



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

GRÁFICO DE CONTROLE BETA PRIME INFLACIONADO EM ZERO

Raul Renner Martins de Sá

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientadores: Tarciana Liberal Pereira
Tatiene Correia de Souza

João Pessoa
Julho de 2022

GRÁFICO DE CONTROLE BETA PRIME INFLACIONADO EM ZERO

Raul Renner Martins de Sá

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL (PPGMMC) DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA E AOS MEMBROS EXTERNOS A ESTE PROGRAMA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.

Examinada por:

Prof. Tarciana Liberal Pereira, D.Sc.

Prof. Tatiene Correia de Souza, D.Sc.

Prof. Bruno Ferreira Frascaroli, D.Sc.

Prof. Luiz Medeiros de Araujo Lima Filho, D.Sc.

JOÃO PESSOA, PB – BRASIL

JULHO DE 2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S111g Sá, Raul Renner Martins de.

Gráfico de controle beta prime inflacionado em zero
/ Raul Renner Martins de Sá. - João Pessoa, 2022.
47 f. : il.

Orientação: Tarciana Liberal Pereira.

Coorientação: Tatiene Correia de Souza.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CI.

1. Controle de processo estatístico. 2. Distribuição
beta prime inflacionada. 3. Distribuições
inflacionadas. 4. Estimadores de máxima
verossimilhança. 5. Gráfico de controle. I. Pereira,
Tarciana Liberal. II. Souza, Tatiene Correia de. III.
Título.

UFPB/BC

CDU 004.451.25(043)

Ata da Sessão Pública de Defesa de Dissertação de Mestrado de **RAUL RENNER MARTINS DE SÁ**, candidato ao título de Mestre em Matemática Computacional, na Área de Modelagem Matemática e Computacional, realizada no dia 25 de julho de 2022.

1 Aos vinte e cinco dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e dois, às 9h, via
2 videoconferência, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para julgar o
3 Trabalho Final do discente **RAUL RENNER MARTINS DE SÁ**, vinculado a Universidade
4 Federal da Paraíba sob a matrícula nº 20201001618, candidato ao grau de Mestre em
5 “*Modelagem Matemática e Computacional*”, na linha de pesquisa “*Modelagem*
6 *Probabilística*”, do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e
7 Computacional. A comissão examinadora foi composta pelos professores Tarciana Liberal
8 Pereira de Araujo, Orientadora e Presidente da Banca; Tatiene Correia de Souza,
9 Coorientadora; Bruno Ferreira Frascaroli, Examinador Interno ao Programa; e Luiz Medeiros
10 de Araujo Lima Filho, Examinador Externo ao Programa. Dando início aos trabalhos, a
11 Professora Tarciana Liberal, Presidente da Banca, cumprimentou os presentes, comunicou aos
12 mesmos a finalidade da reunião e passou a palavra ao candidato para que fizesse, oralmente, a
13 exposição do trabalho de dissertação intitulado “*Gráfico de Controle Beta Prime*
14 *Inflacionado*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que
15 emitiu o seguinte parecer: “*aprovado*”. Do ocorrido, eu, Gean Paulo P. M. de Barros,
16 secretário do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional
17 (PPGMMC), lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Banca
18 Examinadora.

João Pessoa, 25 de julho de 2022.

Gean Paulo Pereira Maurício de Barros
Secretário do PPGMMC
SIAPE 2326476

Prof^ª. Dr^ª. Tarciana Liberal Pereira de Araujo
Orientadora (PPGMMC)



Prof^ª. Dr^ª. Tatiene Correia de Souza
Coorientadora (PPGMMC)



Prof. Dr. Bruno Ferreira Frascaroli
Examinador Interno ao Programa (PPGMMC)



Prof. Dr. Luiz Medeiros de Araujo Lima Filho
Examinador Externo ao Programa (UFPB)



*Dedico essa dissertação a
madrinha Vené (in memoriam),
uma tia que sempre me amou e
acompanhou toda minha
trajetória acadêmica.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus pela graça concedida. Agradeço também as minhas orientadoras Tarciana por se fazer tão presente me ajudando a cada dificuldade encontrada nessa jornada e Tatiene por oferecer todo suporte para conclusão desse trabalho. Aos professores Luiz e Bruno por serem membros da minha banca contribuindo muito com essa dissertação, também ao Gean, secretário do PPGMMC que me ajudou todos esses anos no programa com a parte burocrática.

A minha psicóloga Glória por assumir um papel tão importante de me ajudar a passar pelos momentos de exaustão. A minha amiga do mestrado Katy, amigos da vida Bruno e Letícia, entre muitos outros que amo.

A minha família inteira que fazem de tudo por mim e ofereceram todo suporte pra que eu pudesse crescer na minha vida acadêmica e profissional, aos meus pais Rita Maria (Ritinha) e Rigoberto, minha madrinha Rosimere com quem morei em João Pessoa por muitos anos, meu irmão Ray e cunhada Mayane, tia Rita e família com quem morei nos meus primeiros nessa nova cidade. Não tem como mencionar todas as pessoas importantes da minha família, pois não caberia aqui, mas todos cabem no meu coração.

E por fim a madrinha Vené, uma tia especial que sempre me amou e que faleceu de covid-19 no fim de 2021, sei que hoje ela está feliz por me ver concluindo mais essa etapa de vida.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional (M.Sc.)

GRÁFICO DE CONTROLE BETA PRIME INFLACIONADO EM ZERO

Raul Renner Martins de Sá

Julho/2022

Orientadores: Tarciana Liberal Pereira
Tatiene Correia de Souza

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

A distribuição beta prime é muito flexível para modelar dados que são medidos em uma escala contínua e restritos aos reais positivos, uma vez que sua densidade assume formas bastante diferentes. Quando os dados apresentam zeros, uma distribuição absolutamente contínua não é mais adequada e dessa forma é necessário considerar uma distribuição inflacionada em zero. O objetivo desse trabalho é propor um gráfico de controle baseado na distribuição beta prime inflacionada para monitorar características de qualidade no suporte dos reais positivos incluindo o zero. Os gráficos propostos serão abordados considerando medidas individuais ($n = 1$) e a média ($n > 1$).

Palavras chave: Controle de Processo Estatístico; Distribuição Beta Prime Inflacionada; Distribuições Inflacionadas; Estimadores de Máxima Verossimilhança; Gráfico de Controle.

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Mathematical and Computational Modeling (M.Sc.)

GRÁFICO DE CONTROLE BETA PRIME INFLACIONADO EM ZERO

Raul Renner Martins de Sá

July/2022

Advisors: Tarciana Liberal Pereira
Tatiene Correia de Souza

Program: Computational Mathematical Modelling

A prime beta distribution is very different for modeling data that are averaged on a continuous scale and restricted to positive reals, since their density takes on quite a bit. When the data have zeros, an absolutely continuous distribution is no longer adequate and therefore it is necessary to consider a distribution inflated to zero. The work of this type of work is a control chart based on a prime beta distribution inflated to a positive quality characteristic with no real support, including zero. The proposed graphics were taken into account for individuals ($n = 1$) and the media ($n > 1$).

Keywords: Beta Prime distribution; Control Chart; Inflated Distribution; Maximum Likelihood Estimators; Statistical Process Control.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	1
1.1 Organização da dissertação	3
1.2 Suporte computacional	3
2 Conceitos Básicos	5
2.1 Distribuição beta prime	5
2.2 Distribuição beta prime inflacionada	6
3 Gráfico de controle beta prime inflacionado em zero	10
3.1 Gráfico de controle BPIZ para monitorar observações individuais	12
3.2 Gráfico de controle BPIZ para monitorar observações não individuais	14
3.2.1 Algoritmo para gráfico de controle BPIZ	16
3.3 Performance do gráfico de controle	16
4 Avaliação Numérica	18
4.1 Observações individuais	19
4.2 Observações não individuais	20
5 Aplicação	32
6 Conclusões	35
Referências Bibliográficas	36

Lista de Figuras

2.1	Densidades da distribuição beta prime inflacionada em zero, $\lambda = 0, 05$ e $0, 2$; $\mu = 1$ e 5 ; e $\phi = 20$ e 40	9
3.1	Exemplo ilustrativo de um gráfico de controle	11
5.1	Gráfico dos limites de controle com base na distribuição BPIZ, para monitorar o índice pluviométrico na cidade de Portland na Austrália, no mês de agosto entre 2009 e 2021, exceto para o ano 2016.	33

Lista de Tabelas

4.1	Cenários utilizados no estudo de simulação.	18
4.2	Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, considerando medi- das individuais para os cenários 1, 2, 3 e 4.	22
4.3	Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, considerando medi- das individuais para os cenários 5, 6, 7 e 8.	23
4.4	Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 1	24
4.5	Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 2	25
4.6	Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 3	26
4.7	Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 4	27
4.8	Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 5	28
4.9	Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 6	29
4.10	Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 7	30
4.11	Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 8	31
5.1	Performance da carta de controle BPIZ para a aplicação.	34

Capítulo 1

Introdução

Segundo [MONTGOMERY \(2017\)](#), a conscientização e a introdução de métodos formais para o controle e melhoria da qualidade de produtos têm tido um desenvolvimento evolutivo. Em 1924, Walter A. Shewhart, dos Bell Telephone Laboratories, desenvolveu o conceito estatístico de gráfico de controle, que é considerado como o começo formal do controle estatístico de processos. O controle estatístico do processo (CEP) é uma poderosa coleção de ferramentas úteis na obtenção da estabilidade do processo e na melhoria da capacidade através da redução da variabilidade.

Independente de quão bem planejado seja um processo de produção, sempre existirá uma quantidade de variabilidade inerente ou aleatória. A variabilidade aleatória é o efeito cumulativo de muitas causas pequenas essencialmente inevitáveis. Um processo que opera com causas aleatórias da variação está sob controle. Em contra partida, existem outros tipos de variabilidade que podem estar presentes na saída de um processo e que surgem de máquinas ajustadas, ou controladas de maneiras inadequadas, erros de operador ou matéria-prima defeituosa. Essa variabilidade é grande quando comparada a uma variabilidade natural e são chamadas de causas atribuíveis de variação. Um processo que opera na presença de causas atribuíveis está fora de controle.

[MONTGOMERY \(2017\)](#) afirma que o CEP tem como um dos seus principais objetivos a detecção, de forma rápida, da ocorrência de causas atribuíveis na característica de qualidade, com a finalidade de que o processo seja investigado e se tenha uma ação corretiva antes que muitas unidades defeituosas sejam fabricadas. Uma técnica para monitoramento do processo usada com o propósito de fazer essa investigação e ação corretiva é o gráfico de controle que ainda podem ser usados para estimar os parâmetros da distribuição da variável de interesse em um processo de produção, determinar quão capaz é o processo,

fornecer informação útil à melhoria do processo e reduzir a variabilidade do processo.

Muitas características de qualidade podem ser expressas em termos de uma variável contínua. Exemplos para isso são dimensões como comprimento ou largura, volume, peso e temperatura. Gráficos de controle para variáveis são utilizados quando se tem uma variável contínua como característica de qualidade. Sendo assim, existem estudos de gráficos de controle que modelam características de qualidade com valores reais positivos. Como exemplos de trabalhos com essas características é possível apresentar, [HSIUYING WANG e YEH \(2016\)](#) que propuseram diferentes gráficos de controle para a média da distribuição lognormal; [HO *et al.* \(2021\)](#) apresentam um gráfico de controle para uma nova reparametrização da distribuição Weibull, expressa em termos do valor médio; e [BOURGUIGNON *et al.* \(2021\)](#) propuseram cartas de controle para monitorar o parâmetro mediano da Birnbaum-Saunders.

A distribuição beta prime é muito flexível para modelar dados reais positivos que são medidos em uma escala contínua, uma vez que sua densidade tem formas bastante diferentes dependendo dos valores dos dois parâmetros que indexam a distribuição, como é possível ver em [BEKKER *et al.* \(2009\)](#); [BOURGUIGNON *et al.* \(2018\)](#). Entretanto, a distribuição beta prime não é capaz de abranger dados que contenham zeros. Um exemplo para tal situação pode ser visto em [TULUPYEV *et al.* \(2013\)](#), com o qual deseja-se desenvolver uma medida de índices de risco individuais para a transmissão de doenças contagiosas, como o HIV, que são baseados em entrevistas de indivíduos com comportamentos de risco conhecidos. Esses comportamentos normalmente incluem uso de drogas intravenosas, abuso de substâncias e sexo desprotegido com estranhos. Especificamente, é necessário uma estimativa da frequência desses comportamentos de risco. A proposta dos autores constitui em substituir os valores iguais a zero por 0,5 para que fosse possível utilizar a distribuição beta prime para modelar a frequência desses comportamentos.

[CORPES \(2021\)](#) propôs a distribuição beta prime inflacionada em zero que é uma distribuição de mistura entre uma distribuição contínua e uma distribuição degenerada no zero. Devido a necessidade de ferramentas de controle para monitorar variáveis com valores no suporte dos reais positivos que podem assumir valores iguais a zero, o objetivo desse trabalho é propor um gráfico de controle baseado na distribuição beta prime inflacionada. Exemplos de variáveis com essa situação que podemos citar é o índice pluviométrico que tem valores maiores que zero, e no dia que não tem registro pluviométrico o valor é zero, como também dados de taxa de natalidade, mortalidade, entre outros que no dia que não tem registro

assume valor zero. É possível encontrar alguns outros autores que trabalharam com gráficos de controle para distribuições inflacionadas, como [DE ARAUJO LIMA-FILHO *et al.* \(2019\)](#) que propuseram gráficos de controle beta inflacionado para monitorar processos de limite duplo e [SEVERIANO \(2021\)](#) que propuseram gráficos de controle para variáveis aleatórias positivas contínuas inflacionadas em zero, considerando as distribuições gamma inflacionada em zero e inversa Gaussiana inflacionada em zero.

1.1 Organização da dissertação

Para fins de defesa dessa dissertação de mestrado o trabalho está organizado em mais cinco capítulos, onde estes apresentam:

- Capítulo 2: os conceitos básicos sobre as distribuições beta prime e beta prime inflacionada;
- Capítulo 3: gráficos de controle de modo geral, gráfico de controle para distribuição beta prime inflacionada em zero, tanto para monitorar observações individuais ($n = 1$), quanto para monitorar observações não individuais ($n > 1$);
- Capítulo 4: avaliação numérica do gráfico de controle proposto para observações individuais, e também para monitorar a média de observações não individuais, adicionalmente também é apresentada a comparação do gráfico de controle proposto com os gráficos de controle considerando as distribuições beta prime, gamma e weibull;
- Capítulo 5: aplicação a dados reais para ilustrar o gráfico de controle proposto no capítulo 4. Os dados utilizados consiste no índice pluviométrico da cidade de Portland na Austrália analisando o mês de agosto entre 2009 e 2021;
- Capítulo 6: considerações finais do trabalho que incluem conclusões e direcionamentos para trabalhos futuros.

1.2 Suporte computacional

Todos os resultados apresentados nessa dissertação foram obtidos utilizando o ambiente de programação R (versão 3.3.0), disponível gratuitamente através do site do [RStudio](#). Assim também como foi usado o pacote [GAMLSS](#) para comparação numérica com a distribuição beta prime inflacionada, que pode ser encontrado no

site <https://cran.r-project.org/>.

O `GAMLSS` é um pacote de expansão do software `R`, que tem disponibilidade gratuita e livre acesso. Como é mencionado em [PAIVA *et al.* \(2010\)](#), o `GAMLSS` é uma classe de modelos bastante flexível porque permite além de escolher entre uma grande variedade de distribuições para a variável dependente, escolher várias funções de ligação para os efeitos das variáveis preditoras sobre a variável dependente. No `GAMLSS`, a variável $Y \sim D(\mu, \sigma, \nu, \tau)$, onde D pode ser qualquer distribuição (incluindo distribuições contínuas altamente assimétricas e curtóticas e distribuições discretas) e as letras gregas representam os parâmetros da distribuição. Existem cerca de 40 tipos diferentes de famílias de distribuições disponíveis no pacote `GAMLSS`, com um, dois, três ou quatro parâmetros, tanto distribuições contínuas (normal, lognormal, exponencial, gamma, beta, BoxCox power exponencial, BoxCox t, BoxCox Cole Green, Gumbell, Johnson's SU, Weibull, etc.), como distribuições discretas (Poisson, Sichel, binomial, beta binomial, entre outras.) ou mistas (Poisson inflacionada em zero, Gaussiana inversa ajustada em zero, beta inflacionada em zero e um, etc.).

Capítulo 2

Conceitos Básicos

São apresentados nesse capítulo os conceitos básicos para fundamentação deste trabalho, tais como a distribuição beta prime e a distribuição beta prime inflacionada.

2.1 Distribuição beta prime

A distribuição beta prime foi introduzida por [MCDONALD \(1984\)](#) e é uma generalização da distribuição beta. São discutidos em [MCDONALD \(2008\)](#) algumas propriedades a respeito desta distribuição, tais como os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros obtidos.

Seja Y uma variável aleatória (*v.a.*) que segue uma distribuição beta prime BP, $Y \sim BP(y; \alpha, \beta)$. A função densidade de probabilidade (*f.d.p.*) é dada por:

$$f(y; \alpha, \beta) = \frac{y^{\alpha-1}(1+y)^{-(\alpha+\beta)}}{B(\alpha, \beta)}, \quad y > 0, \quad (2.1)$$

em que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são parâmetros de forma e $B(\alpha, \beta)$ é a função beta. A função de distribuição acumulada (*f.d.a.*) da distribuição BP é dada por:

$$F(y; \alpha, \beta) = B(y; \alpha, \beta), \quad (2.2)$$

em que $B(y; \alpha, \beta) = \int_0^y t^{\alpha-1}(1+t)^{-(\alpha+\beta)} dt$ é a função beta incompleta regularizada.

A esperança e a variância da (*v.a.*) que segue distribuição BP são dadas, respectivamente, por:

$$E[Y] = \frac{\alpha}{\beta - 1}, \quad (2.3)$$

e,

$$\text{Var}[Y] = \frac{\alpha(\alpha + \beta - 1)}{(\beta - 1)^2(\beta - 2)}. \quad (2.4)$$

Com o intuito de propor um novo modelo de regressão, [BOURGUIGNON et al. \(2018\)](#) propuseram uma nova parametrização para a distribuição beta prime em função da média e da precisão, em que foram considerados $\mu = \alpha/(\beta - 1)$ e $\phi = \beta - 2$, com $\alpha = \mu(1 + \phi)$ e $\beta = 2 + \phi$. Deste modo, a densidade dessa nova reparametrização da distribuição beta prime é dada por:

$$f(y; \mu, \phi) = \frac{y^{\mu(\phi+1)-1}(1+y)^{-[\mu(\phi+1)+\phi+2]}}{B(\mu(1+\phi), \phi+2)}, \quad (2.5)$$

em que $y > 0$, $\mu > 0$ e $\phi > 0$. Usa-se a notação $Y \sim BP(\mu, \phi)$ para uma *v.a.* que segue distribuição beta prime em função da média e da precisão. Tem-se de (2.5) que o valor esperado e variância da distribuição reparametrizada são dados por:

$$E[Y] = \frac{\mu(1 + \phi)}{2 + \phi - 1} = \mu; \quad (2.6)$$

e,

$$\text{Var}[Y] = \frac{\mu(1 + \phi)[\mu(1 + \phi) + (\phi + 2 - 1)]}{(\phi + 2 - 1)^2(\phi + 2 - 2)} = \frac{\mu(1 + \mu)}{\phi}. \quad (2.7)$$

A distribuição BP, não pode ser utilizada quando os dados apresentam zeros, ou seja, quando a *v.a.* Y assume o valor zero com probabilidade positiva.

2.2 Distribuição beta prime inflacionada

A partir da distribuição beta prime uma nova parametrização também foi proposta, como é possível ver em [TULUPYEV et al. \(2013\)](#) e [BOURGUIGNON et al. \(2018\)](#), respectivamente. A distribuição beta prime modela dados no suporte $(0, \infty)$, por isso para abranger valores iguais a zero é necessário um modelo apropriado que

deve adicionar um ponto de massa em zero. A distribuição beta prime inflacionada em zero (BPIZ), proposta por CORPES (2021), tem função de distribuição acumulada definida por:

$$\text{BPIZ}(y; \lambda, \mu, \phi) = \lambda + (1 - \lambda)\text{BP}(y; \mu, \phi), \quad (2.8)$$

em que BP é a função de distribuição acumulada da distribuição beta prime, e λ , parâmetro de mistura, é a probabilidade da (*v.a.*) y assumir valor zero, ou seja, $\lambda = P(y = 0)$, com $0 < \lambda < 1$.

A função densidade de probabilidade (*f.d.p*) da distribuição BPIZ é definida por:

$$\text{bpiz}(y; \lambda, \mu, \phi) = \{\lambda^{\mathbb{I}_{\{0\}}(y)}(1 - \lambda)^{1 - \mathbb{I}_{\{0\}}(y)}\}\{\text{bp}(y; \mu, \phi)^{1 - \mathbb{I}_{\{0\}}(y)}\}, \quad (2.9)$$

em que $\mathbb{I}_{\{0\}}(y)$ é a função indicadora avaliada no ponto zero, assume 1 se $Y = 0$ e 0 se $Y \neq 0$. Os parâmetros da distribuição beta prime inflacionada são $0 < \lambda < 1$, $\mu, \phi > 0$, em que λ é o parâmetro de mistura, μ é a média condicional da variável aleatória Y e ϕ é o parâmetro de precisão.

OSPINA e FERRARI (2010) mostraram que o valor esperado de uma variável aleatória inflacionada pode ser obtido a partir da seguinte relação de igualdade, $E[Y^r] = E[E(Y^r | \mathbb{I}_{\{0\}}(y))]$, em que:

$$E(Y^r | \mathbb{I}_{\{0\}}(y)) = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } \lambda, \\ \mu_r, & \text{com probabilidade } (1 - \lambda), \end{cases} \quad (2.10)$$

A variância dessa mesma variável aleatória $Y \sim \text{BPIZ}(y; \lambda, \mu, \phi)$ pode ser obtida a partir da seguinte relação de igualdade, $\text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y | \mathbb{I}_{\{0\}}(y))] + \text{Var}[E(Y | \mathbb{I}_{\{0\}}(y))]$, em que:

$$\text{Var}(Y | \mathbb{I}_{\{0\}}(y)) = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } \lambda, \\ \frac{\mu(1 + \mu)}{\phi}, & \text{com probabilidade } (1 - \lambda). \end{cases} \quad (2.11)$$

O r -ésimo momento e a variância da distribuição BPIZ são dados por:

$$\begin{aligned} E(Y^r) &= (1 - \lambda)\mu_r \\ \text{Var}(Y) &= (1 - \lambda)\frac{\mu(1 + \mu)}{\phi} + \lambda(1 - \lambda)\mu^2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que μ_r é o r -ésimo momento em torno da distribuição $BP(\mu, \phi)$ apresentada em (2.5). Assim o valor esperado de uma variável aleatória que segue uma distribuição BPIZ é definido por:

$$E[Y] = (1 - \lambda)\mu,$$

A seguir são apresentados os gráficos da densidade da distribuição BPIZ para alguns cenários com diferentes combinações de λ , μ e ϕ . Na Figura 2.1 temos as médias $\mu = 1$ e $\mu = 5$, em que o parâmetro de mistura é $\lambda = 0,05$ e $\lambda = 0,2$, e a precisão é $\phi = 20$ e $\phi = 40$, respectivamente. Perceba que o pico da curva é mais acentuado quando a média é pequena, já quando a média aumenta, a curva tende a ser mais baixa. Os gráficos apresentam comportamento assimétrico, mas isso é esperado tendo em vista que a avaliação é feita em uma distribuição mista com um ponto de massa no zero para poder abranger tais observações.

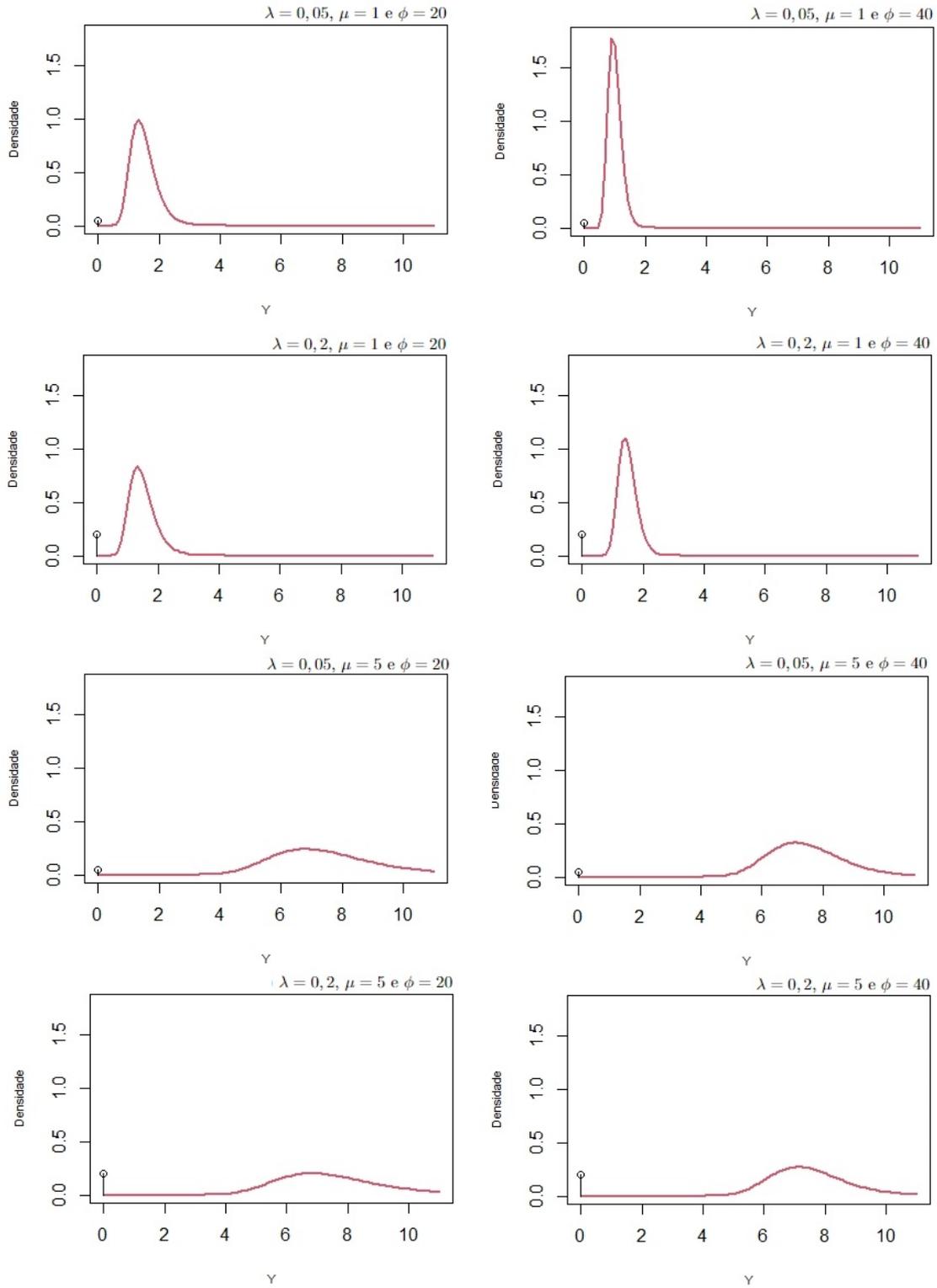


Figura 2.1: Densidades da distribuição beta prime inflacionada em zero, $\lambda = 0,05$ e $0,2$; $\mu = 1$ e 5 ; e $\phi = 20$ e 40 .

Capítulo 3

Gráfico de controle beta prime inflacionado em zero

Neste capítulo é apresentado de forma geral o que é um gráfico de controle, em seguida é apresentado o gráfico de controle proposto para a distribuição beta prime inflacionada em zero.

Os gráficos de controle são uma das principais ferramentas usadas para controle de qualidade, e podem ser usados para estimar os parâmetros de um processo de produção e determinar a capacidade do processo. Podem ainda fornecer informação útil à melhoria do processo e reduzir a variabilidade de forma eficaz, conforme é possível ver em [MONTGOMERY \(2017\)](#).

Um gráfico de controle é composto por uma linha central (LC) que representa o valor médio da característica da qualidade, um limite superior (LSC) que está localizado acima da linha central e um limite inferior (LIC) que está situado abaixo da linha central.

A Figura 3.1 apresenta um exemplo de gráfico de controle, obtido a partir de uma amostra. O processo é considerado sob controle quando os pontos estão entre os limites superior e inferior de controle, e fora de controle quando algum ponto está fora dos limites de controle, com isso é necessário que sejam feitas ações corretivas para encontrar e eliminar as causas responsáveis por esse comportamento. No gráfico de controle os pontos geralmente são unidos por segmentos de reta, para facilitar a visualização da sequência de pontos. A figura 3.1 foi extraída de [MONTGOMERY \(2017\)](#)

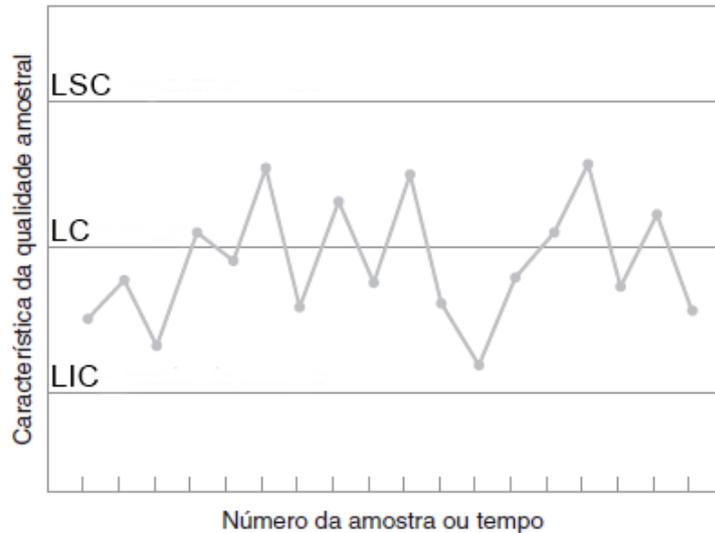


Figura 3.1: Exemplo ilustrativo de um gráfico de controle

Existe uma relação que aproxima gráficos de controle e testes de hipóteses que é mostrada em [MONTGOMERY \(2017\)](#). Para ilustrar essa relação, é suposto que os valores da média amostral \bar{X} estão plotados no gráfico. Dessa forma os valores de \bar{X} se encontram entre os limites de controle, e conclui-se que a média do processo está sob controle, ou seja, ela é igual a μ . Por outro lado, se os valores de \bar{X} excedem algum dos limites de controle, conclui-se que a média do processo está fora de controle.

É possível cometer dois tipos de erros quando hipóteses são testadas, a saber, erro tipo I, α , quando a hipótese nula é rejeitada sendo ela verdadeira, e o erro tipo II, β , quando a hipótese nula não é rejeitada mesmo sendo falsa. As probabilidades desses dois tipos de erro, a saber:

- $\alpha = P\{\text{erro tipo I}\} = P\{\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}\},$
- $\beta = P\{\text{erro tipo II}\} = P\{\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}\}.$

O esquema de teste de hipóteses é útil na análise do desempenho de um gráfico de controle. Por exemplo, é possível pensar na probabilidade de um erro tipo I para o gráfico de controle, concluindo que o processo está fora de controle quando ele realmente está sob controle, e na probabilidade do erro tipo II para o gráfico de controle, concluindo que o processo está sob controle quando, de fato, está fora de controle. Conforme apresentado em [MONTGOMERY \(2017\)](#), em controle de qualidade, α pode ser chamado de risco do produtor, porque denota a probabilidade de um lote bom ser rejeitado ou a probabilidade de que um processo, produzindo valores aceitáveis de uma particular característica da qualidade, venha a ser rejeitado como produzindo insatisfatoriamente, e β é às vezes chamado de

risco do consumidor, por denotar a probabilidade de aceitação de um lote de baixa qualidade, ou a probabilidade de permitir que um processo, operando em condições não satisfatórias com respeito a determinada característica da qualidade, continue em operação.

Ocasionalmente, é útil usar a curva característica de operação de um gráfico de controle para mostrar probabilidade de um erro tipo II. Isso seria uma indicação da habilidade do gráfico de controle em detectar mudanças de diferentes magnitudes no processo. Isso pode ser valioso na determinação de qual tipo de gráfico de controle aplicar em certas situações, como é possível ver em [WOODALL \(2000\)](#).

Conforme apresentado no capítulo anterior, a distribuição beta prime é utilizada para modelar dados contínuos com suporte nos reais positivos. No caso desse trabalho, trabalha-se com características de qualidade que podem incluir zeros, sendo assim a distribuição beta prime não é adequada para modelar os dados, por isso a necessidade de considerar a distribuição inflacionada proposta por [CORPES \(2021\)](#). A vantagem do gráfico proposto é que a característica de qualidade é controlada sem ter que remover ou substituir os zeros do banco de dados, sem perder a flexibilidade da distribuição beta prime.

3.1 Gráfico de controle BPIZ para monitorar observações individuais

Gráficos de controle têm sido usados em geral supondo que os dados seguem distribuição normal. Contudo, é comum que as características de qualidade apresentem assimetria e, dessa forma, a suposição de normalidade não é adequada. Dessa forma, é proposto um gráfico de controle para monitorar a característica de qualidade considerando que a mesma segue uma distribuição beta prime inflacionada.

Seja Y a característica de qualidade de um processo cuja variável de interesse segue distribuição beta prime inflacionada com função densidade de probabilidade dada em (2.9), com média μ , precisão ϕ e parâmetro de mistura λ . Considerando a região de controle $(1 - \alpha)$, em que α é a probabilidade de falso alarme (erro do tipo I), ou seja, a probabilidade que a variável Y não ultrapasse os limites inferior e superior de controle. Assim temos:

$$P_0(\text{LIC}|_{\lambda_0, \mu_0, \phi_0} \leq Y \leq \text{LSC}|_{\lambda_0, \mu_0, \phi_0}) = 1 - \alpha, \quad (3.1)$$

em que P_0 é a probabilidade calculada quando o processo está em controle, λ_0 , μ_0 e ϕ_0 são os parâmetros sob controle da distribuição beta prime inflacionada em zero. Para simplificar, considera-se $P_0(Y \leq \text{LIC}|_{\lambda_0, \mu_0, \phi_0}) = P_0(Y \geq \text{LSC}|_{\lambda_0, \mu_0, \phi_0}) = \frac{\alpha}{2}$.

Assim, os limites de controle do gráfico proposto são dados por:

$$\text{LIC} = F^{-1}(\alpha/2; \lambda, \mu, \phi), \quad (3.2)$$

$$\text{LC} = (1 - \lambda)\mu, \quad (3.3)$$

$$\text{LSC} = F^{-1}(1 - \alpha/2; \lambda, \mu, \phi), \quad (3.4)$$

em que $F(y) = P(Y \leq y) = \int_0^y f(u, \lambda, \mu, \phi) du$ é a função de distribuição acumulada e $F^{-1}(\cdot)$ é a função quantil da distribuição beta prime inflacionada em zero. Enquanto os pontos são plotados entre os dois limites LIC e LSC, o processo é considerado estar em controle e nenhuma ação é necessária. Caso um ponto seja plotado fora dos limites de controle, significa que existem possíveis condições fora de controle e ações corretivas são necessárias. É importante citar que quando $\hat{\lambda} \geq \frac{\alpha}{2}$, o gráfico de controle proposto se torna unilateral, ou seja, considera o zero como limite de controle inferior e o limite de controle superior passa a ser:

$$\text{LSC} = F^{-1}(1 - \alpha; \lambda, \mu, \phi).$$

Considerando o processo fora de controle, é introduzido uma perturbação δ no processo tal que $\mu_1 = \delta\mu_0$ em que μ_0 é a média do processo em controle. O poder de detecção $(1 - \beta)$ do gráfico de controle, considerando essa mudança δ na média, $\mu_1 = \delta\mu_0$ (proporção média fora de controle), é determinado por:

$$P_1(Y < \text{LIC}|_{\lambda_0, \mu_1, \phi_0}) + P_1(Y > \text{LSC}|_{\lambda_0, \mu_1, \phi_0}) = 1 - \beta, \quad (3.5)$$

em que P_1 é a probabilidade calculada quando o processo está fora de controle.

3.2 Gráfico de controle BPIZ para monitorar observações não individuais

É comum que existam subgrupos de observações de tamanho $n > 1$, em que cada amostra de n observações é um subgrupo. Neste caso é de interesse monitorar a média da característica de qualidade e não o valor individual. A seguir é proposto um gráfico de controle baseado na distribuição beta prime inflacionada para monitorar a média da característica de qualidade.

O gráfico de controle para o parâmetro $\hat{\mu}$ pode ser obtido calculando os limites de controle por:

$$P(\hat{\mu} < \text{LIC}|_{\lambda, \mu, \phi}) = P(\hat{\mu} > \text{LSC}|_{\lambda, \mu, \phi}) = \frac{\alpha}{2}. \quad (3.6)$$

Os limites de controle são os quantis de ordem $\frac{\alpha}{2}$ e $1 - \frac{\alpha}{2}$ da distribuição empírica de $\hat{\mu}$. Utiliza-se essa distribuição empírica de $\hat{\mu}$, pois não se conhece a distribuição de probabilidade de μ .

Devido as suas propriedades, tais como normalidade, eficiência assintótica, consistência e princípio da invariância, o estimador de máxima verossimilhança é utilizado para estimar a média condicional da distribuição BPIZ, $\hat{\mu}_{MVS}$, obtido a seguir.

Seja Y_1, \dots, Y_n uma amostra aleatória de tamanho n da característica de qualidade que segue distribuição beta prime inflacionada, com *f.d.p* apresentada em 2.9.

Sejam y_1, y_2, \dots, y_n as observações (dados), é possível construir a função de verossimilhança da seguinte forma:

$$L(\theta; y) = \prod_{i=1}^n \text{bpiz}(y_i, \lambda, \mu, \phi),$$

e pode-se expressar $L(\theta; y)$ por:

$$L(\theta; y) = L_1(\lambda; y) \times L_2(\mu, \phi; y)$$

em que,

$$\begin{aligned} L_1(\lambda; y) &= \prod_{i=1}^n \lambda^{\mathbb{I}_{\{0\}}(y_i)} (1 - \lambda)^{1 - \mathbb{I}_{\{0\}}(y_i)} \\ &= \lambda^{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(y_i)} (1 - \lambda)^{n - \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(y_i)} \end{aligned}$$

e,

$$L_2(\mu, \phi; y) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \mu, \phi)^{1 - \mathbb{I}_{\{0\}}(y_i)},$$

em que $f(\cdot)$ é a função densidade de uma *v.a* que segue uma distribuição BP. Note que $L(\theta; y)$ foi fatorada em dois termos, em que o primeiro depende apenas de λ e o segundo, depende apenas de μ e ϕ .

A função de log-verossimilhança da *v.a* Y que segue distribuição BPIZ, é dada da seguinte forma:

$$\ell(\theta; y) = \ell_1(\lambda; y) + \ell_2(\mu, \phi; y),$$

em que,

$$\ell_1(\lambda; y) = \log(\lambda) \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(y_i) + \log(1 - \lambda) \left[n - \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(y_i) \right]$$

e,

$$\begin{aligned} \ell_2(\mu, \phi; y) &= [\mu(\phi + 1) - 1] \sum_{i=1}^n \log(y_i)[1 - \ell(\theta, y)] \\ &\quad - [\mu(\phi + 1) + \phi + 2] \sum_{i=1}^n \log(1 + y_i)[1 - \mathbb{I}_{\{0\}}(y_i)] + \{-\log[\Gamma(\mu(\phi + 1))]\} \\ &\quad - \log[\Gamma(\phi + 2)] + \log[\Gamma(\mu(\phi + 1) + \phi + 2)] \sum_{i=1}^n [1 - \mathbb{I}_{\{0\}}(y_i)]. \end{aligned}$$

A função score, $U(\theta)$, é obtida derivando $\ell(\theta, y)$ em relação a cada um dos componentes de θ , ou seja, $U(\theta) = \left(\frac{\partial \ell(\theta, y)}{\partial \lambda}, \frac{\partial \ell(\theta, y)}{\partial \mu}, \frac{\partial \ell(\theta, y)}{\partial \phi} \right)^T$.

O estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}_{MVS} = \left(\hat{\lambda}_{MVS}, \hat{\mu}_{MVS}, \hat{\phi}_{MVS} \right)$ do vetor $\theta = (\lambda, \mu, \phi)^T$ é obtido maximizando a função $\ell(\theta, y)$, ou seja, resolvendo o sistema não linear $U(\theta) = (0, 0, 0)^T$. O estimador de máxima verossimilhança $\hat{\lambda}$ é obtido a partir de $U_\lambda(\lambda) = 0$, para obter $\hat{\mu}$ e $\hat{\phi}$, os estimadores de máxima verossimilhança de μ e ϕ , é necessário recorrer a um algoritmo de otimização não linear, por exemplo o algoritmo quase-Newton, [CORPES \(2021\)](#). Dado que não se conhece a distribuição exata de \bar{X} quando X segue distribuição beta prime inflacionada, para n pequeno, os limites de controle serão baseados na distribuição empírica de ambos os estimadores adotados.

3.2.1 Algoritmo para gráfico de controle BPIZ

Segue abaixo o algoritmo implementado para construção do gráfico de controle proposto:

1. Gerar 10.000 subgrupos de tamanho n da distribuição beta prime inflacionada;
2. Para cada subgrupo i gerado, com $i = 1, \dots, 10.000$, estima-se a média considerando $\hat{\mu}_{MVS}$;
3. Baseado nas 10.000 réplicas, a distribuição empírica do estimador de máxima verossimilhança é determinada, e os quantis empíricos $q_{\alpha/2, \hat{\mu}_{MVS}}$ e $q_{1-\alpha/2, \hat{\mu}_{MVS}}$, respectivamente, são computados.

Portanto, os limites de controle do gráfico proposto na presença de subgrupos são dados por:

$$\widehat{LIC} = q_{\alpha/2, \hat{\mu}_{MVS}}, \quad (3.7)$$

$$\widehat{LC} = \hat{\mu}_{MVS}, \quad (3.8)$$

$$\widehat{LSC} = q_{1-\alpha/2, \hat{\mu}_{MVS}}, \quad (3.9)$$

em que α é o erro tipo I.

3.3 Performance do gráfico de controle

A capacidade de um gráfico de controle em detectar mudanças no processo é geralmente medida pelo número médio de observações até a detecção de uma condição fora de controle, ou seja, pelo comprimento médio da sequência (ARL), como visto em [MONTGOMERY \(2017\)](#). Essa avaliação é realizada computando o ARL em duas situações: considerando um processo em controle (ARL_0) e fora de controle (ARL_1). O ARL_0 pode ser escrito em função da probabilidade de erro do tipo I (α) e é definido por $\frac{1}{\alpha}$, em que $\alpha = 1 - P_0(LIC \leq Y \leq LSC)$. Dessa forma, se o processo está em controle, espera-se que o ARL_0 esteja próximo do nível nominal adotado, por exemplo, se $\alpha = 0,0027$, $ARL_0 = 370$. Por outro lado, quando há uma mudança no processo, ou seja, considerando um processo fora de controle com média $\mu_1 = \delta\mu_0$, em que μ_0 é a proporção média em controle, o ARL_1 pode ser escrito em função da probabilidade de erro tipo II (β), especificamente por $\frac{1}{1-\beta}$, com $\beta = P_1(LIC_\mu \leq Y \leq LSC_\mu)$, em que P_1 é a probabilidade calculada

considerando o processo fora de controle.

MONTGOMERY (2017) ressalta que um menor valor do ARL_1 indica um menor número médio de amostras coletadas até que uma mudança real no processo seja detectada. Deste modo, quando vários gráficos de controle são comparados em termos de ARL, aquele que possui o menor ARL_1 entre aqueles com o mesmo ARL_0 , é o gráfico de controle que supera os concorrentes.

Uma análise adicional do desempenho do gráfico de controle pode ser realizada com a mediana (MRL) e desvio padrão (SDRL) da distribuição do comprimento da sequência (RL). A distribuição da varável que mede o comprimento da sequência segue uma distribuição geométrica com parâmetro α , ho2019. Assim, tem-se que para um determinado α , SDRL e MRL são dados por:

$$SDRL = \sqrt{\frac{(1 - \alpha)}{\alpha^2}}, \quad (3.10)$$

$$MRL = \frac{\log 0,5}{\log(1 - \alpha)}. \quad (3.11)$$

É comum ver os estudos de gráficos de controle para avaliar o desempenho usando $\alpha = 0,0027$, $0,005$ e $0,01$. Considerando os valores de α mencionados para um processo em controle, são esperados valores de ARL_0 iguais a 370, 200 e 100, valores de SDRL iguais a 369,5, 199,5 e 99,5, e valores de MRL iguais a 256,1, 138,3 e 69,0, respectivamente. Para maiores detalhes sobre os valores de α , ARL, SDRL e MRL, ver DE ARAUJO LIMA-FILHO *et al.* (2019); JOEKES *et al.* (2015); LOMBARD e MAXWELL (2012); MUGHAL *et al.* (2017); TEOH *et al.* (2017).

Capítulo 4

Avaliação Numérica

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos a partir das simulações realizadas para avaliar a performance do gráfico de controle proposto. O desempenho do gráfico proposto é avaliado sob dois aspectos: processo em controle e fora de controle. Para avaliação, considerando o processo fora de controle, introduz-se uma perturbação δ no processo tal que $\mu_1 = \delta\mu_0$ em que μ_0 é a média do processo em controle. Desta forma, quando $\delta = 1$ tem-se que o processo está em controle. A Tabela 4.1 apresenta os oito cenários utilizados, considerando a média condicional μ , o parâmetro de mistura λ e a precisão ϕ . Vale ressaltar na Tabela 4.1 que nos cenários 5 a 8 são utilizadas médias condicionais mais altas. Em relação ao parâmetro de mistura, os valores mais altos estão nos cenários 3, 4, 7 e 8, ou seja, a probabilidade de Y assumir zero é de 20%, por fim sobre o parâmetro de precisão, dois valores foram considerados, a saber, $\phi = 10$ e $\phi = 20$.

Tabela 4.1: Cenários utilizados no estudo de simulação.

Parâmetros	Cenários							
	1	2	3	4	5	6	7	8
μ	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1
λ	0,05	0,05	0,2	0,2	0,05	0,05	0,2	0,2
ϕ	10	20	10	20	10	20	10	20

O desempenho dos gráficos de controle para medidas individuais e para média são avaliados através do ARL, SDRL e MRL, considerando $\alpha = 0,0027$. A performance do gráfico de controle proposto será comparada com a performance da carta de controle para outras distribuições, sendo estas a distribuição beta prime conforme apresentada na seção (2.1), assim também como as distribuições gamma e weibull, que tem uma melhor apresentação nos próximos parágrafos.

A distribuição gamma é uma família de distribuições contínuas de probabilidade de dois parâmetros. A distribuição gamma é usada para modelar valores de dados positivos e maiores que 0. Conforme [HO et al. \(2019\)](#), dada uma *v.a* que segue uma distribuição gamma, $Y \sim \text{gamma}(y; \mu, \sigma)$, a função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(y; \mu, \sigma) = \frac{\exp \left\{ - \left(\frac{y^2}{\phi} \mu \right) y^{\frac{1}{\sigma^2} - 1} \right\}}{\Gamma \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) (\mu \sigma^2)^{\frac{1}{\sigma^2}}}, \quad (4.1)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função gamma, $y > 0$, $\mu > 0$, $\sigma > 0$, a média é μ e a variância é $\sigma^2 \mu^2$.

Por sua vez, a distribuição de Weibull é uma distribuição de probabilidade contínua. O campo de aplicações desta distribuição é vasto e abrange praticamente todas as áreas da ciência, tais como suas aplicações visam a determinação do tempo de vida médio e da taxa de falhas em função do tempo da população analisada. Segundo [LUCENA \(2017\)](#), dada uma *v.a* que segue uma distribuição weibull, $Y \sim \text{Weibull}(y; \mu, \sigma)$, a função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(y; \mu, \sigma) = \frac{\sigma}{\phi} \left(\frac{y}{\phi} \right)^{\sigma - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{y}{\phi} \right)^\sigma \right\}, \quad (4.2)$$

em que $y > 0$, $\mu > 0$, $\sigma > 0$ e $\phi = \mu / \Gamma \left(\frac{1}{\sigma} + 1 \right)$, a média da distribuição é μ e a variância é $\mu^2 \left\{ \Gamma \left(\frac{2}{\sigma} + 1 \right) \left[\Gamma \left(\frac{1}{\sigma} + 1 \right) \right]^{-2} - 1 \right\}$.

As distribuições beta prime, gamma e weibull modelam dados maiores que zero, diferente da beta prime inflacionada em zero que pode conter valores iguais a zero, por esse motivo os dados iguais a zero quando usadas as distribuições beta prime, gamma e weibull foram alterados para 0,0001.

4.1 Observações individuais

As Tabelas [4.2](#) e [4.3](#) apresentam os resultados para observações individuais. Como esperado o valor do LCI é zero para todos os cenários observados na distribuição BPIZ, no caso da BP, Gamma e Weibull os LCI são diferentes de zero. Observe que para a BPIZ temos os valores α , ARL, SDRL e MRL corretos quando $\delta = 1$, e só mudam quando o valor da perturbação δ aumenta.

É possível observar na Tabela [4.2](#) com relação a distribuição BPIZ, para todos

os cenários que para $\delta = 1$, os valores de ARL_0 , $SDRL_0$ e MRL_0 são iguais aos valores nominais. À medida que o valor da perturbação δ aumenta, o ARL_1 , $SDRL_1$ e MRL_1 tendem a 1, como esperado. Por exemplo, no cenário 1, para $\delta = 1, 1; 1, 3$ e $1, 5$ o gráfico de controle leva, em média, 240, 113 e 59 amostras para detectar que o processo está fora de controle.

A variabilidade da distribuição está diretamente relacionada à capacidade do gráfico em detectar mudanças no processo. Por exemplo, considerando $\delta = 1, 5$, nos cenários 2 e 4 da Tabela 4.2 e nos cenários 6 e 8 da Tabela 4.3, onde é considerado uma precisão maior, o gráfico de controle leva, em média, 29, 19, 18 e 19 amostras para detectar uma mudança no processo. Por outro lado, nos cenários 1 e 3 da Tabela 4.2 e nos cenários 5 e 7 da Tabela 4.3, onde é considerado uma precisão menor, o gráfico de controle leva em média, 59, 61, 42 e 43 amostras para uma mudança da mesma magnitude.

Outra coisa importante que é preciso notar é que nas distribuições gamma e weibull nos cenários 3 e 4 da Tabela 4.2 e nos cenários 7 e 8 na Tabela 4.3, os valores de α , ARL , $SDRL$ e MRL assumem um valor específico para qualquer δ , por exemplo, nesses cenários o $\alpha = 0, 2000$, o ARL é $5, 00$, o $SDRL$ é $4, 47$ e o MRL é $3, 11$ mesmo perturbando o δ .

4.2 Observações não individuais

Agora, considera-se os gráficos de controle para monitorar a média da distribuição, ou seja, quando $n > 1$ em que n é o número de observações no subgrupo ao qual se deseja monitorar a média da característica da qualidade e não o valor individual. Os resultados estão apresentados nas Tabelas 4.4 a 4.11, levando em consideração cada cenário apresentado na Tabela 4.1. Diferentemente do caso para observações individuais em que δ assumia apenas valores maiores que um, desta vez também assume valor menor que um, assim tem-se $\delta = 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 1, 3; 1, 4; 1, 5$. Pode-se notar que em todos os cenários, para a distribuição BPIZ conforme o valor de n aumenta, o ARL se aproxima de 1 mais rápido quando aumenta ou diminui o valor de δ , o que é esperado, além do mais que comparando com os desempenhos dos gráficos baseados nas outras distribuições é possível perceber que a carta proposta se sobressai. É possível perceber em todos os cenários, que o gráfico cujos valores do ARL mais se aproximam dos valores do ARL do gráfico baseado na distribuição BPIZ é o gráfico baseado na distribuição gamma conforme aumentamos o valor de n .

Tabela 4.2: Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, considerando medidas individuais para os cenários 1, 2, 3 e 4.

Cenário 1	BPIZ			BP			Gamma			Weibull						
	α	ARL	SDRL	MRL	α	ARL	SDRL	MRL	α	ARL	SDRL	MRL	α	ARL	SDRL	MRL
δ																
1,0	0,0027	370,37	369,87	256,37	0,0526	19,02	18,52	12,84	0,0500	19,98	19,48	13,50	0,0504	19,84	19,33	13,40
1,1	0,0042	240,50	240,00	166,35	0,0525	19,04	18,54	12,85	0,0501	19,97	19,46	13,49	0,0506	19,75	19,24	13,34
1,2	0,0062	161,99	161,49	111,94	0,0532	18,78	18,28	12,67	0,0501	19,95	19,44	13,48	0,0510	19,61	19,10	13,24
1,3	0,0089	112,69	112,19	77,76	0,0545	18,34	17,83	12,36	0,0502	19,92	19,42	13,46	0,0515	19,42	18,91	13,11
1,4	0,0124	80,67	80,17	55,57	0,0564	17,74	17,23	11,95	0,0503	19,88	19,38	13,43	0,0522	19,16	18,65	12,93
1,5	0,0169	59,25	58,74	40,72	0,0588	17,00	16,50	11,44	0,0504	19,83	19,32	13,40	0,0531	18,83	18,32	12,70
LCI	0,0000				0,0715				0,0012				0,0032			
LCS	1,7591				1,9747				3,1012				2,3364			
Cenário 2																
1,0	0,0027	370,37	256,37	369,87	0,0526	19,02	18,52	12,84	0,0500	20,00	19,49	13,51	0,0501	19,98	19,47	13,50
1,1	0,0051	197,85	136,79	197,35	0,0529	18,91	18,40	12,76	0,0500	20,00	19,49	13,51	0,0501	19,95	19,45	13,48
1,2	0,0089	112,75	77,81	112,25	0,0546	18,31	17,80	12,34	0,0500	20,00	19,49	13,51	0,0502	19,90	19,40	13,45
1,3	0,0147	68,02	46,80	67,52	0,0577	17,32	16,82	11,66	0,0500	20,00	19,49	13,51	0,0505	19,82	19,31	13,39
1,4	0,0232	43,16	29,57	42,66	0,0625	15,99	15,48	10,74	0,0500	20,00	19,49	13,51	0,0508	19,67	19,16	13,28
1,5	0,0349	28,65	19,51	28,14	0,0695	14,40	13,89	9,63	0,0500	20,00	19,49	13,51	0,0515	19,44	18,93	13,12
LCI	0,0000				0,1347				0,0023				0,0077			
LCS	1,2829				1,3947				2,8910				1,8903			
Cenário 3																
1,0	0,0027	370,37	369,87	256,37	0,2022	4,95	4,42	3,07	0,2000	5,00	4,47	3,11	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,1	0,0041	241,63	241,13	167,14	0,2021	4,95	4,42	3,07	0,2000	5,00	4,47	3,11	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,2	0,0061	163,52	163,02	113,00	0,2027	4,93	4,40	3,06	0,2000	5,00	4,47	3,11	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,3	0,0088	114,29	113,78	78,87	0,2038	4,91	4,38	3,04	0,2000	5,00	4,47	3,11	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,4	0,0122	82,19	81,69	56,62	0,2054	4,87	4,34	3,02	0,2000	5,00	4,47	3,11	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,5	0,0165	60,64	60,14	41,68	0,2074	4,82	4,29	2,98	0,2000	5,00	4,47	3,11	0,2000	5,00	4,47	3,11
LCI	0,0000				0,0715				0,0000				0,0000			
LCS	1,7109				1,9747				5,8722				9,1201			
Cenário 4																
1,0	0,0027	370,37	369,87	256,37	0,2022	4,95	4,42	3,07	0,2000	5,00	4,47	3,11	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,1	0,0057	173,95	173,45	120,23	0,2027	4,93	4,41	3,06	0,2000	5,00	4,47	3,11	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,2	0,0111	89,70	89,20	61,83	0,2050	4,88	4,35	3,02	0,2000	5,00	4,47	3,11	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,3	0,0199	50,15	49,65	34,42	0,2093	4,78	4,25	2,95	0,2000	5,00	4,47	3,11	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,4	0,0332	30,10	29,59	20,51	0,2163	4,62	4,09	2,84	0,2000	5,00	4,47	3,11	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,5	0,0520	19,22	18,71	12,97	0,2267	4,41	3,88	2,70	0,2000	5,00	4,47	3,11	0,2000	5,00	4,47	3,11
LCI	0,0000				0,3725				0,0000				0,0000			
LCS	2,2105				2,4258				12,0265				19,3691			

Tabela 4.3: Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, considerando medidas individuais para os cenários 5, 6, 7 e 8.

Cenário	BPZ			BP			Gamma			Weibull		
	α	ARL	SDRL	MRL	α	ARL	SDRL	MRL	α	ARL	SDRL	MRL
Cenário 5												
δ												
1,0	0,0027	370,37	369,87	256,37	0,0526	19,02	18,52	12,84	0,0500	20,00	19,49	13,51
1,1	0,0046	218,54	218,04	151,13	0,0527	18,99	18,49	12,81	0,0500	19,99	19,49	13,51
1,2	0,0074	135,86	135,36	93,82	0,0538	18,59	18,08	12,53	0,0500	19,99	19,48	13,50
1,3	0,0113	88,38	87,88	60,92	0,0558	17,92	17,41	12,07	0,0501	19,98	19,47	13,50
1,4	0,0167	59,83	59,33	41,13	0,0587	17,03	16,52	11,45	0,0501	19,96	19,46	13,49
1,5	0,0238	41,96	41,46	28,74	0,0627	15,94	15,43	10,70	0,0501	19,94	19,43	13,47
LCI	0,0000				0,2441				0,0027			
LCS	3,0045				3,3412				6,1373			
Cenário 6												
1,0	0,0027	370,37	369,87	256,37	0,0526	19,02	18,52	12,84	0,0500	20,00	19,49	13,51
1,1	0,0058	172,20	171,69	119,01	0,0532	18,80	18,29	12,68	0,0500	20,00	19,49	13,51
1,2	0,0114	87,91	87,41	60,59	0,0559	17,88	17,37	12,04	0,0500	20,00	19,49	13,51
1,3	0,0205	48,67	48,17	33,39	0,0610	16,38	15,87	11,01	0,0500	20,00	19,49	13,51
1,4	0,0346	28,93	28,42	19,70	0,0693	14,43	13,92	9,65	0,0500	20,00	19,49	13,51
1,5	0,0546	18,30	17,79	12,33	0,0817	12,24	11,73	8,13	0,0500	20,00	19,49	13,51
LCI	0,0000				0,3725				0,0040			
LCS	2,2506				2,4258				5,8636			
Cenário 7												
1,0	0,0027	370,37	369,87	256,37	0,2022	4,95	4,42	3,07	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,1	0,0045	219,85	219,35	152,04	0,2022	4,94	4,42	3,07	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,2	0,0073	137,48	136,98	94,95	0,2032	4,92	4,39	3,05	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,3	0,0111	89,96	89,46	62,01	0,2049	4,88	4,35	3,02	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,4	0,0163	61,26	60,75	42,11	0,2074	4,82	4,29	2,98	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,5	0,0231	43,20	42,70	29,60	0,2107	4,75	4,22	2,93	0,2000	5,00	4,47	3,11
LCI	0,0000				0,2441				0,0000			
LCS	2,9291				3,3412				12,1717			
Cenário 8												
1,0	0,0027	370,37	369,87	256,37	0,2022	4,95	4,42	3,07	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,1	0,0057	173,95	173,45	120,23	0,2027	4,93	4,41	3,06	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,2	0,0111	89,70	89,20	61,83	0,2050	4,88	4,35	3,02	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,3	0,0199	50,15	49,65	34,42	0,2093	4,78	4,25	2,95	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,4	0,0332	30,10	29,59	20,51	0,2163	4,62	4,09	2,84	0,2000	5,00	4,47	3,11
1,5	0,0520	19,22	18,71	12,97	0,2267	4,41	3,88	2,70	0,2000	5,00	4,47	3,11
LCI	0,0000				0,3725				0,0000			
LCS	2,2105				2,4258				12,0265			

Tabela 4.4: Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 1

n=5												
δ	BPIZ			BP			Gamma			Weibull		
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
0,5	6,20	3,94	5,68	4,75	2,93	4,22	5,62	3,54	5,10	5,55	3,49	5,02
0,6	16,69	11,22	16,19	11,98	7,95	11,47	14,71	9,84	14,20	14,47	9,68	13,96
0,7	52,08	35,75	51,58	33,67	22,99	33,17	44,05	30,19	43,55	43,10	29,53	42,60
0,8	125,00	86,30	124,50	85,47	58,90	84,97	105,26	72,62	104,76	104,17	71,86	103,67
0,9	400,00	276,91	399,50	243,90	168,71	243,40	322,58	223,25	322,08	312,50	216,26	312,00
1,0	370,37	256,37	369,87	322,58	223,25	322,08	303,03	209,70	302,53	322,58	223,25	322,08
1,1	256,41	177,38	255,91	263,16	182,06	262,66	212,77	147,13	212,27	222,22	153,69	221,72
1,2	101,01	69,67	100,51	112,36	77,53	111,86	86,21	59,41	85,71	93,46	64,43	92,96
1,3	47,39	32,50	46,89	51,81	35,57	51,31	41,15	28,18	40,65	42,55	29,15	42,05
1,4	27,40	18,64	26,89	29,85	20,34	29,35	24,15	16,39	23,65	25,19	17,11	24,68
1,5	15,65	10,50	15,14	16,84	11,32	16,33	13,35	8,90	12,84	14,06	9,40	13,56
LCI	0.1601			0.1715			0.1642			0.1648		
LCS	0.9890			0.9974			0.9771			0.9722		
n = 10												
0,5	1,85	0,89	1,25	1,55	0,67	0,92	1,79	0,85	1,19	1,87	0,90	1,27
0,6	4,04	2,44	3,50	2,95	1,67	2,40	3,85	2,31	3,31	4,16	2,52	3,63
0,7	12,21	8,11	11,70	8,14	5,29	7,62	11,42	7,56	10,90	12,63	8,40	12,12
0,8	47,39	32,50	46,89	28,33	19,29	27,82	43,29	29,66	42,79	48,78	33,46	48,28
0,9	181,82	125,68	181,32	92,59	63,83	92,09	169,49	117,14	168,99	185,19	128,01	184,68
1,0	370,37	256,37	369,87	294,12	203,52	293,62	333,33	230,70	332,83	434,78	301,02	434,28
1,1	138,89	95,92	138,39	476,19	329,72	475,69	131,58	90,86	131,08	156,25	107,96	155,75
1,2	43,10	29,53	42,60	151,52	104,68	151,01	41,32	28,29	40,82	47,39	32,50	46,89
1,3	19,16	12,93	18,65	57,80	39,72	57,30	18,66	12,58	18,15	20,79	14,06	20,28
1,4	8,12	5,27	7,60	21,32	14,43	20,82	7,94	5,15	7,42	8,72	5,69	8,20
1,5	4,40	2,69	3,87	9,48	6,22	8,96	4,31	2,63	3,78	4,59	2,82	4,06
LCI	0,2394			0,2543			0,2415			0,2384		
LCS	0,8018			0,8729			0,7998			0,8068		
n = 20												
0,5	1,06	0,25	0,26	1,02	0,18	0,16	1,06	0,24	0,26	1,07	0,26	0,28
0,6	1,47	0,61	0,83	1,24	0,42	0,55	1,46	0,60	0,82	1,51	0,64	0,87
0,7	3,47	2,04	2,93	2,25	1,18	1,68	3,42	2,00	2,87	3,68	2,18	3,14
0,8	13,85	9,25	13,34	6,95	4,46	6,43	13,61	9,08	13,10	15,20	10,18	14,69
0,9	92,59	63,83	92,09	32,47	22,16	31,96	86,96	59,93	86,46	103,09	71,11	102,59
1,0	370,37	256,37	369,87	217,39	150,34	216,89	344,83	238,67	344,33	357,14	247,21	356,64
1,1	125,00	86,30	124,50	434,78	301,02	434,28	119,05	82,17	118,55	114,94	79,33	114,44
1,2	25,06	17,02	24,56	102,04	70,38	101,54	24,57	16,68	24,06	24,39	16,56	23,89
1,3	7,85	5,09	7,33	24,94	16,94	24,43	7,69	4,97	7,17	7,62	4,93	7,10
1,4	3,40	1,99	2,86	8,10	5,26	7,58	3,37	1,97	2,82	3,34	1,95	2,80
1,5	1,96	0,97	1,38	3,57	2,11	3,03	1,95	0,96	1,36	1,94	0,95	1,35
LCI	0,3039			0,3235			0,3045			0,3016		
LCS	0,7070			0,7614			0,7061			0,7055		
n = 40												
0,5	1,00	0,08	0,01	1,00	0,08	0,01	1,00	0,08	0,01	1,00	0,08	0,01
0,6	1,03	0,20	0,18	1,01	0,16	0,11	1,03	0,19	0,17	1,04	0,21	0,20
0,7	1,45	0,59	0,81	1,21	0,40	0,51	1,41	0,56	0,76	1,50	0,63	0,87
0,8	4,62	2,84	4,09	2,68	1,48	2,12	4,29	2,61	3,75	5,07	3,15	4,54
0,9	42,02	28,78	41,51	15,29	10,25	14,78	36,23	24,77	35,73	50,25	34,48	49,75
1,0	370,37	256,37	369,87	178,57	123,43	178,07	344,83	238,67	344,33	400,00	276,91	399,50
1,1	44,84	30,73	44,34	238,10	164,69	237,59	48,08	32,98	47,57	44,25	30,32	43,74
1,2	7,05	4,53	6,53	21,69	14,69	21,19	7,29	4,70	6,78	6,98	4,48	6,46
1,3	2,32	1,23	1,75	4,64	2,86	4,11	2,39	1,28	1,82	2,31	1,22	1,74
1,4	1,36	0,52	0,70	1,95	0,97	1,36	1,37	0,53	0,72	1,36	0,52	0,70
1,5	1,08	0,27	0,30	1,25	0,43	0,55	1,09	0,27	0,31	1,08	0,27	0,30
LCI	0,3491			0,3661			0,3512			0,3467		
LCS	0,6262			0,6600			0,6259			0,6275		

Tabela 4.5: Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 2

n=5												
δ	BPIZ			BP			Gamma			Weibull		
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
0,5	4,01	2,42	3,47	2,63	1,45	2,07	3,66	2,17	3,12	3,26	1,89	2,72
0,6	12,15	8,07	11,64	6,84	4,38	6,32	10,72	7,08	10,21	9,05	5,92	8,54
0,7	39,37	26,94	38,87	19,76	13,35	19,26	34,01	23,23	33,51	28,82	19,63	28,31
0,8	120,48	83,16	119,98	60,61	41,66	60,10	111,11	76,67	110,61	96,15	66,30	95,65
0,9	285,71	197,70	285,21	169,49	117,14	168,99	238,10	164,69	237,59	217,39	150,34	216,89
1,0	370,37	256,37	369,87	312,50	216,26	312,00	322,58	223,25	322,08	333,33	230,70	332,83
1,1	119,05	82,17	118,55	416,67	288,46	416,17	116,28	80,25	115,78	116,28	80,25	115,78
1,2	38,02	26,01	37,52	169,49	117,14	168,99	36,36	24,86	35,86	37,88	25,91	37,38
1,3	15,70	10,53	15,19	58,14	39,95	57,64	15,29	10,25	14,78	15,77	10,58	15,26
1,4	7,46	4,82	6,94	20,79	14,06	20,28	7,27	4,69	6,75	7,50	4,84	6,98
1,5	1,08	0,27	0,30	1,25	0,43	0,55	1,09	0,27	0,31	1,08	0,27	0,30
LCI	0,1965			0,2165			0,2005			0,2055		
LCS	0,7985			0,8764			0,7962			0,7989		
n = 10												
0,5	1,24	0,42	0,55	1,08	0,26	0,28	1,21	0,40	0,51	1,23	0,41	0,53
0,6	2,38	1,27	1,82	1,53	0,65	0,90	2,25	1,18	1,68	2,33	1,24	1,76
0,7	8,18	5,32	7,67	3,61	2,14	3,07	7,39	4,77	6,87	7,83	5,07	7,31
0,8	39,68	27,16	39,18	11,81	7,83	11,30	33,33	22,76	32,83	35,71	24,41	35,21
0,9	178,57	123,43	178,07	47,62	32,66	47,12	158,73	109,68	158,23	172,41	119,16	171,91
1,0	370,37	256,37	369,87	151,52	104,68	151,01	294,12	203,52	293,62	333,33	230,70	332,83
1,1	81,97	56,47	81,47	303,03	209,70	302,53	69,93	48,12	69,43	76,34	52,56	75,83
1,2	20,33	13,74	19,82	66,23	45,56	65,72	18,45	12,44	17,94	19,27	13,01	18,76
1,3	6,39	4,07	5,86	15,38	10,31	14,88	5,96	3,77	5,44	6,17	3,92	5,64
1,4	2,98	1,69	2,43	5,70	3,60	5,18	2,79	1,56	2,23	2,88	1,62	2,32
1,5	1,81	0,86	1,21	2,80	1,57	2,25	1,74	0,81	1,14	1,78	0,84	1,17
LCI	0,2728			0,3015			0,2760			0,2743		
LCS	0,7007			0,7466			0,6961			0,6983		
n = 20												
0,5	1,00	0,12	0,06	1,00	0,08	0,01	1,00	0,12	0,05	1,01	0,14	0,08
0,6	1,12	0,31	0,37	1,02	0,17	0,14	1,11	0,30	0,35	1,17	0,36	0,45
0,7	2,23	1,17	1,66	1,30	0,47	0,62	2,18	1,13	1,60	2,68	1,49	2,13
0,8	10,02	6,59	9,51	3,10	1,78	2,55	9,60	6,30	9,08	14,27	9,54	13,76
0,9	79,37	54,66	78,86	15,85	10,63	15,34	75,19	51,77	74,69	133,33	92,07	132,83
1,0	370,37	256,37	369,87	142,86	98,67	142,36	357,14	247,21	356,64	384,62	266,25	384,12
1,1	57,80	39,72	57,30	169,49	117,14	168,99	57,80	39,72	57,30	50,00	34,31	49,50
1,2	8,73	5,70	8,22	17,99	12,12	17,48	8,73	5,69	8,21	7,99	5,18	7,47
1,3	2,74	1,53	2,18	4,48	2,75	3,95	2,73	1,52	2,17	2,56	1,40	2,00
1,4	1,49	0,62	0,85	1,89	0,92	1,30	1,48	0,62	0,85	1,44	0,59	0,80
1,5	1,15	0,34	0,42	1,28	0,45	0,60	1,15	0,34	0,42	1,14	0,33	0,39
LCI	0,3271			0,3595			0,3283			0,3200		
LCS	0,6373			0,6608			0,6372			0,6338		
n = 40												
0,5	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
0,6	1,00	0,08	0,01	1,00	0,00	0,00	1,00	0,08	0,01	1,00	0,10	0,03
0,7	1,07	0,26	0,28	1,01	0,14	0,08	1,07	0,25	0,27	1,12	0,31	0,37
0,8	2,47	1,33	1,90	1,25	0,43	0,56	2,38	1,27	1,81	3,16	1,82	2,61
0,9	24,51	16,64	24,00	4,26	2,59	3,73	22,94	15,55	22,43	40,16	27,49	39,66
1,0	370,37	256,37	369,87	51,28	35,20	50,78	333,33	230,70	332,83	434,78	301,02	434,28
1,1	16,58	11,14	16,08	61,35	42,18	60,85	17,01	11,44	16,50	15,70	10,53	15,19
1,2	2,59	1,42	2,03	5,00	3,11	4,47	2,64	1,46	2,08	2,51	1,36	1,95
1,3	1,24	0,42	0,55	1,60	0,71	0,98	1,25	0,43	0,56	1,23	0,41	0,53
1,4	1,03	0,19	0,17	1,09	0,28	0,31	1,03	0,19	0,17	1,03	0,19	0,16
1,5	1,00	0,11	0,04	1,01	0,15	0,10	1,00	0,11	0,04	1,00	0,11	0,04
LCI	0,3726			0,4042			0,3737			0,3658		
LCS	0,5807			0,6032			0,5815			0,5795		

Tabela 4.6: Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 3

n=5												
δ	BPIZ			BP			Gamma			Weibull		
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
0,5	14,01	9,36	13,50	11,64	7,72	11,13	11,92	7,91	11,41	12,76	8,49	12,24
0,6	26,60	18,09	26,09	21,79	14,75	21,28	22,22	15,05	21,72	24,10	16,35	23,59
0,7	56,18	38,59	55,68	48,08	32,98	47,57	49,50	33,97	49,00	52,63	36,13	52,13
0,8	123,46	85,23	122,96	97,09	66,95	96,59	98,04	67,61	97,54	106,38	73,39	105,88
0,9	294,12	203,52	293,62	227,27	157,19	226,77	256,41	177,38	255,91	263,16	182,06	262,66
1,0	370,37	256,37	369,87	277,78	192,19	277,28	222,22	153,69	221,72	277,78	192,19	277,28
1,1	250,00	172,94	249,50	357,14	247,21	356,64	227,27	157,19	226,77	256,41	177,38	255,91
1,2	151,52	104,68	151,01	200,00	138,28	199,50	142,86	98,67	142,36	153,85	106,29	153,35
1,3	69,44	47,79	68,94	88,50	60,99	87,99	67,11	46,17	66,61	70,42	48,47	69,92
1,4	41,67	28,53	41,16	53,48	36,72	52,97	38,61	26,41	38,11	42,02	28,78	41,51
1,5	20,70	14,00	20,20	26,25	17,84	25,74	19,76	13,35	19,26	21,14	14,30	20,64
LCI	0,0930			0,0989			0,0982			0,0961		
LCS	0,9522			0,9805			0,9458			0,9539		
n = 10												
0,5	5,93	3,75	5,40	4,65	2,86	4,12	5,15	3,21	4,63	5,51	3,46	4,98
0,6	15,90	10,67	15,39	11,39	7,54	10,88	13,02	8,67	12,51	14,51	9,71	14,00
0,7	43,48	29,79	42,98	30,21	20,59	29,71	35,34	24,14	34,83	39,53	27,05	39,02
0,8	116,28	80,25	115,78	78,74	54,23	78,24	90,91	62,67	90,41	105,26	72,62	104,76
0,9	232,56	160,85	232,06	181,82	125,68	181,32	181,82	125,68	181,32	208,33	144,06	207,83
1,0	370,37	256,37	369,87	333,33	230,70	332,83	256,41	177,38	255,91	294,12	203,52	293,62
1,1	185,19	128,01	184,68	434,78	301,02	434,28	161,29	111,45	160,79	172,41	119,16	171,91
1,2	86,96	59,93	86,46	400,00	276,91	399,50	71,94	49,52	71,44	76,34	52,56	75,83
1,3	29,50	20,10	28,99	149,25	103,11	148,75	27,32	18,59	26,82	27,86	18,96	27,35
1,4	14,93	9,99	14,42	62,89	43,25	62,39	13,40	8,94	12,90	13,72	9,16	13,21
1,5	8,30	5,40	7,78	26,67	18,14	26,16	7,62	4,93	7,10	7,78	5,04	7,26
LCI	0,1437			0,1526			0,1489			0,1461		
LCS	0,7642			0,8621			0,7592			0,7571		
n = 20												
0,5	1,57	0,69	0,95	1,28	0,46	0,60	1,51	0,64	0,87	1,45	0,59	0,81
0,6	3,56	2,10	3,02	2,26	1,18	1,68	3,24	1,88	2,69	2,98	1,70	2,43
0,7	10,80	7,13	10,29	5,60	3,52	5,07	9,50	6,23	8,98	8,35	5,44	7,84
0,8	40,98	28,06	40,48	18,98	12,80	18,47	35,34	24,14	34,83	30,12	20,53	29,62
0,9	144,93	100,11	144,43	63,69	43,80	63,19	125,00	86,30	124,50	112,36	77,53	111,86
1,0	370,37	256,37	369,87	270,27	186,99	269,77	303,03	209,70	302,53	256,41	177,38	255,91
1,1	88,50	60,99	87,99	833,33	577,28	832,83	86,21	59,41	85,71	90,09	62,10	89,59
1,2	24,51	16,64	24,00	769,23	532,84	768,73	24,15	16,39	23,65	24,81	16,85	24,31
1,3	9,56	6,27	9,05	196,08	135,56	195,58	9,43	6,19	8,92	9,64	6,33	9,13
1,4	4,45	2,73	3,92	38,91	26,62	38,41	4,42	2,70	3,88	4,49	2,75	3,96
1,5	2,70	1,50	2,15	15,48	10,38	14,97	2,68	1,49	2,12	2,72	1,52	2,17
LCI	0,2118			0,2309			0,2151			0,2183		
LCS	0,6302			0,7530			0,6295			0,6309		
n = 40												
0,5	1,03	0,20	0,18	1,00	0,12	0,06	1,03	0,19	0,16	1,02	0,17	0,14
0,6	1,38	0,54	0,72	1,08	0,27	0,29	1,32	0,49	0,65	1,23	0,42	0,54
0,7	3,40	1,99	2,86	1,62	0,72	1,01	3,06	1,75	2,51	2,55	1,40	1,99
0,8	16,64	11,18	16,13	4,21	2,56	3,67	13,93	9,30	13,42	10,19	6,71	9,68
0,9	100,00	68,97	99,50	18,73	12,63	18,22	81,30	56,01	80,80	55,25	37,95	54,75
1,0	370,37	256,37	369,87	100,00	68,97	99,50	357,14	247,21	356,64	196,08	135,56	195,58
1,1	82,64	56,94	82,14	666,67	461,75	666,17	92,59	63,83	92,09	69,93	48,12	69,43
1,2	14,03	9,37	13,52	303,03	209,70	302,53	15,48	10,38	14,97	12,80	8,52	12,29
1,3	4,37	2,67	3,84	41,84	28,65	41,34	4,73	2,92	4,20	4,09	2,47	3,56
1,4	2,19	1,13	1,61	11,25	7,44	10,74	2,28	1,20	1,71	2,11	1,08	1,53
1,5	1,48	0,62	0,85	4,26	2,59	3,72	1,53	0,65	0,90	1,45	0,59	0,80
LCI	0,2585			0,2895			0,2619			0,2683		
LCS	0,5671			0,6499			0,5707			0,5637		

Tabela 4.7: Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 4

n=5												
δ	BPIZ			BP			Gamma			Weibull		
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
0,5	10,07	6,63	9,56	7,84	5,08	7,32	8,43	5,49	7,92	8,23	5,35	7,71
0,6	19,88	13,43	19,37	15,27	10,23	14,76	16,50	11,09	15,99	16,05	10,78	15,54
0,7	48,31	33,14	47,81	36,10	24,68	35,60	39,68	27,16	39,18	38,76	26,52	38,26
0,8	111,11	76,67	110,61	77,52	53,39	77,02	87,72	60,46	87,22	86,21	59,41	85,71
0,9	172,41	119,16	171,91	106,38	73,39	105,88	121,95	84,18	121,45	116,28	80,25	115,78
1,0	370,37	256,37	369,87	344,83	238,67	344,33	256,41	177,38	255,91	250,00	172,94	249,50
1,1	238,10	164,69	237,59	555,56	384,74	555,06	169,49	117,14	168,99	169,49	117,14	168,99
1,2	93,46	64,43	92,96	312,50	216,26	312,00	66,67	45,86	66,16	66,67	45,86	66,16
1,3	34,36	23,47	33,86	114,94	79,33	114,44	25,13	17,07	24,62	25,25	17,15	24,75
1,4	15,53	10,41	15,02	40,98	28,06	40,48	12,38	8,23	11,87	12,48	8,30	11,97
1,5	8,56	5,58	8,05	19,01	12,83	18,50	6,92	4,44	6,40	6,94	4,46	6,43
LCI	0,1185			0,1273			0,1245			0,1252		
LCS	0,7978			0,8727			0,7786			0,7789		
n = 10												
0,5	6,92	4,44	6,40	4,95	3,07	4,42	5,72	3,61	5,19	5,74	3,62	5,21
0,6	23,31	15,81	22,80	15,36	10,30	14,85	18,45	12,44	17,94	18,52	12,49	18,01
0,7	71,43	49,16	70,93	43,48	29,79	42,98	53,48	36,72	52,97	53,48	36,72	52,97
0,8	200,00	138,28	199,50	129,87	89,67	129,37	158,73	109,68	158,23	158,73	109,68	158,23
0,9	277,78	192,19	277,28	232,56	160,85	232,06	250,00	172,94	249,50	250,00	172,94	249,50
1,0	370,37	256,37	369,87	555,56	384,74	555,06	303,03	209,70	302,53	303,03	209,70	302,53
1,1	106,38	73,39	105,88	714,29	494,76	713,79	97,09	66,95	96,59	95,24	65,67	94,74
1,2	32,05	21,87	31,55	370,37	256,37	369,87	30,86	21,04	30,36	30,12	20,53	29,62
1,3	10,66	7,04	10,15	75,19	51,77	74,69	10,45	6,89	9,94	10,34	6,82	9,83
1,4	5,33	3,34	4,81	24,57	16,68	24,06	5,27	3,29	4,74	5,21	3,25	4,68
1,5	3,13	1,80	2,58	9,75	6,40	9,23	3,11	1,78	2,56	3,08	1,77	2,53
LCI	0,1501			0,1606			0,1559			0,1557		
LCS	0,6591			0,7532			0,6580			0,6571		
n = 20												
0,5	1,27	0,45	0,59	1,05	0,23	0,23	1,21	0,40	0,51	1,12	0,32	0,37
0,6	2,71	1,51	2,15	1,48	0,62	0,85	2,42	1,30	1,85	1,94	0,96	1,35
0,7	8,58	5,60	8,07	3,30	1,92	2,75	7,20	4,64	6,68	5,21	3,25	4,68
0,8	42,02	28,78	41,51	10,80	7,13	10,29	33,67	22,99	33,17	20,53	13,88	20,03
0,9	144,93	100,11	144,43	34,13	23,31	33,63	116,28	80,25	115,78	69,44	47,79	68,94
1,0	370,37	256,37	369,87	135,14	93,32	134,63	312,50	216,26	312,00	178,57	123,43	178,07
1,1	64,10	44,09	63,60	666,67	461,75	666,17	64,10	44,09	63,60	46,08	31,59	45,58
1,2	13,57	9,05	13,06	163,93	113,28	163,43	13,46	8,98	12,95	10,94	7,23	10,43
1,3	5,15	3,21	4,63	34,84	23,80	34,34	5,13	3,19	4,60	4,41	2,69	3,88
1,4	2,57	1,41	2,01	10,30	6,79	9,79	2,56	1,40	2,00	2,33	1,24	1,76
1,5	1,72	0,79	1,11	4,30	2,62	3,76	1,71	0,79	1,11	1,62	0,72	1,00
LCI	0,2267			0,2567			0,2311			0,2408		
LCS	0,5828			0,6618			0,5826			0,5740		
n = 40												
0,5	1,00	0,11	0,04	1,00	0,00	0,00	1,00	0,10	0,03	1,00	0,08	0,01
0,6	1,12	0,31	0,36	1,00	0,12	0,05	1,09	0,28	0,32	1,04	0,21	0,21
0,7	2,30	1,22	1,73	1,12	0,31	0,36	2,10	1,07	1,52	1,63	0,73	1,01
0,8	10,98	7,26	10,47	2,03	1,02	1,44	9,27	6,07	8,75	5,71	3,60	5,18
0,9	77,52	53,39	77,02	7,20	4,64	6,68	60,98	41,92	60,47	35,71	24,41	35,21
1,0	370,37	256,37	369,87	38,91	26,62	38,41	344,83	238,67	344,33	151,52	104,68	151,01
1,1	35,46	24,23	34,96	263,16	182,06	262,66	36,76	25,14	36,26	20,53	13,88	20,03
1,2	5,60	3,52	5,07	125,00	86,30	124,50	5,72	3,61	5,20	4,31	2,62	3,77
1,3	2,19	1,14	1,61	15,85	10,63	15,34	2,22	1,16	1,65	1,89	0,92	1,29
1,4	1,37	0,53	0,71	4,16	2,52	3,63	1,38	0,53	0,72	1,27	0,45	0,59
1,5	1,13	0,32	0,38	2,03	1,02	1,44	1,13	0,32	0,38	1,09	0,28	0,32
LCI	0,2741			0,3190			0,2776			0,2883		
LCS	0,5260			0,6002			0,5267			0,5160		

Tabela 4.8: Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 5

n=5												
δ	BPIZ			BP			Gamma			Weibull		
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
0,5	5,87	3,71	5,35	2,71	1,51	2,15	5,69	3,59	5,17	4,12	2,50	3,59
0,6	18,05	12,16	17,54	6,95	4,46	6,43	17,45	11,75	16,94	11,95	7,93	11,44
0,7	55,56	38,16	55,05	18,02	12,14	17,51	52,63	36,13	52,13	33,56	22,91	33,05
0,8	175,44	121,26	174,94	52,91	36,33	52,41	161,29	111,45	160,79	105,26	72,62	104,76
0,9	500,00	346,23	499,50	129,87	89,67	129,37	434,78	301,02	434,28	294,12	203,52	293,62
1,0	370,37	256,37	369,87	200,00	138,28	199,50	344,83	238,67	344,33	312,50	216,26	312,00
1,1	243,90	168,71	243,40	200,00	138,28	199,50	243,90	168,71	243,40	256,41	177,38	255,91
1,2	90,91	62,67	90,41	84,03	57,90	83,53	90,09	62,10	89,59	90,91	62,67	90,41
1,3	38,91	26,62	38,41	36,23	24,77	35,73	38,61	26,41	38,11	40,49	27,71	39,98
1,4	19,38	13,08	18,87	18,45	12,44	17,94	19,23	12,98	18,72	20,62	13,94	20,11
1,5	10,03	6,60	9,52	9,71	6,38	9,20	9,97	6,56	9,46	10,42	6,87	9,90
LCI	0,3550			0,4231			0,3567			0,3823		
LCS	1,8223			1,8163			1,8208			1,8313		
n = 10												
0,5	1,32	0,49	0,66	1,07	0,25	0,27	1,33	0,50	0,67	1,30	0,47	0,62
0,6	2,66	1,47	2,11	1,41	0,56	0,76	2,70	1,50	2,15	2,57	1,41	2,01
0,7	8,18	5,32	7,67	2,74	1,53	2,19	8,42	5,49	7,91	7,55	4,88	7,04
0,8	31,65	21,59	31,14	7,33	4,73	6,81	33,33	22,76	32,83	28,65	19,51	28,15
0,9	169,49	117,14	168,99	26,25	17,84	25,74	185,19	128,01	184,68	161,29	111,45	160,79
1,0	370,37	256,37	369,87	108,70	74,99	108,19	344,83	238,67	344,33	312,50	216,26	312,00
1,1	126,58	87,39	126,08	256,41	177,38	255,91	111,11	76,67	110,61	108,70	74,99	108,19
1,2	31,65	21,59	31,14	142,86	98,67	142,36	26,18	17,80	25,67	26,11	17,75	25,60
1,3	11,38	7,53	10,87	48,54	33,30	48,04	9,78	6,43	9,27	9,67	6,35	9,16
1,4	5,09	3,17	4,57	16,05	10,78	15,54	4,53	2,78	4,00	4,51	2,76	3,98
1,5	2,85	1,61	2,30	7,12	4,58	6,60	2,60	1,43	2,04	2,59	1,42	2,03
LCI	0,5332			0,6214			0,5316			0,5372		
LCS	1,5000			1,6532			1,4811			1,4799		
n = 20												
0,5	1,00	0,13	0,07	1,00	0,08	0,01	1,00	0,13	0,07	1,01	0,14	0,09
0,6	1,13	0,32	0,38	1,01	0,14	0,09	1,12	0,31	0,37	1,17	0,36	0,45
0,7	1,98	0,99	1,39	1,14	0,33	0,40	1,95	0,96	1,36	2,27	1,19	1,69
0,8	7,39	4,77	6,87	1,88	0,91	1,28	7,16	4,61	6,64	9,71	6,38	9,20
0,9	49,75	34,14	49,25	5,72	3,61	5,19	47,17	32,35	46,67	69,93	48,12	69,43
1,0	370,37	256,37	369,87	33,33	22,76	32,83	357,14	247,21	356,64	434,78	301,02	434,28
1,1	74,07	51,00	73,57	200,00	138,28	199,50	75,19	51,77	74,69	77,52	53,39	77,02
1,2	12,72	8,47	12,21	434,78	301,02	434,28	12,90	8,59	12,39	13,39	8,93	12,88
1,3	3,87	2,32	3,33	82,64	56,94	82,14	3,91	2,34	3,37	3,99	2,40	3,45
1,4	1,92	0,95	1,33	17,92	12,07	17,41	1,93	0,95	1,34	1,95	0,97	1,37
1,5	1,32	0,49	0,65	5,77	3,64	5,25	1,32	0,49	0,65	1,33	0,50	0,66
LCI	0,6614			0,7624			0,6634			0,6492		
LCS	1,3199			1,5666			1,3209			1,3232		
n = 40												
0,5	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
0,6	1,00	0,11	0,04	1,00	0,00	0,00	1,00	0,11	0,04	1,00	0,13	0,07
0,7	1,15	0,34	0,42	1,01	0,14	0,08	1,15	0,34	0,41	1,23	0,41	0,53
0,8	2,99	1,70	2,44	1,17	0,35	0,44	2,95	1,68	2,40	4,00	2,41	3,47
0,9	27,40	18,64	26,89	2,70	1,50	2,15	26,53	18,04	26,02	47,62	32,66	47,12
1,0	370,37	256,37	369,87	18,69	12,61	18,18	370,37	256,37	369,87	526,32	364,47	525,82
1,1	23,36	15,85	22,86	344,83	238,67	344,33	25,25	17,15	24,75	25,06	17,02	24,56
1,2	3,67	2,18	3,13	10000,00	6931,13	9999,50	3,87	2,32	3,33	3,86	2,31	3,33
1,3	1,52	0,65	0,89	113,64	78,42	113,14	1,55	0,67	0,93	1,55	0,67	0,92
1,4	1,09	0,28	0,32	11,98	7,95	11,47	1,10	0,29	0,33	1,10	0,29	0,33
1,5	1,01	0,16	0,12	3,14	1,81	2,59	1,02	0,17	0,13	1,02	0,17	0,13
LCI	0,7315			0,8300			0,7325			0,7163		
LCS	1,1935			1,4734			1,1975			1,1972		

Tabela 4.9: Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 6

n=5												
δ	BPIZ			BP			Gamma			Weibull		
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
0,5	3,11	1,79	2,56	1,23	0,41	0,53	2,96	1,68	2,41	2,03	1,02	1,44
0,6	10,29	6,78	9,78	2,11	1,08	1,53	9,68	6,36	9,17	5,53	3,48	5,01
0,7	35,34	24,14	34,83	5,12	3,19	4,59	32,47	22,16	31,96	17,21	11,58	16,70
0,8	96,15	66,30	95,65	14,31	9,57	13,80	90,91	62,67	90,41	51,55	35,38	51,04
0,9	277,78	192,19	277,28	36,50	24,95	35,99	243,90	168,71	243,40	129,87	89,67	129,37
1,0	370,37	256,37	369,87	71,43	49,16	70,93	333,33	230,70	332,83	238,10	164,69	237,59
1,1	136,99	94,60	136,49	99,01	68,28	98,51	104,17	71,86	103,67	116,28	80,25	115,78
1,2	31,25	21,31	30,75	27,86	18,96	27,35	26,18	17,80	25,67	28,90	19,68	28,40
1,3	11,49	7,62	10,98	11,40	7,55	10,89	10,19	6,71	9,68	10,81	7,14	10,30
1,4	5,17	3,22	4,64	5,16	3,22	4,64	4,69	2,89	4,16	4,94	3,06	4,41
1,5	2,89	1,63	2,33	2,89	1,63	2,33	2,67	1,48	2,11	2,79	1,56	2,23
LCI	0,4290			0,5596			0,4330			0,4706		
LCS	1,5161			1,5164			1,5009			1,5094		
n = 10												
0,5	1,04	0,22	0,21	1,00	0,12	0,05	1,04	0,21	0,21	1,04	0,21	0,20
0,6	1,51	0,64	0,88	1,07	0,25	0,27	1,49	0,63	0,86	1,46	0,60	0,82
0,7	4,42	2,71	3,89	1,67	0,76	1,06	4,30	2,62	3,76	4,06	2,45	3,52
0,8	19,92	13,46	19,41	4,35	2,65	3,82	19,05	12,85	18,54	17,54	11,81	17,04
0,9	112,36	77,53	111,86	16,42	11,03	15,91	104,17	71,86	103,67	98,04	67,61	97,54
1,0	370,37	256,37	369,87	64,94	44,66	64,43	344,83	238,67	344,33	294,12	203,52	293,62
1,1	81,30	56,01	80,80	285,71	197,70	285,21	83,33	57,41	82,83	82,64	56,94	82,14
1,2	13,39	8,93	12,88	526,32	364,47	525,82	13,59	9,07	13,08	13,66	9,12	13,15
1,3	4,23	2,57	3,70	200,00	138,28	199,50	4,27	2,60	3,74	4,28	2,61	3,75
1,4	2,07	1,05	1,49	33,11	22,60	32,61	2,08	1,06	1,50	2,08	1,06	1,50
1,5	1,43	0,58	0,78	8,87	5,79	8,35	1,43	0,58	0,79	1,43	0,58	0,79
LCI	0,5992			0,6882			0,6011			0,6053		
LCS	1,3394			1,6285			1,3403			1,3407		
n = 20												
0,5	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
0,6	1,02	0,18	0,16	1,00	0,00	0,00	1,02	0,18	0,15	1,03	0,20	0,18
0,7	1,60	0,71	0,98	1,01	0,14	0,09	1,58	0,69	0,96	1,73	0,81	1,13
0,8	7,08	4,55	6,56	1,22	0,40	0,52	6,85	4,39	6,33	8,51	5,55	8,00
0,9	86,96	59,93	86,46	2,92	1,66	2,37	80,00	55,10	79,50	103,09	71,11	102,59
1,0	370,37	256,37	369,87	15,60	10,46	15,09	344,83	238,67	344,33	357,14	247,21	356,64
1,1	23,98	16,27	23,48	112,36	77,53	111,86	22,37	15,16	21,87	21,98	14,88	21,47
1,2	3,78	2,25	3,24	1428,57	989,86	1428,07	3,67	2,18	3,13	3,64	2,16	3,10
1,3	1,62	0,72	1,00	243,90	168,71	243,40	1,59	0,70	0,97	1,58	0,69	0,96
1,4	1,15	0,34	0,41	19,46	13,14	18,95	1,14	0,33	0,40	1,14	0,33	0,40
1,5	1,04	0,21	0,19	4,39	2,68	3,86	1,03	0,20	0,19	1,03	0,20	0,19
LCI	0,6846			0,8231			0,6860			0,6774		
LCS	1,2016			1,5135			1,1990			1,1983		
n = 40												
0,5	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
0,6	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,08	0,01
0,7	1,02	0,17	0,12	1,00	0,00	0,00	1,01	0,16	0,12	1,04	0,21	0,21
0,8	1,81	0,86	1,21	1,01	0,14	0,08	1,77	0,83	1,17	2,65	1,46	2,09
0,9	19,31	13,03	18,80	1,43	0,58	0,79	18,18	12,25	17,67	44,84	30,73	44,34
1,0	370,37	256,37	369,87	7,63	4,94	7,12	312,50	216,26	312,00	416,67	288,46	416,17
1,1	11,95	7,93	11,44	161,29	111,45	160,79	11,70	7,76	11,18	9,45	6,20	8,94
1,2	1,85	0,89	1,26	5000,00	3465,39	4999,50	1,83	0,88	1,24	1,70	0,78	1,09
1,3	1,09	0,28	0,31	34,97	23,89	34,46	1,09	0,28	0,31	1,07	0,26	0,28
1,4	1,01	0,14	0,08	3,63	2,15	3,09	1,01	0,14	0,08	1,01	0,13	0,07
1,5	1,00	0,08	0,01	1,42	0,57	0,77	1,00	0,08	0,01	1,00	0,08	0,01
LCI	0,7656			0,8836			0,7670			0,7446		
LCS	1,1325			1,3786			1,1316			1,1241		

Tabela 4.10: Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 7

n=5												
δ	BPIZ			BP			Gamma			Weibull		
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
0,5	13,59	9,07	13,08	8,97	5,86	8,45	11,99	7,96	11,48	10,56	6,97	10,05
0,6	30,58	20,85	30,08	19,16	12,93	18,65	27,86	18,96	27,35	24,15	16,39	23,65
0,7	58,82	40,43	58,32	38,02	26,01	37,52	52,91	36,33	52,41	47,39	32,50	46,89
0,8	156,25	107,96	155,75	80,65	55,55	80,14	135,14	93,32	134,63	107,53	74,18	107,03
0,9	312,50	216,26	312,00	153,85	106,29	153,35	250,00	172,94	249,50	222,22	153,69	221,72
1,0	370,37	256,37	369,87	222,22	153,69	221,72	294,12	203,52	293,62	322,58	223,25	322,08
1,1	142,86	98,67	142,36	114,94	79,33	114,44	123,46	85,23	122,96	151,52	104,68	151,01
1,2	72,46	49,88	71,96	63,69	43,80	63,19	64,94	44,66	64,43	86,96	59,93	86,46
1,3	28,25	19,23	27,74	25,97	17,65	25,47	26,04	17,70	25,54	33,78	23,07	33,28
1,4	16,39	11,01	15,89	15,13	10,14	14,62	15,13	10,14	14,62	18,94	12,78	18,43
1,5	9,53	6,25	9,02	8,90	5,81	8,38	8,88	5,80	8,37	11,03	7,29	10,51
LCI	0,2131			0,2382			0,2191			0,2263		
LCS	1,6528			1,6394			1,6392			1,6817		
n = 10												
0,5	6,77	4,33	6,25	3,36	1,96	2,81	6,14	3,90	5,62	5,82	3,68	5,30
0,6	20,66	13,97	20,15	8,83	5,76	8,31	18,42	12,42	17,91	17,04	11,46	16,53
0,7	62,89	43,25	62,39	22,88	15,51	22,38	54,05	37,12	53,55	50,76	34,84	50,26
0,8	166,67	115,18	166,17	62,50	42,97	62,00	153,85	106,29	153,35	142,86	98,67	142,36
0,9	555,56	384,74	555,06	153,85	106,29	153,35	476,19	329,72	475,69	434,78	301,02	434,28
1,0	370,37	256,37	369,87	285,71	197,70	285,21	333,33	230,70	332,83	344,83	238,67	344,33
1,1	135,14	93,32	134,63	714,29	494,76	713,79	135,14	93,32	134,63	156,25	107,96	155,75
1,2	34,13	23,31	33,63	294,12	203,52	293,62	34,01	23,23	33,51	40,49	27,71	39,98
1,3	14,71	9,84	14,20	149,25	103,11	148,75	14,71	9,84	14,20	17,15	11,54	16,65
1,4	6,62	4,23	6,10	58,14	39,95	57,64	6,61	4,22	6,08	7,32	4,72	6,80
1,5	4,10	2,48	3,57	22,83	15,48	22,33	4,09	2,47	3,55	4,44	2,72	3,91
LCI	0,2979			0,3453			0,3035			0,3071		
LCS	1,3764			1,6444			1,3761			1,3932		
n = 20												
0,5	1,46	0,60	0,82	1,12	0,31	0,36	1,42	0,57	0,78	1,16	0,35	0,42
0,6	3,52	2,07	2,98	1,81	0,86	1,21	3,32	1,93	2,77	2,03	1,02	1,44
0,7	13,68	9,13	13,17	4,43	2,71	3,90	12,79	8,51	12,28	5,40	3,39	4,88
0,8	55,25	37,95	54,75	15,46	10,36	14,95	50,25	34,48	49,75	20,24	13,68	19,74
0,9	217,39	150,34	216,89	49,75	34,14	49,25	192,31	132,95	191,81	66,23	45,56	65,72
1,0	370,37	256,37	369,87	204,08	141,11	203,58	322,58	223,25	322,08	185,19	128,01	184,68
1,1	66,67	45,86	66,16	833,33	577,28	832,83	62,11	42,71	61,61	57,14	39,26	56,64
1,2	16,98	11,42	16,47	1111,11	769,82	1110,61	15,97	10,72	15,47	15,29	10,25	14,78
1,3	5,96	3,78	5,44	476,19	329,72	475,69	5,74	3,62	5,21	5,60	3,52	5,07
1,4	3,01	1,72	2,46	81,30	56,01	80,80	2,93	1,66	2,38	2,89	1,64	2,34
1,5	1,96	0,97	1,37	25,64	17,42	25,14	1,93	0,95	1,34	1,91	0,94	1,32
LCI	0,4315			0,4888			0,4350			0,4772		
LCS	1,1927			1,5273			1,1889			1,1859		
n = 40												
0,5	1,00	0,13	0,06	1,00	0,10	0,03	1,00	0,12	0,06	1,00	0,09	0,02
0,6	1,16	0,35	0,44	1,05	0,22	0,22	1,15	0,34	0,42	1,04	0,21	0,19
0,7	2,45	1,32	1,89	1,56	0,68	0,93	2,37	1,27	1,81	1,47	0,61	0,84
0,8	10,93	7,22	10,42	4,43	2,71	3,90	10,33	6,81	9,82	3,91	2,34	3,37
0,9	89,29	61,54	88,78	23,20	15,73	22,70	80,00	55,10	79,50	18,94	12,78	18,43
1,0	370,37	256,37	369,87	153,85	106,29	153,35	344,83	238,67	344,33	100,00	68,97	99,50
1,1	48,08	32,98	47,57	1428,57	989,86	1428,07	49,50	33,97	49,00	31,85	21,73	31,34
1,2	8,40	5,47	7,89	∞	∞	∞	8,78	5,73	8,26	6,43	4,10	5,91
1,3	2,94	1,67	2,39	1428,57	989,86	1428,07	3,05	1,74	2,50	2,49	1,35	1,93
1,4	1,66	0,75	1,04	188,68	130,44	188,18	1,69	0,77	1,08	1,51	0,64	0,88
1,5	1,23	0,42	0,54	29,85	20,34	29,35	1,24	0,43	0,55	1,18	0,37	0,46
LCI	0,5438			0,5835			0,5460			0,5904		
LCS	1,0855			1,4384			1,0889			1,0676		

Tabela 4.11: Performance em termos de ARL, SDRL e MRL, para monitorar a média, cenário 8

n=5												
δ	BPIZ			BP			Gamma			Weibull		
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
0,5	9,29	6,09	8,78	5,10	3,17	4,57	8,50	5,54	7,99	7,04	4,52	6,52
0,6	20,53	13,88	20,03	10,66	7,04	10,15	18,59	12,53	18,08	15,08	10,10	14,57
0,7	46,30	31,74	45,79	22,83	15,48	22,33	41,84	28,65	41,34	33,90	23,15	33,39
0,8	90,91	62,67	90,41	44,44	30,46	43,94	78,12	53,80	77,62	61,73	42,44	61,23
0,9	188,68	130,44	188,18	74,07	51,00	73,57	153,85	106,29	153,35	126,58	87,39	126,08
1,0	370,37	256,37	369,87	128,21	88,52	127,70	322,58	223,25	322,08	232,56	160,85	232,06
1,1	106,38	73,39	105,88	99,01	68,28	98,51	104,17	71,86	103,67	104,17	71,86	103,67
1,2	33,11	22,60	32,61	32,26	22,01	31,75	32,47	22,16	31,96	33,90	23,15	33,39
1,3	13,42	8,95	12,91	13,33	8,89	12,82	13,26	8,84	12,75	13,91	9,29	13,40
1,4	6,59	4,21	6,07	6,57	4,20	6,05	6,54	4,17	6,02	6,77	4,33	6,25
1,5	4,15	2,51	3,61	4,14	2,51	3,61	4,13	2,50	3,60	4,21	2,56	3,68
LCI	0,2573			0,2989			0,2632			0,2755		
LCS	1,4304			1,4301			1,4286			1,4346		
n = 10												
0,5	5,47	3,44	4,95	1,90	0,92	1,30	4,96	3,08	4,43	3,46	2,03	2,91
0,6	18,98	12,80	18,47	4,76	2,94	4,23	16,69	11,22	16,19	11,11	7,35	10,60
0,7	56,50	38,81	55,99	11,71	7,76	11,20	50,51	34,66	50,00	32,36	22,08	31,86
0,8	169,49	117,14	168,99	32,05	21,87	31,55	153,85	106,29	153,35	85,47	58,90	84,97
0,9	416,67	288,46	416,17	66,23	45,56	65,72	400,00	276,91	399,50	208,33	144,06	207,83
1,0	370,37	256,37	369,87	166,67	115,18	166,17	322,58	223,25	322,08	250,00	172,94	249,50
1,1	63,69	43,80	63,19	270,27	186,99	269,77	57,14	39,26	56,64	60,24	41,41	59,74
1,2	14,71	9,84	14,20	555,56	384,74	555,06	14,18	9,48	13,68	14,45	9,67	13,94
1,3	5,88	3,72	5,36	434,78	301,02	434,28	5,69	3,59	5,17	5,80	3,67	5,28
1,4	3,31	1,93	2,77	116,28	80,25	115,78	3,23	1,87	2,68	3,28	1,90	2,73
1,5	2,20	1,15	1,63	37,04	25,32	36,53	2,16	1,12	1,59	2,19	1,14	1,61
LCI	0,3242			0,4038			0,3294			0,3527		
LCS	1,2315			1,6162			1,2276			1,2302		
n = 20												
0,5	1,23	0,41	0,53	1,06	0,24	0,25	1,20	0,39	0,50	1,04	0,21	0,20
0,6	2,89	1,63	2,34	1,70	0,78	1,09	2,75	1,53	2,19	1,51	0,64	0,88
0,7	11,51	7,62	11,00	4,81	2,97	4,28	10,63	7,01	10,11	3,87	2,32	3,34
0,8	59,17	40,67	58,67	18,80	12,68	18,29	53,19	36,52	52,69	14,12	9,44	13,62
0,9	294,12	203,52	293,62	81,30	56,01	80,80	250,00	172,94	249,50	62,11	42,71	61,61
1,0	370,37	256,37	369,87	232,56	160,85	232,06	322,58	223,25	322,08	144,93	100,11	144,43
1,1	42,55	29,15	42,05	769,23	532,84	768,73	42,02	28,78	41,51	34,13	23,31	33,63
1,2	9,09	5,95	8,58	2500,00	1732,52	2499,50	8,98	5,87	8,47	8,06	5,24	7,55
1,3	3,43	2,01	2,89	2500,00	1732,52	2499,50	3,41	2,00	2,87	3,15	1,82	2,61
1,4	1,96	0,97	1,37	277,78	192,19	277,28	1,95	0,97	1,36	1,87	0,91	1,27
1,5	1,44	0,58	0,79	43,29	29,66	42,79	1,43	0,58	0,79	1,40	0,55	0,75
LCI	0,4524			0,4955			0,4563			0,5084		
LCS	1,1184			1,5125			1,1177			1,1091		
n = 40												
0,5	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
0,6	1,05	0,23	0,23	1,01	0,15	0,10	1,04	0,22	0,21	1,00	0,11	0,04
0,7	1,95	0,97	1,36	1,35	0,51	0,68	1,86	0,90	1,27	1,14	0,33	0,40
0,8	9,38	6,15	8,87	4,29	2,61	3,75	8,65	5,64	8,14	2,47	1,34	1,91
0,9	76,92	52,97	76,42	26,39	17,94	25,88	67,11	46,17	66,61	11,82	7,84	11,31
1,0	370,37	256,37	369,87	200,00	138,28	199,50	333,33	230,70	332,83	58,14	39,95	57,64
1,1	29,85	20,34	29,35	1428,57	989,86	1428,07	28,25	19,23	27,74	12,39	8,24	11,88
1,2	4,60	2,82	4,06	∞	$-\infty$	∞	4,46	2,73	3,93	2,97	1,69	2,41
1,3	1,88	0,92	1,29	2000,00	1385,95	1999,50	1,86	0,90	1,26	1,50	0,63	0,86
1,4	1,25	0,43	0,56	103,09	71,11	102,59	1,25	0,43	0,55	1,14	0,33	0,41
1,5	1,08	0,27	0,30	13,91	9,29	13,40	1,08	0,26	0,29	1,04	0,22	0,21
LCI	0,5612			0,5955			0,5647			0,6249		
LCS	1,0323			1,3651			1,0303			0,9979		

Capítulo 5

Aplicação

Neste capítulo é apresentada uma aplicação a um conjunto de dados reais com a intenção de ilustrar o uso do gráfico de controle proposto. O conjunto de dados utilizado está disponível no pacote `weatherAUS` do software R, disponível em <https://www.rdocumentation.org/>, que fornece observações meteorológicas diárias de várias estações meteorológicas australianas. Essas observações são obtidas do Australian Commonwealth Bureau of Meteorology e processadas para criar esse conjunto de dados para ilustrar análises, usando R, como é possível ver no trabalho de CABEZUELO (2022).

Para esta aplicação foi analisado o índice pluviométrico da cidade de Portland na Austrália, que é uma cidade pequena com clima mediterrâneo, onde as chuvas acontecem na sua maioria por volta do meio do ano. A Austrália tem um clima que favorece chuva em muitos dias do ano, mas com pouca quantidade, o que dificulta encontrar um cenário que favoreça amostra com valor zero, que é o caso dos dias que não chove, dentre as cidades contidas no banco de dados Portland é uma cidade que apresenta um domínio com uma quantidade de zeros maior em relação as outras. Com isso foi escolhido e analisado o mês de agosto dos anos 2009 a 2021, vale salientar que não há informações para o ano de 2016 e em outros dois dias nos demais anos. Deste modo, foram selecionadas um total de 371 observações individuais nesse período.

Com base em MONTGOMERY (2017) que apresenta um estudo sobre a quantidade de observações recomendadas para a fase I, os parâmetros foram estimados nessa fase considerando as 120 primeiras observações individuais e o restante dos dados foram utilizados para monitorar o índice pluviométrico na fase II. Considerando as observações utilizadas na fase I, apresenta mínimo 0, máximo 23,8, mediana 2,3, média 4,14 e desvio padrão 5,12. O parâmetro de mistura é $\lambda = 0,1779$, ou seja, a probabilidade de Y assumir o valor zero é 17,79%, a média

condicional é $\mu = 3,4660$ e a precisão $\phi = 2,2204$.

A Figura 5.1 mostra o gráfico de controle, considerando $\alpha = 0,0027$, com os dados da fase I e II. O limite de controle inferior é 0, enquanto que o limite de controle superior é 46,71. Considerando as observações utilizadas na fase II, tem-se mínimo 0 e máximo 61. Note que na fase II tem-se que esse ponto máximo está fora de controle. A observação fora de controle destoa das demais indicando um valor não convencional ao que o gráfico de controle conseguiu identificar. É válido mencionar que a fase II apresenta mediana 1,8, média 3,69 e desvio padrão 5,98.

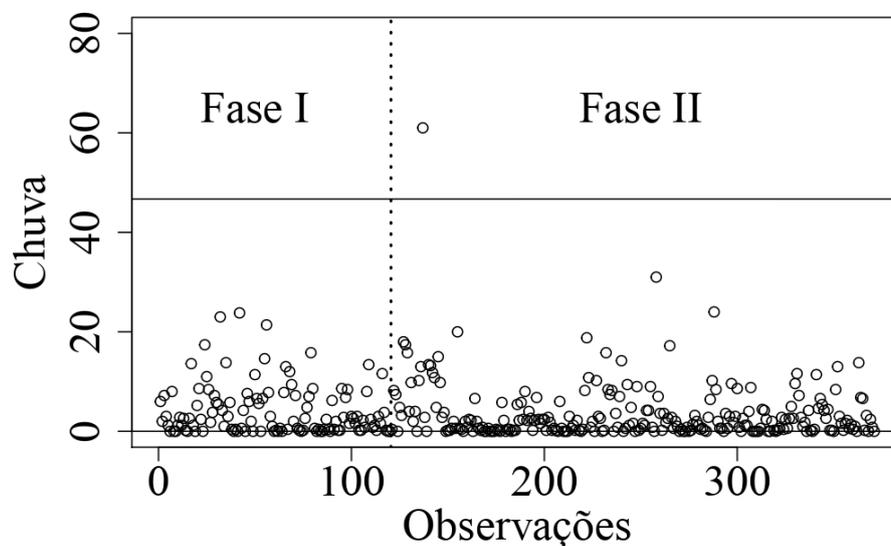


Figura 5.1: Gráfico dos limites de controle com base na distribuição BPIZ, para monitorar o índice pluviométrico na cidade de Portland na Austrália, no mês de agosto entre 2009 e 2021, exceto para o ano 2016.

A Tabela 5.1 apresenta o desempenho do gráfico de controle. Nota-se que quando o processo está sob controle ($\delta = 1$), o gráfico de controle BPIZ apresenta valores iguais aos valores nominais. Por exemplo, o gráfico de controle BPIZ obteve um $ARL_0 = 370,37$, $SDRL_0 = 369,87$ e $MRL_0 = 256,37$. Além disso, ao aumentar o valor de δ , ocorre uma detecção mais rápida na mudança da característica da qualidade.

Tabela 5.1: Performance da carta de controle BPIZ para a aplicação.

δ	α	ARL	SDRL	MRL
1,0	0,0027	370,37	369,87	256,37
1,1	0,0032	313,97	313,47	217,28
1,2	0,0037	269,78	269,28	186,65
1,3	0,0043	234,49	233,99	162,19
1,4	0,0049	205,84	205,34	142,33
1,5	0,0055	182,25	181,75	125,98

Capítulo 6

Conclusões

Algumas distribuições de probabilidade, sejam elas discretas ou contínuas, não são capazes de contemplar dados que contenham zeros. A alternativa mais prudente é analisar um modelo de distribuição misto capaz de considerar essas informações. Foi mostrado aqui que o modelo misto é composto por uma parte discreta e uma parte contínua, os zeros serão acomodados por essa parte discreta e os demais dados serão de competência da parte contínua. Aqui foi proposto um gráfico de controle para a distribuição beta prime inflacionada em zero, nosso principal objeto de estudo, e seu desempenho foi comparado com o dos gráficos baseados na distribuição beta prime, gamma e weibull. A vantagem desse gráfico de controle é que diferente de [TULUPYEV *et al.* \(2013\)](#) que precisou substituir os valores de 0 por 0,5, neste caso é possível trabalhar sem fazer nenhuma transformação nos dados.

Quando o processo está em controle o gráfico proposto apresentou ARL, MRL e SDRL mais próximos dos níveis nominais o que não foi observado nos gráficos utilizando as distribuições beta prime, gamma e weibull tanto para observações individuais ($n = 1$), quanto para observações não individuais ($n > 1$). Para o gráfico proposto o ARL converge mais rapidamente para 1, o que não acontece nos demais.

Foi apresentado uma aplicação, com conjuntos de dados reais para o monitoramento de medidas individuais para ilustrar o potencial do gráfico de controle proposto. Finalmente, é sugerido fortemente que sejam utilizados os gráficos de controle propostos para monitorar características da qualidade positivas contínuas inflacionadas em zero.

Referências Bibliográficas

- BEKKER, A., ROUX, J., PHAM-GIA, T., 2009, “The type I distribution of the ratio of independent “Weibullized” generalized beta-prime variables”, *Statistical Papers*, v. 50, n. 2, pp. 323–338.
- BOURGUIGNON, M., SANTOS-NETO, M., CASTRO, M., 2018, “A New Regression Model For Positive Data”, *arXiv e-prints*.
- BOURGUIGNON, M., SANTOS-NETO, M., CASTRO, M., 2021, “A new regression model for positive random variables with skewed and long tail”, *METRON*, v. 79, n. 1, pp. 33–55. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:spr:metron:v:79:y:2021:i:1:d:10.1007_s40300-021-00203-y>.
- CABEZUELO, A., 2022, “Prediction of Rainfall in Australia Using Machine Learning”, *Information*, v. 13 (03), pp. 163. doi: 10.3390/info13040163.
- CORPES, G. D. N., 2021, *Distribuição beta prime inflacionada*. Tese de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba.
- DE ARAUJO LIMA-FILHO, L. M., PEREIRA, T. L., DE SOUZA, T. C., et al., 2019, “Inflated beta control chart for monitoring double bounded processes”, *Computers Industrial Engineering*, v. 136, pp. 265–276. ISSN: 0360-8352. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.07.017>. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360835219304085>>.
- HO, L. L., FERNANDES, F. H., PEREIRA, M. B., 2019, “Control charts to monitor rates and proportions”, *Quality and Reliability Engineering International*. doi: 10.1002/qre.2381.
- HO, L. L., FERNANDES, F. H., QUININO, R. C., et al., 2021, “Improving Shewhart control chart performance for monitoring the Weibull mean”, *Quality and Reliability Engineering International*, v. 37, n. 3, pp. 984–996. doi: <https://doi.org/10.1002/qre.2777>. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qre.2777>>.

- HSIUying WANG, HUANG, W. H.-W. H., YEH, A. B., 2016, “Control Charts for the Lognormal Mean”, *Quality and Reliability Engineering International*, 32, 1407–1416. doi: 10.1022/qre.2341.
- JOEKES, S., SMREKAR, M., BARBOSA, E. P., 2015, “Extending a double sampling control chart for non-conforming proportion in high quality processes to the case of small samples”, *Statistical Methodology*, v. 23, pp. 35–49. ISSN: 1572-3127. doi: <https://doi.org/10.1016/j.stamet.2014.09.003>. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1572312714000719>>.
- LOMBARD, F., MAXWELL, R. K., 2012, “A cusum procedure to detect deviations from uniformity in angular data”, *Journal of Applied Statistics*, v. 39, n. 9, pp. 1871–1880. doi: 10.1080/02664763.2012.683857. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/02664763.2012.683857>>.
- LUCENA, S. E. D. F., 2017, “Essays On Nonnormal Regression Modeling”, *Thesis UFPE*.
- MCDONALD, J. B., 1984, “Some generalized functions for the size distribution of income”, *Econometrica*, v. 91, pp. 647–663.
- MCDONALD, J. B., 2008, “Some generalized functions for the size distribution of income”. In: *Modeling Income Distributions and Lorenz Curves*, Springer, pp. 37–55.
- MONTGOMERY, D. C., 2017, *Introduction to Statistical Quality Control*. 7th Edition.
- MUGHAL, A., AZAM, M., ASLAM, M., 2017, “Restricted Repetitive Sampling in Designing of Control Charts”, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, v. 13 (06), pp. 297–312. doi: 10.18187/pjsor.v13i2.1571.
- OSPINA, R., FERRARI, S. L., 2010, “Inflated beta distributions”, *Statistical papers*, v. 51, n. 1, pp. 111.
- PAIVA, C. S. M., FREIRE, D. M. C., CECATTI, J. G., 2010, “Modelos Aditivos Generalizados para Posição, Escala e Forma (GAMLSS) na Modelagem de Curvas de Referência”, *Revista Brasileira de Ciências da Saúde*, v. 12, n. 3 (abr.), pp. 289–310. Disponível em: <<https://periodicos.ufpb.br/ojs/index.php/rbcs/article/view/4465>>.
- SEVERIANO, G. C. S. S., 2021, “Gráficos de controle para variáveis aleatórias positivas contínuas inflacionadas em zero”, *UFPB, João Pessoa*.

- TEOH, W., CHONG, J., KHOO, M., et al., 2017, “Optimal Designs of the Variable Sample Size \bar{x} Chart Based on Median Run Length and Expected Median Run Length”, *Quality and Reliability Engineering International*, v. 33, n. 1 (fev.), pp. 121–134. ISSN: 0748-8017. doi: 10.1002/qre.1994.
- TULUPYEV, A., SUVOROVA, A., SOUSA, J., et al., 2013, “Beta prime regression with application to risky behavior frequency screening”, *Statistics in medicine*, v. 32, n. 23, pp. 4044–4056.
- WOODALL, W., 2000, “Controversies contradictions in statistical process control”, v. 1. doi: 10.1080/00224065.2000.11980013.