



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

IVANILSON DA SILVA LIMA

**POTENCIAIS GRAVITACIONAIS MODIFICADOS NO MODELO DE BRANAS: O
DECAIMENTO ALFA NUM CENÁRIO DE DIMENSÕES EXTRAS**

JOÃO PESSOA, PB - BRASIL

Dezembro de 2022

IVANILSON DA SILVA LIMA

POTENCIAIS GRAVITACIONAIS MODIFICADOS NO MODELO DE BRANAS: O
DECAIMENTO ALFA NUM CENÁRIO DE DIMENSÕES EXTRAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado
como componente curricular obrigatório para
obtenção do título de Bacharel em Física pela
Universidade Federal da Paraíba.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia

JOÃO PESSOA, PB - BRASIL

Dezembro de 2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

L732p Lima, Ivanilson da Silva.

Potenciais gravitacionais modificados no modelo de branas : o decaimento alfa num cenário de dimensões extras / Ivanilson da Silva Lima. - João Pessoa, 2022. 57 p. : il.

Orientação: Fábio Leal de Melo Dahia.

TCC (Curso de Bacharelado em Física) - UFPB/CCEN.

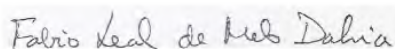
1. Potencial gravitacional modificado. 2. Teoria de dimensões extras. 3. Decaimento alfa. I. Dahia, Fábio Leal de Melo. II. Título.

UFPB/CCEN

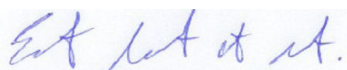
CDU 53(043.2)

Ata da Sessão Pública da Defesa do
Trabalho de Conclusão de Curso de
Bacharelado em Física, do discente
Ivanilson da Silva Lima.

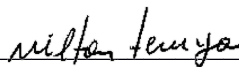
Ao primeiro dia do mês de dezembro do ano de 2022, às 14h, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída pelos docentes Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, o Prof. Dr. Edmundo Marinho do Monte (UFPB), e o Prof. Dr. Nilton Teruya (UFPB), para avaliar o discente Ivanilson da Silva Lima. Dando início aos trabalhos, o professor orientador e presidente da banca examinadora comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, concedeu a palavra ao discente Ivanilson da Silva Lima para que fizesse a explanação, oralmente, de seu Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado “*Potenciais Gravitacionais Modificados no Modelo De Branas: O Decaimento Alfa num Cenário de Dimensões Extras*”. Concluída a exposição, o discente foi arguido pela Banca Examinadora. Após as arguições, a banca examinadora, de comum acordo, declarou que a monografia apresentada foi aprovada com nota *10,0(dez)*. Assim sendo, encerrada a reunião, eu, Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, lavrei esta ata, que vai assinada pelos demais examinadores, pelo discente e por mim que a subscrevi. João Pessoa, 01 de dezembro de 2022.



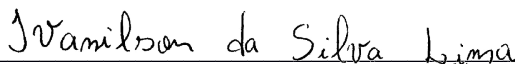
Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
UFPB – Orientador



Prof. Dr. Edmundo M. Monte
UFPB



Prof. Dr. Nilton Teruya
UFPB



Ivanilson da Silva Lima
Discente

AGRADECIMENTOS

Agradeço acima de tudo à Deus por essa conquista. Sei que sem Ele traçando meus caminhos eu nada teria conseguido.

Agradeço à Universidade Federal da Paraíba, em especial ao centro de ciências exatas e da natureza, por fornecer um ambiente adequado de aprendizagem e ensino, sem o qual não seria possível eu obter uma educação de qualidade necessária para produzir este trabalho.

Agradeço em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia, por sua disponibilidade, atenção, acompanhamento e todo tipo de ajuda. Por sua admirável paciência, a qual teve um papel fundamental no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, Ivan e Maria, que sempre me deram apoio e incentivo, assim como meu irmão, Ivisson, e membros da família que sempre me apoiaram.

Agradeço eternamente à minha tia Antônia (in memoriam), que sempre me apoiou e me incentivou nos estudos, embora fisicamente ausente, sentia sua presença ao meu lado, dando-me força.

Aos colegas da universidade pelos momentos de amizade e apoio, em especial Gessiane Cipriano, João Artur, Fernando Antônio e Kaio Felipe.

Por fim, agradeço ao apoio financeiro oferecido pela Universidade Federal da Paraíba através do programa de bolsas PIBIC-CNPq, vigência 2021/2022.

*“Todos devemos dar o nosso melhor, seja qual for
a situação. Nunca desistir.”*

(Stephen Hawking)

RESUMO

No presente trabalho, fizemos uma introdução às teorias de dimensões extras de grande escala, as quais preveem modificações para a interação gravitacional. Em seguida, fizemos uma revisão da teoria do decaimento alfa de Gamow e a aplicamos à um cenário com dimensões extras, onde investigamos a influência de um potencial gravitacional modificado por uma lei de potência sobre a taxa de decaimento dos núcleos radioativos. A partir deste modelo, utilizando dados do decaimento alfa do Urânio, conseguimos estabelecer vínculos experimentais independentes para os parâmetros do modelo de dimensões extras, empregando a técnica de ajuste dos mínimos quadrados. Em nossa análise, consideramos casos com até dez dimensões extras e impomos vínculos para o comprimento de Planck em dimensões extras, l_D , para cada um desses cenários.

Palavras-chave: Potencial gravitacional modificado; Teoria de dimensões extras; Decaimento alfa.

ABSTRACT

In the present work, we introduced the theories of extra-large-scale dimensions, which predict modifications to the gravitational interaction. Then, we reviewed the Gamow alpha decay theory and applied it to a scenario with extra dimensions, where we investigated the influence of a gravitational potential modified by a power law on the decay rate of radioactive nuclei. From this model, using data from the alpha decay of Uranium, we were able to establish independent experimental constraints for the parameters of the extra-dimensional model, using the least squares fit technique. In our analysis, we consider cases up to ten extra dimensions and impose constraints on the Planck length in extra dimensions, l_D , for each of these scenarios.

Keywords: Modified gravitational potential; Theory of extra dimensions; Alpha decay.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Espalhamento de uma barreira retangular com uma ondulação em cima . . .	25
Figura 2 – Estrutura qualitativa da função de onda para o espalhamento de uma barreira alta e ampla	26
Figura 3 – Modelo de Gamow para a energia potencial de uma partícula alfa em um núcleo radioativo	28
Figura 4 – Região de ajuste no cenário com uma dimensão extra	41
Figura 5 – Região de ajuste no cenário com duas dimensões extras	42
Figura 6 – Região de ajuste no cenário com três dimensões extras	42
Figura 7 – Região de ajuste no cenário com quatro dimensões extras	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Ajuste pelo método dos mínimos quadrados para o modelo usual de Gamow	39
Tabela 2	– Ajuste pelo método dos mínimos quadrados para o modelo com δ dimensões extras	39
Tabela 3	– Raio de compactação das dimensões extras	44
Tabela 4	– Dados do decaimento alfa do Urânio	58

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	O Potencial Gravitacional em Diferentes Cenários	17
2.1.1	<i>Potencial gravitacional clássico</i>	17
2.1.2	<i>Potencial gravitacional (n+1)-dimensional</i>	18
2.1.3	<i>Potencial gravitacional em um Universo com dimensões extras compactas</i>	20
2.2	O Decaimento Alfa	22
2.2.1	<i>Aproximação WKB</i>	22
2.2.2	<i>Aplicação do método WKB à equação de Schrödinger</i>	23
2.2.3	<i>Tunelamento quântico</i>	25
2.2.4	<i>Teoria de Gamow do decaimento alfa</i>	27
2.2.5	<i>Dissipação de energia no decaimento alfa</i>	30
2.3	O Decaimento Alfa num Cenário de Dimensões Extras	30
2.3.1	<i>Teoria de Gamow em dimensões extras</i>	31
3	RESULTADOS	32
3.1	Novo Ponto de Retorno da Partícula Alfa	32
3.2	O Fator Gama Modificado	33
3.3	Análise de $\delta\gamma$ para Alguns Cenários com Dimensões Extras	35
3.4	Análise de $\delta\gamma$ Mantendo os Termos de Ordem r_1/r_2	36
3.5	Ajuste pelo Método dos Mínimos Quadrados	37
3.6	Região de Ajuste para os Parâmetros r_0 e l_D	40
3.7	Raio de Compactação das Dimensões extras	43
4	CONCLUSÃO	45
	REFERÊNCIAS	46
5	APÊNDICE A-VOLUME DE UMA (n-1)-ESFERA DE RAIO r	49
6	APÊNDICE B-CORREÇÕES DO POTENCIAL DEVIDO ÀS DIMENSÕES EXTRAS	51
7	APÊNDICE C-FÓRMULA DO SOMATÓRIO DE POISSON	54
8	APÊNDICE D-INTEGRAL DE UM VOLUME INFINITESIMAL δ -DIMENSIONAL EM COORDENADAS ESFÉRICAS	55

9	APÊNDICE E-DECAIMENTOS RADIOATIVOS: TEMPO DE VIDA E TEMPO DE MEIA VIDA	57
10	APÊNDICE F-DADOS EXPERIMENTAIS DO URÂNIO	58

1 INTRODUÇÃO

Teorias de Unificação e o Surgimento das Teorias de Dimensões Extras

A mecânica clássica, que dominou a física durante mais de 200 anos, às vezes é chamada de mecânica Newtoniana, em homenagem às três leis de movimento formuladas pelo físico inglês Sir Isaac Newton nos anos 1660, publicadas pela primeira vez em seu livro "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*"[1]. Dentre as suas maiores contribuições à ciência moderna, podemos afirmar que a Lei da Gravitação Universal de Newton revolucionou a forma como os cientistas compreendiam os fenômenos da natureza. A lei da gravidade, publicada em 1687, foi a primeira força a ser descrita matematicamente[2, 3]. Esta estabelece que toda partícula no universo que possui massa atrai todas as outras partículas com uma força que é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre seus centros. Ao formular a lei, Newton demonstrou pela primeira vez que todos os fenômenos no universo podem ser governados pelas mesmas leis, e estas são leis que podem ser modeladas[4].

As leis de movimento e gravitação de Newton se aplicam igualmente a todos os objetos na Terra e aos corpos celestes. A publicação da teoria ficou conhecida como a "primeira grande unificação", pois marcou a unificação dos fenômenos de gravidade descritos anteriormente na Terra com os comportamentos astronômicos conhecidos na época. Um exemplo disto foi o fato da lei da gravitação mostrar que as órbitas elípticas dos planetas, descoberta feita pelo matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler no ano de 1605[5, 6], poderiam ser totalmente explicadas pelas próprias leis de movimento de Newton e uma força gravitacional universal.

Vamos agora avançar na história para o começo do século XIX, época em que a teoria eletromagnética estava em sua fase inicial. Nessa época, o valor da velocidade da luz c era conhecido pelas experiências com observações astronômicas dos satélites de Júpiter e por medições terrestres feitas pelo físico francês Hippolyte Fizeau usando uma roda dentada em rotação rápida e um espelho, bem como as observações feitas pelo físico e astrônomo francês Jean Bernard Léon Foucault com um espelho girante e outro fixo. O valor da permissividade elétrica no vácuo ϵ_0 e da permeabilidade magnética no vácuo μ_0 também já eram conhecidos, sendo determinados por experiências puramente eletromagnéticas de Kohlrausch e Weber[7, 8].

Nesse mesmo período, dois sistemas diferentes de unidades de carga elétrica eram usados, sendo um para problemas de eletrostática e outro para fenômenos magnéticos envolvendo

correntes. Nesses sistemas de medidas, a carga elétrica possui unidades distintas e a razão entre elas tem dimensão de velocidade. As medidas mostraram que essa razão possuía um valor numérico precisamente igual ao valor da velocidade da luz. Naquela época, os físicos observaram que isso era uma extraordinária coincidência e não tinham como explicá-la utilizando as leis conhecidas até aquele momento[8].

Em meio a essa importante discussão entre teoria e experimento, no século XIX, a física presenciou o surgimento do que é hoje conhecido pela comunidade científica como a "segunda grande unificação". No ano de 1865, o cientista e matemático escocês James Clerk Maxwell publicou o artigo "*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*", onde ele apresenta a forma final das equações conhecidas hoje como equações de Maxwell[9]. As equações de Maxwell unificaram com sucesso a óptica e o eletromagnetismo ao mostrar que os fenômenos ópticos e eletromagnéticos são de mesma natureza e hoje é considerado um dos grandes triunfos da física[7]. Maxwell foi o primeiro pesquisador a entender verdadeiramente a natureza fundamental da luz. Suas descobertas foram de tamanha importância para o campo da ciência que Einstein descreveu seu trabalho como 'a mais profunda e mais frutífera contribuição que a física recebeu desde os tempos de Newton'.

Avançando alguns anos no tempo, chegamos ao começo do século XX, período marcado pelas incríveis descobertas feitas pelo físico teórico alemão Albert Einstein. A teoria geral da relatividade (RG) de Einstein, apresentada pela primeira vez em novembro de 1915 no artigo "*Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie und Anwendung dieser Theorie in der Astronomie*", foi além do que as leis conhecidas até aquele momento conseguiam explicar, trazendo juntos tempo, espaço e matéria, e usando a gravidade para explicar o efeito de um sobre o outro[10, 4]. A matéria curva o espaço-tempo, como uma bola atirada sobre uma manta esticada causa uma deformação nesta. A forma como outros objetos e a luz se movem em resposta a essa deformação do espaço-tempo chamamos de gravidade. Desse modo, assim como uma bola pequena rolará naturalmente para a área afundada da manta criada por uma bola grande, um pequeno corpo em um espaço gravitará naturalmente para um maior, restrito pela curvatura do espaço-tempo. Essa curvatura estudada por Einstein foi proposta muito antes pelo matemático alemão Bernhard Reimann, cujas ideias foram publicadas depois de sua morte em 1867-1868. Contudo, Einstein foi muito além de Reimann em suas descobertas, pois conseguiu elaborar equações para explicar e prever a curvatura.

Após apresentar a forma final da teoria da relatividade geral, Einstein dedicou a

segunda metade de sua vida ao seu programa de teorias do campo unificado, vislumbrando construir uma teoria robusta capaz de não só combinar a sua teoria de campo gravitacional com as equações de Maxwell, mas também esclarecer o mistério quântico. Contudo, sua tentativa de unificar as interações gravitacional e eletromagnética não teve tanto êxito como ele sonhava. De toda forma, o programa de unificação proposto por Einstein permanece relevante mesmo para pesquisas atuais em física. Um exemplo brilhante disso é a teoria de Kaluza-Klein (teoria KK), considerada um importante precursor da teoria das cordas.

A teoria de Kaluza-Klein é uma teoria clássica de campo unificado de gravitação e eletromagnetismo construída em torno da ideia de um espaço-tempo com uma dimensão espacial extra. Na época em que foi criada, as duas interações fundamentais conhecidas eram a interação gravitacional e a eletromagnética. Foi apresentada pela primeira vez no artigo "*Zum Unitätsproblem in der Physik*", publicado pelo matemático e físico alemão Theodor Kaluza em 1921[11]. No artigo, Kaluza propõe a unificação entre a teoria do eletromagnetismo de Maxwell e a Relatividade Geral de Einstein levando em consideração um espaço-tempo de cinco dimensões, onde Kaluza assumiu que a dimensão extra seria uma dimensão espacial. Posteriormente, em 1926, o físico sueco Oskar Klein forneceu uma justificativa para explicar a razão pela qual esta dimensão extra é invisível na nossa escala de comprimento, dando à teoria clássica de cinco dimensões de Kaluza uma interpretação quântica, de acordo com as recentes descobertas feitas na época por Heisenberg e Schrödinger[12, 13, 14].

Desde então mais duas interações fundamentais foram descobertas, as interações fraca e forte. A interação fraca é o mecanismo de interação entre partículas subatômicas que é responsável por certos tipos de decaimento radioativo de átomos. O seu alcance efetivo está limitado às distâncias subatômicas[15]. A interação forte, por outro lado, é responsável por unir os prótons e nêutrons para formar os núcleos atômicos. O seu raio de ação é o mais curto em comparação com outras interações fundamentais, sendo aproximadamente da ordem de 10^{-15} metros.

Após as descobertas destas interações, novas teorias propondo uma unificação de todas as interações fundamentais surgiram, e a grande maioria destas teorias exigem a existência de dimensões extras. À título de exemplo, podemos citar a teoria de cordas[16, 17]. Mais recentemente, o tema de dimensões extras ganhou um novo impulso com o surgimento das teorias de branas[18, 19, 20, 21]. Segundo o modelo de branas, o espaço tridimensional que percebemos na nossa escala (chamado de 3-brana) é considerado como uma subvariedade que

estaria imersa em um Universo dimensionalmente superior, denominado espaço ambiente. Por sua vez, a subvariedade contém a matéria e os campos 4-dimensionais usuais em um estado de confinamento. A matéria estaria presa na brana, mas o campo gravitacional poderia se espalhar por todas as dimensões. O espaço suplementar, constituído pelas dimensões adicionais, seria compacto e teria um raio característico com um certo comprimento R . Essa hipótese resulta em uma consequência importante, pois a teoria prevê que, devido a existência das dimensões extras, a força gravitacional seria amplificada numa escala de comprimento muito menor que R , o que poderia apresentar desvios da lei do inverso do quadrado da distância para a gravitação[22, 23]. Dependendo dos aspectos do modelo utilizado, essa escala poderia ser até de ordem sub-milimétrica sem apresentar inconsistências com dados observacionais.

O Processo de Decaimento Alfa

Átomos radioativos que se encontram instáveis a nível nuclear buscam estabilidade. Para atingir um estado estável, esses átomos acabam por emitir partículas e/ou ondas eletromagnéticas em um processo conhecido como reações de decaimento. Quando ocorre naturalmente, as radiações emitidas podem ser: alfa, beta e gama.

Núcleos pesados podem sofrer decaimento alfa. Um exemplo é a reação $U^{238} \rightarrow Th^{234} + \alpha$, em que o Urânio 238 decai no isótopo 234 do Tório e emite uma partícula alfa (núcleo de Hélio). No modelo de decaimento alfa proposto por Gamow[24], o núcleo-pai (o Urânio, no exemplo mencionado) é interpretado como um estado ligado entre o núcleo-filho (Th) e a partícula alfa. A energia cinética da partícula emitida, E , que é constituída por dois prótons e dois nêutrons, depende da diferença entre a massa de repouso inicial e final da reação. No interior do núcleo, a partícula alfa é submetida à uma interação nuclear atrativa (descrita por um poço quadrado de potencial, como utilizado por Gamow). Na região exterior ao núcleo, por outro lado, a partícula estará submetida à uma interação elétrica Coulombiana repulsiva.

A energia E da partícula alfa é menor do que a altura do poço, o que, de acordo com as leis da mecânica clássica, a impediria de aparecer na região externa ao núcleo. Contudo, devido ao processo de tunelamento quântico, há uma probabilidade de que a partícula alfa seja emitida. O tempo de vida do núcleo-pai depende dessa amplitude de transmissão, que pode ser estimada usando-se a aproximação WKB[25, 26].

O presente trabalho tem como objetivo principal procurar por traços da existência de dimensões extras num domínio nuclear, investigando as possíveis mudanças no decaimento

alfa de núcleos radioativos provocadas pela existência de tais dimensões. A análise será feita a partir de uma pequena mudança na teoria de Gamow do decaimento alfa[24, 25, 26], onde introduziremos uma pequena modificação na energia potencial da partícula alfa que é prevista pela teoria de branas devido a um aumento do potencial gravitacional num espaço com dimensões adicionais. Segundo o modelo de branas, o espaço suplementar, constituído pelas dimensões adicionais, seria compacto e teria um raio característico com um certo comprimento R . Neste cenário, a interação gravitacional é amplificada para curtas distancias ($r \ll R$) e o potencial gravitacional modificado será dado por uma lei de potência proporcional à $1/r^{1+\delta}$, onde δ é o número de dimensões extras[23, 27].

Desse modo, no cenário de dimensões extras, além da interação Coulombiana (a única considerada no modelo usual), uma outra interação deve ser levada em conta durante o processo de decaimento: a interação gravitacional entre a partícula alfa e o núcleo. A partir disto, pretendemos determinar os efeitos desse termo adicional sobre a taxa de decaimento dos núcleos e confrontar as previsões teóricas do modelo com os dados experimentais disponíveis. Com isso, poderemos estabelecer vínculos independentes sobre os parâmetros dos modelos de dimensões extras.

Dividimos o conteúdo deste trabalho em 4 capítulos. No capítulo I, Introdução, foi apresentado o contexto histórico sobre as principais unificações que aconteceram na física e de que forma isso desencadeou o surgimento das teorias de dimensões extras. Foram também traçados os objetivos do presente trabalho, dentro desse contexto. No capítulo II, Fundamentação Teórica, tratamos de uma revisão sobre os fundamentos das teorias de dimensões extras de grande escala, em especial o modelo ADD. Além disso, fizemos também uma revisão sobre a teoria do decaimento alfa de Gamow e estendemos essa teoria à um cenário com dimensões extras. No capítulo III, Resultados, apresentamos os possíveis efeitos provocados pela existência de dimensões extras sobre o processo de decaimento alfa e, a partir de um ajuste usando dados experimentais do Urânio, conseguimos impor vínculos experimentais para os parâmetros do modelo utilizado. Finalmente, no capítulo IV, Conclusão, fazemos uma breve recapitulação de todo o conteúdo apresentado ao longo do trabalho e argumentamos como os vínculos obtidos para os parâmetros do modelo utilizado são relevantes. Apresentamos também uma perspectiva para futuras pesquisas na área.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 O Potencial Gravitacional em Diferentes Cenários

2.1.1 Potencial gravitacional clássico

Vamos começar determinando o potencial gravitacional Newtoniano e, em seguida, iremos estender esse cálculo para um caso geral de n dimensões espaciais. Usualmente, em $(3+1)$ dimensões¹, o campo gravitacional $\mathbf{g}$ satisfaz a lei de Gauss para a gravidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho , \quad (2.1)$$

onde ρ é a densidade de massa da matéria (massa por unidade de 3-volume).

Utilizaremos essa equação para determinar o campo gravitacional de um corpo de massa m com simetria esférica[15]. Para isto, considere uma 2-esfera $S^2(r)$ de raio r centrada em torno de uma 3-bola $B^3(r)$, envolvendo um corpo massivo, também de raio r . Podemos definir S^2 e B^3 de maneira simples da seguinte forma:

$$S^2(r) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 , \quad (2.2)$$

e

$$B^3(r) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2 . \quad (2.3)$$

Pelo teorema da divergência, temos

$$\int_{B^3} (\nabla \cdot \mathbf{g}) d^3\mathbf{V} = \oint_{S^2} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{a} . \quad (2.4)$$

Utilizando a simetria esférica, o lado direito da equação acima nos fornece

$$\oint_{S^2} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{a} = g_r \text{Vol}(S^2(r)) = g_r 4\pi r^2 , \quad (2.5)$$

onde g_r é a componente radial de $\mathbf{g}$ e $\text{Vol}(S^2(r)) = 4\pi r^2$ é a área da esfera. Por outro lado, a integral da densidade de matéria sobre todo o volume da 3-bola nos fornece a massa total do corpo

$$\int_{B^3} (\nabla \cdot \mathbf{g}) d^3V = -4\pi Gm . \quad (2.6)$$

¹ Esta notação é muito utilizada na literatura e significa que temos 3 dimensões espaciais e uma dimensão temporal.

Portanto, para (3+1) dimensões, o campo gravitacional é dado por:

$$g_r = g(r) = -\frac{Gm}{r^2} \implies \mathbf{g}(r) = -\frac{Gm}{r^2} \hat{r}. \quad (2.7)$$

A partir de $\mathbf{g}$, podemos determinar o potencial. Usando o fato de que $\mathbf{g}$ é um campo conservativo, podemos escrevê-lo em termos do gradiente de um campo escalar, que, neste caso, será o potencial gravitacional. Então,

$$\mathbf{g} = -\nabla\phi. \quad (2.8)$$

Expressando o gradiente em coordenadas esféricas, a partir da Eq.2.8, é possível determinarmos o campo escalar:

$$\phi(r) = -\frac{Gm}{r}, \quad (2.9)$$

que é a expressão conhecida para o potencial gravitacional Newtoniano de um corpo de massa m em um espaço-tempo 4-dimensional.

2.1.2 Potencial gravitacional $(n+1)$ -dimensional

Agora, vamos utilizar o método da seção anterior para calcular o potencial gravitacional gerado por um corpo de massa m em um espaço com n dimensões espaciais.² Então, consideremos novamente um corpo de massa m e uma $(n-1)$ -esfera $S^{n-1}(r)$ de raio r centrada no corpo de massa m , onde $S^{n-1}(r)$ é o contorno de uma n -bola $B^n(r)$. Analogamente ao que foi feito anteriormente, podemos definir S^{n-1} e B^n de forma simples do seguinte modo:

$$S^{n-1}(r) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2, \quad (2.10)$$

e

$$B^n(r) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2. \quad (2.11)$$

Para este cenário, a lei de Gauss para a gravidade nos diz que

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G_{n+1} \rho_n, \quad (2.12)$$

onde G_{n+1} é a constante gravitacional $(n+1)$ -dimensional e ρ_n é densidade de massa da matéria (massa por unidade de n -volume)[16].

² É importante esclarecermos desde já que as dimensões tratadas durante esta análise serão não-compactas (espaços com topologia dos Reais).

Integrando ambos os lados da Eq.2.12 sobre a bola B^n , obtemos

$$\int_{B^n} (\nabla \cdot \mathbf{g}) d^n V = -4\pi G_{n+1} \int_{B^n} \rho_n d^n V, \quad (2.13)$$

onde temos que a integral de ρ_n sobre todo o volume de B^n é a massa total do corpo. Assim como anteriormente, o teorema da divergência nos diz que

$$\int_{B^n} (\nabla \cdot \mathbf{g}) d^n V = \oint_{S^{n-1}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{a} = \Phi_m, \quad (2.14)$$

sendo Φ_m o fluxo de $\mathbf{g}$ através de S^{n-1} [15]. A integral do lado direito na Eq.2.14 nos fornece o resultado:

$$\oint_{S^{n-1}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{a} = g(r) \text{Vol}(S^{n-1}(r)), \quad (2.15)$$

onde $\text{Vol}(S^{n-1}(r))$ é o volume da $(n-1)$ -esfera. Usando a expressão para $\text{Vol}(S^{n-1}(r))$ do Apêndice A (Eq.5.13):

$$\text{Vol}(S^{n-1}(r)) = \frac{2\pi^{n/2} r^{n-1}}{\Gamma(n/2)}, \quad (2.16)$$

temos

$$\Phi_m = -4\pi G_{n+1} m \quad e \quad \Phi_m = g(r) \text{Vol}(S^{n-1}(r)). \quad (2.17)$$

Com isso, chegamos ao seguinte resultado para o campo gravitacional:

$$\mathbf{g}(r) = g(r) \hat{r} = -\frac{2\Gamma(n/2) G_{n+1} m}{\pi^{\frac{n}{2}-1} r^{n-1}} \hat{r}. \quad (2.18)$$

Agora, vamos obter o potencial a partir deste resultado. O teorema fundamental para gradientes nos diz que a integral de linha do gradiente de uma função escalar³ T será [28]

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla T) \cdot d\mathbf{l} = T(\mathbf{b}) - T(\mathbf{a}). \quad (2.19)$$

Usando a relação $\mathbf{g}(r) = -\nabla\phi$, teremos

$$-\int_{\infty}^r (\nabla\phi) \cdot d\mathbf{l} = -[\phi(r) - \phi(\infty)] = -\phi(r). \quad (2.20)$$

Utilizando a expressão obtida anteriormente para $\mathbf{g}$, obtemos

$$\phi(r) = -\frac{2\Gamma(n/2) G_{n+1} m}{(n-2)\pi^{\frac{n}{2}-1} r^{n-2}}. \quad (2.21)$$

Este é o potencial gravitacional para longas distâncias gerado por uma massa m imersa em um espaço de $(n+1)$ dimensões não-compactas [15].

³ Calculada sobre uma curva C .

2.1.3 Potencial gravitacional em um Universo com dimensões extras compactas

Vamos determinar uma expressão exata para o potencial gravitacional produzido por uma massa m em um Universo com dimensões extras compactas. Para isto, utilizaremos o método das massas imagens (ou massas topológicas), o qual nos permitirá obter o potencial gravitacional total gerado por cada uma das massas imagens do sistema no espaço de cobertura [16, 17]. Neste caso, vamos considerar que as dimensões extras são compactas com topologia circular e raio R .

No modelo de branas, o potencial gravitacional produzido por uma partícula de massa m em um espaço com δ dimensões extras não-compactas, $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^\delta$, segue uma lei de potência:

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{G_D m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{1+\delta}}, \quad (2.22)$$

onde G_D é a constante gravitacional para este cenário e $\mathbf{r}'$ é o vetor que localiza a massa m .

Para um espaço suplementar com δ dimensões adicionais compactas, $\mathbb{R}^3 \times (S^1 \times \dots \times S^1)$, a localização de um ponto qualquer nesse espaço é determinada a partir de suas coordenadas $(x, y, z, w_1, \dots, w_\delta)$. Então, neste caso, teremos que considerar os parâmetros extras $(w_1, w_2, \dots, w_\delta)$ para determinar a posição da massa m no espaço suplementar. A 3-brana corresponderia ao espaço em que $w_i = 0$, $i = 1, \dots, \delta$. Suponhamos que a massa m esteja na origem. Então, o seu vetor posição será dado por:

$$\mathbf{r}' = (0, 0, 0, 0, \dots, 0). \quad (2.23)$$

O efeito da topologia compacta S^1 sobre o potencial pode ser simulado por meio de um conjunto de massas imagens que se encontram espalhadas no espaço suplementar $\mathbb{R}^\delta$. Essas imagens devem estar separadas entre si por um múltiplo inteiro do comprimento da dimensão extra ($2\pi R$), ou seja, para cada massa imagem, a sua posição será dada por:

$$\mathbf{r}'_{p_1, \dots, p_\delta} = (0, 0, 0, 2\pi R p_1, \dots, 2\pi R p_\delta), \quad (2.24)$$

onde cada p_i é um número inteiro. A massa imagem $(p_1, \dots, p_\delta)$ produz um potencial gravitacional da forma

$$\phi_{p_1, \dots, p_\delta}(\mathbf{r}) = -\frac{G_D m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{p_1, \dots, p_\delta}|^{1+\delta}}. \quad (2.25)$$

No espaço ambiente, o vetor posição de um ponto qualquer é dado por

$$\mathbf{r} = (x, y, z, w_1, \dots, w_\delta). \quad (2.26)$$

Com isso, podemos calcular a norma do vetor $\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{p_1, \dots, p_\delta}$:

$$\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}'_{p_1, \dots, p_\delta} \right|^2 = \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{p_1, \dots, p_\delta} \right) \cdot \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{p_1, \dots, p_\delta} \right). \quad (2.27)$$

Calculando o produto interno acima, é possível mostrar que

$$\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}'_{p_1, \dots, p_\delta} \right| = \left[s^2 + \sum_{j=1}^{\delta} (w_j - (2\pi R)p_j)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.28)$$

onde $s^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Assim, o potencial gerado por uma única massa topológica será

$$\phi_{p_1, \dots, p_\delta}(\mathbf{r}) = - \frac{G_D m}{\left[s^2 + \sum_{j=1}^{\delta} (w_j - (2\pi R)p_j)^2 \right]^{\frac{1+\delta}{2}}}. \quad (2.29)$$

Portanto, o potencial gravitacional resultante é a soma dos potenciais produzidos por cada uma das massas imagens

$$\phi(\mathbf{r}) = - \sum_{(p_1, \dots, p_\delta) \in \mathbb{Z}^\delta} \frac{G_D m}{\left[s^2 + \sum_{j=1}^{\delta} (w_j - (2\pi R)p_j)^2 \right]^{\frac{1+\delta}{2}}}. \quad (2.30)$$

Podemos obter uma expressão mais simples para o potencial gravitacional, notando que a função dada acima é periódica nas direções transversais à brana, ou seja, com respeito às coordenadas w . Sendo assim, podemos representá-la como uma série de Fourier. Procedendo dessa forma, podemos mostrar (ver Apêndice B) que o potencial pode ser reescrito na forma

$$\phi(\mathbf{r}) = - \frac{G_D m}{r} \frac{\pi \text{Vol}(S^{\delta-2})}{(2\pi R)^\delta} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^\delta} e^{-rk'}, \quad (2.31)$$

onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e $k'^2 = (k_1/R)^2 + \dots + (k_\delta/R)^2$. Então, para obter a expressão usual do potencial gravitacional Newtoniano com os termos de correções, concluímos que devemos relacionar G_D com a constante gravitacional G Newtoniana:

$$G \equiv \frac{G_D \pi \text{Vol}(S^{\delta-2})}{(2\pi R)^\delta}. \quad (2.32)$$

Dessa forma,

$$\phi(\mathbf{r}) = - \frac{Gm}{r} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^\delta} e^{-rk'}. \quad (2.33)$$

Este é o potencial na brana levando em conta que a brana está imersa em um espaço de dimensão superior com δ dimensões extras compactas. Como uma primeira aproximação, podemos

calcular a correção para o potencial tomando apenas os maiores termos, ou seja, os termos com $k' = 0$ e $k' = 1$. Portanto, obtemos

$$\phi(r) = -\frac{Gm}{r} \left(1 + ae^{-r/R} \right). \quad (2.34)$$

O fator a na Eq.2.34 diz respeito à degenerescência⁴, onde, neste caso, $a = 2\delta$. A expressão acima é conhecida na literatura como uma *expressão do tipo Yukawa*[27, 23].^{5,6}

Note que para $r \gg R$, o potencial Newtoniano usual é recuperado. O parâmetro de Yukawa nos daria a correção para longas distâncias. Por sua vez, para curtas distâncias o potencial seria dado pela Eq.2.22.

2.2 O Decaimento Alfa

No modelo de Gamow, o decaimento dos núcleos pesados é explicado com base no processo de tunelamento da partícula alfa através de uma barreira de potencial. Usualmente, o problema do tunelamento é investigado na mecânica quântica aplicando-se o método WKB, que iremos discutir a seguir.

2.2.1 Aproximação WKB

A aproximação WKB, ou método WKB, é um método utilizado para aproximar a solução de uma equação diferencial cuja derivada de ordem mais alta é multiplicada por um pequeno termo ε [29]. Então, para uma equação diferencial da forma:

$$\varepsilon \frac{d^n y}{dx^n} + a(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + k(x) \frac{dy}{dx} + m(x)y = 0, \quad (2.35)$$

admitimos uma solução da forma

$$y(x) \sim \exp \left[\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n(x) \right], \quad (2.36)$$

no limite $\delta \rightarrow 0$.

⁴ Aqui, a degenerescência significa o número de dimensões extras compactas que possuem o mesmo raio de compactação R .

⁵ Em homenagem à Hideki Yukawa, primeiro japonês a receber um Nobel de Física, em 1949, por formular a hipótese dos mésons, baseado em trabalhos teóricos sobre forças nucleares. O seu trabalho foi pioneiro sobre o estudo das interações fortes.

⁶ Ao longo dos anos, a forma de Yukawa tem aparecido tão frequentemente em estudos de fenômenos da natureza que passou a ser chamada de *Parametrização de Yukawa*.

2.2.2 Aplicação do método WKB à equação de Schrödinger

Consideremos a Equação de Schrödinger independente do tempo em uma dimensão:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x) . \quad (2.37)$$

Podemos escrever a função de onda $\psi(x)$ como uma exponencial de outra função $\phi(x)$:

$$\psi(x) = e^{\phi(x)} . \quad (2.38)$$

Com isso, após algumas operações, é simples mostrar que, a partir da Eq.2.37, teremos

$$\phi''(x) + (\phi'(x))^2 = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] . \quad (2.39)$$

Agora, podemos supor que ϕ é complexa e separar ϕ' em termos de sua parte real e a parte imaginária, introduzindo as funções reais $A(x)$ e $B(x)$:

$$\phi'(x) = A(x) + iB(x) ,$$

onde

$$\phi(x) = \int_{x_0}^x A(x') dx' + i \int_{x_0}^x B(x') dx' .$$

Como $\psi(x) = e^{\phi(x)}$, a amplitude de ψ será

$$\exp \left[\int_{x_0}^x A(x') dx' \right] . \quad (2.40)$$

Por outro lado, a fase de ψ será

$$\int_{x_0}^x B(x') dx' . \quad (2.41)$$

Com isso, a Eq.2.39 ficará da forma

$$A'(x) + iB'(x) + (A(x) + iB(x))^2 = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] .$$

Separando a equação acima em duas partes (real e imaginária), temos

$$A'(x) + A^2(x) - B^2(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] , \quad (2.42)$$

$$B'(x) + 2A(x)B(x) = 0 . \quad (2.43)$$

Agora, expandimos A e B como uma série de potências em $\hbar$, onde consideramos as aproximações:

$$A(x) = \frac{1}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n A_n(x) \approx \frac{1}{\hbar} A_0(x) + A_1(x) ,$$

$$B(x) = \frac{1}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n B_n(x) \approx \frac{1}{\hbar} B_0(x) + B_1(x) .$$

Com isso, das Eqs.2.42 e 2.43, é possível encontrar as seguintes relações para os termos de ordem $1/\hbar^2$:

$$A_0^2 - B_0^2 = 2m [V(x) - E] \quad e \quad A_0 B_0 = 0 . \quad (2.44)$$

Se a amplitude variar lentamente em comparação com a fase, podemos fazer $A_0 = 0$ na Eq.2.44. Após alguns cálculos, é possível mostrar que este caso irá nos fornecer as seguintes aproximações:

$$A(x) \approx A_1(x) = \frac{d}{dx} \ln [2m (E - V(x))]^{-1/4} ,$$

$$B(x) \approx \frac{1}{\hbar} B_0(x) = \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m (E - V(x))} .$$

Com isso, obtemos a seguinte aproximação para a função ψ na região clássica:

$$\psi(x) \approx \frac{C}{\sqrt[4]{2m [E - V(x)]}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x \sqrt{2m [E - V(x')]} dx'} , \text{ para } E > V , \quad (2.45)$$

onde C é uma constante[25, 26, 30].

Vejamos agora o outro caso. Se considerarmos que é a fase que varia lentamente em comparação com a amplitude na Eq.2.44, fazemos $B_0 = 0$ e, com isso, obtemos as aproximações:

$$A(x) \approx \frac{1}{\hbar} A_0(x) + A_1(x) = \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m [V(x) - E]} + \frac{d}{dx} \ln [2m (V(x) - E)]^{-1/4} , \quad (2.46)$$

$$B(x) \approx \frac{1}{\hbar} B_0(x) + B_1(x) = \frac{1}{\hbar} * 0 + 0 = 0 . \quad (2.47)$$

Dessa forma, obtemos a seguinte aproximação para a função ψ na região não-clássica:

$$\psi(x) \approx \frac{C_1}{\sqrt[4]{2m [V(x) - E]}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x \sqrt{2m [V(x') - E]} dx'} + \frac{C_2}{\sqrt[4]{2m [V(x) - E]}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x \sqrt{2m [V(x') - E]} dx'} , \text{ se } V > E , \quad (2.48)$$

onde C_1 e C_2 são constantes[31, 26].

2.2.3 Tunelamento quântico

No caso do problema do espalhamento de uma barreira retangular por uma partícula que se move no sentido positivo do eixo x , conforme mostrado na Figura 1, para a região $x < 0$, temos que a autofunção será da forma:

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (2.49)$$

Por outro lado, para a região $x > a$ a autofunção será

$$\psi(x) = Fe^{ikx}, \quad (2.50)$$

onde A é a amplitude incidente, B é a amplitude refletida e F a amplitude transmitida nas Eqs. 2.49 e 2.50.

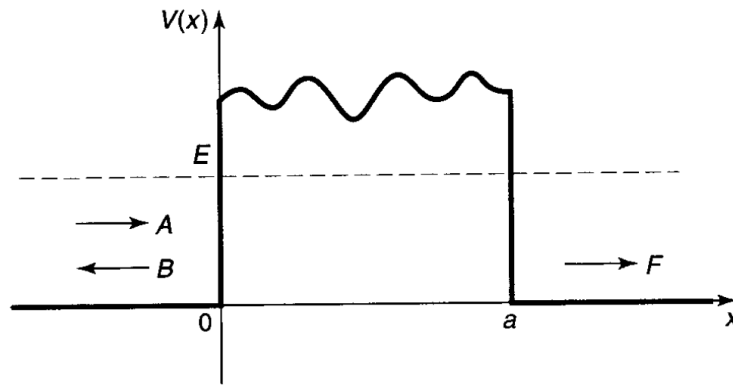


Figura 1 – Espalhamento de uma barreira retangular com uma ondulação em cima. Fonte: retirado da Ref.[26]

Para determinar a probabilidade de transmissão, utilizamos a definição de densidade de corrente de probabilidade J :

$$J(x) = \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi(x) \frac{d}{dx} \psi^*(x) - \psi^*(x) \frac{d}{dx} \psi(x) \right]. \quad (2.51)$$

Com isso, podemos obter uma expressão para a probabilidade de transmissão T , dada por:

$$T = \frac{|J_t(x)|}{|J_i(x)|}, \quad (2.52)$$

sendo $J_i(x)$ a densidade de corrente de probabilidade para a onda incidente e $J_t(x)$ a densidade de corrente de probabilidade para a onda transmitida, dadas por

$$J_i(x) = \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi_i(x) \frac{d}{dx} \psi_i^*(x) - \psi_i^*(x) \frac{d}{dx} \psi_i(x) \right], \quad \psi_i(x) = Ae^{ikx}. \quad (2.53)$$

$$J_t(x) = \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi_t(x) \frac{d}{dx} \psi_t^*(x) - \psi_t^*(x) \frac{d}{dx} \psi_t(x) \right], \quad \psi_t(x) = F e^{ikx}. \quad (2.54)$$

Calculando $J_i(x)$ e $J_t(x)$, obtemos

$$J_i(x) = \frac{\hbar k}{m} |A|^2 \quad e \quad J_t(x) = \frac{\hbar k}{m} |F|^2.$$

Com isso,

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2}. \quad (2.55)$$

Agora, para a região $0 < x < a$, temos que essa região é não-clássica, pois ($E < V$) e, pelo método WKB, temos que a autofunção será dada pela Eq.2.48. Por simplicidade, podemos reescrever a Eq.2.48 da forma

$$\psi(x) \approx \frac{C}{\sqrt{f(x)}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_0^x f(x') dx'} + \frac{D}{\sqrt{f(x)}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x f(x') dx'}, \quad (2.56)$$

onde $f(x) = \sqrt{2m[V(x) - E]}$. Se supormos que a barreira de potencial da Figura 1 é muito alta ou muito ampla, a probabilidade de tunelamento será pequena. Matematicamente, o que isso nos diz é que o termo com o coeficiente C na Eq.2.56 (que aumenta exponencialmente) deve ser pequeno. Portanto, na região $0 < x < a$ o comportamento de $\psi(x)$ é dominado pelo termo com a exponencial decrescente na Eq.2.56⁷, o que justifica o comportamento mostrado na Figura 2.

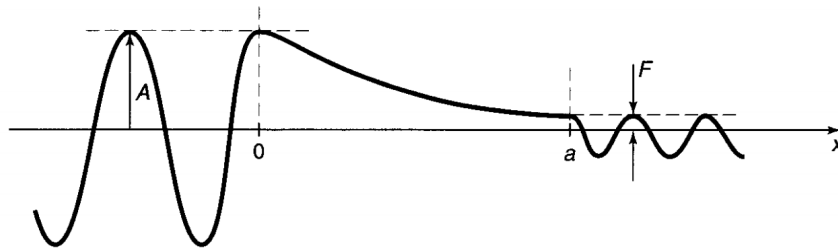


Figura 2 – Estrutura qualitativa da função de onda para o espalhamento de uma barreira alta e ampla. Fonte: retirado da Ref.[26]

Dessa forma, na Eq.2.56 faremos

$$\psi(x) \approx \frac{D}{\sqrt{f(x)}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x f(x') dx'} \quad (0 < x < a). \quad (2.57)$$

Pelas condições de contorno de ψ , temos que a mesma deve ser contínua em $x = 0$. Assim, das Eqs.2.49 e 2.57,

$$Ae^0 + Be^0 \approx \frac{D}{\sqrt{f(x)}} e^0 \implies A + B \approx \frac{D}{\sqrt{f(x)}}. \quad (2.58)$$

⁷ No caso limite de uma barreira infinitamente ampla, teríamos que o termo com o coeficiente C na Eq.2.56 seria nulo.

Pelas condições de contorno, ψ também deve ser contínua em $x = a$. Então, das Eqs.2.50 e 2.57,

$$\frac{D}{\sqrt{f(x)}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^a f(x) dx} \approx F e^{ika} \implies \frac{D}{\sqrt{f(x)}} \approx F e^{ika} e^{\gamma}, \quad (2.59)$$

onde $\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_0^a f(x) dx$. Substituindo a Eq.2.59 na Eq.2.58, obtemos

$$A + B \approx F e^{ika} e^{\gamma}. \quad (2.60)$$

Considerando $B \sim A$ na Eq.2.60, teremos

$$A + B \approx 2A \implies 2A \approx F e^{ika} e^{\gamma}.$$

Para simplificar nossos resultados, podemos supor que

$$A \approx F e^{ika} e^{\gamma} \implies e^{-\gamma} \approx \frac{F}{A} e^{ika}. \quad (2.61)$$

Na Eq.2.61, como $|e^{ika}| = 1$, então

$$\frac{|F|}{|A|} \sim e^{-\gamma}.$$

Portanto, substituindo esse resultado na Eq.2.55, teremos[26, 32]

$$T \approx e^{-2\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\hbar} \int_0^a \sqrt{2m[V(x) - E]} dx. \quad (2.62)$$

2.2.4 Teoria de Gamow do decaimento alfa

Em 1928, George Gamow, e também Condon e Gurney, usaram a Eq.2.62 para formular a primeira explicação bem-sucedida do decaimento alfa[24, 31, 26]. O método utilizado por Gamow pode ser desenvolvido da seguinte forma: o núcleo instável é descrito como sendo um sistema composto pela partícula alfa (partícula composta por dois prótons e dois nêutrons, cuja carga é $2e$) e o núcleo residual (de carga Ze), sendo e a carga de um próton. Supomos que a partícula alfa e o núcleo residual formam um estado ligado porque interagem entre si por meio da interação nuclear. Como a partícula alfa e o núcleo residual tem carga elétrica positivas, eles interagem também por meio de uma interação Coulombiana repulsiva. A partir disso, Gamow teve a seguinte ideia para desenvolver sua análise:

- i) Igualar a energia potencial por meio de um poço quadrado finito (para a força nuclear atrativa) estendendo-o para o raio r_1 (raio do núcleo).
- ii) Unir esse potencial com uma cauda repulsiva coulombiana (ver Figura 3).
- iii) Identificar o mecanismo de escape da partícula como tunelamento quântico.

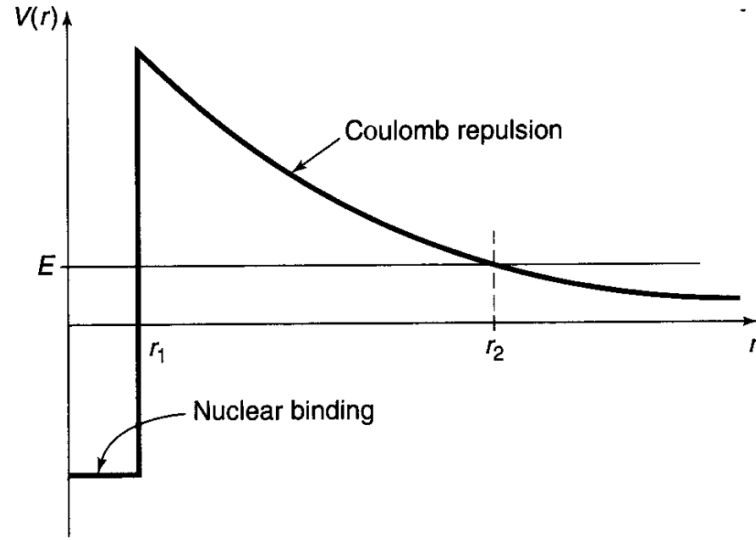


Figura 3 – Modelo de Gamow para a energia potencial de uma partícula alfa em um núcleo radioativo. Fonte: retirado da Ref.[26]

Assim, para o ponto de retorno mais externo na Figura 3 (r_2), usando o potencial de Coulomb, teremos a seguinte relação para a energia total E da partícula:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_2} = E . \quad (2.63)$$

Agora, a partir da Eq.2.62, onde teremos que $V = V(r)$, podemos encontrar γ com base nas considerações feitas anteriormente

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m[V(r) - E]} dr , \quad (2.64)$$

onde temos que $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r}$ para a região $r_1 < r < r_2$, como mostra a Figura 3. Dessa forma, das Eqs.2.63 e 2.64, teremos

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} - E \right]} dr = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{r_2 - r}}{\sqrt{r}} dr . \quad (2.65)$$

Façamos agora a seguinte mudança de variável na Eq.2.65:

$$r = r_2 \sin^2 u \implies dr = 2r_2 \sin u \cos u du . \quad (2.66)$$

Dessa forma, é simples mostrar que

$$\int \frac{\sqrt{r_2 - r}}{\sqrt{r}} dr = r_2 \left[u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right] . \quad (2.67)$$

Da Eq.2.66,

$$u = \arcsin \left(\sqrt{\frac{r}{r_2}} \right) . \quad (2.68)$$

A partir das Eqs.2.68 na Eq.2.67, após algumas operações matemáticas, teremos

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{r_2 - r}}{\sqrt{r}} dr = r_2 \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) \right] - \sqrt{r_1(r_2 - r_1)} . \quad (2.69)$$

Substituindo a Eq.2.69 na Eq.2.65,

$$\gamma = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left\{ r_2 \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) \right] - \sqrt{r_1(r_2 - r_1)} \right\} . \quad (2.70)$$

Tipicamente, $r_1 \ll r_2$ e, com isso, podemos fazer uma aproximação para pequenos ângulos: $\sin \theta \approx \theta$. Daí,

$$r_2 \arcsin \left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) \approx r_2 \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \sqrt{r_1 r_2} , \quad (2.71)$$

e

$$r_2 - r_1 \approx r_2 \implies \sqrt{r_1(r_2 - r_1)} \approx \sqrt{r_1 r_2} . \quad (2.72)$$

Substituindo as Eqs.2.71 e 2.72 na Eq.2.70,

$$\gamma \approx \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[\frac{\pi}{2} r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \right] . \quad (2.73)$$

Agora, analisando o primeiro e segundo termo no lado direito da Eq.2.73, podemos definir as seguintes constantes[26]:

$$K_1 = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar} = 1,980 \text{ MeV}^{1/2} , \quad (2.74)$$

e

$$K_2 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \frac{4\sqrt{m}}{\hbar} = 1,485 \text{ fm}^{-1/2} . \quad (2.75)$$

Dessa forma, a Eq.2.73 pode ser reescrita de maneira simples da forma[25, 26]

$$\gamma \approx K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2 \sqrt{Zr_1} . \quad (2.76)$$

Tempo de vida do núcleo pai

Se considerarmos que a partícula alfa esteja chacoalhando de um lado para o outro dentro do núcleo (de raio r_1) com uma velocidade média v , o tempo médio entre "colisões" com a "parede"

t_{med} será

$$t_{med} = \frac{2r_1}{v} .$$

Com isso, a frequência de oscilações será

$$\nu = \frac{1}{t_{med}} = \frac{v}{2r_1} .$$

A probabilidade de transmissão (escape) a cada colisão é de $e^{-2\gamma}$, como vimos na Eq.2.62.

Agora, a probabilidade de emissão por unidade de tempo P é dada por

$$P = \frac{e^{-2\gamma}}{t_{med}} = \frac{v}{2r_1} e^{-2\gamma} .$$

Portanto, o tempo de vida do núcleo pai τ será dado por

$$\tau = \frac{1}{P} = \frac{2r_1}{v} e^{2\gamma} . \quad (2.77)$$

2.2.5 Dissipação de energia no decaimento alfa

No decaimento alfa o número de prótons e nêutros é conservado, pois estes são apenas rearranjados. Uma outra característica do decaimento alfa é que o número atômico Z do núcleo-pai é reduzido em 2, enquanto seu número de massa A é reduzido em 4. A energia dissipada no decaimento alfa aparece como a energia cinética da partícula alfa e do núcleo-filho[33].

Sejam M_p a massa do núcleo-pai; M_d a massa do núcleo-filho e m_α a massa da partícula alfa. Pela conservação da energia, teremos

$$\varepsilon = E_k + M_p c^2 \quad e \quad \varepsilon = E'_k + M_d c^2 + m_\alpha c^2 , \quad (2.78)$$

onde E_k e E'_k denotam as energias cinéticas totais do sistema antes e depois do decaimento, respectivamente. Inicialmente, vamos supor que o núcleo-pai está em repouso. Com isso, devemos ter $E_k = 0$ na Eq.2.78. Assim, pela conservação da energia⁸,

$$M_p c^2 = E'_k + M_d c^2 + m_\alpha c^2 \implies E'_k = (M_p - M_d - m_\alpha) c^2 = Q . \quad (2.79)$$

Nem todo núcleo pode decair por emissão alfa por causa da conservação da energia. A partir da Eq.2.79, vemos que o decaimento alfa ocorre se e somente se $Q > 0$.

2.3 O Decaimento Alfa num Cenário de Dimensões Extras

A partícula alfa e o núcleo residual também interagem por meio da força gravitacional. Acontece que a força Newtoniana entre essas partículas é desprezível quando comparada à força

⁸ Na literatura, a notação Q é amplamente utilizada para a energia da partícula alfa emitida.

nuclear e elétrica. No entanto, como vimos nas seções anteriores, em um cenário com dimensões extras, a interação gravitacional é amplificada em curtas distâncias. Nessa seção queremos investigar os efeitos dessa interação sobre o tempo de decaimento dos núcleos radioativos.

2.3.1 Teoria de Gamow em dimensões extras

Em um espaço com dimensões extras compactas, assim como no caso usual, Eq.2.62, a probabilidade de transmissão T da partícula continuaria tendo a mesma forma:

$$T \approx e^{-2\gamma'} , \quad \gamma' = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{r_1}^{r'_2} \sqrt{V(r) - E} dr , \quad (2.80)$$

onde agora⁹ r'_2 é o ponto de retorno e a energia potencial da partícula alfa V seria dada por

$$V(r) = V_C(r) + V_G(r) , \quad (2.81)$$

em que V_C é a energia potencial de Coulomb e V_G a energia potencial da interação gravitacional entre a partícula alfa e o núcleo residual no cenário de dimensões extras, dados por:

$$V_C(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} \quad e \quad V_G(r) = -\frac{G_D M m}{r^{1+\delta}} . \quad (2.82)$$

Na Eq.2.82, Z é o número atômico do núcleo residual, e é a carga elementar, G_D é a constante gravitacional para este cenário de dimensões extras, M é a massa do núcleo residual, m a massa da partícula alfa e δ é o número de dimensões extras.

⁹ Usaremos essa notação para evitar confusões com o ponto de retorno usual, denotado por r_2 .

3 RESULTADOS

3.1 Novo Ponto de Retorno da Partícula Alfa

Vamos agora determinar o ponto de retorno r'_2 da partícula alfa considerando uma interação gravitacional modificada, conforme a Eq.2.82. Primeiro, sabemos que¹

$$\frac{K}{r_2} = E . \quad (3.1)$$

Agora, vamos supor $r'_2 = r_2 + \delta r$, onde δr é uma pequena variação em r_2 . Assim, r'_2 é definido por

$$V_C(r'_2) + V_G(r'_2) = E . \quad (3.2)$$

Como V_G contribui apenas com uma pequena modificação, pois estamos supondo que para a escala que estamos trabalhando as dimensões adicionais não causariam mudanças muito drásticas na energia potencial da partícula em relação ao modelo usual, podemos fazer

$$V_C(r'_2) + V_G(r_2) = E . \quad (3.3)$$

Daí²,

$$\frac{K}{r'_2} - \frac{G}{r_2^{1+\delta}} = E \implies \frac{1}{r'_2} = \frac{1}{r_2 + \delta r} = \frac{1}{r_2(1 + \delta r/r_2)} = \frac{E}{K} + \frac{G}{Kr_2^{1+\delta}} . \quad (3.4)$$

Supondo $\delta r \ll r_2$, podemos fazer a seguinte expansão na Eq.3.4:

$$\frac{1}{r_2} \frac{1}{(1 + \delta r/r_2)} \approx \frac{1}{r_2} \left(1 - \frac{\delta r}{r_2} \right) . \quad (3.5)$$

Dessa forma, temos

$$\frac{1}{r_2} \left(1 - \frac{\delta r}{r_2} \right) = \frac{E}{K} + \frac{G}{Kr_2^{1+\delta}} \implies r_2 - \delta r = \frac{Er_2^2}{K} + \frac{G}{Kr_2^{\delta-1}} . \quad (3.6)$$

Utilizando a Eq.3.1, é simples demonstrarmos que

$$\delta r = - \frac{GE^{\delta-1}}{K^{\delta}} . \quad (3.7)$$

¹ Por simplicidade, vamos utilizar a notação compacta: $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2Ze^2$.

² Para simplificar nossa análise, vamos usar a notação: $G = G_D M m$.

3.2 O Fator Gama Modificado

Sejam γ o fator gama usual (Eq.2.64) e γ' o fator gama modificado, mostrado na Eq.2.80. Supondo que $V_G \ll V_C$ para todo o intervalo $[r_1, r'_2]$, podemos considerar que $\gamma' = \gamma + \delta\gamma$, onde $\delta\gamma$ é uma pequena modificação.³ Então,

$$\delta\gamma = \gamma' - \gamma. \quad (3.8)$$

Escrevendo γ e γ' de forma explícita na Eq.3.8,

$$\begin{aligned} \delta\gamma / \left(\sqrt{2m/\hbar} \right) &= \int_{r_1}^{r'_2} \sqrt{V_C(r) + V_G(r) - E} dr - \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{V_C(r) - E} dr \\ &= \int_{r_1}^{r'_2} \sqrt{V_C(r) + V_G(r) - E} dr - \int_{r_1}^{r'_2} \sqrt{V_C(r) - E} dr - \int_{r'_2}^{r_2} \sqrt{V_C(r) - E} dr \\ &= \int_{r_1}^{r'_2} \left[\sqrt{V_C(r) + V_G(r) - E} - \sqrt{V_C(r) - E} \right] dr - \int_{r'_2}^{r_2} \sqrt{V_C(r) - E} dr. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Agora, vamos utilizar um método análogo ao cálculo das variações para resolver a Eq.3.9. Para isto, vamos definir a seguinte quantidade (análoga à uma Lagrangiana)[34, 35]:

$$L(V) = \sqrt{V - E}. \quad (3.10)$$

Dessa forma, qualquer variação em V resultará numa variação em L . Para uma pequena variação em V , podemos escrever

$$V' = V + \delta V \implies L(V') = L(V) + \delta L. \quad (3.11)$$

Escrevendo de forma a evidenciar δL ,

$$\delta L = L(V') - L(V) = \sqrt{V' - E} - \sqrt{V - E} = \sqrt{V + \delta V - E} - \sqrt{V - E}. \quad (3.12)$$

Comparando as Eqs.3.9 e 3.12, podemos fazer a seguinte identificação:

$$V = V_C \quad e \quad \delta V = V_G. \quad (3.13)$$

Vamos agora desenvolver a Eq.3.9. Expandindo δL em série de Taylor em torno de V , temos

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta L(V') = \delta L(V) + \left[\frac{\partial}{\partial V'} (\delta L(V')) \right] \Big|_{V'=V} \delta V + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial V'^2} (\delta L(V')) \right] \Big|_{V'=V} (\delta V)^2 + \dots \\ &= 0 + \left[\frac{\partial}{\partial V'} (L(V')) \right] \Big|_{V'=V} \delta V + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial V'^2} (L(V')) \right] \Big|_{V'=V} (\delta V)^2 + \dots \\ &= \frac{\partial L}{\partial V} \delta V + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial V^2} (\delta V)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3.14)$$

³ Intuitivamente, esperamos que $\delta\gamma < 0$, pois o potencial gravitacional V_G contribui negativamente para γ' .

onde

$$\frac{\partial L}{\partial V} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{V_C - E}} \quad e \quad \frac{\partial^2 L}{\partial V^2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{(V_C - E)^{3/2}}. \quad (3.15)$$

Vamos agora analisar a ordem dos primeiros termos da expansão na Eq.3.14 dentro do intervalo de integração $[r_1, r'_2]$. Então,

$$i) \text{ Primeiro termo: } \delta L_{(1)} = \frac{\partial L}{\partial V} \delta V.$$

$\delta V = V_G \sim O(G)$ para todo o intervalo.

$\frac{\partial L}{\partial V} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{V_C(r) - E}}$, onde $V_C(r) - E \sim O(G)$ apenas em torno de r'_2 , pois $V_G \ll V_C$ para $r_1 < r < r'_2$ e $V_C(r'_2) - E = -V_G(r'_2)$.

Portanto,

$$\delta L_{(1)} = \frac{\partial L}{\partial V} \delta V \sim \begin{cases} O(G^{1/2}), \text{ em torno de } r'_2 \\ O(G), \text{ no restante do intervalo.} \end{cases}$$

O intervalo onde a variação da Lagrangiana é de ordem $G^{1/2}$ é um domínio curto, com tamanho da ordem de G . Denotando esse intervalo por δI , podemos concluir que

$$\int \delta L_{(1)} dr = \int \frac{\partial L}{\partial V} \delta V dr \sim \begin{cases} O(G^{3/2}), \text{ integrando em } \delta I \\ O(G), \text{ integrando em } [r_1, r'_2] - \delta I. \end{cases}$$

Retornando à Eq.3.9, temos que

$$\int_{r'_2}^{r_2} \sqrt{V_C(r) - E} dr \sim O(G^{3/2}),$$

pois $\sqrt{V_C - E} \sim O(G^{1/2})$ em torno de r'_2 e $[r'_2, r_2] \sim O(G)$. Com isso, concluímos que o primeiro termo de aproximação $\delta \gamma_{(1)}$ será do tipo:

$$\delta \gamma_{(1)} = O(G) + O(G^{3/2}).$$

$$ii) \text{ Segundo termo: } \delta L_{(2)} = \frac{\partial^2 L}{\partial V^2} (\delta V)^2.$$

$(\delta V)^2 = V_G^2 \sim O(G^2)$ para todo o intervalo.

$\frac{\partial^2 L}{\partial V^2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{[V_C(r) - E]^{3/2}}$, onde $V_C(r) - E \sim O(G)$ apenas em torno de r'_2 .

Portanto,

$$\delta L_{(2)} = \frac{\partial^2 L}{\partial V^2} (\delta V)^2 \sim \begin{cases} O(G^{1/2}), \text{ em torno de } r'_2 \\ O(G^2), \text{ no restante do intervalo.} \end{cases}$$

Como $\delta I \sim O(G)$, concluímos que

$$\int \delta L_{(2)} dr = \int \frac{\partial^2 L}{\partial V^2} (\delta V)^2 dr \sim \begin{cases} O(G^{3/2}), \text{ integrando em } \delta I \\ O(G^2), \text{ integrando em } [r_1, r'_2] - \delta I. \end{cases}$$

De forma geral, para uma ordem n , é possível demonstrar que

$$\int \delta L_{(n)} dr = \int \frac{\partial^n L}{\partial V^n} (\delta V)^n dr \sim \begin{cases} O(G^{3/2}), \text{ integrando em } \delta I \\ O(G^n), \text{ integrando em } [r_1, r'_2] - \delta I. \end{cases}$$

Com isso, podemos concluir que $\delta \gamma \sim O(G) + O(G^{3/2})$. Dessa forma, a primeira aproximação para $\delta \gamma$ pode ser calculada da seguinte forma:

$$\delta \gamma = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{r_1}^{r'_2} \frac{\partial L}{\partial V} \delta V dr = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{r_1}^{r'_2} \left[\frac{1}{2} \frac{V_G(r)}{\sqrt{V_C(r) - E}} \right] dr.$$

Considerando apenas os termos de ordem G , o que coincide com

$$\delta \gamma = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{1}{2} \frac{V_G(r)}{\sqrt{V_C(r) - E}} \right] dr. \quad (3.16)$$

3.3 Análise de $\delta \gamma$ para Alguns Cenários com Dimensões Extras

Vamos agora resolver a Eq.3.16 para alguns diferentes cenários com δ dimensões extras, considerando o caso em que $r_1 \ll r_2$.

1) Para $\delta = 0$ (sem dimensão extra): $V_G(r) = -\frac{G_D M m}{r} \equiv -\frac{G}{r}$.

$$\delta \gamma = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{1}{2} \frac{V_G(r)}{\sqrt{V_C(r) - E}} \right] dr = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \frac{G/r}{\sqrt{\frac{K}{r} - E}} dr.$$

Usando a relação $\frac{K}{r_2} = E$, é simples mostrar que

$$\delta \gamma = -\frac{\sqrt{2m}G}{\hbar\sqrt{E}} \arctan \sqrt{\frac{r_2}{r_1} - 1}. \quad (3.17)$$

No limite $r_1 \ll r_2$, a Eq.3.17 se torna

$$\delta \gamma = -\frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2m}G}{\hbar\sqrt{E}} \implies \delta \gamma = -\frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2m}G_D M m}{\hbar\sqrt{E}}. \quad (3.18)$$

2) Para $\delta = 1$: $V_G(r) = -\frac{G}{r^2}$.

$$\delta\gamma = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \frac{G/r^2}{\sqrt{\frac{K}{r} - E}} dr = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2m}G}{\hbar} \left[-\frac{2}{K} \sqrt{\frac{K}{r} - E} \right] \Big|_{r_1}^{r_2}.$$

Após algumas operações matemáticas, é possível mostrar que

$$\delta\gamma = -\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \frac{G}{Er_1^2} \frac{r_1^{3/2}}{r_2^{1/2}} (1 - r_1/r_2)^{1/2}. \quad (3.19)$$

No limite $r_1 \ll r_2$, a Eq.3.19 se torna

$$\delta\gamma = -\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \frac{G_D M m}{Er_1^{1+1}} \frac{r_1^{3/2}}{r_2^{1/2}}. \quad (3.20)$$

3) Para $\delta = 2$, assim como foi feito para o caso anterior, podemos mostrar que no limite $r_1 \ll r_2$,

$$\delta\gamma = -\frac{1}{3} \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \frac{G_D M m}{Er_1^{1+2}} \frac{r_1^{3/2}}{r_2^{1/2}}. \quad (3.21)$$

4) Para $\delta = 3$, é possível mostrarmos que, no limite $r_1 \ll r_2$, teremos

$$\delta\gamma = -\frac{1}{5} \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \frac{G_D M m}{Er_1^{1+3}} \frac{r_1^{3/2}}{r_2^{1/2}}. \quad (3.22)$$

Portanto, de forma geral, para δ dimensões extras, é possível mostrarmos que

$$\delta\gamma = -\frac{1}{(2\delta - 1)} \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \frac{G_D M m}{Er_1^{1+\delta}} \frac{r_1^{3/2}}{r_2^{1/2}} = -\frac{1}{(2\delta - 1)} \sqrt{\frac{2mr_1}{Er_2}} \frac{G_D M m}{\hbar r_1^\delta}, \quad \delta = 1, 2, 3 \dots$$

Como $K = Er_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2Ze^2$, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\delta\gamma = -\frac{1}{(2\delta - 1)} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m r_1}{Ze^2}} \frac{G_D M m}{\hbar r_1^\delta}, \quad \delta = 1, 2, 3 \dots \quad (3.23)$$

3.4 Análise de $\delta\gamma$ Mantendo os Termos de Ordem r_1/r_2

Façamos agora a análise dos possíveis valores de $\delta\gamma$ para alguns cenários de dimensões extras, no limite $r_1 \ll r_2$, considerando os termos até a ordem r_1/r_2 . O desenvolvimento será análogo ao que foi mostrado na seção 3.3. Então, consideremos a seguinte expansão em série de Taylor de uma função $f(x)$ em torno de $x = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^{1/2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots \quad (3.24)$$

1) Para $\delta = 1$, a partir da Eq.3.19, podemos expandir $(1 - r_1/r_2)^{1/2}$:

$$\delta\gamma = -\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \frac{G_D M m}{Er_1^2} \frac{r_1^{3/2}}{r_2^{1/2}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r_1}{r_2} - \frac{1}{8} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 + \dots \right]. \quad (3.25)$$

Considerando os termos de ordem até r_1/r_2 na Eq.3.25,

$$\delta\gamma \approx -\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \frac{G_D M m}{Er_1^2} \frac{r_1^{3/2}}{r_2^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_1}{r_2} \right). \quad (3.26)$$

2) Resolvendo a integral da Eq.3.16 para $\delta = 2$, obtemos

$$\delta\gamma = -\frac{1}{3} \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \frac{G_D M m}{Er_1^3} \frac{r_1^{3/2}}{r_2^{1/2}} \frac{[1 + r_1/r_2 - 2(r_1/r_2)^2]}{(1 - r_1/r_2)^{1/2}}. \quad (3.27)$$

Usando a expansão da Eq.3.24 na Eq.3.27 e considerando os termos de ordem r_1/r_2 ,

$$\delta\gamma \approx -\frac{1}{3} \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \frac{G_D M m}{Er_1^3} \frac{r_1^{3/2}}{r_2^{1/2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_1}{r_2} \right). \quad (3.28)$$

3) Considerando $\delta = 3$, assim como foi feito para se obter a Eq.3.28, é possível mostarmos que

$$\delta\gamma \approx -\frac{1}{15} \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \frac{G_D M m}{Er_1^4} \frac{r_1^{3/2}}{r_2^{1/2}} \left(3 + \frac{5}{2} \frac{r_1}{r_2} \right). \quad (3.29)$$

De forma geral, para um número qualquer δ de dimensões extras⁴, com um certo esforço, é possível mostarmos que, no limite $r_1 \ll r_2$,

$$\delta\gamma \approx -\frac{1}{(2\delta-3)(2\delta-1)} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m r_1}{Ze^2}} \frac{G_D M m}{\hbar r_1^\delta} \left[(2\delta-3) + (2\delta-1) \frac{\pi\epsilon_0 r_1 E}{Ze^2} \right], \quad \delta = 1, 2, 3, \dots \quad (3.30)$$

Como vemos na Eq.3.30, por meio desta análise a modificação do fator gama, $\delta\gamma$, apresenta uma dependência que é diretamente proporcional à energia da partícula alfa emitida.

3.5 Ajuste pelo Método dos Mínimos Quadrados

Vamos agora, como um exemplo, aplicar o que foi desenvolvido na Seção 3.3, Eq.3.23.⁵ Para isto, é mais conveniente escrevermos a constante gravitacional G_D em termos do comprimento de Planck em dimensões extras, l_D , onde temos a seguinte relação[16, 15]:

$$(l_D)^{2+\delta} = \frac{\hbar G_D}{c^3}, \quad (3.31)$$

⁴ Usando novamente a relação do ponto de retorno da partícula: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_2}$.

⁵ Deixaremos para um futuro próximo a análise da modificação obtida na Eq.3.30.

sendo δ o número de dimensões extras.

Em um cenário com dimensões extras, de acordo com a nossa análise, o decaimento alfa de núcleos radioativos pesados aconteceria em um tempo τ dado pela seguinte relação:

$$\tau = \frac{2r_1}{v} e^{2\gamma'} , \quad (3.32)$$

onde $\gamma' = \gamma + \delta\gamma$, com $\delta\gamma$ dado pela Eq.3.23, e $v = \sqrt{2E/m}$, em que v é a velocidade (média) da partícula alfa emitida e E é a energia da mesma. Consideremos também que o raio do núcleo-pai, r_1 , pode ser escrito da seguinte forma:

$$r_1 = r_0 A^{1/3} \text{ fm} , \quad (3.33)$$

onde A é o número de massa do núcleo-pai e r_0 está em femtômetro[36, 37, 38, 39]. Escrevendo os termos da Eq.3.32 de forma explícita, temos

$$\tau = \frac{r_1 \sqrt{2m}}{\sqrt{E}} \exp \left[\frac{2K_1 Z}{\sqrt{E}} - 2K_2 \sqrt{Zr_1} - \frac{2}{(2\delta-1)} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m r_1}{Ze^2}} \frac{(l_D)^{2+\delta} c^3 M m}{\hbar^2 r_1^\delta} \right] . \quad (3.34)$$

Tomando o logaritmo em ambos os lados da Eq.3.34,

$$\ln \tau = \ln(r_1 \sqrt{2m}) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right) + \frac{2K_1 Z}{\sqrt{E}} - 2K_2 \sqrt{Zr_1} - \frac{2}{(2\delta-1)} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m r_1}{Ze^2}} \frac{(l_D)^{2+\delta} c^3 M m}{\hbar^2 r_1^\delta} . \quad (3.35)$$

Por simplicidade, denotemos os termos da Eq.3.35 da forma:

$$\begin{aligned} y &= \ln \tau , \\ x &= \frac{1}{\sqrt{E}} , \\ a &= \ln(r_1 \sqrt{2m}) - 2K_2 \sqrt{Zr_1} - \frac{2}{(2\delta-1)} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m r_1}{Ze^2}} \frac{(l_D)^{2+\delta} c^3 M m}{\hbar^2 r_1^\delta} . \end{aligned}$$

Com isso, a Eq.3.35 pode ser escrita de uma maneira mais simples:

$$y = a + \ln x + 2K_1 Z x . \quad (3.36)$$

Agora, para um conjunto de N medidas (τ_i, E_i, M_i) , $i = 1, 2, \dots, N$, teremos

$$\begin{aligned} y_i &= \ln \tau_i , \\ x_i &= \frac{1}{\sqrt{E_i}} , \\ a_i &= \ln(r_{1i} \sqrt{2m}) - 2K_2 \sqrt{Z_i r_{1i}} - \frac{2}{(2\delta-1)} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m r_{1i}}{Z_i e^2}} \frac{(l_D)^{2+\delta} c^3 M_i m}{\hbar^2 r_{1i}^\delta} , \end{aligned}$$

onde $r_{1i} = r_0 A_i^{1/3} \text{ fm}$. Dessa forma, a partir da Eq.3.36, podemos utilizar o método dos mínimos quadrados e definir o qui-quadrado reduzido[40, 41]:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^N (y_i - a_i - \ln x_i - 2K_1 Z_i x_i)^2 , \quad (3.37)$$

onde d é o número de graus de liberdade do sistema. Neste caso, as variáveis livres para o ajuste são r_0 e l_D . Agora, consideremos, por exemplo o decaimento alfa do Urânio (ver os dados utilizados para o ajuste no Apêndice F)[42, 43].^{6,7}

Seja $\tilde{\chi}_0^2$ o menor valor do qui-quadrado reduzido encontrado no ajuste para um determinado valor de r_0 e l_D . Fazendo r_0 varrer valores entre 1,0 fm e 2,0 fm (intervalo típico de valores para r_0 visto na literatura[38, 39]) e l_D varrer uma grande região de valores, obtivemos como resultado os valores de $\tilde{\chi}_0^2$ mostrados na Tabela 2 abaixo para os valores de r_0 e l_D indicados[44]. Fizemos também um ajuste para o modelo usual de Gamow considerando apenas r_0 como o parâmetro a ser ajustado (ver Tabela 1).

Tabela 1 – Ajuste pelo método dos mínimos quadrados para o modelo usual de Gamow.

r_0 (fm)	$\tilde{\chi}_0^2$
1,452	1,44281

Tabela 2 – Ajuste pelo método dos mínimos quadrados para o modelo com δ dimensões extras. Os valores para r_0 e l_D mostrados são os que minimizam o qui-quadrado reduzido da Eq.3.37. Para $\delta \geq 4$, considerando o valor mínimo do qui-quadrado reduzido como critério, os valores de l_D mostrados são os limites superiores, pois é permitido que l_D possua valores menores do que os mostrados na tabela mantendo o qui-quadrado reduzido praticamente constante.

δ	r_0 (fm)	l_D (m)	$\tilde{\chi}_0^2$
1	1,003	$5,4 \times 10^{-17}$	1,272053
2	1,039	$2,3 \times 10^{-16}$	1,508168
3	1,126	$4,9 \times 10^{-16}$	1,723505
4	1,452	$< 3,2 \times 10^{-18}$	1,731372
5	1,452	$< 1,1 \times 10^{-17}$	1,731372
6	1,452	$< 2,5 \times 10^{-17}$	1,731372
7	1,452	$< 5,0 \times 10^{-17}$	1,731372
8	1,452	$< 9,0 \times 10^{-17}$	1,731372
9	1,452	$< 1,3 \times 10^{-16}$	1,731372
10	1,452	$< 1,9 \times 10^{-16}$	1,731372

Como vemos na Tabela 2, os melhores valores de r_0 encontrados para até três dimensões extras são ligeiramente menores do que o valor encontrado utilizando o modelo de Gamow sem modificações. A partir de quatro dimensões suplementares, o ajuste apontou que o

⁶ Para cada elemento, a Eq.3.37 nos diz que $Z_i = Z$ é o mesmo para todos os dados. No caso do Urânio, $Z = 92$.

⁷ É mais comum encontrarmos dados experimentais referentes ao tempo de meia-vida do núcleo, $t_{1/2}$. No Apêndice E, mostramos de que forma $t_{1/2}$ está relacionado com o tempo de vida.

melhor valor para r_0 em cada cenário coincide justamente com o seu valor obtido por meio do ajuste do modelo usual, $r_0 = 1,452$ fm.

Por outro lado, olhando agora para os valores de l_D na Tabela 2, notamos que em cada cenário o valor do comprimento de Planck em dimensões extras ficou entre as ordens de 10^{-16} e 10^{-17} metros, com exceção apenas para o cenário com quatro dimensões extras, onde o valor encontrado para l_D é da ordem de 10^{-18} metros.

Comparando os valores do qui-quadrado reduzido da Tabela 2 com o valor apresentado na Tabela 1, notamos que, surpreendentemente, o valor calculado para o cenário com apenas uma dimensão extra é menor do que o resultado obtido utilizando o próprio modelo de Gamow. Para outros possíveis cenários, no entanto, o valor do qui-quadrado reduzido apresentou uma piora em comparação ao cenário sem dimensões extras, com o qui-quadrado reduzido resultando em valores maiores do que o obtido pela teoria de Gamow sem modificações. Além disso, curiosamente, a partir de $\delta = 4$, o valor calculado do qui-quadrado reduzido permaneceu o mesmo para cada cenário, $\tilde{\chi}_0^2 = 1,731372$.

Para entender de que forma os valores de r_0 e l_D se comportam para reduzir o qui-quadrado na Eq.3.37, seria adequado fazer uma análise gráfica da região de ajuste representando essas duas grandezas, o que faremos na próxima seção.

3.6 Região de Ajuste para os Parâmetros r_0 e l_D

As Figuras 4, 5, 6 e 7 mostram a região de ajuste para r_0 e l_D .⁸ Como utilizamos os valores de 7 medidas diferentes para o ajuste, e como temos duas variáveis livres, isso significa que o nosso sistema tem cinco graus de liberdade ($d = 7 - 2 = 5$). Com isso, de acordo com o teste do qui-quadrado para esse grau de liberdade específico, a nossa região de ajuste para r_0 e l_D com 95% de confiança fica definida como a região na qual o qui-quadrado reduzido é limitado pelo valor 2,2. A razão é que, com 5 graus de liberdade, a probabilidade de se obter um valor $\tilde{\chi}^2 \geq 2,2$ é menor do que 5% [40, 41].

Chamaremos de zona de rejeição com nível de 5% a região na qual o valor do qui-quadrado reduzido é maior que 2,2. Existe também a zona de rejeição com nível de 1%, na qual a probabilidade de se obter um valor do qui-quadrado reduzido maior que 2,8 (para 5 graus de liberdade) é menor ou igual à 1%. No nosso exemplo, esta zona é a parte em branco fora da

⁸ As linhas de pontos horizontais que aparecem nas partes inferiores das figuras são causadas por limitações computacionais, devido ao tamanho do passo de l_D para calcular cada ponto mostrado nas figuras.

região colorida das figuras.

Os dados experimentais utilizados como base para calcular cada ponto mostrado nas Figuras 4, 5, 6 e 7 são referentes ao decaimento alfa do Urânio (ver Apêndice F). A escolha de mostrar apenas os valores de r_0 entre 1,4 e 1,5 fm nas figuras foi devido ao fato do valor de ajuste para r_0 da Tabela 1 estar neste intervalo. Para uma melhor interpretação, optamos por colocar no eixo vertical os valores do logaritmo (na base 10) do comprimento de Planck em dimensões extras, pois os valores de l_D foram ajustados varrendo uma vasta região, analisando l_D para várias ordens de grandezas diferentes.

Como podemos ver nas Figuras 4, 5, 6 e 7, para ambos os cenários, a largura da região de ajuste em torno de $r_0 = 1,452$ fm se mantém a mesma. Por outro lado, olhando a parte superior das figuras, notamos que há um 'achatamento' da região de ajuste para valores de l_D maiores, conforme aumentamos o número de dimensões extras em nosso modelo. Além disso, conforme r_0 se aproxima de 1,4 fm, observamos que a região de ajuste fica cada vez mais estreita à medida em que o número de dimensões extras aumenta.

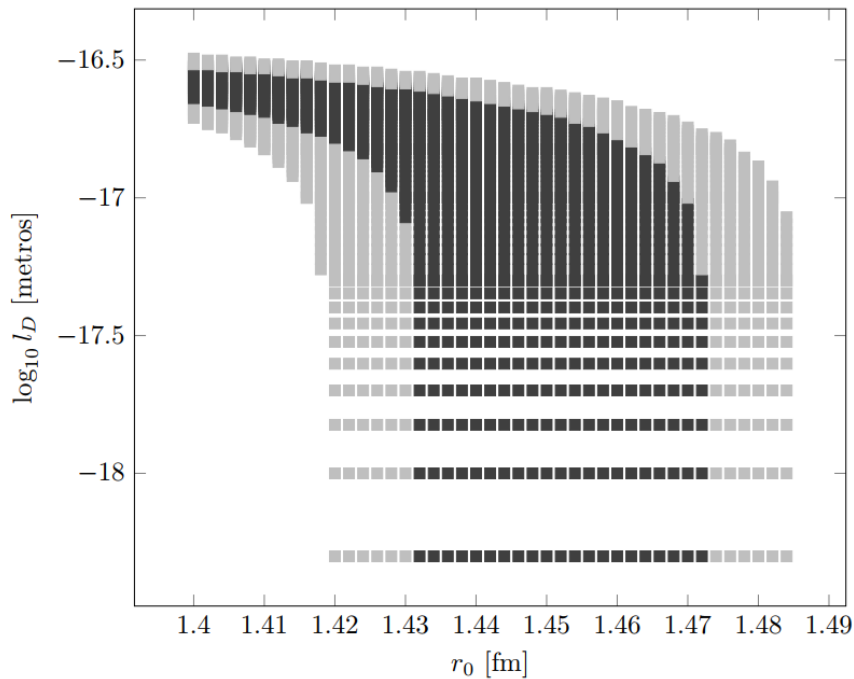


Figura 4 – Ajuste com $\delta = 1$. *Em preto:* região de ajuste para r_0 e l_D . *Em cinza:* zona de rejeição com nível de 5%.

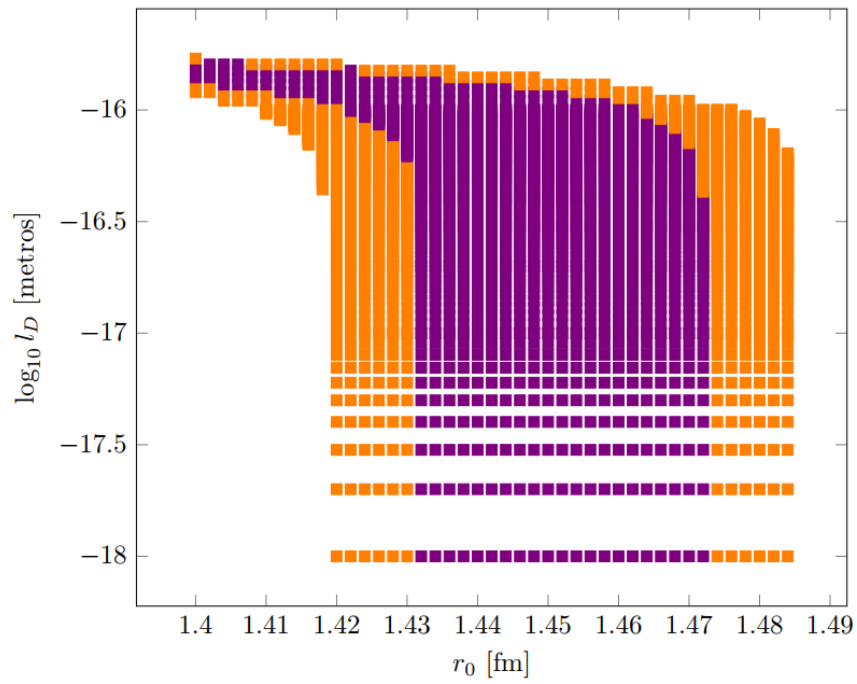


Figura 5 – Ajuste com $\delta = 2$. *Em violeta*: região de ajuste para r_0 e l_D . *Em laranja*: zona de rejeição com nível de 5%.

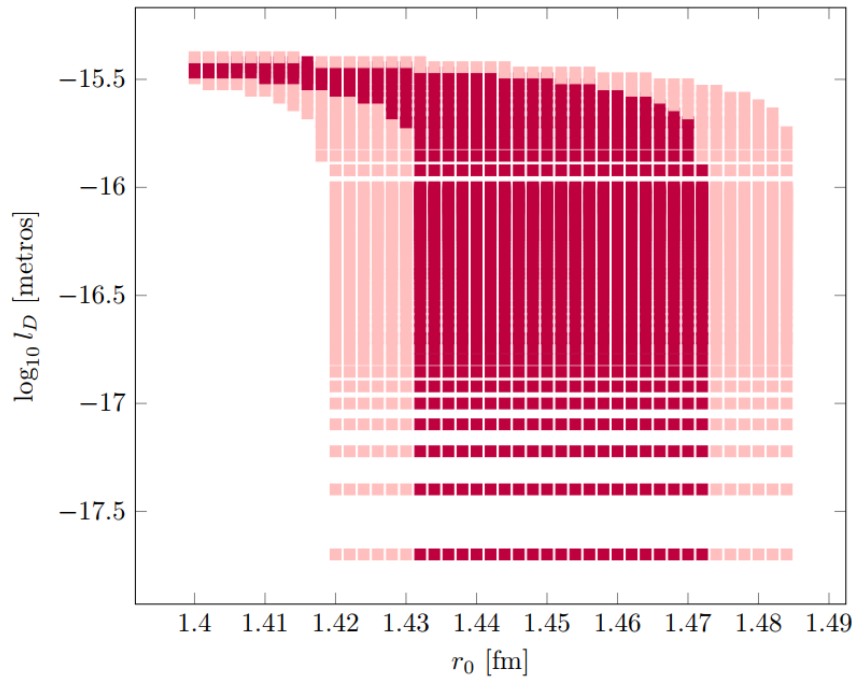


Figura 6 – Ajuste com $\delta = 3$. *Em roxo*: região de ajuste para r_0 e l_D . *Em rosa*: zona de rejeição com nível de 5%.

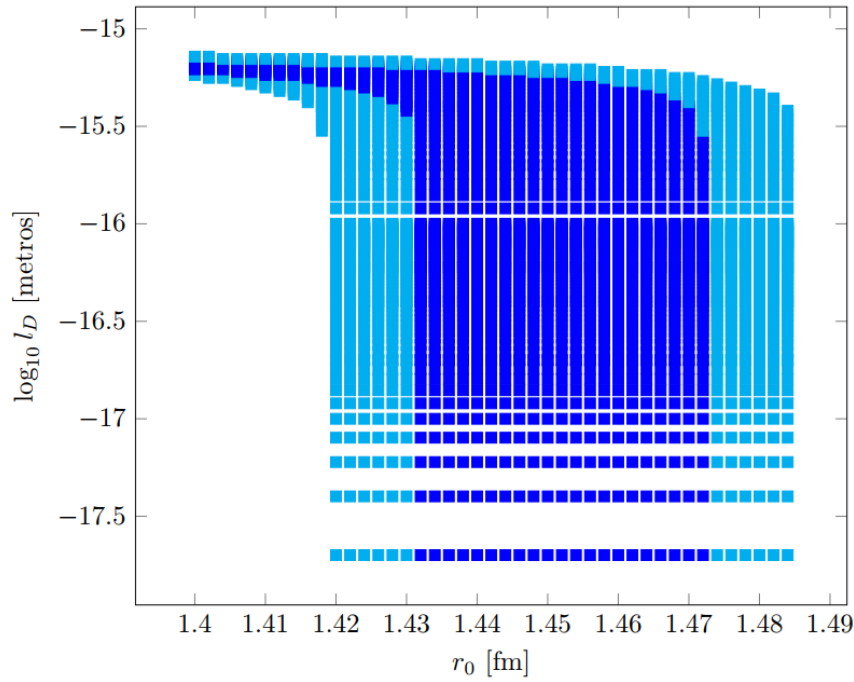


Figura 7 – Ajuste com $\delta = 4$. Em azul escuro: região de ajuste para r_0 e l_D . Em azul claro: zona de rejeição com nível de 5%.

3.7 Raio de Compactação das Dimensões extras

A partir dos valores de l_D da Tabela 2, podemos usar a seguinte expressão que relaciona o tamanho das dimensões extras ($2\pi R$) com o comprimento de Planck, l_D [16, 15]:

$$l_D^{2+\delta} = l_p^2 (2\pi R)^\delta, \quad (3.38)$$

onde $l_p = 1,616 \times 10^{-35}$ m é o comprimento de Planck usual e R é o raio de compactação das dimensões extras.⁹ A partir disso, é possível obtermos o valor de R para cada cenário (ver Tabela 3).¹⁰

De acordo com a Tabela 3, para $\delta = 1$, o raio de compactação da dimensão extra seria da ordem 10^{19} m, o que claramente pode ser descartado por observação, pois uma dimensão dessa ordem já teria sido detectada. Da mesma forma, para $\delta = 2$, $R \sim 10^2$ m é um resultado que também podemos descartar, pois espera-se que, neste modelo, as dimensões extras tenham tamanhos microscópicos. Contudo, a partir de $\delta = 4$, vemos que R teria um tamanho que está além do limite até onde as leis Newtonianas da gravitação foram testadas diretamente, por meio de versões modernas do teste da balança de torsão, que é da ordem de 0,01 mm [15].

⁹ Aqui, estamos supondo que todas as dimensões suplementares são compactas (com topologia curricular) e possuem o mesmo comprimento $2\pi R$.

¹⁰ Como utilizamos os valores de l_D da Tabela 2 para calcular os raios de compactação para cada cenário, para $\delta \geq 4$, os valores de R mostrados na Tabela 3 são os limites superiores.

Para finalizar nossa análise, podemos dizer que estes resultados para o raio de compactação apresentam vínculos relativamente fracos quando comparados à outros estudos feitos na literatura, como no acelerador de partículas LHC, por exemplo, onde foi obtido $R < 7,21 \times 10^{-12}$ m para o cenário com $\delta = 4$ [45, 46, 47]. Mesmo assim, devemos ressaltar que os vínculos obtidos aqui são independentes e, por isso, têm sua própria relevância.

Tabela 3 – Raio de compactação das dimensões extras.

δ	$2\pi R$ (m)	R (m)
1	$6,0 \times 10^{20}$	$9,6 \times 10^{19}$
2	$3,3 \times 10^3$	$5,2 \times 10^2$
3	$4,8 \times 10^{-3}$	$7,6 \times 10^{-4}$
4	$< 1,4 \times 10^{-9}$	$< 2,3 \times 10^{-10}$
5	$< 1,5 \times 10^{-10}$	$< 2,4 \times 10^{-11}$
6	$< 2,9 \times 10^{-11}$	$< 4,6 \times 10^{-12}$
7	$< 9,6 \times 10^{-12}$	$< 1,5 \times 10^{-12}$
8	$< 4,4 \times 10^{-12}$	$< 7,0 \times 10^{-13}$
9	$< 2,1 \times 10^{-12}$	$< 3,3 \times 10^{-13}$
10	$< 1,2 \times 10^{-12}$	$< 2,0 \times 10^{-13}$

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho fizemos uma revisão da teoria do decaimento alfa proposta por Gamow. A sua importância histórica na física é indiscutível, pois foi a primeira teoria a explicar o processo de decaimento alfa de núcleos radioativos. A proposta do presente trabalho foi aplicar a teoria de Gamow à um cenário com dimensões suplementares, com o objetivo de investigar as possíveis modificações que a existência de dimensões extras provocariam sobre o tempo de vida dos núcleos radioativos.

No capítulo I, apresentamos uma motivação histórica para o desenvolvimento deste trabalho, destacando as maiores unificações feitas na física e de que modo isso resultou no surgimento das teorias de dimensões extras. No capítulo II, desenvolvemos a fundamentação teórica. Inicialmente, fizemos uma introdução às teorias de dimensões extras de grande escala, onde calculamos primeiro o potencial gravitacional usual (3+1)-dimensional e, em seguida, fizemos uma generalização para determinar o potencial $(n+1)$ -dimensional. Ainda nesse capítulo, apresentamos também uma forma de calcular o potencial gravitacional em um Universo com dimensões extras compactas com base no modelo de branas, bem como as correções para o potencial que podemos extrair a partir disso. Em seguida, fizemos uma revisão da teoria de Gamow, a qual explica o processo de decaimento alfa de núcleos radioativos por meio do tunelamento quântico. Para aplicar a teoria de Gamow à um cenário com dimensões extras, vimos que devemos considerar uma pequena perturbação na energia potencial da partícula alfa, devido ao potencial gravitacional modificado. No capítulo III, obtivemos uma forma geral que prevê a modificação causada pela existência de dimensões extras ao tempo de vida dos núcleos. A partir disso, usando dados do decaimento alfa do Urânio para fazer um ajuste, conseguimos obter vínculos experimentais independentes para os parâmetros do modelo utilizado, sendo estes: o comprimento de Planck em dimensões extras, o raio de compactação e o número de dimensões extras.

Em conclusão, é importante destacarmos que obtivemos vínculos de forma completamente independente para o comprimento de Planck em dimensões extras, o que demonstra a relevância dos resultados obtidos neste estudo.

Por fim, como perspectiva futura, uma análise detalhada da Eq.3.30 poderia nos revelar novos vínculos para o comprimento de Planck em dimensões extras. De forma igualmente importante, uma análise olhando a Eq.2.34 como o potencial gravitacional modificado poderia nos permitir impor vínculos para os fatores da parametrização de Yukawa.

REFERÊNCIAS

- 1 NEWTON, I.; MOTTE, A. *The Mathematical Principles of Natural Philosophy: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. [S.l.]: Createspace Independent Publishing Platform, 2016. (Natural Philosophy Series). ISBN 9781532949685. 12
- 2 ROHRLICH, F. *From Paradox to Reality: Our Basic Concepts of the Physical World*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989. ISBN 9780521376051. 12
- 3 MAINZER, K. *Symmetries of Nature: A Handbook for Philosophy of Nature and Science*. [S.l.]: De Gruyter, 2013. ISBN 9783110886931. 12
- 4 ROONEY, A. *A História da Física. Da Filosofia ao Enigma da Matéria Negra*. 1. ed. [S.l.]: M.Books, 2013. ISBN 8576802171,9788576802174. 12, 13
- 5 SMALL, R. *An Account of the Astronomical Discoveries of Kepler: Including an Historical Review of the Systems which Had Successively Prevailed Before His Time*. [S.l.]: J. Mawman, 1804. 12
- 6 STEPHENSON, B. *Kepler's Physical Astronomy*. [S.l.]: Princeton University Press, 1994. (History of science). ISBN 9780691036526. 12
- 7 NUSSENZVEIG, H. *Curso de física básica: Eletromagnetismo (vol. 3)*. [S.l.]: Blucher, 2015. ISBN 9788521208020. 12, 13
- 8 YOUNG, H.; KRAMER, L.; FREEDMAN, R. *Study Guide, Sears & Zemansky's University Physics, 12th Edition, Young and Freedman*. [S.l.]: Pearson/Addison-Wesley, 2007. (Study Guide, Sears & Zemansky's University Physics, 12th Edition, Young and Freedman, v. 2-3). ISBN 9780321500373. 12, 13
- 9 MAXWELL, J.; TORRANCE, T.; EINSTEIN, A. *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*. [S.l.]: Scottish Academic Press, 1982. (Torrance collection). 13
- 10 EINSTEIN, A. Grundgedanken der allgemeinen relativitätstheorie und anwendung dieser theorie in der astronomie (fundamental ideas of the general theory of relativity and the application of this theory in astronomy). *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte (Part I)*, v. 315, 1915. 13
- 11 KALUZA, T. Zum unitätsproblem der physik. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, p. 966–972, 1921. 14
- 12 KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 37, n. 12, p. 895–906, 1926. 14
- 13 KLEIN, O. The atomicity of electricity as a quantum theory law. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 118, n. 2971, p. 516–516, 1926. 14
- 14 CHENG, T. *Einstein's Physics: Atoms, Quanta, and Relativity - Derived, Explained, and Appraised*. [S.l.]: OUP Oxford, 2013. ISBN 9780191648762. 14
- 15 SILVA, A. d. A. *Um Estudo Sobre Dimensões Extras*. Dissertação (Mestrado) — UFCG, 2009. 14, 17, 19, 37, 43

- 16 ZWIEBACH, B. *A First Course in String Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. (A First Course in String Theory). ISBN 9780521831437. 14, 18, 20, 37, 43, 50
- 17 ZWIEBACH, B. *A First Course in String Theory*. 2. ed. [S.l.]: New York: Cambridge University Press, 2009. 14, 20
- 18 ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 429, n. 3-4, p. 263–272, 1998. 14
- 19 ANTONIADIS, I. et al. New dimensions at a millimeter to a fermi and superstrings at a tev. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 436, n. 3-4, p. 257–263, 1998. 14
- 20 RANDALL, L.; SUNDRUM, R. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical review letters*, APS, v. 83, n. 17, p. 3370, 1999. 14
- 21 ARKANI-HAMED N.; DIMOPOULOS, S. D. G. The universe's unseen dimensions. *Scientific American*, New York, v. 12, n. 2, p. 66–73, 2002. 14
- 22 KAPNER, D. J. et al. Tests of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale. *Physical review letters*, APS, v. 98, n. 2, p. 021101, 2007. 15
- 23 MURATA, J.; TANAKA, S. A review of short-range gravity experiments in the lhc era. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 32, n. 3, p. 033001, Jan 2015. ISSN 1361-6382. 15, 16, 22
- 24 GAMOW, G. Zur quantentheorie des atomkernes. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 51, n. 3, p. 204–212, 1928. 15, 16, 27
- 25 GRIFFITHS, D. J.; FREITAS, L. *Mecânica quântica*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2011. 15, 16, 24, 29
- 26 GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics*. [S.l.]: New Jersey: Prentice Hall, 1995. 15, 16, 24, 25, 26, 27, 28, 29
- 27 ROCHA, J. M. d. Potencial gravitacional em dimensões extras: relatório científico. João pessoa. 2020. 16, 22, 51, 52
- 28 GRIFFITHS, D. *Eletrodinâmica, 3ª Edição*. [S.l.]: Editora Pearson Education, 2011. 19
- 29 BENDER C.M.; ORSZAG, S. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. [S.l.]: Springer, 1999. ISBN 0-387-98931-5. 22
- 30 MERZBACHER, E. Quantum mechanics, 1970. *John Wiler & Sons, New York Zbl0102*, v. 42701, n. 4, 1977. 24
- 31 GREINER, W. *Quantum mechanics: an introduction*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. 24, 27
- 32 EISBERG ROBERT; RESNICK, R. *Física Quântica - Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*. 1. ed. [S.l.]: Campus, 1979. ISBN 8570013094, 9788570013095. 27
- 33 ROHLF, J. W. *Modern Physics from alpha to Z0*. [S.l.]: John Wiley and Sons, Inc., 1994. ISBN 0471572705, 9780471572701. 30

- 34 NETO, J. B. *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2004. 33
- 35 LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007. 33
- 36 NESVIZHEVSKY, V. V.; PIGNOL, G.; PROTASOV, K. V. Neutron scattering and extra-short-range interactions. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 77, p. 034020, Feb 2008. 38
- 37 PESHKIN, M.; RINGO, G. R. On the repulsion of slow neutrons by attractive potentials. *American Journal of Physics*, v. 39, n. 3, p. 324–327, 1971. 38
- 38 BROWN, B. A. Simple relation for alpha decay half-lives. *Physical Review C*, APS, v. 46, n. 2, p. 811, 1992. 38, 39
- 39 MUGHABGHAB, S. F. *Neutron Cross Sections: Neutron Resonance Parameters and Thermal Cross Sections Part B: Z= 61-100*. [S.l.]: Academic press, 2012. v. 1. 38, 39
- 40 TAYLOR, J. R. *Introdução à análise de erros: o estudo de incertezas em medições físicas*. [S.l.]: Bookman Editora, 2009. 38, 40
- 41 TAYLOR, J. R. *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements*. 2nd ed. ed. [S.l.]: University Science Books, 1997. ISBN 093570275X,9780935702750,0935702423. 38, 40
- 42 RYTZ, A. Recommended energy and intensity values of alpha particles from radioactive decay. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, Elsevier, v. 47, n. 2, p. 205–239, 1991. 39, 58
- 43 VARLEY, F. S. Neutron scattering lengths and cross section. *Neutron news*, v. 3, n. 3, p. 29–37, 1992. 39
- 44 DAMAS, L. Linguagem c. 10a. Edição, LTC, 2007. 39
- 45 CMS, V. Khachatryan et al. *JHEP*, v. 11, n. 018, p. 1508–07774, 2015. 44
- 46 LANDSBERG, G. Searches for extra spatial dimensions with the cms detector at the lhc. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 30, n. 15, p. 1540017, 2015. 44
- 47 DAHIA, F.; LEMOS, A. Is the proton radius puzzle evidence of extra dimensions? *The European Physical Journal C*, Springer, v. 76, n. 8, p. 1–7, 2016. 44
- 48 BUTKOV, E. Física matemática, ltc. Rio de Janeiro, 1988. 51
- 49 ARFKEN, G.; WEBER, H. H. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. [S.l.]: Elsevier, 2007. 51
- 50 ZWILLINGER, D.; JEFFREY, A. *Table of integrals, series, and products*. [S.l.]: Elsevier, 2007. 53

5 APÊNDICE A-VOLUME DE UMA $(n-1)$ -ESFERA DE RAIO r

Vamos determinar a expressão para $Vol(S^{n-1}(r))$. Primeiro, vejamos os casos mais simples das esferas $S^1(r)$ e $S^2(r)$, definidas por

$$S^1(r) = x_1^2 + x_2^2 = r^2, \quad (5.1)$$

e

$$S^2(r) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2. \quad (5.2)$$

Sabemos que seus volumes são:

$$Vol(S^1(r)) = 2\pi r \quad \text{e} \quad Vol(S^2(r)) = 4\pi r^2.$$

Denotando os volumes das esferas unitárias como $Vol(S^1) = Vol(S^1(r=1))$ e $Vol(S^2) = Vol(S^2(r=1))$, então o volume de $S^{n-1}(r)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$Vol(S^{n-1}(r)) = r^{n-1} Vol(S^{n-1}). \quad (5.3)$$

Em $\mathbb{R}^n$, consideramos as coordenadas $x_1, x_2, \dots, x_n$ e r a coordenada radial. Então,

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2. \quad (5.4)$$

Vamos fazer o cálculo em duas etapas. Primeiro, calculamos a integral

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-r^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (5.5)$$

onde temos

$$I = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_i^2} dx_i = \pi^{n/2}. \quad (5.6)$$

O próximo passo é resolvermos a integral dividindo $\mathbb{R}^n$ em camadas. Como o espaço de r é $S^{n-1}(r)$, o volume de cada casca situada entre r e $r+dr$ é o volume de $S^{n-1}(r)$ vezes dr .

$$I = \int_0^\infty Vol(S^{n-1}(r)) e^{-r^2} dr = Vol(S^{n-1}) \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr. \quad (5.7)$$

Façamos a seguinte mudança de variável:

$$r^2 = t \Rightarrow r dr = \frac{1}{2} dt. \quad (5.8)$$

Assim,

$$r^{n-1} dr = r^{n-2} r dr = r^{2(n/2-1)} r dr = \frac{1}{2} t^{n/2-1} dt. \quad (5.9)$$

Dessa forma, teremos

$$I = \frac{1}{2} \text{Vol}(S^{n-1}) \int_0^\infty t^{n/2-1} e^{-t} dt . \quad (5.10)$$

Usando a função gama para expressar a integral acima, obtemos o resultado:

$$I = \frac{1}{2} \text{Vol}(S^{n-1}) \Gamma(n/2) . \quad (5.11)$$

Com isso,

$$\frac{1}{2} \text{Vol}(S^{n-1}) \Gamma(n/2) = \frac{1}{2} \frac{\text{Vol}(S^{n-1}(r))}{r^{n-1}} \Gamma(n/2) = \pi^{n/2} . \quad (5.12)$$

Portanto, o volume da $(n-1)$ -esfera será[16]

$$\text{Vol}(S^{n-1}(r)) = \frac{2\pi^{n/2} r^{n-1}}{\Gamma(n/2)} . \quad (5.13)$$

6 APÊNDICE B-CORREÇÕES DO POTENCIAL DEVIDO ÀS DIMENSÕES EXTRAS

Correções do potencial em coordenadas cartesianas

Começaremos partindo da *Fórmula do Somatório de Poisson* (ver Apêndice C). Como exemplo, consideremos primeiro uma função $F(t)$. Suponha que F é uma função periódica e, portanto, pode ser representada por meio de uma série de Fourier da seguinte forma:

$$F(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(t + pT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k/T) \frac{e^{\frac{2\pi i k t}{T}}}{T}, \quad (6.1)$$

sendo T o período de F e $g(k/T)$ a transformada de Fourier de $f(t)$ [27, 48, 49]. Com isso, podemos fazer uma analogia entre a Eq.6.1 e o nosso potencial gravitacional no modelo de branas, por meio das seguintes relações:

$$\phi_{p_1, \dots, p_\delta}(\mathbf{r}) \equiv f(t + pT) \quad e \quad \phi(\mathbf{r}) \equiv F(t). \quad (6.2)$$

Com isso, a partir da Eq.2.29,

$$f(t + pT) \equiv - \frac{G_D m}{\left[s^2 + \sum_{j=1}^{\delta} (w_j - (2\pi R) p_j)^2 \right]^{\frac{1+\delta}{2}}}. \quad (6.3)$$

No nosso caso, temos que $t \equiv w_j$ e $T \equiv 2\pi R$.¹ Com isso, a expressão para $f(t) \equiv f(w_1, \dots, w_\delta)$ será:

$$f(w_1, \dots, w_\delta) \equiv - \frac{G_D m}{\left[s^2 + \sum_{j=1}^{\delta} w_j^2 \right]^{\frac{1+\delta}{2}}} = - \frac{G_D m}{\left[s^2 + w^2 \right]^{\frac{1+\delta}{2}}}, \quad (6.4)$$

onde $w^2 = |\mathbf{w}|^2 = \sum_{j=1}^{\delta} w_j^2$. Então, sendo $\phi(\mathbf{r}) \equiv F(w_1, \dots, w_\delta)$,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(w_1 + p(2\pi R), \dots, w_\delta + p(2\pi R)) \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_\delta=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{k_1}{2\pi R}, \dots, \frac{k_\delta}{2\pi R}\right) \frac{e^{\frac{2\pi i k_1 w_1}{2\pi R}}}{2\pi R} \dots \frac{e^{\frac{2\pi i k_\delta w_\delta}{2\pi R}}}{2\pi R} \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_\delta=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{k_1}{2\pi R}, \dots, \frac{k_\delta}{2\pi R}\right) \frac{e^{\frac{i(k_1 w_1 + \dots + k_\delta w_\delta)}{R}}}{(2\pi R)^\delta}, \end{aligned}$$

ou simplesmente

¹ Por simplicidade, vamos supor que T é o mesmo para todas as dimensões extras.

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^\delta} g\left(\frac{k_1}{2\pi R}, \dots, \frac{k_\delta}{2\pi R}\right) \frac{e^{\frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}}{R}}}{(2\pi R)^\delta}, \quad (6.5)$$

onde

$$g\left(\frac{k_1}{2\pi R}, \dots, \frac{k_\delta}{2\pi R}\right) = \int_{\mathbb{R}^\delta} f(w_1, \dots, w_\delta) e^{-\frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}}{R}} d^\delta w. \quad (6.6)$$

Usando a relação da Eq.6.4, temos que

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{G_D m}{(2\pi R)^\delta} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^\delta} e^{\frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}}{R}} \int_{\mathbb{R}^\delta} \frac{e^{-\frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}}{R}}}{[s^2 + w^2]^{\frac{1+\delta}{2}}} d^\delta w. \quad (6.7)$$

Esta é a expressão simplificada, em coordenadas cartesianas, para o potencial modificado da Eq.2.30.

Correções do Potencial em Coordenadas Esféricas

Vamos encontrar uma expressão para o potencial modificado da Eq.6.7 em coordenadas esféricas. Primeiro, lembremos que, em coordenadas esféricas tridimensionais, a coordenada radial r de um ponto é relacionada com as coordenadas cartesianas desse ponto por meio da seguinte expressão: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

No caso da Eq.6.7, a integral é expressada em termos de $w_1, w_2, \dots, w_\delta$, e sabemos que $w^2 = w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_\delta^2$. Então, w é a nossa variável radial para as coordenadas esféricas em δ dimensões. As variáveis angulares serão $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{\delta-1}$. Usando o Apêndice D, é simples mostrar que a Eq.6.7 será

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{G_D m}{(2\pi R)^\delta} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^\delta} e^{\frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}}{R}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}}{R}}}{[s^2 + w^2]^{\frac{1+\delta}{2}}} w^{\delta-1} \sin^{\delta-2} \theta_1 \sin^{\delta-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{\delta-2} dw d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{\delta-1}.$$

Calculando as $\delta - 2$ integrais externas², como no Apêndice D, fazendo $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}/R$ na equação acima, e supondo que θ_1 é o ângulo entre $\mathbf{k}'$ e $\mathbf{w}$, teremos

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{G_D m}{(2\pi R)^\delta} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^\delta} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{w}} \text{Vol}(S^{\delta-2}) \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{e^{ik'w \cos \theta_1}}{[s^2 + w^2]^{\frac{1+\delta}{2}}} w^{\delta-1} \sin^{\delta-2} \theta_1 dw d\theta_1. \quad (6.8)$$

As integrais na equação acima podem ser resolvidas fazendo uma separação[27]

$$\int_0^\pi \int_0^\infty \frac{e^{ik'w \cos \theta_1}}{[s^2 + w^2]^{\frac{1+\delta}{2}}} w^{\delta-1} \sin^{\delta-2} \theta_1 dw d\theta_1 = \int_0^\infty \frac{w^{\delta-1}}{[s^2 + w^2]^{\frac{1+\delta}{2}}} dw \int_0^\pi e^{ik'w \cos \theta_1} \sin^{\delta-2} \theta_1 d\theta_1. \quad (6.9)$$

² As integrais em $(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{\delta-1})$.

Podemos usar a seguinte identidade³ para a segunda integral na Eq.6.9:

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{\pm iz \cos \theta} \sin^{2\nu} \theta d\theta, \quad \text{Re}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 0,$$

onde $\delta - 2 \equiv 2\nu \rightarrow \nu \equiv \frac{\delta}{2} - 1$, $z \equiv k'w$ e $\theta \equiv \theta_1$. Assim,

$$J_{\frac{\delta}{2}-1}(k'w) = \frac{\left(\frac{k'w}{2}\right)^{\frac{\delta}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{\delta-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{ik'w \cos \theta_1} \sin^{\delta-2} \theta_1 d\theta_1,$$

sendo

$$\Gamma\left(\frac{\delta-1}{2}\right) = \frac{2\pi^{\frac{\delta-1}{2}}}{\text{Vol}(S^{\delta-2})} \quad e \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2}.$$

Dessa forma, a nossa integral fica:

$$\int_0^\pi e^{ik'w \cos \theta_1} \sin^{\delta-2} \theta_1 d\theta_1 = J_{\frac{\delta}{2}-1}(k'w) \frac{2^{\delta/2} \pi^{\delta/2} w^{1-\delta/2}}{k'^{\frac{\delta}{2}-1} \text{Vol}(S^{\delta-2})}.$$

Substituindo esse resultado na Eq.6.9, temos

$$\int_0^\infty \frac{w^{\delta-1}}{[s^2 + w^2]^{\frac{1+\delta}{2}}} dw \int_0^\pi e^{ik'w \cos \theta_1} \sin^{\delta-2} \theta_1 d\theta_1 = \frac{2^{\delta/2} \pi^{\delta/2}}{k'^{\frac{\delta}{2}-1} \text{Vol}(S^{\delta-2})} \int_0^\infty \frac{w^{\delta/2}}{[s^2 + w^2]^{\frac{1+\delta}{2}}} J_{\frac{\delta}{2}-1}(k'w) dw. \quad (6.10)$$

Agora, podemos usar a seguinte identidade⁴ para calcular a integral na Eq.6.10:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu+1}}{(a^2 + x^2)^{\nu+3/2}} J_\nu(bx) dx = \frac{\pi^{1/2} b^\nu}{2^{\nu+1} a e^{ab} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)}, \quad \text{Re}(a) > 0, \quad b > 0, \quad \text{Re}(\nu) > -1, \quad (6.11)$$

onde podemos identificar os seguintes termos: $a \equiv s$, $b \equiv k'$, $x \equiv w$ e $\nu \equiv \frac{\delta}{2} - 1$. Então,

$$\int_0^\infty \frac{w^{\frac{\delta}{2}}}{[s^2 + w^2]^{\frac{1+\delta}{2}}} J_{\frac{\delta}{2}-1}(k'w) dw = \frac{\pi^{1/2} k'^{\frac{\delta}{2}-1}}{2^{\delta/2} s e^{sk'} \Gamma\left(\frac{1+\delta}{2}\right)}. \quad (6.12)$$

Substituindo este resultado na Eq.6.10, teremos

$$\int_0^\infty \frac{w^{\delta-1}}{[s^2 + w^2]^{\frac{1+\delta}{2}}} dw \int_0^\pi e^{ik'w \cos \theta_1} \sin^{\delta-2} \theta_1 d\theta_1 = \frac{\pi}{s e^{sk'}}. \quad (6.13)$$

Com isso, o potencial gravitacional modificado $\phi(\mathbf{r})$ da Eq.6.8 pode ser escrito da forma:

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{G_D m}{s} \frac{\pi \text{Vol}(S^{\delta-2})}{(2\pi R)^\delta} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^\delta} e^{-sk'} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{w}}. \quad (6.14)$$

Por simplicidade, consideramos $w = |\mathbf{w}| = 0$ e, com isso, temos⁵

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{G_D m}{r} \frac{\pi \text{Vol}(S^{\delta-2})}{(2\pi R)^\delta} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^\delta} e^{-rk'}. \quad (6.15)$$

³ Cap. 8, fórmula 8.411 (7) na pág. 912 da Ref.[50].

⁴ Cap. 6, fórmula 6.565 (3) na pág. 678 da Ref.[50].

⁵ Neste caso, fazer $|\vec{w}| = 0$ significa que temos $r = s$.

7 APÊNDICE C-FÓRMULA DO SOMATÓRIO DE POISSON

A fórmula do somatório de Poisson (FSP) para uma função periódica f é definida da seguinte forma:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(t + pT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k/T) \frac{e^{\frac{2\pi i k t}{T}}}{T}, \quad (7.1)$$

onde T é o período e $g(k/T)$ a transformada de Fourier de $f(t)$, dada por

$$g(k/T) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\pi i k \tau}{T}} f(\tau) d\tau. \quad (7.2)$$

8 APÊNDICE D-INTEGRAL DE UM VOLUME INFINITESIMAL δ -DIMENSIONAL EM COORDENADAS ESFÉRICAS

O cálculo de um δ -volume em coordenadas esféricas é análogo ao de um volume tridimensional. Contudo, é necessário nos atentarmos à alguns detalhes presentes durante a sua resolução. Então, comecemos lembrando o que acontece com a integral de um volume infinitesimal d^3V ao fazermos uma mudança das coordenadas cartesianas x, y, z para esféricas r, θ, ϕ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} d^3V &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty |J| dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= 4\pi \int_0^\infty r^2 dr , \end{aligned}$$

ou ainda

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3V = \text{Vol}(S^2) \int_0^\infty r^2 dr , \quad (8.1)$$

onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. No caso mais geral, em δ dimensões, a integral de um volume infinitesimal $d^\delta V$ seria da forma¹

$$\int_{\mathbb{R}^\delta} d^\delta V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^\infty |J| dr d\theta_1 \cdots d\theta_{\delta-2} d\theta_{\delta-1} . \quad (8.2)$$

Para encontrar o determinante Jacobiano, J , em δ dimensões, lembremos que, em 3D, o deslocamento infinitesimal total em coordenadas esféricas é dado pelo vetor

$$d\mathbf{l} = dl_r \hat{r} + dl_\theta \hat{\theta} + dl_\phi \hat{\phi} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi} . \quad (8.3)$$

Com isso, o volume infinitesimal d^3V em coordenadas esféricas é dado por:

$$d^3V = dl_r dl_\theta dl_\phi = \underbrace{r^2 \sin \theta}_{|J| \text{ em 3D}} dr d\theta d\phi . \quad (8.4)$$

Em δ D, o deslocamento infinitesimal total é

¹ Vamos usar a notação $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{\delta-1})$ para representar as variáveis angulares.

$$\begin{aligned}
d\mathbf{l} &= dl_r \hat{r} + dl_{\theta_1} \hat{\theta}_1 + dl_{\theta_2} \hat{\theta}_2 + \cdots + dl_{\theta_{\delta-1}} \hat{\theta}_{\delta-1} \\
&= dr \hat{r} + r d\theta_1 \hat{\theta}_1 + r \sin \theta_1 d\theta_2 \hat{\theta}_2 + r \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_3 \hat{\theta}_3 + \cdots \\
&\quad + r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{\delta-2} d\theta_{\delta-1} \hat{\theta}_{\delta-1} .
\end{aligned}$$

Com isso, teremos

$$d^\delta V = \underbrace{r^{\delta-1} \sin^{\delta-2} \theta_1 \sin^{\delta-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{\delta-2}}_{|J| \text{ em } \delta D} dr d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{\delta-1} . \quad (8.5)$$

Portanto, a expressão geral para a integral de um δ -volume infinitesimal em coordenadas esféricas é:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^\delta} d^\delta V &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^\infty r^{\delta-1} \sin^{\delta-2} \theta_1 \sin^{\delta-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{\delta-2} dr d\theta_1 \cdots d\theta_{\delta-1} \\
&= Vol(S^{\delta-2}) \int_0^\pi \int_0^\infty r^{\delta-1} \sin^{\delta-2} \theta_1 dr d\theta_1 \\
&= Vol(S^{\delta-1}) \int_0^\infty r^{\delta-1} dr .
\end{aligned} \quad (8.6)$$

9 APÊNDICE E-DECAIMENTOS RADIOATIVOS: TEMPO DE VIDA E TEMPO DE MEIA VIDA

A radioatividade foi descoberta em 1896 pelos cientistas Henri Becquerel e Marie Curie, enquanto trabalhavam com materiais fosforescentes. O decaimento radioativo é um processo aleatório. Qualquer partícula dada tem uma certa probabilidade por unidade de tempo de decaimento espontâneo. A probabilidade de decaimento é independente da vida anterior da partícula. Então, se supormos que $N(t)$ é o número de partículas em uma amostra, a taxa de decaimento $-dN/dt$ é proporcional à N ,

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N, \quad (9.1)$$

com $\lambda = \text{const.}$ A partir da Eq.9.1, supondo que N_0 é o número inicial de partículas, é simples mostrar que o número de partículas na amostra em função do tempo será da forma:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (9.2)$$

Na Eq.9.2 notamos que λ tem unidades de frequência. No caso de uma única partícula, é comum nos referirmos ao tempo de vida (τ), onde temos a seguinte relação:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \quad (9.3)$$

Assim, a partir da definição de τ , dada na Eq.9.3, e da Eq.9.2 para uma grande amostra de partículas, temos

$$N(\tau) = N_0 e^{-1} \approx 0,367 N_0, \quad (9.4)$$

ou seja, a Eq.9.4 nos diz que, após um tempo τ , aproximadamente 36,7% das partículas do sistema não terão decaído. Em física nuclear, uma nomenclatura muito utilizada é o tempo de meia vida do sistema ($t_{1/2}$), o qual está relacionado ao tempo de vida da seguinte forma:

$$e^{-t_{1/2}/\tau} = \frac{1}{2}, \quad (9.5)$$

de onde chegamos à seguinte relação:

$$t_{1/2} = \tau \ln 2. \quad (9.6)$$

10 APÊNDICE F-DADOS EXPERIMENTAIS DO URÂNIO

Na tabela abaixo, A significa o número de massa do núcleo-pai (isótopo do Urânio), M é a massa do núcleo-filho (em unidades atômicas), E é a energia da partícula alfa emitida (em Megaelétron-volt) e $t_{1/2}$ é o tempo de meia vida do isótopo do Urânio.

Tabela 4 – Dados do decaimento alfa do Urânio. Fontes: *National Institute of Standards and Technology* (NIST) e a Ref.[42].

i	A	M (u)	E (MeV)	$t_{1/2}$ (unidade)
1	226	222,018468	7,570	0,35 (segundos)
2	228	224,021467	6,680	9,17 (minutos)
3	230	226,024903	5,888	21,0 (dias)
4	232	228,0287411	5,320	68,8 (anos)
5	234	230,0331341	4,775	$2,455 \times 10^5$ (anos)
6	236	232,0380558	4,494	$2,342 \times 10^7$ (anos)
7	238	234,0436014	4,198	$4,47 \times 10^9$ (anos)