\|\phi(u) - \phi_1(u)\| - (1 - \theta)\|\Phi(u) - \Phi_1(u)\| \\ &\quad - (1 - \theta)\|\phi(u) - \Phi(u)\| \\ &\geq r - \theta\frac{r}{4} - (1 - \theta)\frac{r}{4} - (1 - \theta)\frac{r}{2} \\ &= r - \frac{r}{4} - (1 - \theta)\frac{r}{2} \\ &\geq r - \frac{r}{4} - \frac{r}{2} \\ &= \frac{r}{4}, \end{aligned}$$

$\forall \theta \in [0, 1]$, $\forall u \in \partial_F(A \cap F)$. Aplicando a invariância do Grau de Brouwer por homotopia, segue que

$$d(\phi, A, y) = d(\Phi, A, y).$$

($\tilde{P}_2$)— Seja $r = \text{dist}(y, H(\partial A \times [0, 1]))$.

Afirmção 3.3.1. $H(\partial A \times [0, 1])$ é fechado.

De fato, se considerarmos $\tilde{H} : \bar{A} \times [0, 1] \rightarrow E \times \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{H}(u, t) = (u, t) - (S(u, t), t) = (u - S(u, t), 0)$$

que é uma perturbação compacta da identidade ($\tilde{S}(u, t) = (S(u, t), t)$). Daí, teremos que

$$\tilde{H}(\partial A \times [0, 1]) = H(\partial A \times [0, 1]) \times \{0\}$$

é fechado pelo Lema 3.2.3 (i), donde segue que $H(\partial A \times [0, 1])$ é fechado. Portanto, $r > 0$.

Afirmção 3.3.2. *Se a aplicação $t \mapsto S(\cdot, t)$ é contínua de $[0, 1]$ em $Q(\bar{A}, E)$, então $S \in Q(\bar{A} \times [0, 1], E)$.*

Com efeito, precisamos mostrar que $\overline{S(\bar{A} \times [0, 1])}$ é compacto, ou seja, dada uma sequência $(y_n) \subset S(\bar{A} \times [0, 1])$, existe uma subsequência convergente. Para isso, seja $(x_n, t_n) \subset \bar{A} \times [0, 1]$ tal que $y_n = S(x_n, t_n)$. Como $\mathbb{R}$ é completo e $(t_0) \subset [0, 1]$, temos que existe uma subsequência (t_{n_j}) de (t_n) tal que

$$t_{n_j} \rightarrow t_0.$$

Pela hipótese de continuidade de $t \mapsto S(\cdot, t)$, temos que

$$S(x, t_{n_j}) \rightarrow S(x, t_0)$$

uniformemente, $\forall x \in \bar{A}$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|S(x, t_{n_j}) - S(x, t_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall j \geq j_0, \forall x \in \bar{A}.$$

Fazendo $x = x_{n_j}$, temos que

$$\|S(x_{n_j}, t_{n_j}) - S(x_{n_j}, t_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall j \geq j_0.$$

Assim, como $S(\cdot, t) \in Q(\bar{A}, E)$, existe uma subsequência $(x_{n_{j_k}})$ tal que

$$S(x_{n_{j_k}}, t_0) \rightarrow y.$$

Logo, $y_{n_{j_k}} = S(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) \rightarrow y$, pois

$$\begin{aligned} \|S(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) - y\| &\leq \|S(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) - S(x_{n_{j_k}}, t_0)\| + \|S(x_{n_{j_k}}, t_0) - y\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

O que demonstra a afirmação. Agora, seja K o compacto $\overline{S(\bar{A} \times [0, 1])}$. O Lema 3.2.2 nos permite encontrar um subespaço $F_{\frac{r}{2}} \subset E$ de dimensão finita e contendo y , e uma aplicação $g_{\frac{r}{2}} \in C(K, F_{\frac{r}{2}})$ tais que

$$\|x - g_{\frac{r}{2}}(x)\| \leq \frac{r}{2}, \quad \forall x \in K.$$

Assim, tomando

$$H_1(u, t) := u - (g_{\frac{r}{2}} \circ S)(u, t),$$

desde que $\text{dist}(y, H(\partial A, t)) \geq r$ para cada $t \in [0, 1]$, segue, por definição, que

$$d(H(\cdot, t), A, y) = d(H_1(\cdot, t), A, y),$$

pois como fizemos antes

$$\|H(u, t) - H_1(u, t)\| \leq \frac{r}{2}, \quad \forall u \in \overline{A}, \forall t \in [0, 1].$$

Mas, visto que H_1 é uma perturbação de posto finito da identidade

$$d(H_1(\cdot, t), A, y) = d(H_1(\cdot, t)|_{\overline{A} \cap F_{\frac{r}{2}}}, A \cap F_{\frac{r}{2}}, y),$$

H_1 é contínua de $\overline{A} \cap F_{\frac{r}{2}}$ em $F_{\frac{r}{2}}$ e $y \notin H_1(\partial A \times [0, 1])$ (uma conta análoga as que já foram feitas antes). Logo, o grau $d(H_1(\cdot, t), A, y)$ é constante pela propriedade de invariância por homotopia do Grau Topológico de Brouwer.

($\tilde{P}_3$)— Temos que

$$d(\phi, A, y) = d(\phi_r, A, y),$$

onde ϕ_r é uma perturbação de posto finito da identidade. No entanto,

$$d(\phi_r, A, y) = d(\phi_r|_{\overline{A} \cap F}, A \cap F, y),$$

onde F é um subespaço de E de dimensão finita contendo b e $T_r(\overline{A})$. Mas, pelo Grau Topológico de Brouwer, tem-se

$$\begin{aligned} d(\phi_r|_{\overline{A} \cap F}, A \cap F, y) &= d(\phi_r|_{\overline{A} \cap F} - y, A \cap F, 0) \\ &= d(\phi_r - y, A \cap F, 0) \\ &= d(\phi - y, A \cap F, 0). \end{aligned}$$

($\tilde{P}_4$)— Notemos que a aplicação de $E \setminus \phi(\partial A)$ em $\mathbb{Z}$ definida por

$$y \mapsto d(\phi, A, y) \stackrel{(P_3)}{=} d(\phi - y, A, 0)$$

é localmente constante, pois se $b_1 \approx b_2$, então $\phi - b_1 \approx \phi - b_2$ na normal de $C(\overline{A}, E)$.

Logo, pela Propriedade ($\tilde{P}_3$), esta aplicação é localmente constante e, dessa forma, é contínua. Assim, nas componentes conexas de $E \setminus \phi(\partial A)$ é constante.

($\tilde{P}_5$)— Com um argumento semelhante ao que foi feito nos itens anteriores, temos que

$$\begin{aligned} d(\phi, A, y) &= d(\phi_r, A, y) \\ &= d(\phi_r|_{\overline{A} \cap F}, A \cap F, y) \\ &= d(\phi_r|_{\overline{A} \cap F}, A_1 \cap F, y) + d(\phi_r|_{\overline{A} \cap F}, A_2 \cap F, y) \\ &= d(\phi, A_1, y) + d(\phi, A_2, y), \end{aligned}$$

onde $A \cap F = (A_1 \cap F) \cup (A_2 \cap F)$.

($\tilde{P}_6$)— Considere o subespaço

$$[y] = \{\lambda y, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

gerado por y , que é um espaço de dimensão finita, então pelo Grau de Brouwer, temos que

$$d(I_d, A, y) = d(I_d|_{\overline{A} \cap [y]}, A \cap [y], y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in A \cap [y] \\ 0, & \text{se } y \notin \overline{A \cap [y]} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in A \\ 0, & \text{se } y \notin \overline{A} \end{cases}$$

($\tilde{P}_7$)— Do fato que ϕ é um operador fechado, segue que $\alpha = \text{dist}(y, \phi(\overline{A})) > 0$. Como $\phi(\partial A) \subset \phi(\overline{A})$ então $\text{dist}(y, \phi(\partial A)) \geq \alpha$. Assim, pelo Lema 3.2.2, existe uma perturbação de posto finito da identidade $\phi_\alpha \in C(\overline{A}, E)$ tal que

$$\|\phi(x) - \phi_\alpha(x)\| < \frac{\alpha}{2}, \quad \forall x \in \overline{A}.$$

Afirmção 3.3.3. $y \notin \phi_\alpha(\overline{A})$.

Com efeito, para $x \in \overline{A}$ temos

$$\begin{aligned} \|y - \phi_\alpha(x)\| &= \|y - \phi(x) + \phi(x) - \phi_\alpha(x)\| \\ &\geq \|y - \phi(x)\| - \|\phi(x) - \phi_\alpha(x)\| \\ &\geq \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

O conjunto $\{\|y - \phi_\alpha(x)\|; x \in \overline{A}\}$ é limitado inferiormente e pelo postulado de Dedekind possui ínfimo. Logo,

$$\inf\{\|y - \phi_\alpha(x)\|; x \in \overline{A}\} \geq \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \text{dist}\{y, \phi_\alpha(\overline{A})\} \geq \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Desde que, $\{b\}$ é um compacto e $\phi_\alpha(\bar{A})$ é um fechado, tem-se $\text{dist}\{y, \phi_\alpha(\partial A)\} > 0$, mostrando que $y \notin \phi_\alpha(\bar{A})$. Por definição

$$d(\phi, A, y) = d(\phi_\alpha, A, y) = d(\phi_\alpha|_{\bar{A} \cap F}, A \cap F, y),$$

onde F é o subespaço de dimensão finita de E que contém b e $T(\bar{A})$. Observando que $y \notin \phi_\alpha|_{\bar{A} \cap F}(\bar{A} \cap F)$, pela propriedade do grau topológico de Brouwer (P_8) , concluímos que

$$d(\phi, A, y) = 0.$$

$(\tilde{P}_8)$ — Desde que $\phi(\partial A)$ é fechado, então $E \setminus \phi(\partial A)$ é um aberto. Logo, as componentes conexas de $E \setminus \phi(\partial A)$ são abertos. Sendo C_y a componente conexa de y em $E \setminus \phi(\partial A)$, então, para todo $z \in C_y$, tem-se

$$d(\phi, A, z) = d(\phi, A, y) \neq 0,$$

por hipótese. Assim, por $(\tilde{P}_7)$, para cada $z \in C_y$ existe $x \in A$ tal que $\phi(x) = z$ e, portanto, $C_y \subset \phi(A)$. Desde que, C_y é um conjunto aberto e $y \in C_y$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B(y, \delta) \subset C_y \subset \phi(A).$$

$(\tilde{P}_9)$ — Considere V um subespaço próprio de E tal que $\phi(A) \subset V$. Se

$$d(\phi, A, y) \neq 0,$$

então, pela propriedade anterior $(\tilde{P}_8)$, $\phi(A)$ é uma vizinhança de y , ou seja, existe $\delta > 0$ tal que

$$B(y, \delta) \subset \phi(A) \subset V$$

e, portanto, $V = E$, o que é um absurdo, pois V é um subespaço próprio de E . Portanto, $d(\phi, A, y) = 0$.

$(\tilde{P}_{10})$ — Usando a definição do grau de Leray e Schauder temos que

$$d(\phi, A, y) = d(\phi|_{\bar{A} \cap F}, A \cap F, y),$$

onde F é um subespaço de dimensão finita que contém $T(\bar{A})$ e y com $b \in E$ e $b \notin \phi(\partial A)$. Aplicando a propriedade de excisão do grau topológico de Brouwer (P_4) , segue o resultado.

($\tilde{P}_{11}$)— Uma vez que $y \notin \phi(\partial A_i)$ pelo Lema 3.2.3

$$\phi^{-1}(\{y\})$$

é um compacto, pois estamos usando o fato que ϕ é própria. Pelo Teorema de Borel-Lebesgue, existe um número finito de abertos $A_i \subset A$ que cobrem $\phi^{-1}(\{b\})$, isto é, existe um conjunto finito I_0 de índices tal que

$$\phi^{-1}(\{y\}) \subset \bigcup_{i \in I_0} A_i, \quad \text{com } A_i \subset A.$$

Portanto, $\forall i \in I \setminus I_0$ temos que $b \notin \phi(A_i)$ e, pela propriedade ($\tilde{P}_7$), temos que

$$d(\phi, A_i, y) = 0.$$

Considerando que

$$K = \overline{A} \setminus \left(\bigcup_{i \in I_0} A_i \right)$$

é um compacto, pois

$$K = \overline{A} \setminus \left(\bigcup_{i \in I_0} A_i \right) = \overline{A} \cap \left(\bigcup_{i \in I_0} A_i \right)^c = \overline{A} \cap \left(\bigcap_{i \in I_0} A_i^c \right)$$

temos que K é fechado e, como $K \subset A$, temos que K é limitado e, conseqüentemente, K é compacto. Temos que $b \notin \phi(K)$, pois

$$\phi(y) \in \bigcup_{i \in I_0} A_i.$$

Pela propriedade da excisão ($\tilde{P}_{10}$), segue que

$$d(\phi, A, y) = d(\phi, A \setminus K, y) = d\left(\phi, A \setminus \left(\overline{A} \setminus \bigcup_{i \in I_0} A_i\right), y\right)$$

e com isso,

$$d(\phi, A, y) = d\left(\phi, \bigcup_{i \in I_0} A_i, y\right).$$

Pela propriedade aditiva ($\tilde{P}_5$), obtemos

$$d(\phi, A, y) = \sum_{i \in I_0} d(\phi, A_i, y).$$

Portanto,

$$d(\phi, A, y) = \sum_{i \in I} d(\phi, A_i, y).$$

($\tilde{P}_{12}$)— Defina

$$H(u, t) = t\phi(u) + (1 - t)\Phi(u), \quad \forall t \in [0, 1], u \in \bar{A}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} H(u, t) &= tu - tT(u) + (1 - t)u - (1 - t)S(u) \\ &= u - (tT + (1 - t)S)(u). \end{aligned}$$

Logo, $H(\cdot, t)$ é uma perturbação compacta da identidade para cada $t \in [0, 1]$. Além disso, como $\phi|_{\partial A} = \Phi|_{\partial A}$, então $T(u) = S(u)$ para todo $u \in \partial A$ e, portanto,

$$h(u, t) = u - T(u) = \phi(u), \quad \forall t \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad b \notin H(\partial A \times [0, 1]).$$

Dessa forma, pela invariância do grau por homotopias compactas ($\tilde{P}_2$) concluímos que

$$d(\phi, A, y) = d(H_0, A, y) = d(H_1, A, y) = d(\Phi, A, y).$$

($\tilde{P}_{13}$)— Se existisse uma tal aplicação, teríamos

$$d(\phi, B(0, 1), 0) = d(I_d, B(0, 1), 0) = 1.$$

Logo, pela Propriedade ($\tilde{P}_7$), existiria $x_0 \in B(0, 1)$ tal que $\phi(x_0) = 0$, o que seria uma contradição, pois $\|\phi(x)\| = 1$ para todo $x \in \overline{B(0, 1)}$. ■

Observação 3.3.1. *No caso geral, para funções contínuas, o resultado ($\tilde{P}_{13}$) não é verdade. De fato, em dimensão infinita, existe sempre uma retração contínua da bola unitária em sua fronteira. Veja [8] páginas 353 - 367.*

3.4 Teoremas do Ponto Fixo de Schauder e Schaeffer

Apresentaremos nessa seção aplicações do grau de Leray e Schauder. Uma delas é o Teorema do Ponto fixo de Schauder que é uma extensão do Teorema do Ponto

Fixo de Brouwer para espaços de Banach. A hipótese exigida é compacidade. Esta generalização é devida a Schauder. A ideia é aproximar aplicações compactas por aplicações com imagem de dimensão finita.

Além disso, comentaremos um pouco sobre o Teorema do Ponto Fixo de Schaefer. Tais Teoremas são bastante úteis para a compreensão de vários problemas de equações diferenciais e equações integrais que podem ser transformados em problemas de ponto fixo entre espaços de funções como veremos a seguir. Inicialmente, vejamos um exemplo que para espaços de Banach de dimensão infinita, uma aplicação $A : B[0, 1] \rightarrow B[0, 1]$ contínua não necessariamente possui ponto fixo.

De fato, considere o espaço ℓ^2 , que é o espaço vetorial normado cujos vetores são sequências de números pertencentes ao corpo $\mathbb{R}$, mais precisamente,

$$\ell_2 := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

e denote a bola unitária fechada por $B := B[0, 1] \subset \ell_2$. Daí, definindo $A : B \rightarrow B$ por

$$A[x] := \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots \right)$$

Note que

$$\|A[x]\|_2^2 = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = 1 - \|x\|^2 + \|x\|^2 = 1. \quad (3.2)$$

Logo, A está bem definida. Para a continuidade de A , considere $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots) \in B$ tal que $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Então,

$$\begin{aligned} \|A[x^n] - A[x]\|^2 &= \left\| \left(\sqrt{1 - \|x^n\|^2}, x_1^n, x_2^n, \dots \right) - \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots \right) \right\|^2 \\ &= \left\| \left(\sqrt{1 - \|x^n\|^2} - \sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1^n - x_1, x_2^n - x_2, \dots \right) \right\|^2 \\ &= \left(\sqrt{1 - \|x^n\|^2} - \sqrt{1 - \|x\|^2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i|^2 \\ &= \left(\sqrt{1 - \|x^n\|^2} - \sqrt{1 - \|x\|^2} \right)^2 + \|x^n - x\|^2 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Portanto, A é contínua. Suponha, agora, que A possua um ponto fixo $x \in B$, isto é,

$$\begin{aligned} x = A[x] &\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots \right) \\ &\Rightarrow x_1 = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2} \right) \text{ e } x_{i+1} = x_i, \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Assim, utilizando (3.2) e o que observamos acima, temos que

$$1 = \|A[x]\|_2^2 = \|x\|^2 = 1 - (x_1)^2,$$

ou seja, $x_1 = 0$ e, portanto, $x = (0, 0, \dots)$. Mas

$$A[x] = A[(0, 0, \dots)] = (1, 0, 0, \dots) \neq (0, 0, \dots) = x,$$

o que é uma contradição. Portanto, A não possui ponto fixo.

Exibiremos agora uma maneira de como podemos contornar esse problema.

Teorema 3.4.1 (Ponto fixo de Schauder). *Seja K um compacto e convexo de E , então toda aplicação contínua $T : K \rightarrow K$ admite um ponto fixo.*

Prova. Seja $\varepsilon > 0$. Pelo Lema 3.2.2, podemos obter um subespaço de dimensão finita $F_\varepsilon \subset E$ e uma aplicação $g_\varepsilon \in C(K, F_\varepsilon)$ tais que

$$\|x - g_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in K. \quad (3.3)$$

Daí, pela compacidade de K , existem $p(\varepsilon)$ pontos de K , digamos $y_1, \dots, y_{p(\varepsilon)}$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{p(\varepsilon)} B(y_i, \varepsilon).$$

Mas, lembre-se que, da demonstração do Lema 3.2.2, temos que

$$F_\varepsilon = \langle y_1, \dots, y_{p(\varepsilon)} \rangle$$

e

$$g_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} b_i(x) y_i}{\sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} b_i(x)}, \quad x \in K.$$

As funções b_i ($i = 1, \dots, p(\varepsilon)$) são funções contínuas de K em $\mathbb{R}$ e verificam

$$\sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} b_i(x) > 0, \quad \forall x \in K.$$

Assim, denotando por K_ε o fecho convexo (fechado) dos pontos $y_1, \dots, y_{p(\varepsilon)}$:

$$K_\varepsilon = \overline{\text{conv}}\{y_1, \dots, y_{p(\varepsilon)}\} \subset F_\varepsilon.$$

Temos que K_ε é um compacto e convexo. Além disso, note que

$$g_\varepsilon \in C(K, K_\varepsilon).$$

Dessa forma, considerando a restrição de $g_\varepsilon \circ T$ à $K_\varepsilon \subset K$, obtemos que $(g_\varepsilon \circ T)|_{K_\varepsilon}$ é uma aplicação contínua, pois é composição de funções contínuas. Além disso, a aplicação $(g_\varepsilon \circ T)|_{K_\varepsilon}$ está definida em um compacto convexo K_ε nele mesmo, pois g_ε é uma combinação convexa. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (Teorema 2.2.1), $(g_\varepsilon \circ T)|_{K_\varepsilon}$ tem um ponto fixo em K_ε . Assim, existe $y_\varepsilon \in K_\varepsilon \subset K$ tal que

$$y_\varepsilon = g_\varepsilon(T(y_\varepsilon)).$$

Como K é compacto, pode encontrar uma sequência $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e tal que $y_{\varepsilon_n} \rightarrow y \in K$ (a menos de subsequências). Daí, como T é contínua e por (3.3), segue que

$$\begin{aligned} \|y - T(y)\| &= \|y - y_{\varepsilon_n} + (g_{\varepsilon_n} \circ T)(y_{\varepsilon_n}) - T(y_{\varepsilon_n}) + T(y_{\varepsilon_n}) - T(y)\| \\ &\leq \|y - y_{\varepsilon_n}\| + \|(g_{\varepsilon_n} \circ T)(y_{\varepsilon_n}) - T(y_{\varepsilon_n})\| + \|T(y_{\varepsilon_n}) - T(y)\| \\ &\leq \|y - y_{\varepsilon_n}\| + \varepsilon_n + \|T(y_{\varepsilon_n}) - T(y)\| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Portanto, $y = T(y)$, ou seja, y é um ponto fixo de T . ■

Podemos dar uma outra formulação do Teorema do Ponto Fixo de Schauder em termos de operadores compactos. Vejamos o seguinte corolário:

Corolário 3.4.1. *Sejam Q um fechado, limitado e convexo de E e $S : Q \rightarrow Q$ uma aplicação compacta. Então, S possui um ponto fixo.*

Prova. Como Q é limitado e como S é compacta, então $\overline{S(Q)}$ é um compacto e

$$\overline{S(Q)} \subset Q,$$

pois Q é fechado. Daí, considerando

$$K = \overline{\text{conv}(\overline{S(Q)})}$$

o fecho convexo de $\overline{S(Q)}$, temos desde que Q é fechado e convexo que

$$K \subset Q.$$

Logo, $S|_K : K \rightarrow K$ é contínua e K é um compacto convexo. Portanto, S admite um ponto fixo em $K \subset Q$. ■

Observação 3.4.1. *Apresentaremos agora uma outra demonstração para o Corolário 3.4.1, usando o grau de Leray e Schauder e o Teorema do Prolongamento de Dugundji (Veja Tese do Berestycki [3]).*

Prova. *Primeiramente, faremos o caso em que $Q = \overline{B(0, r)}$. Desse modo, ou S admite um ponto fixo sobre ∂Q ou o grau $d(I_d - S, B(0, r), 0)$ está definido e é igual a 1. De fato, se $S(x_0) \neq x_0$, $\forall x_0 \in \partial Q$, então $(I_d - S)(x_0) \neq 0$, $\forall x_0 \in \partial Q$. Além disso, consideremos a homotopia*

$$H(x, t) = x - tS(x), \quad \text{com } t \in [0, 1].$$

Observe que

$$\tilde{S}(x, y) = tS(x) \in Q(\overline{B(0, r)} \times [0, 1], E)$$

e

$$H \in C(\overline{B(0, r)} \times [0, 1], E).$$

Logo, pela invariância do grau por homotopia compacta, temos que

$$d(I_d - S, B(0, r), 0) = d(I_d, B(0, r), 0) = 1.$$

Portanto, pela propriedade de existência de solução, existe $x_1 \in B(0, r)$ tal que

$$(I_d - S)(x_1) = 0,$$

ou seja, S admite um ponto fixo em $Q = \overline{B(0, r)}$. ■

No caso geral, utilizaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.4.2 (Teorema do Prolongamento de Dugundji). *Seja A um fechado em um espaço métrico X e C um convexo de um espaço E localmente convexo e separável. Assim, toda aplicação contínua de A em C admite um prolongamento contínuo de X em C .*

Prova. *Considerando*

$$K = \overline{\text{conv}(S(Q))} \subset Q$$

convexo compacto e limitado. Existe um $r > 0$ tal que

$$K \subset \overline{B(0, r)}.$$

Desse modo, S é uma aplicação contínua de K em K e admite um prolongamento contínuo $\tilde{S}$ de $\overline{B(0, r)}$ em K . Assim, de acordo com o que fizemos anteriormente, $\tilde{S}$ possui um ponto fixo em $B(0, r)$, isto é,

$$x = \tilde{S}(x),$$

onde $x \in Q$ e x é um ponto fixo de S . ■

Corolário 3.4.2 (Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer). *Seja $S : E \rightarrow E$ uma aplicação compacta. Suponha que exista um número real $r > 0$ tal que se a igualdade*

$$u = \sigma S(u)$$

vale para $u \in E$ e $\sigma \in [0, 1]$ implica $\|u\| < r$, então S admite um ponto fixo em $B(0, r)$.

Prova. Seja P a projeção radial de E sobre $\overline{B(0, r)}$, isto é,

$$P(u) = \begin{cases} u & , \text{ se } \|u\| \leq r \\ r \cdot \frac{u}{\|u\|} & , \text{ se } \|u\| > r. \end{cases}$$

Note que $P \circ S$ é uma aplicação compacta de $\overline{B(0, r)}$ em $\overline{B(0, r)}$, pois é a composição de uma função contínua com uma compacta. Além disso, $P \circ S$ admite, portanto, um ponto fixo $\xi \in \overline{B(0, r)}$, ou seja,

$$(P \circ S)(\xi) = \xi.$$

Daí, se $\|S(\xi)\| < r$, então

$$\xi = P(S(\xi)) = S(\xi)$$

e, portanto, S tem um ponto fixo $\xi \in B(0, r)$. Por outro lado, se $\|S(\xi)\| \geq r$, então

$$(p \circ S)(\xi) = P(S(\xi)) = \frac{r}{\|S(\xi)\|} \cdot S(\xi) = \sigma S(\xi).$$

onde $\frac{r}{\|S(\xi)\|} = \sigma \in [0, 1]$. Mas,

$$(P \circ S)(\xi) = P(S(\xi)) = \xi.$$

Logo,

$$\frac{r}{\|S(\xi)\|} S(\xi) = \xi \quad \Rightarrow \quad \|\xi\| = r$$

donde, por hipótese, devemos ter $\|\xi\| < r$, pois $\xi = \sigma S(\xi)$, então $\|\xi\| < r$, o que é uma contradição. Logo, só temos o primeiro caso e, portanto, S admite um ponto fixo em $B(0, r)$. ■

Corolário 3.4.3. *Seja S uma aplicação compacta de $\overline{B(0, r)}$ em E tal que*

$$S(\partial B(0, r)) \subset B(0, r).$$

Então, S admite um ponto fixo.

Prova. O operador

$$T = S \circ P,$$

onde P é a projeção radial sobre $\overline{B(0, r)}$ é compacto de E em E (análogo ao que fizemos antes) e satisfaz as hipóteses do Teorema de Ponto Fixo de Schaeffer. De fato, basta mostrarmos que se $u = \sigma T(u)$, $u \in E$ e $\sigma \in [0, 1]$, então $\|u\| < r$. Com efeito, se $\|u\| \geq r$ teríamos

$$u = \sigma S(P(u)) \text{ e } P(u) \in \partial B(0, r)$$

donde, por hipótese, $S(P(u)) \in B(0, r)$ e $u \in B(0, r)$, o que seria uma contradição.

Portanto, T admite um ponto fixo em $B(0, r)$, isto é, existe $\xi \in B(0, r)$ tal que

$$T(\xi) = S(P(\xi)) = S(\xi) = \xi,$$

donde ξ também é ponto fixo de S . ■

O seguinte corolário é uma versão não-linear do Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer:

Corolário 3.4.4. *Seja $T : [0, 1] \times E \rightarrow E$ uma aplicação compacta tal que*

$$T(0, u) = 0, \quad \forall u \in E. \tag{3.4}$$

Se existe $r > 0$ tal que a igualdade

$$u = T(\sigma, u),$$

para $u \in E$ e $\sigma \in [0, 1]$, implique $\|u\| < r$, então, para todo $\sigma \in [0, 1]$, $T(\sigma, \cdot)$ admite um ponto fixo em $B(0, r)$.

Prova. Como T é uma aplicação compacta de $[0, 1] \times \overline{B(0, r)}$ em E . Por hipótese, para todo $u \in \partial B(0, r)$ e para todo $\sigma \in [0, 1]$, tem-se

$$u = T(\sigma, u) \neq 0.$$

Logo, o grau $d(I - T(\sigma, \cdot), B(0, r), 0)$ está definido, independe de σ , é constante e igual a 1, pois para $\sigma = 0$, temos que

$$d(I_d - T(0, \cdot), B(0, r), 0) \stackrel{(3.4)}{=} d(I_d - 0, B(0, r), 0) - d(I_d, B(0, r), 0) = 1.$$

Assim, para todo $\sigma \in [0, 1]$, $T(\sigma, \cdot)$ tem um ponto fixo em $B(0, r)$. ■

3.5 Existência de solução para um problema sublinear

Apresentaremos agora uma aplicação do Grau Topológico de Leray e Schauder, do Teorema de Ponto Fixo de Schauder (Teorema 3.4.1) e do Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer (Corolário 3.4.2) em Equações Diferenciais Parciais.

Consideremos o seguinte problema elíptico:

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

em que Ω é um aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo a condição de crescimento

$$(f_0) \quad \text{Existe } C > 0 \text{ tal que } |f(x, s)| \leq C(1 + |s|^\theta), \forall x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R} \text{ e } \theta \in [0, 1).$$

Nosso objetivo aqui é mostrar que o Problema (P) possui pelo menos uma solução fraca.

Definição 3.5.1. Dizemos que uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução de (P) se $u \in H_0^1(\Omega)$ e vale a seguinte igualdade:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f(x, u) v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

ou, simplesmente, $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$ por causa da densidade.

Vale salientar que aqui consideraremos o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ munido com a norma do gradiente, ou seja, com a seguinte norma

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 3.5.1. Sob a hipótese (f_0) , o problema (P) possui pelo menos uma solução fraca.

Prova. Faremos a demonstração para o caso em que $\theta = \frac{1}{2}$, pois o caso geral é uma pequena variação desse caso, isso porque, ambas as afirmações continuam validas a menos de pequenas alterações. Afim de provarmos o Teorema acima, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, considere o seguinte problema linear

$$(P_v) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, v) & , \quad \text{em } \Omega; \\ u = 0 & , \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Afirmção 3.5.1. Para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, o problema (P_v) possui uma única solução fraca.

Com efeito, basta ver que se $v \in H_0^1(\Omega)$, então $f(x, v) \in L^2(\Omega)$. De fato, primeiramente note que desde que f seja contínua e v seja mensurável, então $f(x, v)$ é mensurável. Por outro lado, usando (f_0) , temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x, v)|^2 &\leq \int_{\Omega} \left(C_1 \cdot \left(1 + |v|^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2 \\ &= \int_{\Omega} C_1^2 \cdot \left(1 + |v|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &\leq 2C_1^2 \cdot |\Omega| + 2C_1^2 \cdot \int_{\Omega} |v| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

pois como o domínio é limitado, segue que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega).$$

Portanto, agora, aplicando o Teorema da Representação de Riez concluímos a Afirmação 3.5.1. De posse da Afirmação 3.5.1, podemos definir a seguinte aplicação $F : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ tal que

$$F(v) = u$$

onde u é a única solução de (P_v) . Vale salientar que tal aplicação é conhecida como Operador Solução. Deduziremos agora algumas propriedades da aplicação F . Primeiramente, note que

$$|s \cdot f(x, s)| \leq C_1 \left(|s| + |s|^{\frac{3}{2}} \right) \leq C_2 \left(1 + |s|^{\frac{3}{2}} \right), \quad \forall x \in \Omega \text{ e } \forall s \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

pois se $|s| \leq 1$, então

$$C_1 \left(|s| + |s|^{\frac{3}{2}} \right) \leq C_1 \left(1 + |s|^{\frac{3}{2}} \right),$$

e se $|s| \geq 1$, então

$$C_1 \left(|s| + |s|^{\frac{3}{2}} \right) \leq C_1 \left(|s|^{\frac{3}{2}} + |s|^{\frac{3}{2}} \right) \leq 2C_1 \left(1 + |s|^{\frac{3}{2}} \right).$$

Assim,

$$|s \cdot f(x, s)| \leq 2C_1 \left(1 + |s|^{\frac{3}{2}} \right) = C_2 \left(1 + |s|^{\frac{3}{2}} \right),$$

onde $C_2 = 2C_1$.

Afirmação 3.5.2. *A aplicação F é compacta.*

Pela Definição 1.0.2, queremos mostrar que F leva toda sequência limitada (x_n) de $H_0^1(\Omega)$ numa sequência $(F(x_n))$ que possui uma subsequência convergente. De fato, seja

$$(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$$

uma subsequência limitada. Daí, como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert o que implica que é reflexivo e, portanto, (v_n) convergente na topologia fraca. Logo, a menos de subsequência

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em } H_0^1(\Omega).$$

Assim, pela imersão compacta

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega),$$

para $1 \leq t < 2^*$, temos que

$$v_n \rightarrow v \quad \text{em } L^t(\Omega).$$

Sejam

$$u_n = F(v_n) \iff \begin{cases} -\Delta u_n = f(x, v_n), & \text{em } \Omega; \\ u_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

e

$$u = F(v) \iff \begin{cases} -\Delta u = f(x, v), & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que como u_n, u são soluções dos problemas acima e, portanto, temos que

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 &\leq \int_{\Omega} |f(x, v_n) - f(x, v)| |u_n - u| \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f(x, v_n) - f(x, v)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u_n - u\|_{L^2} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f(x, v_n) - f(x, v)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} K \|u_n - u\| \end{aligned}$$

onde $\|u\|^2 = \|\nabla u\|_2^2$ e na última desigualdade estamos utilizando a desigualdade de Poincaré, na qual K é uma constante positiva. Além disso, fazendo um raciocínio análogo ao que já fizemos antes e utilizando o fato de que (v_n) está em L^1 pela imersão contínua, temos que ela é limitada e, portanto,

$$\int_{\Omega} |f(x, v_n)|^2 \leq 2C_1|\Omega| + 2C_1 \int_{\Omega} |v_n| \leq C$$

e, analogamente,

$$|f(x, v) - f(x, v_n)|^2 \leq 4C_1 + 2C_1|v_n| + 2C_1|v|.$$

Desde que $v_n \rightarrow v$ em $L^1(\Omega)$, então existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que a menos de subsequência, temos

$$|v_n| \leq g, \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e

$$v_n \rightarrow v, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto, como $f(x, s)$ é contínua, obtemos

$$|f(x, v) - f(x, v_n)|^2 \rightarrow 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e

$$|f(x, v) - f(x, v_n)|^2 \leq 4C_1 + 2C_1g + 2C_1|v| \in L^1(\Omega).$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{\Omega} |f(x, v) - f(x, v_n)|^2 \rightarrow 0,$$

o que resulta em

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad F(v_n) \rightarrow F(v), \quad \text{em } H_0^1(\Omega)$$

ou seja, F é compacta.

Afirmção 3.5.3. *A aplicação F é contínua*

Basta observar toda aplicação Compacta é Contínua.

Afirmção 3.5.4. *Existe $R > 0$ tal que*

$$u \neq tF(u)$$

para todo $t \in [0, 1]$ e $\|u\| = R$.

Vamos argumentar a demonstração da Afirmção 3.5.4 por contradição. Para isso, suponhamos que para todo $R > 0$, existe $t_R \in [0, 1]$ e $u_R \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u_R\| = 1$ tal que

$$u_R = t_R F(u_R).$$

Veja que $t_R \neq 0$ e

$$u_R = t_R F(u_R) \iff \begin{cases} -\Delta u_R = t_R f(x, u_R) & , \quad \text{em } \Omega; \\ u_R = 0 & , \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} R^2 = \|u_R\|^2 &= \int_{\Omega} \nabla u_R \nabla u_R \\ &= t_R \int_{\Omega} f(x, u_R) u_R \\ &\stackrel{(3.5)}{\leq} C_2 |\Omega| + C_2 \int_{\Omega} |u_R|^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Daí, da imersão contínua

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$$

e da última desigualdade, temos que

$$R^2 \leq C_2|\Omega| + C_3\|u_R\|^{\frac{3}{2}} = C_2|\Omega| + C_3R^{\frac{3}{2}}$$

e fazendo $R \rightarrow \infty$, obtemos uma contradição e a afirmação 3.5.4 está provada.

Feito esses passos, agora concluiremos a demonstração do Teorema 3.5.1 usando a Teoria do Grau Topológico de Leray e Schauder. De fato, pelo $R > 0$ da Afirmação 3.5.4, definamos $G : [0, 1] \times \overline{B(0, R)} \rightarrow H_0^1(\Omega)$ tal que

$$G(t, u) = tF(u)$$

em que $\overline{B(0, R)} = \{u \in H_0^1(\Omega); \|u\| \leq R\}$. Primeiro, observe que, para todo $t \in [0, 1]$, $G(t, \cdot)$ é uma aplicação compacta pela afirmação 3.5.3. Não é difícil constatar que a aplicação

$$t \mapsto G(t, \cdot)$$

é contínua de $[0, 1]$ em $Q(\overline{B(0, R)}, H_0^1(\Omega))$. Portanto, $G \in Q([0, 1] \times \overline{B(0, R)}, H_0^1(\Omega))$. Ademais, a Afirmação 3.5.4 fornece que

$$u - G(t, u) = u - tF(u) \neq 0, \quad \forall t \in [0, 1] \text{ e } \|u\| = R.$$

Portanto,

$$H(t, u) = u - G(t, u)$$

é uma homotopia compacta. Assim,

$$d(H(t, \cdot), B(0, R), 0) = C \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [0, 1]$$

e, portanto, para $t = 0$ e $t = 1$, temos que

$$d(I_d - F, B(0, R), 0) = d(I_d, B(0, R), 0) = 1 \neq 0.$$

Logo, existe $u \in B(0, R)$ tal que $u = F(u)$, ou seja, u é solução fraca de (P) . ■

Observação 3.5.1. Observe que é possível provar o Teorema 3.5.1 sem utilizar a Afirmação 3.5.4, pois, por exemplo, poderíamos concluí-lo também utilizando o

Teorema do Ponto fixo de Schaeffer (Corolário 3.4.2). Para isso, basta verificarmos no lugar da Afirmação 3.5.4 que existe um $r > 0$ tal que se $u = tF(u)$, com $t \in [0, 1]$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\|u\| < r$.

De fato, como

$$u = tF(u) \iff \begin{cases} -\Delta u = tf(x, u), & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, isso implica que

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= t \int_{\Omega} f(x, u)u \\ &\stackrel{(3.5)}{\leq} C_2|\Omega| + C_4\|u\|^{\theta+1} \end{aligned}$$

Daí, como $\theta \in [0, 1)$, temos que $\theta + 1 < 2$ e, portanto, existe $r > 0$ tal que $\|u\| < r$. Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer (Corolário 3.4.2), temos que F possui um ponto fixo, ou seja, o problema (P) tem pelo menos uma solução fraca.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Adams, R. A., **Sobolev Spaces**, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Bartle, R., **The elements of integration and Lebesgue measure**. New York: Jonh Willeys & Songs Inc, 1995. 179 p.
- [3] Berestycki, H., **Methodes Topologiques et Problemes Aux limites non lineares** (Tese de Doutorado de Berestycki), Soutenue, These de Docteur, França, 1975.
- [4] Botelho, G. M. A.; Pellegrino, D. M.; Teixeira, E. V. **Fundamentos de Análise Funcional**. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 411 p.
- [5] Brezis, H., **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2010. 599 p.
- [6] Claud, W. G. D. J. et al. **O Grau Topológico de Brouwer**, Departamento de Matemática UNB, Trabalhos de Graduação em Matemática nº 1/97.
- [7] Deimling, K., **Nonlinear functional analysis**, Springer, Berlin, 1985.
- [8] Dugundji, J., **An extension of Tietze's theorem**, Pacific Journal of Mathematics, Pacific J. Math. 1(3), 353-367, 1951.
- [9] Silva, C.; Impellizieri, F., **Teoria do grau e aplicações**. junho de 2012. 20 p. Notas de Aula.

- [10] Kreyszig, E., **Introductory Functional Analysis with Applications**, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1989.
- [11] Lieb, E. H.; Loss, M. **Analysis**. 2.ed. Providence: American Mathematical Society, 2001. 346 p.
- [12] Lima, E. L. **Espaços Métricos**. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 299 p.
- [13] Lima, E. L., **Análise Real** Vol. 2 Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2004;
- [14] Lima, E. L., **Curso de Análise** Vol. 1 (10^a Edição), Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.
- [15] Saxe, K. **Beginning Functional Analysis**. New York: Springer, 2002. 197 p.