

Alexandre Magno de Paula Viveiros

**Alguns Resultados sobre Caracterizações de
Atratores Estranhos Associados a Dez Sistemas
Dinâmicos Arbitrários e sobre Efeitos
Produzidos por Nuvem de Cordas em Um
Sistema Gravitacional.**

Brasil

Julho - 2021

Alexandre Magno de Paula Viveiros

Alguns Resultados sobre Caracterizações de Atratores Estranhos Associados a Dez Sistemas Dinâmicos Arbitrários e sobre Efeitos Produzidos por Nuvem de Cordas em Um Sistema Gravitacional.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba como requisito para a conclusão do Curso de Doutorado em Física.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra

Brasil

Julho - 2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

V857a Viveiros, Alexandre Magno de Paula.

Alguns resultados sobre caracterizações de atratores estranhos associados a dez sistemas dinâmicos arbitrários e sobre efeitos produzidos por nuvem de cordas em um sistema gravitacional / Alexandre Magno de Paula Viveiros. - João Pessoa, 2021.

249 f. : il.

Orientação: Valdir Barbosa Bezerra.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Relatividade geral - Testes clássicos. 4. Buraco negro. I. Bezerra, Valdir Barbosa. II. Título.

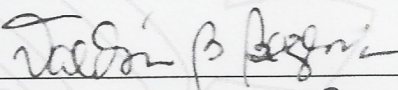
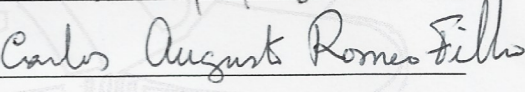
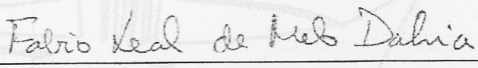
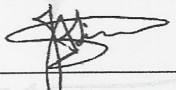
UFPB/BC

CDU 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Alexandre Magno de
Paula Viveiros**, candidato ao Título de Doutor
em Física na Área de Concentração Gravitação
e Cosmologia/Matéria Condensada.

Aos vinte e oito dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e um, às 15:00, reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Gravitação e Cosmologia/Matéria Condensada, **Alexandre Magno de Paula Viveiros**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Valdir Barbosa Bezerra* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Carlos Augusto Romero Filho* (UFPB), *Fábio Leal de Melo Dahia* (UFPB), *José Ademir Sales de Lima* (IAG-USP), *Raimundo da Silva Júnior* (UFRN). Dando início aos trabalhos, o Prof. Valdir Barbosa Bezerra comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado “*Alguns Resultados sobre Caracterizações de Atratores Estranhos Associados a Dez Sistemas Dinâmicos Arbitrários e sobre Efeitos Produzidos por Nuvem de Cordas em Um Sistema Gravitacional*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Jose Sérgio Trindade Silva, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **28 de julho de 2021**.

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
Orientador – PPGF/UFPB
Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
PPGF/UFPB
Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
PPGF/UFPB
Prof. Dr. José Ademir Sales de Lima
IAG-USP
Prof. Dr Raimundo da Silva Júnior
UFRN


Link da reunião

<https://meet.google.com/hdo-ahih-jrh>

Dedico este trabalho aos que buscam, com determinação e resiliência, pelo seu melhor momento. Em particular àqueles para os quais tal momento será como o quinto ano do bambu chinês: “Depois de plantada a semente do bambu chinês, não se vê nada por aproximadamente 5 anos – exceto um diminuto broto. Todo o crescimento é subterrâneo; uma complexa estrutura de raiz, que se estende vertical e horizontalmente pela terra, está sendo construída. Então, ao final do 5º ano, o bambu chinês cresce até atingir a altura de 25 metros.” (Paulo Coelho, O Bambu Chinês)

Agradecimentos

Diversas pessoas contribuíram para que eu chegasse até aqui. Agradeço imensamente à minha companheira, ao meu lado há mais de vinte anos, sempre disposta a travar junto a mim severas batalhas, compartilhando e realizando sonhos, e também ao apoio vindo de meus pais, irmãos e cunhado, notoriamente à minha irmã por imprescindíveis suportes em momentos cruciais.

Não existem palavras que me permitam externar minha gratidão ao Prof. Valdir Barbosa Bezerra, meu orientador. Ao assumir a orientação, após desistência do orientador anterior há menos de seis meses do fim do período regular com quatro anos de duração, livrou-me de uma queda da qual certamente não me levantaria.

A atitude de Valdir evitou que todos os meus caros projetos quanto a vida acadêmica fossem interrompidos, de maneira abrupta e irremediável, naquele momento. Hoje, diante da realística perspectiva de manter minha caminhada científica, o tenho como modelo de professor, cientista e pessoa, seus ensinamentos estarão sempre comigo.

A Pedro Henrique Moraes e Jefferson Toledo, assim como eu integrantes do grupo de pesquisas liderado pelo Prof. Valdir, devo auxílio de valor incalculável quanto a escrita de todas as partes da tese que se referem a Cosmologia e Gravitação.

À fração da comunidade formada pela grande maioria dos professores, estudantes e funcionários técnicos-administrativos com os quais tive relação devo a revelação sobre quão gratificante pode ser a vida junto a integrantes de uma unidade acadêmica como o Departamento de Física da UFPB (DF-UFPB).

Graças à bolsa de doutorado concedida a mim, através do DF-UFPB, pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pude permanecer em João Pessoa e me dedicar exclusivamente aos estudos e pesquisas durante quatro anos que tiveram importância capital.

Fazem parte de minha trajetória acadêmica duas iniciações científicas e um mestrado. Pude contar com bolsas concedidas pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) em cada uma das três atividades. Bolsas que consistiram em imperiosa assistência à minha atividade científica.

Estude muito o que mais lhe interessa da maneira mais indisciplinada, irreverente e original possível. (Richard Feynman)

Resumo

Simulações numéricas revelam distribuições estatísticas dadas por leis de potência provenientes de movimentos de grandes quantidades de pontos de fase capturados por atratores estranhos imersos em espaços de fase unidimensionais ou bidimensionais, atratores vinculados a dez sistemas dinâmicos específicos. Diferentemente das caracterizações dadas pelas dimensões generalizadas e pelo espectro de singularidades as mencionadas distribuições não têm sua origem em observações de sucessivas órbitas, como consequência são reveladas propriedades que de outra forma permaneceriam ocultas. Especificamente, os tempos de ocupações e os números de ocupações associados a pequenos hipercubos que cobrem os atratores obedecem a distribuições estatísticas bem definidas dadas por leis de potência. Uma aplicação diz respeito à determinação dos intervalos nos quais os valores mais prováveis desses números e tempos estão localizados (intervalos efetivos). O uso do intervalo efetivo com números de ocupação para quantificar as multifractalidades (medidas de multifractalidade) é outra aplicação. As abordagens estatísticas subjacentes aos resultados consistem em novos paradigmas que se unem aos paradigmas clássicos conhecidos para expandir o conhecimento sobre atratores estranhos. A possibilidade de que outros atratores imersos em espaços com as mesmas dimensões dos aqui considerados apresentem distribuições análogas não é descartada devido à arbitrariedade do conjunto tomado.

Investigamos no capítulo 5, um sistema gravitacional representado por um buraco negro estático (solução de Schwarzschild) envolto por uma nuvem de cordas (solução de Letelier). Mostramos qual é a influência da nuvem de cordas sobre as trajetórias das partículas, e analisamos dois fenômenos, a saber, a precessão do perélio e a deflexão da luz, mostrando o quanto a nuvem de cordas afeta esses fenômenos, do ponto de vista quantitativo, quando comparados com o cenário em que a nuvem de cordas está ausente.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos; Atratores Estranhos; Multifractalidade; Simulações Numéricas; Buraco Negro; Cordas Cósmicas; Testes Clássicos da Relatividade Geral

Abstract

Numerical simulations reveal statistical distributions given by power laws resulting from movements of large quantities of phase points captured by strange attractors immersed in one-dimensional or two-dimensional phase spaces, attractors linked to ten specific dynamic systems. Unlike the characterization given by classical approaches as generalized dimensions and spectrum of singularities, the aforementioned distributions do not have their origin in observations of successive orbits, as consequence properties that would otherwise remain hidden are revealed. Specifically, occupancy times and occupancy numbers associated with small hypercubes that cover attractors obey well- defined statistical distributions given by power laws. One application concerns the determination of the intervals in which the most likely values of those numbers and times are located (effective intervals). The use of the effective interval with occupancy numbers to quantify the multifractalities (multifractality measures) is another application. The statistical approaches underlying the results consist of new paradigms that join the well-known classic paradigms to expand knowledge about strange attractors. The possibility that other attractors immersed in spaces with the same dimensions as those considered here exhibit analogous distributions is not ruled out due to the arbitrariness of the set taken.

We investigate in Chapter 5, a gravitational system represented by a black hole (Schwarzschild's solution) surrounded by a cloud of strings(Letelier's solution). We show the role played by the cloud of strings on the orbits of the particles, as well as on two different phenomena, namely, the perihelion precession and the bending of light, showing how different are the results, from the qualitative point of view, when compared to the scenario in which the cloud of strings is absent.

Keywords: Dynamic Systems; Strange Attractors; Multifractality; Numerical Simulations; Black Hole; Cosmic Strings; Classic General Relativity Tests.

Lista de ilustrações

Figura 1 – As curvas $D_q \times q$ e $f(\alpha) \times \alpha$	47
Figura 2 – $P_\sigma(\gamma) \times \gamma$ para os distintos valores de $(\Delta_{tot})_{dec}$ de acordo com o quadro 3.	66
Figura 3 – $\log_{10}(\Delta_\sigma(\gamma)/\Delta_{tot}) \times \gamma$ para os valores de $(\Delta_{tot})_{dec}$ empregados na figura 1.	68
Figura 4 – $\log_{10}(M_\sigma(\gamma) \times \gamma$ para os valores de $(\Delta_{tot})_{dec}$ empregados na figura 1.	73
Figura 5 – Atrator associado ao Mapa de Duffing, a rede de hipercubos, e a caixa de condições iniciais com coordenadas (0,45,1,75). O atrator consiste em 8.368 pontos de fase depois de 15.000 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. As caixas externas I e II são idênticas entre si, seus contornos correspondem às bordas da rede de hipercubos	87
Figura 6 – Atrator associado ao Mapa de Henon, a rede de hipercubos, e a caixa de condições iniciais com coordenadas (-2,2). O atrator consiste em 9.900 pontos de fase depois de 15.000 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. A caixa externa I tem como contornos as bordas da rede de hipercubos. A caixa externa II coincide com a caixa que emoldura a figura.	89
Figura 7 – Atrator associado ao Mapa de Ikeda, a rede de hipercubos, e a caixa de condições iniciais, esta última com coordenadas (-6,9,4). O atrator consiste em 9.900 pontos de fase depois de 15.000 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. A caixa externa I tem como contornos as bordas da rede de hipercubos. A caixa externa II está destacada em azul.	91
Figura 8 – Atrator associado ao Mapa de Lozi, a rede de hipercubos, e a caixa de condições iniciais com coordenadas (-1,1,1,9). O atrator consiste em 9.900 pontos de fase depois de 11.400 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. A caixa externa I tem como contornos as bordas da rede de hipercubos. A caixa externa II está destacada em azul.	93
Figura 9 – Atrator associado ao Mapa Tinkerbell, a rede de hipercubos, e a caixa de condições iniciais com coordenadas (0,55,0,35). O atrator consiste em 5.901 pontos de fase depois de 15.000 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. A caixa externa I tem como contorno as bordas da rede de hipercubos. A caixa externa II está destacada em azul.	95

Figura 10 – Atrator associado ao Mapa Seno Seno, a rede de hipercubos , e a caixa de condições iniciais com coordenadas (1,45,1,95). O atrator consiste em 9.801 pontos de fase depois de 15.000 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. A caixa externa I tem contornos que coincidem com as bordas da rede de hipercubos. A caixa externa II está destacada em azul. . . .	97
Figura 11 – Atrator associado ao Mapa Ugly, a rede de hipercubos, a caixa externa, e a caixa de condições iniciais , esta última com coordenadas (0,70,1,05). O atrator consiste em 9.801 pontos de fase depois de 15.000 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. As caixas externas I e II são idênticas entre si, seus contornos coincidem com as bordas da rede de hipercubos	99
Figura 12 – Atrator associado ao Mapa de Sinai, a rede de hipercubos , e a caixa de condições iniciais com coordenadas (0,70,0,006). O atrator consiste em 9.900 pontos de fase depois de 15.000 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. As caixas externas I e II são idênticas entre si, seus contornos coincidem com as bordas da rede de hipercubos	101
Figura 13 – Dfm(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste: $(\Delta Q)_{dde} = 4,9$, a inclinação: $-\gamma_{noc} = -(1,71 \pm 0,01)$, valores extremos de Q : $Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 8,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9978$	106
Figura 14 – Dfm(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta \tau_o)_{dde} = 4,0$, inclinação: $-\gamma_{toc} = -(1,92 \pm 0,01)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9988$	107
Figura 15 – Dfm(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta \tau_d)_{dde} = 2,0$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(2,59 \pm 0,03)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 1,0 \times 10^2$, o quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9980$	108
Figura 16 – Hen(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 5,0$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(1,75 \pm 0,01)$, valores extremos de Q : $Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 1,0 \times 10^5$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9982$	109

Figura 17 – Hen(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 4,0$, inclinação: $-\gamma_{toc} = -(1,95 \pm 0,01)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9992$ 110

Figura 18 – Hen(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_d)_{dde} = 2,90$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(2,78 \pm 0,02)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 8,0 \times 10^2$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9984$ 111

Figura 19 – Ike(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 4,95$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(1,799 \pm 0,006)$, valores extremos de Q : $Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 9,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9994$ 112

Figura 20 – Ike(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 3,70$, inclinação: $-\gamma_{toc} = -(2,026 \pm 0,009)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 5,0 \times 10^3$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9994$ 113

Figura 21 – Ike(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_v)_{dde} = 2,30$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(2,50 \pm 0,04)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 2,0 \times 10^2$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9958$ 114

Figura 22 – Loz(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 4,95$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(1,829 \pm 0,009)$, valores extremos de Q : $Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 9,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9990$ 115

Figura 23 – Loz(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 4,00$, a inclinação é $-\gamma_{toc} = -(2,049 \pm 0,009)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9994$ 116

Figura 24 – Loz(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_v)_{dde} = 3,78$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(2,53 \pm 0,02)$, valores extremos de $\tau_d: \tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 6,0 \times 10^3$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9974$ 117

Figura 25 – Tin(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 4,85$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(1,840 \pm 0,006)$, valores extremos de $Q: Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 7,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9996$ 118

Figura 26 – Tin(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 4,00$, a inclinação é $-\gamma_{toc} = -(2,06 \pm 0,01)$, valores extremos de $\tau_o: \tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9992$ 119

Figura 27 – Tin(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_v)_{dde} = 3,6$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(2,36 \pm 0,01)$, valores extremos de $\tau_d: \tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 4,0 \times 10^3$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9996$ 120

Figura 28 – Sin(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 5,00$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(2,02 \pm 0,01)$, valores extremos de $Q: Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 1,0 \times 10^5$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9984$ 121

Figura 29 – Sin(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 4,00$, a inclinação é $-\gamma_{toc} = -(2,280 \pm 0,009)$, valores extremos de $\tau_o: \tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9994$ 122

Figura 30 – Sin(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_v)_{dde} = 3,78$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(2,73 \pm 0,03)$, valores extremos de $\tau_d: \tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 6,0 \times 10^3$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9968$ 123

- Figura 31 – Ugy(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 5,00$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(2,03 \pm 0,01)$, valores extremos de $Q:Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 1,0 \times 10^5$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9986$ 124
- Figura 32 – Ugy(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta \tau_o)_{dde} = 4,00$, a inclinação é $-\gamma_{toc} = -(2,28 \pm 0,02)$, valores extremos de $\tau_o:\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9968$ 125
- Figura 33 – Ugy(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta \tau_d)_{dde} = 4,00$, a inclinação é $-\gamma_{tdc} = -(2,60 \pm 0,02)$, valores extremos de $\tau_d:\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9972$ 126
- Figura 34 – Cir(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 5,00$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(2,19 \pm 0,02)$, valores extremos de $Q:Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 1,0 \times 10^5$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9976$ 127
- Figura 35 – Cir(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta \tau_o)_{dde} = 4,00$, a inclinação é $-\gamma_{toc} = -(2,49 \pm 0,03)$, valores extremos de $\tau_o:\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9954$ 128
- Figura 36 – Cir(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. (Ajuste 1) Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste: $(\Delta \tau_v)_{dde} = 1,30$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(1,86 \pm 0,05)$, valores extremos de $\tau_d:\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 2,0 \times 10^1$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9942$ (Ajuste 2) Extensão em década do intervalo em que ocorre o ajuste: $(\Delta \tau_d)_{dde} = 1,00$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(6,1 \pm 0,2)$, valores extremos de $\tau_d:\tau_{d,ii} = 2,0 \times 10^1$ e $\tau_{d,fs} = 2,0 \times 10^2$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9948$ 129
- Figura 37 – Sni(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 5,30$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(2,21 \pm 0,01)$, valores extremos de $Q:Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 2,0 \times 10^5$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9986$ 130

- Figura 38 – Sni(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 4,30$, a inclinação é $-\gamma_{toc} = -(2,51 \pm 0,01)$, valores extremos de $\tau_o:\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 2,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9990$ 131
- Figura 39 – Sni(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. (Ajuste 1) Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste: $(\Delta\tau_d)_{dde} = 1,30$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(2,39 \pm 0,06)$, valores extremos de $\tau_d:\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 2,0 \times 10^1$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9948$ (Ajuste 2) Extensão em década do intervalo em que ocorre o ajuste: $(\Delta\tau_d)_{dde} = 1,00$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(6,4 \pm 0,2)$, valores extremos de $\tau_d:\tau_{d,ii} = 2,0 \times 10^1$ e $\tau_{d,fs} = 2,0 \times 10^2$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9912$. 132
- Figura 40 – Log(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 4,40$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(2,45 \pm 0,02)$, valores extremos de $Q:Q_{ii} = 2,0$ e $Q_{fs} = 5,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9974$ 133
- Figura 41 – Log(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 3,54$, a inclinação é $-\gamma_{toc} = -(2,76 \pm 0,03)$, valores extremos de $\tau_o:\tau_{o,ii} = 2,0$ e $\tau_{o,fs} = 7,0 \times 10^3$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9951$ 134
- Figura 42 – Log(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. 135
- Figura 43 – Atrator associado ao Pêndulo Forçado Amortecido, a matriz de estações, e a caixa de condições iniciais, esta última com coordenadas (6,5,-4,9). O atrator consiste em 10.000 pontos de fase, em $w = 25$. A caixa encerra os 10.000 pontos no instante inicial, $w = 0$ 169
- Figura 44 – Ddp(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dec} = 1,95$, inclinação: $-\gamma_{ocn} = -(0,68 \pm 0,01)$, valores extremos de $Q:Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 9,0 \times 10^1$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9963$ 170
- Figura 45 – Ddp(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dec} = 1,95$, inclinação: $-\gamma_{oct} = -(0,67 \pm 0,01)$, valores extremos de $\tau_o:\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 9,0 \times 10^1$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9955$ 171

Figura 46 – Ddp(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_d)_{dec} = 1,90$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(0,60 \pm 0,01)$, valores extremos de $\tau_d: \tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 8,0 \times 10^1$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9963$	172
Figura 47 – Atrator associado à Equação de Duffing, a matriz de estações, e a caixa de condições iniciais, esta última com coordenadas $(1,8, -0,90)$. O atrator consiste em 10.000 pontos de fase, em $w = 126$. A caixa encerra os 10.000 pontos no instante inicial, $w = 0$	174
Figura 48 – Duf(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste: $(\Delta Q)_{dec} = 1,70$, inclinação: $-\gamma_{ocn} = -(1,067 \pm 0,009)$, os valores extremos de $Q: Q_{ii} = 4,0$ e $Q_{fs} = 2,0 \times 10^2$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9990$	175
Figura 49 – Duf(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dec} = 1,70$, inclinação: $-\gamma_{oct} = -(1,10 \pm 0,01)$, valores extremos de $\tau_o: \tau_{o,ii} = 4,0$ e $\tau_{o,fs} = 2,0 \times 10^2$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9976$	176
Figura 50 – Duf(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_d)_{dec} = 1,70$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(1,14 \pm 0,02)$, valores extremos de $\tau_d: \tau_{d,ii} = 4,0$ e $\tau_{d,fs} = 2,0 \times 10^2$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9974$	177
Figura 51 – Ten(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números desocupações em escala bilogarítmica.	180
Figura 52 – Ten(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica.	181
Figura 53 – Ten(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica.	182
Figura 54 – Tmd(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica.	184
Figura 55 – Tmd(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica.	185
Figura 56 – Tmd(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica.	186

Lista de quadros

Quadro 1	– Oito classes especificadas pelos seus centros.	57
Quadro 2	– Valores dos extremos dos intervalos nos quais os ajustes são feitos, das larguras em décadas dos mesmos, do indicador de qualidade do ajuste linear e valores absolutos dos expoentes relativos a cada uma das distribuições dadas por leis de potência.	60
Quadro 3	– Relações entre os valores dos centros das classes correspondentes aos extremos dos intervalos Δ_{tot} e os comprimentos em décadas, $(\Delta_{tot})_{dec}$, dos mesmos.	67
Quadro 4	– Valores de $f_{\sigma}(\gamma)\%$, em ordem decrescente, associados às distribuições dos tempos de ocupações vinculadas aos dez atratores abordados ($\gamma = \gamma_{toc}$, $\sigma = \sigma_t$).	68
Quadro 5	– Valores de $f_{\sigma}(\gamma)\%$, em ordem decrescente, associados às distribuições dos números de ocupações vinculadas aos dez atratores abordados ($\gamma = \gamma_{noc}$, $\sigma = \sigma_n$).	69
Quadro 6	– Valores de $M_{\sigma}(\gamma)$, em ordem decrescente, associados às distribuições dos tempos de ocupações vinculadas aos dez atratores abordados no artigo ($\gamma = \gamma_{toc}$, $\sigma = \sigma_t$).	72
Quadro 7	– Valores de $M_{\sigma}(\gamma)$, em ordem decrescente, ligados às distribuições dos números de ocupações vinculadas aos dez atratores abordados no artigo ($\gamma = \gamma_{noc}$, $\sigma = \sigma_n$).	72
Quadro 8	– Matriz para exemplificar o percorrimto das caixas externas II em espaços bidimensionais.	83
Quadro 9	– Valores de constantes, a e b , empregadas no sistema dinâmico, dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.	86
Quadro 10	– Valores de constantes, a e b , empregadas no sistema dinâmico, dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.	88
Quadro 11	– Valores de constantes, a , β , γ , e μ , empregadas no sistema dinâmico, dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.	90
Quadro 12	– Valores dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.	92
Quadro 13	– Valores das constantes, a , b , c e d , empregadas no sistema dinâmico, dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.	94
Quadro 14	– Valores dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.	96
Quadro 15	– Valores da constante, r , empregada no sistema dinâmico, dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.	98

Quadro 16 – Valores da constante, Δ , empregada no sistema dinâmico, dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.	100
Quadro 17 – Valores de constantes e parâmetros.	170
Quadro 18 – Valores de constantes e parâmetros.	175
Quadro 19 – Valores de constantes e parâmetros.	180
Quadro 20 – Valores de constantes e parâmetros.	183

Sumário

1	INTRODUÇÃO.	29
1.1	Uma Tese e Dois Conteúdos Distintos entre Si.	29
1.2	Atratores Estranhos: Abordagem Clássica e Nova Abordagem.	29
1.2.1	Atratores Estranhos sob Nova Abordagem.	29
1.2.2	Atratores Estranhos sob Abordagem Clássica.	30
1.2.2.1	A Dimensão de Contagem de Caixas.	31
1.2.2.2	O Espectro de Dimensões Generalizadas.	32
1.2.2.3	A Dimensão Ponto a Ponto.	38
1.2.2.4	O Espectro de Singularidades.	38
1.2.2.5	Dimensões Generalizadas, Espectro de Singularidades e Multifractalidade.	41
1.3	Efeito da Nuvem de Cordas sobre Resultados de Testes Clássicos da Relatividade Geral.	49
2	NOVAS ASSINATURAS DE DINÂMICAS CAÓTICAS.	51
2.1	Versão Estendida de Artigo Publicado.	51
2.2	Método: Simulações e Estatísticas.	55
2.3	Os Sistemas Dinâmicos.	59
2.4	Análise e Aplicações dos Resultados.	62
2.4.1	Análise dos Resultados.	62
2.4.2	Valores mais Prováveis e Liberdade de Escala.	65
2.4.2.1	Fundamentos.	65
2.4.2.2	Intervalos Efetivos e Efetiva Liberdade de Escala.	66
2.4.3	Valores mais Prováveis e Medida de Multifractalidade.	70
2.4.3.1	Fundamentos.	70
2.4.3.2	Variabilidade Efetiva e Medidas de Multifractalidade.	71
2.5	Temas não Abordados no Artigo.	75
2.5.1	Atratores Monofractais: Tempos de Ocupações.	75
2.5.2	Escala de Multifractalidade.	76
2.5.3	Multifractalidade e Estruturas de Distribuições Espaciais.	77
2.5.4	Vazios e Tempos de Desocupações.	78
3	OBJETOS NOS ESPAÇOS DE FASE E FUNDAMENTOS SOBRE AS ESTATÍSTICAS.	81
3.1	Simulações Numéricas: Objetos nos Espaços de Fase.	82
3.1.1	Caixas de Condições Iniciais e Caixas Externas II.	82
3.1.2	Atributos dos objetos.	84

3.2	Mapa de Duffing (Dfm)	86
3.3	Mapa de Hénon (Hen)	88
3.4	Mapa de Ikeda (Ike)	90
3.5	Mapa de Lozi (Loz)	92
3.6	Mapa Tinkerbell (Tin)	94
3.7	Mapa Seno Seno (Sin)	96
3.8	Mapa Ugly (Ugy)	98
3.9	Mapa de Sinai (Sni)	100
3.10	Atratores Estranhos: Transientes e Pós-Transientes.	102
3.10.1	Evoluções Temporais.	102
3.10.2	Valores de t_{sat} e H .	102
4	ESTATÍSTICAS: CURVAS PROVENIENTES DAS SIMULAÇÕES.	105
4.1	Mapa de Duffing (Dfm)	106
4.2	Mapa de Hénon (Hen)	109
4.3	Mapa de Ikeda (Ike)	112
4.4	Mapa de Lozi (Loz)	115
4.5	Mapa Tinkerbell (Tin)	118
4.6	Mapa Seno Seno (Sin)	121
4.7	Mapa Ugly (Ugy)	124
4.8	Mapa Circular (Cir)	127
4.9	Mapa de Sinai (Sni)	130
4.10	Mapa Logístico (Log)	133
5	ESPAÇO-TEMPO DE LETELIER: PAPEL DA NUVEM DE CORDAS SOBRE ALGUNS FENÔMENOS CLÁSSICOS.	137
5.1	Introdução.	137
5.2	Nuvem de Cordas na Relatividade Geral.	137
5.3	Formalismo para Descrever uma Nuvem de Cordas.	138
5.4	Solução das Equações de Einstein para Nuvem de Cordas com Simetria Esférica.	144
5.5	Equações Geodésicas: Influência da Nuvem de Cordas.	146
5.5.1	Órbitas: Aspectos Gerais.	147
5.6	Precessão de Periélio e Desvio da Luz.	150
6	PERSPECTIVAS E CONCLUSÕES.	153
6.1	Perspectivas.	153
6.2	Conclusões.	154

	REFERÊNCIAS	157
7	DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DADA POR LEI DE POTÊNCIA.	163
8	LEIS DE POTÊNCIA, INVARIÂNCIA DE ESCALA E LIBERDADE DE ESCALA.	165
9	RESULTADOS PRELIMINARES SOBRE O PÊNDULO FORÇADO AMORTECIDO.	167
9.1	Perspectivas.	168
10	RESULTADOS PRELIMINARES SOBRE O OSCILADOR DE DUFFING.	173
10.1	Perspectivas.	173
11	SISTEMA DINÂMICO NÃO DISSIPATIVO: O MAPA DA TENDA.	179
12	SISTEMA DINÂMICO NÃO DISSIPATIVO: O MAPA 2XMOD1.	183
13	CÓDIGO FONTE EM FORTRAN 90 PARA O MAPA DE HÉNON.	187

1 Introdução.

1.1 Uma Tese e Dois Conteúdos Distintos entre Si.

Esta tese, constituída por seis capítulos, trata de dois temas não relacionados um ao outro: (i) um deles consiste em novas caracterizações de atratores estranhos provenientes de dez sistemas dinâmicos caóticos e dissipativos (mapas), sem relação entre si a não aplicados à Gravitação . As caracterizações consistem em novas abordagens de atratores estranhos que revelam propriedades ausentes na literatura (ii) o outro lida exclusivamente com um sistema gravitacional bem conhecido, o buraco negro, empregado em testes clássicos da Teoria da Relatividade Geral e consiste em verificar quais são os efeitos que o acréscimo de nuvens de cordas a tal sistema tem sobre os resultados dos testes. Os capítulos 2, 3 e 4 são dedicados aos sistemas caóticos e dissipativos. O sistema gravitacional é considerado no capítulos 5. Os trabalhos envolvidos têm caráter claramente teórico. O primeiro tema é dominante e fortemente baseado em simulações computacionais, a ele se referiu a maior parte do esforço voltado a estudos, pesquisas, criações e execuções de códigos fonte e escritas de textos, entre os últimos um artigo publicado em periódico científico internacional. À pequena parte restante do esforço correspondeu o trabalho sobre o segundo tema.

1.2 Atratores Estranhos: Abordagem Clássica e Nova Abordagem.

Esta seção é dedicada à exposições sobre as abordagens clássica, já bem conhecida, e a nova que consiste no cerne da tese. Quanto a primeira pormenores serão considerados para estabelecimento do contexto em que se inserem atratores estranhos e suas caracterizações. Contexto necessário para situar a nova caracterização e a diferença entre ela e clássica de modo a trazer motivação para o ataque à primeira feito com pormenores em outros capítulos conforme menção na seção anterior.

1.2.1 Atratores Estranhos sob Nova Abordagem.

Expoentes de leis de potência representando dimensões que caracterizam multifractalidades de atratores estranhos, obtidas com emprego de malha formada por pequenos hipercubos que o cobrem, são conhecidas a três décadas: - D_0 a dimensão de contagem de caixas [1] - D_q as dimensões generalizadas [2, 3] - $f(\alpha)$ o espectro de singularidades, onde α é o índice de singularidadeis [4, 5, 6]. Dimensões Generalizadas e Espectro de Singularidades vêm sendo aplicados a vários escopos distintos entre si: Física (DLA) [7, 8, 9, 10, 11],

Cosmologia [12, 13, 14, 15, 16, 17], Neurociência [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24], Geociências [25, 26, 27, 28, 29].

O trabalho pertinente apresentado nesta tese propõe novo ponto de vista a respeito de atratores estranhos que revela aspectos estatísticos, gerados por simulações numéricas, além do escopo das caracterizações clássicas mencionadas no primeiro parágrafo, de modo a contribuir para melhores descrições destes objetos pelo acréscimo de novos atributos dos mesmos aos já bem conhecidos. A originalidade decorre da específica abordagem estatística adotada, derivada de outra criada por Dickman [30, 31] com um propósito diferente: empregar a advecção caótica de um grande número de pontos de fase ligados a um determinado sistema dinâmico bidimensional para simular a advecção de umidade atmosférica. Aquele autor obteve distribuições dadas por leis de potência análogas a outras sobre a chuva em um local específico: durações e intensidades de chuvas e durações de secas (durações de intervalos entre chuvas) [32, 33]. A consideração da advecção caótica dos pontos de fase capturados por atratores estranhos associados a dez sistemas dinâmicos caóticos e dissipativos específicos, segundo a mencionada abordagem, consiste no cerne deste trabalho. Os resultados de tal tratamento estatístico revelam distribuições de probabilidades dos tempos de ocupações e dos números de ocupações dos mencionados hipercubos dadas por leis de potência quanto aos dez atratores envolvidos. Com emprego das duas distribuições são calculados os intervalos mais prováveis de números e de tempos de ocupações, ambos são muito pequenos quando comparados aos intervalos com todos os valores possíveis. Além disso, com emprego da distribuição de números de ocupações, são calculadas quantidades que quantificam as multifractalidades dos atratores envolvidos. Quantificação que permite determinar quão severa é a multifractalidade exibida por cada um deles. A relevância do trabalho é indicada pela publicação de seus principais resultados em artigo aceito por renomado periódico científico internacional. O capítulo 2 encerra versão estendida deste artigo. Os outros dois, capítulos 3 e 4, são dedicados a conteúdos não publicados, dada a típica limitação de espaço em periódicos, que tanto suportam os resultados no primeiro quanto descem a pormenores sobre as simulações numéricas subjacentes. Em que pese sua consistência inédita, a plena compreensão de seu teor supõe a consideração do escopo clássico ao qual está relacionada de forma relevante. Por isso o restante desta seção é dedicado à discussão pormenorizada sobre tal escopo que, por sua vez, traz também informações importantes sobre os próprios atratores estranhos.

1.2.2 Atratores Estranhos sob Abordagem Clássica.

Esta seção é dedicada à apresentação de quantidades empregadas para expressões de propriedades geométricas e estatísticas de conjuntos de pontos. Propriedades bem conhecidas e amplamente empregadas à descrição de atratores estranhos.

1.2.2.1 A Dimensão de Contagem de Caixas.

A “dimensão de contagem de caixas”, D_0 , associada a dado conjunto de pontos, também chamada de “capacidade” do conjunto, permite a atribuição de dimensões representadas por números inteiros a certos conjuntos, ou representadas por números não inteiros a outros. A usual dimensão euclidiana, a designarei por D_E , assume conhecidos valores inteiros quando associada a todos os pontos: - de um segmento de reta, $D_E = 1$ - de um quadrado, $D_E = 2$ - de um cubo, $D_E = 3$. A dimensão D_0 envolve D_E como um caso particular restrito a objetos clássicos da geometria euclidiana como os três mencionados. Quanto a conjuntos como atratores estranhos, aos quais D_E não se aplica, a dimensão D_0 associada assume valores não inteiros. Com relação a dado conjunto situado em espaço cartesiano N-dimensional, são necessários $\mathcal{N}_\varepsilon$ pequenos hipercubos N-dimensionais, com dimensão ε , para cobri-lo. O elevado valor de $\mathcal{N}_\varepsilon$, decorrente dos pequenos tamanhos dos hipercubos, exprime a quantidade de informação necessária para localizar todos os pontos do conjunto envolvido segundo a precisão ε . A dimensão de contagem de caixas correspondente consiste no seguinte limite:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \quad (1.1)$$

Tendo em mente certo espaço bi-dimensional valem as afirmações seguintes sobre a dimensão de contagem de caixas, inteira, em cada caso: - o valor de D_0 associado a conjunto com dois pontos distintos entre si é 0, pois $\mathcal{N}_\varepsilon = 2$, portanto é independente de ε , de modo que o limite em 1.1 resulta em 0 - o valor de D_0 associado ao conjunto que consiste em um segmento de reta com comprimento l é 1, pois $\mathcal{N}_\varepsilon = l/\varepsilon$ de modo que o mencionado limite resulta em 1 - o valor de D_0 associado ao conjunto formado pelos pontos pertinentes ao interior de alguma linha fechada com área A é 2, pois $\mathcal{N}_\varepsilon = A/\varepsilon^2$ de modo que o limite resulta em 2. Valor de D_0 não inteiro está associado a certo conjunto, imerso em espaço unidimensional, o “Conjunto Terço Central de Cantor”(middle third cantor set), trata-se de um entre muitos conjuntos de cantor existentes. A sua definição é a seguinte: toma-se um intervalo fechado $[0, 1]$, remove-se dele o intervalo aberto central, com um terço do comprimento total, portanto com comprimento $1/3$. Restarão dois intervalos com comprimento $1/3$, remove-se de cada um deles o intervalo aberto central, com um terço do comprimento original, portanto com comprimento $1/9$. Restarão quatro intervalos com comprimento $1/9$, remove-se de cada um deles o intervalo aberto central, com um terço do comprimento original, portanto com comprimento $1/27$. Restarão oito intervalos com comprimento $1/27$ O mencionado Conjunto de Cantor é o resultante da aplicação deste procedimento infinitas vezes. O cálculo da dimensão de contagem de caixas associada é realizado com emprego da expressão :

$$D_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon_n})}{\ln(\frac{1}{\varepsilon_n})} \quad (1.2)$$

onde n representa a geração dos segmentos envolvidos: - $n = 1$ corresponde à primeira geração, dois segmentos com comprimento $1/3$ - $n = 2$ corresponde à segunda geração, quatro segmentos com comprimento $1/9$ Desta forma fica clara a conveniência da escolha $\varepsilon_n = (1/3)^n$, à qual corresponde $\mathcal{N}_{\varepsilon_n} = 2^n$. Tais valores levados a 1.2 resultam em:

$$D_0 = \frac{\ln 2}{\ln 3} \simeq 0.63 \quad (1.3)$$

O Conjunto Terço Central de Cantor, com dimensão representada por número entre zero e um, consiste em um particular conjunto fractal. A relação entre $\mathcal{N}_\varepsilon$ e ε , utilizada implicitamente nos quatro exemplos anteriores e amplamente empregada com relação a vários outros conjuntos, é a seguinte:

$$\mathcal{N}_\varepsilon \sim \varepsilon^{-D_0} \quad (1.4)$$

Pode-se então interpretar D_0 como uma medida do quão rapidamente a informação cresce com o crescimento da precisão requerida.

O Conjunto Terço Central de Cantor é “alto-similar”: a ampliação adequada de pequenas partes dele resultam em reproduções do mesmo tomado como um todo. A ampliação de qualquer um dos segmentos da terceira geração, via multiplicação por fator 27, leva a outro segmento com comprimento 1 como aquele considerado ao início do processo. Quanto a fractais provenientes de sistemas dinâmicos alto-similaridade raramente ocorre. Nestas situações a natureza fractal ainda pode ser revelada, sob sucessivas ampliações, pela existência de estruturas em escalas arbitrariamente pequenas. Caso sucessivas ampliações em torno de certo ponto do atrator sejam feitas, não ocorrerá situação, a partir de quantidade de suficientemente grande de ampliações, em que serão observados, por exemplo, somente um ponto, uma linha, ou uma superfície plana quanto a conjuntos de pontos imersos em espaços com dimensão um ou dois.

1.2.2.2 O Espectro de Dimensões Generalizadas.

A definição do “Espectro de Dimensões Generalizadas” associado a dado conjunto de pontos, D_q , para $-\infty < q < +\infty$, exige a definição da “medida de probabilidade”, μ , associada ao mesmo conjunto. Tal medida é necessariamente vinculada a certa região limitada R e encerra as seguintes características: (i) atribui números não negativos, menores que 1, a qualquer subconjunto, S_R , contido em R , $0 < \mu(S_R) < 1$ (ii) associa o número 1 a R , $\mu(R) = 1$ (iii) é contavelmente aditiva. Ser contavelmente aditiva significa que, caso se considere qualquer grupo de subconjuntos, S_i , disjuntos entre si, então a medida associada à união entre eles é igual à soma entre as medidas associadas a cada um individualmente:

$$\mu\left(\bigcup_i S_i\right) = \sum_i \mu(S_i) \quad (1.5)$$

Propriedade importante de algumas medidas consiste em sua invariância. Dado certo conjunto S pode-se designar o conjunto de pontos mapeados no mesmo depois de uma

iteração segundo o mapa correspondente, M , por $M^{-1}(S)$. Certa medida μ é invariante se:

$$\mu(S) = \mu(M^{-1}(S)) \quad (1.6)$$

O conjunto $M^{-1}(S)$ não consiste naquele correspondente à aplicação da inversa de M a S , daí a validade de 1.6 tanto para mapas inversíveis quanto para mapas não inversíveis. A rede de hipercubos N -dimensionais, com dimensão ε , empregada para determinar D_0 , pode ser empregada para associar a cada um dos hipercubos uma medida de probabilidade. Ao i -ésimo cubo, C_i , está vinculada a i -ésima medida individual μ_i . Cada uma das últimas representa a fração do tempo total de observação, o último representado por T , durante a qual um único ponto de fase permaneceu no interior de C_i , sob o limite em que o comprimento da órbita, iniciada com particular condição inicial é infinito, $T \rightarrow \infty$. Tal fração consiste na razão entre o “tempo de ocupação” associado ao i -ésimo cubo e o período de observação. Se o mencionado tempo de ocupação, vinculado a C_i e à condição inicial $\vec{x}_0$, é representado por $\eta(C_i, \vec{x}_0, T)$ então μ_i pode ser definida como:

$$\mu_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\eta(C_i, \vec{x}_0, T)}{T}, \quad 0 < \mu_i < 1 \quad (1.7)$$

Se dada μ_i é independente da condição inicial envolvida, com cada uma das últimas pertinente à bacia de atração correspondente, exceto talvez por algum conjunto com medida de Lebesgue zero contido na mesma bacia, então μ_i consiste em “medida natural” do cubo C_i . Nesta situação diz-se que 1.7 gera o valor μ_i quanto a “quase todo ponto na bacia relativamente à medida de Lebesgue”, tais pontos são os “típicos”. Conforme a seção anterior, equação 1.4, a dimensão de contagem de caixas esclarece a lei de escala que relaciona a quantidade de hipercubos necessária para cobrir o atrator com a dimensão comum aos mesmos, sem entretanto incorporar qualquer informação sobre a variabilidade dos tempos de ocupações associados aos diversos hipercubos envolvidos. Conforme o atrator envolvido, pode ser bastante ampla a diferença entre os tempos de ocupações observados quando se consideram os hipercubos um a um. Verifica-se, para valores de ε muito pequenos, que são frequentes os atratores quanto aos quais somente uma pequena fração dos hipercubos necessários para cobri-lo encerra a vasta maioria da medida natural associada ao mesmo. A mencionada dimensão generalizada D_q incorpora em si a variabilidade das medidas μ_i e consiste em generalização da dimensão de contagem de caixas:

$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{I}(q, \varepsilon))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \quad (1.8)$$

onde

$$\mathcal{I}(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^q \quad (1.9)$$

a soma se dá sobre todos os $\mathcal{N}_\varepsilon$ hipercubos necessários para cobrir o atrator. Quando $q = 0$, a expressão 1.9 torna-se $\mathcal{I}(0, \varepsilon) = \mathcal{N}_\varepsilon$ de modo que 1.8 torna-se exatamente a expressão

para a dimensão de contagem de caixas.

Definindo-se D_1 como:

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} D_q$$

pode-se levantar a indeterminação proveniente do termo $\frac{1}{1-q}$ pela aplicação da regra de L'hospital, daí:

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i \ln(\mu_i)}{\ln(\varepsilon)} \quad (1.10)$$

A dimensão D_1 é designada por “dimensão de informação”. O nome deriva de sua relação com a “quantidade de informação”, expressa a menos do sinal pelo numerador em 1.10, associada ao conjunto de pontos pertinente. Tal quantidade não será mais abordada neste trabalho. Aspecto relevante quanto a D_1 diz respeito à seguinte situação: é sempre possível escolher certo grupo de subconjuntos contidos no atrator tais que a cada um dos últimos está associada a medida θ , $0 < \theta < 1$. Cada valor possível de θ especifica um grupo, entre os subconjuntos que o compõem existe um com o menor volume, inferior a todos os outros do grupo, o menor subconjunto do grupo. O volume de um subconjunto arbitrário é medido pela quantidade de hipercubos necessários para cobrí-lo conforme a relação $\mathcal{N}_\varepsilon \sim \varepsilon^{-D_0}$ proveniente das equações 1.2 e 1.4. Em particular, quanto ao menor dos subconjuntos com medida θ , vale:

$$\mathcal{N}_{\varepsilon, \theta} \sim \varepsilon^{-D_0(\theta)} \quad (1.11)$$

Onde: $\mathcal{N}_{\varepsilon, \theta}$ e $D_0(\theta)$ são respectivamente o número de hipercubos necessário para cobrir o subconjunto envolvido e a dimensão de contagem de caixas do mesmo. Pode-se demonstrar que:

$$D_0(\theta) = D_1, \quad 0 < \theta < 1 \quad (1.12)$$

De forma que o menor subconjunto com medida $\theta = \theta_1$ tem exatamente o mesmo volume do menor subconjunto com medida $\theta = \theta_2$, para $\theta_1 \neq \theta_2$: os menores subconjuntos tem em comum o volume medido com base nos hipercubos. Para prosseguir com as considerações sobre D_1 é necessário antes esclarecer a existência de propriedade fundamental da dimensão generalizada D_q . Verifica-se com base nas equações 1.8 e 1.9 que o valor de D_q somente diminui com o aumento de q ao longo do intervalo $(-\infty, +\infty)$. Além disso, à medida em que q se aproxima de zero, cada uma das somas se aproxima de $\mathcal{N}_\varepsilon$, conforme menção logo após a equação 1.9. Portanto:

$$D_q \geq D_{q'} \text{ para } q < q' \quad (1.13)$$

onde a igualdade ocorre somente quando $q = q' = 0$ (sob a hipótese aqui considerada de que os μ_i não são todos iguais entre si). A esta altura pode-se retomar a discussão interrompida. Conforme 1.13 ocorre $D_0 > D_1$, desta forma a quantidade, $\mathcal{N}_{\varepsilon, \theta}$, de hipercubos necessária

para cobrir qualquer um dos menores subconjuntos, e a quantidade, $\mathcal{N}_{\varepsilon,1}$, necessária para cobrir todo o atrator são dadas por:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\varepsilon,\theta} &\sim \varepsilon^{-D_1} \\ \mathcal{N}_{\varepsilon,1} &\sim \varepsilon^{-D_0}\end{aligned}\tag{1.14}$$

verifica-se que a diferença entre D_0 e D_1 leva a $\mathcal{N}_{\varepsilon,\theta} \ll \mathcal{N}_{\varepsilon,1}$. Portanto o volume comum a todos os menores subconjuntos é bem inferior ao volume de todo o atrator. Em particular, para valores elevados de θ , tais como $\theta = 0,95$ ou $\theta = 0,99$ entre muitíssimos outros, verifica-se que a esmagadora maioria da medida associada ao atrator corresponde a fração muito pequena do volume do mesmo. Conforme discussão em [34], tal propriedade parece ser típica de atratores estranhos sob o limite em que o tempo, ou o número de iterações, é infinito. A região em que se concentra praticamente toda a medida corresponde à “região nuclear” do atrator, expressão entre aspas empregada aqui como tradução de “core region”. Em qualquer átomo ocorre a concentração de sua massa em seu pequeno núcleo, à grande parte restante do volume do átomo corresponde fração desprezível da massa. Analogamente, quanto a atrator estranho arbitrário, a vasta maioria da medida associada ao mesmo está concentrada em sua região nuclear, à grande parte restante do volume do atrator está associada fração desprezível da medida.

Quanto a D_2 :

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{I}(2, \varepsilon))}{\ln(\varepsilon)}\tag{1.15}$$

onde

$$\mathcal{I}(2, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^2\tag{1.16}$$

A dimensão D_2 é designada por “dimensão de correlação”. O nome expressa a relação entre $\mathcal{I}(2, \varepsilon)$ e a “integral de correlação”, $C(\varepsilon)$:

$$C(\varepsilon) = \lim_{N_p \rightarrow \infty} \frac{1}{(N_p)^2} \sum_{i,j=1}^{N_p} U(\varepsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|), \quad i \neq j\tag{1.17}$$

onde $\vec{x}_i$ é o vetor associado ao i -ésimo ponto do atrator, N_p é o número de pontos do atrator e $U(x)$ é a função degrau de Heaviside:

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}\tag{1.18}$$

Pode-se demonstrar que $C(\varepsilon)$ relaciona-se com ε segundo a mesma relação de escala pela qual $\mathcal{I}(2, \varepsilon)$ relaciona-se ε : $\mathcal{I}(2, \varepsilon) \propto \varepsilon^{D_2}$ e $C(\varepsilon) \propto \varepsilon^{D_2}$. Portanto pode-se substituir

$\mathcal{I}(2, \varepsilon)$ por $C(\varepsilon)$ em 1.15. A dimensão D_2 pode então ser calculada a partir da integral de correlação :

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(C(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)} \quad (1.19)$$

A integral de correlação consiste em uma média, sobre a órbita, de certa medida, fato esclarecido pela reescrita da equação 1.17 da seguinte forma:

$$C(\varepsilon) = \lim_{N_p \rightarrow \infty} \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} \left[\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} U(\varepsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \right], \quad i \neq j \quad (1.20)$$

O termo entre colchetes, $\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} U(\varepsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$, representa a medida associada a uma bola N-dimensional de raio ε centrada em $\vec{x}_j$: o somatório em i resulta no número de pontos no interior da bola de raio ε centrada em $\vec{x}_j$, a divisão desta quantidade por N_p , sob o limite $N_p \rightarrow \infty$, resulta na probabilidade de visitação da mesma, ou, em outras palavras, na medida μ_j associada à bola. Representado a bola por $B_\varepsilon(\vec{x}_j)$, a medida correspondente pode então ser representada por $\mu(B_\varepsilon(\vec{x}_j))$. Desta forma a equação 1.20 torna-se:

$$C(\varepsilon) = \lim_{N_p \rightarrow \infty} \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} \mu(B_\varepsilon(\vec{x}_j)), \quad i \neq j \quad (1.21)$$

Desta forma 1.17 consiste em média orbital de $\mu(B(\vec{x}_j))$.

Outra justificativa para a substituição de $\mathcal{I}(2, \varepsilon)$ por $C(\varepsilon)$ em 1.15 de modo a levar à 1.19 envolve a equação :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_1^T f(M^n(x_0)) = \int f(x) d\mu(x) \quad (1.22)$$

Onde: $f(x)$ é uma função bem comportada, T é o já mencionado tempo durante o qual a órbita é observada, M^n representa a n -ésima aplicação do mapa $M(x)$ à condição inicial x_0 de modo a gerar o n -ésimo ponto da órbita e $d\mu$ é medida infinitesimal associada a volume infinitesimal do espaço N-dimensional envolvido. Para compreensão do significado da equação 1.22 é conveniente salientar a relação seguinte:

$$d\mu(x) = \varrho(x) dx \quad (1.23)$$

Onde: $\varrho(x)$ é densidade de probabilidade associada ao mesmo elemento infinitesimal a que se refere $d\mu$. Com base em 1.23 a equação 1.22 pode então ser reescrita como:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_0^T f(M^n(x_0)) = \frac{\int f(x) \varrho(x) dx}{\int \varrho(x) dx} \quad (1.24)$$

Onde: $\int \varrho(x) dx = 1$ conforme 1.23 e o item (ii) no primeiro parágrafo desta seção pelo qual o valor da medida associado a todo o atrator é $\mu = 1$. A equação 1.24 salienta que a

equação 1.22 exprime a igualdade entre uma média temporal e outra espacial da função f . A validade de 1.24 fica clara quando se considera a relação seguinte baseada em 1.7:

$$d\mu(x) = \frac{d\eta(x)}{T} = \frac{dt(x)}{T}, \quad d\eta \equiv dt \quad (1.25)$$

Onde: $dt = d\eta$ é o tempo de ocupação infinitesimal do elemento de volume infinitesimal envolvido. Com base em 1.25 e 1.24 pode-se reescrever 1.22:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_0^T f(M^n(x_0)) = \int f(x) \frac{dt(x)}{T} \quad (1.26)$$

A equação 1.26 esclarece que o membro direito consiste em uma média ponderada cujos pesos infinitesimais são $dt(x)/T$. Ainda que a integral se refira a todo o espaço, somente os pontos correspondentes a valores de x pertinentes à órbita terão contribuição não nula pois o valor de $dt(x)$ associado a cada um dos demais é nulo. Quanto ao membro esquerdo, ainda que não existam quaisquer pesos explicitamente representados eles estão presentes: as regiões em que há elevada concentração de pontos da órbita contribuem com maior quantidade de valores de $f(M^n(x_0))$ bem próximos entre si que as regiões em que a concentração é baixa. A quantidade de valores em cada caso consiste exatamente no peso correspondente.

Uma vez estabelecida a validade de 1.22 pode-se utiliza-la para reescrever a equação 1.21 como:

$$C(\varepsilon) = \int \mu(B_\varepsilon(x)) d\mu(x) \quad (1.27)$$

A equação 1.27 descreve uma soma entre parcelas infinitesimais, $\mu d\mu$, quadráticas em μ . Contribuições quadráticas finitas em μ_i estão presentes em 1.16. Cada μ_i associado ao hipercubo correspondente na segunda equação equivale a certo $\mu(B_\varepsilon(x))$ na primeira. Desta forma pode-se substituir μ_i por $\mu(B_\varepsilon(x))$ em 1.16 de modo a tornar clara a equivalência entre $\mathcal{I}(2, \varepsilon)$ e $C(\varepsilon)$:

$$\mathcal{I}(2, \varepsilon) \sim C(\varepsilon) \quad (1.28)$$

A dimensão D_2 é amplamente empregada em situações experimentais dada a facilidade de cálculo envolvida.

É possível calcular D_q , por meio da extensão da definição da integral de correlação:

$$C_q(\varepsilon) = \lim_{N_p \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left(\frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} U(\varepsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \right)^{(q-1)} \right]^{1/(q-1)} \quad (1.29)$$

Onde $i \neq j$. A dimensão generalizada seria então dada por:

$$D_q \sim \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(C_q(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)} \quad (1.30)$$

1.2.2.3 A Dimensão Ponto a Ponto.

Outro conceito de dimensão aplicável tanto a atratores quanto a outros conjuntos invariantes é a “dimensão ponto a ponto”, $D_p(\vec{x})$, definida com emprego da medida $\mu(B_\varepsilon(\vec{x}))$:

$$D_p(\vec{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mu(B_\varepsilon(\vec{x})))}{\ln(\varepsilon)} \quad (1.31)$$

Quando a medida μ é ergódica, $D_p(\vec{x})$ assume um único valor, $\overline{D}_p$, para qualquer valor $\vec{x}$, exceto para pontos cujas medidas μ sejam nulas, quando tais pontos existirem. As situações nas quais μ consiste em medida natural são particularmente relevantes. Quando existem, tais medidas são também ergódicas já que o processo pelo qual são geradas envolve o limite em que as órbitas são infinitas. Cada órbita infinita permite que o ponto de fase orbital a ela vinculado realize diversas excursões por todas as pequenas regiões do espaço de fase, discerníveis sob a precisão ε , disponíveis ao mesmo ponto. Os valores de $\vec{x}$ aos quais estão associados o valor comum $\overline{D}_p$, compõem a região nuclear da medida. De modo que para $0 < \theta < 1$ vale:

$$\overline{D}_p = D_0(\theta) = D_1 \quad (1.32)$$

para quase todo $\vec{x}$, exceto por algum subconjunto cujos elementos tenham, todos, medida nula, quando existir. Quanto a elementos, $\vec{x}'$, não pertencentes à região nuclear, ocorre $D_p(\vec{x}') \neq D_1$. Tal fato consiste em consequência da multifractalidade associada ao atrator sob foco. Sim, pois a multifractalidade manifesta-se, justamente, através da variabilidade dos tempos de ocupações que caracterizam as visitas dos pontos de fase a cada um dos hipercubos com dimensão ε . A alguns deles estão associados tempos bastante maiores que os outros.

1.2.2.4 O Espectro de Singularidades.

A finalidade desta seção é definir algumas propriedades fundamentais do “Espectro de Singularidades”, $f(\alpha)$, para $\alpha > 0$, ainda desconhecida, a partir de sua relação com a função D_q já apresentada. O “índice de singularidade”, α , é o argumento de f .

A cada hipercubo com dimensão ε do espaço de fase N-dimensional envolvido pode-se associar um índice de singularidade, α_i , que consiste no expoente da lei de potência entre μ_i e ε :

$$\mu_i \equiv \varepsilon^{\alpha_i} \quad (1.33)$$

Realiza-se então a contagem dos hipercubos cujos expoentes α_i situam-se em certo estreito intervalo, $\alpha \leq \alpha_i \leq \alpha + \Delta\alpha$, com $0 < \Delta\alpha \ll 1$. Existem vários subconjuntos constituídos por hipercubos adjacentes entre si correspondentes a cada α_i . Portanto a cada α_i está vinculado um particular grupo de subconjuntos, cada um dos últimos com volume finito.

Sob o limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$, torna-se infinitesimal a extensão do intervalo a que pertence cada α_i , $\Delta\alpha$ torna-se $d\alpha$ de modo que $\alpha \leq \alpha_i \leq \alpha + d\alpha$. Nesta situação adota-se a seguinte expressão para o número de hipercubos com índice de singularidade no intervalo $[\alpha, \alpha + d\alpha]$:

$$\varrho(\alpha)\varepsilon^{-f(\alpha)}d\alpha \quad (1.34)$$

Onde: $\varrho(\alpha)d\alpha$ representa a quantidade infinitesimal de subconjuntos que têm em comum valores de α pertinentes ao intervalo $[\alpha', \alpha' + d\alpha']$. Além disso o número de hipercubos necessário para cobrir somente um desses subconjuntos, $\mathcal{N}_{\varepsilon, \alpha}$, é dado por:

$$\mathcal{N}_{\varepsilon, \alpha} \sim \varepsilon^{-f(\alpha)} \quad (1.35)$$

Onde: $f(\alpha)$ é a dimensão de contagem de caixas comum aos subconjuntos. A motivação subjacente à expressão em 1.34 é vinculada a aspecto fundamental da teoria sobre turbulência: tem origem em considerações sobre propriedades fractais da distribuição espacial da dissipação da energia viscosa em fluidos, sob o limite em que é grande o número de Reynolds [35]. A dimensão generalizada D_q encerra dependência com as medidas de probabilidades dada a presença das últimas em $\mathcal{I}(q, \varepsilon)$, conforme esclarecem as expressões 1.8 e 1.9. A partir da última, de 1.33 e de 1.34 pode-se estabelecer outra expressão para 1.9 válida no “limite do contínuo” imposto por $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(q, \varepsilon) &= \int d\alpha' \varrho(\alpha') \varepsilon^{-f(\alpha')} \varepsilon^{q\alpha'} \\ &= \int d\alpha' \varrho(\alpha') \exp[(f(\alpha') - q\alpha') \ln(1/\varepsilon)] \end{aligned} \quad (1.36)$$

Uma vez que o valor de ε é muito pequeno, ocorre $\ln(1/\varepsilon)$ muito grande. Desta forma, uma vez que são finitos os valores de $\varrho(\alpha')$, a exponencial na segunda das expressões 1.36 certamente levará à divergência da integral envolvida caso o valor de $f(\alpha') - q\alpha'$ não tenha limite superior. A esta altura não existe critério pelo qual se possa excluir qualquer particular intervalo com valores positivos atribuíveis a α' , de modo que $0 < \alpha' < +\infty$ e a integral se torna imprópria. Como consequência, torna-se consistente com a almejada convergência a presença de um máximo global agudo exibido por $f(\alpha') - q\alpha'$, associado a certo valor dependente de q , $\alpha' \equiv \alpha(q)$: os máximos valores possíveis de $f(\alpha') - q\alpha'$ ocorrem nos arredores de $\alpha(q)$, à medida em que α' se distancia de $\alpha(q)$, pela direita ou pela esquerda, os valores de $f(\alpha') - q\alpha'$ decrescem rapidamente. Para $f(\alpha)$ bem comportada pode-se descrever o comportamento desejado em termos de derivadas convenientes. A primeira derivada exprime a existência do ponto extremo em $\alpha(q)$:

$$\frac{d}{d\alpha}[f(\alpha) - q\alpha]|_{\alpha=\alpha(q)} = 0 \quad (1.37)$$

A segunda derivada negativa assegura que o ponto extremo seja de máximo:

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}[f(\alpha) - q\alpha]|_{\alpha=\alpha(q)} < 0 \quad (1.38)$$

De 1.37 e 1.38 vêm informações imprescindíveis sobre $f(\alpha)$:

$$f'(\alpha(q)) = q \quad (1.39)$$

$$f''(\alpha(q)) < 0 \quad (1.40)$$

Pode-se realizar expansão em série de Taylor de $f(\alpha) - q\alpha$, em torno de $\alpha(q)$, até segunda ordem:

$$\begin{aligned} f(\alpha) - q\alpha &\simeq [f(\alpha) - q\alpha]|_{\alpha=\alpha(q)}(\alpha - \alpha(q))^0 \\ &+ \frac{d}{d\alpha}[f(\alpha) - q\alpha]|_{\alpha=\alpha(q)}(\alpha - \alpha(q))^1 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2}[f(\alpha) - q\alpha]|_{\alpha=\alpha(q)}(\alpha - \alpha(q))^2 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Ocorre que a parcela em primeira ordem é nula, conforme 1.37, daí :

$$\begin{aligned} f(\alpha) - q\alpha &\simeq [f(\alpha) - q\alpha]|_{\alpha=\alpha(q)}(\alpha - \alpha(q))^0 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2}[f(\alpha) - q\alpha]|_{\alpha=\alpha(q)}(\alpha - \alpha(q))^2 \end{aligned} \quad (1.42)$$

Com emprego de 1.38 pode-se reescrever 1.42 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(\alpha) - q\alpha &\simeq [f(\alpha(q)) - q\alpha(q)] \\ &+ \frac{1}{2} f''(\alpha(q))(\alpha - \alpha(q))^2 \end{aligned} \quad (1.43)$$

Levando-se 1.43 à segunda das expressões 1.36 vem:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(q, \varepsilon) &\simeq \exp[h_q \ln(1/\varepsilon)] \int d\alpha' \varrho(\alpha') \varepsilon^{(1/2)f''(\alpha(q))[\alpha' - \alpha(q)]^2} \\ &= A_{\varepsilon, \alpha(q)} \cdot \exp[(f(\alpha(q)) - q\alpha(q)) \ln(1/\varepsilon)] \end{aligned} \quad (1.44)$$

onde $h_q \equiv f(\alpha(q)) - q\alpha(q)$ e $A_{\varepsilon, \alpha(q)} \equiv \int d\alpha' \varrho(\alpha') \varepsilon^{(1/2)f''(\alpha(q))[\alpha' - \alpha(q)]^2}$. Da equação 1.8 e da segunda das equações 1.44 vem:

$$D_q = \frac{1}{q-1} [q\alpha(q) - f(\alpha(q))] \quad (1.45)$$

A partir de 1.45 pode-se exprimir $\alpha(q)$ em termos de q . Multiplicando-se 1.45 por $q-1$ e derivando-se com relação a q a expressão gerada, obtém-se:

$$\frac{d}{dq} [q\alpha(q) - f(\alpha(q))] = \frac{d}{dq} [(q-1)D_q] \quad (1.46)$$

O primeiro membro em 1.46 pode ser desenvolvido:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dq}[q\alpha(q) - f(\alpha(q))] &= \\
 \alpha(q) + q \frac{d\alpha(q)}{dq} - \frac{df(\alpha(q))}{dq} &= \\
 \alpha(q) + q \frac{d\alpha(q)}{dq} - \frac{df(\alpha(q))}{d\alpha} \frac{d\alpha(q)}{dq} &= \\
 \alpha(q) + q \frac{d\alpha(q)}{dq} - q \frac{d\alpha(q)}{dq} &= \alpha(q)
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

Onde a passagem da segunda para terceira linha envolveu a aplicação da regra da cadeia à última das três parcelas na segunda linha, e a passagem da terceira para a quarta linha envolveu a substituição de 1.39 na terceira parcela na terceira linha. De 1.46 e da última linha em 1.47 vem:

$$\begin{aligned}
 \alpha(q) &= \frac{d}{dq}[(q-1)D_q] \\
 &= \tau'(q)
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

onde $\tau' \equiv d\tau/dq$ e:

$$\tau(q) \equiv (q-1)D_q \tag{1.49}$$

Pode-se agora determinar uma equação para $f(\alpha(q))$, novamente a partir de 1.45. Multiplicando-a, uma vez mais, por $q-1$, explicitando-se $f(\alpha(q))$ da equação obtida, para então substituir $\alpha(q)$ dada por 1.48 na equação resultante, vem:

$$\begin{aligned}
 f(\alpha(q)) &= q \frac{d}{dq}[(q-1)D_q] - (q-1)D_q \\
 &= q\tau'(q) - \tau(q)
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

A cada valor de q corresponde um valor de $\alpha(q)$, via 1.48, e um valor de $f(\alpha(q))$, via 1.50. Portanto pode-se, enfim, determinar a curva $f(\alpha) \times \alpha$ a partir dos valores de q e D_q . Esta mesma curva, além da curva $D_q \times q$, são mostradas na próxima seção.

1.2.2.5 Dimensões Generalizadas, Espectro de Singularidades e Multifractalidade.

Monofractalidade e multifractalidade. Uma maneira de verificar se certo atrator consiste, ou não, em um multifractal é verificar se existe, ou não, dependência da dimensão generalizada, D_q , associada ao mesmo atrator, com os valores de q pertinentes a amplo espectro. De acordo com a seção “O Espectro de Dimensões Generalizadas”.

$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{I}(q, \varepsilon))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \tag{1.51}$$

onde

$$\mathcal{I}(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^q \quad (1.52)$$

A medida associada ao i -ésimo cubo é representada por μ_i e $q \in (-\infty, +\infty)$. A ausência de dependência de D_q com q caracteriza o atrator (mono) fractal: a fração do tempo total de observação durante o qual permanece ocupado o i -ésimo cubo, C_i , é igual à fração correspondente associada a todos os demais hipercubos. O valor da fração comum é exatamente $1/\mathcal{N}(\varepsilon)$. Daí 1.52 torna-se $\mathcal{I}(q, \varepsilon) = \mathcal{N}_\varepsilon^{1-q}$, independentemente do valor de q , este resultado levado a 1.51 resulta na expressão para a dimensão de contagem de caixas, definida na seção “A Dimensão de Contagem de Caixas”:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (1.53)$$

Atratores multifractais são necessariamente caracterizados por “variabilidade espacial” quanto às medidas μ_i . Com relação a estes atratores, a fração do tempo total de observação em que certo cubo permanece ocupado não é igual à fração equivalente associada a todos os demais. A dependência de D_q com q manifesta este fato. O valor de q atua como um “lente de aumento”: - valores positivos e crescentes de q salientam cada vez mais medidas μ_i com valores elevados (associadas a regiões com maiores concentrações de pontos de fase) em detrimento das medidas com valores baixos - valores negativos e decrescentes de q salientam cada vez mais medidas μ_i com valores baixos (associadas a regiões com menores concentrações de pontos de fase) em detrimento das medidas com valores elevados. O efeito “lente de aumento” não ocorre quanto a atratores (mono) fractais dada a independência de D_q com q conforme esclarecimento imediatamente anterior à equação 1.53.

Dimensões generalizadas e espectro de singularidades: características gerais. Propriedades gerais das curvas $D_q \times q$ e $f(\alpha) \times \alpha$ são relevantes para a compreensão de como são matematicamente descritos conjuntos de pontos (mono) fractais e multifractais. Segundo a teoria subjacente às duas quantidades, atratores multifractais podem ser caracterizados como a união entre subconjuntos diversos, disjuntos entre si. Cada um deles encerra grande quantidade de hipercubos. Ocorrem grupos de subconjuntos que têm em comum medidas de probabilidades μ_α . As últimas exibem invariância de escala com a dimensão ε segundo expoente α situado no intervalo $\alpha' \leq \alpha \leq \alpha' + d\alpha'$:

$$\mu_\alpha = \varepsilon^\alpha, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.54)$$

Conforme seção “O Espectro de Singularidades”. Dada a dimensão ponto a ponto, definida na seção “A Dimensão Ponto a Ponto”:

$$D_p(\vec{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mu(B_\varepsilon(\vec{x})))}{\ln(\varepsilon)} \quad (1.55)$$

Caso cada ponto $\vec{x}$ em 1.55 coincida com o centro do l -ésimo cubo, $\vec{x}_l$, de modo que a diferença entre a bola $B_\varepsilon(\vec{x})$ e o cubo C_l com dimensão ε seja desprezível sob $\varepsilon \rightarrow 0$, vale $\mu_i = \mu(B_\varepsilon(\vec{x}))$. Dai, conforme 1.54 e 1.55, decorre a igualdade:

$$D_p(\vec{x}_l) = \alpha \quad (1.56)$$

De forma que o valor de α associado ao l -ésimo cubo consiste na dimensão ponto a ponto associada ao centro do mesmo. Conforme a rápida discussão sobre as equações 1.34 e 1.35, a qualquer um dos subconjuntos cujo valor de α se situa no intervalo $[\alpha, \alpha + d\alpha]$ pode ser associado o número de hipercubos com dimensão ε necessários para cobrí-lo, $\mathcal{N}_{\varepsilon, \alpha}$:

$$\mathcal{N}_{\varepsilon, \alpha} = \varepsilon^{-D_\alpha} \quad (1.57)$$

onde D_α é a dimensão de contagem de caixas associada ao subconjunto. Conforme a equação 1.35, com relação a conjuntos invariantes e hiperbólicos, ocorre a igualdade entre esta dimensão e o espectro de singularidades, $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) = D_\alpha, \quad \alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max} \quad (1.58)$$

onde α_{min} é o menor entre os valores de α associados a todos os subconjuntos e α_{max} é o maior entre os mesmos.

Comportamento assintótico do espectro de dimensões generalizadas. Neste ponto pode-se salientar uma característica geral do aspecto da curva $D_q \times q$ relacionado ao seu comportamento quando $q \rightarrow -\infty$, ou quando $q \rightarrow +\infty$. O esclarecimento deste comportamento exige a consideração do mencionado “efeito lente de aumento” associado aos valores de q : - à medida em que q cresce a partir de zero, quantidade cada vez menor das parcelas associadas aos maiores valores de μ_i em 1.52 dominam a soma. Parcelas associadas aos menores valores tornam-se gradativamente menos importantes. No limite em que $q \rightarrow \infty$ a soma torna-se igual à parcela associada a maior das medidas, μ_{max}^q - à medida em que q decresce a partir de zero, quantidade cada vez menor de parcelas associadas aos menores valores de μ_i em 1.52 dominam a soma. Parcelas ligadas aos maiores valores perdem, cada vez mais, a importância. No limite que $q \rightarrow -\infty$ a soma torna-se igual à parcela associada à menor das medidas, μ_{min}^q . Em síntese, como consequência de $|q| \rightarrow \infty$ ocorre pronunciada ampliação da importância da parcela que encerra μ_{min} , ou μ_{max} , de modo a tornar nula a importância das demais parcelas. De acordo com 1.54, a α_{min} corresponde μ_{max} , a α_{max} corresponde μ_{min} :

$$\begin{aligned} \mu_{min} &= \varepsilon^{\alpha_{max}} \\ \mu_{max} &= \varepsilon^{\alpha_{min}} \end{aligned} \quad (1.59)$$

Levando-se uma, ou outra, das expressões 1.59 a 1.51, sob $|q| \rightarrow \infty$, vem:

$$\begin{aligned} D_{+\infty} &\equiv \lim_{q \rightarrow +\infty} D_q = \alpha_{min} \\ D_{-\infty} &\equiv \lim_{q \rightarrow -\infty} D_q = \alpha_{max} \end{aligned} \quad (1.60)$$

Portanto os valores de D_q aproximam-se assintoticamente de α_{min} , ou de α_{max} , quando $q \rightarrow +\infty$, ou $q \rightarrow -\infty$, respectivamente. A curva $D_q \times q$ exibe duas assíntotas horizontais, independentemente do atrator envolvido, como componente intrínseca de seu comportamento.

Comportamento monótono do espectro de dimensões generalizadas. De acordo com 1.51, uma vez que $0 < \mu_i < 1$, pode-se concluir: - D_0 está associada à soma dada por 1.52 em que todas as parcelas são iguais a $1 - D_q$, quando $q < 0$, está associada à soma dada por 1.52 em que cada parcela tem valor maior que $1 - D_q$, quando $q > 0$, está associada à soma dada por 1.52 em que cada parcela tem valor, positivo, menor que 1.

Desta forma pode-se inferir a seguinte relação:

$$D_q < D_0 < D_{-q}, \quad q > 0 \quad (1.61)$$

com

$$\lim_{q \rightarrow 0} D_{-q} = \lim_{q \rightarrow 0} D_q = D_0 \quad (1.62)$$

Além disso: - quando $q < 0$ o valor da soma diminui monotonicamente à medida em que q se aproxima de zero - quando $q > 0$ o valor da soma aumenta monotonicamente à medida em que q se aproxima de zero. Portanto a curva $D_q \times q$, independentemente do atrator envolvido, consiste em função estritamente decrescente cuja interseção com eixo vertical se dá em $D_q = D_0$, para $q = 0$.

Máximo global do espectro de singularidades. Nova característica geral, agora relacionada à curva associada ao espectro de singularidades, $f(\alpha) \times \alpha$, consiste na ocorrência de máximo $f(\alpha_{frc}) = f_{frc}$. Conforme conteúdo da seção "O Espectro de Singularidades", tanto os valores de α quanto os de $f(\alpha)$ são expressos a partir de valores de q e de D_q com emprego das seguintes expressões:

$$\alpha(q) = D_q + (q - 1) \frac{dD_q}{dq}(q) \quad (1.63)$$

$$D_q = \frac{1}{q - 1} [q\alpha(q) - f(\alpha(q))] \quad (1.64)$$

Levando-se valores de q , de D_q , e de dD_q/dq a 1.63 consegue-se $\alpha(q)$. Este último, levado a 1.64 junto com q e D_q , permite a explicitação de $f(\alpha(q))$. Ainda segundo a seção "O Espectro de Singularidades", valem as equações:

$$f'(\alpha(q)) = q \quad (1.65)$$

$$f''(\alpha(q)) < 0 \quad (1.66)$$

Estas especificam certo valor de $\alpha(q)$, $\alpha(0) \equiv \alpha_{frc}$, para o qual $f(\alpha(q))$ exibe um valor extremo, $f(\alpha(0)) = f(\alpha_{frc}) \equiv f_{frc}$. Trata-se de máximo local pois para $q = 0$, a primeira

derivada é nula em $\alpha(0)$ e a segunda derivada é negativa no mesmo ponto. Para as determinações dos valores de α_{frc} e f_{frc} basta recorrer respectivamente às equações 1.63 e 1.64 :

$$q = 0 \text{ em 1.63} \rightarrow \alpha(q) = \alpha(0) = \alpha_{frc} = D_{\varepsilon, \alpha} \quad (1.67)$$

$$q = 0 \text{ em 1.64} \rightarrow f(\alpha(q)) = f(\alpha(0)) = f_{frc} = D_0 \quad (1.68)$$

Onde a quantidade $D_{\varepsilon, \alpha}$ é definida na equação 1.71. A equação para dD_q/dq necessária para o emprego de 1.63 foi derivada a partir de 1.51:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{(1-q)^2} \frac{\ln(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^q)}{\ln(1/\varepsilon)} + \frac{1}{(1-q)} \frac{1}{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^q} \frac{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^q \ln(\mu_i)}{\ln(1/\varepsilon)} \right\} &= \\ \frac{1}{(1-q)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{(1-q)} \frac{\ln(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^q)}{\ln(1/\varepsilon)} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^q} \frac{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^q \ln(\mu_i)}{\ln(1/\varepsilon)} \right\} &= \\ \frac{1}{(1-q)} \left\{ D_q + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^q} \frac{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^q \ln(\mu_i)}{\ln(1/\varepsilon)} \right\} &= \frac{dD_q}{dq}(q) \end{aligned} \quad (1.69)$$

Onde, na passagem da segunda para a terceira linha, quanto ao primeiro membro entre chaves, foram utilizadas as equações 1.51 e 1.52. Com base em 1.69 pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{dD_q}{dq}(0) &= D_0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \ln(\mu_i)}{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} a_i \cdot \ln(1/\varepsilon)} \\ &= D_0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\varepsilon) \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \alpha_i}{\ln(1/\varepsilon) \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} a_i} \\ &= D_0 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \alpha_i}{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} a_i} = D_0 - \frac{\mathcal{R}_{\varepsilon, \alpha}}{\mathcal{N}_\varepsilon} \\ &= D_0 - D_{\varepsilon, \alpha} \end{aligned} \quad (1.70)$$

Onde na passagem da primeira da segunda linha foi empregada a equação 1.33. Além disso:

$$\begin{aligned} a_i &\equiv \mu_i^0 = 1 \text{ para } i = 1, \dots, \mathcal{N}_\varepsilon \\ \mathcal{R}_{\varepsilon, \alpha} &\equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_i^{\mathcal{N}_\varepsilon} \alpha_i \\ \mathcal{N}_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_i^{\mathcal{N}_\varepsilon} a_i \\ D_{\varepsilon, \alpha} &\equiv \mathcal{R}_{\varepsilon, \alpha} / \mathcal{N}_\varepsilon \end{aligned} \quad (1.71)$$

De 1.63 e 1.70 vem 1.67. A partir de 1.64 vem:

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q) - (q-1)D_q \quad (1.72)$$

De 1.72 vem 1.68. Tal máximo consiste na primeira característica geral de $f(\alpha) \times \alpha$. Decorrência importante dela é a seguinte: a $f(\alpha(0))$, conforme 1.57 e 1.58, corresponde

a maior quantidade possível de hipercubos N -dimensionais, com dimensão ε , justamente aquela necessária para cobrir todo o atrator envolvido. Aos demais valores de $f(\alpha(q))$, para $q \neq 0$, correspondem menores quantidades de hipercubos. Quanto aos valores de $\alpha(q)$ associados a $q \rightarrow -\infty$, ou a $q \rightarrow +\infty$, conforme 1.63, são os seguintes:

$$\begin{aligned}\alpha_{-\infty} &\equiv \lim_{q \rightarrow -\infty} \alpha(q) = D_{-\infty} = \alpha_{max} \\ \alpha_{+\infty} &\equiv \lim_{q \rightarrow +\infty} \alpha(q) = D_{+\infty} = \alpha_{min}\end{aligned}\quad (1.73)$$

O resultado $dD_q/dq = 0$, para $q \rightarrow -\infty$ ou para $q \rightarrow +\infty$, proveniente das equações 1.60, foi empregado para a obtenção dos resultados em 1.73.

Comportamento assintótico do espectro de singularidades. Com base na equação 1.65 verifica-se que, sob os limites $q \rightarrow -\infty$ ou $q \rightarrow +\infty$, as tangentes a $f(\alpha(q))$ são verticais:

$$\begin{aligned}f'(\alpha(q))|_{q \rightarrow -\infty} &\equiv \lim_{q \rightarrow -\infty} f'(\alpha(q)) \rightarrow -\infty \\ f'(\alpha(q))|_{q \rightarrow +\infty} &\equiv \lim_{q \rightarrow +\infty} f'(\alpha(q)) \rightarrow +\infty\end{aligned}\quad (1.74)$$

Uma vez que, para α arbitrário, vale:

$$f(\alpha + \Delta\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha + \Delta\alpha} f'(\alpha') d\alpha' + f(\alpha) \quad (1.75)$$

Admitindo $f(\alpha)$ finito, $f'(\alpha) \rightarrow +\infty$ ou $f'(\alpha) \rightarrow -\infty$ tornaria infinito o acréscimo dado pela integral em 1.75 de modo que ocorreria divergência no valor de $f(\alpha)$. Para evitar tal divergência sob um ou outro dos limites em 1.74 deve necessariamente ocorrer:

$$\begin{aligned}f(\alpha_{-\infty}) = f(\alpha_{max}) &\equiv \lim_{q \rightarrow -\infty} f(\alpha(q)) = 0 \\ f(\alpha_{+\infty}) = f(\alpha_{min}) &\equiv \lim_{q \rightarrow +\infty} f(\alpha(q)) = 0\end{aligned}\quad (1.76)$$

Os resultados dados por 1.74 e 1.76 exprimem o almejado comportamento assintótico de $f(\alpha) \times \alpha$.

Curvas dos espectros de dimensões generalizadas e de singularidades. As quatro características gerais abordadas, duas da curva $D_q \times q$ e duas da curva $f(\alpha) \times \alpha$, independentes do particular atrator envolvido, manifestam-se através de aspectos das mesmas curvas observáveis nos dois gráficos na figura 1. A curva $f(\alpha) \times \alpha$ é empregada em muitos trabalhos na literatura, entre eles todos os citados na seção 1.2.1. Aspecto ainda não considerado diz respeito ao ponto da curva $f(\alpha) \times \alpha$ com coordenadas (D_1, D_1) . Trata-se de ponto cuja derivada associada é 1.

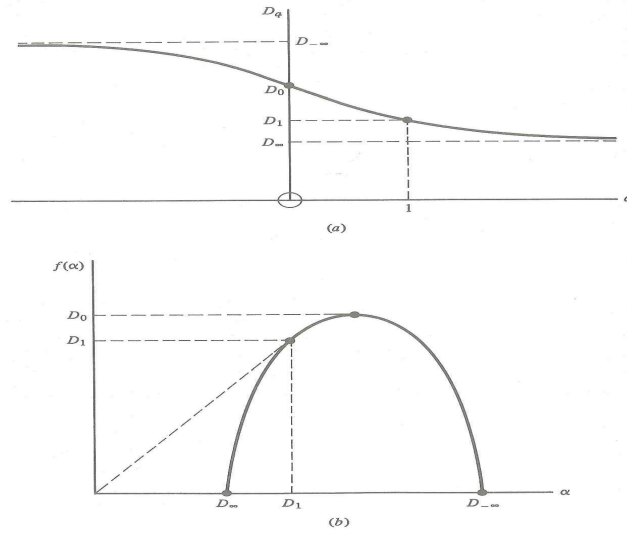


Figura 1 – As curvas $D_q \times q$ e $f(\alpha) \times \alpha$.

Pode-se demonstrar tal fato:

(a) - da equação 1.65, para $q = 1$, vem

$$f'(\alpha(q)) = f'(\alpha(1)) = 1 \quad (1.77)$$

(b) - da equação 1.63 e da última das equações 1.69, vem

$$\alpha(q) = D_q + \frac{1-q}{q-1} \left\{ D_q + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^q} \frac{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i \ln(\mu_i)}{\ln(1/\varepsilon)} \right\} \quad (1.78)$$

Dada presença do termo $(1-q)/(q-1)$ na segunda parcela, o cálculo de $\alpha(1) = \alpha(q)$ para $q = 1$ é feito a partir de $\lim_{q \rightarrow 1} \alpha(q) = \alpha(1)$. Com base em 1.78 e na aplicação da regra de L'hospital a $\lim_{q \rightarrow 1} (1-q)/(q-1)$ pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= \lim_{q \rightarrow 1} \alpha(q) = D_1 - \left\{ D_1 - \lim_{q \rightarrow 1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{D_1}{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^q} \right\} \\ &= D_1 - D_1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{D_1}{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i} \\ &= \frac{D_1}{1} \\ &= D_1 \end{aligned} \quad (1.79)$$

Onde: na passagem da segunda para terceira linha foi empregado o resultado, proveniente do tópico (ii) no primeiro parágrafo da seção “O Espectro de Dimensões Generalizadas”,

seguinte:

$$\sum_i^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i = 1 \quad (1.80)$$

(c) - das equações 1.72, 1.51 e 1.52 vem:

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q) - \frac{q-1}{1-q} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\sum_i^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^q)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (1.81)$$

A presença do termo $(q-1)/(1-q)$ na segunda parcela de 1.81 impõe o emprego de um limite, $\lim_{q \rightarrow 1} f(\alpha(1)) = f(\alpha(1))$, para o cálculo de $f(\alpha(q)) = f(\alpha(1))$ para $q = 1$. Daí :

$$\begin{aligned} f(\alpha(1)) &= \lim_{q \rightarrow 1} f(\alpha(q)) = \alpha(1) - (-1) \lim_{q \rightarrow 1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\sum_i^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^q)}{\ln(1/\varepsilon)} \\ &= \alpha(1) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\sum_i^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i)}{\ln(1/\varepsilon)} \\ &= \alpha(1) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(1)}{\ln(1/\varepsilon)} \\ &= \alpha(1) \end{aligned} \quad (1.82)$$

Onde: o resultado 1.80 e a regra de L'hospital para $\lim_{q \rightarrow 1} (q-1)/(1-q)$ foram novamente empregados. De 1.77, 1.79 e 1.81 vem:

$$f'(D_1) = 1 \text{ e } f(D_1) = D_1 \quad (1.83)$$

O caráter multifractal. A esta altura, enfim, pode-se introduzir a noção empregada neste trabalho de “caráter multifractal”. Noção utilizada na seção 2.4.3 do próximo capítulo, tópico “Multifractalidade e variabilidade de subconjuntos”. Este caráter exprime a extensão da variabilidade das medidas $\mu_i = \varepsilon^{\alpha_i}$. Quantificação pertinente é dada pela diferença:

$$\Delta_{mf} \equiv \alpha_{max} - \alpha_{min} \quad (1.84)$$

De acordo com os gráficos (a) e (b) na figura 1, e com as expressões 1.60 e 1.61, quanto menor for Δ_{mf} tanto mais próxima da distribuição de pontos de fase associada a D_0 estará a distribuição correspondente do atrator multifractal envolvido. A redução de Δ_{mf} dá-se de forma específica, tanto α_{min} quanto α_{max} se aproximam de α_0 . Desta forma o caráter multifractal também pode ser visto como medida da diferença entre o comportamento multifractal envolvido e certo comportamento (mono) fractal. Este último caracterizado por medida $\mu_0 = \varepsilon^{\alpha_0}$, com $\alpha_{min} < \alpha_0 < \alpha_{max}$, e por quantidade de hipercubos necessária para cobrir todo o atrator $\mathcal{N}_\varepsilon = \varepsilon^{-D_0}$, com $D_{+\infty} \leq D_0 \leq D_{-\infty}$. Entre dois atratores associados a distintos valores das diferenças $\alpha_{max} - \alpha_{min}$, uma delas Δ_{mf} e outra Δ'_{mf} , com $\Delta_{mf} > \Delta'_{mf}$, aquele associado a Δ_{mf} terá caráter multifractal mais pronunciado que o outro.

1.3 Efeito da Nuvem de Cordas sobre Resultados de Testes Clássicos da Relatividade Geral.

Em meados dos anos 1910, Schwarzschild obteve a solução geral para um corpo que gravita, cuja massa está distribuída numa esfera, não possui carga elétrica e não tem rotação [36]. Esta solução é conhecida como espaço-tempo ou buraco negro de Schwarzschild [37, 38]. Nesta mesma década, foi obtida a primeira generalização da solução de Schwarzschild, agora, com um campo eletromagnético como fonte. Esta solução é conhecida como espaço-tempo ou buraco negro de Reissner-Nordström [39, 40]. Assim como a de Schwarzschild, ela é estática e esfericamente simétrica, mas possui um campo elétrico associado a uma carga localizada no centro da distribuição de massa.

Mais de cinquenta anos depois, em 1963, Kerr encontrou uma generalização da solução de Schwarzschild, ao considerar a rotação [41]. Ela é, portanto, estacionária ao invés de estática, e axialmente simétrica ao invés de esfericamente simétrica. Tendo em vista que a maioria dos objetos astrofísicos possuem rotação, esta solução é bastante aplicada no contexto da astrofísica. A generalização da solução de Kerr, de modo a considerar o buraco negro e um campo eletromagnético como fontes, foi obtida por Newman e colaboradores [42]. Esta solução descreve os campos gravitacional e eletromagnético na região exterior a um buraco negro em rotação e eletricamente carregado.

A partir dos anos 1970, vários estudos foram realizados sobre buracos negros, quando vários teoremas foram demonstrados [43]. Foram investigados os modos próprios de vibração destes objetos [44, 45, 46] e diferentes aspectos da dinâmica relativística [47, 48], dentre inúmeros outros.

Esses estudos foram motivados, em parte pelas descobertas dos quasares em 1963, pulsares em 1968 e fontes compactas de raio-X em 1962. Considerando os avanços alcançados, em particular, aqueles relativos a simulações numérica [49, 50, 51], foi possível modelar processos relacionados a colisões de buracos negros e fazer estimativas da ordem de grandeza do sinal associado a ondas gravitacionais [52, 53], cuja detecção foi realizada recentemente [54] através da observação da colisão de dois buracos negros que se fundem, ocorrida há cerca de 13 bilhões de anos, via a detecção de ondas gravitacionais que traz novas e interessantes possibilidades para a astronomia e astrofísica.

Os buracos negros são estruturas previstas pela relatividade geral, e podem influenciar a dinâmica de galáxias, liberar grandes quantidades de energia através de diferentes mecanismos, gerar ondas gravitacionais, que poderão nos ensinar acerca da física dessas estruturas, bem como diferentes aspectos da física fundamental e da cosmologia do universo primitivo.

Algumas teorias de campo preveem a existência de defeitos topológicos, dentre os quais o mais interessante, do ponto de vista físico, parecem ser as cordas cósmicas, que devem ter surgido como resultado de um processo de quebra espontânea de simetria devido a

transições de fase ocorridas no universo primitivo [55, 56].

Estes defeitos lineares, chamados topológicos, podem ser retilíneos e infinitamente longos. Eles são caracterizados por um único parâmetro que é a massa por unidade de comprimento. As cordas podem existir na forma de laços ou *loops*. No caso da linha infinita, esse defeito corresponde a uma corda de Nambu-Goto. No caso da corda cósmica retilínea, infinita e extremamente fina, a geometria da região exterior à corda é cônica, portanto, a geometria é a mesma do espaço-tempo de Minkowski com a retirada de um setor, que é proporcional a sua densidade linear de massa. Então, dizemos que o espaço-tempo é localmente plano, mas não o é do ponto de vista global.

As cordas cósmicas foram muito estudadas nos anos 1980 e 1990, pois, eram candidatas a um possível mecanismo que forneceria as perturbações da densidade que seriam responsáveis pela formação de estruturas em larga escala, tais como galáxias e aglomerados. No início dos anos 2000, no entanto, os dados sobre a anisotropia da radiação cósmica de fundo excluíram a possibilidade de que esses defeitos fossem responsáveis pela formação de estruturas. Em anos recentes, as cordas cósmicas despertaram, novamente, o interesse como um possível mecanismo para explicar a formação de estruturas, mesmo tendo um papel secundário, em um cenário em que a inflação é considerada [57].

Os estudos acerca de cordas cósmicas (cordas de Nambu-Goto) na RG foram iniciados por Letelier [58] e Stachel [59], nos anos 1970. Nesse trabalho pioneiro Letelier obteve as soluções das equações de Einstein cuja fonte consistia numa nuvem de cordas, com diferentes simetrias, a saber, plana, cilíndrica e esférica. Neste último caso, foi obtida a solução corresponde ao buraco negro de Schwarzschild com uma nuvem de cordas, que estamos denominando espaço-tempo de Letelier ou buraco negro de Letelier. O horizonte de eventos do buraco negro de Letelier é modificado pelo parâmetro que está associado a presença da nuvem de cordas, quando comparado com o horizonte do buraco negro de Schwarzschild.

Anos depois, esse resultado pioneiro publicado em [58] foi generalizado de modo a considerar a pressão produzida pelas cordas [60], o que significa dizer que, agora, trata-se de um fluido de cordas. Neste caso, foi obtida a solução das equações de Einstein, somente para o caso com simetria esférica. Desde o trabalho pioneiro, até os dias de hoje, foram analisados vários sistemas contendo nuvens de cordas, em diferentes contextos, na gravitação [61, 62, 63] e em modelos cosmológicos [64, 65, 66, 67].

No capítulo 5 desta tese, serão abordados os seguintes tópicos: reobtenção e análise da métrica do espaço-tempo de Letelier, a influência de nuvens de cordas nas equações de movimento, precessão do periélio e desvio da luz. Vamos admitir a assinatura $(+, -, -, -)$, e que $\hbar = c = 1$.

2 Novas Assinaturas de Dinâmicas Caóticas.

2.1 Versão Estendida de Artigo Publicado.

Visão panorâmica. Neste capítulo apresento, principalmente, versão estendida de artigo publicado em periódico internacional [68], conteúdos não abordados no artigo são também considerados. Trata-se de texto com informações suficientes para a perfeita compreensão do tema e dos resultados envolvidos, mas que consiste sim em extrato de “trabalho mais amplo”, como convém a um artigo. Por sua vez, o trabalho mais amplo é objeto da exposição desenvolvida através dos demais capítulos. Estes últimos são dedicados a informações complementares e visam aprofundamento, como convém a uma tese.

Caracterizações de atratores estranhos. Apresento aqui caracterizações, inéditas na literatura, de dez atratores estranhos, alguns imersos em espaços de fase unidimensionais, outros em espaços de fase bidimensionais, todos gerados por sistemas dinâmicos discretos. Caracterizações baseadas em uma malha de pequenos hipercubos N -dimensionais ($N = 1$ ou $N = 2$) com dimensão linear ε , daqui em diante designada por “malha $M_{n,\varepsilon}$ ”, que cobrem o atrator envolvido quando este se encontra imerso em espaço N -dimensional. Ainda que caracterizações bem conhecidas, daqui em diante designadas por “caracterizações clássicas”, também empreguem a malha $M_{n,\varepsilon}$, a origem diversa das que apresento permite revelações de propriedades de atratores estranhos não acessíveis pelas outras.

Caracterizações clássicas. Atratores estranhos consistem em conjuntos de pontos de fase associados a sistemas dinâmicos, discretos ou contínuos, observados somente para tempos suficientemente longos. Propriedades específicas ligadas à disposição espacial desses pontos são determinadas com emprego de, pelo menos, uma malha $M_{n,\varepsilon}$. Propriedades expressas por expoentes de leis de potência que têm a seguinte forma geral: $\mathcal{P}(\varepsilon) = \varepsilon^{\pm a \cdot D}$, onde $D > 0$, $a = 1$ ou $-\infty < a < \infty$. Uma dessas propriedades é a “dimensão de contagem de caixas”, D_0 , dada por número não inteiro menor que a dimensão do espaço em que o atrator está imerso. Esse fato salienta o caráter não euclidiano de tais conjuntos. O valor de D_0 é determinado com base na consideração de diversas malhas $M_{n,\varepsilon}$, cada uma marcada por pequeno valor de ε distinto do valor das demais: consiste na incinção da curva $\ln(\mathcal{N}_\varepsilon) \times \ln(1/\varepsilon)$. Onde $\mathcal{N}_\varepsilon$ é o número de hipercubos necessários para cobrir o atrator em dado instante suficientemente distante do inicial: $\mathcal{N}_\varepsilon \propto \varepsilon^{-D_0}$ [1]. Também é possível caracterização através da fração do tempo total de observação em que dado ponto de fase proveniente de condição inicial específica permanece dentro de certo hipercubo. Quando a fração é independente da condição inicial torna-se propriedade do ente geométrico, recebe o nome “medida natural”, μ , e representa a probabilidade de ocupação do mesmo. As dimensões generalizadas, D_q , $-\infty < q < +\infty$, são determinadas com base na observação de

muitas órbitas suficientemente longas, uma por vez, de modo a associar a cada hipercubo, C_i , a probabilidade, μ_i , de que seja visitado ao longo do tempo comum de duração das órbitas [2, 3]. Com base na soma entre cada uma das medidas naturais individualmente elevadas a q , $\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon} \mu_i^q \equiv \mathcal{I}(q, \varepsilon)$, pode-se definir D_q , pela relação: $\mathcal{I}(q, \varepsilon) \propto \varepsilon^{+D_q(1-q)}$. Quando as medidas naturais são todas iguais entre si, $D_q = D_0$ para todo $q \neq 0$, o atrator é (mono) fractal. Caso as medidas não sejam iguais entre si o atrator é multifractal e a $q \rightarrow +\infty$ corresponde o aumento da diferença entre D_{-q} e D_q . Para q positivo suficientemente grande $\mathcal{I}(q, \varepsilon) = \mu_{max}^q$ em D_q onde μ_{max} é a maior medida natural e $\mathcal{I}(q, \varepsilon) = \mu_{min}^q$ em D_{-q} onde μ_{min} é a menor medida natural. Quando $q = 0$, $D_q = D_0$ independentemente dos valores das medidas. Com base em D_q pode-se definir o “espectro de singularidades”, $f(\alpha)$. O índice de singularidade α consiste no expoente da lei de potência que conecta μ e ε : $\mu = \varepsilon^{+\alpha}$. A α_{min} corresponde μ_{max} a α_{max} corresponde μ_{min} . O valor de $f(\alpha)$ consiste na dimensão de contagem de caixas do subconjunto de pontos do atrator cujas medidas naturais são muito próximas entre si e tais que $\alpha' < \alpha < \alpha' + d\alpha'$. Se $\mathcal{N}_{\varepsilon, \alpha}$ representa o número de pequenos hipercubos necessários para cobrir o subconjunto, vale a relação: $\mathcal{N}_{\varepsilon, \alpha} \propto \varepsilon^{-f(\alpha)}$. Uma vez que α e $f(\alpha)$ são derivados a partir das dimensões generalizadas, dependem das medidas naturais μ_i [4, 5, 6].

Caracterizações não orbitais. As caracterizações apresentadas aqui empregam a malha $M_{n, \varepsilon}$ para determinação de propriedades originadas dos movimentos dos pontos de fase sob escopo diferente daquele subjacente às determinações de D_q , $f(\alpha)$ e α . Não há o acompanhamento individual de cada uma das órbitas pertinentes a uma grande sucessão delas com a finalidade de determinar as medidas naturais μ_i associadas a cada um dos hipercubos. Considero aqui a advecção caótica de grande quantidade de condições iniciais muito próximas entre si: a distribuição inicial geometricamente regular do conjunto de condições iniciais se altera continuamente com o tempo até assumir a forma final geometricamente irregular, com ligeira dependência temporal, característica do atrator estranho envolvido. A evolução temporal de todo o conjunto de condições iniciais é considerada, a cada instante estão presentes cada um dos pontos de fase gerados a partir da condição inicial correspondente através do sistema dinâmico associado. A finalidade é construir distribuições de probabilidade dos tempos de ocupações e de desocupações dos hipercubos e das quantidades dos pontos durante as ocupações, números de ocupações.

Advecção caótica versus órbitas sucessivas. Confrontação entre aspectos relevantes às duas caracterizações abordadas trazem esclarecimentos importantes. (A1) sob órbitas sucessivas há sempre um único ponto de fase pertinente a órbita conhecida ocupando um único hipercubo a cada instante do intervalo de tempo em que particular órbita pertinente à sequência é considerada (A2) sob advecção caótica há sempre, a cada instante, diversos hipercubos ocupados, cada um encerrando um ou mais pontos de fase. Não existem informações orbitais, pois não há o acompanhamento das trajetórias iniciadas em cada uma das condições iniciais. Deste modo: (B1) sob órbitas sucessivas, opostamente ao

que acontece sob advecção caótica - distribuições dos números de ocupações não trariam qualquer informação sobre a variabilidade de concentrações de pontos em diferentes pequenas regiões da porção do espaço ocupada pelo atrator estranho envolvido, já que cada hipercubo seria sempre ocupado por um único ponto - distribuições dos tempos de ocupações não teriam nada a dizer sobre variabilidade dos tempos de ocupações associados a números de ocupações diferentes de um (B2) sob advecção caótica, contrariamente ao que acontece sob órbitas sucessivas - não seria possível definir medidas naturais invariantes μ_i vinculadas a cada um dos cubos C_i , uma vez que a definição das medidas impõe um único ponto, pertinente a órbita conhecida, ocupando um único hipercubo a cada instante. Desta forma não seriam possíveis cálculos dos expoentes D_q , $f(\alpha)$ e α - a razão $f_i \equiv \tau_{oi}/T_{obs}$ entre o tempo de ocupação do hipercubo C_i , dado por τ_{oi} , e o tempo total de observação das órbitas, T_{obs} , não seria igual ao μ_i ligado ao mesmo hipercubo (ainda que μ_i seja definido como a mesma razão no escopo correspondente). Deste modo não existe motivo para esperar que novos expoentes $\tilde{D}_q$, $\tilde{f}(\tilde{\alpha})$ e $\tilde{\alpha}$ calculados pela simples substituição de μ_i por f_i nas equações pertinentes levem a valores respectivamente iguais a D_q , $f(\alpha)$ e α . Na verdade a própria validade das equações sob a substituição não está assegurada dadas as diferenças entre o escopo em que foram definidas e aquele em que são empregadas neste ítem (B2).

Tempos e números de ocupações. Emergiram das simulações numéricas, com relação aos dez atratores estranhos, distribuições dos tempos de ocupações, τ_o , e dos números de ocupações, Q , dadas por leis de potência:

$$\varrho_{noc}(Q) \propto Q^{-\gamma_{noc}} \quad \varrho_{toc}(\tau_o) \propto \tau_o^{-\gamma_{toc}} \quad (2.1)$$

onde $\varrho_{noc}(Q)$ e $\varrho_{toc}(\tau_o)$ são as densidades de probabilidades associadas respectivamente aos números e tempos de ocupações, $1,71 \leq \gamma_{noc} \leq 2,45$ e $1,92 \leq \gamma_{toc} \leq 2,76$. Características marcantes das duas densidades são: (i) não foram derivadas das medidas naturais $\mu_i(\varepsilon)$ ou de números de caixas como $\mathcal{N}_\varepsilon$ e $\mathcal{N}_{\varepsilon,\alpha}$ (ii) os expoentes γ_{noc} e γ_{toc} não consistem em dimensões de conjuntos de pontos como D_0 , D_q e $f(\alpha)$. Por fim o mais importante: ambas esclarecem as existências de bem definidas distribuições de probabilidades que podem suportar diversas caracterizações quantitativas como médias, momentos de ordem superior, e desvios padrões, entre outras. As distribuições manifestam propriedades comuns aos dez atratores estranhos envolvidos.

Tempos de desocupações: quanto a sete entre os dez atratores a distribuição de tempos de desocupações é também dada por lei de potência:

$$\varrho_{tdc}(\tau_d) \propto \tau_d^{-\gamma_{tdc}} \quad (2.2)$$

Onde τ_d é o tempo de desocupação, $\varrho_{tdc}(\tau_d)$ é a densidade de probabilidade associada a τ_d e $2,36 \leq \gamma_{tdc} \leq 2,78$. Quanto aos três atratores restantes: - com relação a dois deles os resultados mostram, em cada caso, dois intervalos distintos e com curtas extensões

de valores de τ_d correspondentes a leis de potência - com relação ao outro os resultados mostram que não ocorre qualquer intervalo com extensão considerável de valores de τ_d correspondente a lei de potência. Opostamente ao que aconteceu com as distribuições de Q e τ_o , as distribuições de τ_d não são comuns aos dez atratores estranhos abordados.

Intervalos efetivos e multifractalidade: os principais resultados neste trabalho consistem em quantificações estatísticas baseadas nas distribuições $\varrho_{noc}(Q)$ e $\varrho_{toc}(\tau_o)$: - os intervalos efetivos de tempos e números de ocupações, Δ_{σ_t} e Δ_{σ_n} respectivamente, que representam as extensões dos intervalos com valores mais prováveis de τ_o e de Q - as variabilidades efetivas de números de ocupações, M_{σ_n} , que quantificam as multifractalidades dos atratores estranhos correspondentes. Onde σ_t e σ_n são os desvios padrões respectivamente associados a τ_o e Q . Os valores de M_{σ_n} , dependentes dos Δ_{σ_n} associados, mostram que um dos atratores é quase (mono) fractal, e os demais envolvem multifractalidades apreciáveis em diferentes níveis. Os valores de Δ_{σ_t} e Δ_{σ_n} esclarecem que os intervalos com valores mais prováveis de τ_o e Q têm extensões inferiores a 2% dos intervalos com todos os valores possíveis correspondentes, estes últimos são os intervalos totais. Além disso as probabilidades ligadas a Δ_{σ_t} e Δ_{σ_n} são bem próximas de 1. Desta forma apenas pequena minoria dos valores nos intervalos totais efetivamente ocorrem. Fato que indica quão falsa pode ser a inferência sobre a amplitude da gama de valores mais prováveis de τ_o ou Q com base nas observações das extensões dos intervalos totais e não nas extensões dos intervalos efetivos.

Trabalhos anteriores: este trabalho foi motivado por dois artigos publicados por Dickman [30, 31] onde a advecção caótica de grande quantidade de pontos de fase vinculados a particular sistema dinâmico bidimensional é empregada para simular a advecção de massas úmidas atmosféricas pela massa seca em que está imersa. A finalidade do autor foi gerar distribuições de probabilidades provenientes de simulações análogas às distribuições observadas sobre chuvas em local específico: durações de chuvas, intensidades de chuvas, e durações de secas (durações de intervalos entre chuvas) dadas por leis de potência [32, 33]. Tanto num quanto noutro artigo o autor não faz qualquer consideração sobre atratores estranhos. Todos os sistemas dinâmicos considerados aqui são distintos daquele abordado por Dickman.

Organização da exposição: a partir deste ponto, a sucessão dos temas neste capítulo é organizada segundo quatro seções. A seção 2.2 é dedicada à apresentação do tratamento estatístico, dos fundamentos sobre as simulações e dos resultados em tabela específica. A seção 2.3 encerra apresentações dos dez sistemas dinâmicos abordados. A seção 2.4 diz respeito análises e discussões sobre os resultados. A seção 2.5. é voltada aos conteúdos não abordados no artigo.

2.2 Método: Simulações e Estatísticas.

Dois conjuntos: a seção 2.3 mostra que oito atratores estranhos estão imersos em espaços de fase bidimensionais e dois em espaços unidimensionais. Os dez atratores são então organizados em dois conjuntos: - S_a , imersos em espaços bidimensionais - S_b , imersos em espaços unidimensionais. A abordagem com emprego dos conjuntos favorece as próximas discussões.

Hipercubos N-dimensionais: os mencionados hipercubos N -dimensionais consistem em: - pequenos segmentos de reta com comprimento ε relativamente aos mapas unidimensionais - pequenos quadrados com lado ε relativamente aos mapas bidimensionais e tridimensional (com relação ao último quadrados imersos em seções de Poincaré adequadas, necessariamente bidimensionais). Cada pequeno quadrado resulta da divisão de certo retângulo maior em partes iguais, cada um deles disposto relativamente ao retângulo segundo estrutura matricial com linhas e colunas. Por sua vez cada pequeno segmento resulta da divisão de um segmento maior em partes iguais. Cada retângulo, ou segmento, maior consiste em uma “caixa externa I”.

Caixas de condições iniciais: as condições iniciais estão dispostas regularmente pelo interior de pequenos segmentos ou pequenos quadrados conforme a dimensão do sistema envolvido, as “caixas de condições iniciais”. O tamanho de cada uma delas é igual ou maior ao tamanho de cada hipercubo correspondente. Cada pequeno segmento com as condições iniciais resulta da divisão do intervalo unitário $[0, 1]$ em partes iguais. Cada pequeno quadrado com as condições iniciais resulta da divisão de um retângulo maior em partes iguais e se encontra disposto relativamente ao mesmo retângulo segundo estrutura matricial, à maneira do que acontece com os hipercubos. Cada retângulo ou segmento maior consiste em uma “caixa externa II”. Quanto a cada atrator considera-se uma caixa de condições iniciais móvel segundo sucessão determinada com emprego da caixa externa II correspondente, conforme o próximo tópico.

Evolução temporal: as unidades de tempo são iterações. Quanto aos atratores em S_b a quantidade de condições iniciais é sempre 10.000. Com relação aqueles em S_a a quantidade de condições iniciais depende da caixa de condições iniciais envolvida e pode assumir um dos três seguintes valores: 9.800, 9.900 ou 10.000. Cada evolução ocorre ao longo de um período de observação, $T_{obs} = t_f - t_i$, onde t_f e t_i são os instantes final e inicial. Quando T_{obs} é atingido a evolução em curso é interrompida e outra, sob nova caixa de condições iniciais, é iniciada. Cada evolução em uma sequência delas consiste em uma “realização”. O valor do período de observação comum a todos os sistemas é $T_{obs} = 15.000$ ¹.

¹ O capítulo 3 é voltado à informações detalhadas sobre as simulações numéricas vinculadas a cada um dos atratores estranhos: (i) figuras com os atratores estranhos e descrições detalhadas, com figuras, sobre hipercubos, caixas de condições, caixas externas I e caixas externas II (ii) esclarecimentos sobre as quantidades de condições iniciais, 9.800, 9.900 ou 10.000, que experimentam evoluções temporais e sua relação com as caixas externas II.

Ocupações e desocupações: com relação a certo hipercubo: - o tempo de ocupação é dado pela contagem das sucessivas unidades de tempo durante as quais houve pelo menos um ponto de fase em seu interior ou sua fronteira - o número de ocupação é dado pela soma entre as quantidades de pontos em seu interior ou fronteira verificadas em cada unidade de tempo do tempo de ocupação - o tempo de desocupação é dado pela contagem das sucessivas unidades de tempo durante as quais não houve sequer um ponto em seu interior ou fronteira.

Transientes mantidos I: a partir do instante inicial, $t_i = t_0 = 0$, ocorrem os intervalos de tempo transiente (anterior ao estabelecimento do atrator) e pós-transiente (a partir do estabelecimento do atrator). A distinção entre eles é feita pela observação da aparência da distribuição espacial, dependente do tempo, dos pontos de fase envolvidos. Eventos durante o transiente são indesejados pois “contaminam” as estatísticas com informações espúrias que impedem a revelação das informações pretendidas. Seria ideal considerar somente o pós-transiente pela exclusão do transiente. Entretanto, ainda que a observação da aparência quanto aos atratores em S_a seja plenamente possível, o mesmo não é verdade quanto aos atratores em S_b . Os dois intervalos associados a cada um dos primeiros foram determinados, o mesmo não ocorreu quanto a cada um dos últimos. Decidi então manter os transientes para evitar que algumas das estatísticas envolvessem seus efeitos e outras não. Surgiu assim o problema de estabelecer critérios para assegurar o domínio dos eventos ao longo do pós-transiente de modo a evitar a contaminação. Tomei como indicativo quantitativo de contaminação o valor da razão $H \equiv \Delta_{att}/\Delta_{tra}$, onde $\Delta_{att} \equiv t_{obs} - t_{sat}$ (duração do pós-transiente), $\Delta_{tra} \equiv t_{sat} - t_0$ (duração do transiente), e t_{sat} é um instante que marca o fim do transiente e o início do pós-transiente. Contaminação desconsiderável é indicada por $H \gg 1$, contaminação inaceitavelmente elevada é indicada por $H < 1$. Os valores de H vindos dos atratores em S_a situam-se no intervalo $499 < H \leq 1.499$ com exceção de um único, aquele associado ao sistema seno seno descrito na seção 2.3, para o qual $H \simeq 18$, bem menor que os demais, ainda sim elevado o suficiente para assegurar contaminação desconsiderável como ocorre com cada um dos outros ². Com relação aos atratores em S_b ainda que a ausência de qualquer t_{sat} não permita o cálculo de H a análise de fatos pertinentes na seção 2.4 esclarece quão plausível é admitir que o domínio dos eventos no pós-transiente ocorreu.

Histogramas, intervalos e classes: três histogramas de frequências absolutas, relativos a números e tempos de ocupações e a tempos de desocupações, são atribuídos a cada hipercubo com base nas contagens pertinentes geradas durante a observação. Os valores de cada um dos tempos ou do número são organizados segundo sessenta e três classes que abrangem o intervalo $1 \leq x < 10^7$. São sete intervalos, cada um constituído por nove classes. As extensões dos intervalos crescem exponencialmente com as posições dos mesmos,

² Mantenho comigo arquivos de vídeo (animações) que mostram as evoluções temporais dos pontos de fase dos sistemas com atratores estranhos em espaços bidimensionais. O capítulo 3 encerra discussão pertinente sobre como foram determinados t_{sat} e H em cada caso.

o i -ésimo intervalo é dado por:

$$10^{i-1} \leq x < 10^i, \quad i = 1, \dots, 7$$

Por sua vez a j -ésima classe nele contido é dada por:

$$j \cdot 10^{i-1} \leq x < (j+1) \cdot 10^{i-1}, \quad j = 1, \dots, 9$$

Cada uma das sessenta e três classes é especificada pelo seu centro, a média aritmética entre seus extremos:

$$c_{ij} = \frac{(2j+1) \cdot 10^{i-1}}{2}, \quad i = 1, \dots, 7 \text{ e } j = 1, \dots, 9$$

O quadro 1 traz síntese útil para esclarecimento sobre a relação entre os valores dos centros e os intervalos e classes associados.

Quadro 1 – Oito classes especificadas pelos seus centros.

Interv.	1ª clas.	9ª clas.	Mult.*
1	$c_{1,1} = 1,5$	$c_{1,9} = 9,5$	10^0
2	$c_{2,1} = 1,5$	$c_{2,9} = 9,5$	10^1
6	$c_{6,1} = 1,5$	$c_{6,9} = 9,5$	10^5
7	$c_{7,1} = 1,5$	$c_{7,9} = 9,5$	10^6

*Cada um dos valores em dada linha deve ser multiplicado por esta potência.

Ao final de cada realização os histogramas relativos a números de ocupações ligados a cada hipercubo são adicionados entre si: há uma única classe c_{ij} , com i e j fixos, associada a cada hipercubo. A frequência absoluta ligada a ela, proveniente do k -ésimo hipercubo, ao final da l -ésima realização, é N_{ij}^{lk} . A frequência absoluta em uma nova classe c'_{ij} vinculada especificamente à l -ésima realização é $N_{ij}^l = \sum_k^{n_{hp}} N_{ij}^{lk}$, onde n_{hp} é o número de hipercubos. O conjunto de frequências N_{ij}^l , obtido pela consideração de todos os valores de i e j , forma o l -ésimo histogramas específico de números de ocupações. Histogramas específicos dos tempos de ocupações e de desocupações também são criados. Desta forma a cada realização correspondem três histogramas específicos.

Distribuições de probabilidade: os diversos histogramas específicos de números de ocupações são adicionados entre si de modo a formar o histograma geral de números de ocupações. Histogramas gerais dos tempos de ocupações e de desocupações também são gerados. Enfim, a frequência absoluta em cada classe de histograma geral, N_{ij} , é substituída por n_{ij} :

$$n_{ij} \equiv \frac{N_{ij}}{L_i} \quad (2.3)$$

onde L_i é a largura da classe envolvida, $N_{ij} = \sum_{l=1}^{N_{rel}} \sum_{k=1}^{n_{hp}} N_{ij}^{lk}$, N_{rel} é o número de realizações. Desta forma cada n_{ij} consiste em uma densidade (quantidade de eventos por unidade de largura da classe). Todos os histogramas sobre números e tempos de ocupações, além de alguns sobre os tempos de desocupações, assim criados tornam-se as densidades de probabilidade representadas de forma geral por $\varrho(z) \propto z^{-\gamma}$, conforme tópicos “Tempos e números de ocupações ” e “Tempos de desocupações ” na seção 2.1 deste capítulo ³. Cada conjunto de valores de n_{ij} ligados a Q ou τ_o , para todos os valores possíveis de i e j , determina as densidades de probabilidade dadas pelas relações 2.1 com respeito a todos os atratores envolvidos e 2.2 somente quanto a sete deles. Enfim as duas densidades associadas à ocupações são devidamente normalizadas de modo a se tornarem:

$$\varrho_{noc}(Q) = A_q Q^{-\gamma_{noc}} \quad \varrho_{toc}(\tau_o) = A_o \tau_o^{-\gamma_{toc}} \quad (2.4)$$

onde A_q e A_o são as constantes de normalização . O apêndice A mostra como calcular a constante de normalização, A , ligada à distribuição de probabilidade $\varrho(z) = Az^{-\gamma}$, onde $z > 0$ e $\gamma > 0$. As densidades relativas a tempos de desocupações não foram normalizadas pois não serão consideradas em escopo que exija suas propriedades probabilísticas.

Todas as informações sobre as três distribuições de probabilidades $\varrho_{noc}(Q) \times Q$, $\varrho_{toc}(\tau_o) \times \tau_o$, e $\varrho_{tdc}(\tau_d) \times \tau_d$, provenientes das simulações relativas aos 10 sistemas dinâmicos abordados, dadas ou não por leis de potência, foram extraídas de curvas com as formas $\log_{10}[\varrho_{noc}(Q)] \times \log_{10}[Q]$, $\log_{10}[\varrho_{toc}(\tau_o)] \times \log_{10}[\tau_o]$, e $\log_{10}[\varrho_{tdc}(\tau_d)] \times \log_{10}[\tau_d]$. Todas as curvas são apresentadas em figuras adequadas no capítulo 4 ⁴. As descrições que acompanham cada figura encerram informações quantitativas devidamente organizadas e exibidas no quadro 2. Os valores de γ_{noc} , γ_{toc} , e γ_{tdc} , foram gerados com emprego do método dos mínimos quadrados. A ordem em que foram apresentados os sistemas é a que exhibe os valores crescentes de γ_{noc} . Esta por sua vez corresponde à ordem crescente de γ_{toc} e é também aquela em que são descritos os sistemas dinâmicos na seção 2.3. Quanto a γ_{tdc} , ordem, crescente ou decrescente, não é observada.

Nos dois tópicos seguintes: $z = Q$, $\varrho = \varrho_{noc}$, $A = A_q$ e $\gamma = \gamma_{noc}$ ou $z = \tau_o$, $\varrho = \varrho_{toc}$, $A = A_o$ e $\gamma = \gamma_{toc}$, quando distribuições de números, ou de tempos, de ocupações são respectivamente considerados.

Qualidades dos ajustes: em cada caso um indicador quantitativo da qualidade do ajuste linear, o último suportado pela relação $\log_{10}(\varrho(z)) = \log_{10}(A) - \gamma \log_{10}(z)$ é o valor do quadrado do coeficiente de correlação, r^2 . Indicação qualitativa da mesma qualidade é baseada na inspeção do posicionamento da reta gerada pelo método relativamente aos pontos aos quais foi ajustada. Os indicadores qualitativos e quantitativos são empregados para a análise de cada um dos ajustes realizados. Os primeiros são avaliados a partir das figuras no capítulo 4, os outros a partir dos valores no quadro 2.

Extensões dos ajustes: a extensão, em décadas, do intervalo de valores de z em que se

³ O apêndice 13 consiste em código fonte (fortran 90) escrito por mim e empregado para gerar algumas das distribuições de probabilidades apresentadas neste artigo. Cada uma das distribuições neste trabalho foi gerada com a utilização de alguma versão dele.

⁴ A cada um dos 10 sistemas estão associadas 3 curvas, cada figura encerra uma curva de modo que a quantidade de figuras é 30.

dá o ajuste em cada caso é dada por $(\Delta z)_{dde} \equiv \log_{10}(z_{fs}) - \log_{10}(z_{ii})$, onde z_{ii} é o extremo inferior da classe com valor central z_i (centro da caixa em que tem início o ajuste), e z_{fs} é o extremo superior da classe com valor central z_f (centro da caixa em que termina o ajuste).

Os valores de r^2 , γ ($= \gamma_{noc}$ ou $= \gamma_{toc}$ ou $= \gamma_{tdc}$), z_{ii} ($= Q_{ii}$ ou $= \tau_{o,ii}$ ou $= \tau_{d,ii}$), z_{fs} ($= Q_{fs}$ ou $= \tau_{o,fs}$ ou $= \tau_{d,fs}$) e $(\Delta z)_{dde}$ ($= (\Delta Q)_{dde}$ ou $= (\Delta \tau_o)_{dde}$ ou $= (\Delta \tau_d)_{dde}$), relativos às distribuições dadas por leis de potência, são apresentados no quadro 2.

As distribuições de tempos de desocupações associadas aos atratores Cir, Sni e Log não são dadas por leis de potência conforme indicam as curvas correspondentes no capítulo 4.

2.3 Os Sistemas Dinâmicos.

Todos os sistemas dinâmicos abordados são caóticos, exibem sensibilidade exponencial às condições iniciais, e têm a seguinte forma geral:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n) \quad (2.5)$$

Onde a dimensão comum a $\mathbf{x}_{n+1}$ e $\mathbf{x}_n$ é 1, 2, ou 3. O valor absoluto do determinante do Jacobiano, $J(\mathbf{x})$, é importante:

$$J(\mathbf{x}) \equiv |\det[\partial \mathbf{M}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}]| < 1 \quad (2.6)$$

exprime contração do volume no espaço de fase discreto envolvido [69]. A contração, em todo o espaço de fase ou em alguma parte dele, ocorre quanto a cada um dos sistemas. Trata-se de característica imprescindível à ocorrência do atrator estranho pertinente.

Não há critério subjacente à escolha dos mapas utilizados. Considerei aqueles em livros, artigos, ou páginas na internet ao meu alcance. Em momento algum procurei por mapas que estivessem, ou parecessem estar, relacionados entre si.

As equações às diferenças e os correspondentes valores das constantes que caracterizam cada um dos dez mapas são apresentados a seguir.

1 - Mapa de Duffing (Dfm). O mapa de Duffing é também conhecido como mapa de Holmes [70].

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = -bx_n + ay_n - y_n^3 \end{cases} \quad (2.7)$$

Onde: $a = 2,77$ and $b = 0,1$.

2 - Mapa de Hénon (Hen) [71].

$$\begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (2.8)$$

Quadro 2 – Valores dos extremos dos intervalos nos quais os ajustes são feitos, das larguras em décadas dos mesmos, do indicador de qualidade do ajuste linear e valores absolutos dos expoentes relativos a cada uma das distribuições dadas por leis de potência.

	Atrator	γ	Valor	r^2	z_{ii}	z_{fs}	$(\Delta z)_{dde}$
1	Dfm	γ_{tdc}	2,59(3)	0,9980	1,0	100	2,00
		γ_{toc}	1,92(1)	0,9988	1,0	10.000	4,00
		γ_{noc}	1,71(1)	0,9978	1,0	80.000	4,90
2	Hen	γ_{tdc}	2,78(2)	0,9984	1,0	800	2,90
		γ_{toc}	1,92(1)	0,9992	1,0	10.000	4,00
		γ_{noc}	1,75(1)	0,9982	1,0	100.000	5,00
3	Ike	γ_{tdc}	2,50(4)	0,9958	1,0	200	2,22
		γ_{toc}	2,026(9)	0,9994	1,0	5.000	3,70
		γ_{noc}	1,799(6)	0,9994	1,0	90.000	4,95
4	Loz	γ_{tdc}	2,53(2)	0,9975	1,0	6.000	3,78
		γ_{toc}	2,049(9)	0,9994	1,0	10.000	4,00
		γ_{noc}	1,829(9)	0,9990	1,0	90.000	4,95
5	Tin	γ_{tdc}	2,36(1)	0,9996	1,0	4.000	3,60
		γ_{toc}	2,06(1)	0,9992	1,0	10.000	4,00
		γ_{noc}	1,840(6)	0,9996	1,0	70.000	4,85
6	Sin	γ_{tdc}	2,73(3)	0,9968	1,0	6.000	3,78
		γ_{toc}	2,280(9)	0,9994	1,0	10.000	4,00
		γ_{noc}	2,02(1)	0,9984	1,0	100.000	5,00
7	Ugy	γ_{tdc}	2,60(2)	0,9972	1,0	10.000	4,00
		γ_{toc}	2,28(2)	0,9968	1,0	10.000	4,00
		γ_{noc}	2,03(1)	0,9986	1,0	100.000	5,00
8	Cir	γ_{tdc}	—	—	—	—	—
		γ_{toc}	2,49(3)	0,9954	1,0	10.000	4,00
		γ_{noc}	2,19(2)	0,9976	1,0	100.000	5,00
9	Sni	γ_{tdc}	—	—	—	—	—
		γ_{toc}	2,51(1)	0,9990	1,0	20.000	4,30
		γ_{noc}	2,21(1)	0,9986	1,0	200.000	5,30
10	Log	γ_{tdc}	—	—	—	—	—
		γ_{toc}	2,76(3)	0,9951	2,0	7.000	3,54
		γ_{noc}	2,45(2)	0,9974	2,0	50.0000	4,40

Onde: $a = 1, 4$ e $b = 0, 3$.

3 - Mapa de Ikeda (Ike).

$$\begin{cases} x_{n+1} = \gamma + \mu(x_n \cos(\phi_n) - y_n \sin(\phi_n)) \\ y_{n+1} = \mu(x_n \sin(\phi_n) + y_n \cos(\phi_n)) \\ \phi_n = \beta - a/(1 + x_n^2 + y_n^2) \end{cases} \quad (2.9)$$

Onde: $a = 6$, $\beta = 0, 4$, $\gamma = 1$ and $\mu = 0, 9$. O espaço de fases tridimensional é caracterizado pelas coordenadas (x, y, ϕ) . Para cada valor de ϕ o atrator se encontra imerso em um plano paralelo aquele formado pelo eixos x e y . Outra forma deste mapa foi utilizada no trabalho seminal que descrevia o comportamento da luz capturada por um ressonador óptico não linear, uma Cavity Anelar (Cavity Ring) com dielétrico não linear [72]. Posteriormente Ikeda, Daido e Akimoto [73] propuseram a forma em 2.9.

4 - Mapa de Lozi (Tin) [74].

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - 1,7|x_n| + 0,5y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (2.10)$$

5 - Mapa Tinkerbell (Tin) [75].

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + ax_n + by_n \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + cx_n + dy_n \end{cases} \quad (2.11)$$

Onde: $a = 0, 9$, $b = -0, 6$, $c = 2$ e $d = 0, 5$.

6 - Mapa Seno Seno (Sin) [76].

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sin(x_n) - \sin(2y_n) \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

7 - Mapa Ugly (Ugy) [77].

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{|y_n - x_n|} \\ y_{n+1} = rx_n^2 \end{cases} \quad (2.12)$$

Onde: $r = 1, 45$.

8 - Mapa Circular (Cir). O mapa circular aplica a circunferência nela própria [78]

$$\theta_{n+1} = \theta_n + (K/2\pi)\sin(2\pi\theta_n) + \Omega \quad (2.13)$$

Onde: $0 \leq \theta \leq 1$, $K = 1, 95$ e $\Omega = 0, 33$.

9 - Mapa de Sinai (Sni) [79].

$$\begin{cases} x_{n+1} = (x_n + y_n + \Delta \cos(2\pi y_n)) \text{ modulo } 1 \\ y_{n+1} = (x_n + 2y_n) \text{ modulo } 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Onde: $\Delta = 0, 1$.

10 - Logistic Map (Log).

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (2.15)$$

Onde: $0 \leq x \leq 1$ e $r = 4$. O mapa Logístico pode descrever o crescimento de populações diversas pertinentes à Biologia, à Economia e às Ciências Sociais [80].

Conjuntos: pode-se agora determinar quais são os elementos de cada um dos conjuntos definidos no início da seção 2.2

- $S_a = \{Dfm, Hen, Ike, Loz, Tin, Sen, Ugy, Sni\}$
- $S_b = \{Cir, Log\}$.

O emprego deles favorecerá análise dos resultados na seção 2.4.

2.4 Análise e Aplicações dos Resultados.

2.4.1 Análise dos Resultados.

Tempos e números de ocupações: a qualidade do ajuste linear e a extensão em décadas da região em que se dá o ajuste são parâmetros que suportarão toda a análise, de acordo com os tópicos “Qualidade dos ajustes” e “Extensões dos Ajustes” na seção 2.2, os valores no quadro 2 e o conteúdo do apêndice B. Este último trata da relação entre leis de potência, relações de escala e invariância de escala e sua ligação com a extensão do ajuste.

Resultados ligados a S_a e S_b serão considerados nesta ordem. Subconjuntos de S_a serão designados com auxílio de índices adicionais: $S_{a,1}$, $S_{a,2}$, $\dots$.

A - Conjunto $S_a = \{Dfm, Hen, Ike, Loz, Tin, Sen, Ugy, Sni\}$.

As qualidades dos ajustes, sob os pontos de vista quantitativo e qualitativo, esclarecem que de fato as leis de potência com as formas 2.1 exprimem de maneira confiável qual é a relação entre $\varrho_{noc}(Q)$ e Q ou $\varrho_{toc}(\tau_o)$ e τ_o em cada caso. Por inspeções visuais das curvas $\log_{10}[\varrho_{toc}(\tau_o)] \times \log_{10}(\tau_o)$ e $\log_{10}[\varrho_{noc}(Q)] \times \log_{10}(Q)$ mostradas no capítulo 4, seções 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 e 4.9, verifica-se a correção dos ajustes. Os correspondentes valores de r^2 no quadro 2, considerados a seguir, reforçam este fato.

a1 - Tempos de ocupações:

- seis valores $S_{a,1} = \{Hen, Ike, Loz, Tin, Sen, Sni\}$ superiores a 0,999
- dois valores $S_{a,2} = \{Dfm, Ugy\}$ pouco menores que 0,999.

a2 - Números de ocupações:

- dois valores $S_{a,3} = \{Ike, Tin\}$ superiores a 0,999
- um valor $S_{a,4} = \{Loz\}$ igual a 0,999
- cinco valores $S_{a,5} = \{Dfm, Hen, Sni, Ugy, \}$ pouco menores que 0,999.

As extensões em décadas associadas a cada uma das densidades são sempre maiores que três. Os valores correspondentes de $(\Delta\tau_o)_{dde}$ e $(\Delta Q)_{dde}$ no quadro 2 reforçam este fato e são considerados a seguir.

a3 - Tempos de ocupações, extensões $(\Delta\tau_o)_{dde}$:

- duas extensões $S_{a,3} = \{Ike, Tin\}$ pouco menores que 4
- cinco extensões $S_{a,4} = \{Dfm, Hen, Loz, Sen, Ugy\}$ iguais a 4
- uma extensão $S_{a,5} = \{9\}$ igual a 4,30.

a4 - Números de ocupações, extensões $(\Delta Q)_{dde}$:

- quatro extensões $S_{a,6} = \{Dfm, Ike, Loz, Tin\}$ pouco menores que 5
- três extensões $S_{a,7} = \{Hen, Sen, Ugy\}$ iguais a 5
- uma extensão $S_{a,8} = \{Sni\}$ igual a 5,30.

Desta forma ocorre liberdade de escala quanto a τ_o e Q , fato que caracteriza a robustez das invariâncias de escalas provenientes das leis de potência dadas por 2.1, conforme o apêndice B.

As extensões e qualidades de ajustes consideradas provêm sólido suporte à atribuição de bem definidas leis de potência a cada uma das duas densidades de probabilidades, $\varrho_{noc}(Q)$ e $\varrho_{toc}(\tau_o)$, ligadas a cada um dos oito atratores estranhos pertinentes ao grupo.

B - Conjunto $S_b = \{Cir, Log\}$.

Inspeções visuais das curvas nas seções 4.8 e 4.10 do capítulo 4 e os correspondentes valores tabelados mostram que todos os valores de r^2 são superiores a $r^2 = 0,9950$ e todas as extensões, $(\Delta z)_{dde}$, são superiores a $(\Delta z)_{dde} = 3,50$.

b1 - Tempos de ocupações:

- Cir: $r^2 = 0,9954$ e $(\Delta\tau_o)_{dde} = 4,00$
- Log: $r^2 = 0,9951$ e $(\Delta\tau_o)_{dde} = 3,54$.

b2 - Numeros de ocupações:

- Cir: $r^2 = 0,9976$ e $(\Delta Q)_{dde} = 5,00$
- Log: $r^2 = 0,9974$ e $(\Delta Q)_{dde} = 4,40$.

Portanto, uma vez mais, as qualidades dos ajustes e as extensões em que os mesmos se dão provêm suporte a atribuição de leis de potência às densidades $\varrho_{noc}(Q)$ e $\varrho_{toc}(\tau_o)$ dos atratores estranhos no grupo.

Transientes Mantidos II: neste ponto retomo o comentário ao final do tópico “Transientes mantidos”, na seção 2.2. Da emergência das densidades $\varrho_{noc}(Q)$ e $\varrho_{toc}(\tau_o)$ dadas por 2.1 a partir dos movimentos de pontos de fase vinculados tanto a S_a quanto a S_b torna-se plausível admitir que a origem das densidades relativas a S_b seja a mesma subjacente as densidades vindas de S_a : movimentos de grandes quantidades de pontos de fase capturados pelos atratores estranhos associados. Decorre então a conclusão de que a contaminação por eventos durante o transiente é desprezível com relação aos resultados provenientes dos sistemas em S_b : de outra forma as densidades $\varrho_{noc}(Q)$ e $\varrho_{toc}(\tau_o)$ dos sistemas neste grupo não seriam dadas por leis de potência tão bem suportadas pelos resultados numéricos como são as densidades equivalentes provenientes do grupo S_a cujos resultados exibem contaminações desprezíveis.

Tempos de desocupações: cada uma das curvas $\log_{10}[\varrho_{tdc}(\tau_d)] \times \log_{10}[\tau_d]$ nas seções 1 a 10 do capítulo 4 corresponde respectivamente ao atrator estranho designado pelo mesmo número no quadro 2. Com base na avaliação delas verifica-se o seguinte: - sete curvas, desde a 1 até a 7, têm densidades dadas por leis de potência ao longo de intervalos ininterruptos de valores de τ_d , embora três entre estas, curvas 1, 2 e 3, envolvam $(\Delta\tau_d)_{dde} < 3$ - outras duas, curvas 8 e 9, têm densidades dadas por leis de potência ao longo de dois intervalos distintos de valores de τ_d em cada caso, cada intervalo com $(\Delta\tau_d)_{dde} < 1$ - a curva 10 pode envolver um intervalo muito curto, $0,5 \leq \tau_d \leq 1$, associável a lei de potência, figura 1.30 do capítulo 4. Não tentei o ajuste, mesmo que seja adequado sob os pontos de vista quantitativo e qualitativo a muito curta extensão não permitiria sua consideração. Desta forma somente quatro entre as dez curvas seriam consideráveis segundo os critérios adotados aqui curvas correspondentes aos atratores 4, 5, 6 e 7, ou Loz, Tin, Sin, Ugy. Portanto os dez atratores estranhos considerados não têm como característica comum distribuições de tempos de desocupações dadas por leis de potência. Tais distribuições consistem em propriedades de alguns deles em particular. O conteúdo da seção 2.5.4 consiste em explicação plausível para este fato com base em distribuições espaciais dos pontos de fase.

Aplicações: uma vez estabelecidas as validades das equações 2.1 e os correspondentes valores das constantes de normalização de maneira a validar também as equações 2.4, pode-se salientar aplicações reveladoras de propriedades importantes de atratores estranhos inacessíveis por outra abordagem que não inclua as densidades $\varrho_{noc}(Q)$ e $\varrho_{toc}(\tau_o)$. A partir da densidade arbitrária $\varrho(z)$ pode-se determinar os momentos de ordem n , ($n = 1, 2, \dots$), μ_n :

$$\mu_n = E[z^n] = \int_{z_i}^{z_f} z^n \varrho(z) dz$$

Onde $\mu_1 \equiv \bar{z}$ é a média empregada para o cálculo da variância, σ^2 :

$$\sigma^2 = E[(\bar{z} - z)^2] = \int_{z_i}^{z_f} (\bar{z} - z)^2 \varrho(z) dz$$

A partir da variância vem o desvio padrão, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. A média $\bar{z}$, o desvio σ , e todos os momentos de ordem superior μ_n , ($n > 1$) consistem em propriedades estatísticas que caracterizam os números e tempos de ocupações dos dez atratores estranhos provenientes dos sistemas correspondentes quando $\varrho(z) = \varrho_{noc}(Q)$, $z = Q$, ou $\varrho(z) = \varrho_{toc}(\tau_o)$, $z = \tau_o$. Estas propriedades estatísticas são inacessíveis por meio das mencionadas abordagens clássicas.

O restante desta seção é dedicado a duas outras aplicações: - (intervalos efetivos) a primeira relativa à extensão do intervalo a que pertencem os valores mais prováveis de Q ou de τ_o : a diferença $\Delta_{tot} \equiv z_f - z_i$, $z = Q$ ou $z = \tau_o$, representa a extensão quando todos os valores de z são considerados, a extensão associada exclusivamente aos valores mais prováveis é bem menor de acordo o valor absoluto do expoente da lei de potência - (medidas de multifractalidade) a segunda relativa à medida quantitativa da multifractalidade do atrator estranho envolvido: certa razão entre a mencionada extensão associada exclusivamente aos

valores mais prováveis de Q e a média correspondente é considerada. Baixos valores da razão indicam quase monofractalidade com diferentes gradações, por outro lado valores elevados indicam diferentes gradações de multifractalidades.

2.4.2 Valores mais Prováveis e Liberdade de Escala.

Os desenvolvimentos nesta seção tomam como base resultados apresentados no apêndice A, referências explícitas a equações neste último são empregadas. A definição $(\Delta_{tot})_{dec} \equiv \log_{10}(z_f) - \log_{10}(z_i)$ será importante deste ponto em diante.

2.4.2.1 Fundamentos.

Considero aqui certo intervalo de valores da variável aleatória z cuja distribuição de probabilidades é dada pela densidade $\varrho(z)$ expressa por 7.3:

$$I_\sigma(\gamma) \equiv [z_i, z_\sigma(\gamma)] \quad (2.16)$$

onde σ é o desvio padrão correspondente e:

$$z_\sigma(\gamma) \equiv \bar{z}(\gamma) + \sigma(\gamma) \quad (2.17)$$

Trata-se de um intervalo alternativo a $I \equiv [\bar{z}(\gamma) - \sigma(\gamma), \bar{z}(\gamma) + \sigma(\gamma)]$ inicialmente pretendido mas logo descartado dada a assimetria da distribuição que rapidamente leva a $\bar{z} - \sigma < z_i$ (absurdo) com o crescimento de γ , $0 < \gamma < 4$.

O intervalo completo, $I_{tot} \equiv [z_i, z_f]$, consiste da união entre I_σ e $I_{\bar{\sigma}}$:

$$I_{tot} \equiv I_\sigma(\gamma) \cup I_{\bar{\sigma}}(\gamma) \quad (2.18)$$

onde $I_{\bar{\sigma}}(\gamma) \equiv [z_\sigma(\gamma), z_f]$. Fato bem conhecido é a maior probabilidade de ocorrência de algum valor em $I_\sigma(\gamma)$, $P_\sigma(\gamma)$, relativamente a alguma valor em $I_{\bar{\sigma}}(\gamma)$, $P_{\bar{\sigma}}(\gamma)$, uma vez que qualquer valor pertinente ao primeiro está a menor distância de $\bar{z}$ que qualquer valor no segundo.

As probabilidades acumuladas $P_\sigma(\gamma)$ e $P_{\bar{\sigma}}(\gamma)$ podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} P_\sigma(\gamma) &\equiv P(z_i \leq z \leq z_\sigma) = \int_{z_i}^{z_\sigma} \varrho(z) dz \\ P_{\bar{\sigma}}(\gamma) &\equiv P(z_\sigma \leq z \leq z_f) = \int_{z_\sigma}^{z_f} \varrho(z) dz \end{aligned} \quad (2.19)$$

É claro que:

$$P_\sigma(\gamma) + P_{\bar{\sigma}}(\gamma) = 1 \quad (2.20)$$

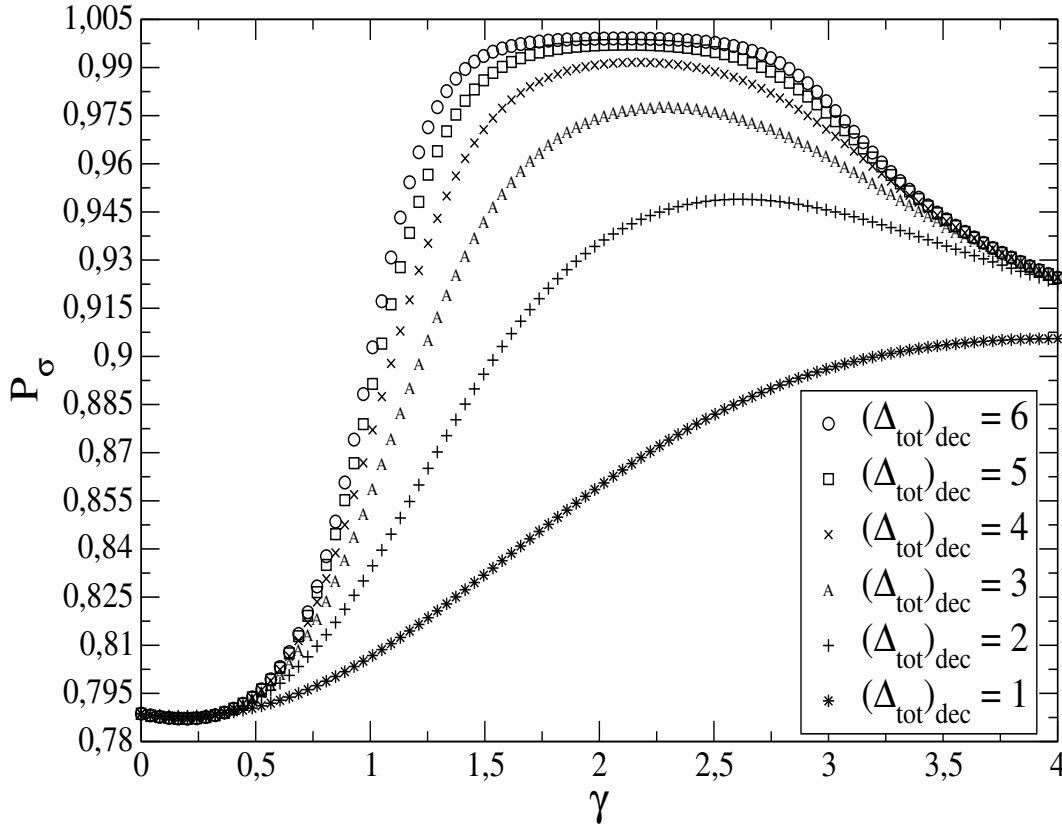


Figura 2 – $P_\sigma(\gamma) \times \gamma$ para os distintos valores de $(\Delta_{tot})_{dec}$ de acordo com o quadro 3.

Características gerais da probabilidade acumulada: as simulações numéricas baseadas nas classes definidas na seção 2.2 indicam que o comportamento de $P_\sigma(\gamma) \times \gamma$ depende dos valores de $(\Delta_{tot})_{dec}$ e não dos valores individuais de z_i e z_f . As curvas na figura 2.1, provenientes de simulações, esclarecem qual é a dependência que $P_\sigma(\gamma) \times \gamma$ exibe com $(\Delta_{tot})_{dec}$. A diferentes pares (z_i, z_f) correspondem o mesmo valor de $(\Delta_{tot})_{dec}$ conforme o quadro 3. Característica comum a este conjunto de curvas consiste em $P_\sigma(\gamma) \geq 0,92$ para $1,05 \leq \gamma \leq 1,76$ sob $2 < (\Delta_{tot})_{dec} < 6$. Em particular as curvas associadas a $3 \leq (\Delta_{tot})_{dec} \leq 6$ exibem patamares, ou quase patamares, cujas extensões crescem com $(\Delta_{tot})_{dec}$ para os quais $P_\sigma(\gamma) \geq 0,95$, correspondentes a intervalos em torno de $\gamma = 2$ com extensões entre uma e duas unidades.

2.4.2.2 Intervalos Efetivos e Efetiva Liberdade de Escala.

As extensões de $I_\sigma(\gamma)$, $\Delta_\sigma(\gamma)$, e de $I_{\bar{\sigma}}(\gamma)$, $\Delta_{\bar{\sigma}}(\gamma)$ são as seguintes:

$$\Delta_\sigma(\gamma) \equiv z_\sigma(\gamma) - z_i \quad (2.21)$$

$$\Delta_{\bar{\sigma}}(\gamma) \equiv z_f - z_\sigma(\gamma) \quad (2.22)$$

É claro que:

$$\Delta_\sigma(\gamma) + \Delta_{\bar{\sigma}}(\gamma) = \Delta_{tot} \quad (2.23)$$

A efetiva liberdade de escala é quantificada pelo valor de $\Delta_\sigma(\gamma)$ conforme exposição desenvolvida a partir deste ponto. A razão $f_\sigma(\gamma) \equiv \Delta_\sigma(\gamma)/\Delta_{tot}$, designada por “Razão Efetiva”, representa a fração da extensão de I_{tot} correspondente aos valores mais prováveis.

Características gerais da razão efetiva: as curvas na figura 2.2 mostram o comportamento de $\log_{10}(f_\sigma(\gamma)) \times \gamma$ para os mesmos valores de $(\Delta_{tot})_{dec}$ na figura 2.1. Ocorre

Quadro 3 – Relações entre os valores dos centros das classes correspondentes aos extremos dos intervalos Δ_{tot} e os comprimentos em décadas, $(\Delta_{tot})_{dec}$, dos mesmos.

z_i	z_f	$(\Delta_{tot})_{dec}$
1.5×10^0	1.5×10^6	$(\Delta_{tot})_{dec} = 6$
1.5×10^1	1.5×10^6	$(\Delta_{tot})_{dec} = 5$
1.5×10^0	1.5×10^5	$(\Delta_{tot})_{dec} = 5$
1.5×10^2	1.5×10^6	$(\Delta_{tot})_{dec} = 4$
1.5×10^1	1.5×10^5	$(\Delta_{tot})_{dec} = 4$
1.5×10^0	1.5×10^4	$(\Delta_{tot})_{dec} = 4$
1.5×10^3	1.5×10^6	$(\Delta_{tot})_{dec} = 3$
1.5×10^2	1.5×10^5	$(\Delta_{tot})_{dec} = 3$
1.5×10^1	1.5×10^4	$(\Delta_{tot})_{dec} = 3$
1.5×10^0	1.5×10^3	$(\Delta_{tot})_{dec} = 3$
1.5×10^4	1.5×10^6	$(\Delta_{tot})_{dec} = 2$
1.5×10^3	1.5×10^5	$(\Delta_{tot})_{dec} = 2$
1.5×10^2	1.5×10^4	$(\Delta_{tot})_{dec} = 2$
1.5×10^1	1.5×10^3	$(\Delta_{tot})_{dec} = 2$
1.5×10^0	1.5×10^2	$(\Delta_{tot})_{dec} = 2$
1.5×10^5	1.5×10^6	$(\Delta_{tot})_{dec} = 1$
1.5×10^4	1.5×10^5	$(\Delta_{tot})_{dec} = 1$
1.5×10^3	1.5×10^4	$(\Delta_{tot})_{dec} = 1$
1.5×10^2	1.5×10^3	$(\Delta_{tot})_{dec} = 1$
1.5×10^1	1.5×10^2	$(\Delta_{tot})_{dec} = 1$

ligeira queda de $f_\sigma(\gamma)$ quando $0 < \gamma < 1$ com ligeira dependência de $(\Delta_{tot})_{dec}$, seguida por queda claramente mais rápida para $1 < \gamma < 3$ com clara dependência de $(\Delta_{tot})_{dec}$. Em particular, curvas correspondentes a $3 < (\Delta_{tot})_{dec} < 6$ apresentam os decaimentos mais pronunciados entre os presentes. A partir de $\gamma > 3$ a taxa de crescimento, dependente de $(\Delta_{tot})_{dec}$, assume valores intermediários entre aqueles ligados a $0 < \gamma < 1$ e $1 < \gamma < 3$.

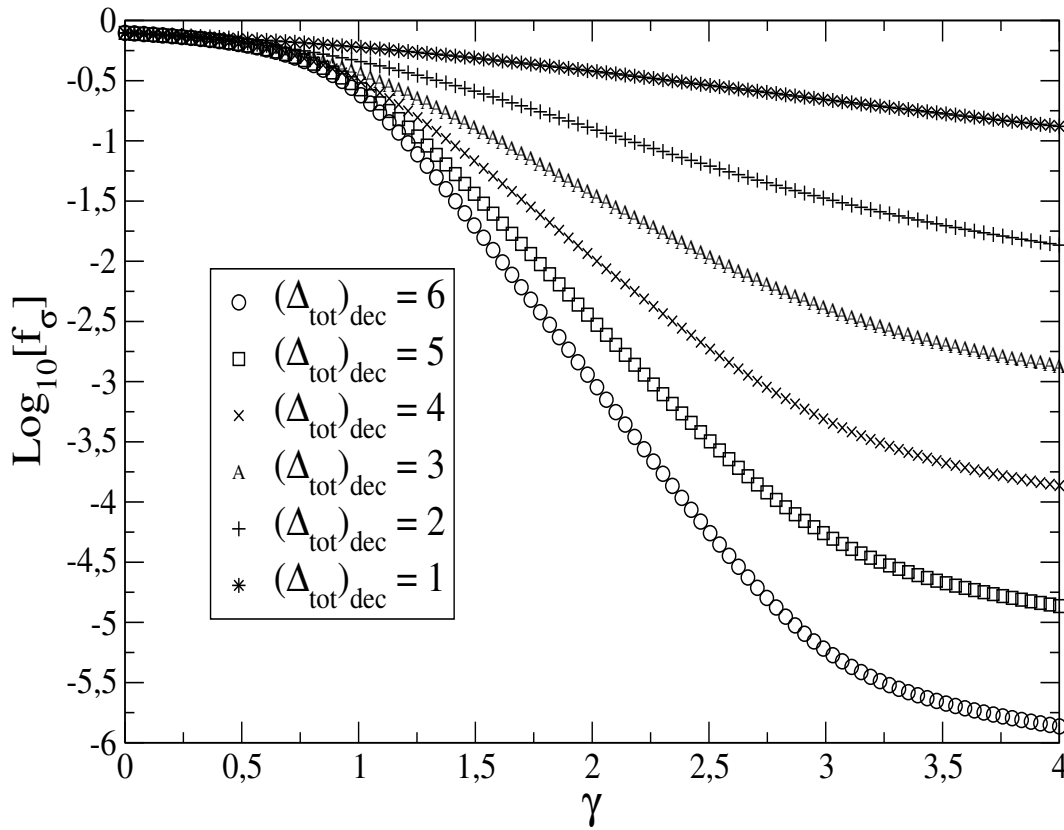


Figura 3 – $\log_{10}(\Delta_{\sigma}(\gamma)/\Delta_{tot}) \times \gamma$ para os valores de $(\Delta_{tot})_{dec}$ empregados na figura 1.

Quadro 4 – Valores de $f_{\sigma}(\gamma)\%$, em ordem decrescente, associados às distribuições dos tempos de ocupações vinculadas aos dez atratores abordados ($\gamma = \gamma_{toc}$, $\sigma = \sigma_t$).

	Atrator	γ	$\Delta_{\sigma}(\gamma)$	Δ_{tot}	$f_{\sigma}(\gamma)\%$
03	Ike	2,026	84,79	$4,499 \times 10^3$	1,885%
01	Dfm	1,92	171,4	$9,499 \times 10^3$	1,805%
02	Hen	1,92	171,4	$9,499 \times 10^3$	1,805%
04	Loz	2,049	110,2	$9,499 \times 10^3$	1,161%
05	Tin	2,06	106,2	$9,499 \times 10^3$	1,118%
06	Sin	2,280	51,03	$9,499 \times 10^3$	0,537%
07	Ugy	2,28	51,03	$9,499 \times 10^3$	0,537%
10	Log	2,76	18,23	$6,499 \times 10^3$	0,280%
08	Cir	2,49	26,33	$9,499 \times 10^3$	0,277%
09	Sni	2,51	29,23	$1,950 \times 10^4$	0,150%

Os quadros 4 e 5 se referem aos dez atratores abordados, o primeiro diz respeito a Quadro 5 – Valores de $f_\sigma(\gamma)\%$, em ordem decrescente, associados às distribuições dos números de ocupações vinculadas aos dez atratores abordados ($\gamma = \gamma_{noc}$, $\sigma = \sigma_n$).

	Atrator	γ	$\Delta_\sigma(\gamma)$	Δ_{tot}	$f_\sigma(\gamma)\%$
01	Dfm	1,71	1.272	$7,500 \times 10^4$	1,696%
02	Hen	1,75	1.228	$9,500 \times 10^4$	1,293%
03	Ike	1,799	920,0	$8,500 \times 10^4$	1,082%
04	Loz	1,829	803,4	$8,500 \times 10^4$	0,945%
10	Log	2,45	35,94	$4,498 \times 10^3$	0,799%
06	Sin	2,02	358,2	$9,500 \times 10^4$	0,377%
07	Ugy	2,03	342,3	$9,500 \times 10^4$	0,360%
08	Cir	2,19	166,6	$9,500 \times 10^4$	0,175%
09	Sni	2,21	200,6	$1,950 \times 10^5$	0,103%

tempos de ocupações e o outro aos números de ocupações. Verifica-se que as maiores frações envolvidas correspondem a pouco menos de 2%, em cada caso a probabilidade de ocorrência associada a mais de 98% da extensão de Δ_{tot} é inferior a 0,05. Em que pese a existência de liberdade de escala com relação as vinte distribuições consideradas, invariância caracterizada por extensões totais iguais ou superiores a três décadas conforme o apêndice B, os valores efetivamente assumidos por Q ou τ_o podem corresponder a intervalos com extensões inferiores. Na verdade quanto às vinte distribuições consideradas somente duas exibem valores de Q efetivamente excursionando por mais de três décadas, atratores Dfm e Hen no quadro 5: - (Dfm) $7,500 \times 10^4 \cdot 1,70\% = 1,275 \times 10^3$ - (Hen) $9,500 \times 10^4 \cdot 1,29\% = 1,226 \times 10^3$. Os demais valores de Q e todos os valores de τ_o excursionam efetivamente por intervalos mais curtos, alguns não tão curtos, atratores Ike, Loz e Tin no quadro 5: - (Ike) $8,500 \times 10^4 \cdot 1,08\% = 9,18 \times 10^2$ - (Loz) $8,500 \times 10^4 \cdot 0,95\% = 8,08 \times 10^2$ - (Tin) $6,500 \times 10^4 \cdot 1,01\% = 6,57 \times 10^2$. Outros bem mais, sistemas Cir, Sni e Log no quadro 4: - (Cir) $9,499 \times 10^3 \cdot 0,28\% = 2,66 \times 10^1$ - (Sni) $1,950 \times 10^4 \cdot 0,15\% = 2,93 \times 10^1$ - (Log) $6,499 \times 10^4 \cdot 0,28\% = 1,82 \times 10^2$. Desta forma para a verificação sobre a ocorrência, ou não, de liberdade de escala quanto às distribuições consideradas no artigo seria importante verificar a extensão Δ_σ e não Δ_{tot} . A primeira consistiria em medida da efetiva liberdade de escala. Neste ponto é conveniente distinguir o intervalo efetivo associado a números de ocupações, Δ_{σ_n} , do correspondente a tempos de ocupações, Δ_{σ_t} :

$$\Delta_{\sigma_n} \equiv Q_{\sigma_n} - Q_i \quad \Delta_{\sigma_t} \equiv \tau_{o,\sigma_t} - \tau_{o,i} \quad (2.24)$$

Onde Δ_{σ_n} é o “intervalo efetivo de números de ocupações”, Δ_{σ_t} é o “intervalo efetivo de tempos de ocupações”, σ_n é o desvio padrão associado a Q e σ_t é o desvio padrão associado a τ_o .

2.4.3 Valores mais Prováveis e Medida de Multifractalidade.

2.4.3.1 Fundamentos.

A exposição nesta seção é parcialmente baseada no tópico “Caracterizações clássicas” na seção 2.1. Segundo este último, um atrator estranho seria monofractal quando todas as medidas naturais μ_i associadas aos hipercubos que o cobrem fossem iguais entre si, situação em que todas as infinitas dimensões generalizadas D_q assumiriam o valor da dimensão de contagem de caixas D_0 . Não acredito que existam atratores estranhos rigorosamente monofractais, designados daqui em diante por (ARM). Acredito sim que hajam alguns dotados com multifractalidades tão pouco acentuadas que possam ser tomados como boas aproximações de monofractais, os designarei por (AAM). Considero os ARM e os AAM para fundamentar teoria simples que permitirá a quantificação da multifractalidade de qualquer atrator estranho com base em procedimento definido pelos seguintes passos: (I) apresento propriedades plausíveis, baseadas em hipótese inédita cuja consistência será afirmada durante o procedimento, que suportam descrição teórica simples e adequada dos supostos ARM (objetos com existência em escopo hipotético) (II) afirmo a consistência das propriedades, e portanto também da hipótese, pela observação de boas aproximações das mesmas ligadas a conhecido AAM (objeto com existência em escopo real) (III) estendo então o alcance das propriedades e da hipótese aos atratores estranhos abordados no artigo através de simples e confiável extrapolação.

Monofractalidade e números de ocupações (hipótese M): conforme o tópico “Caracterizações não orbitais” na seção 2.1 a abordagem sob advecção caótica não incorpora as medidas naturais e as dimensões generalizadas. Sob esta abordagem outras propriedades deverão ser tomadas como indicadoras da monofractalidade de algum ARM arbitrário. É plausível assumir que a monofractalidade se manifeste através da invariabilidade de Q (hipótese M): qualquer hipercubo ocupado encerraria quantidade acumulada de pontos $Q = Q_p$. Desta forma a densidade $\varrho_{noc}(Q)$ seria altamente concentrada em torno de Q_p , consistiria em uma função delta de Dirac. Cada ARM seria caracterizado por seu Q_p específico. Uma vez que trata-se de objeto estritamente hipotético é necessária alguma conexão com objetos de fato existente, um AAM, para que seja útil. Algum AAM, com densidade $\varrho_{ocn}(Q) \propto Q^{-\gamma_{noc}}$, suficientemente próximo do ARM caracterizado por Q_p contaria com a $Q_i \leq Q_p \leq Q_f$ de modo que $I_Q \equiv [Q_i, Q_f]$ fosse muito estreito. Onde Q_i e Q_f são os extremos inferior e superior associados ao intervalo em que vale $\varrho_{ocn}(Q) \propto Q^{-\gamma_{noc}}$. A muito curta extensão de I_Q ocorreria como consequência de valor suficientemente elevado de γ_{noc} . Um dos tópicos da próxima seção é dedicado ao esclarecimento de que, plausivelmente, um dos atratores abordados consiste em um AAM. A sua existência traz ao terreno dos fatos propriedades até então puramente hipotéticas.

2.4.3.2 Variabilidade Efetiva e Medidas de Multifractalidade.

A razão $M_\sigma \equiv \Delta_\sigma/\bar{z}$, designada por “Variabilidade Efetiva”, terá importância crucial nesta seção.

Características gerais da Variabilidade Efetiva: as curvas na figura 2.3 mostram os valores de $M_\sigma(\gamma)$ para diversos valores de $(\Delta_{tot})_{dec}$. São notáveis: - o máximo destacado em $\gamma = 2$ independentemente da extensão em décadas envolvida - o aspecto cada vez mais agudo de cada curva em correspondência à elevação de $(\Delta_{tot})_{dec}$ a partir de $(\Delta_{tot})_{dec} = 2$.

Variabiliades efetivas e atratores estranhos: as TABELAS VI e VII se referem aos dez atratores considerados, a primeira diz respeito aos tempos de ocupações e a outra aos números de ocupações. Quando a atenção é voltada a valores de $(\Delta_{tot})_{dec}$ próximos entre si, ou mesmo iguais, como os ligados aos atratores Dfm, Hen, Loz, Tin, Sen, Ugy e Cir em VI ou Dfm, Hen, Ike, Loz, Sen, Ugy e Cir em VII, de modo que os valores das razões $M_\sigma(\gamma)$ pertençam a uma curva específica em cada caso, ou estejam bem próximos a alguma, verificam-se os máximos das razões para os valores de γ mais próximos de 2 em cada caso e as reduções das razões à medida em que os valores de γ se distanciam, pela direita ou pela esquerda, de 2, de acordo com as curvas na figura 2.3. Quanto aos valores de $(\Delta_{tot})_{dec}$ discrepantes daquele comum, ou daqueles bem próximos entre si, os valores de $M_\sigma(\gamma)$ correspondentes são também discrepantes pois se referem a curvas distintas das curvas específicas em um e outro dos casos. Por isso observa-se em VI, por exemplo, valor de $M_\sigma(\gamma)$ inferior ao maior considerado ainda que associado ao valor de γ mais próximo a 2 entre todos, ocorre com o atrator Ike. Isto acontece pois a curva vinculada à $(\Delta_{tot})_{dec} = 3,52$ determina valores menores da razão. Ocorre em VII valor de $M_\sigma(\gamma)$ apenas ligeiramente menor que o maior apresentado associado a γ significativamente maior que 2, atrator Sni, pois a curva vinculada à $(\Delta_{tot})_{dec} = 5,11$ determina valores maiores da razão.

Quadro 6 – Valores de $M_\sigma(\gamma)$, em ordem decrescente, associados às distribuições dos tempos de ocupações vinculadas aos dez atratores abordados no artigo ($\gamma = \gamma_{toc}$, $\sigma = \sigma_t$).

	Atrator	$(\Delta_{tot})_{dec}$	γ	$\Delta_\sigma(\gamma)$	$\overline{\tau_o}$	$M_\sigma(\gamma)$
04	Loz	3,80	2,049	110,2	11,20	9,842
05	Tin	3,80	2,06	106,2	10,83	9,808
01	Dfm	3,80	1,92	171,4	17,503	9,793
02	Hen	3,80	1,92	171,4	17,503	9,793
06	Sin	3,80	2,280	51,03	6,266	8,144
07	Ugy	3,80	2,28	51,03	6,266	8,144
03	Ike	3,52	2,026	84,79	11,13	7,620
09	Sni	4,11	2,51	29,23	4,406	6,634
08	Cir	3,80	2,49	26,33	4,499	5,852
10	Log	3,41	2,76	18,23	5,775	3,155

Quadro 7 – Valores de $M_\sigma(\gamma)$, em ordem decrescente, ligados às distribuições dos números de ocupações vinculadas aos dez atratores abordados no artigo ($\gamma = \gamma_{noc}$, $\sigma = \sigma_n$).

	Atrator	$(\Delta_{tot})_{dec}$	γ	$\Delta_\sigma(\gamma)$	$\overline{Q}$	$M_\sigma(\gamma)$
09	Sni	5,11	2,21	200,6	7,914	25,35
06	Sin	4,80	2,02	358,2	15,18	23,60
07	Ugy	4,80	2,03	342,3	14,54	23,54
08	Cir	4,80	2,19	166,6	8,245	20,20
04	Loz	4,75	1,829	803,4	39,99	20,09
03	Ike	4,75	1,799	920,0	47,85	19,23
05	Tin	4,64	1,840	657,4	35,59	18,47
02	Hen	4,80	1,75	1.228	66,90	18,36
01	Dfm	4,70	1,71	1.272	81,02	15,70
10	Log	4,26	2,45	35,94	7,780	4,620

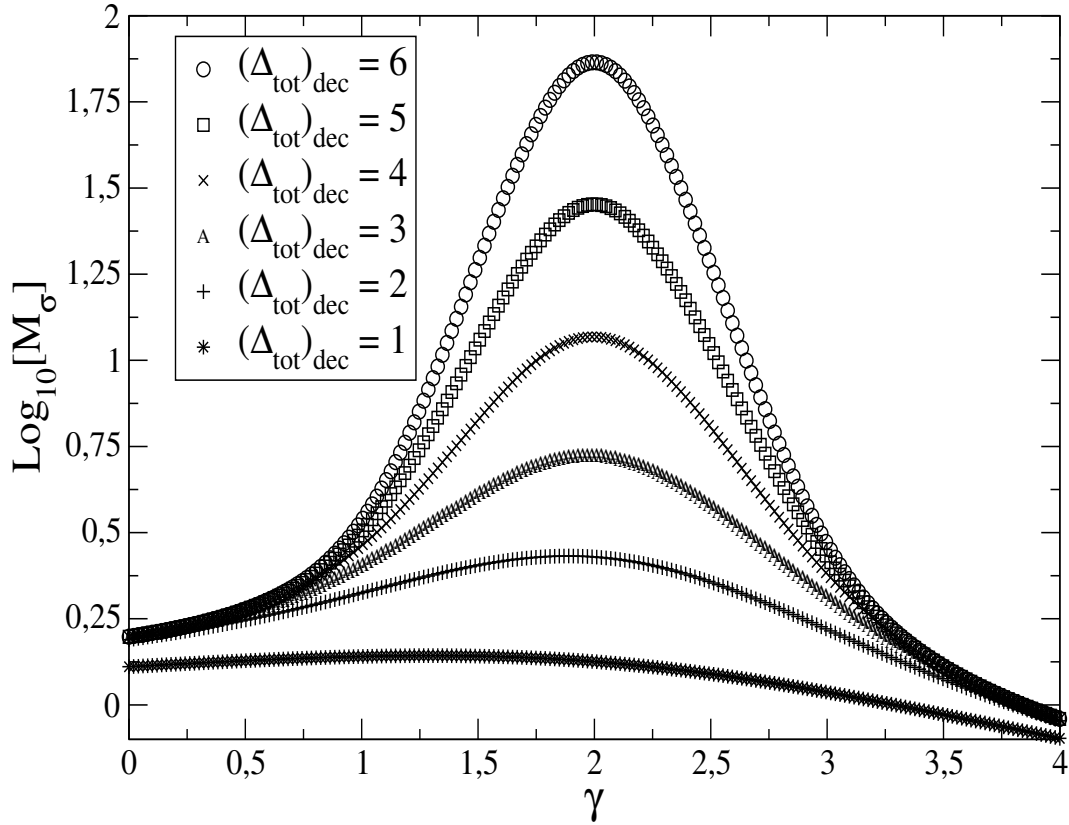


Figura 4 – $\log_{10}(M_{\sigma}(\gamma) \times \gamma)$ para os valores de $(\Delta_{tot})_{dec}$ empregados na figura 1.

Quantificação de multifractalidade I: a razão $M_{\sigma_n} \equiv \Delta_{\sigma_n}/\overline{Q}$, consiste em boa caracterização quantitativa capaz de indicar quão concentrada em torno de sua média está dada distribuição de probabilidades quanto aos valores efetivamente assumidos por Q : - caso a distribuição seja dada por uma delta de Dirac com média não nula, como a associada a algum ARM arbitrário, $M_{\sigma_n} \rightarrow 0$ - caso a distribuição seja a vinculada a algum AAM arbitrário, o valor de M_{σ_n} seria bem pequeno mas seguramente não nulo - quanto aos demais atratores estranhos a ligação com M_{σ_n} será esclarecida nos próximos tópicos.

Consistência da hipótese M: o atrator estranho ligado ao mapa logístico, Log, exibe o menor valor de M_{σ_n} e o maior valor absoluto do expoente γ_{noc} : a distribuição encontra-se bastante concentrada em torno de $\overline{Q} = 7,780$, sob valor de γ_{noc} destacadamente maior que os demais e valor de Δ_{σ_n} destacadamente menor. Tais atributos, conforme discussão no tópico “Monofractalidade e números de ocupações (hipótese M)”, nesta seção, tornam plausível identificar Log como o AAM mencionado no mesmo tópico. Portanto existe um “atrator real” com propriedades próximas ao do “atrator hipotético” proposto, ARM, fato que atribui consistência a hipótese M.

Multifractalidade e valores de M_{σ_n} : ainda com base nos quadros 6 e 7 pode-se inferir o seguinte: assim como a mudança do atrator considerado desde o suposto ARM (razão M_{σ_n} nula) até o AAM (razão M_{σ_n} positiva com pequena magnitude) acarreta elevação do valor do M_{σ_n} , a mudança do AAM para algum dos outros atratores estranhos leva a novas elevações dos valores dos M_{σ_n} . Sim pois cada um dos valores de M_{σ_n} ligados aos atratores distintos do Log é maior que o valor correspondente ao mesmo. Atribuo este aspecto à relevante multifractalidade de cada um dos demais nove atratores envolvidos, não há entre eles outro AAM. Os três tópicos seguintes são dedicados a esclarecimentos sobre esta atribuição.

Multifractalidade e variabilidade de subconjuntos: novamente conforme o tópico “Caracterizações clássicas”, a um atrator estranho multifractal estão associadas diversas dimensões de contagem de caixas distintas entre si vinculadas a subregiões distintas contidas nele, enquanto que a um suposto atrator estranho monofractal está associado um único valor da mesma dimensão vinculado ao atrator desprovido de subregiões distintas entre si. Me parece claro o seguinte aspecto: entre atratores multifractais terão maiores multifractalidades aqueles vinculados às maiores gamas de valores de dimensões de contagem de caixas. Maiores gamas exprimem maiores variabilidades de subconjuntos, um suposto atrator monofractal contaria com gama nula. Tal aspecto é consistente com a interpretação associada à quantidade $\Delta_{mf} = \alpha_{max} - \alpha_{min}$ considerada ao final da 1.2.2.5, tópico “Caráter multifractal”. O valor de Δ_{mf} consiste em quantificador da variabilidade de subconjuntos: quanto maior Δ_{mf} tanto maior será multifractalidade, valor nulo de Δ_{mf} assinala ausência de multifractalidade, conjunto de pontos correspondente (mono) fractal.

Quantificação de multifractalidade II: a variabilidade dos subconjuntos está diretamente relacionada ao gradiente da concentração de pontos de fase observada no atrator considerado (concentração de pontos por unidade de comprimento ou pontos por unidades de área). Sob baixa ou elevada concentração: invariância espacial da concentração (gradiente nulo) manifesta monofractalidade pois não comporta a variabilidade de subconjuntos e variação apreciável da concentração (gradiente elevado) manifesta elevada multifractalidade pois comporta relevante variabilidade de subconjuntos. Por sua vez o gradiente está relacionado ao valor do M_{σ_n} correspondente: gradiente nulo corresponde a $M_{\sigma_n} = 0$ pois os números de ocupações são independentes dos hipercubos aos quais se referem, elevados gradientes correspondem a $M_{\sigma_n} \gg 0$ já que representam elevada variabilidade dos números de ocupações. Finalmente, da relações entre multifractalidade e variabilidade de subconjuntos, entre variabilidade de subconjuntos e gradientes e entre gradientes e valores de M_{σ_n} , vem a relação entre multifractalidade e valores de M_{σ_n} : o valor de M_{σ_n} cresce com o aumento da multifractalidade. A possibilidade de visualização de cada um dos atratores estranhos imersos em espaços bidimensionais foi o motivo para a consideração (quase) exclusiva deles ao longo de toda a discussão até este ponto do capítulo. Em que pese a ausência de visualização ligada aos atratores, Log e Cir, imersos em

espaços unidimensionais, é plausível estender a mencionada relação entre multifractalidade e M_{σ_n} aos mesmos pois as distribuições estatísticas têm a mesma origem: a distribuição espacial, dependente do tempo, dos pontos de fase capturados pelos atratores. Desta forma cada um dos valores da razão M_{σ_n} relativa a números de ocupações vinculados a Log e Cir em VII consiste em quantificação da multifractalidade envolvida. Fica então estabelecido, com suporte em bases claras e plausíveis, que valores M_{σ_n} consistem em medida de multifractalidade do atrator estranho, imerso em espaço unidimensional ou bidimensional, envolvido.

Tempos de ocupações e multifractalidade: a variabilidade de tempos de ocupações é definida como:

$$M_{\sigma_t} \equiv \Delta_{\sigma_t} / \overline{\tau_o} \quad (2.25)$$

A sequência de atratores estranhos estabelecida de acordo com a ordem de magnitudes de M_{σ_n} na quadro 7 não corresponde à sequência dos mesmos organizada segundo a mesma ordem de magnitudes de M_{σ_t} no quadro 6. Portanto M_{σ_n} e M_{σ_t} não são diretamente proporcionais entre si.

A revelação da relação entre multifractalidade e valores de M_{σ_n} foi inteiramente baseadas em considerações sobre a distribuição espacial de pontos de fase capturados por atratores estranhos. A relação entre os valores de M_{σ_t} e multifractalidades me parece não trivial e além do escopo deste trabalho. Por isso não considero aqui tais valores como medidas de multifractalidades. Novos estudos deverão revelar se os mesmos valores consistem, ou não, em medidas de multifractalidade.

2.5 Temas não Abordados no Artigo.

Até este ponto somente temas presentes no artigo foram abordados, houve em raras ocasiões acréscimos de rápidos comentários (comentários em poucas palavras) ausentes no artigo por falta de espaço. Esta seção é dedicada a temas não apresentados no trabalho publicado como consequência da mesma falta.

2.5.1 Atratores Monofractais: Tempos de Ocupações.

No tópico “Monofractalidade e números de ocupações (hipótese M)”, seção 2.4.3.1, a invariabilidade quanto aos números de ocupações em qualquer ARM foi destacada. Ocorre que a invariabilidade relativa aos tempos de ocupações também é plausível.

Monofractalidade e tempos de ocupações (hipótese K): o tempo de ocupação de dado hipercubo arbitrário é sempre $\tau_o = T_p$, fato que manifesta absoluta equivalência entre dado hipercubo e qualquer outro com relação à sua ocupação. Aspecto também consistente com a igualdade entre as medidas naturais, μ_i , associada aos supostos atratores

(mono) fractais conforme o tópico “Caracterizações clássicas” na seção 2.1. Nesta situação a distribuição de probabilidades dos tempos de ocupações também consiste em uma delta de Dirac. A distribuição de algum AAM correspondente, $\varrho_{toc}(\tau_o) \propto \tau_o^{-\gamma_{toc}}$, envolveria intervalo $I_{\tau_o} \equiv [\tau_{o,i}, \tau_{o,f}]$ muito estreito e valor de γ_{toc} suficientemente elevado. Onde $\tau_{o,i}$ e $\tau_{o,f}$ são os extremos inicial e final do intervalo em que vale $\varrho_{toc}(\tau_o) \propto \tau_o^{-\gamma_{toc}}$.

Também com relação a esta propriedade o atrator estranho ligado ao mapa logístico, Log, conforme a quadro 7, exibe o menor valor de M_{σ_t} e o maior valor absoluto do expoente γ_{toc} : a distribuição encontra-se bastante concentrada em torno de $\bar{Q} = 5,775$, sob valor de γ_{toc} destacadamente maior que os demais e valor de Δ_{σ_t} destacadamente menor. Portanto ocorre uma reincidência de propriedades que atribuem ao atrator Log o caráter AAM.

Monofractalidade, números e tempos de ocupações: enfim, com base nas hipóteses M e K, torna-se consistente a afirmar que algum AAM arbitrário teria números e tempos de ocupações altamente concentrados em torno dos valores (T_p, Q_p) respectivamente, de modo que intervalos I_Q e I_{τ_o} teriam extensões muito curtas. Além disso os valores absolutos γ_{noc} e γ_{toc} seriam apreciavelmente maiores que os associados a atratores com multifractalidades apreciáveis, atratores não AAM, enquanto que os intervalos efetivos Δ_{σ_n} e Δ_{σ_t} seriam apreciavelmente menores que os vinculados a atratores não AAM.

2.5.2 Escala de Multifractalidade.

Os valores de M_{σ_n} são consistentes com medidas adimensionais expressas em determinada unidade específica. Qualquer valor dado é expresso em uma determinada unidade através da divisão dele mesmo pelo valor da unidade. De acordo com a definição no tópico “Quantificação de multifractalidade I”, seção 2.4.3.2, cada M_{σ_n} resulta da razão $\Delta_{\sigma_n}/\bar{Q}$ ligada ao atrator estranho correspondente. Desta forma M_{σ_n} envolve sua “unidade própria” $\bar{Q}$ típica do atrator considerado, não existe certa unidade, $Q_{um} > 0$, empregada em todas as razões. Algo similar acontece com o erro relativo $e_r = \Delta g/|g|$, associado a certo intervalo, $[g - \Delta g, g + \Delta g]$, em que se situa o valor de dada medida g (Δg é o erro absoluto). O erro relativo representa a precisão sob a qual g é conhecido: a precisão decresce com e_r , precisão absoluta corresponde a $e_r = 0$. Erros relativos tornam possíveis comparações entre diferentes precisões de medidas. Se $e_{r1} = \Delta g_1/|g_1| = 160/40 = 4$ e $e_{r2} = \Delta g_2/|g_2| = 2000/800 = 2.5$ então $e_{r2} < e_{r1}$ e a precisão de g_2 é maior que a de g_1 . Este texto mostra a necessidade das “unidades próprias”, $|g_1|$ e $|g_2|$: a idéia é medir os intervalos Δg_1 e Δg_2 de acordo com réguas calibradas com as unidades $|g_1|$ e $|g_2|$ respectivamente, o emprego de alguma outra unidade única, $h > 0$, não seria consistente com a intenção de representar a precisão envolvida. A relação entre erro relativo e variabilidade efetiva de números de ocupações, e_r e M_{σ_n} , é clara (valores de $|g|$ e $\bar{Q}$ correspondentes entre si da mesma forma que os de Δg e Δ_{σ_n}) e esclarece a importância da unidade $\bar{Q}$ no lugar da mencionada unidade única Q_{um} : o emprego de Q_{um} não cumpriria a intenção de representar a variabilidade envolvida. A variabilidade efetiva de números de ocupações

torna possível comparações entre diferentes multifractalidades. Os valores de M_{σ_n} compõem uma escala e esta pode ser utilizada como escala de multifractalidades que envolve o “zero absoluto”: $M_{\sigma_n} = 0$ exprime completa ausência de multifractalidade (monofractalidade), de acordo com a hipótese M. Cada atrator está associado a certa “unidade de comprimento efetivo”, $\delta_{\sigma_n}^i$, cujo valor é sempre igual à média, $\overline{Q}^i$, vinculada a ele, de modo que se houvesse qualquer $\Delta_{\sigma_n}^i$ com comprimento igual a $\delta_{\sigma_n}^i$ ele corresponderia à unidade de multifractalidade pois faria $M_{\sigma_n}^i = 1$:

$$M_{\sigma_n}^i = \Delta_{\sigma_n}^i / \overline{Q}^i = \delta_{\sigma_n}^i / \overline{Q}^i = 1$$

$$\Delta_{\sigma_n}^i = \delta_{\sigma_n}^i = \overline{Q}^i, \quad i = 1, 2, \dots, 10 \quad (2.26)$$

Onde cada valor de i designa um dos atratores de acordo com o quadro 2. Cada $M_{\sigma_n}^i$ pode então ser reescrito:

$$M_{\sigma_n}^i = a_i \delta_{\sigma_n}^i, \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

a_i é um real não negativo (2.27)

De modo que se houvessem dois valores iguais de M_{σ_n} , $M_{\sigma_n}^{i=a} = M_{\sigma_n}^{i=b}$, necessariamente os atratores envolvidos teriam a mesma multifractalidade uma vez que representam contagens iguais das unidades correspondentes. Onde $a \neq b$ e $a, b = 1, 2, \dots, 10$. Quanto a dois valores diferentes de M_{σ_n} , como os associados aos atratores 09 and 06 no quadro 6, $M_{\sigma_n}^9 = 25,35$ e $M_{\sigma_n}^6 = 23,60$, a diferença, $M_{\sigma_n}^9 - M_{\sigma_n}^6 = 1,75$, é significativa: (i) se adicionarmos a $\Delta_{\sigma_n}^6$ exatamente 1,75 unidades $\delta_{\sigma_n}^6 = 15,18$ haverá igualdade entre multifractalidades pois o acréscimo faria $M_{\sigma_n}^6 = 25,35 = M_{\sigma_n}^9$ (ii) alternativamente se subtrairmos de $\Delta_{\sigma_n}^9$ exatamente 1,75 unidades $\delta_{\sigma_n}^9 = 7,914$ haverá novamente igualdade entre as multifractalidades pois ocorreria $M_{\sigma_n}^9 = 23,60 = M_{\sigma_n}^6$. A razão $M_{\sigma_n}^9 / M_{\sigma_n}^6 = 1,074$, também é significativa: (iii) o comprimento $M_{\sigma_n}^6$, dado em unidades $\delta_{\sigma_n}^6$ e multiplicado por 1,074 levará à igualdade entre as multifractalidades já que fará $M_{\sigma_n}^6 = 25,35 = M_{\sigma_n}^9$ (iv) alternativamente o comprimento $M_{\sigma_n}^9$, dado em unidades $\delta_{\sigma_n}^9$, dividido por 1,074 levará novamente à igualdade de multifractalidades pois faria $M_{\sigma_n}^9 = 23,60 = M_{\sigma_n}^6$. Portanto, a escala baseada em valores de M_{σ_n} incorpora zero absoluto e as operações adição, subtração, multiplicação e divisão (as duas últimas não se aplicam a operações ente valores de M_{σ_n} de modo a resultar em outro valor da mesma quantidade). Desta forma, esta escala pode ser usada para medir multifractalidades da mesma forma que, por exemplo, escalas baseadas em kg e K são empregadas para medir massa a temperatura absoluta respectivamente.

2.5.3 Multifractalidade e Estruturas de Distribuições Espaciais.

O capítulo 3 mostra os oito atratores estranhos imersos em espaços bidimensionais na mesma ordem em que são apresentados no quadro 2, respectivamente nas seções 3

a 10. Observa-se que quatro entre os cinco primeiros, Dfm, Hen, Loz e Tin, exibem predominantemente concentrações de pontos ao longo de linhas bem definidas, com baixa dispersão em torno delas. Dois entre os três últimos, Ugy e Sni, exibem regiões com concentrações maiores que outras, mas nada que remeta a linhas bem definidas, a característica marcante é a elevada dispersão dos pontos. De acordo com o quadro 7, as multifractalidades dos quatro primeiros são menores que as dos outros dois. A avaliação destas observações à luz do que foi exposto no tópico “Quantificação de multifractalidade II”, seção 2.4.3.2, torna a seguinte conclusão plausível: os gradientes de concentrações ao longo das linhas dos atratores Dfm, Hen, Loz e Tin, são certamente menores que os gradientes correspondentes associados aos atratores Ugy e Sni que não comportam linhas. Para facilitar a discussão designarei por EPF (estrutura predominantemente filamentar) o aspecto comum aos diferentes conjuntos de linhas que caracterizam os quatro atratores. É claro que os atratores Ugy e Sni são caracterizados pela ausência destas estruturas. Parece haver uma relação pela qual distribuições espaciais conforme as EPF necessariamente leva a multifractalidades menores que em distribuições nas quais as EPF não ocorrem. Com relação aos atratores ainda não mencionados nesta seção, Ike e Sen, não acontecem predominância de linhas ao mesmo tempo em que não ocorrem dispersões pronunciadas. O atrator de Ikeda pode ser descrito como uma coleção de linhas curvas mal definidas (marcadas por claras descontinuidades), paralelas entre si e muitas próximas umas das outras. A estrutura é marcada por bandas mal definidas formadas por linhas mal definidas. O quadro 7 revela a baixa multifractalidade deste atrator e o inclui no grupo ao qual pertencem também Dfm, Hen, Loz e Tin, ainda que o primeiro não compartilhe com os outros as EPF: é plausível admitir que o gradiente de concentração, independentemente da direção, não é tão elevado quanto as ligadas a Ugy e Sni. O atrator Sin envolve algumas linhas bem definidas, mas não há predominância delas, ele não exibe qualquer EPF. Outras linhas mal definidas ocorrem com frequência apreciavelmente maior. O quadro 7 o situa próximo a Ugy e Sni: é plausível admitir que o gradiente de concentração, notoriamente o associado às linhas mal definidas, não é tão baixo quanto os ligados a Dfm, Hen, Loz e Tin. Futuros estudos a respeito de outros atratores estranhos deverão esclarecer se a extensão a eles da relação entre as distribuições espaciais e as multifractalidades abordada nesta seção é, ou não, realizável.

2.5.4 Vazios e Tempos de Desocupações.

As distribuições estatísticas de ocupações, tempos e números, originam-se do arranjo geométrico dependente do tempo dos pontos de fase. Por sua vez, a origem das distribuições dos tempos de desocupações é o arranjo geométrico dependente do tempo de espaços vazios entre os mesmos pontos. O seguinte cenário parece plausível: os arranjos geométricos dos “vazios” tornam-se semelhantes aos arranjos correspondentes dos pontos de fase em regiões do espaço de fase em que as concentrações espaciais locais dos pontos são

suficientemente altas, uma situação em que as distribuições dos tempos de desocupações são dadas por leis de potência. Os valores de Q na expressão $\varrho_{noc}(Q) \propto Q^{-\gamma_{noc}}$ consistem em medidas de concentrações locais (quantidade de pontos localizada em algum hipercubo). A probabilidade de ocorrência de quantidade de pontos entre Q e $Q + dQ$ durante tempo de observação dominado pelo pós-transiente, $dP(Q) = \varrho_{noc}(Q) \cdot dQ$, é diretamente proporcional à $\varrho_{noc}(Q)$ de modo que, para valores de γ_{noc} suficientemente elevados, é plausível supor a existência de regiões cobertas por subconjuntos de hipercubos em que as concentrações locais são menores do que as necessárias para sustentar semelhanças importantes entre os arranjos de pontos e os arranjos de “vazios”, fato que justificaria a ausência de leis de potência em algumas distribuições de tempos de desocupações. A notável ausência de leis de potência associadas com os atratores Cir, Sni e Log na TABELA II, justamente aqueles correspondentes aos maiores valores de γ_{noc} é consistente com o cenário proposto. Estudos futuros deverão esclarecer a validade, ou não, do cenário quanto a outros atratores.

3

Objetos nos Espaços de Fase e Fundamentos sobre as Estatísticas.

A geração dos resultados que sustentam este trabalho exige o emprego de cálculos numéricos realizados por programas escritos especificamente para atender a esta finalidade. Por sua vez a criação e a utilização dos mesmos supõem conhecimentos sobre como são realizadas as estatísticas. O processo de geração das estatísticas, comum a todos os sistemas dinâmicos abordados, baseia-se em programas criados por mim. Estes últimos têm como pilares quatro objetos definidos em cada um dos espaços de fase pertinentes: hipercubos, caixas de condições iniciais e caixas externas I e II. Este capítulo desce a detalhes sobre os mencionados objetos e envolve comentários sobre aspectos gerais a respeito de programação, aspectos aplicáveis a todos os códigos utilizados. A exposição pertinente é organizada segundo as seções 3.1 a 3.10. A seção 3.1 se refere aos objetos nos espaços de fase: - aprofundamento que leva a considerações além do escopo das definições no capítulo 2 com relação especificamente às caixas de condições iniciais e caixas externas II - especificações genéricas, válidas para todos os espaços de fase, dos atributos de cada um dos quatro objetos. As seções 3.2 a 3.9 dizem respeito a tabelas e figuras que especificam e exibem, quanto aos sistemas com atratores em espaços bidimensionais, cada um dos quatro objetos vinculados. Os atratores também são mostrados para revelar a relação entre eles e os objetos.

Este capítulo também revela o procedimento adotado para determinar os intervalos transiente e pós-transiente, além dos valores das quantidades pertinentes, quanto aos atratores em espaços bidimensionais. A seção 3.10 apresenta os valores de t_{sat} e H , definidos no tópico “Transientes mantidos I” no capítulo 2 e encerra explicação sobre como o emprego de animações suporta o mencionado procedimento.

3.1 Simulações Numéricas: Objetos nos Espaços de Fase.

Este capítulo é dedicado à exposição detalhada sobre objetos empregados para realizações das simulações situados nos espaços de fase envolvidos: hipercubos, caixas de condições iniciais e caixas externas I e II.

3.1.1 Caixas de Condições Iniciais e Caixas Externas II.

As definições de caixas de condições iniciais (CCI) e de caixas externas II, estão no capítulo 2. Uma vez que se tratam de objetos não tradicionalmente ligados à rede de hipercubos, já que o emprego dela ocorre segundo escopo ausente na literatura, é adequada exposição específica sobre eles.

Sucessões da caixas de condições iniciais, espaços unidimensionais: o intervalo unitário $[0, 1]$ consiste na caixa externa II, esta devidamente dividida em segmentos que têm em comum a extensão. Cada segmento consiste em local em que pode se situar certa CCI unidimensional pertinente a sucessão delas mencionada no capítulo 2. O primeiro e o último segmentos são respectivamente $[0, \eta]$ e $[1 - \eta, 1]$, onde $\eta \ll 1$ é a dimensão comum. Cada CCI coincidirá exatamente com algum segmento de acordo com a seguinte ordem específica de percorrimento dos últimos: primeiro, último, segundo, penúltimo, terceiro, antepenúltimo, ..., etc.

Sucessões de caixas de condições iniciais, espaços bidimensionais: cada caixa externa II consiste em um retângulo com dimensões η_h (horizontal) e η_v (vertical) devidamente dividida em pequenos retângulos que têm em comum as dimensões ν_h (horizontal) e ν_v (vertical). Cada pequeno retângulo está disposto relativamente ao maior segundo estrutura matricial, as linhas são numeradas do topo para a base e colunas da esquerda para a direita. O número de linhas é n e o de colunas m . Cada pequeno retângulo consiste em local em que pode se situar certa CCI pertinente a sucessão delas mencionada no capítulo 2. Cada um deles é então designado pelo par (l, c) , onde l se refere a linha e c se refere a coluna. Cada CCI coincidirá exatamente com algum pequeno retângulo de acordo com ordem específica de percorrimento dos últimos: primeiro $(1, 1)$, último (n, m) , segundo $(1, 2)$, penúltimo $(n, m - 1)$, terceiro $(1, 3)$, antepenúltima $(n, m - 2)$, Ao fim dos percorrimentos da primeira e da última linhas iniciam-se os percorrimentos da segunda e da penúltima respectivamente das formas como foram percorridas a primeira e a última, e depois destas a terceira e a antepenúltima, ..., etc. Apresento um exemplo a seguir.

Caso houvessem dezesseis pequenos retângulos numa estrutura matricial 4x4 como a mos-

Quadro 8 – Matriz para exemplificar o percorrimto das caixas externas II em espaços bidimensionais.

01	02	03	04
05	06	07	08
09	10	11	12
13	14	15	16

trada no quadro 8 a sequência de percorrimto dos pequenos retângulos seria a seguinte (cada número de caixa é acompanhado pelo número de ordem da CCI correspondente.): 1 (1^a), 16 (2^a), 2 (3^a), 15 (4^a), 3 (5^a), 14 (6^a), 4 (7^a), 13 (8^a), 5 (9^a), 12 (10^a), 6 (11^a), 11 (12^a), 7 (13^a), 10 (14^a), 8 (15^a), 9 (16^a). As linhas 1 e 2 (metade superior da matriz) são percorridas na vertical no sentido topo-base, e na horizontal no sentido esquerda-direita. As linhas 4 e 3 (metade inferior da matriz) são percorridas na vertical no sentido base-topo, e na horizontal no sentido direita-sequerda. As ordens de percorrimto são importantes para eliminar a possibilidade de mais de uma contribuição do mesmo conjunto de condições iniciais para a geração dos resultados. As possibilidades de tais contribuições não seriam descartadas caso fosse empregado, por exemplo, percorrimto aleatório que poderia levar à superposições, parciais ou plenas, entre caixas de condições iniciais de modo permitir que alguns conjuntos de condições iniciais contribuíssem mais de uma vez.

Quantidades de condições iniciais em espaços bidimensionais: devida atenção a este aspecto leva às quantidades de condições iniciais iguais a 10.000, ou 9.900 ou 9.800, relativas aos atratores imersos em espaços bidimensionais mencionadas no tópico “Evolução temporal” no capítulo 2. Em tais espaços as condições iniciais são organizadas segundo cem linhas e cem colunas, cada linha e cada coluna com cem condições regularmente distribuídas ao longo de si mesma de modo a resultar em caixas de condições iniciais com um total de 10.000 condições iniciais. Ocorre que acontecem superposições entre as linhas, ou entre as colunas, que coincidem com os lados das caixas: - duas caixas sucessivas na mesma linha da matriz, como as associadas aos retângulos 6 e 7 no quadro 8, têm seus lados verticais direito (retângulo 6) e esquerdo (retângulo 7) coincidentes - duas caixas sucessivas na mesma coluna da matriz, como as associadas aos retângulos 11 e 15 no quadro 8, têm seus lados horizontais inferior (retângulo 11) e superior (retângulo 15) coincidentes. Quando ocorrem tais coincidências um dos lados envolvidos deve ser desconsiderado para evitar contribuições indesejadas, fato que acarreta a exclusão de cem condições iniciais em uma das CCI. Podem ocorrer coincidências envolvendo dois lados ao mesmo tempo que levariam à exclusão de duzentas condições iniciais na CCI envolvida. Adotei o seguinte procedimento para evitar contribuições indesejadas com relação às linhas da metade superior da matriz:

- (i) a primeira CCI (ligada ao retângulo 1) contribui com 10.000 condições iniciais, nenhum dos lados é excluído
- (ii) cada uma das demais CCI ligadas à primeira linha, 3^a, 5^a, e 7^a, vinculadas respectivamente aos retângulos 2, 3, e 4, contribui com 9.900 condições iniciais, são excluídos cada um dos lados verticais esquerdos que coincidem com os verticais direitos da CCI anterior
- (iii) quanto as CCI ligadas à segunda linha 9^a, 11^a, 13^a, e 15^a, vinculadas respectivamente aos retângulos 5, 6, 7, e 8: (I) cada uma das três últimas contribui com 9.800 condições iniciais, além de cada um dos lados verticais esquerdos (pelos mesmos motivos no item ii), são excluídos também cada um dos lados horizontais superiores que coincidem com os horizontais inferiores da CCI acima (II) 9^a CCI, contribui com 9.900 condições iniciais dada a exclusão do lado horizontal superior coincidente com o lado vertical inferior da CCI acima.

Quanto às linhas na metade inferior valem raciocínios análogos a partir da última CCI com percorrimto das linhas no sentido esquerda-direita e das colunas no sentido base-topo. As quantidades de caixas que contribuem com 9.800, 9900, ou 10.000 condições iniciais são iguais às correspondentes provenientes das linhas na metade superior.

3.1.2 Atributos dos objetos.

Cada hipercubo consiste em um segmento com comprimento ε , ou um quadrado que têm ε como comprimento comum às duas dimensões. O número de hipercubos é representado por n_{hp} . Cada caixa de condições iniciais quando consistir em um quadrado tem comprimentos η_h (horizontal) e η_v (vertical), quando for um segmento tem comprimento $\eta_h \equiv \eta$ com $\eta_v \equiv 0$, onde η foi definido no tópico “Sucessões das caixas de condições iniciais, espaços unidimensionais” na seção 3.1.1 deste capítulo. O número de caixas de condições iniciais é representado por n_{ic} .

Caixas externas I: as dimensões dos retângulos são representadas por μ_h (horizontal) e μ_v (vertical). A dimensão única dos segmentos é representada pelo mesmo par com $\mu_v \equiv 0$. O centro do retângulo é representado pelo par ordenado $E_{h,v} = (e_h, e_v)$, onde e_h e e_v são as coordenadas horizontal e vertical respectivamente. O centro de cada segmento é representado pelo mesmo par com $e_v \equiv 0$.

Caixas externas II: as dimensões dos retângulos são representadas por ζ_h (horizontal) e ζ_v (vertical). A dimensão única dos segmentos é representada pelo mesmo par com $\zeta_v \equiv 0$. Os centros dos retângulos e dos segmentos são rigorosamente os mesmos das caixas externas I correspondentes.

O restante deste capítulo traz tabelas com os valores dos diversos atributos de cada um dos objetos. Com relação aqueles imersos em espaços bidimensionais estão presentes também figuras que mostram caixas de condições iniciais, e os hipercubos, além dos atratores. Em alguns casos as caixas externas I e II não são exibidas explicitamente, mas sim implicitamente através de figuras que permitem inferir quais são os contornos que as

definem.

Uma vez que tanto os valores dos atributos quanto os das constantes nos sistemas dinâmicos e dos parâmetros de integração, são necessariamente empregados como valores de entrada para os códigos que realizam as simulações, com a intenção de facilitar o uso dos últimos pela exibição de todos os valores em um único local apresento também em cada caso os valores das constantes e parâmetros.

3.2 Mapa de Duffing (Dfm)

Quadro 9 – Valores de constantes, a e b , empregadas no sistema dinâmico, dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.

Designação	Valores
a	2,77
b	0,1
Δt	iteração
t_i	0
t_f	15.000
$E_{h,v} = (e_h, e_v)$	(0,0)
$\mu_h = \mu_v$	3,6
$\zeta_h = \zeta_v$	3,6
ε	0,05
$\eta_h = \eta_v$	0,05
n_{hp}	5.184
n_{ic}	5.184

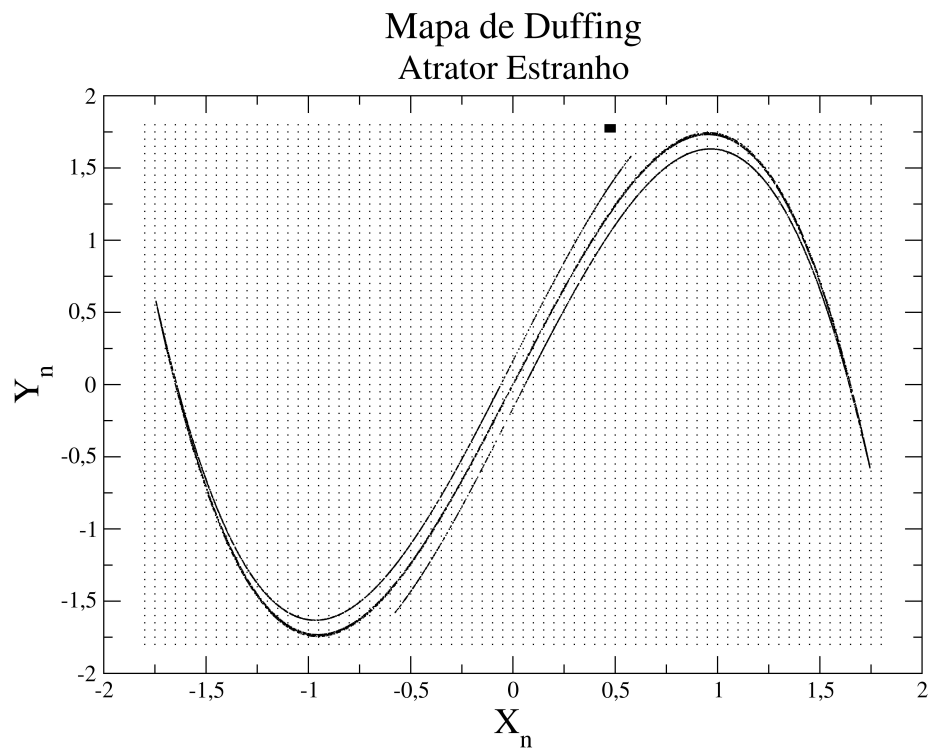


Figura 5 – Atrator associado ao Mapa de Duffing, a rede de hipercubos, e a caixa de condições iniciais com coordenadas $(0,45,1,75)$. O atrator consiste em 8.368 pontos de fase depois de 15.000 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. As caixas externas I e II são idênticas entre si, seus contornos correspondem às bordas da rede de hipercubos

3.3 Mapa de Hénon (Hen)

Quadro 10 – Valores de constantes, a e b , empregadas no sistema dinâmico, dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.

Designação.	Valores
a	1,4
b	0,3
Δt	iteração
t_i	0
t_f	15.000
$E_{h,v} = (e_h, e_v)$	(0,0)
$\mu_h = \mu_v$	3,65
$\zeta_h = \zeta_v$	4,00
ε	0,025
$\eta_h = \eta_v$	0,05
n_{hp}	21.316
n_{ic}	6.400

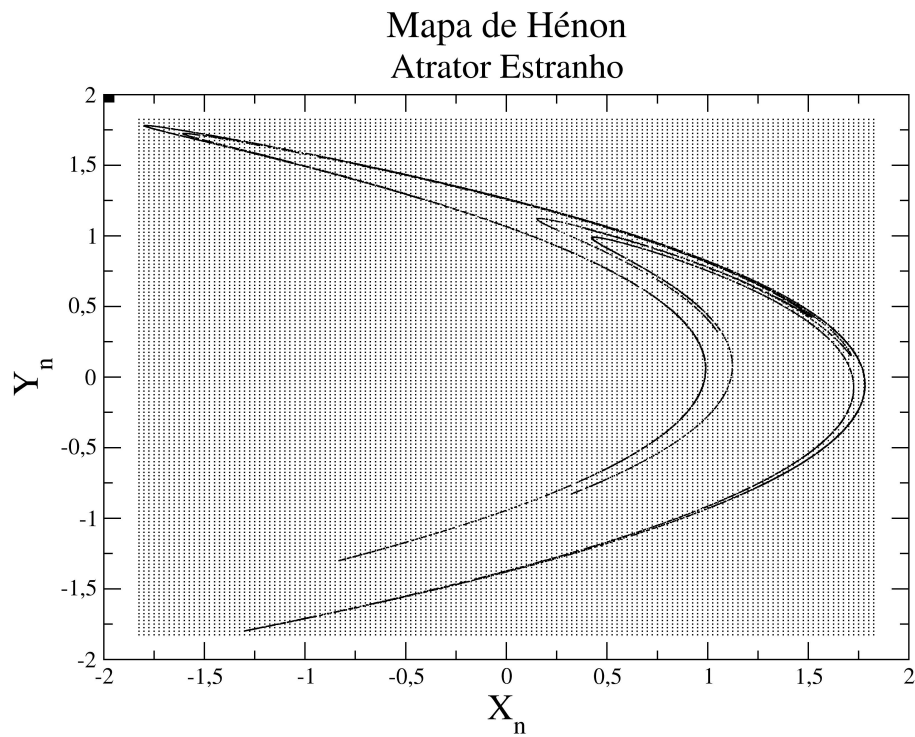


Figura 6 – Atrator associado ao Mapa de Henon, a rede de hipercubos, e a caixa de condições iniciais com coordenadas $(-2,2)$. O atrator consiste em 9.900 pontos de fase depois de 15.000 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. A caixa externa I tem como contornos as bordas da rede de hipercubos. A caixa externa II coincide com a caixa que emoldura a figura.

3.4 Mapa de Ikeda (Ike)

Quadro 11 – Valores de constantes, a , β , γ , e μ , empregadas no sistema dinâmico, dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.

Designação	Valores
a	6
β	0,4
γ	1
μ	0,9
Δt	iteração
t_i	0
t_f	15.000
$E_{h,v} = (e_h, e_v)$	(-4, 3)
μ_h	13
μ_v	15
ζ_h	11
ζ_v	13
ε	0,1
$\eta_h = \eta_v$	0,1
n_{hp}	19.500
n_{ic}	14.300

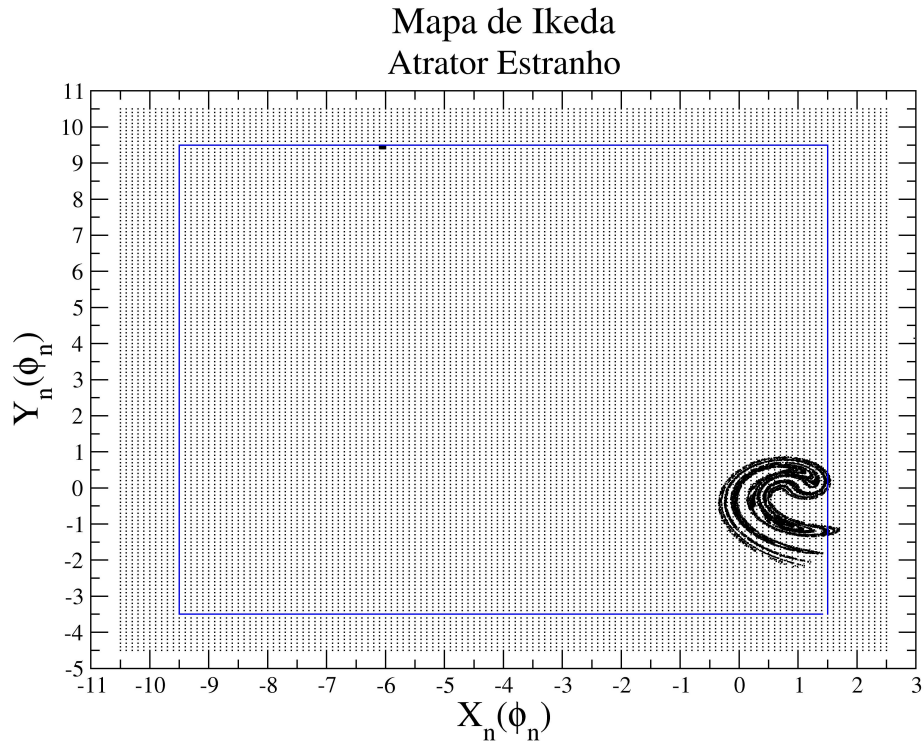


Figura 7 – Atrator associado ao Mapa de Ikeda, a rede de hipercubos, e a caixa de condições iniciais, esta última com coordenadas $(-6, 9, 4)$. O atrator consiste em 9.900 pontos de fase depois de 15.000 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. A caixa externa I tem como contornos as bordas da rede de hipercubos. A caixa externa II está destacada em azul.

3.5 Mapa de Lozi (Loz)

Quadro 12 – Valores dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.

Designação	Valores
Δt	iteração
t_i	0
t_f	15.000
$E_{h,v} = (e_h, e_v)$	(0, 0)
$\mu_h = \mu_v$	4, 2
$\zeta_h = \zeta_v$	4, 0
ε	0, 025
$\eta_h = \eta_v$	0, 1
n_{hp}	28.224
n_{ic}	1.600

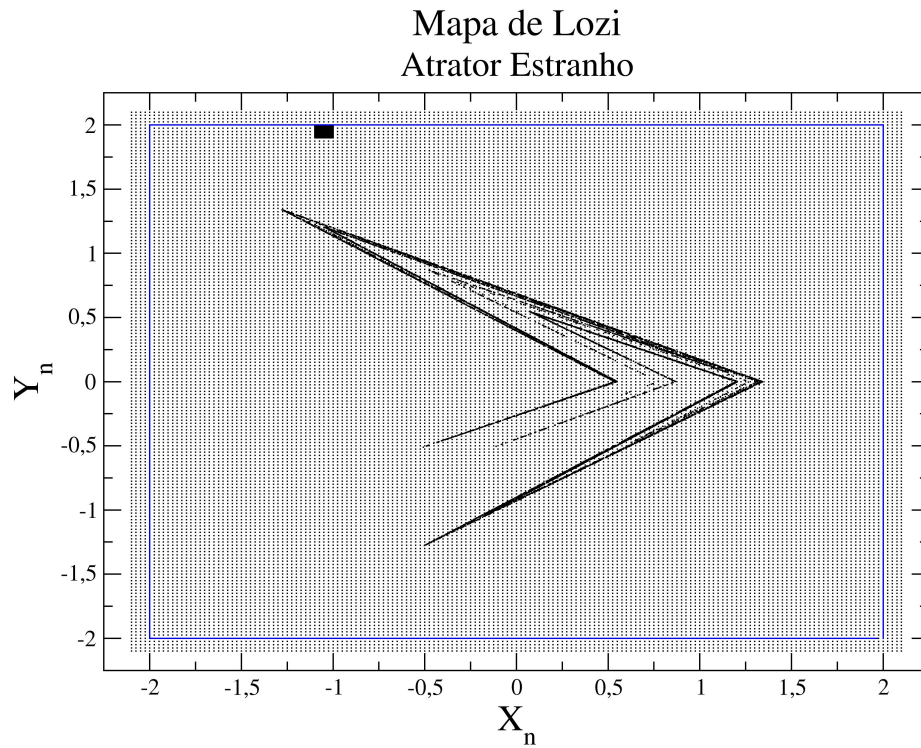


Figura 8 – Atrator associado ao Mapa de Lozi, a rede de hipercubos, e a caixa de condições iniciais com coordenadas $(-1, 1, 1, 9)$. O atrator consiste em 9.900 pontos de fase depois de 11.400 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. A caixa externa I tem como contornos as bordas da rede de hipercubos. A caixa externa II está destacada em azul.

3.6 Mapa Tinkerbell (Tin)

Quadro 13 – Valores das constantes, a , b , c e d , empregadas no sistema dinâmico, dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.

Designação	Valores
a	0,9
b	-0,6
c	2
d	0,5
Δt	iteração
t_i	0
t_f	15.000
$E_{h,v} = (e_h, e_v)$	(-0,4 , 0,5)
μ_h	3,4
μ_v	3,2
ζ_h	3,2
ζ_v	3,0
ε	0,1
$\eta_h = \eta_v$	0,1
n_{hp}	1.088
n_{ic}	960

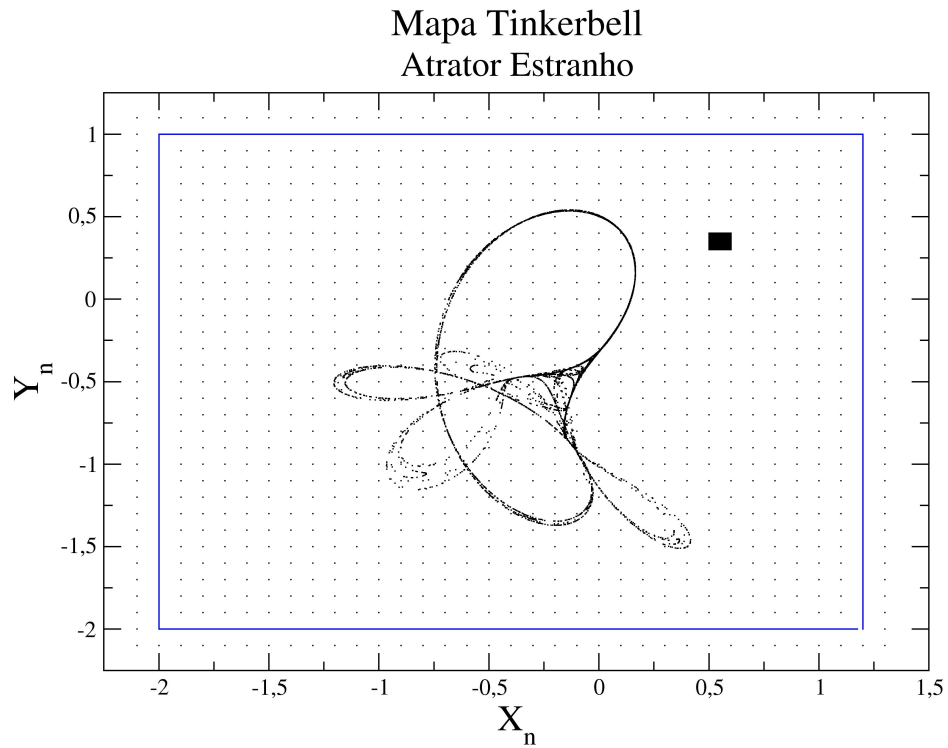


Figura 9 – Atrator associado ao Mapa Tinkerbell, a rede de hipercubos, e a caixa de condições iniciais com coordenadas $(0,55,0,35)$. O atrator consiste em 5.901 pontos de fase depois de 15.000 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. A caixa externa I tem como contorno as bordas da rede de hipercubos. A caixa externa II está destacada em azul.

3.7 Mapa Seno Seno (Sin)

Quadro 14 – Valores dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.

Designação	Valores
Δt	iteração
t_i	0
t_f	15.000
$E_{h,v} = (e_h, e_v)$	(0, 0)
$\mu_h = \mu_v$	4, 4
$\zeta_h = \zeta_v$	4, 0
ε	0, 05
$\eta_h = \eta_v$	0, 1
n_{hp}	7.744
n_{ic}	1.600

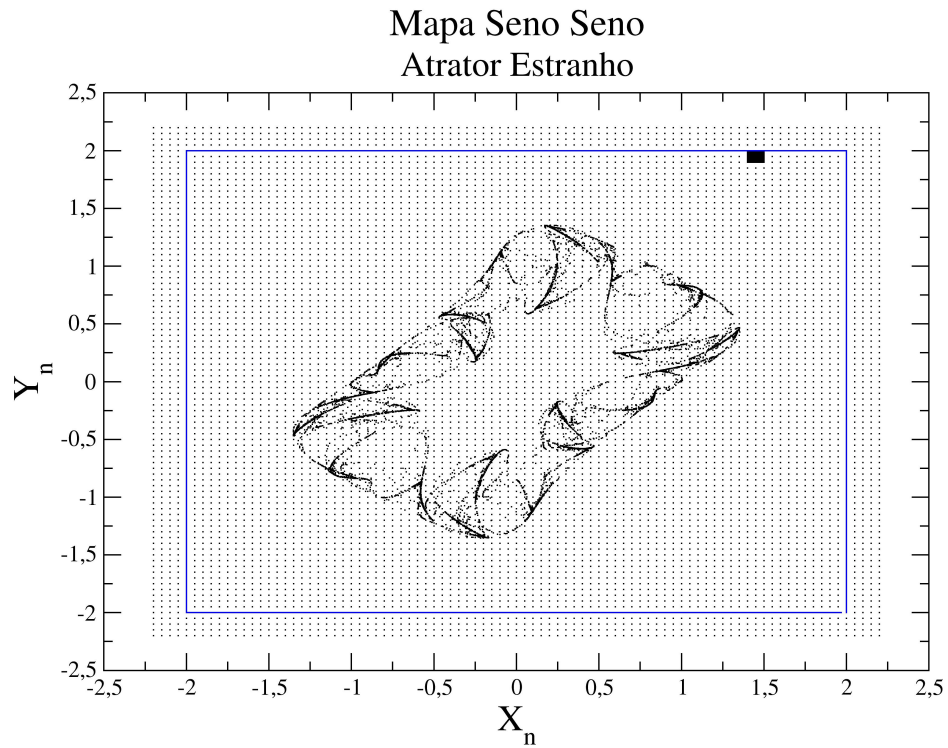


Figura 10 – Atrator associado ao Mapa Seno Seno, a rede de hipercubos , e a caixa de condições iniciais com coordenadas (1,45,1,95). O atrator consiste em 9.801 pontos de fase depois de 15.000 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. A caixa externa I tem contornos que coincidem com as bordas da rede de hipercubos. A caixa externa II está destacada em azul.

3.8 Mapa Ugly (Ugy)

Quadro 15 – Valores da constante, r , empregada no sistema dinâmico, dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.

Designação	Valores
r	1,45
Δt	iteração
t_i	0
t_f	15.000
$E_{h,v} = (e_h, e_v)$	(0,5 , 0,8)
μ_h	1,0
μ_v	1,6
ζ_h	1,0
ζ_v	1,6
ε	0,04
$\eta_h = \eta_v$	0,04
n_{hp}	1.000
n_{ic}	1.000

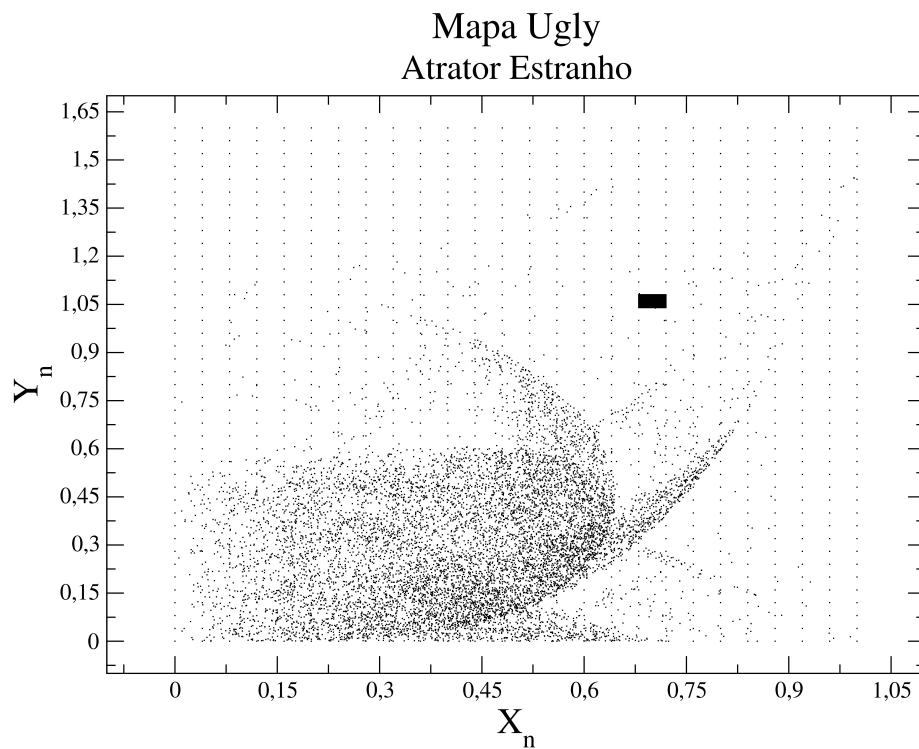


Figura 11 – Atrator associado ao Mapa Ugly, a rede de hipercubos, a caixa externa, e a caixa de condições iniciais, esta última com coordenadas $(0,70,1,05)$. O atrator consiste em 9.801 pontos de fase depois de 15.000 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. As caixas externas I e II são idênticas entre si, seus contornos coincidem com as bordas da rede de hipercubos

3.9 Mapa de Sinai (Sni)

Quadro 16 – Valores da constante, Δ , empregada no sistema dinâmico, dos parâmetros de integração numérica e dos atributos geométricos.

Designação	Valores
Δ	0, 1
Δt	iteração
t_i	0
t_f	15.000
$E_{h,v} = (e_h, e_v)$	(0, 5 , 0, 5)
$\mu_h = \mu_v$	1, 0
$\zeta_h = \zeta_v$	1, 0
ε	0, 0125
$\eta_h = \eta_v$	0, 0125
n_{hp}	6.400
n_{ic}	6.400

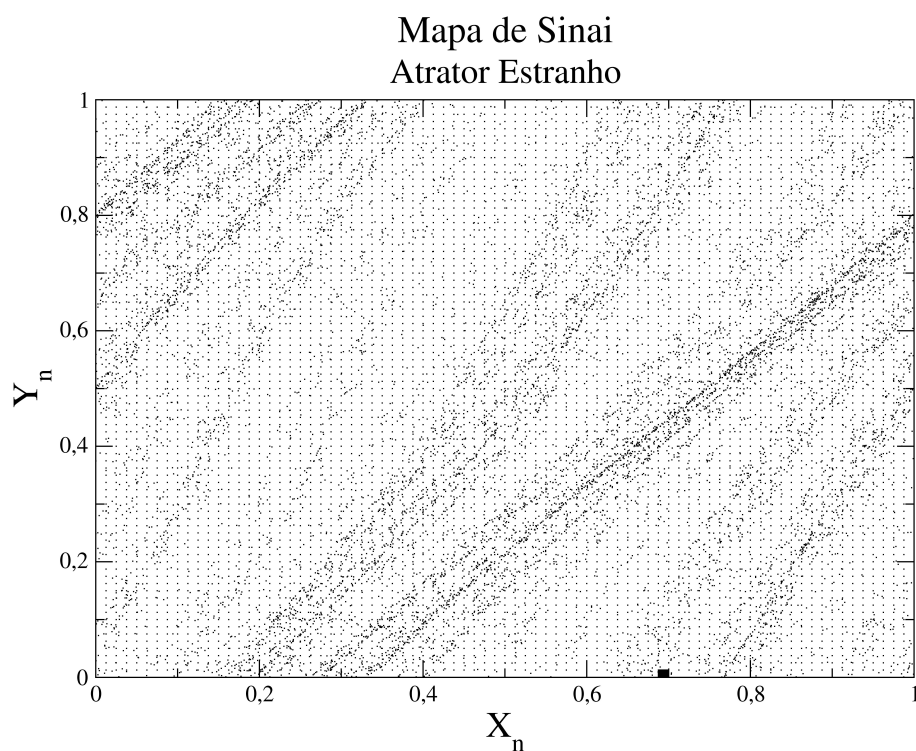


Figura 12 – Atrator associado ao Mapa de Sinai, a rede de hipercubos , e a caixa de condições iniciais com coordenadas $(0,70,0,006)$. O atrator consiste em 9.900 pontos de fase depois de 15.000 iterações. A caixa de condições iniciais encerra os 10.000 pontos no instante inicial, antes de qualquer iteração. As caixas externas I e II são idênticas entre si, seus contornos coincidem com as bordas da rede de hipercubos

3.10 Atratores Estranhos: Transientes e Pós-Transientes.

3.10.1 Evoluções Temporais.

Conforme o tópico “Transientes mantidos I” no capítulo 2, ocorre a necessidade de distinguir entre si os intervalos transiente e pós-transiente para então estabelecer valor de t_{sat} e calcular o valor de H em cada caso.

A aparência do conjunto de pontos de fase, caracterizada por sua distribuição espacial no espaço de fase, é empregada para distinguir em que intervalo ele se encontra: durante o transiente a aparência muda apreciavelmente, a dois instantes diferentes correspondem aparências claramente distintas. Durante o pós-transiente há (quase) preservação da aparência com o decurso do tempo, ocorrem somente pequenas alterações. Com base neste fato criei o seguinte critério: o primeiro instante pertinente ao pós-transiente, t_{sat} , é o primeiro instante do período de observação em que ocorre a aparência que, em termos práticos, se repetirá daquele momento em diante. A observação da aparência em cada caso foi realizada com base na observação de animações criadas a partir de simulações numéricas. Quanto a sete dos atratores a formação da aparência que se repetirá indefinidamente é bem mais rápida que a formação associada ao atrator seno seno. Desta forma o transiente com relação a este último é bem maior que os demais.

3.10.2 Valores de t_{sat} e H .

Os valores de t_{sat} e H apurados são os seguintes:

Sistema 01 (Dfm):

$$T_{obs} = 15.000, t_{sat} = 12, \Delta_{att} = 14.988, \Delta_{tra} = 12 \rightarrow H = 1.249$$

Sistema 02 (Hen):

$$T_{obs} = 15.000, t_{sat} = 15, \Delta_{att} = 14.985, \Delta_{tra} = 15 \rightarrow H = 999$$

Sistema 03 (Ike):

$$T_{obs} = 15.000, t_{sat} = 15, \Delta_{att} = 14.985, \Delta_{tra} = 15 \rightarrow H = 999$$

Sistema 04 (Loz):

$$T_{obs} = 15.000, t_{sat} = 12, \Delta_{att} = 14.988, \Delta_{tra} = 12 \rightarrow H = 1.249$$

Sistema 05 (Tin):

$$T_{obs} = 15.000, t_{sat} = 18, \Delta_{att} = 14.982, \Delta_{tra} = 18 \rightarrow H \simeq 832$$

Sistema 06 (Sin):

$$T_{obs} = 15.000, t_{sat} = 800, \Delta_{att} = 14.200, \Delta_{tra} = 800 \rightarrow H \simeq 18$$

Sistema 07 (Ugy):

$$T_{obs} = 15.000, t_{sat} = 30, \Delta_{att} = 14.970, \Delta_{tra} = 30 \rightarrow H = 499$$

Sistema 08 (Sni):

$$T_{obs} = 15.000, t_{sat} = 10, \Delta_{att} = 14.990, \Delta_{tra} = 10 \rightarrow H = 1.499$$

4 Estatísticas: Curvas Provenientes das Simulações.

Finalidade. Este capítulo visa, exclusivamente, exibir figuras e valores associados. Todos os comentários e discussões pertinentes encontram-se no capítulo 2.

Distribuições estatísticas. Como principal resultado são apresentadas as seguintes curvas, histogramas em escalas bilogarítmicas, associadas a cada um dos dez sistemas dinâmicos abordados:

- distribuição estatística de números de ocupações: $\log_{10}[\varrho_{noc}(Q)] \times \log_{10}[Q]$
- distribuição estatística de tempos de ocupações: $\log_{10}[\varrho_{toc}(\tau_o)] \times \log_{10}[\tau_o]$
- distribuição estatística de tempos de desocupações: $\log_{10}[\varrho_{tdc}(\tau_d)] \times \log_{10}[\tau_d]$

As quantidades, $\varrho_{ocn}(Q)$ e Q , $\varrho_{toc}(\tau_o)$ e τ_o , $\varrho_{tdc}(\tau_d)$ e τ_d , estão definidas nos tópicos “Tempos e números de ocupações” e “Tempos de desocupações”, seção 2.1 do capítulo 2.

Organização da exposição. Cada uma das seções seguintes se refere a um sistema dinâmico específico. Em cada uma delas são exibidas três figuras na seguinte ordem: - curva $\log_{10}[\varrho_{noc}(Q)] \times \log_{10}[Q]$ - curva $\log_{10}[\varrho_{toc}(\tau_o)] \times \log_{10}[\tau_o]$ - curva $\log_{10}[\varrho_{tdc}(\tau_d)] \times \log_{10}[\tau_d]$. Há uma figura por página.

Extensões em décadas. Cada uma das curvas nas dez seções tem como atributo a extensão em décadas do intervalo de valores de Q , $(\Delta Q)_{dde}$, ou de τ_o , $(\Delta \tau_o)_{dde}$, ou de τ_d , $(\Delta \tau_d)_{dde}$, em que vale o ajuste linear. Onde: $(\Delta x)_{dde} \equiv \log_{10}(x_{fs}) - \log_{10}(x_{ii})$, x_{ii} é o extremo inferior da classe com valor central x_i , x_{fs} é o extremo superior da classe com valor central x_f , x_i e x_f são respectivamente os valores centrais das classes em que tem início e fim o mencionado intervalo. Todas as definições sobre as classes e demais atributos dos histogramas encontram-se no tópico “Histogramas, intervalos e classes”, seção 2.2 do capítulo 2.

4.1 Mapa de Duffing (Dfm)

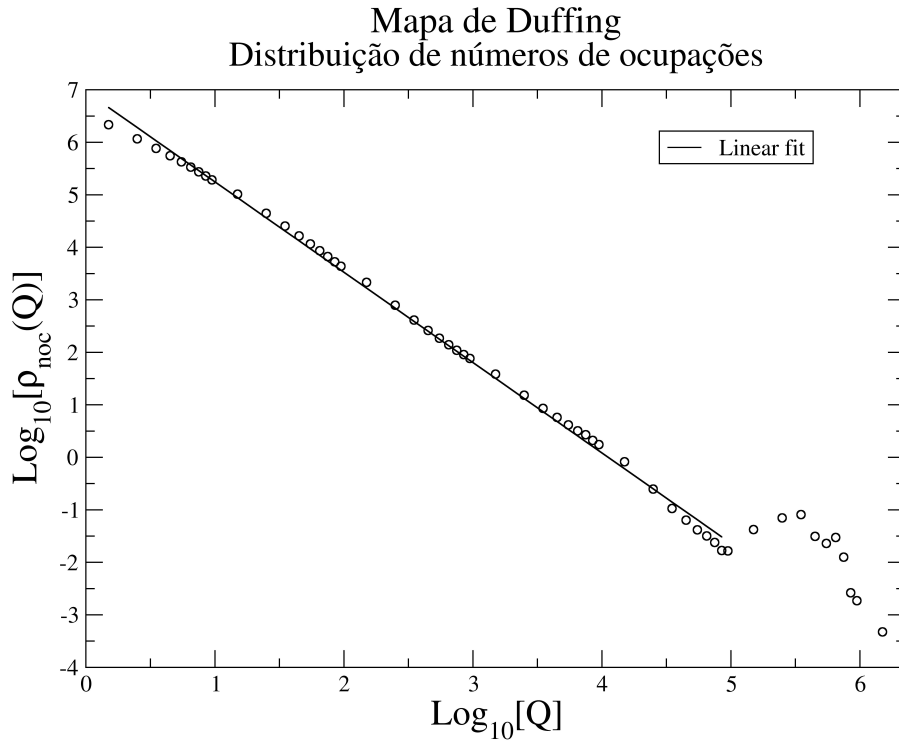


Figura 13 – Dfm(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste: $(\Delta Q)_{dde} = 4,9$, a inclinação: $-\gamma_{noc} = -(1,71 \pm 0,01)$, valores extremos de Q : $Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 8,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9978$.

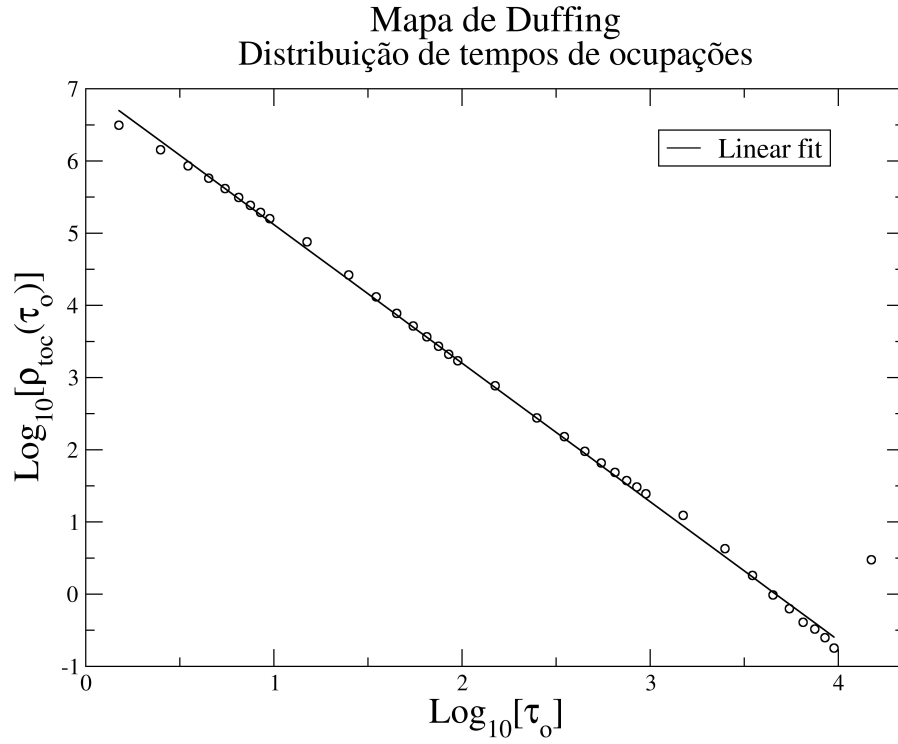


Figura 14 – Dfm(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 4,0$, inclinação: $-\gamma_{toc} = -(1,92 \pm 0,01)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9988$.

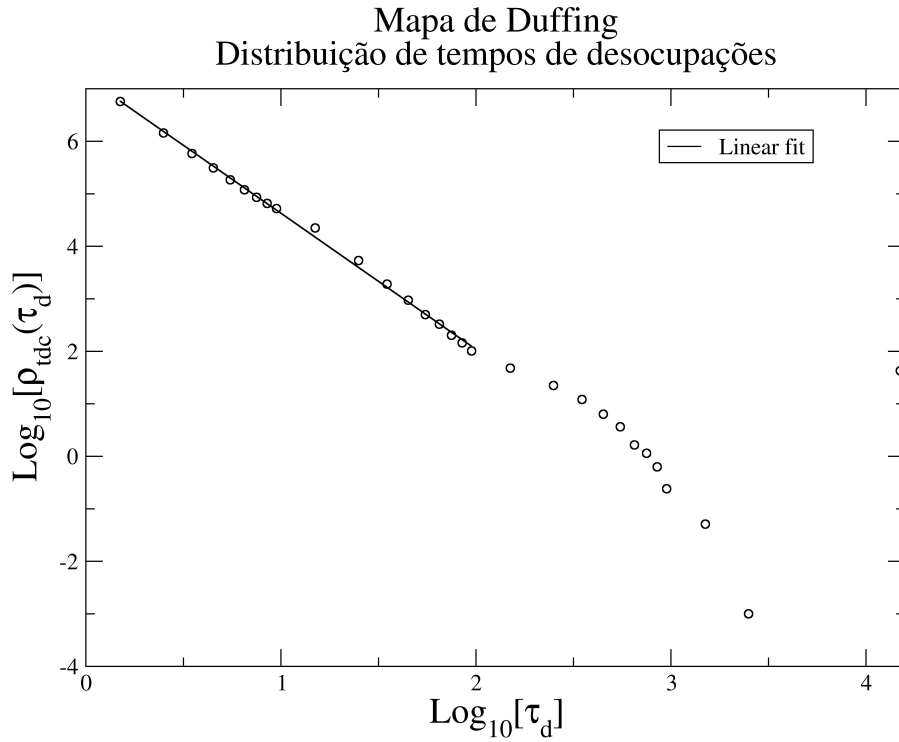


Figura 15 – Dfm(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_d)_{dde} = 2,0$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(2,59 \pm 0,03)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 1,0 \times 10^2$, o quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9980$

4.2 Mapa de Hénon (Hen)

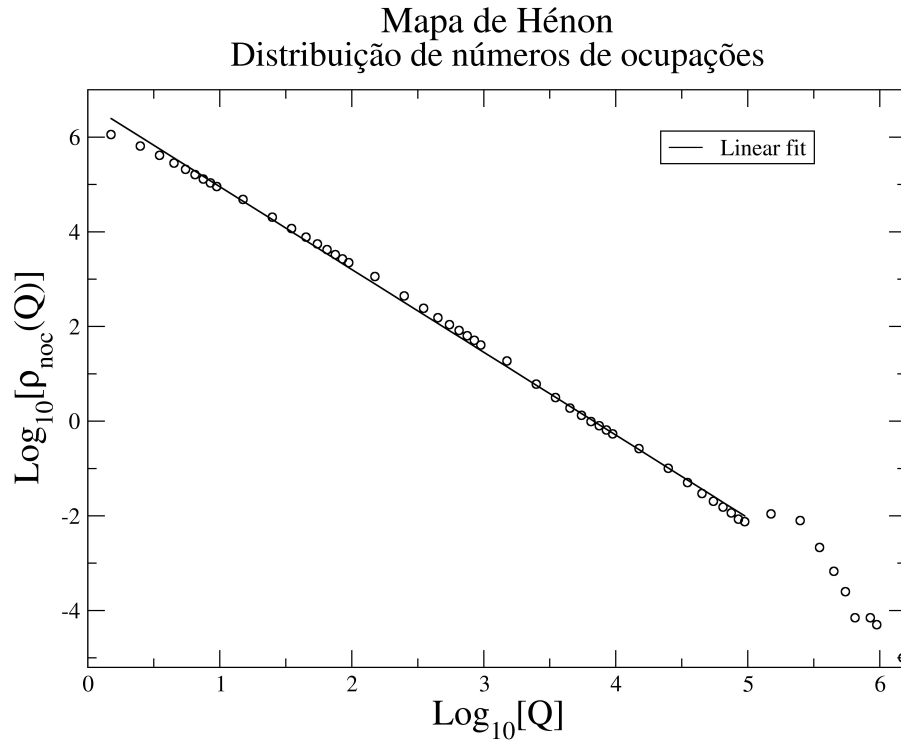


Figura 16 – Hen(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 5,0$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(1,75 \pm 0,01)$, valores extremos de Q : $Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 1,0 \times 10^5$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9982$.

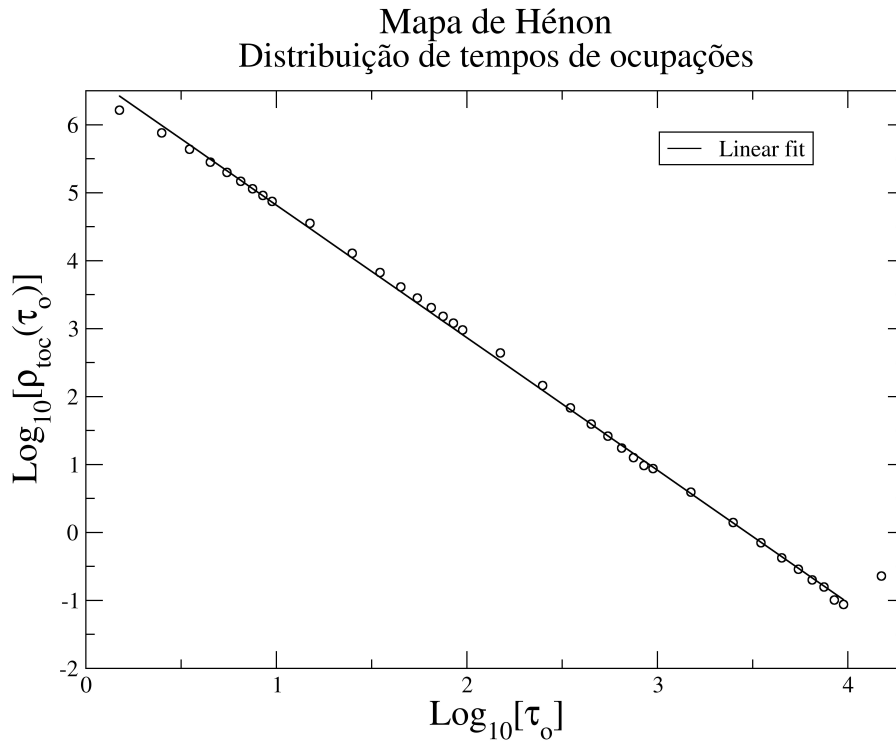


Figura 17 – Hen(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 4,0$, inclinação: $-\gamma_{toc} = -(1,95 \pm 0,01)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9992$.

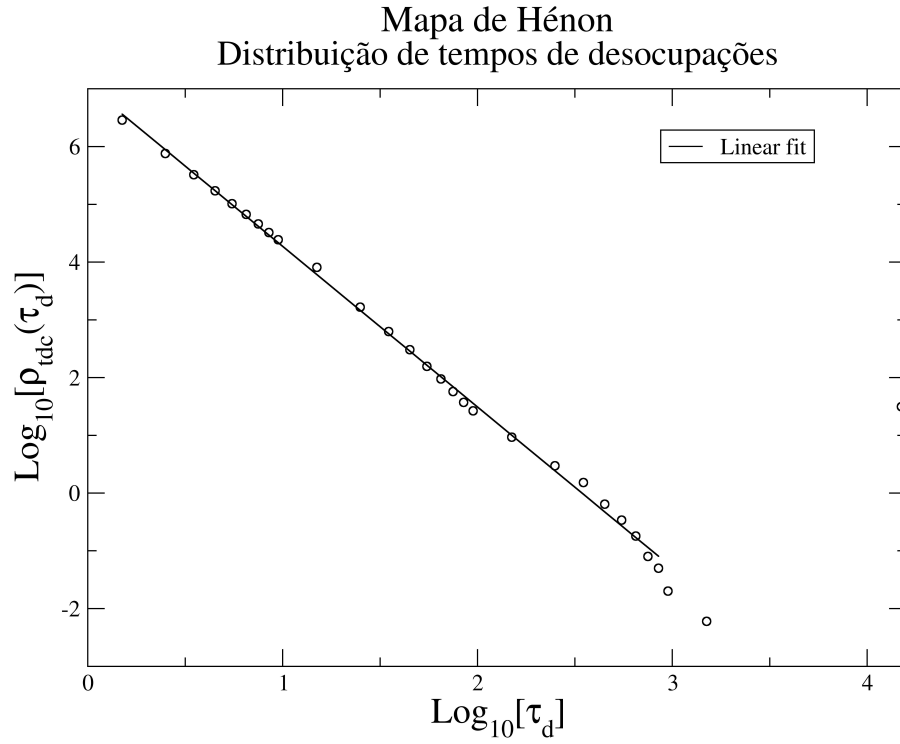


Figura 18 – Hen(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_d)_{dde} = 2,90$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(2,78 \pm 0,02)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 8,0 \times 10^2$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9984$

4.3 Mapa de Ikeda (Ike)

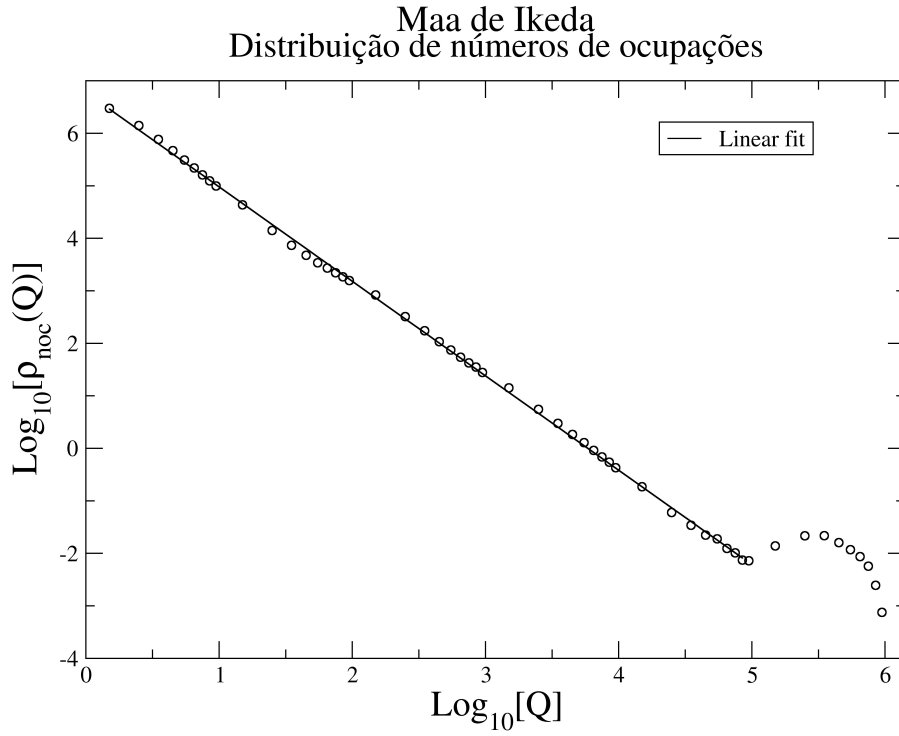


Figura 19 – Ike(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 4,95$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(1,799 \pm 0,006)$, valores extremos de Q : $Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 9,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9994$.

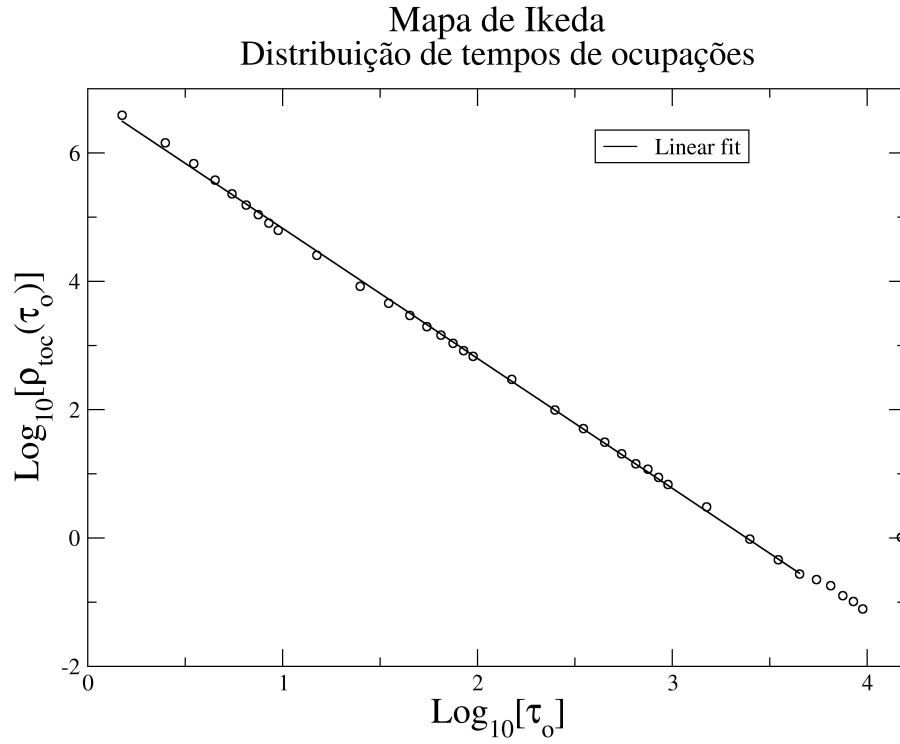


Figura 20 – Ike(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 3,70$, inclinação: $-\gamma_{toc} = -(2,026 \pm 0,009)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 5,0 \times 10^3$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9994$.

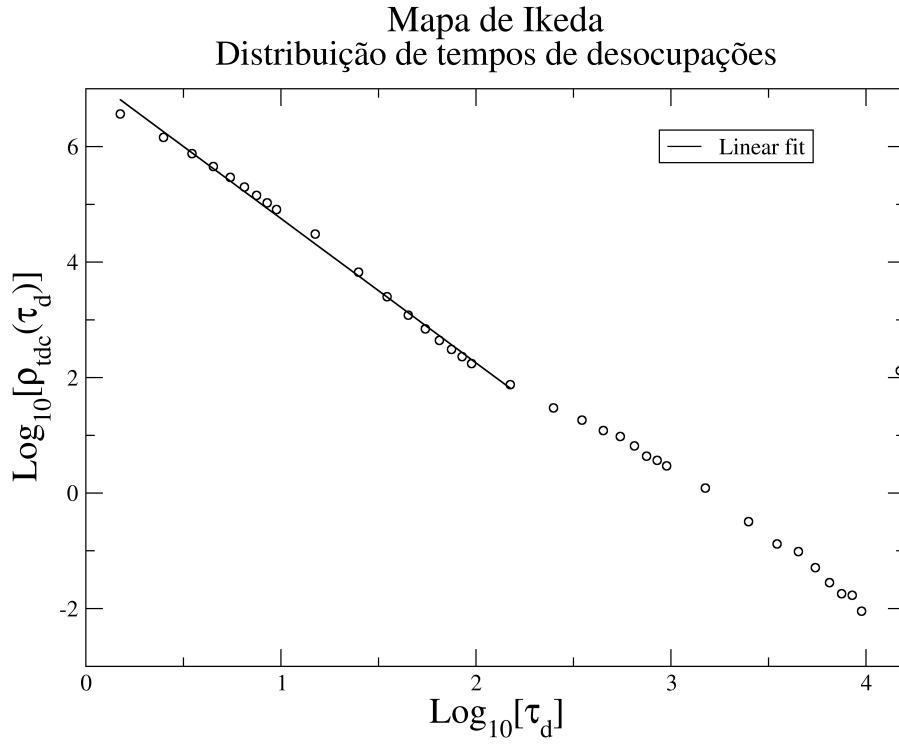


Figura 21 – Ike(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_v)_{dde} = 2,30$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(2,50 \pm 0,04)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 2,0 \times 10^2$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9958$

4.4 Mapa de Lozi (Loz)

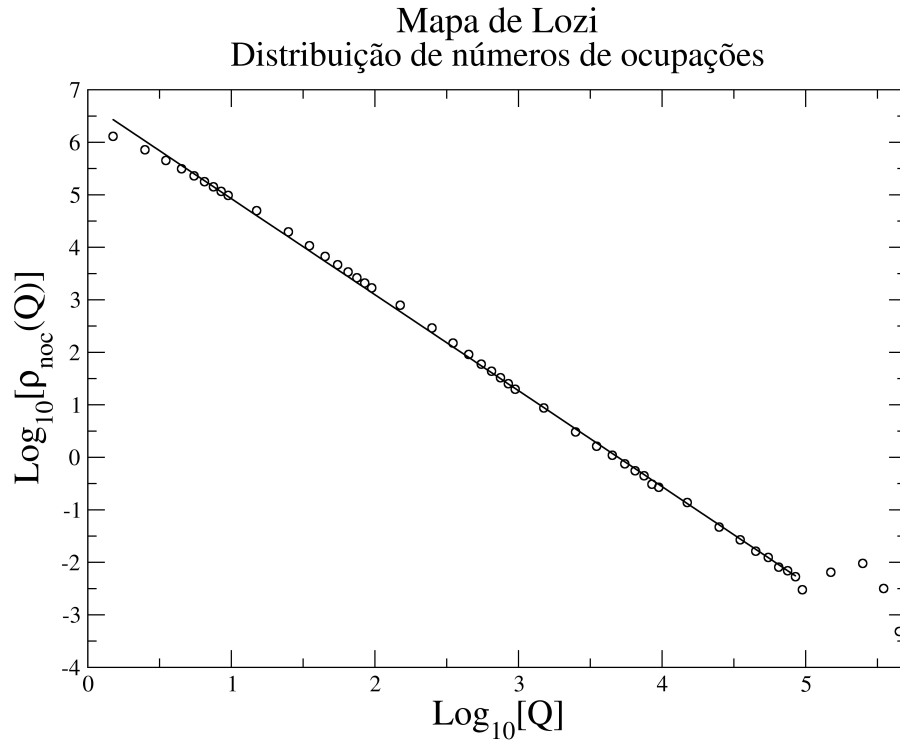


Figura 22 – Loz(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 4,95$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(1,829 \pm 0,009)$, valores extremos de Q : $Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 9,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9990$.

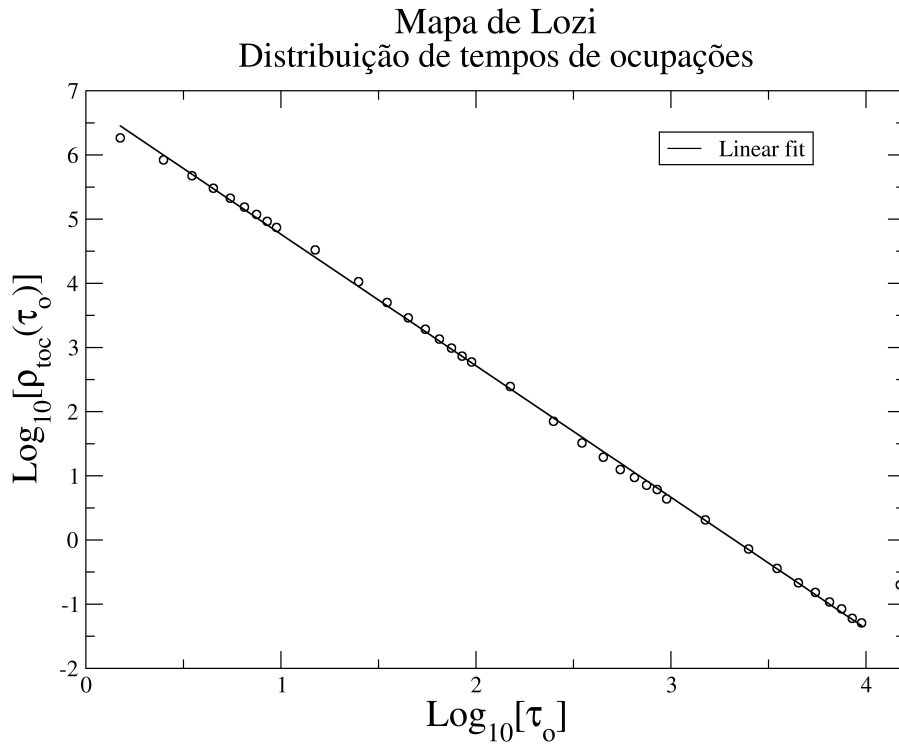


Figura 23 – Loz(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 4,00$, a inclinação é $-\gamma_{toc} = -(2,049 \pm 0,009)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9994$.

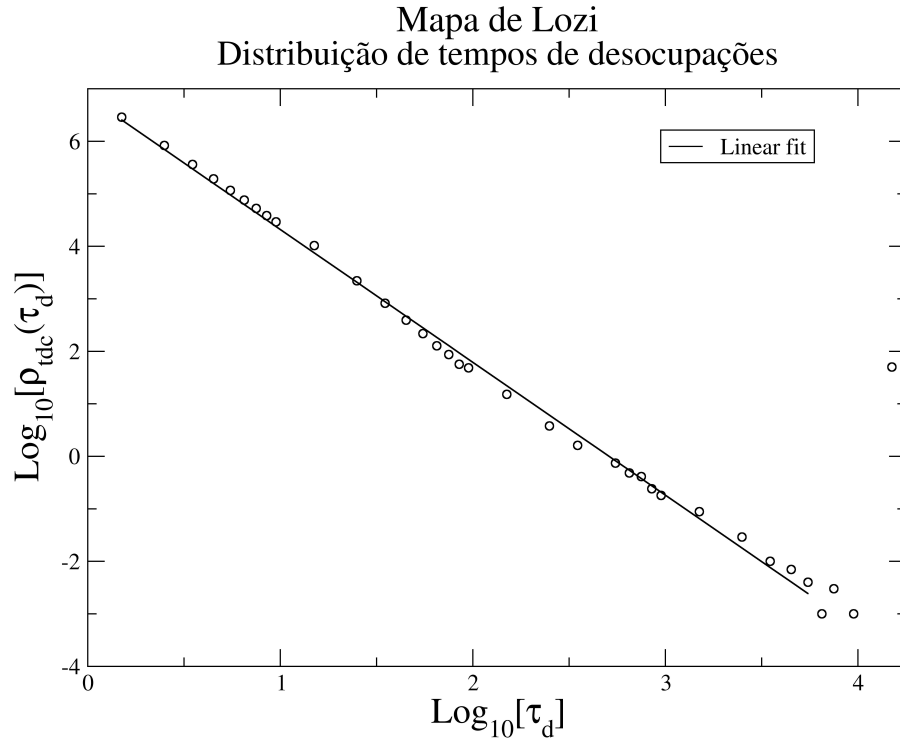


Figura 24 – $\text{Loz}(\text{Tdc})$ - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_v)_{dde} = 3,78$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(2,53 \pm 0,02)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 6,0 \times 10^3$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9974$

4.5 Mapa Tinkerbell (Tin)

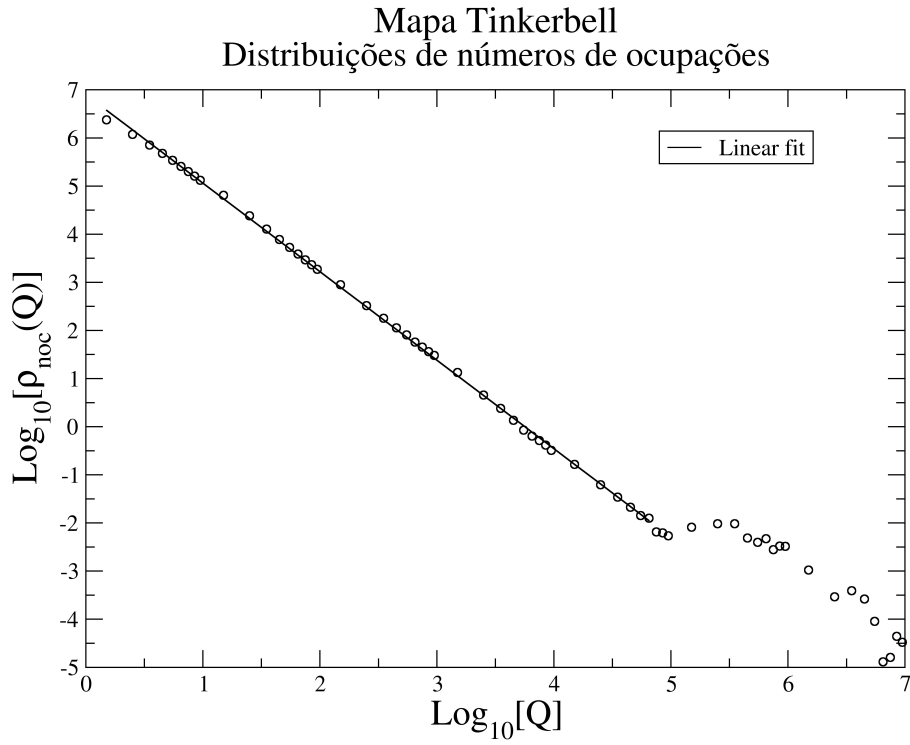


Figura 25 – Tin(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 4,85$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(1,840 \pm 0,006)$, valores extremos de Q : $Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 7,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9996$.

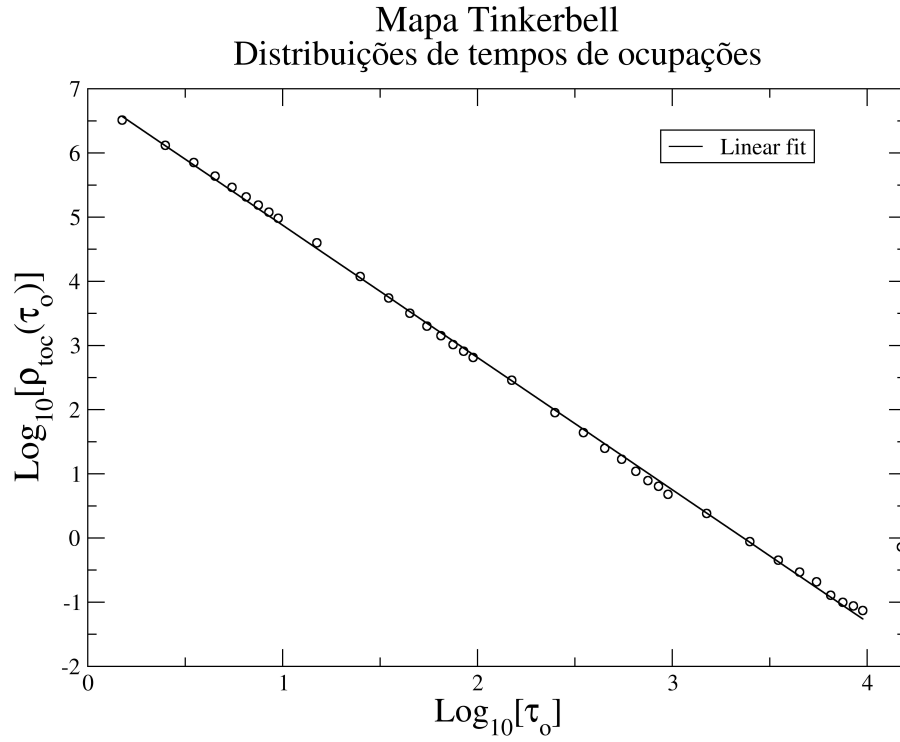


Figura 26 – Tin(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 4,00$, a inclinação é $-\gamma_{toc} = -(2,06 \pm 0,01)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9992$.

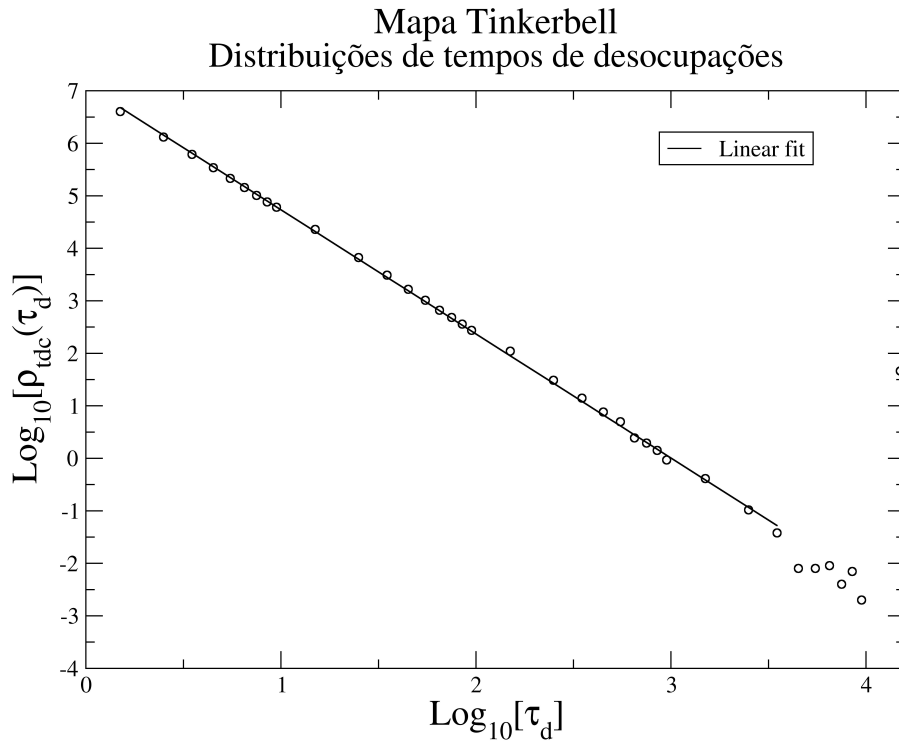


Figura 27 – Tin(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_v)_{dde} = 3,6$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(2,36 \pm 0,01)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 4,0 \times 10^3$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9996$

4.6 Mapa Seno Seno (Sin)

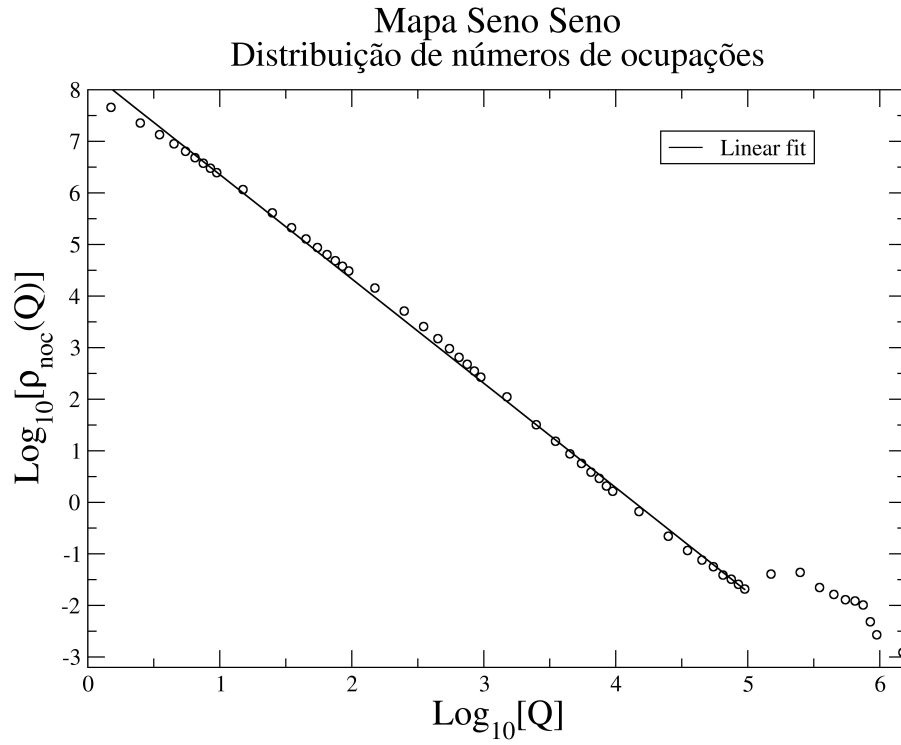


Figura 28 – Sin(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 5,00$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(2,02 \pm 0,01)$, valores extremos de Q : $Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 1,0 \times 10^5$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9984$.

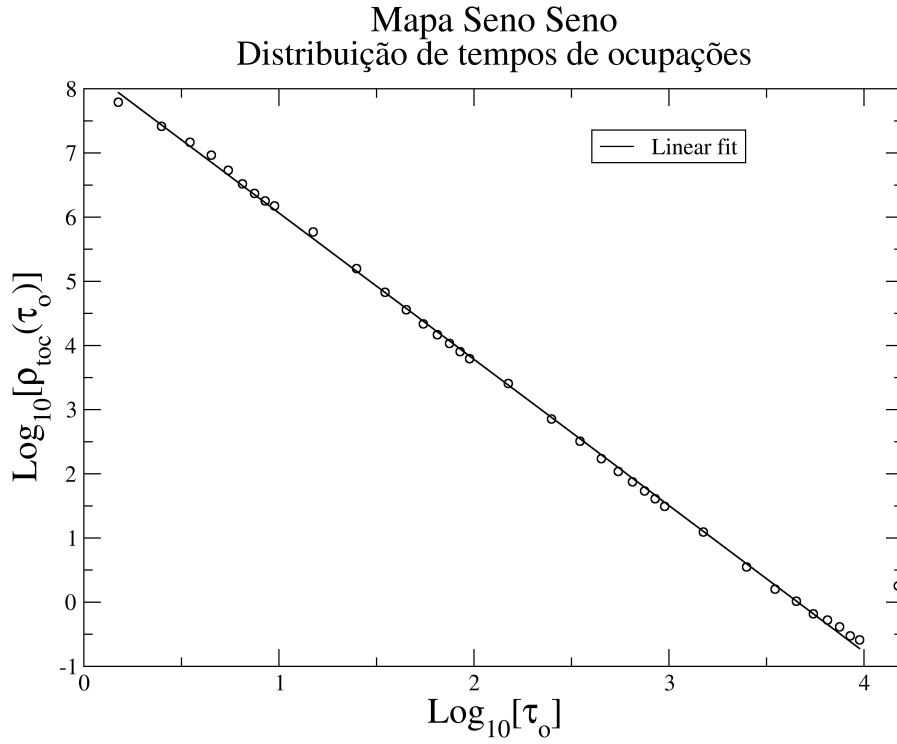


Figura 29 – Sin(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 4,00$, a inclinação é $-\gamma_{toc} = -(2,280 \pm 0,009)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9994$.

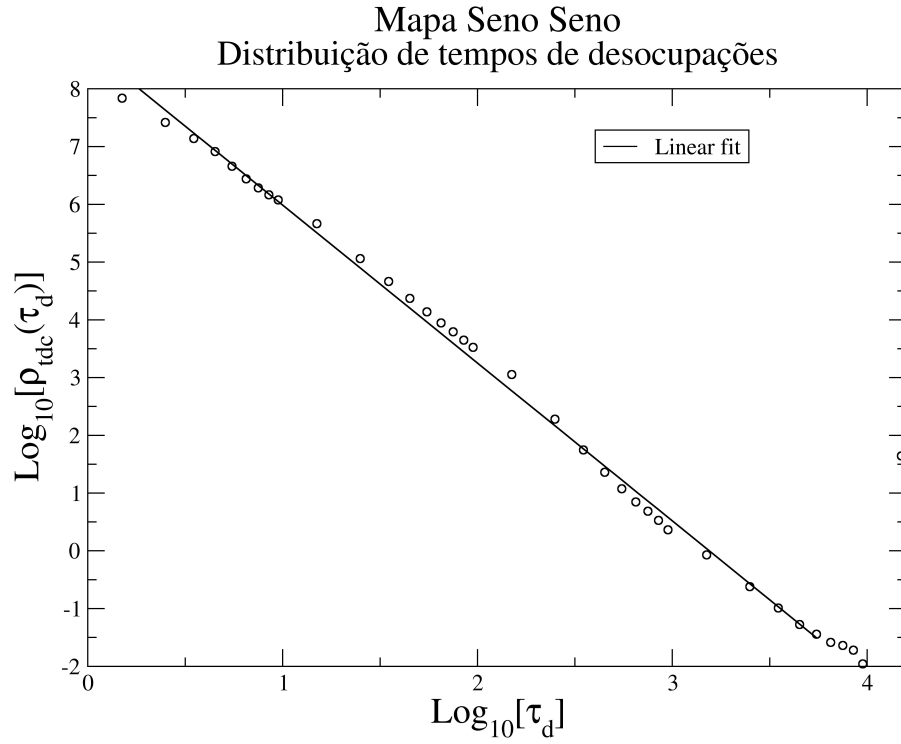


Figura 30 – Sin(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_v)_{dde} = 3,78$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(2,73 \pm 0,03)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 6,0 \times 10^3$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9968$

4.7 Mapa Ugly (Ugy)

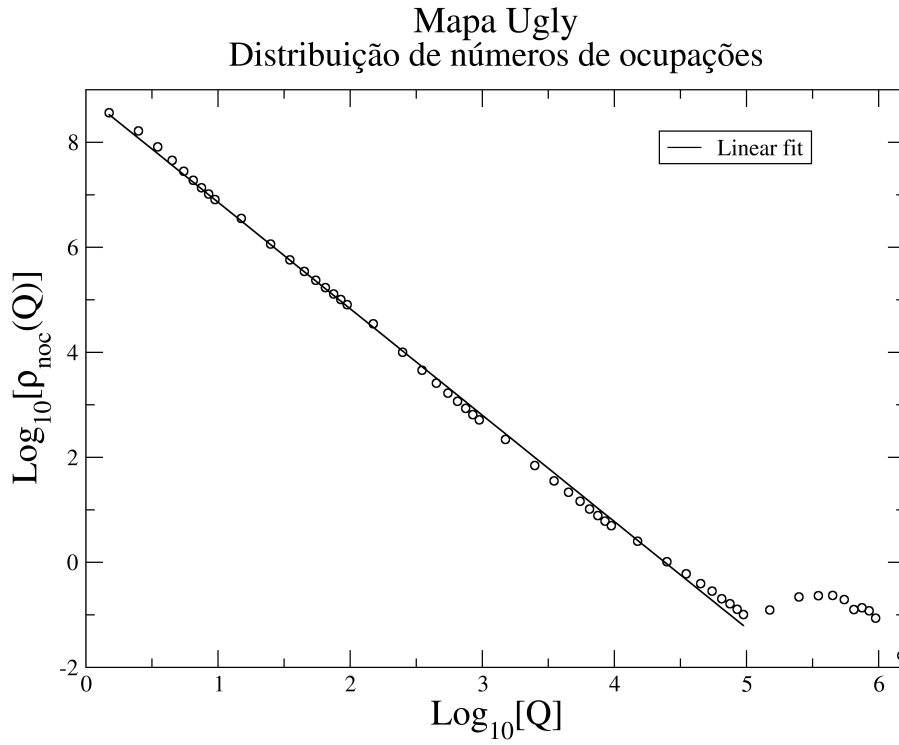


Figura 31 – Ugy(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 5,00$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(2,03 \pm 0,01)$, valores extremos de Q : $Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 1,0 \times 10^5$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9986$.

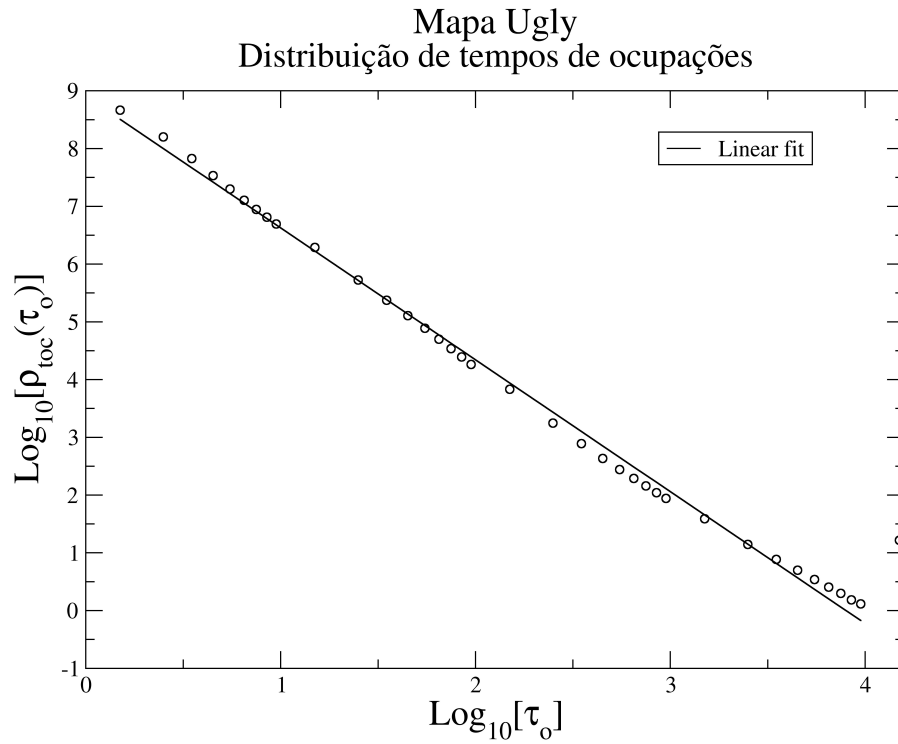


Figura 32 – Ugy(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 4,00$, a inclinação é $-\gamma_{toc} = -(2,28 \pm 0,02)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9968$.

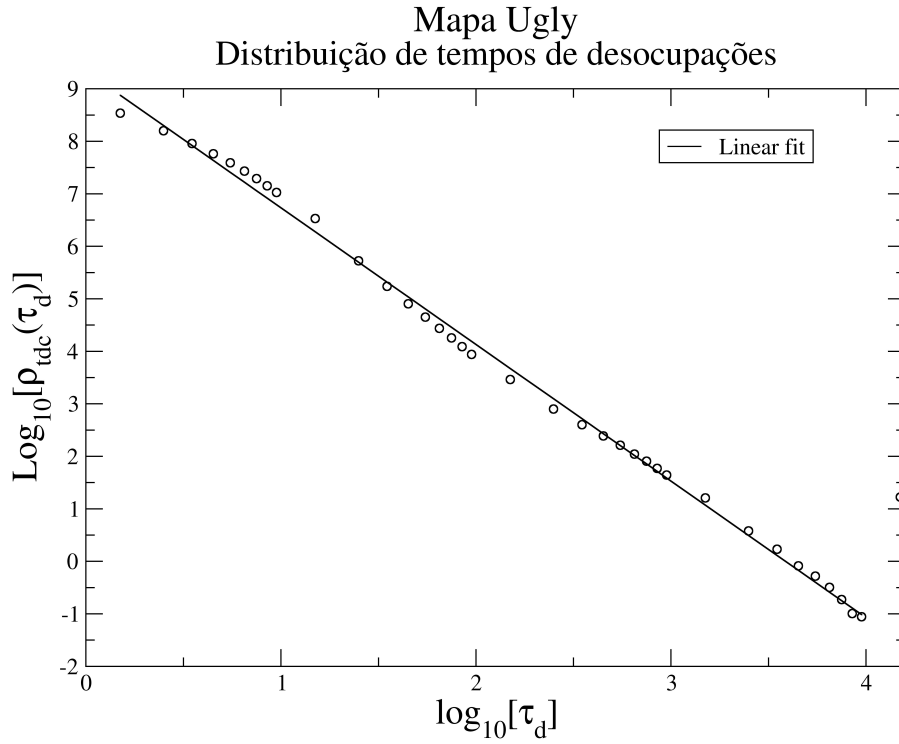


Figura 33 – Ugy(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_d)_{dde} = 4,00$, a inclinação é $-\gamma_{tdc} = -(2,60 \pm 0,02)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9972$.

4.8 Mapa Circular (Cir)

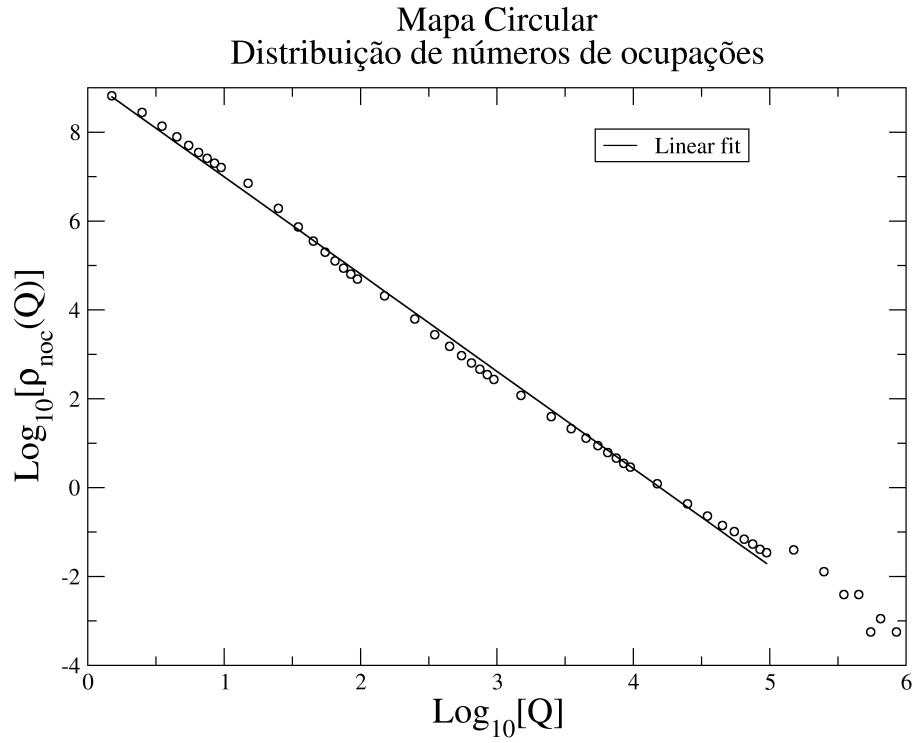


Figura 34 – Cir(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 5,00$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(2,19 \pm 0,02)$, valores extremos de Q : $Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 1,0 \times 10^5$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9976$.

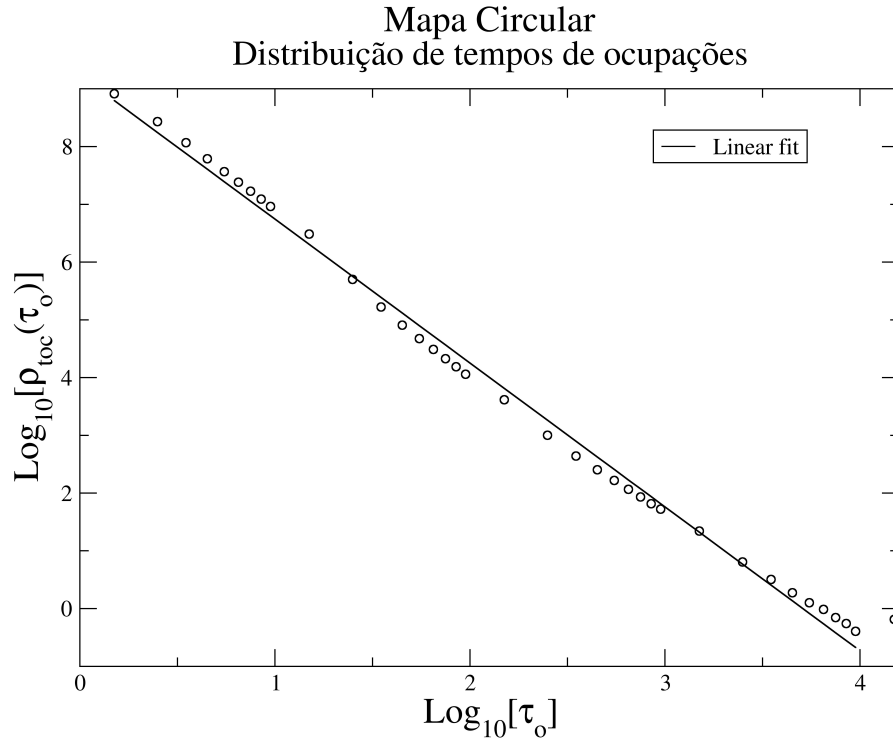


Figura 35 – Cir(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 4,00$, a inclinação é $-\gamma_{toc} = -(2,49 \pm 0,03)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 1,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9954$.

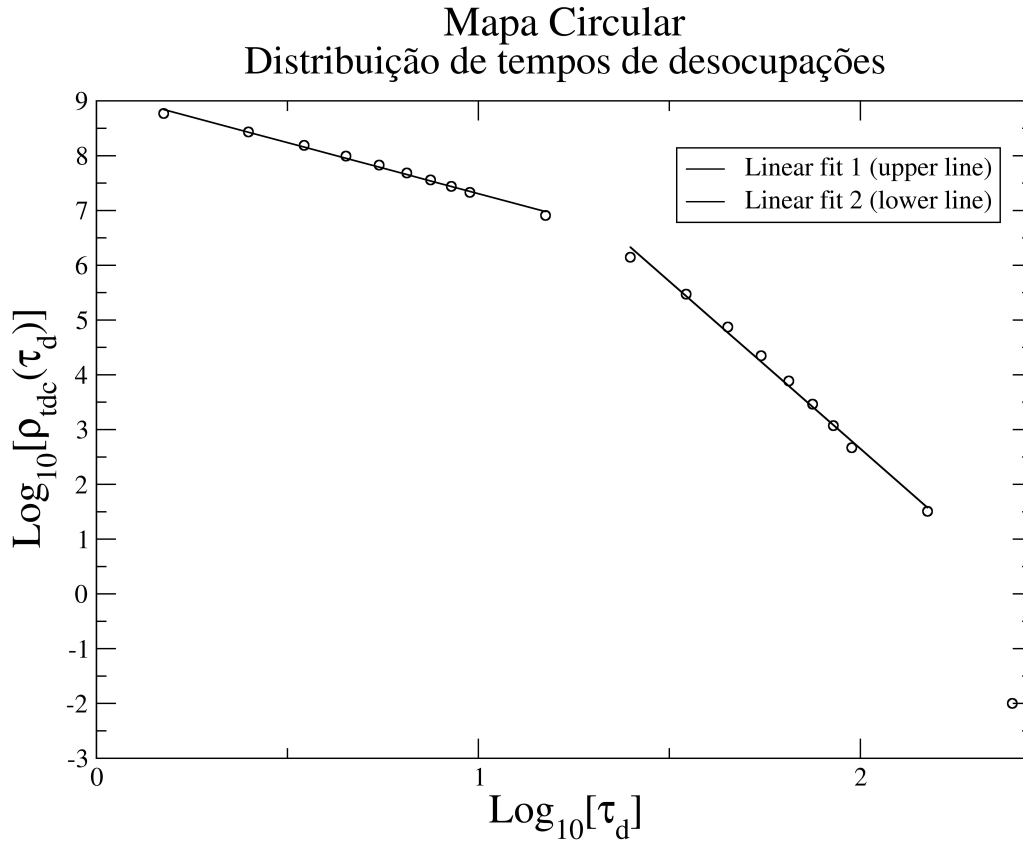


Figura 36 – Cir(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. (Ajuste 1) Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste: $(\Delta\tau_v)_{dde} = 1,30$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(1,86 \pm 0,05)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 2,0 \times 10^1$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9942$ (Ajuste 2) Extensão em década do intervalo em que ocorre o ajuste: $(\Delta\tau_d)_{dde} = 1,00$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(6,1 \pm 0,2)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 2,0 \times 10^1$ e $\tau_{d,fs} = 2,0 \times 10^2$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9948$

4.9 Mapa de Sinai (Sni)

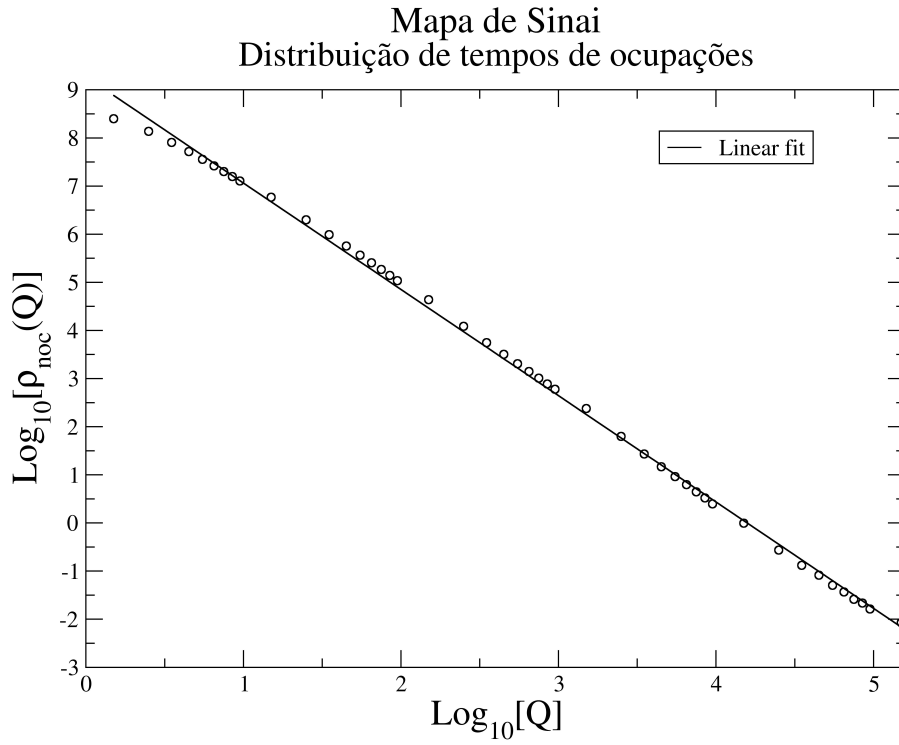


Figura 37 – Sni(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 5,30$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(2,21 \pm 0,01)$, valores extremos de Q : $Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 2,0 \times 10^5$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9986$.

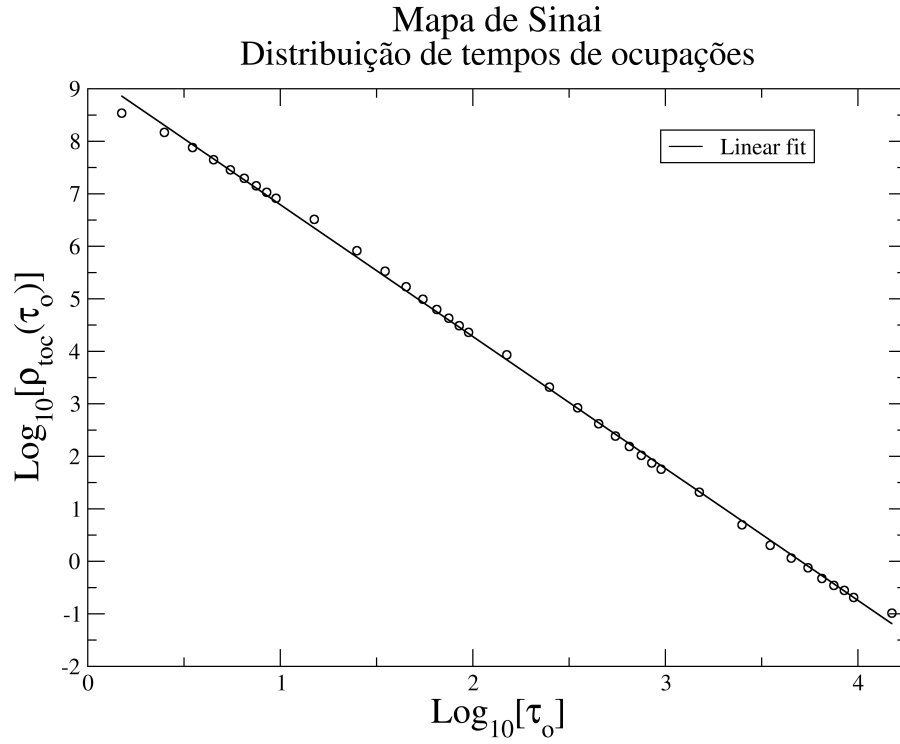


Figura 38 – Sni(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 4,30$, a inclinação é $-\gamma_{toc} = -(2,51 \pm 0,01)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 2,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9990$.

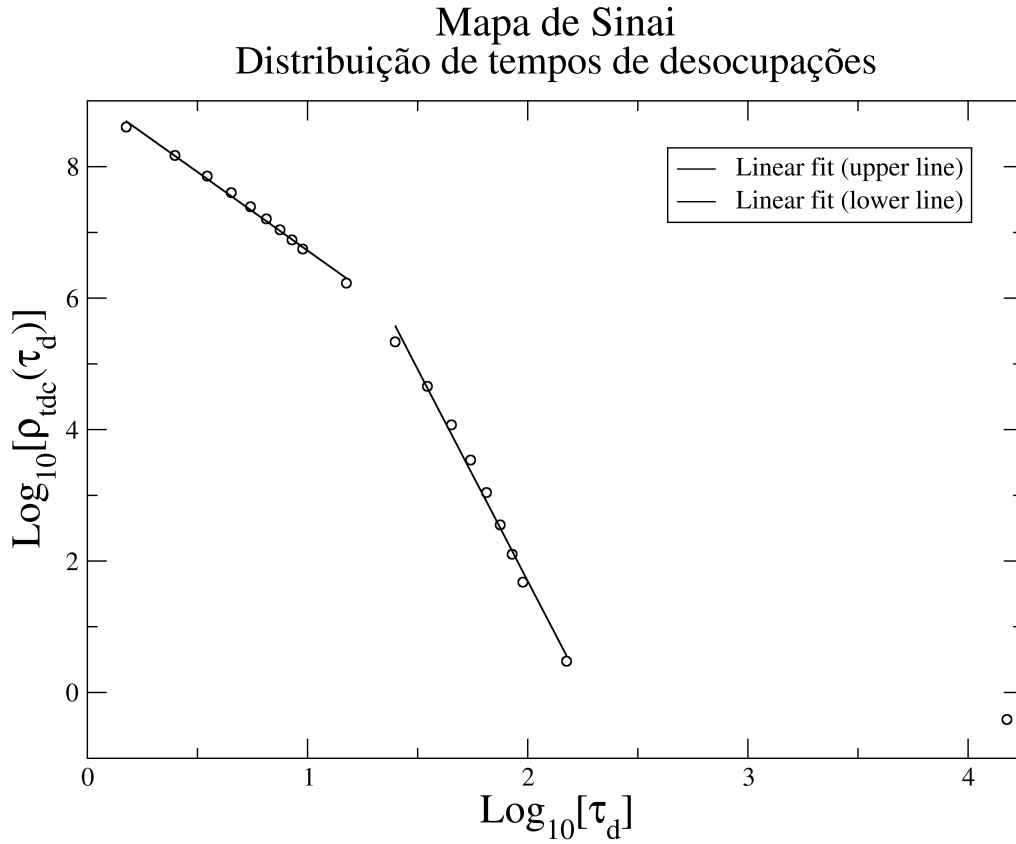


Figura 39 – Sni(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. (Ajuste 1) Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste: $(\Delta\tau_d)_{dde} = 1,30$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(2,39 \pm 0,06)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 2,0 \times 10^1$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9948$ (Ajuste 2) Extensão em década do intervalo em que ocorre o ajuste: $(\Delta\tau_d)_{dde} = 1,00$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(6,4 \pm 0,2)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 2,0 \times 10^1$ e $\tau_{d,fs} = 2,0 \times 10^2$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9912$

4.10 Mapa Logístico (Log)

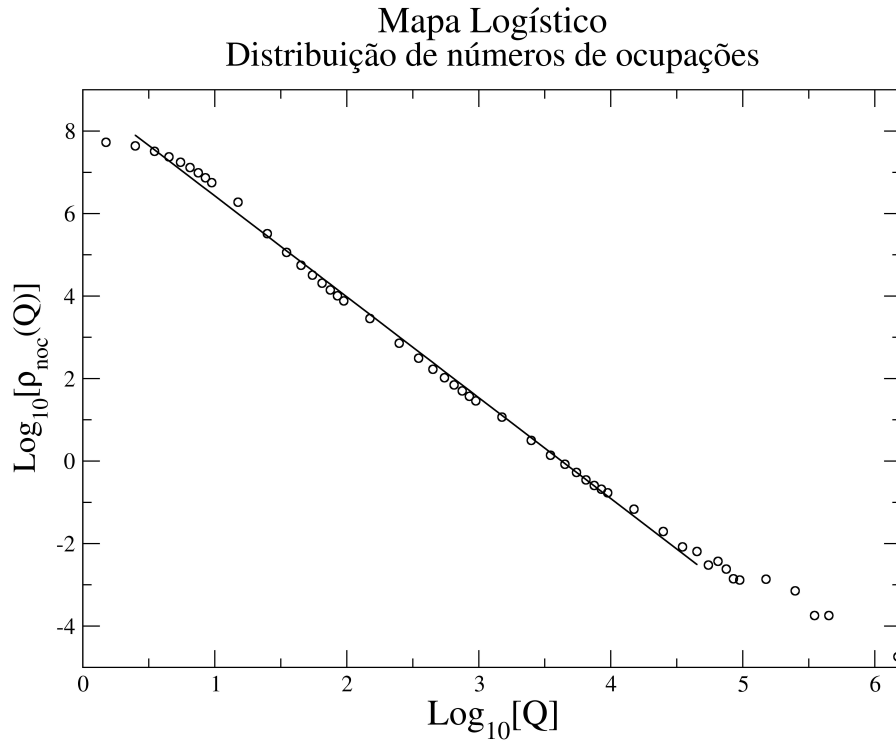


Figura 40 – $\text{Log}(\text{Noc})$ - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dde} = 4,40$, inclinação: $-\gamma_{noc} = -(2,45 \pm 0,02)$, valores extremos de Q : $Q_{ii} = 2,0$ e $Q_{fs} = 5,0 \times 10^4$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9974$.

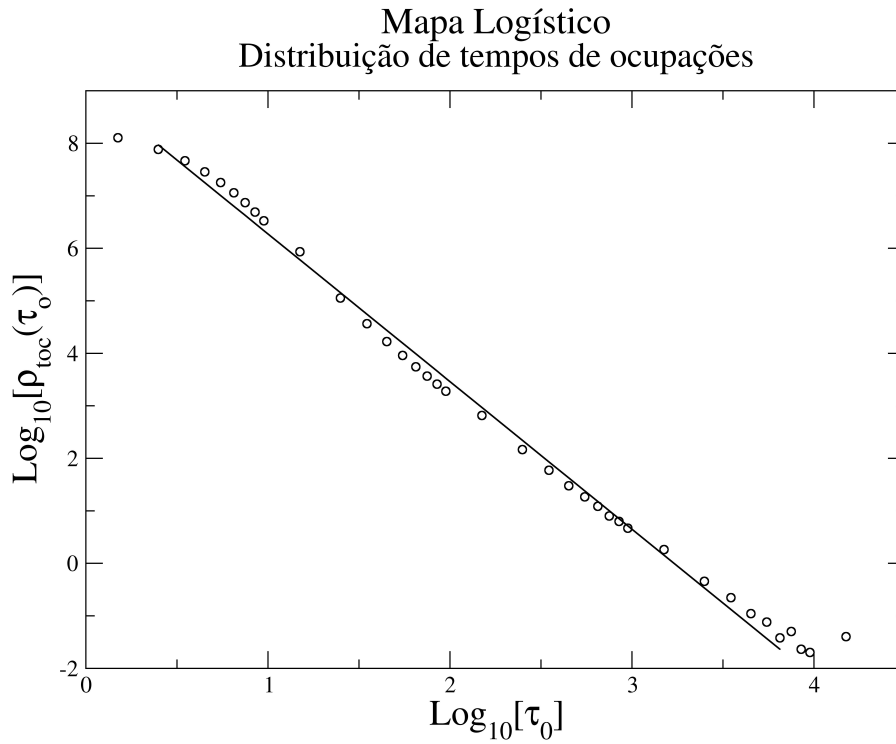


Figura 41 – $\text{Log}(\text{Toc})$ - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dde} = 3,54$, a inclinação é $-\gamma_{toc} = -(2,76 \pm 0,03)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 2,0$ e $\tau_{o,fs} = 7,0 \times 10^3$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9951$.

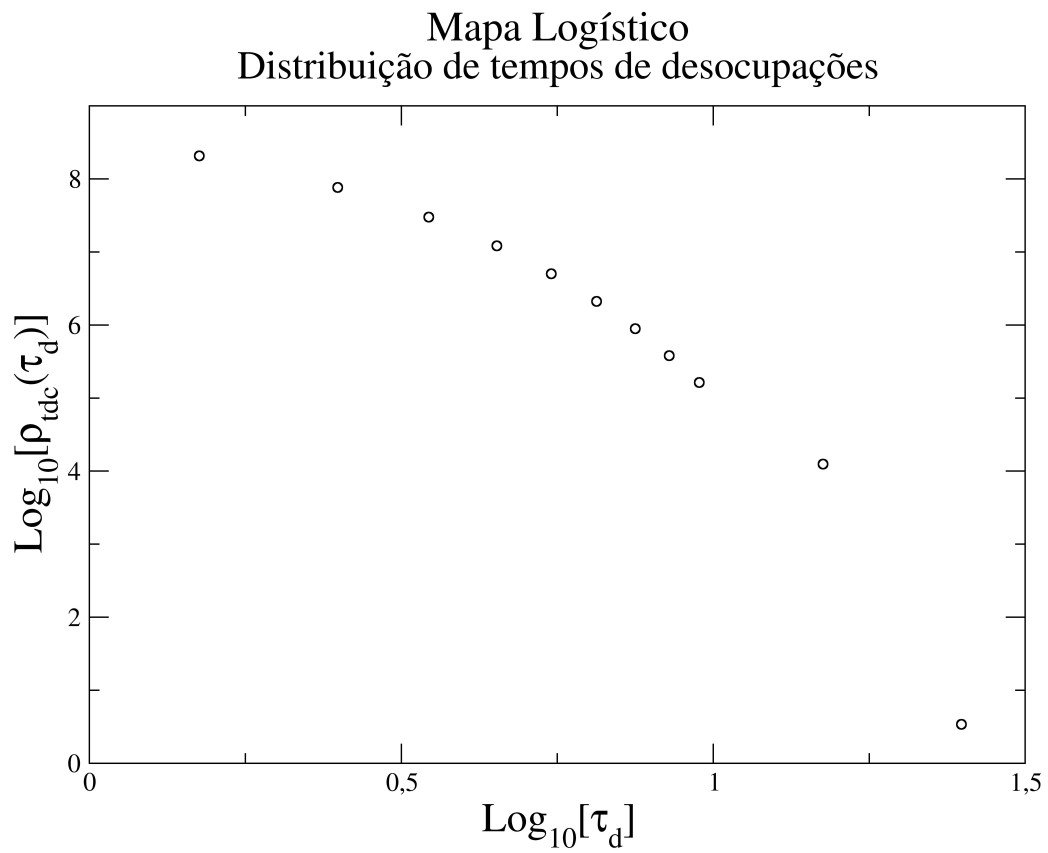


Figura 42 – $\text{Log}(\text{Tdc})$ - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica.

5 Espaço-Tempo de Letelier: Papel da Nuvem de Cordas sobre Alguns Fenômenos Clássicos.

5.1 Introdução.

Neste capítulo vamos estudar o papel de nuvem de cordas em cenário no qual um buraco negro estático está rodeado por esta nuvem, conforme proposto por Letelier [58], nos anos 1970. Nessa proposta diferentes simetrias foram consideradas, a saber, a plana, a cilíndrica e a esférica. Nesta tese, estamos interessados neste último caso, que corresponde à solução do buraco negro de Schwarzschild com uma nuvem de cordas (espaço-tempo de Letelier) ou buraco negro de Letelier. Este capítulo aborda os seguintes tópicos: Na seção 1, fazemos uma breve revisão sobre a obtenção da métrica correspondente ao espaço-tempo de Letelier. Na seção 3, apresentamos alguns resultados sobre a influência de nuvens de cordas nas equações de movimento, precessão do periélio e desvio da luz. Finalmente, na seção 3, apresentamos as conclusões. Vamos admitir a assinatura $(+,-,-,-)$, e que $\hbar = c = 1$.

5.2 Nuvem de Cordas na Relatividade Geral.

Na época em que Letelier encontrou a solução [58] mencionada no parágrafo anterior foram apresentadas as justificativas que seguem para considerar o cenário envolvido.

- As cordas são mais apropriadas para a construção de modelos para as interações [81, 82].
- A descrição do universo com o uso de objetos com extensão ao invés de objetos pontuais (partículas) parecia uma ideia bastante promissora.

Levando em consideração essa ideia de cordas (cordas de Nambu-Goto), Letelier apresentou o formalismo para tratar nuvem de cordas [58] e obteve a solução das equações de Einstein para uma nuvem de cordas esfericamente simétrica, solução designada por espaço-tempo de Letelier [83]. Neste capítulo vamos fazer uma breve revisão sobre o formalismo usado por Letelier, bem como reobter a solução correspondente a um buraco negro imerso em uma nuvem de cordas esfericamente simétrica.

5.3 Formalismo para Descrever uma Nuvem de Cordas.

Descreveremos uma corda usando a função $x^\mu = x^\mu(\tau, \sigma)$, onde τ e σ são parâmetros. Fazendo $\tau = x^0 = t$ num dado instante de tempo t , a corda corresponderá a uma curva no espaço tridimensional dada pelas funções $x^i = x^i(\tau, \sigma)$. Suporemos que a corda se propaga com velocidade menor ou igual a velocidade da luz, e portanto, obedecerá a seguinte relação:

$$1 - \left(\frac{\partial x^i}{\partial t} \right)^2 \geq 0 \quad (5.1)$$

A evolução da corda produzirá uma superfície, que em cada ponto apresentará um vetor tangente tipo-tempo ou tipo-luz. A ação relativística para uma corda livre (corda de Nambu-Goto) é proporcional a área da superfície gerada pelo processo de evolução da corda. O elemento de área associado a uma dada superfície é dado por

$$dA = \sqrt{\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma} \right)^2 - \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau} \right)^2} d\sigma d\tau \quad (5.2)$$

sendo positiva se

$$\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma} \right)^2 - \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau} \right)^2 \geq 0 \quad (5.3)$$

Introduzindo a notação $(\zeta^0, \zeta^1) = (\tau, \sigma)$, o tensor métrico é dado por

$$g_{\alpha\beta}(\zeta) = \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu \quad (5.4)$$

onde os índices α e β assumem os valores 0 ou 1. Usando a equação 5.4 vemos que

$$\det g(\zeta) = \left[\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma} \right)^2 \right] \quad (5.5)$$

Usando as equações (5.2-5.5), o elemento de área dA pode ser escrito como segue

$$dA = \sqrt{-\det g(\zeta)} d\zeta^1 d\zeta^0 \quad (5.6)$$

sendo invariante por reparametrização. Façamos

$$\tilde{\zeta}_i = \tilde{\zeta}_i(\zeta_0, \zeta_1) \quad (5.7)$$

então

$$g_{\alpha\beta}(\zeta) = \sum_{i,j} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{\zeta}_i} \frac{\partial \tilde{\zeta}_i}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial x_\mu}{\partial \tilde{\zeta}_j} \frac{\partial \tilde{\zeta}_j}{\partial \zeta_\beta} \quad (5.8)$$

que podemos escrever na forma

$$g_{\alpha\beta}(\zeta) = M_{\alpha i}^T g_{ij}(\tilde{\zeta}) M_{j\beta} \quad (5.9)$$

onde

$$M_{ab} = \frac{\partial \tilde{\zeta}_a}{\partial \zeta_b} \quad (5.10)$$

Usando a equação 5.9, obtemos

$$\det g = \det \tilde{g} (\det M)^2 \quad (5.11)$$

Para que o elemento infinitesimal dA seja invariante, devemos ter

$$d\tilde{A} = \sqrt{-\det \tilde{g}} d\tilde{\zeta}^1 d\tilde{\zeta}^0 \quad (5.12)$$

Substituindo a equação 5.11 na equação 5.12, obtemos:

$$d\tilde{A} = \sqrt{-\det g} \frac{d\tilde{\zeta}_1 d\tilde{\zeta}_0}{\det M} \quad (5.13)$$

Se $d\tilde{A} = dA$, então, podemos usar as equações 5.6 e 5.13, para concluirmos que

$$d\zeta_1 d\zeta_0 = \frac{d\tilde{\zeta}_1 d\tilde{\zeta}_0}{\det M} \quad (5.14)$$

A lagrangiana é uma função de $\dot{x}$ e x' , onde o ponto e a linha significam as derivadas em relação a τ e a σ , respectivamente. Fazendo a variação infinitesimal que segue

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \delta x^\mu (\tau, \sigma) \quad (5.15)$$

podemos obter, a partir do princípio de mínima ação

$$\delta S = 0 \quad (5.16)$$

a equação de movimento da corda. Explicitamente, temos que

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial L}{\partial x'_\mu} \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial \sigma} \right) d\sigma \quad (5.17)$$

onde

$$\delta x^\mu (\tau = \tau_1) = 0 = \delta x^\mu (\tau = \tau_2) \quad (5.18)$$

e

$$\delta x^\mu (\sigma = 0), \delta x^\mu (\sigma = \pi) \quad (5.19)$$

são arbitrárias. Portanto, usando a equação 5.16, concluimos que

$$\frac{\partial L}{\partial x'_\mu} = 0 \quad (5.20)$$

para $\sigma = 0$ ou $\sigma = \pi$. A equação de movimento da corda livre é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial x'_\mu} = 0 \quad (5.21)$$

Conforme o formalismo apresentado em [58], podemos estudar as cordas através de um bivector $\Sigma^{\mu\nu}$. Consideremos, então, a seguinte ação

$$S = \int L d\zeta^0 d\zeta^1 \quad (5.22)$$

$$L \equiv M\sqrt{-\gamma} \quad (5.23)$$

sendo M uma constante adimensional que caracteriza a corda e

$$\gamma \equiv \det \gamma_{AB} \quad (5.24)$$

com

$$\gamma_{AB} \equiv g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^B} \quad (5.25)$$

Um bivetor $\Sigma^{\mu\nu}$ é um tensor de ordem 2 associado a folha-mundo da corda, sendo dado por

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{AB} \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^B} \quad (5.26)$$

onde ϵ^{AB} é o símbolo de Levi-Civita bidimensional normalizado, de modo que $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$.

Substituindo a equação 5.25 na equação 5.24, obtemos

$$\gamma = g_{\mu\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^0} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \zeta^0} g_{\beta\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \zeta^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^1} - g_{\mu\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^0} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \zeta^1} g_{\beta\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \zeta^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^0} \quad (5.27)$$

A expressão covariante para o bivetor $\Sigma^{\mu\nu}$ dada pela equação 5.26 é obtida a partir da relação

$$\Sigma_{\alpha\beta} = g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} \Sigma^{\mu\nu} \quad (5.28)$$

e como consequência a grandeza $\Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta}$ pode ser escrita da seguinte forma

$$\Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} = g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} \Sigma^{\alpha\beta} \Sigma^{\mu\nu} \quad (5.29)$$

Substituindo a equação 5.26 na equação 5.29, obtemos

$$\Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} = g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} \epsilon^{CD} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \zeta^C} \frac{\partial x^\beta}{\partial \zeta^D} \epsilon^{AB} \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^B} \quad (5.30)$$

Efetuada as somas indicadas, obtemos o seguinte resultado

$$\gamma = \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \quad (5.31)$$

Substituindo a equação 5.31 na equação 5.23, encontramos a seguinte expressão para a lagrangiana, em termos dos bivetores,

$$L = M \sqrt{-\frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta}} \quad (5.32)$$

Neste formalismo, o tensor energia-momentum para uma corda é escrito como

$$T^{\mu\nu} = \frac{M}{\sqrt{-\gamma}} \Sigma^{\mu\alpha} \Sigma_\alpha^\nu \quad (5.33)$$

onde usamos a relação $\Sigma^{\alpha\beta} = -\Sigma^{\beta\alpha}$. Fazendo uma analogia com a equação 5.33, concluímos que o tensor energia-momentum de uma nuvem de cordas de densidade ρ , pode ser dado pela relação

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{\Sigma^{\mu\alpha} \Sigma_{\alpha}^{\nu}}{\sqrt{-\gamma}} \quad (5.34)$$

Usando a equação 5.7, concluímos que a folha-mundo x^{μ} e o bivector $\Sigma^{\mu\nu}$ possuem as seguintes leis de transformação

$$x^{*\mu}(\zeta^*) = x^{\mu}(\zeta) \quad (5.35)$$

e

$$\Sigma^{*\mu\nu}(\zeta^*) = J \left(\frac{\zeta^C}{\zeta^{*B}} \right) \Sigma^{\mu\nu} \quad (5.36)$$

onde J é o Jacobiano da transformação e

$$\Sigma^{*\mu\nu}(\zeta^*) = \epsilon^{A^*B^*} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \zeta^{A^*}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \zeta^{B^*}} \quad (5.37)$$

Para que o tensor energia-momentum $T^{\mu\nu}$ seja invariante por reparametrização da folha-mundo da corda, a densidade de energia, ρ , ao ser transformada, deve conter o fator $\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}$. Acompanhando a evolução da nuvem de corda, no tempo, uma superfície é formada. Estamos fazendo uso de bivectores para escrever o tensor energia-momentum e, portanto, as equações de movimento para o bivector $\Sigma^{\mu\nu}$ devem satisfazer as condições que seguem [84]

$$\Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]} = 0 \quad (5.38)$$

$$\nabla_{\mu} \Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]} = 0 \quad (5.39)$$

onde os colchetes indicam a antissimetrização dos índices indicados.

As condições explicitadas garantem que o bivector $\Sigma^{\mu\nu}$ possui uma forma simples e que x_0 e x_1 formam uma superfície. Note que da primeira condição, $\Sigma^{\mu\nu}$ pode ser escrito como tendo a forma

$$\Sigma^{\mu\nu} = \xi^{\mu} \eta^{\nu} - \xi^{\nu} \eta^{\mu} \quad (5.40)$$

onde ξ e η são vetores.

Realizando as somas indicadas na equação 5.26, pelos índices A e B , obtemos resultado semelhante ao contido na equação 5.40. Usando a equação 5.40, obteremos um resultado simples para $\Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}$ em termos ξ_{μ} e η_{ν} , dado por

$$\Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} = 2 (\xi^{\mu} \xi_{\mu} \eta^{\nu} \eta_{\nu} - \xi^{\mu} \eta_{\mu} \eta^{\nu} \xi_{\nu}) \quad (5.41)$$

Usando as equações 5.31 e 5.41, obtemos os seguintes resultados

$$\gamma = \xi^{\mu} \xi_{\mu} \eta^{\nu} \eta_{\nu} - \xi^{\mu} \eta_{\mu} \eta^{\nu} \xi_{\nu} \quad (5.42)$$

e que

$$\Sigma_\alpha^\mu \Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_\beta^\nu = - \left(\xi^\beta \xi_\beta \eta^\alpha \eta_\alpha - \xi^\alpha \eta_\alpha \eta^\beta \xi_\beta \right) (\xi^\mu \eta^\nu - \xi^\nu \eta^\mu) \quad (5.43)$$

Substituindo as equações 5.40 e 5.42 na equação 5.43, obtemos

$$\Sigma_\alpha^\mu \Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_\beta^\nu = \gamma \Sigma^{\mu\nu} \quad (5.44)$$

A equação 5.44, pode ser escrita numa forma alternativa, dada por

$$\Sigma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Sigma_{\beta\nu} = \frac{3}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \partial_{[\alpha} \Sigma_{\beta\nu]} - \frac{1}{4} \nabla_\nu (\Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta}) \quad (5.45)$$

Usando a expressão para o tensor energia-momentum para a nuvem de cordas, dada pela equação 5.34, e a identidade de Bianchi, temos

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) \frac{\Sigma_\beta^\nu}{\sqrt{-\gamma}} + \rho \Sigma^{\mu\beta} \nabla_\mu \left[\frac{\Sigma_\beta^\nu}{\sqrt{-\gamma}} \right] = 0 \quad (5.46)$$

Multiplicando a equação 5.46 por $\frac{\Sigma_{\nu\alpha}}{\sqrt{-\gamma}}$, obtemos

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) \frac{\Sigma_\beta^\nu}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\Sigma_{\nu\alpha}}{\sqrt{-\gamma}} + \rho \Sigma^{\mu\beta} \frac{\Sigma_{\nu\alpha}}{\sqrt{-\gamma}} \nabla_\mu \left[\frac{\Sigma_\beta^\nu}{\sqrt{-\gamma}} \right] = 0 \quad (5.47)$$

Usando a expressão para o bivector $\Sigma^{\mu\nu}$ dado pela equação 5.40, concluímos que o segundo termo da equação 5.47 deve ser igual a zero. Portanto,

$$\frac{\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) \Sigma_\beta^\nu \Sigma_{\nu\alpha}}{\gamma} = 0 \quad (5.48)$$

Então, considerando a equação 5.48, concluímos que

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) \Sigma_\beta^\nu = 0 \quad (5.49)$$

que pode ser reescrita na forma

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) = 0 \quad (5.50)$$

onde usamos a definição de $\Sigma^{\mu\nu}$ dada pela equação 5.26

Neste ponto, podemos usar a equação 5.50 para demonstrar a equação 5.39. Fazendo uso equação 5.50, podemos escrever as seguintes relações:

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\nu}) \Sigma^{\beta\gamma} = 0 \quad (5.51)$$

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\alpha}) \Sigma^{\gamma\beta} = 0 \quad (5.52)$$

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\gamma}) \Sigma^{\alpha\beta} = 0 \quad (5.53)$$

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\gamma}) \Sigma^{\beta\alpha} = 0 \quad (5.54)$$

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) \Sigma^{\gamma\alpha} = 0 \quad (5.55)$$

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) \Sigma^{\alpha\gamma} = 0 \quad (5.56)$$

Das equações 5.51 a 5.56 vem:

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]}) = 0 \quad (5.57)$$

que equivale a

$$(\partial_\mu \rho) \Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]} + \rho \nabla_\mu \Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]} = 0 \quad (5.58)$$

Substituindo a equação 5.38 na equação 5.58, obtemos a seguinte equação

$$\nabla_\mu (\Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]}) = 0 \quad (5.59)$$

que corresponde a equação 5.39.

Combinando as equações 5.49 e 5.46, obtemos:

$$\Sigma^{\mu\beta} \nabla_\mu \left[\frac{\Sigma_\beta^\nu}{\sqrt{-\gamma}} \right] = 0 \quad (5.60)$$

que é a equação de movimento da nuvem de cordas.

As equações de Einstein, para a nuvem de cordas como fonte, podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\rho \frac{\Sigma_\mu^\alpha \Sigma_{\alpha\nu}}{\sqrt{-\gamma}} \quad (5.61)$$

$$\Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]} = 0 \quad (5.62)$$

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\nu}) = 0 \quad (5.63)$$

$$\Sigma^{\mu\beta} \nabla_\mu \left[\frac{\Sigma_\beta^\nu}{\sqrt{-\gamma}} \right] = 0 \quad (5.64)$$

O traço da equação 5.61 é indicado por

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = -\rho g^{\mu\nu} \frac{\Sigma_\mu^\alpha \Sigma_{\alpha\nu}}{\sqrt{-\gamma}} \quad (5.65)$$

e portanto, temos que

$$R = 2\rho\sqrt{-\gamma} \quad (5.66)$$

A equação 5.65 pode ser usada para reescrever as equações de Einstein, dadas pela equação 5.61, na forma

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\rho}{\sqrt{-g}} \left(\Sigma_{\mu}^{\alpha} \Sigma_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \right) \quad (5.67)$$

A lei de conservação dada pela equação 5.50 pode ser escrita na forma equivalente abaixo

$$\partial_{\mu} \left(\rho \sqrt{-g} \Sigma^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (5.68)$$

Usando as equações de Einstein, com a fonte correspondente a nuvem de cordas, podemos obter as soluções para diferentes simetrias, a saber, plana, cilíndrica e esférica. Na próxima seção obtemos a solução para a simetria esférica, tendo em vista nosso interesse em estudar os efeitos da nuvem de cordas no buraco negro de Schwarzschild.

5.4 Solução das Equações de Einstein para Nuvem de Cordas com Simetria Esférica.

Nesta seção iremos apresentar, brevemente, a solução em [58], que é semelhante a solução de Schwarzschild, com uma modificação no horizonte de eventos, determinada pela presença da nuvem de cordas. De modo equivalente, podemos afirmar que a solução correspondente ao espaço-tempo de Letelier é equivalente a de Schwarzschild, porém com uma deficiência de ângulo sólido, que é proporcional a intensidade da nuvem de cordas. Tendo em vista a simetria do problema, vamos admitir que a métrica tenha a seguinte forma geral

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (5.69)$$

onde ν e λ são funções somente de r (coordenada radial). Portanto, a configuração é estática.

A densidade de energia ρ e o bivector $\Sigma_{\mu\nu}$ devem ser funções somente de r . Neste caso somente as componentes Σ_{01} e Σ_{10} são diferentes de zero.

A lei de conservação dada pela equação 5.50 pode então ser escrita da seguinte forma

$$\partial_{\mu} \left(\sqrt{-g} \rho \Sigma^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (5.70)$$

sendo g dada por

$$g = -e^{\nu+\lambda} r^4 \sin^2 \theta \quad (5.71)$$

Substituindo a equação 5.71 na equação 5.70,

$$\partial_1 \left(r^2 e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} \rho \Sigma^{01} \right) = 0 \quad (5.72)$$

obtemos

$$\Sigma^{01} = \frac{a e^{\frac{-(\nu+\lambda)}{2}}}{\rho r^2} \quad (5.73)$$

onde a é uma constante de integração. Considerando o produto $\Sigma^{\mu\theta}\Sigma_{\mu\theta} = 2\gamma$, obtemos

$$\Sigma^{01}\Sigma_{01} = \gamma \quad (5.74)$$

o que implica

$$g_{00}g_{11}\Sigma^{01}\Sigma^{01} = \gamma \quad (5.75)$$

Substituindo $g_{00} = e^\nu$, $g_{11} = -e^\lambda$ e Σ^{01} dada pela equação 5.73 na equação 5.75, obtemos o seguinte resultado

$$\sqrt{-\gamma}\rho = \frac{a}{r^2} \quad (5.76)$$

a partir da qual concluímos que $\sqrt{-\gamma}$ depende somente de r . Podemos então escrever as equações de Einstein como segue

$$2\nu'' - \lambda'\nu' + \frac{4\nu'}{r} + \nu'^2 = 0 \quad (5.77)$$

$$2\nu'' - \lambda'\nu' - \frac{4\lambda'}{r} + \nu'^2 = 0 \quad (5.78)$$

$$e^{-\lambda} \left(1 + \frac{r(\nu' - \lambda')}{2} \right) - 1 = -a \quad (5.79)$$

onde foram consideradas as seguintes expressões para o tensor energia-momento: $T_0^0 = T_1^1 = \frac{a}{r^2}$ e $T_2^2 = T_3^3 = 0$, onde a linha indica derivada em relação a coordenada r .

Considerando as equações 5.77 e 5.78, e subtraindo membro a membro, obtemos

$$\nu' + \lambda' = 0 \quad (5.80)$$

e portanto, temos que

$$\nu = -\lambda, \quad (5.81)$$

a menos de uma constante de integração que fizemos igual a zero, pois sempre podemos reescalonar coordenadas, a exemplo do que fizemos com o tempo coordenado, t .

Podemos, agora, usar a relação entre ν e λ , dada pela equação 5.81, e substituir na equação 5.79, para obtermos o seguinte equação

$$e^{-\lambda} (1 - r\lambda') = (re^{-\lambda})' = 1 - a \quad (5.82)$$

cujas solução é dada por

$$re^{-\lambda} = (1 - a)r + k \quad (5.83)$$

onde k é uma constante de integração.

Note que para $a = 0$, isto é, na ausência da nuvem de cordas, a equação 5.83 nos fornece resultado que corresponde ao espaço-tempo de Schwarzschild, conforme esperado.

A análise da solução obtida, sob a aproximação de campo fraco, e sua comparação com a solução de Schwarzschild, nos permite concluir $k = -2m$, onde m representa, fisicamente,

a massa Newtoniana do corpo central. Uma outra forma de justificar esta escolha consiste em incorporar o parâmetro a na redefinição das coordenadas temporal e radial, bem como da massa. Neste caso, a métrica fica reduzida, formalmente, a de Schwarzschild, com uma deficiência de ângulo sólido. No limite, em que o ângulo sólido tende a 4π , o que equivale a dizer que a deficiência angular vai a zero, o que tem como resultado a solução de Schwarzschild, o que nos leva, por uma questão de consistência, a identificarmos k com $-2m$. Uma vez escolhida essa relação entre a constante de integração e a massa, podemos escrever

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - a - \frac{2m}{r} \quad (5.84)$$

e portanto, a métrica do espaço-tempo de Letelier é dada por

$$ds^2 = \left(1 - a - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - a - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (5.85)$$

com a constante a podendo ser nula, negativa ou positiva.

Podemos fazer $\alpha^2 = 1 - a$, por uma questão de conveniência, para alguns estudos. Neste caso, a métrica dada 5.85 passa a ser escrita da seguinte forma

$$ds^2 = \left(\alpha^2 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(\alpha^2 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (5.86)$$

Esta métrica descreve a geometria do espaço-tempo que chamaremos espaço-tempo de Letelier [83]. Ela representa o espaço-tempo gerado por um corpo central, que gravita, com massa m , imerso numa nuvem de cordas, com simetria esférica (as cordas distribuídas radialmente). Note que a métrica de Schwarzschild pode ser obtida da métrica de Letelier, simplesmente, fazendo $a = 0$. Portanto, o espaço-tempo de Letelier corresponde a um buraco negro imerso em uma nuvem de cordas radialmente distribuída.

O espaço-tempo de Letelier, dado pela 5.85, tem um horizonte de eventos em

$$r_H = \frac{2m}{1-a}, a \neq 1 \quad (5.87)$$

Note que $a \rightarrow 0$, o raio de Schwarzschild é reobtido. Por outro lado, se $a \rightarrow 1$, o raio do horizonte de eventos tende ao infinito. Se $0 < a < 1$, a nuvem de cordas aumenta o raio do horizonte em comparação ao buraco negro de Schwarzschild, por uma quantidade de $(1-a)^{-1}$. De modo geral, se $a < 0$, o raio do buraco negro é menor por um fator $(1-a)^{-1}$, se comparado ao de Schwarzschild. Note que se $m = 0$, então $r_H = 0$, o que significa dizer que neste caso não há horizonte de eventos, mas somente uma singularidade em $r = 0$.

5.5 Equações Geodésicas: Influência da Nuvem de Cordas.

Nesta seção iremos estudar as equações geodésicas do espaço-tempo de Schwarzschild com uma nuvem de cordas (espaço-tempo de Letelier), com especial atenção para o papel desempenhado pela nuvem de cordas, quando comparado com os resultados obtidos no

espaço-tempo de Schwarzschild [85]. Tendo em vista que a diferença entre as duas soluções é muito sutil, por tratar-se de uma pequena alteração nos coeficientes métricos g_{tt} e g_{rr} , os resultados obtidos são muito semelhantes aos da literatura [86], o que esperávamos que acontecesse.

5.5.1 Órbitas: Aspectos Gerais.

As geodésicas no espaço-tempo dada pela equação (5.86) podem ser obtidas da Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2} \left[\left(1 - a - \frac{2m}{r} \right) \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \left(1 - a - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \right] - r^2 \left[\left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \right] \quad (5.88)$$

onde λ é m parâmetro afim.

Fazendo uso das equações de Euler-Lagrange, obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - a - \frac{2m}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0 \quad (5.89)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} \right) - r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0 \quad (5.90)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 \quad (5.91)$$

A equação (5.89) nos fornece o seguinte resultado

$$\frac{dt}{d\lambda} = E \left(\alpha^2 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \quad (5.92)$$

onde E é uma constante de movimento que corresponde, no limite Newtoniano, à energia da partícula e $\alpha^2 = 1 - a$. É importante chamar a atenção para o fato de que $\frac{dt}{d\lambda} \rightarrow \infty$ em $r = 2m/(1 - a)$, conforme estabelecido na literatura [86].

A equação (5.90), quando consideramos o movimento restrito ao plano equatorial ($\theta = \pi/2$), fica dada por

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L \quad (5.93)$$

onde L é o momento angular da partícula medido por um observador no infinito. Note que não escrevemos a equação radial, mas ao invés disto, vamos considerar uma equação equivalente, que é obtida a partir da

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \kappa \quad (5.94)$$

onde κ é uma constante que pode ser igual a -1 , 0 e 1 , para curvas tipo- espaço, tipo-luz e tipo-tempo, respectivamente.

Portanto, a equação radial pode ser escrita na forma seguinte

$$\left(\alpha^2 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\alpha^2 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = \kappa \quad (5.95)$$

Vamos discutir a influência da nuvem de cordas sobre a trajetória de uma partícula, bem como as características e comportamento dessas trajetórias. Considerando as eqs. (5.92) e (5.93), obteremos o seguinte resultado

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \left(1 - a - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right) = E^2 - V \quad (5.96)$$

onde

$$V = \left(1 - a - \frac{2m}{r}\right) + (1 - a) \frac{L^2}{r^2} - \frac{2mL^2}{r^3} \quad (5.97)$$

na qual estamos considerando a forma original da métrica na presença da nuvem de cordas e partículas com massa, ou seja, $\kappa = 1$. Note que a semelhança do caso Newtoniano, a equação radial reduz-se a uma equação de primeira ordem, que descreve as trajetórias de uma partícula submetida ao potencial $V(r)$. A única diferença da relatividade geral é devida a presença do termo proporcional a $1/r^3$, no potencial $V(r)$.

Para analisarmos as órbitas circulares, devemos supor que

$$\frac{dr}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d^2r}{d\lambda^2} = 0, \quad \frac{d^3r}{d\lambda^3} = 0, \dots \quad (5.98)$$

pois, a primeira identidade não é bastante, uma vez que pode ser satisfeita em pontos isolados sobre qualquer geodésica. De fato, uma órbita circular é caracterizada por

$$\frac{dr}{d\lambda} = 0, \quad e \quad \frac{d^2r}{d\lambda^2} = 0 \quad (5.99)$$

A condição $dr/d\lambda = 0$, nos fornece o seguinte resultado

$$V(r) = E^2. \quad (5.100)$$

Por outro lado, a condição $d^2r/d\lambda^2 = 0$, implica em

$$\frac{d}{dr} V(r) = 0 \quad (5.101)$$

e portanto,

$$\frac{m}{r^2} = (1 - a) \frac{L^2}{r^3} - \frac{3mL^2}{r^4} \quad (5.102)$$

que nos permite concluir que

$$L^2 = \frac{mr^2}{[(1 - a)r - 3m]} \quad (5.103)$$

o que implica que para a existências de órbitas circulares, devemos ter a seguinte relação satisfeita

$$r > \frac{3m}{(1 - a)} \quad (5.104)$$

Usando a equação (5.100), podemos escrever

$$E^2 = (1 - a) - \frac{2m}{r} + \frac{L^2}{r^2} \left[(1 - a) - \frac{2m}{r} \right] \quad (5.105)$$

ou

$$E^2 = \frac{[(1 - a)r - 2m]^2}{r[(1 - a)r - 3mr]} \quad (5.106)$$

onde usamos a equação (5.103).

Podemos usar as equações (5.103) e (5.105) e calcular a velocidade angular, que é dada por

$$\omega^2 = \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \left(\frac{L^2}{r^4} \right) \left(1 - a - \frac{2m}{r} \right)^2 \left(\frac{1}{E^2} \right) = \frac{m}{r^3} \quad (5.107)$$

o tempo t é medido no infinito, e este resultado nos mostra que na presença da nuvem de cordas, no cenário considerado de orbitas circulares, a lei de Kepler continua válida.

Vamos considerar uma generalização da equação (5.102), de modo a incluir a possibilidade de termos curvas tipo-luz. Assim, com a reintrodução do parâmetro κ , teremos

$$\frac{\kappa m}{r^2} = (1 - a) \frac{L^2}{r^3} - \frac{2mL^2}{r^4} \quad (5.108)$$

Neste caso, vemos que o lado direito de (5.108) se anula para $r = 3m/(1 - a)$, o que implica que para este valor de r , $\kappa = 0$, e portanto, a órbita com este raio corresponde a geodésica nula. Note que o raio da órbita é afetado pela presença da nuvem de cordas.

Voltemos à expressão para L^2 , dada pela equação (5.103), que é satisfeita para geodésicas tipo-tempo. Fazendo $x = r/m$ e $b = L/m$, esta equação pode ser escrita na forma

$$x^2 - b^2(1 - a)x + 3b^2 = 0 \quad (5.109)$$

o discriminante desta equação é $b^4(1 - a)^2 - 12b^2(1 - a)$, o qual é positivo para $b^2(1 - a) > 12$. Então, teremos duas órbitas circulares para $L^2 > 12m^2/(1 - a)$, uma órbita circular para $L^2 = 12m^2/(1 - a)$ e nenhuma órbita para $L^2 < 12m^2/(1 - a)$.

Quando consideramos $L^2 \geq 0$, isto significa dizer que $r > 3m/(1 - a)$, e portanto, os raios das órbitas circulares são alteradas na presença da nuvem de cordas, em comparação com o caso do buraco negro de Schwarzschild. A órbita mais interna para $L^2 > 12m^2/(1 - a)$ é instável, a outra é estável, enquanto para $L^2 = 12m^2/(1 - a)$, é metaestável. Os raios destas órbitas são dadas por:

$$r_{\pm} = \frac{1}{2}L(1 - a) \left\{ \frac{L}{m}(1 - a) \pm \left[\frac{L^2}{m^2}(1 - a) - 12 \right]^{1/2} \right\} \quad (5.110)$$

e

$$r = \frac{1}{2}(1 - a)^2 \frac{L^2}{m} = 6(1 - a)m \quad (5.111)$$

Note que todos esses resultados reduzem-se aos obtidos para a solução de Schwarzschild, quando tomamos $a = 0$.

5.6 Precessão de Periélio e Desvio da Luz.

Nesta seção vamos calcular a influência da nuvem de cordas na precessão do periélio e na deflexão da luz. Para isto, vamos seguir análise semelhante no contexto da presença do monopolo global [87], que fisicamente é distinto da nuvem de cordas, porém, a estrutura formal das equações é estritamente semelhante.

Na realidade, em ambos os casos, os respectivos espaços-tempo possuem uma deficiência de ângulo sólido, no caso do monopolo global associado à quebra de simetria, enquanto no caso da nuvem de cordas, associada à intensidade da nuvem. Portanto, os efeitos que são estudados podem ser associados, exclusivamente, do ponto de vista global, à presença desta deficiência angular. Efeitos semelhantes foram estudados no caso da deficiência de ângulo planar gerado por uma corda cósmica [88]

Vamos considerar o elemento de linha na região exterior a um corpo com massa m , distribuída numa esfera, imersa em uma nuvem de cordas, cuja presença é codificada pelo parâmetro a , dado pelas equações (5.88-5.93) e (5.95). Vamos adotar o procedimento usual da gravitação Newtoniana, e definir $u = 1/r$. Então, considerando as equações (5.92), (5.93) e (5.95), obtemos a seguinte equação

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + \alpha^2 u = A + \frac{\sigma u^2}{A} \quad (5.112)$$

onde $A = m/L^2$, $\sigma = 3mA$, e estamos considerando o caso de partículas com massa ($\kappa = 1$).

É importante chamar a atenção para o fato de que se fizermos $\alpha = 1$, que equivale a $a = 0$ (ausência da nuvem de cordas) e desconsideremos o termo $\sigma u^2/A$, obteremos a equação de movimento na gravitação Newtoniana, cuja solução, u_N , é dada por

$$u_N = A[1 - \epsilon \cos(\phi - \phi_0)] \quad (5.113)$$

onde A é a mesma constante da equação (5.112) e ϵ , ϕ_0 são constantes de integração.

Considerando a presença da nuvem de cordas, que formalmente é equivalente à presença do monopolo global [89]. Vamos admitir que a solução da equação (5.112), sem a contribuição do termo proporcional a u^2 , e portanto, no contexto Newtoniano pode ser escrita na forma:

$$u_0 = A + B \cos[\alpha(\phi - \phi_0)] \quad (5.114)$$

resultado este obtido seguindo estritamente o tratamento feito no caso do monopolo global. A equação (5.114) será reduzida à equação (5.113) se fizermos $B = \epsilon A$ e $\alpha = 1(a = 0)$. Agora, queremos obter a correção de primeira ordem através da expansão perturbativa. Seja

$$u \cong u_0 + \sigma u_1 \quad (5.115)$$

onde estamos considerando $\sigma u_1 \ll u_0$, sendo u_0 a solução da equação (5.114) e σu_1 uma pequena correção. Em primeira ordem de aproximação a equação para $u_1(\phi)$ é dada por

[87]

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} = \alpha^2 u_1 \cong A + \frac{B^2}{2A} + 2B \cos[\alpha(\phi - \phi_0)] + \frac{B^2}{2A} \cos[2\alpha(\phi - \phi_0)] \quad (5.116)$$

cuja solução podemos escrever da seguinte forma

$$u_1 = \frac{A}{\alpha^2} + \frac{B^2}{2A\alpha^2} + B\alpha\phi \sin(\alpha\phi) - \frac{B^2}{6A} \cos(2\alpha\phi) \quad (5.117)$$

onde a constante ϕ_0 foi desconsiderada, pois ela não tem nenhum papel relevante.

Portanto, com essa correção de primeira ordem, $u(\phi)$ pode ser escrita como

$$u = A + \frac{\sigma A}{\alpha^2} + \frac{\sigma B^2}{2A\alpha^2} + B \cos(\alpha\phi) - \frac{\sigma B^2}{6A} \cos(2\alpha\phi) + \sigma B\alpha\phi \sin(\alpha\phi) \quad (5.118)$$

Podemos escrever a solução dada pela equação (5.118) numa forma mais apropriada para se calcular a precessão do periélio, qual seja [87]. Portanto, temos

$$u \cong A + B \cos[\alpha(\phi - \sigma\phi)] + \text{termos periódicos em } \sigma \quad (5.119)$$

O periélio ocorre no ponto onde r é mínimo ou equivalentemente, $u = 1/r$ é máximo, o que ocorre para

$$\alpha\phi(1 - \sigma) = 2\pi n \quad (5.120)$$

ou aproximadamente, para

$$\phi = \frac{2\pi n}{\alpha(1 - \sigma)} \quad (5.121)$$

Portanto, sucessivos periélios ocorrerão em intervalos

$$\Delta\phi = \frac{2\pi(1 + \sigma)}{\alpha} \quad (5.122)$$

e assim, a mudança no periélio é dada por

$$\delta\phi = \frac{2\pi\sigma}{\alpha} \cong 2\pi\sigma \left(1 + \frac{a}{2}\right) \quad (5.123)$$

O avanço do periélio, por órbita, pode ser escrito como sendo

$$\delta\phi = \frac{g\pi G^2 m^2}{c^2 L^2} \left(1 + \frac{a}{2}\right) \quad (5.124)$$

onde introduzimos as constantes G e c . O parâmetro a tem valores no intervalo $[0, 1)$, ou seja, $0 \leq a < 1$. O valor calculado de $\delta\phi$, com $a = 0$, o que significa que a nuvem de cordas está ausente, que denominamos $\delta\phi_S$ é de aproximadamente, no caso do mercúrio,

$$\delta\phi_S \cong 42,93 \quad \text{arcosegundo/século} \quad (5.125)$$

O resultado observado é de $43,11 \pm 0,45$ arcosegundo/século. Para evidenciar o papel da nuvem de cordas no avanço do periélio, vamos considerar dois valores para o parâmetro que codifica a presença da nuvem de cordas, a saber $a = 0.01$ e $a = 0.99$. No primeiro

caso, o aumento percentual do avanço é de aproximadamente 0,5%, enquanto no segundo é de 49,5%. Levando-se em conta o erro cometido na medida dos dados, podemos concluir que haveria compatibilidade entre a existência de uma nuvem de cordas no Sistema Solar, desde que o parâmetro a tivesse, no máximo, o valor $a = 0,02$, aproximadamente.

Agora, vamos calcular o desvio de uma raio de luz quando passa nas proximidades de um buraco negro de Schwarzschild com uma nuvem de cordas (espaço-tempo de Letelier) vindo do infinito. Neste caso, a trajetória da luz é regido pela seguinte equação

$$\frac{d^2y}{d\phi} + \alpha^2 u = \sigma u^2 \quad (5.126)$$

Quando $a = 0$, e portanto, $\alpha = 1$, a equação (5.126) fica reduzida a correspondente equação usada no caso do buraco negro de Schwarzschild. A presença da nuvem de cordas modifica a equação para a trajetória da luz. Neste caso, vamos proceder da mesma forma que no caso do estudo avanço do periélio, e escrever a solução da equação (5.126) na forma

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{D} [\alpha(\phi - \phi_0)] + \frac{\sigma}{2\alpha^2 D^2} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \cos [2\alpha(\phi - \phi_0)] \right\} \quad (5.127)$$

onde D é o parâmetro de impacto (menor distância entre a fonte e o raio de luz).

A reflexão total do raio de luz é dado por

$$\delta\phi = \frac{4\sigma}{3D} \left(1 + \frac{3}{2}a \right) \quad (5.128)$$

As medidas nos fornecem o valor $\delta\phi_S = 1,75'' \pm 0,31''$, para o caso de Schwarzschild. Se considerarmos a nuvem de cordas, o valor de $\delta\phi$ é acrescido de um valor que depende da intensidade da nuvem de cordas. Para $a = 0.01$ e $a = 0,99$, os acréscimos são de 1,4% e 148,5%, aproximadamente. Para nuvem de cordas com intensidades de modo que o valor de a seja da ordem de 0,12, o acréscimo em $\delta\phi$ estaria dentro da precisão das mediadas, e em princípio, o sistema poderia contemplar a existência de uma nuvem de cordas, na qual o sol estaria imerso.

6 Perspectivas e Conclusões.

6.1 Perspectivas.

Uma vez que não houve qualquer critério pelo qual foram selecionados os sistemas dinâmicos abordados, não há motivo para acreditar que por mero acaso houve a consideração de certo, único e peculiar, grupo com dez sistemas que exibam as propriedades observadas. Surge então a perspectiva de que as distribuições sejam propriedades de vários atratores estranhos imersos em espaços unidimensionais ou bidimensionais, não somente daqueles considerados aqui. Resultados preliminares provenientes do atrator estranho ligado ao mapa de Zaslavsky, bidimensional, [90] [91] [92] e dos atratores estranhos, imersos em seções de Poincaré pertinentes, ligados ao Oscilador de Duffing [93] e ao Pêndulo Forçado Amortecido [94] [95], contínuos e tridimensionais, indicam que deverão emergir dos tratamentos estatísticos densidades de ocupações (tempos e números) dadas por leis de potência. Os resultados relativos ao pêndulo e ao oscilador, além de comentários pertinentes, são apresentados nos apêndices 9 e 10 respectivamente. Atratores estranhos imersos em seções de Poincaré adequadas provenientes de conhecidos sistemas contínuos e tridimensionais, o de Lorenz [96], o de Rossler [97], e o que modela o circuito de Chua [98], são alguns aos quais podem ser aplicados o tratamento estatístico aqui descrito a fim de verificar se ocorre, ou não, emergência de densidades de ocupações (tempos e números) dadas por leis de potência.

Os resultados provenientes desses seis atratores podem também trazer informações sobre a validade, ou não, das relações entre multifractalidade e estruturas espaciais de distribuição e entre vazios e tempos de desocupações não abordadas no artigo. Caso haja entre eles algum AAM, verificação análoga sobre a ocorrência de concentração dos tempos de ocupações em torno de valor específico poderá ocorrer. A importância da escala de multifractalidades, bem como a de cada um dos outros resultados inéditos neste trabalho, após devida publicação em periódicos qualificados, deverá ser gradualmente revelada à medida em que venha a ser empregada na literatura durante tempo suficiente: caso seja tomada pela comunidade científica como relevante, a escala, ou outro resultado, deverá ser definitivamente incorporada à bagagem de conhecimentos sobre atratores estranhos. Tal coisa ocorreu, por exemplo, com as dimensões generalizadas e o espectro de singularidades hoje amplamente empregados em diversas áreas do conhecimento em que atratores estranhos são importantes, conforme as referências no início do capítulo 1. Parece não descartável a possibilidade de que algo análogo ocorra com, pelo menos, alguns dos já mencionados resultados inéditos.

Enfim, como contra-exemplos, são apresentados nos apêndices 11 e 12 as distribuições de números e tempos de desocupações, além daquelas sobre tempos de desocupações, associadas ao Mapa da Tenda e ao Mapa 2xmod1, respectivamente. Tratam-se de sistemas dinâmicos não dissipativos, seus espaços de fase não exibem atratores estranhos, de modo que não são esperadas distribuições dadas por leis de potência já que estas consistem em características de tais atratores. De fato não se verificam tais leis quanto as três distribuições. As observações das três distribuições provenientes de outros mapas, ou sistemas contínuos, não dissipativos, com espaços de fase unidimensionais ou bidimensionais, permitirão verificar se tais resultados são, ou não, extensíveis a eles.

Os estudos realizados a respeito dos efeitos de uma nuvem de cordas que rodeia o buraco negro de Schwarzschild (buraco negro de Letelier) sobre as trajetórias de partículas, a precessão do periélio e a deflexão da luz, podem ser generalizadas para outras configurações de buracos negros rodeados por uma nuvem de cordas. Em particular, pretendemos investigar a deflexão da luz e o efeito lente, considerando partículas com e sem spin, nos espaços-tempo de buracos negros com carga elétrica, sem rotação e com rotação, rodeados por uma nuvem de cordas, com o objetivo de entender os efeitos da nuvem de cordas sobre os fenômenos mencionados.

6.2 Conclusões.

A cada atrator estranho pertinente a dado conjunto é aplicado tratamento estatístico específico, suportado por simulações numéricas e distinto daqueles subjacentes às dimensões generalizadas e ao espectro de singularidades, que revelam inéditas distribuições de tempos e números de ocupações, e de tempos de desocupações, vinculados aos hipercubos N -dimensionais ($N = 1$ ou $N = 2$), com lado ε , que cobrem o atrator evoluído. Os resultados suportam as atribuições de densidades de probabilidades dadas por leis de potência às distribuições de tempos e de números de ocupações. Densidades que consistem em propriedades estatísticas ausentes na literatura e permitem a determinação de diversas outras inacessíveis às caracterizações clássicas de maneira a ampliar a gama de informações sobre o atrator envolvido. Três propriedades específicas baseadas nestas densidades são propostas, a extensão efetiva de números de ocupações, a extensão efetiva de tempos de ocupações e a variabilidade efetiva de números de ocupações. As duas primeiras são úteis para a determinação dos intervalos de valores mais prováveis dos mesmos números e tempos, a última quantifica a multifractalidade de modo a adicionar às dimensões generalizadas e ao espectro de singularidades novas informações sobre o atrator estranho considerado. As extensões efetivas revelam que os intervalos mais prováveis são bem mais curtos que os intervalos com todos os valores possíveis. A variabilidade efetiva revela diversidade quanto as multifractalidades. Um dos atratores é quase (mono) fractal enquanto que os demais exibem multifractalidades consideráveis e diferentes entre si. A robustez dos resultados e a

arbitrariedade na escolha dos elementos do conjunto torna plausível admitir a ocorrência de densidades correspondentes dadas por leis de potência vinculadas a diversos outros atratores estranhos. Resultados preliminares provenientes de três outros sistemas dinâmicos, um discreto e bidimensional, e dois contínuos e tridimensionais, são motivadores e deverão resultar em publicação futura. Existem, pelo menos, outros três conhecidos sistemas dinâmicos, contínuos e tridimensionais, associados com atratores estranhos imersos em seções de Poincaré apropriadas, similares aos considerados aqui. Novos trabalhos deverão revelar, ou não, se os resultados apresentados são, ou não, extensíveis a cada um desses seis novos atratores. Densidades dos tempos de desocupações dadas por leis de potência ocorrem somente quanto a parte dos atratores, não exprimem característica comum a todos os abordados. Parecem portanto não se referir a propriedades gerais de atratores estranhos, é possível que digam respeito somente a certo subconjunto específico que conta com poucos representantes entre os dez considerados, daí a pouca atenção dada a elas aqui. Trabalhos futuros que abordem novos atratores estranhos poderão esclarecer se tal fato ocorre, ou não. O mesmo vale quanto aos outros resultados seminais apresentados aqui, entre eles os ainda não publicados.

O estudo do sistema gravitacional correspondente a um buraco negro rodeado por uma nuvem de cordas nos mostra que a solução é ligeiramente diferente da Schwarzschild. Na presença da nuvem de cordas, o horizonte é alargado em comparação com o de Schwarzschild. Mostramos, também, que às órbitas são alteradas pela presença da nuvem de cordas, assim como as trajetórias de partículas com massa (precessão do periélio), bem como a de partículas sem massa, raios de luz.

Referências

- 1 OTT, E. Chaos in dynamical systems. In: _____. New York: Cambridge University Press, 1994. p. 69–75. Citado 2 vezes nas páginas [29](#) e [51](#).
- 2 HENTSCHEL, H.; PROCACCIA, I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. *Physica D*, v. 8, p. 435, 1983. Citado 2 vezes nas páginas [29](#) e [52](#).
- 3 GRASSBERGER, P. Generalized dimensions of strange attractors. *Physica Lett. A*, v. 97, p. 227, 1983. Citado 2 vezes nas páginas [29](#) e [52](#).
- 4 HALSEY, T. et al. Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets. *Phys. Rev. A*, v. 33, p. 1141, 1986. Citado 2 vezes nas páginas [29](#) e [52](#).
- 5 CHHABRA, A.; JENSEN, R. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum. *Phys. Rev. Lett.*, v. 62, p. 1327, 1989. Citado 2 vezes nas páginas [29](#) e [52](#).
- 6 CHHABRA, A. et al. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum and its application to fully developed turbulence. *Phys. Rev. A*, v. 40, p. 5284, 1989. Citado 2 vezes nas páginas [29](#) e [52](#).
- 7 WITTEN, J. T.; SANDER, L. Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon. *Phys. Rev. Lett.*, v. 47, p. 1400, 1981. Citado na página [29](#).
- 8 SANDER, L. M. Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon? *Contemp. Phys.*, v. 41, p. 203, 2000. Citado na página [29](#).
- 9 CHAUDHARI, A. et al. Multifractal scaling analysis of autopoisoning reactions over a rough surface. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 36, p. 3757, 2003. Citado na página [29](#).
- 10 ADAMS, D. et al. The harmonic measure of diffusion-limited aggregates including rare events. *EPL.*, v. 87, p. 20001, 2009. Citado na página [29](#).
- 11 KAMER, Y.; OUIILLON, G.; SORNETTE, D. Barycentric fixed-mass method for multifractal analysis. *Phys. Rev. E*, v. 88, p. 02292, 2013. Citado na página [29](#).
- 12 JIZBA, P.; ARIMITSU, T. The world according to rényi: thermodynamics of multifractal systems. *Ann. Phys-New York*, v. 312, p. 17, 2004. Citado na página [30](#).
- 13 VAVREK, R. et al. Testing the randomness in the sky-distribution of gamma-ray bursts. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, v. 391, p. 741, 2008. Citado na página [30](#).
- 14 SARKAR, P. et al. The scale of homogeneity of the galaxy distribution in sdss dr6. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, v. 399, p. L128, 2009. Citado na página [30](#).
- 15 MILLER, B. N.; ROUET, J.-L. Cosmology in one dimension: fractal geometry, power spectra and correlation. *J. Stat. Mech.*, p. P12028, 2010. Citado na página [30](#).
- 16 YADAV, J. K.; BAGLA, J. S.; KHANDAI, N. Fractal dimension as a measure of the scale of homogeneity. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, v. 405, p. 2009, 2010. Citado na página [30](#).

- 17 GAITE, J. The fractal geometry of the cosmic web and its formation. *Adv. Astron.*, p. 6587138, 2019. Citado na página 30.
- 18 FERNÁNDEZ, E. et al. Are neurons multifractals? *J. Neurosci. Methods.*, v. 89, p. 151, 1999. Citado na página 30.
- 19 ZHENG, Y. et al. Multiplicative multifractal modeling and discrimination of human neuronal activity. *Phys. Lett. A*, v. 344, p. 253, 2005. Citado na página 30.
- 20 MILTON, J. G. Introduction to focus issue: bipedal locomotion - from robots to humans. *Chaos*, v. 19, p. 253, 2009. Citado na página 30.
- 21 UTHAYAKUMAR, R.; EASWARAMOORTHY, D. Multifractal-wavelet based denoising in the classification of healthy and epileptic eeg signals. *Fluct Noise Lett*, v. 11, p. 1250034, 2012. Citado na página 30.
- 22 ZORICK, T.; MANDELKERN, M. A. Multifractal detrended fluctuation analysis of human eeg: preliminary investigation and comparison with the wavelet transform modulus maxima technique. *PLoS One*, v. 8, p. e68360, 2013. Citado na página 30.
- 23 VERGOTTE, G. et al. Concurrent changes of brain functional connectivity and motor variability when adapting to task constraints. *Front. Physiol.*, v. 9, p. 909, 2018. Citado na página 30.
- 24 FRANÇA, L. G. S. et al. Fractal and multifractal properties of electrographic recordings of human brain activity: toward its use as a signal feature for machine learning in clinical applications. *Front. Physiol.*, v. 9, p. 1767, 2018. Citado na página 30.
- 25 CHENG, Y. Defining urban and rural regions by multifractal spectrums of urbanization. *Fractals*, v. 24, p. 165004, 2016. Citado na página 30.
- 26 CHAKRABORTY, B. et al. Multifractal approach for seafloor characterization. *IEEE Geosci Remote S*, v. 11, p. 54, 2014. Citado na página 30.
- 27 WAWRZASZEK, A.; MACEK, W. M. Observation of the multifractal spectrum in solar wind turbulence by ulysses at high latitudes. *J Geophys Res-Space*, v. 115, p. A07104, 2010. Citado na página 30.
- 28 GUALTIERO, B.; DOMEISEN, D. Nonlinear stratospheric variability: multifractal de-trended fluctuation analysis and singularity spectra. *Proc. R. Soc. A.*, v. 472, p. 2191, 2016. Citado na página 30.
- 29 PARDO-IGÚZQUIZA, E.; DOWD, P. A. Fractal analysis of karst landscapes. *Math. Geosci.*, v. 52, p. 543, 2019. Citado na página 30.
- 30 DICKMAN, R. Rain, power laws, and advection. *Phys. Rev. Lett.*, v. 90, p. 108701, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 54.
- 31 DICKMAN, R. Fractal rain distributions and chaotic advection. *Braz. Jour. Phy.*, v. 34, p. 337, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 54.
- 32 PETERS, O.; HERTLEIN, C.; CHRISTENSEN, K. A complexity view of rainfall. *Phys. Rev. Lett.*, v. 88, p. 018701, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 54.

- 33 PETERS, O.; CHRISTENSEN, K. Rain: relaxations in the sky. *Phys. Rev. E*, v. 66, p. 036120, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 54.
- 34 OTT, E. Chaos in dynamical systems. In: _____. New York: Cambridge University Press, 1994. p. 81–86. Citado na página 35.
- 35 OTT, E. Chaos in dynamical systems. In: _____. New York: Cambridge University Press, 1994. p. 305. Citado na página 39.
- 36 SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *Gen. Relativ. and Gravit*, v. 35, p. 951, 2003. Citado na página 49.
- 37 FINKELSTEIN, D. Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle. *Phys. Rev.*, v. 110, p. 965, 1958. Citado na página 49.
- 38 KRUSKAL, M. D. Maximal extension of schwarzschild metric. *Phys. Rev.*, v. 119, p. 1743, 1960. Citado na página 49.
- 39 REISSNER, H. Über die eigengravitation des elektrischen feldes nach der einsteinschen theorie. *Ann. Phys.*, v. 355, p. 106, 1916. Citado na página 49.
- 40 G.NORDSTRÖN. On the energy of the gravitation field in einstein's theory. *Proc. kon. ned. Akad. wed*, v. 20, p. 1238, 1918. Citado na página 49.
- 41 KERR., R. P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, v. 11, p. 237, 1968. Citado na página 49.
- 42 NEWMAN, E. T. et al. Metric of a rotating, charged mass. *J. Math. Phys*, v. 6, p. 918, 1965. Citado na página 49.
- 43 HAWKING, S.; ELLIS, G. The large scale structure of space-time. In: _____. Cambridge: Cambridge University Press, 1973. Citado na página 49.
- 44 VISHVESHWARA, C. V. Scattering of gravitational radiation by a schwarzschild black-hole. *Nature*, v. 227, p. 936, 1970. Citado na página 49.
- 45 PRESS, W. H. Long wave trains of gravitational waves from a vibrating black hole. *Astrophysical Journal*, v. 170, p. L105, 1971. Citado na página 49.
- 46 CHANDRASEKHAR, S.; DETWEILER, S. L. The quasi-normal modes of the schwarzschild black hole. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, v. 344, p. 441, 1975. Citado na página 49.
- 47 BLANCHET, L. Gravitational radiation from post-newtonian sources and inspiralling compact binaries. *Living Rev. in Relativ.*, v. 17, p. 2, 2014. Citado na página 49.
- 48 BUONANNO, A.; DAMOUR, T. Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics. *Phys. Rev. D*, v. 59, p. 084006, 1999. Citado na página 49.
- 49 PRETORIUS, F. Evolution of binary black-hole spacetimes. *Phys. Rev. Lett.*, v. 95, p. 121101, 1999. Citado na página 49.
- 50 CAMPANELLI, M. et al. Accurate evolutions of orbiting black-hole binaries without excision. *Phys. Rev. Lett.*, v. 96, p. 111101, 2006. Citado na página 49.

- 51 BAKER, J. G. et al. Gravitational-wave extraction from an inspiraling configuration of merging black holes. *Phys. Rev. Lett.*, v. 96, p. 111102, 2006. Citado na página 49.
- 52 EINSTEIN, A. Näherungsweise integration der feldgleichungen der gravitation. *Sitz. K. Preuss. Akad. Wiss.*, v. 1, p. 688, 1916. Citado na página 49.
- 53 EINSTEIN, A. Über gravitationswellen. *Sitz. K. Preuss. Akad. Wiss.*, v. 1, p. 154, 1918. Citado na página 49.
- 54 AL, B. P. A. et. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, v. 116, p. 061102, 2016. Citado na página 49.
- 55 VILENKIN, A.; SHELLARD, E. Cosmic strings and other topological defects. In: _____. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. Citado na página 50.
- 56 HAIDMARSH, M. B.; KIBBLE, T. W. B. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, v. 116, p. 061102, 2016. Citado na página 50.
- 57 KIBBLE, T. W. B. Cosmic strings reborn? *arXiv: astro-ph 0410073*, 2004. Citado na página 50.
- 58 LETELIER, P. S. Clouds of strings in general relativity. *Phys. Rev. D*, v. 20, p. 1294, 1979. Citado 4 vezes nas páginas 50, 137, 139 e 144.
- 59 STACHEL., J. Thickening the string. i. the string perfect dust. *Phys. Rev. D*, v. 21, p. 2171, 1980. Citado na página 50.
- 60 LETELIER, P. S. Fluids of strings in general relativity. *IL NUOVO CIMENTO B*, v. 63, p. 519, 1981. Citado na página 50.
- 61 CARR, B.; KÜHNEL, F.; SANDSTAD, M. Primordial black holes as dark matter. *Phys. Rev. D*, v. 94, p. 083504, 2016. Citado na página 50.
- 62 GANGULY, A.; GHOSH, S. G.; MAHARAJ, S. D. Accretion onto a black hole in a string cloud background. *Phys. Rev. D*, v. 90, p. 064037, 2014. Citado na página 50.
- 63 RICHARTE, M. G.; SIMEONE, C. Traversable wormholes in a string cloud. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 17, p. 1179, 2008. Citado na página 50.
- 64 SINGH, J. K.; SHARMA, N. K. Some exact solutions of string cosmological models in bianchi type-ii space-time. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 49, p. 2902, 2010. Citado na página 50.
- 65 YADAV, A. K.; YADAV, V. K. Cylindrically symmetric inhomogeneous universes with a cloud of strings. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 48, p. 568, 2009. Citado na página 50.
- 66 LETELIER, P. S. String cosmologies. *Phys. Rev. D*, v. 28, p. 2414, 1983. Citado na página 50.
- 67 LETELIER, P. S. Anisotropic fluids with two-perfect-fluid components. *Phys. Rev. D*, v. 22, p. 807, 1980. Citado na página 50.
- 68 VIVEIROS, A. Non-orbital characterizations of strange attractors: Effective intervals and multifractality measures. *Chaos*, v. 31, p. 033139, 2021. Citado na página 51.

- 69 OTT, E. Chaos in dynamical systems. In: _____. New York: Cambridge University Press, 1994. p. 12–13. Citado na página 59.
- 70 HOLMES, P.; ZEEMAN, E. C. A nonlinear oscillator with a strange attractor. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, v. 292, p. 419–448, 1979. Citado na página 59.
- 71 HÉNON, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.*, v. 50, p. 69–77, 1976. Citado na página 59.
- 72 IKEDA, K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system. *Opt. Commun.*, v. 30, p. 257–261, 1979. Citado na página 61.
- 73 IKEDA, K.; DAIDO, H.; AKIMOTO, O. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity. *Phys. Rev. Lett*, v. 45, p. 709–712, 1980. Citado na página 61.
- 74 LOZI, R. Un attracteur étrange (?) du type attracteur de hénou. *J. Phys. Colloques*, v. 39, p. 9–10, 1978. Citado na página 61.
- 75 NUSSE, H.; YORKE, J. Dynamics: Numerical explorations. In: _____. New York: Springer, 1994. Citado na página 61.
- 76 SPROTT, J.; XIONG, A. Classifying and quantifying basins of attraction. *Chaos*, v. 25, p. 083101, 2015. Citado na página 61.
- 77 FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. do. Caos uma introdução. In: _____. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltd, 1994. cap. 3, p. 300. Citado na página 61.
- 78 ARNOL'D, V. I. Small denominators I: on the maps of circumference on itself. *Trans. Am. Math. Soc.*, v. 46, p. 213–284, 1965. Citado na página 61.
- 79 SINAI, Y. G. Gibbs measures in ergodic theory. *Russ. Math. Surv.*, v. 27, p. 21–69, 1972. Citado na página 61.
- 80 MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, v. 261, p. 459–467, 1976. Citado na página 62.
- 81 KALB, M.; RAMOND, P. Classical direct interstring action. *Phys. Rev. D*, v. 9, p. 2273, 1974. Citado na página 137.
- 82 LETELIER, P. S. Gauge-invariant theory of direct interaction between strings. *Phys. Rev. D*, v. 15, p. 1055, 1977. Citado na página 137.
- 83 BARBOSA, D.; BEZERRA, V. B. On the rotating letelier spacetime. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 48, p. 149, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 137 e 146.
- 84 SCHOUTEN, J. A. Ricci-calculus. In: _____. Berlin: Springer, 1954. Citado na página 141.
- 85 WALD, R. M. General relativity. In: _____. Chicago: University of Chicago Press, 1984. Citado na página 147.
- 86 D'INVERNO, R. Introducing einstein's relativity. In: _____. Oxford: Oxford University Press, 1998. Citado na página 147.

- 87 SANTOS, R. C.; LIMA, J. A.; BEZERRA, V. B. Bounds on the deficit solid angle parameter from solar system tests. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 34, p. 1969, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 150 e 151.
- 88 FREIRE, W. H. C.; BEZERRA, V. B.; LING, J. A. S. Cosmological constant, conical defect and classical tests of general relativity. *Gen. Relativ. Grav.*, v. 33, p. 1407, 2001. Citado na página 150.
- 89 BARRIOLA, M.; VILENKIN, A. Gravitational field of a global monopole. *Phys. Rev. Lett.*, v. 63, p. 341, 1989. Citado na página 150.
- 90 ZASLAVSKY, G. The simplest case of a strange attractor. *Phys. Lett. A*, v. 69, p. 145–147, 1978. Citado na página 153.
- 91 ZASLAVSKY, G.; KH.-R.YA, R. Singularities of transition to a turbulent motion. *Sov. Phys. JETP*, v. 49, p. 1039, 1979. Citado na página 153.
- 92 ZASLAVSKII map. 2020. Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Zaslavskii_map. Citado na página 153.
- 93 DUFFING, G. Erzwungene schwingungen bei veränderlicher eigenfrequenz und ihre technische bedeutung. In: _____. [S.l.]: F. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn, 1918. Citado na página 153.
- 94 MOON, F. C.; HOLMES, P. J. A magnetoelastic strange attractor. *J. Sound Vib.*, v. 65, p. 275, 1979. Citado na página 153.
- 95 OTT, E. Chaos in dynamical systems. In: _____. New York: Cambridge University Press, 1994. p. 07. Citado na página 153.
- 96 LORENZ, E. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, v. 20, p. 130, 1963. Citado na página 153.
- 97 RÖSSLER, O. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A*, v. 57, p. 397, 1976. Citado na página 153.
- 98 MATSUMOTO, T. A chaotic attractor from chua's circuit. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers*, v. 12, p. 1055, 1984. Citado na página 153.
- 99 OTT, E. Chaos in dynamical systems. In: _____. New York: Cambridge University Press, 1994. p. 23–26. Citado na página 179.
- 100 OTT, E. Chaos in dynamical systems. In: _____. New York: Cambridge University Press, 1994. p. 26–29. Citado na página 183.

7 Distribuição de Probabilidade Dada por Lei de Potência.

Preliminares. Vale, para qualquer distribuição de probabilidade, a seguinte expressão para a probabilidade de que o valor da variável z se situe entre a e b :

$$P(a \leq z \leq b) = \int_a^b dP(z)$$

$$dP(z) = \varrho(z) \cdot dz \quad (7.1)$$

Onde $\varrho(z)$ é a densidade de probabilidade associada a z , (probabilidade por unidade de z), e $dP(z)$ é a probabilidade de que o valor de z se situe entre z e $z + dz$. Desta forma pode-se reescrever a primeira das equações 7.1:

$$P(a \leq z \leq b) = \int_a^b \varrho(z) \cdot dz \quad (7.2)$$

Quando a densidade é dada por lei de potência, vale a expressão:

$$\varrho(z) = A \cdot z^{-\gamma} \quad (7.3)$$

De 7.2 e 7.3 vem:

$$P(a \leq z \leq b) = A \int_a^b z^{-\gamma} \cdot dz \quad (7.4)$$

A partir de 7.4 é calculada a constante de normalização A e com seu emprego são calculadas a média, $\bar{z}$, e a variância, σ^2 . As expressões de $A(\gamma)$, $\bar{z}(\gamma)$ e $\sigma^2(\gamma)$ derivadas nas próximas seções, além de outras derivadas delas, foram empregadas nas simulações numéricas que suportam os resultados apresentados aqui.

Constante de Normalização. O valor de A é aquele que normaliza a distribuição:

$$P(z_i \leq z \leq z_f) = A \int_{z_i}^{z_f} z^{-\gamma} \cdot dz = 1 \quad (7.5)$$

Onde a e b foram substituídos por z_i e z_f respectivamente para adotar a notação já empregada no artigo a que se refere este suplemento. Com base em 7.5 pode-se determinar a expressão de A através dos valores de γ , z_i e z_f :

$$A = \frac{1 - \gamma}{z_f^{1-\gamma} - z_i^{1-\gamma}} \equiv A(\gamma) \quad (7.6)$$

Média. A média é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \int_{z_i}^{z_f} x \cdot \varrho(z) \cdot dz \\ &= A(\gamma) \cdot \int_{z_i}^{z_f} z^{1-\gamma} \cdot dz \\ &= A(\gamma) \cdot \frac{z_f^{2-\gamma} - z_i^{2-\gamma}}{2 - \gamma} \equiv \bar{z}(\gamma) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Da equação 7.6 e da última das equações 7.7 vem:

$$\bar{x} = \frac{1-\gamma}{2-\gamma} \cdot \frac{z_f^{2-\gamma} - z_i^{2-\gamma}}{z_f^{1-\gamma} - z_i^{1-\gamma}} \quad (7.8)$$

Variância. A variância de z é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{z_i}^{z_f} (z - \bar{z})^2 \cdot \varrho(z) \cdot dz \\ &= A(\gamma) \int_{z_i}^{z_f} (z - \bar{z})^2 \cdot z^{-\gamma} \cdot dz \\ &= \bar{z}^2 - \bar{z}^2 \end{aligned} \quad (7.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{z}^2 &= A(\gamma) \int_{z_i}^{z_f} z^{2-\gamma} \cdot dz \\ &= \frac{A(\gamma)}{3-\gamma} \cdot (z_f^{3-\gamma} - z_i^{3-\gamma}) \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\bar{z}^2 = \left(\frac{1-\gamma}{2-\gamma} \right)^2 \cdot \left(\frac{z_f^{2-\gamma} - z_i^{2-\gamma}}{z_f^{1-\gamma} - z_i^{1-\gamma}} \right)^2 \quad (7.11)$$

Para a obtenção de 7.11 empregou-se 7.8. A partir de 7.9, 7.10, 7.11 e 7.6 vem:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1-\gamma}{3-\gamma} \cdot \frac{z_f^{3-\gamma} - z_i^{3-\gamma}}{z_f^{1-\gamma} - z_i^{1-\gamma}} \\ &\quad - \left(\frac{1-\gamma}{2-\gamma} \right)^2 \cdot \left(\frac{z_f^{2-\gamma} - z_i^{2-\gamma}}{z_f^{1-\gamma} - z_i^{1-\gamma}} \right)^2 \\ &\equiv \sigma^2(\gamma) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Probabilidade Acumulada. A probabilidade acumulada entre z_i e z' , $z_i < z' \leq z_f$, consiste na probabilidade de ocorrência de algum valor de z no intervalo $z_i \leq z \leq z'$:

$$\begin{aligned} P(z_i \leq z \leq z') &= A(\gamma) \int_{z_i}^{z'} z^{-\gamma} dz \\ &= \frac{z'^{1-\gamma} - z_i^{1-\gamma}}{z_f^{1-\gamma} - z_i^{1-\gamma}} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Onde foi empregada a equação 7.6.

8 Leis de Potência, Invariância de Escala e Liberdade de Escala.

Em qualquer relação com a forma geral

$$h(w) = Bw^{-\alpha} \quad (\text{lei de potência})$$

onde, α e B são constantes, $\alpha > 0$, $B > 0$ e $w > 0$, a certa mudança de escala do argumento w corresponde mudança de escala relacionada em $h(w)$:

$$\begin{aligned} h(w) &= Bw^{-\gamma} \\ w \rightarrow w' \equiv \lambda w &\Rightarrow h(w) \rightarrow h(w') \equiv h(\lambda w) \\ h(\lambda w) &= \lambda^{-\gamma} h(w) \\ &\Downarrow \\ h(w') &= Bw'^{-\gamma} \end{aligned} \tag{8.1}$$

À mudança de escala imposta por λ ($\lambda > 0$) ao argumento w corresponde mudança de escala imposta à função $h(w)$ por $\lambda^{-\gamma}$ de modo que a relação entre o novo argumento w' e o novo valor da função $h(w')$ é exatamente igual à original: há invariância da relação entre h e w com a escala em que o valor de w é considerado (invariância de escala). A “liberdade de escala”, amplitude da gama de valores assumidos por w sob invariância de escala, consiste em característica que exprime a robustez da própria invariância: critério bem conhecido estabelece que invariâncias de escala são consideráveis somente quando a mencionada amplitude abrange pelo menos três décadas. Amplitudes inferiores são consideradas insuficientes para assegurar invariância.

9 Resultados Preliminares sobre o Pêndulo Forçado Amortecido.

Este apêndice, e o seguinte, são dedicados respectivamente a resultados provenientes dos atratores estranhos associados aos sistemas dinâmicos que representam o Pêndulo Forçado Amortecido (Ddp) e o Oscilador de Duffing (Duf). Tratam-se de sistemas contínuos e tridimensionais cujos atratores encontram-se confinados a seções de Poincaré bidimensionais. As integrações são realizadas com emprego do Método de Runge-Kutta, quarta ordem. Dadas as limitações dos computadores utilizados, não foi possível realizar integrações durante tempos de observações suficientemente grandes para assegurar contaminação desperzível, como ocorreu quanto a todos os mapas apresentados no capítulo 2. Entretanto, ainda sim, estes resultados preliminares são úteis pois apontam para a provável emergência das distribuições dadas por leis de potência para as distribuições $\varrho_{noc}(Q)$ e $\varrho_{toc}(\tau_o)$ caso sejam tomados tempos de observações grandes o bastante. A cada um dos sistemas dinâmicos corresponde espaço de fase tridimensional (u, v, w) , em que w representa o tempo t , para cada valor de w o atrator se encontra imerso em um plano paralelo aquele formado pelos eixos u e v , tal plano consiste no subespaço em que se dão as estatísticas. À medida em que decorre o tempo a partir de $t = 0$ o mesmo se move no sentido positivo do eixo OW , onde O é o ponto na origem do sistema de coordenadas. As caixas de condições iniciais envolvem sempre 10.000 pontos de fase e são mostradas em figuras. Os valores atribuídos às constantes e aos parâmetros ligados tanto à integração quanto aos objetos no espaço de fase são apresentados em tabelas. As mesmas figuras mostram também os atratores, em instante $w \gg 0$, além dos vértices das estações e da caixa das condições iniciais. Outras três figuras, em cada caso, mostram os histogramas que representam as três distribuições de probabilidades envolvidas.

O movimento do Pêndulo Forçado Amortecido é descrito pela seguinte equação não linear, de segunda ordem, não autônoma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \nu \frac{d\theta}{dt} + \text{sen}(\theta) = T \cdot \text{sen}(2\pi ft) \quad (9.1)$$

onde θ representa o deslocamento angular envolvido, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ representa a inércia, $\nu \frac{d\theta}{dt}$ representa o atrito com o pivô em torno do qual oscila o pêndulo, $\text{sen}(\theta)$ representa a gravidade e $T \text{sen}(2\pi ft)$ representa a força externa. À equação 9.1 podem corresponder três equações

de primeira ordem, autônomas, através da adoção das seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{cases} u = \theta \\ v = d\theta/dt \\ w = 2\pi ft \end{cases} \quad (9.2)$$

De 9.2 e 9.1 vêm as equações autônomas:

$$\begin{cases} du/dt = v \\ dv/dt = T \cdot \text{sen}(w) - \text{sen}(u) - \nu v \\ dw/dt = 2\pi f \end{cases} \quad (9.3)$$

O tempo é representado por w como consequência da adoção de $f = \frac{1}{2\pi}$, de forma que, conforme a terceira das equações 9.2, $w = t$. O valor de u é mantido restrito ao interior de certo intervalo finito, $-2\pi \leq u \leq 2\pi$, de outra forma o atrator não ocorre.

9.1 Perspectivas.

Conforme o tópico “Tempos e números de ocupações”, seção 2.4.1, e as descrições das figuras 44, 45 e 46, as qualidades dos três ajustes dadas pelos correspondentes valores de r^2 indicam que de fato o ajuste linear é pertinente. Entretanto as extensões de cada um dos intervalos de valores de Q , τ_o e τ_d , todas próximas de duas décadas, são inferiores às três necessárias para consideração da validade do ajuste. Ocorre que o valor de H correspondente, $H = (25 - 18,75)/(18,75 - 0) \simeq 0,33$ indica elevada contaminação devida a impossibilidade de consideração de tempos de observações superiores a $T_{obs} = 25$ dado $t_{sat} \simeq 18,75$. Considerando o menor entre os valores de H ligados aos dez mapas no capítulo 2, $H = 18$ associado ao mapa seno seno, o valor $t_{obs} = 337,5$ ($= 18,75 \times 18$) seria adequado. Contudo, extensões próximas a duas décadas sob ajustes convincentes, mesmo sob tão elevada contaminação, trazem a expectativa de resultados bem melhores caso se considere intervalos T_{obs} significativamente maiores e que levariam a contaminações bem menores.

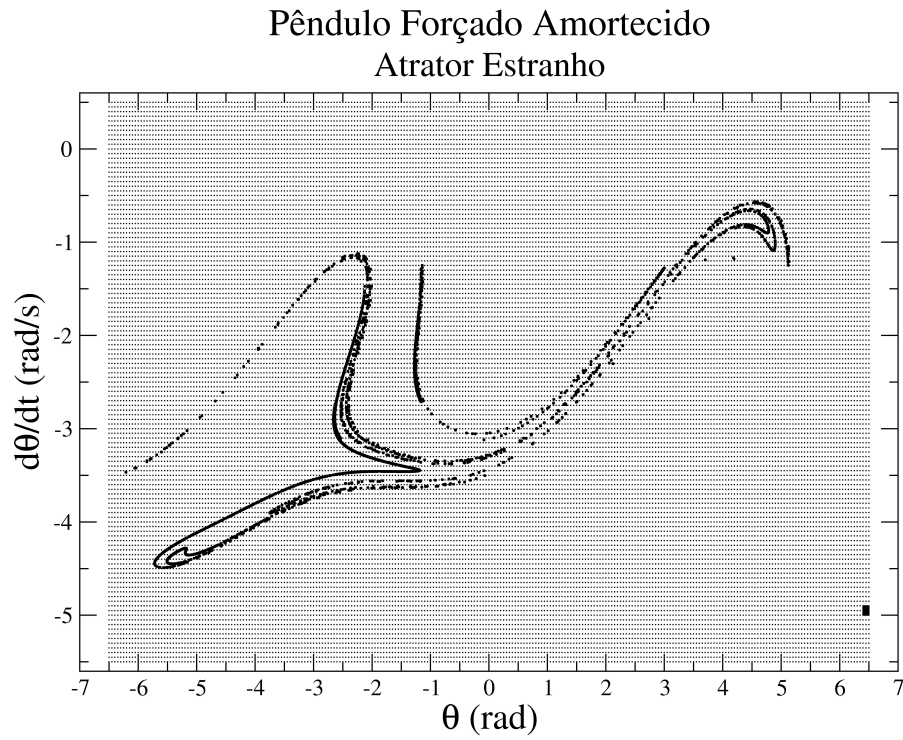


Figura 43 – Atrator associado ao Pêndulo Forçado Amortecido, a matriz de estações, e a caixa de condições iniciais, esta última com coordenadas (6,5,-4,9). O atrator consiste em 10.000 pontos de fase, em $w = 25$. A caixa encerra os 10.000 pontos no instante inicial, $w = 0$.

Quadro 17 – Valores de constantes e parâmetros.

Designação	Valores
ν	0,22
f	$1/2\pi$
T	2,7
Passo de integração	0,0001
Instante inicial	0,0
Instante final	25
Coordenadas do centro da caixa externa	(0, -2.5)
Dimensão horizontal da caixa externa	13
Dimensão vertical da caixa externa	6
Dimensão única das estações	0,05
Dimensão única das caixas de condições iniciais	0,1
Número de estações	31.200

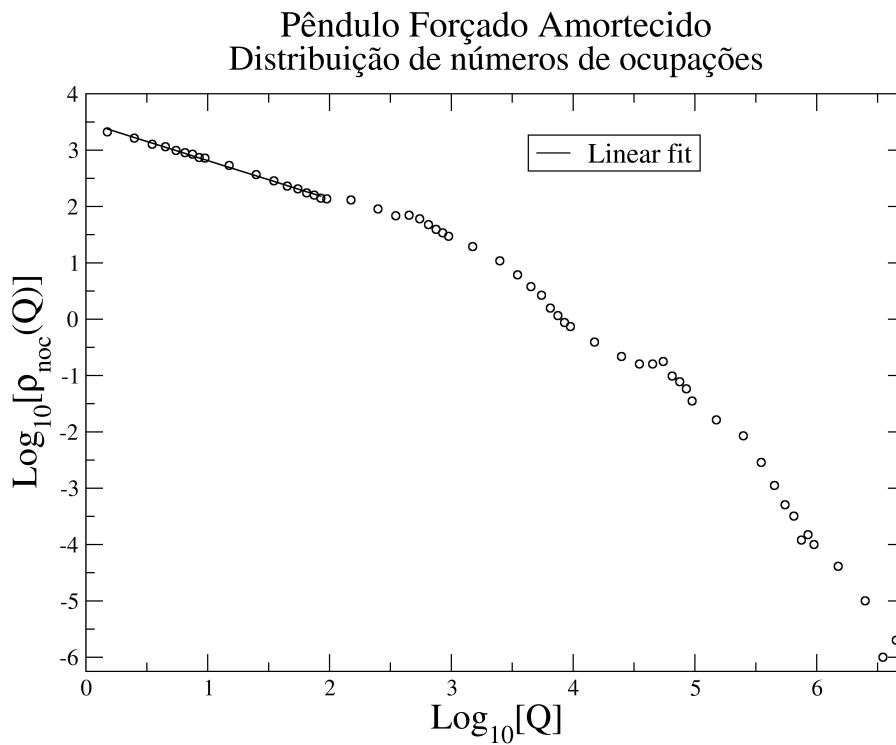


Figura 44 – $Ddp(Noc)$ - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta Q)_{dec} = 1,95$, inclinação: $-\gamma_{ocn} = -(0,68 \pm 0,01)$, valores extremos de Q : $Q_{ii} = 1,0$ e $Q_{fs} = 9,0 \times 10^1$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9963$.

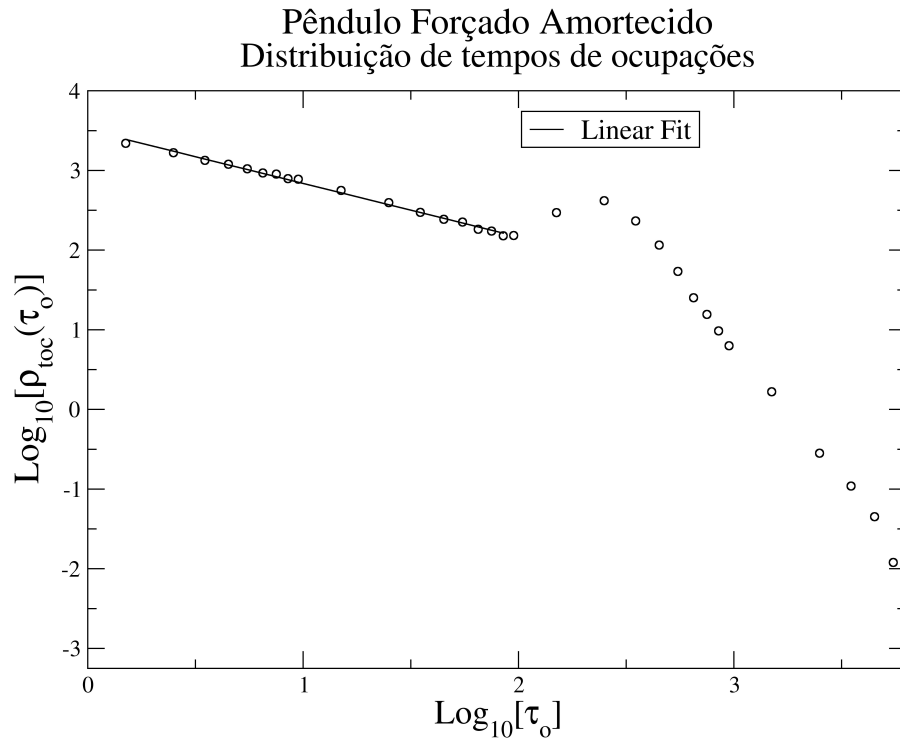


Figura 45 – Ddp(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dec} = 1,95$, inclinação: $-\gamma_{oct} = -(0,67 \pm 0,01)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 1,0$ e $\tau_{o,fs} = 9,0 \times 10^1$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9955$.

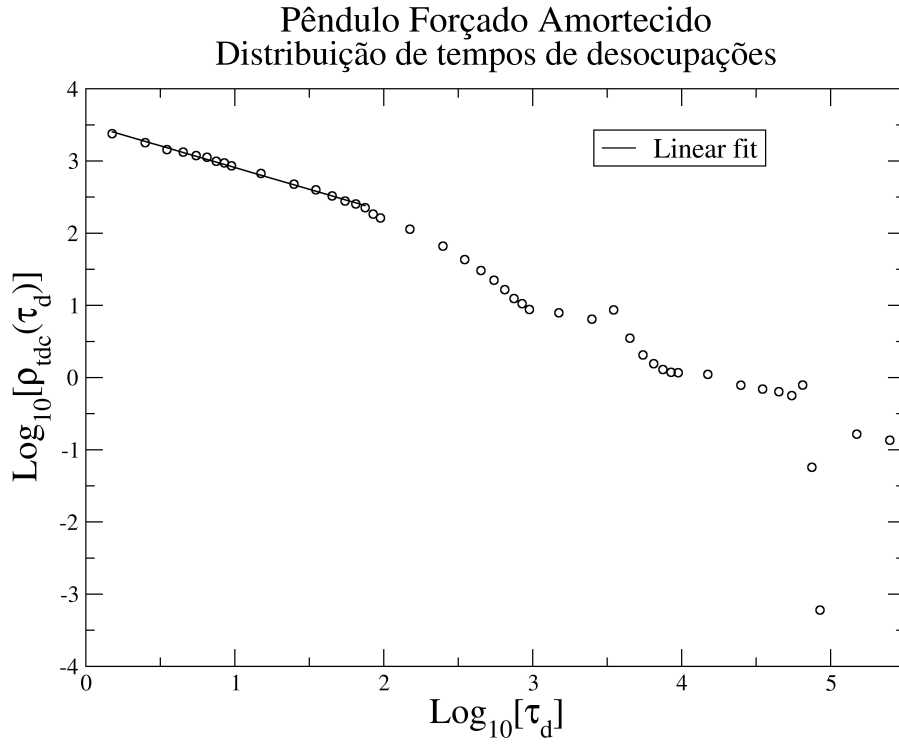


Figura 46 – $Ddp(Tdc)$ - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_d)_{dec} = 1,90$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(0,60 \pm 0,01)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 1,0$ e $\tau_{d,fs} = 8,0 \times 10^1$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9963$

10 Resultados Preliminares sobre o Oscilador de Duffing.

O movimento de certo oscilador é descrito pela seguinte equação não linear, de segunda ordem, não autônoma, a equação de Duffing:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{25} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{5}\theta + \frac{8}{15}\theta^3 = \frac{2}{5} \cos(\omega t) \quad (10.1)$$

onde θ representa o deslocamento angular envolvido, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ representa a inércia, $\frac{1}{25} \frac{d\theta}{dt}$ representa o atrito envolvido e $\frac{2}{5} \cos(\omega t)$ representa a força externa. A soma $-\frac{1}{5}\theta + \frac{8}{15}\theta^3$ é consistente com uma expansão, em segunda ordem, de $\sin(\theta)$. Portanto é plausível considera-la como uma expressão aproximada do efeito gravitacional, representado por $\sin(\theta)$, em 9.1. À esta equação podem corresponder três equações de primeira ordem, autônomas, através da adoção das seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{cases} u = \theta \\ v = d\theta/dt \\ w = t \end{cases} \quad (10.2)$$

De 10.1 e 10.2 vêm as equações :

$$\begin{cases} du/dt = v \\ dv/dt = (2/5) \cos(\omega w) - (1/25)v + (1/5)u - (8/15)u^3 \\ dw/dt = 1 \end{cases} \quad (10.3)$$

10.1 Perspectivas.

Conforme o tópico “Tempos e números de ocupações”, seção 2.4.1, e as descrições das figuras 48, 49, 50, as qualidades dos três ajustes dadas pelos correspondentes valores de r^2 indicam que o ajuste linear é pertinente. Entretanto as extensões de cada um dos intervalos de valores de Q , τ_o e τ_d , todas pouco inferiores a duas décadas, são inferiores às três necessárias para consideração da validade do ajuste. Ocorre $H = (126 - 69, 3)/(69, 3 - 0) \simeq 0,82$, valor que indica elevada contaminação devida a impossibilidade de consideração de tempos de observações superiores a $T_{obs} = 126$ dado $t_{sat} \simeq 69,3$. Considerando o menor

entre os valores de H ligados aos dez mapas no capítulo 2, $H = 18$ associado ao mapa seno seno, o valor $t_{obs} = 1.247$ ($= 69,3 \times 18$) seria adequado. Contudo, extensões próximas a duas décadas sob ajustes convincentes, mesmo sob tão elevada contaminação, trazem a expectativa de resultados bem melhores caso se considere intervalos T_{obs} significativamente maiores e que levariam a contaminações bem menores.

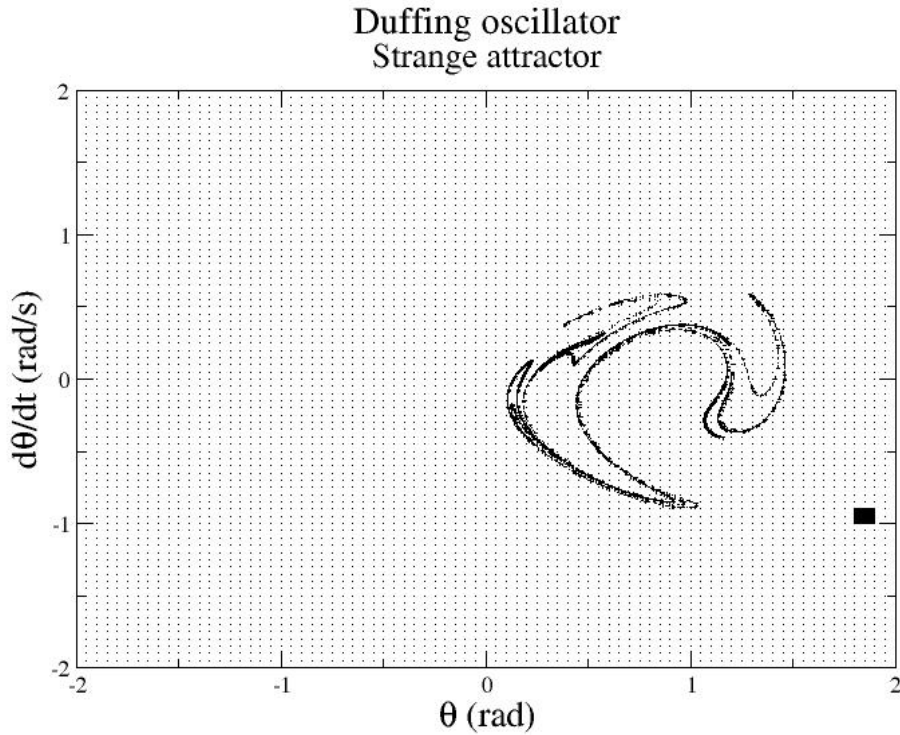


Figura 47 – Atrator associado à Equação de Duffing, a matriz de estações, e a caixa de condições iniciais, esta última com coordenadas $(1,8, -0,90)$. O atrator consiste em 10.000 pontos de fase, em $w = 126$. A caixa encerra os 10.000 pontos no instante inicial, $w = 0$.

Quadro 18 – Valores de constantes e parâmetros.

Designação	Valores
ω	0,2
Passo de integração	0,0001
Instante inicial	0,0
Instante final	126
Coordenadas do centro da caixa externa	(0,0)
Dimensão única da caixa externa	4
Dimensão única das estações	0,05
Dimensão única das caixas de condições iniciais	0,1
Número de estações	6.400

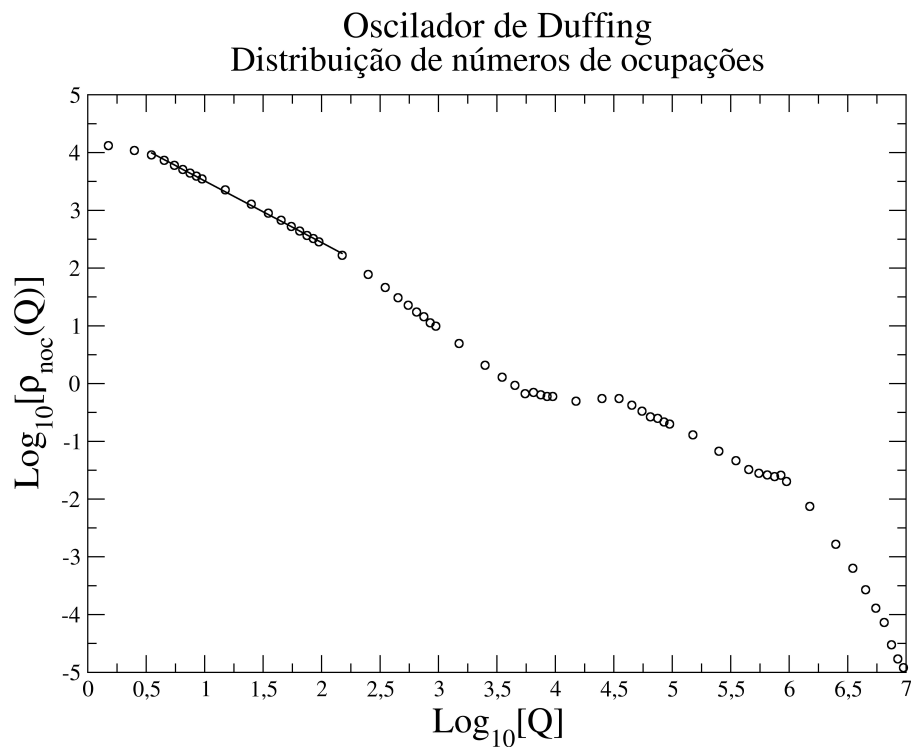


Figura 48 – Duf(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste: $(\Delta Q)_{dec} = 1,70$, inclinação: $-\gamma_{ocn} = -(1,067 \pm 0,009)$, os valores extremos de Q : $Q_{ii} = 4,0$ e $Q_{fs} = 2,0 \times 10^2$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9990$.

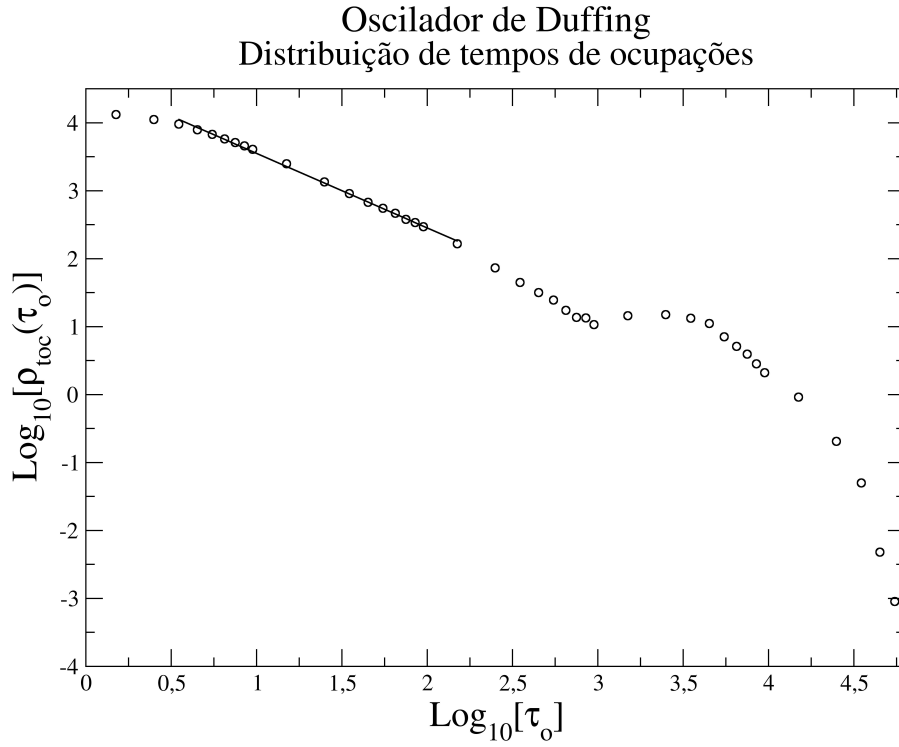


Figura 49 – Duf(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_o)_{dec} = 1,70$, inclinação: $-\gamma_{oct} = -(1,10 \pm 0,01)$, valores extremos de τ_o : $\tau_{o,ii} = 4,0$ e $\tau_{o,fs} = 2,0 \times 10^2$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9976$.

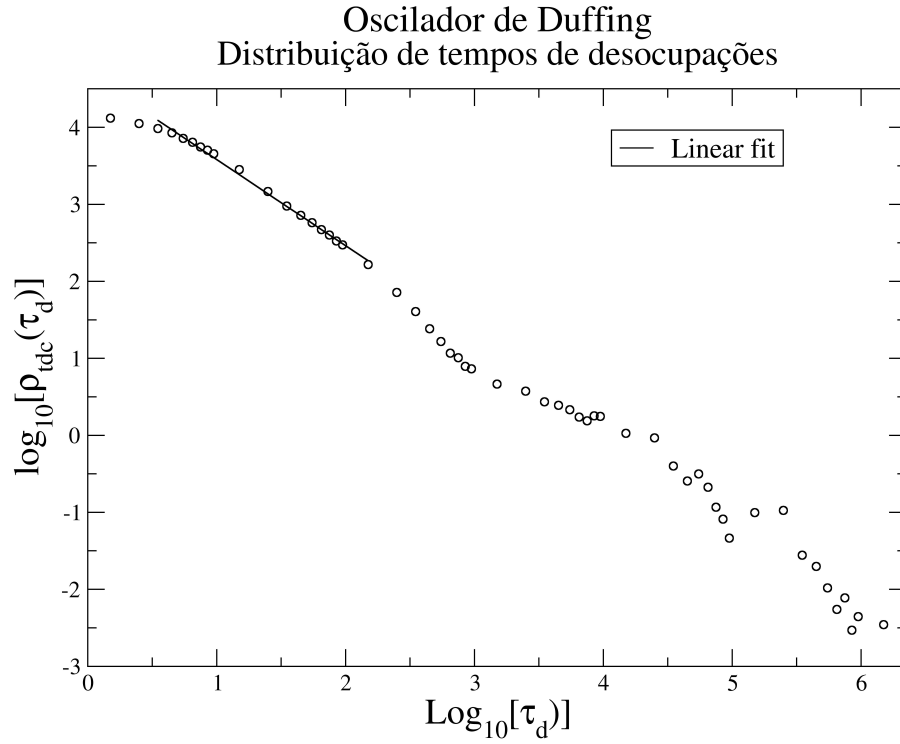


Figura 50 – Duf(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica. Extensão em décadas do intervalo em que ocorre o ajuste linear: $(\Delta\tau_d)_{dec} = 1,70$, inclinação: $-\gamma_{tdc} = -(1,14 \pm 0,02)$, valores extremos de τ_d : $\tau_{d,ii} = 4,0$ e $\tau_{d,fs} = 2,0 \times 10^2$, quadrado do coeficiente de correlação: $r^2 = 0,9974$

11 Sistema Dinâmico não Dissipativo: o Mapa da Tenda.

Os mapas da Tenda e 2xmod1 serão considerados respectivamente neste apêndice e no próximo, são unidimensionais e não dissipativos, atratores estranhos não ocorrem em seus espaços de fase uma vez que contrações de volumes não estão presentes, conforme comentário no início da seção 2.3. Cada um deles aplica o intervalo $[0, 1]$ em si mesmo. São abordados aqui justamente para salientar a ausência das distribuições dadas por leis de potência associadas a $\varrho_{noc}(Q)$, $\varrho_{toc}(\tau_o)$, $\varrho_{tdc}(\tau_d)$ e, desta forma, reforçar a proposta pela qual, no escopo considerado, leis de potência se restringem a sistemas dissipativos. Além disso, uma vez que são unidimensionais assim como o dissipativo mapa Logístico, sua presença reforça expectativa de que a origem das mencionadas distribuições consista exclusivamente na distribuição espacial de pontos de fase, dependente do tempo, subjacente aos atratores estranhos, portanto origem independente da dimensão do espaço em que estejam inseridos os últimos. Quanto aos dois mapas a caixa de condições iniciais pertinente encerra 10.000 pontos.

O Mapa da Tenda é caracterizado pela seguinte equação a diferenças:

$$x_{n+1} = 1 - 2|x_n - 1/2| \quad (11.1)$$

Os valores atribuídos aos parâmetros ligados tanto às iterações quanto às estatísticas são apresentados no quadro 19. Quanto a distribuição espacial, todos os pontos de fase são levados à uma única posição, $x = 0$ (ponto fixo do mapa), depois de quantidade relativamente pequena de iterações, $n \approx 50$. Tal fato é consequência do crescimento da quantidade de pontos existentes após n iterações, que serão levados ao mesmo ponto fixo do mapa após a iteração seguinte com número de ordem $n + 1$. A quantidade de pontos como este cresce com o número de iterações segundo a relação 2^{n-1} [99].

Quadro 19 – Valores de constantes e parâmetros.

Constantes e parâmetros	Valores
Passo de integração	iteração
Instante inicial	0
Instante final	15.000
Coordenadas do centro do intervalo externo	0, 5
Dimensão única do intervalo externo	1, 0
Dimensão única das estações	0, 0001
Dimensão única dos intervalos de condições iniciais	0, 0005
Número de estações	10.000

Os histogramas associados a $\varrho_{noc}(Q)$, $\varrho_{toc}(\tau_o)$ e $\varrho_{tdc}(\tau_d)$ são respectivamente exibidos pelas figuras 51, 52 e 53 em escala bi-logarítma. É clara a impossibilidade de realização de um ajuste linear em cada caso.

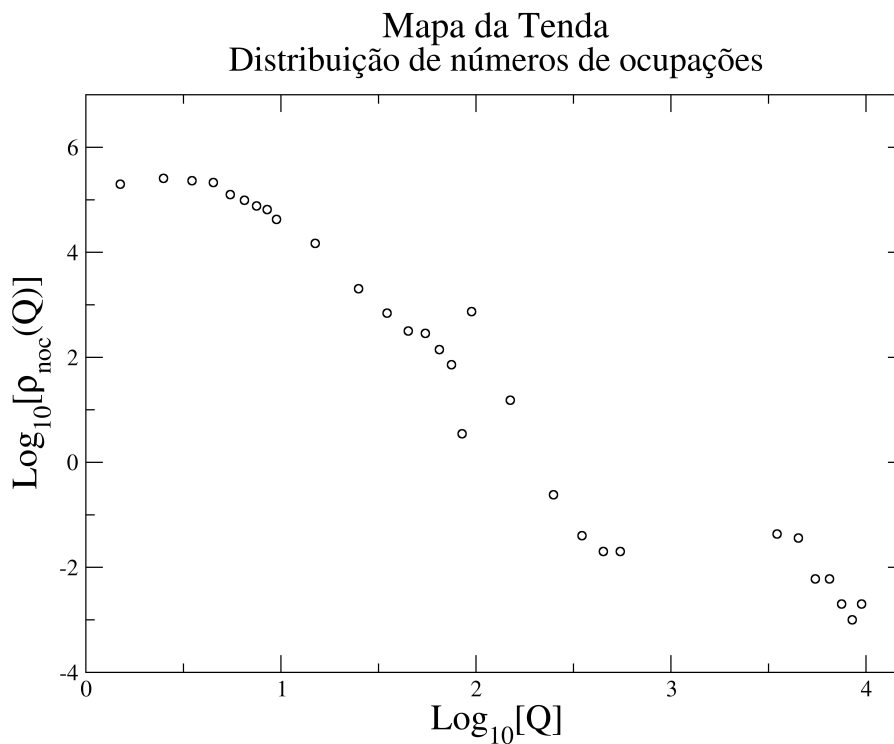


Figura 51 – $\text{Ten}(\text{Noc})$ - Histograma das frequências absolutas dos números desocupações em escala bilogarítimica.

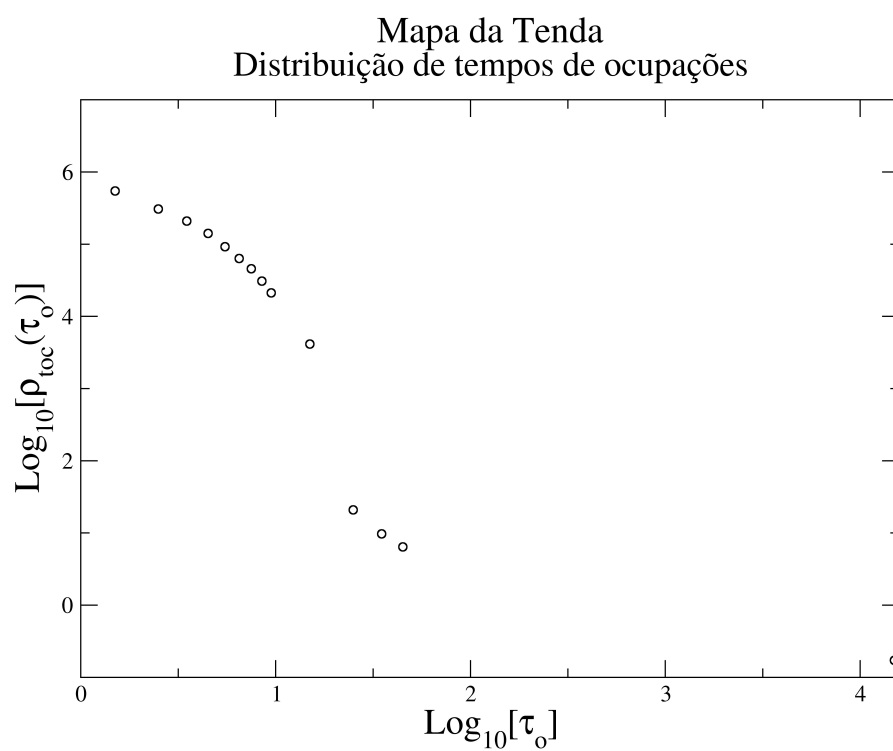


Figura 52 – Ten(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica.

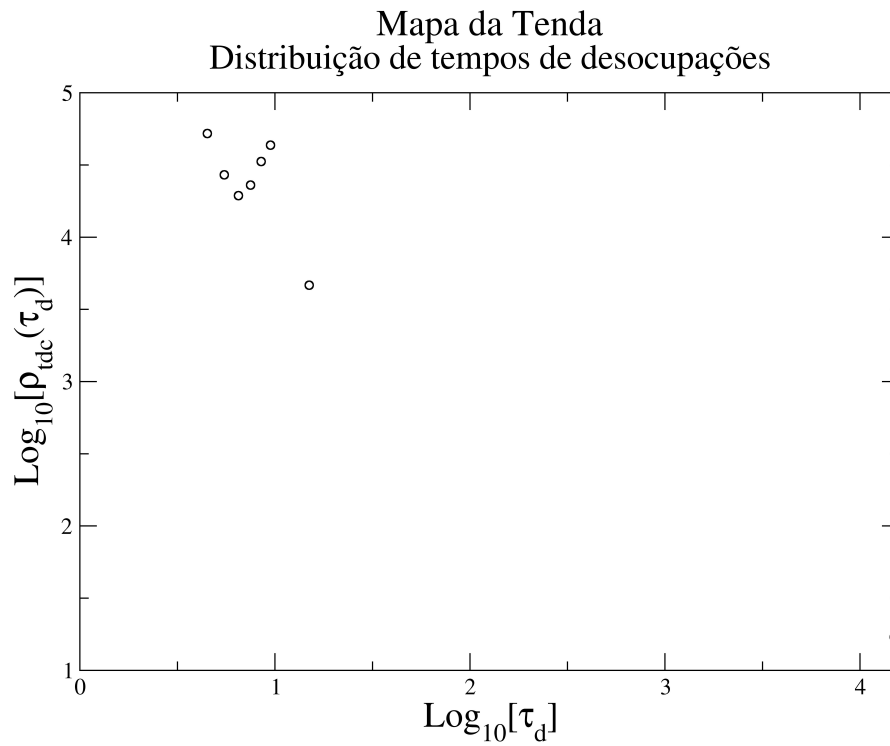


Figura 53 – Ten(Tdc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica.

12 Sistema Dinâmico não Dissipativo: o Mapa 2xmod1.

O Mapa 2xmod1 é caracterizado pela seguinte equação a diferenças:

$$x_{n+1} = 2x_n \text{ modulo } 1 \quad (12.1)$$

Os valores atribuídos aos parâmetros ligados tanto às iterações quanto às estatísticas são apresentados no quadro 20. Quanto a distribuição espacial repete-se o verificado com relação ao Mapa da tenda. Todos os pontos de fase são levados ao ponto fixo, $x = 0$, depois de $n \approx 50$ iterações. Também aqui, como no Mapa da Tenda, há o crescimento da quantidade de pontos existentes, depois de n iterações, que serão levados ao ponto fixo do mapa após a próxima iteração, $n + 1$. Uma vez mais a quantidade de tais pontos é dada por 2^{n-1} [100].

Os histogramas associados a $\varrho_{noc}(Q)$, $\varrho_{toc}(\tau_o)$ e $\varrho_{tdc}(\tau_d)$ são respectivamente exibidos

Quadro 20 – Valores de constantes e parâmetros.

Designação	Valores
Passo de integração	iteração
Instante inicial	0
Instante final	15.000
Coordenadas do centro do intervalo externo	0,5
Dimensão única do intervalo externo	1,0
Dimensão única das estações	0,0001
Dimensão única dos intervalos de condições iniciais	0,0005
Número de estações	10.000

pelas figuras 54, 55 e 56, em escala bi-logarítma. É clara a impossibilidade de realização de um ajuste linear em cada caso. Cada histograma vinculado ao mapa 2xmod1 tem aspecto bem parecido ao do histograma correspondente ligado ao mapa da Tenda. Trata-se de semelhança esperada dados os comportamentos, bem próximos entre si, dos mapas envolvidos.

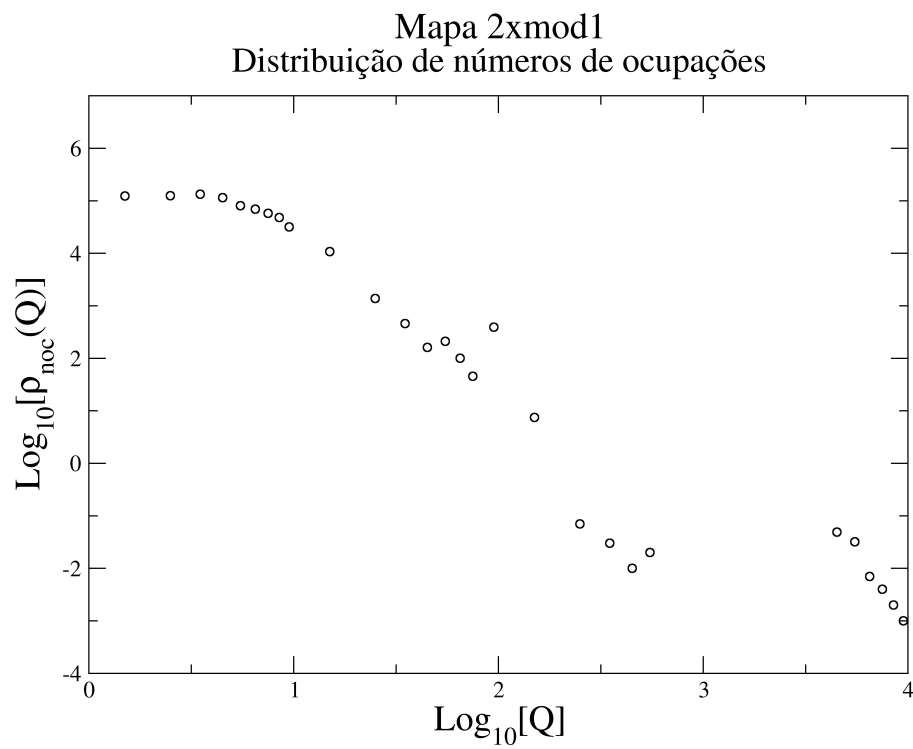


Figura 54 – Tmd(Noc) - Histograma das frequências absolutas dos números de ocupações em escala bilogarítmica.

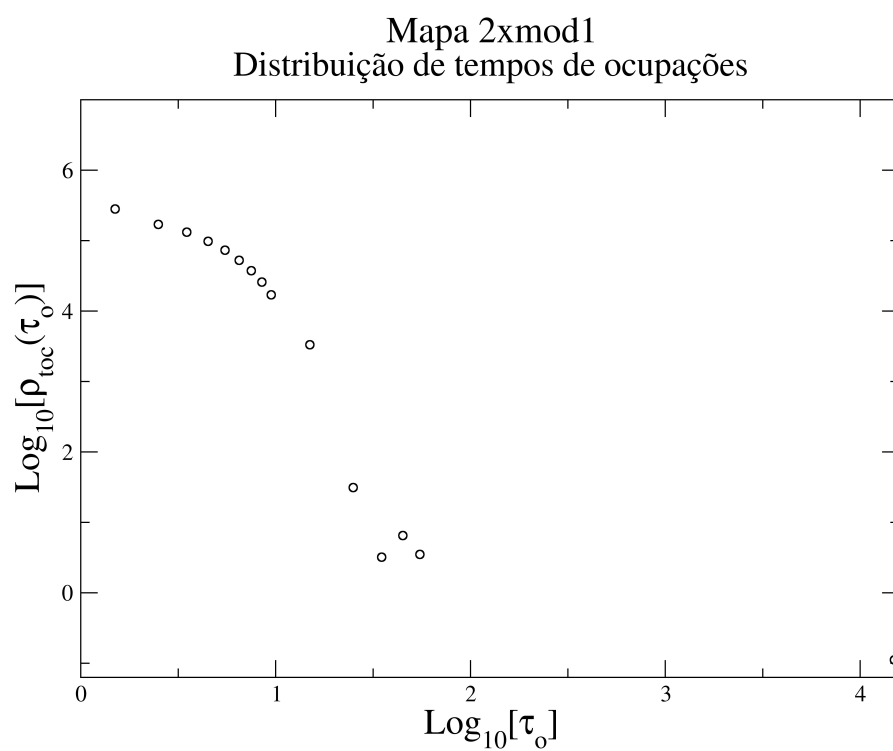


Figura 55 – Tmd(Toc) - Histograma das frequências absolutas dos tempos de ocupações em escala bilogarítmica.

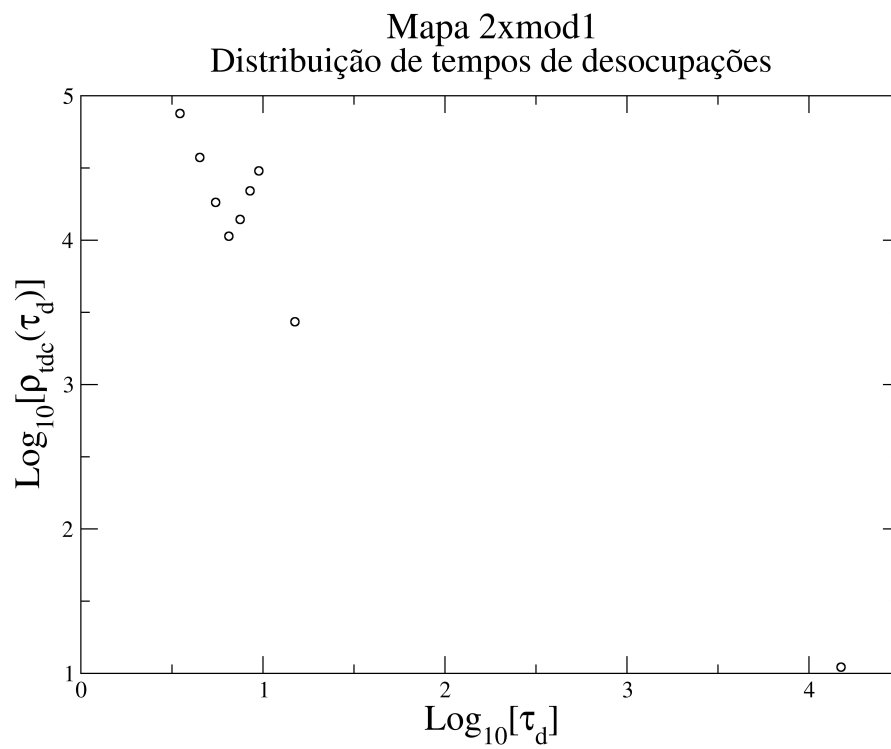


Figura 56 – $T_{\text{md}}(T_{\text{dc}})$ - Histograma das frequências absolutas dos tempos de desocupações em escala bilogarítmica.

13 Código Fonte em Fortran 90 para o Mapa de Hénon.

A principal finalidade deste apêndice é trazer algumas informações gerais sobre a consistência e a execução de cada um dos códigos fonte empregados para gerar as estatísticas associadas aos dez mapas considerados no capítulo 2 e nos apêndices E e F, além dos sistemas contínuos abordados nos apêndices C e D. Aspectos sobre visualizações de resultados também estão presentes. Cada código encerra tanto atributos específicos que dizem respeito exclusivamente a ele mesmo quanto outros compartilhados por todos os quatorze envolvidos. A estes últimos dizem respeito as “informações gerais” a que me referi. Uma cópia do código relativo ao mapa de Hénon, conteúdo do arquivo `hen.f`, e do conteúdo do arquivo de entrada, `Hen_param_in`, correspondente são partes integrantes deste apêndice. O primeiro é escrito em fortran 90, o outro encerra diversos dados de entrada imprescindíveis para renderização do executável proveniente de `hen.f`. Não recorri a qualquer forma de processamento paralelo, o executável atua de forma exclusivamente sequencial. Certa vez não consegui a execução em uma máquina de maior porte, ainda não tenho explicação para isso mas acredito que a presença de dispositivos de software voltados à paralelização podem ser a causa do insucesso.

As execuções sempre aconteceram em computadores pessoais dotados com Ubuntu, versão 16.04 na maior parte das vezes, eventualmente versão 14.04. O único compilador utilizado foi o `gfortran`. Cada uma das execuções ocorreu em diretório que contava inicialmente somente com `hen.f` e `Hen_param_in`. A execução leva à geração de diversos outros arquivos, entre eles:

- `Hen_param_out`, além de outros dados, contém aqueles em `Hen_param_in` para verificação de que os dados de entrada foram introduzidos corretamente. Todos os atributos dos quatro objetos no espaço de fase correspondente, e outros calculados a partir deles, são apresentados
- `HenE_chu_out.dat`: com três colunas, a primeira com valores de $\log_{10}(c_{ij})$, onde c_{ij} é o centro da j -ésima classe pertinente ao i -ésimo intervalo conforme definições no tópico “Histogramas, intervalos e classes” na seção 2.2, e representa Q ou τ_o . A segunda e a terceira respectivamente com os valores de $\log_{10}[\varrho_{oct}(\tau_o)]$ e $\log_{10}[\varrho_{ocn}(Q)]$.
- `HenE_sec_out.dat`: com duas colunas, a primeira com valores de $\log_{10}(c_{ij})$ e a segunda com valores de $\log_{10}[\varrho_{oct}(\tau_v)]$.

A extensão `.dat` associada a cada um dos últimos os torna “visíveis” ao `xmgrace`, este último é o software traçador de gráficos que empreguei para criar todas as figuras mostradas neste trabalho.

As informações reveladas até este ponto são suficientes para o início e o acompanhamento da execução via monitoramento dos arquivos HenE_chu_out.dat e HenE_sec_out.dat. O tempo de execução depende da máquina empregada. Não é necessário esperar pelo final automático da execução, estatísticas robustas são obtidas antes, quanto a mim o tempo necessário foi quase exatamente 72 horas.


```

c Os calculos de cada uma das coordenadas de cada tracejador sao feitos
c com base na evolucao dada pelo mapa de Henon.
c
c As posicoes coordenadas iniciais sao determinadas por pares de
c coordenadas retangulares introduzidas atraves de um arquivo de
c entrada.
c
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c Variaveis:
c cp_x      : componente horizontal da posicao de particula.
c cp_y      : componente vertical da posicao de particula.
c orig_x    : componente horizontal da posicao de centro de figura.
c orig_y    : componente vertical da posicao de centro de figura.
c cmp_x     : componente horizontal da posicao de centro de estacao.
c cmp_y     : componente vertical da posicao de centro de estacao.
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c Constantes:
c dime_x    : dimensao horizontal da regioao.
c dime_y    : dimensao vertical da regioao.
c dim_fig_x : dimensao horizontal da figura.
c dim_fig_y : dimensao vertical da figura.
c dim_est   : dimensao comum as estacoes.
c inte_T    : numero de iteracoes.
c num_part  : numero de particulas.
c num_real  : numero de realizacoes
c comp_x    : componente horizontal da posicao do centro da regioao.
c comp_y    : componente vertical da posicao do centro da regioao.
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c Entradas, feitas com arquivo de entrada: Hen_param_in.

```

```
c valores das dimensoes horizontal e vertical da regioao.  
c valores das dimensoes iniciais horizontal e vertical da figura.  
c valor da dimensao comum as estacoes.  
c valor da dimensoes horizontal e vertical da caixa do atrator.  
c valor do numero de particulas.  
c valor do numero de insercoes.  
c valores das componentes horizontal e vertical do centro da regioao.  
c valor do numero de iteracoes.  
c valor da variavel para decis $\phi$  sobre modo de operacap: ret. ou reg..  
c valor da variavel para decis $\phi$  sobre modo de varredura: smt, des, asc.  
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc  
c Entradas, feitas com arquivo de entrada: Hen_posreg_in.  
c -posicoes dos vertices da regioao:  
c   componentes retangulares verticais.  
c   componentes retangulares horizontais.  
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc  
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc  
c Entradas, feitas com arquivo de entrada: Hen_posest_in.  
c -posicos dos vertices das estacoes:  
c   componentes retangulares verticais.  
c   componentes retangulares horizontais.  
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc  
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc  
c Entradas, feitas com arquivo de entrada: Hen_posin_in.  
c -posicoes iniciais das particulas:  
c   componentes retangulares verticais.  
c   componentes retangulares horizontais.  
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc  
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc  
c Saidas, feitas com arquivo de saida: Hen param out.
```

[illegible]


```
double precision, dimension(:,:),allocatable:: posat
double precision, dimension(:),allocatable:: cont_part,
>
> cont_part_ant, cont_seca,
>
> cont_chuva, cont_int, trans_sec_chu,
>
> trans_chu_sec, even_chu, even_sec
double precision, dimension(:,:),allocatable:: cxa_chuva_1,
>
> cxa_chuva_2,
>
> cxa_seca
double precision, dimension(:), allocatable:: itc_ins
integer, dimension(:),allocatable:: even_sec_ins,
>
> even_chu_ins
double precision:: comp_x, comp_y, difx, dify, cmp_x, cmp_y, cp_x,
>
> cp_y, orig_x, orig_y, dim_fig, dim_est,
>
> log_dec_chu1, log_dec_chu2, log_dec_sec, razao,
>
> rasao, inte_F, u, v, int_ins, part_x, part_y,
>
> xce, xcd, yls, dim_atr_x, dim_atr_y, cx, cy,
>
> og_x, og_y, dim_fig_x, dim_fig_y, dim_est_x,
>
> dim_est_y, dime_x, dime_y, razao_x, razao_y,
>
> raz_x, raz_y, dim_cci_x, dim_cci_y, inte_T,
>
> even_chu_tot, even_sec_tot, even_chu_fin,
>
> even_sec_fin, even_sec_ant, even_chu_ant
double precision, parameter:: pi = 3.1415926563
double precision, dimension(1:500, 1:2):: percat, percci, perreg
double precision, dimension(1:63):: cxa_chuval_tot,
>
> cxa_chuva2_tot,
>
> cxa_seca_tot
double precision, dimension(1:63):: log_dec_cxa
integer, dimension(1:7, 1:9):: convt_seca, convt_chuva, convt_int
integer:: tamanho, estado entrada, i, j, k, l, n, num part,
```



```

open(unit=45, file='Hen_param_in')

do n = 1,15

  if (n.eq.1) then

    Read(45,135,iostat = estado_entrada) aux(n)

    if (estado_entrada.lt.0) exit

    if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 1a**"

    Read(45,125,iostat = estado_entrada) dime_x

    if (estado_entrada.lt.0) exit

    if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 1b**"

  end if

  if (n.eq.2) then

    Read(45,135,iostat = estado_entrada) aux(n)

    if (estado_entrada.lt.0) exit

    if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 2a**"

    Read(45,125,iostat = estado_entrada) dime_y

    if (estado_entrada.lt.0) exit

    if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 2b**"

  end if

  if (n.eq.3) then

    Read(45,135,iostat = estado_entrada) aux(n)

    if (estado_entrada.lt.0) exit

    if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 3a**"

    Read(45,125,iostat = estado_entrada) dim_fig

    if (estado_entrada.lt.0) exit

    if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 3b**"

  end if

  if (n.eq.4) then

    Read(45,135,iostat = estado_entrada) aux(n)

    if (estado_entrada.lt.0) exit

```

```

        if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 4a**"
Read(45,125,iostat = estado_entrada) dim_est
        if (estado_entrada.lt.0) exit
            if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 4b**"
end if

if (n.eq.5) then
    Read(45,135,iostat = estado_entrada) aux(n)
    if (estado_entrada.lt.0) exit
        if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 5a**"
Read(45,125,iostat = estado_entrada) dim_cci_x
        if (estado_entrada.lt.0) exit
            if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 5b**"
end if

if (n.eq.6) then
    Read(45,135,iostat = estado_entrada) aux(n)
    if (estado_entrada.lt.0) exit
        if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 6a**"
Read(45,125,iostat = estado_entrada) dim_cci_y
        if (estado_entrada.lt.0) exit
            if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 6b**"
end if

if (n.eq.7) then
    Read(45,135,iostat = estado_entrada) aux(n)
    if (estado_entrada.lt.0) exit
        if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 7a**"
Read(45,125,iostat = estado_entrada) dim_atr_x
        if (estado_entrada.lt.0) exit
            if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 7b**"
end if

if (n.eq.8) then

```

```

Read(45,135,iostat = estado_entrada) aux(n)

if (estado_entrada.lt.0) exit

    if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 8a**"

Read(45,125,iostat = estado_entrada) dim_atr_y

if (estado_entrada.lt.0) exit

    if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 8b**"

end if

if (n.eq.9) then

    Read(45,135, iostat = estado_entrada) aux(n)

    if (estado_entrada.lt.0) exit

        if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 9a **"

        Read(45,130, iostat = estado_entrada) num_part

        if (estado_entrada.lt.0) exit

            if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 9b**"

    end if

if (n.eq.10) then

    Read(45,135,iostat = estado_entrada) aux(n)

    if (estado_entrada.lt.0) exit

        if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 10a**"

        Read(45,130,iostat = estado_entrada) num_ins

        if (estado_entrada.lt.0) exit

            if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 10b**"

    end if

if (n.eq.11) then

    Read(45,135,iostat = estado_entrada) aux(n)

    if (estado_entrada.lt.0) exit

        if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 11a**"

        Read(45,125,iostat = estado_entrada) comp_x

        if (estado_entrada.lt.0) exit

```

```

        if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 11b**"
    end if

    if (n.eq.12) then

        Read(45,135,iostat = estado_entrada) aux(n)

        if (estado_entrada.lt.0) exit

            if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 12a**"

        Read(45,125,iostat = estado_entrada) comp_y

        if (estado_entrada.lt.0) exit

            if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 12b**"
        end if

    if (n.eq.13) then

        Read(45,135,iostat = estado_entrada) aux(n)

        if (estado_entrada.lt.0) exit

            if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 13a**"

        Read(45,125,iostat = estado_entrada) inte_T

        if (estado_entrada.lt.0) exit

            if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 13b**"
        end if

    if (n.eq.14) then

        Read(45,135,iostat = estado_entrada) aux(n)

        if (estado_entrada.lt.0) exit

            if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 14a**"

        Read(45,135,iostat = estado_entrada) reinicio

        if (estado_entrada.lt.0) exit

            if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 14b**"
        end if

    if (n.eq.15) then

        Read(45,135,iostat = estado_entrada) aux(n)

        if (estado_entrada.lt.0) exit

            if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 15a**"

```

```

        Read(45,135,iostat = estado_entrada) vrd_fig
        if (estado_entrada.lt.0) exit
            if (estado_entrada.gt.0) stop "***erro de entrada 15b**"
        end if
    end do

    close(45)

```

!Dimensoes horizontal e vertical das estacoes

$$\dim \text{est } y = \dim \text{est}$$

```
razao x = dime x/dim est x
```

```
nx = nint(razao x)
```

!Numero de estacoes

!Dimensoes horizontal e vertical da figura

$$\dim \operatorname{fig} y = \dim \operatorname{fig}$$
$$\text{raz } x = \dim \text{cci } x / \dim \text{fig } x$$

```
mx = nint(raz x)
```



```

my = nint(raz_y)

!Numero de realizacoes

num_real = mx*my

!Raiz quadrada do numero de particulas

sqr_npr = nint(sqrt(real(num_part)))

int_ins = inte_T/num_ins

```

```

!Modo de operacao

if (reinicio.eq."sim") then

    retorno = .true.

else

    retorno = .false.

end if

```

```

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Definicoes de variaveis e constantes em tempo de execucao ccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

```

```

allocate(posat(1:num_part,1:2),stat=estado_alocacao)

if(estado_alocacao /= 0) print*, "*** falha na alocação 1 ***"

allocate(posest(1:num_est,1:4,1:2),stat=estado_alocacao )

if(estado_alocacao /= 0) print*, "*** falha na alocação 2 ***"

allocate(cont_part(1:num_est),stat=estado_alocacao)

if(estado_alocacao /= 0) print*, "*** falha na alocação 3 ***"

allocate(cont_part_ant(1:num_est),stat=estado_alocacao)

if(estado_alocacao /= 0) print*, "*** falha na alocação 4 ***"

allocate(cont_seca(1:num_est),stat=estado_alocacao)

if(estado_alocacao /= 0) print*, "*** falha na alocação 5 ***"

allocate(cont_chuva(1:num_est),stat=estado_alocacao)

```



```

open(unit=90, file='Hen_param_out')

write(90,150), aux(01), dime_x
write(90,150), aux(02), dime_y
write(90,150), aux(03), dim_fig
write(90,150), aux(04), dim_est
write(90,150), aux(05), dim_cci_x
write(90,150), aux(06), dim_cci_y
write(90,150), aux(07), dim_atr_x
write(90,150), aux(08), dim_atr_y
write(90,145), aux(09), num_part
write(90,145), aux(10), num_ins
write(90,150), aux(11), comp_x
write(90,150), aux(12), comp_y
write(90,150), aux(13), inte_T
write(90,140), aux(14), reinicio
write(90,140), aux(15), vrd_fig
write(90,145), "Numero de colunas para as figuras:      ",
>
mx
write(90,145), "Numero de linhas para as figuras:      ",
>
my
write(90,145), "Numero de colunas para as estacoes:    ",
>
nx
write(90,145), "Numero de linhas para as estacoes:    ",
>
ny
write(90,145), "Numero de realizacoes:                  ",
>
num_real
write(90,145), "Numero de estacoes:                      ",
>
num_est
write(90,150), "Periodo de insercao:                      ",

```



```

ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
ccccccc Inicializacao de constante: percci cccccccccccccccccccccccccccccccc
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

      open(unit=35, file='Hen_ctnreg_in.dat')

      l = 1

      og_x = comp_x
      og_y = comp_y
      cx = og_x + dime_x*5.d-1
      do j = 1, 125
         cy = og_y + 4.d0*dime_y*(j-1)/500 - dime_y*5.d-1
         write(35,30) cx, cy
         perreg(l,1) = cx
            perreg(l,2) = cy
         l = l + 1
      end do

      cy = og_y + dime_y*5.d-1
      do j = 1, 125
         cx = og_x - 4.d0*dime_x*(j-1)/500 + dime_x*5.d-1
         write(35,30) cx, cy
         perreg(l,1) = cx
            perreg(l,2) = cy
         l = l + 1
      end do

      cx = og_x - dime_x*5.d-1
      do j = 1, 125
         cy = og_y - 4.d0*dime_y*(j-1)/500 + dime_y*5.d-1
         write(35,30) cx, cy
         perreg(l,1) = cx
            perreg(l,2) = cy

```



```

cccccccc Inicializacoes de variaveis e constantes cccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Matriz (7 x 9) ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
    k = 0
    do i = 1, 7
        do j = 1, 9
            k = k + 1
            convt_int(i,j) = j + (i-1)*9
            convt_seca(i,j) = j + (i-1)*9
            convt_chuva(i,j) = j + (i-1)*9
            log_dec_cxa(k) = log10(real((j+5.e-1)*10**(i-1)))
        end do
    end do
cccccccc Vetores (1 x numero de estacoes) cccccccccccccccccccccccccccc
    even_chu = 0
    even_sec = 0
cccccccc Matrizes (numero de estacoes x 63) cccccccccccccccccccccccccccc
    cxa_seca = 0
    cxa_chuva_1 = 0
    cxa_chuva_2 = 0
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Transferencia de execucao no modo retorno ccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
    if (retorno.eqv..true.) then
        goto 10
    end if
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Contadores para movimentos das figuras cccccccccccccccccccccccc
    ccfx = 2
    ccfy = 1

```

```

ccgx = mx

ccgy = my

ccccccc Inicializacao do contador de realizacoes cccccccccccccccccccccccccc

    cont_real = 1

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Repeticao para periodos de iteracao ccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

    do while (cont_real.le.num_real)

cccccccc Inicializacoes de variaveis e constantes cccccccccccccccccccccccc

        even_sec_ant = 0

        even_chu_ant = 0

cccccccc Vetores (1 x num_ins) ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

        even_chu_ins = 0

        even_sec_ins = 0

cccccccc Vetores (1 x num_est) ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

        cont_int = 0

        cont_seca = 0

        cont_chuva = 0

        cont_part_ant = -1

        trans_sec_chu = 0

        trans_chu_sec = 0

cccccccc Escrita em arquivo de saida cccccccccccccccccccccccccccccccccccc

        open(unit=125, file='Hen_moni_out')

            write(125,115) num_real, cont_real, inte_T

        close(125)

cccccccc Inicializacao do contador de iteracoes ccccccccccccccccccccccccccc

        tamanho = 1

cccccccc Inicializacao do contador de insercoes ccccccccccccccccccccccccccc

        cont_ins = 1

```

```

do while (cont_ins.le.num_ins)

cccccccc Selecao da iteracao de insercao cccccccccccccccccccccccccccccc

    inte_F = itc_ins(cont_ins)

cccccccc Repeticao para evolucao em cada intervalo de insercao ccccccccc

do while (tamanho.le.inte_F)

cccccccc Inicio de nova contagem cccccccccccccccccccccccccccccccccc

    cont_part = 0.0

cccccccc Repeticao para evolucao de cada particula ccccccccccccccccccccc

do l = 1, num_part

cccccccc Teste para cumprimento das condicoes de fronteira cccccccccccc

    if ((posat(l,1).ne.-1.d+3).and.

        >          (posat(l,2).ne.-1.d+3)) then

cccccccc Leitura: posicoes iniciais das particulas cccccccccccccccccccc

        comp_x = posat(l,1)

        comp_y = posat(l,2)

        !Inicializacoes das coordenadas horizontal e vertical

        u = comp_x !horizontalhttps://youtu.be/o334ayJrQSo

        v = comp_y !vertical

        !Calculos novos valores das coordenadas

        comp_x = 1.4d0 - u*u + 3.d-1*v

        comp y = u

```

```

cccccccc Atualizacao: coordenadas dos tracejadores ccccccccccccccccccccccccccccccccc
    posat(1,1) = comp_x
    posat(1,2) = comp_y
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Fim, teste para cumprimento das condicoes de fronteira ccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
    end if

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Fim: repeticao para evolucao de cada particula ccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
    end do

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Contagem de trac. nas estac. durante a iteracao atual ccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

do l = 1, num_part
    comp_x = posat(1,1)
    comp_y = posat(1,2)
    cont_est = 1
    sim_est = .false.
    do while((cont_est.le.num_est).and.(sim_est.eqv..false.))
        !Primeira linha, todas as estacoes.

        if ((cont_est.ge.1).and.(cont_est.le.nx)) then
            !Primeira estacao, na primeira linha.

            if (cont_est.eq.1) then
                if (comp_x.ge.posest(cont_est,4,1).and.
>                comp_x.le.posest(cont_est,2,1)) then
                    if (comp_y.le.posest(cont_est,2,2).and.
>                    comp_y.ge.posest(cont_est,4,2)) then
                        cont_part(cont_est) = cont_part(cont_est) + 1

```



```

        sim_est = .true.
    end if
end if
else
    !Outras estacoes, na primeira linha.
    if (comp_x.gt.posest(cont_est,4,1).and.
> comp_x.le.posest(cont_est,2,1)) then
        if (comp_y.le.posest(cont_est,2,2).and.
> comp_y.ge.posest(cont_est,4,2)) then
            cont_part(cont_est) = cont_part(cont_est) + 1
            sim_est = .true.
        end if
    end if
end if
else
    !Fora da primeira linha, todas as estacoes.
    if ((mod(cont_est,nx).ne.0)) then
        !Estacoes fora da ultima coluna.
        if (comp_x.ge.posest(cont_est,4,1).and.
> comp_x.lt.posest(cont_est,2,1)) then
            if (comp_y.lt.posest(cont_est,2,2).and.
> comp_y.ge.posest(cont_est,4,2)) then
                cont_part(cont_est) = cont_part(cont_est) + 1
                sim_est = .true.
            end if
        end if
        !Estacoes na ultima coluna.
    else
        if (comp_x.ge.posest(cont_est,4,1).and.
> comp_x.le.posest(cont_est,2,1)) then
            if (comp_y.lt.posest(cont_est,2,2).and.

```

```
>                                comp_y.ge.posest(cont_est,4,2)) then

                                cont_part(cont_est) = cont_part(cont_est) + 1

                                sim_est = .true.

                            end if

                        end if

                    !Fim, estacoes fora da ultima coluna.

                end if

            !Fim, fora da primeira linha, todas as estacoes.

        end if

    !Fim, primeira linha, todas as estacoes.

end if

cont_est = cont_est + 1

end do

end do

ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Contag. de secas/chuvas nas est. duran. a iteracao atual ccccc
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
do cont_est = 1, num_est
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Selecao do estado da iteracao: seca ccccccccccccccccccccccccc
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
if (cont_part(cont_est).eq.0) then
cont_seca(cont_est) = cont_seca(cont_est)+1
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Transicao: chuva-seca ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
if (cont_part_ant(cont_est).gt.0) then
trans_chu_sec(cont_est)=trans_chu_sec(cont_est)+1
seque a = .true.
```

[illegible]

```

trans_sec_chu(cont_est)=trans_sec_chu(cont_est)+1
segue_a = .true.
divisor = 1
do while ((divisor.le.1000000).and.segue_a)
    razao = cont_seca(cont_est)/divisor
    if ((razao.ge.1.0).and.razao.lt.10) then
        segue_a =.false.
        fino = int(razao)
        grosso=nint(log10(real(divisor)))+1
        indice = convt_seca(grosso, fino)
        cxa_seca(cont_est, indice)=
>             cxa_seca(cont_est, indice)+1
    end if
    divisor = divisor*10
end do
end if
else
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Ausencia de transicao:fim das iteracoes antes da transicao cccc
cccccccc                      Seca                      ccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

if (tamanho.eq.inte_T) then
    trans_sec_chu(cont_est)=trans_sec_chu(cont_est)+1
    segue_a = .true.
    divisor = 1
    do while ((divisor.le.1000000).and.segue_a)
        razao = cont_seca(cont_est)/divisor
        if ((razao.ge.1.0).and.razao.lt.10) then
            segue_a =.false.

```

```

        fino = int(razao)

        grosso=nint(log10(real(divisor)))+1

        indice = convt_seca(grosso,fino)

        cxa_seca(cont_est,indice)=
>             cxa_seca(cont_est,indice)+1

        end if

        divisor = divisor*10

    end do

end if

else

    cont_chuva(cont_est)=cont_chuva(cont_est)+1
    cont_int(cont_est)=cont_int(cont_est)
>             +cont_part(cont_est)

    Transicao: seca-chuva

    if (cont_part_ant(cont_est).eq.0) then
        trans_sec_chu(cont_est)=trans_sec_chu(cont_est)+1
        segue_a = .true.
        divisor = 1
        do while ((divisor.le.1000000).and.segue_a)
            razao = cont_seca(cont_est)/divisor
            if ((razao.ge.1.0).and.razao.lt.10) then
                segue_a = .false.
                fino = int(razao)
                grosso = nint(log10(real(divisor)))+1

```

```

        indice = convt_chuva(grosso,fino)

        cxa_seca(cont_est,indice)=

>                cxa_seca(cont_est,indice)+1

    end if

    divisor = divisor*10

end do

cont_seca(cont_est) = 0

ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccc Trans. entre penultima e ultima (iter.) do per. de observacao cc
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

    if (tamanho.eq.inte_T) then

        trans_chu_sec(cont_est)=trans_chu_sec(cont_est)+1

        segue_a = .true.

        segue_b = .true.

        divisor = 1

        do while ((divisor.le.1000000).and.(segue_a.or.

>                segue_b))

            razao = cont_chuva(cont_est)/divisor

            if ((razao.ge.1.0).and.razao.lt.10)then

                segue_a = .false.

                fino = int(razao)

                grosso=nint(log10(real(divisor)))+1

                indice = convt_chuva(grosso,fino)

                cxa_chuva_1(cont_est,indice) = cxa_chuva_1(

>                    cont_est,indice)+1

            end if

            rasao = cont_int(cont_est)/divisor

            if ((rasao.ge.1.0).and.rasao.lt.10)then

                segue b = .false.

```

```

        fino = int(rasao)

        grosso=nint(log10(real(divisor)))+1

        indice = convt_int(grosso,fino)

        cxa_chuva_2(cont_est,indice) = cxa_chuva_2(
>                cont_est,indice)+1

        end if

        divisor = divisor*10

    end do

end if

else

ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Ausencia de transicao:fim das iteracoes antes da transicao cccc
cccccccc                                Chuva                                ccccccc
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

        if (tamanho.eq.inte_T) then

            trans_chu_sec(cont_est)=trans_chu_sec(cont_est)+1

            segue_a = .true.

            segue_b = .true.

            divisor = 1

            do while ((divisor.le.1000000).and.(segue_a.or.
>                    segue_b))

                razao = cont_chuva(cont_est)/divisor

                if ((razao.ge.1.0).and.razao.lt.10)then

                    segue_a = .false.

                    fino = int(razao)

                    grosso=nint(log10(real(divisor)))+1

                    indice = convt_chuva(grosso,fino)

                    cxa_chuva_1(cont_est,indice) = cxa_chuva_1(
>                            cont_est,indice)+1

                    end if

```



```

ccccccccc
cccc Escritas em arquivos de saida: configuracoes ccccccccccccccccccc
cccc      Posicoes das particulas ao final de um      ccccccccccccccccccc
cccc            intervalo de insercao                    ccccccccccccccccccc
ccccccccc
if (mod(cont_real*1.0,1.0).eq.0) then
    write(nins, frm) cont_ins
    n_ins = 'Hen_config'//trim(nins)//'.dat'
    open(unit=170, file=n_ins)
    do i = 1, num_part
        if ((posat(i,1).ne.-1.d+3).and.(posat(i,2).ne.-1.d+3))
>         then
            write(170,30) posat(i,1), posat(i,2)
        end if
    end do
    close(170)
end if
ccccccccc
cccc Fim, escritas em arquivos de saida: configuracoes ccccccccccccccc
ccccccccc
ccccccccc
cccc Escritas em arquivos de saida: eventos ccccccccccccccccccccccc
cccc Quantidades de chuvas e de secas ao finaL de ccccccccccccccccccc
cccc            um intervalo de insercao                    ccccccccccccccccccc
ccccccccc
if (mod(cont_real,1).eq.0) then
cccc Acumulacoes das estatisticas sobre todas as estacoes ccccccccccc
    even_chu_tot = 0.0
    even_sec_tot = 0.0

```

```

do cont_est = 1, num_est
    even_chu_tot = even_chu_tot + trans_chu_sec(cont_est)
    even_sec_tot = even_sec_tot + trans_sec_chu(cont_est)
end do

cccccccc Escritas nos arquivos de saida:_evt(n).out: ccccccccc
cccccccc quantidades de transicoes para algum dos ccccccccccccc
cccccccc dos intervalos de insercao ou para a ultima ccccccccc
cccccccc realizacao finalizada na iteracao T: chuvas e secas cc

    even_sec_ins(cont_ins) = nint(even_sec_tot-even_sec_ant)
    even_chu_ins(cont_ins) = nint(even_chu_tot-even_chu_ant)
    write(nins, frm) cont_ins
    n_ins = 'Hen_evento'//trim(nins)//'_out'
    open(unit=115, file=n_ins)

        write(115,110) 'Quantidade instant. de chuvas =',
>            even_chu_ins(cont_ins)
        write(115,110) 'Quantidade instant. de secas =',
>            even_sec_ins(cont_ins)
        write(115,110) 'Numero da realizacao =',
>            cont_real
        write(115,150) 'Quantidade acumulada de chuvas =',
>            even_chu_tot
        write(115,150) 'Quantidade acumulada de secas =',
>            even_sec_tot
    close(115)
    even_sec_ant = even_sec_tot
    even_chu_ant = even_chu_tot
end if

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Fim, escritas em arquivos de saida: eventos ccccccccccccc

```

```

ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Inicio, escritas em arquivos de recuperacao: configuracoes cccc
cccccccc          e parametros para retorno          cccccccccccccccccccc
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

    open(unit=170, status='replace', file='Hen01_escalares')
        write(170,135) "Numero da realizacao:"
        write(170,130) cont_real
        write(170,135) "Contador de colunas descendente:"
        write(170,130) ccfx
        write(170,135) "Contador de linhas descendente :"
        write(170,130) ccfy
        write(170,135) "Contador de colunas ascendente:"
        write(170,130) ccgx
        write(170,135) "Contador de linhas ascendente:"
        write(170,130) ccgy
        write(170,135) "Decisao sobre modo de varredura:"
        write(170,135) vrd_fig
        write(170,135) "Contador de insercoes:"
        write(170,130) cont_ins
        write(170,135) "Variavel even_chu_ant:"
        write(170,125) even_chu_ant
        write(170,135) "Variavel even_sec_ant:"
        write(170,125) even_sec_ant
        write(170,135) "Contador de iteracoes:"
        write(170,130) tamanho
    close(170)

    open(unit=180, status='replace', file='Hen02_cnttparant')
        do i =1, num_est
            write(180,125) cont part ant(i)

```

```

        end do
    close(180)
    open(unit=190, status='replace', file='Hen03_trschusec')
        do i =1, num_est
            write(190,125) trans_chu_sec(i)
        end do
    close(190)
    open(unit=200, status='replace', file='Hen04_trssecchu')
        do i =1, num_est
            write(200,125) trans_sec_chu(i)
        end do
    close(200)
    open(unit=210, status='replace', file='Hen05_evechuins')
        do i =1, num_ins
            write(210,130) even_chu_ins(i)
        end do
    close(210)
    open(unit=220, status='replace', file='Hen06_evesecins')
        do i =1, num_ins
            write(220,130) even_sec_ins(i)
        end do
    close(220)
    open(unit=230, status='replace', file='Hen07_posiatual')
        do i = 1, num_part
            write(230,30) posat(i,1), posat(i,2)
        end do
    close(230)
    open(unit=240, status='replace', file='Hen08_mtcxaseca')
        do i = 1, num_est

```

```

do j = 1, 63
    if (j.lt.63) tHen
        write(240,125,advance='no') cxa_seca(i,j)
    else
        write(240,125,advance='yes') cxa_seca(i,j)
    end if
end do
end do
close(240)
open(unit=250, status='replace', file='Hen09_mtcxachu1')
do i = 1, num_est
    do j = 1, 63
        if (j.lt.63) tHen
            write(250,125,advance='no') cxa_chuva_1(i,j)
        else
            write(250,125,advance='yes') cxa_chuva_1(i,j)
        end if
    end do
end do
close(250)
open(unit=260, status='replace', file='Hen10_mtcxachu2')
do i = 1, num_est
    do j = 1, 63
        if (j.lt.63) tHen
            write(260,125,advance='no') cxa_chuva_2(i,j)
        else
            write(260,125,advance='yes') cxa_chuva_2(i,j)
        end if
    end do
end do

```



```

ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
10          if (retorno.eqv..true.) then

ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Inicio, leituras em arquivos de recuperacao: configuracoes cccc
cccccccc           e parametros para retorno                ccccccccccccccccccccccc
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

        open(unit=35, file='Hen01_escalares')

            read(35,135, iostat = estado_entrada) aux(1)

            if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 17a**"

            read(35,130, iostat = estado_entrada) cont_real

            if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 17b**"

            read(35,135, iostat = estado_entrada) aux(2)

            if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 18a**"

            read(35,130, iostat = estado_entrada) ccfx

            if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 18b**"

            read(35,135, iostat = estado_entrada) aux(3)

            if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 19a**"

            read(35,130, iostat = estado_entrada) ccfy

            if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 19b**"

            read(35,135, iostat = estado_entrada) aux(4)

            if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 20a**"

            read(35,130, iostat = estado_entrada) ccgx

            if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 20b**"

            read(35,135, iostat = estado_entrada) aux(5)

            if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 21a**"

            read(35,130, iostat = estado_entrada) ccgy

            if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 21b**"

            read(35,135, iostat = estado_entrada) aux(6)

            if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 22a**"

            read(35,135, iostat = estado_entrada) vrd fig

```

```

if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 22b**"
read(35,135, iostat = estado_entrada) aux(7)
if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 23a**"
read(35,130, iostat = estado_entrada) cont_ins
if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 23b**"
read(35,135, iostat = estado_entrada) aux(8)
if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 24a**"
read(35,125, iostat = estado_entrada) even_chu_ant
if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 24b**"
read(35,135, iostat = estado_entrada) aux(9)
if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 25a**"
read(35,125, iostat = estado_entrada) even_sec_ant
if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 25b**"
read(35,135, iostat = estado_entrada) aux(12)
if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 26a**"
read(35,130, iostat = estado_entrada) tamanho
if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 26b**"
close(35)

even_chu_tot = even_chu_ant
even_sec_tot = even_sec_ant
open(unit=180, file='Hen02_cntparant')

i = 1
do
    read(180,125, iostat = estado_entrada) difx
    if (estado_entrada.lt.0) exit
    if (estado_entrada.gt.0) stop
>                                     "*** erro de entrada 28**"

    cont_part_ant(i) = difx

    i = i + 1

```



```

        end do
    close(180)

    cont_part = cont_part_ant
    open(unit=190, file='Hen03_trschusec')

    i = 1

    do

        read(190,125, iostat = estado_entrada) difx

        if (estado_entrada.lt.0) exit

        if (estado_entrada.gt.0) stop

>                                     "*** erro de entrada 29***"

        trans_chu_sec(i) = difx

        i = i + 1

    end do

    close(190)

    open(unit=200, file='Hen04_trssecchu')

    i = 1

    do

        read(200,125, iostat = estado_entrada) difx

        if (estado_entrada.lt.0) exit

        if (estado_entrada.gt.0) stop

>                                     "*** erro de entrada 30***"

        trans_sec_chu(i) = difx

        i = i + 1

    end do

    close(200)

    open(unit=210, file='Hen05_evechuins')

    i = 1

    do

        read(210,130, iostat = estado_entrada) n

```

```

        if (estado_entrada.lt.0) exit
        if (estado_entrada.gt.0) stop
>                                     "*** erro de entrada 32**"

        even_chu_ins(i) = n
        i = i + 1
        end do
close(210)
open(unit=210, file='Hen06_evesecins')
        i = 1
        do
            read(210,130, iostat = estado_entrada) n
            if (estado_entrada.lt.0) exit
            if (estado_entrada.gt.0) stop
>                                     "*** erro de entrada 33**"

            even_sec_ins(i) = n
            i = i + 1
            end do
close(210)
open(unit=230, file='Hen07_posiatual')
        i = 1
        do
            read(230,30, iostat = estado_entrada) difx, dify
            if (estado_entrada.lt.0) exit
            if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 34**"
            posat(i,1) = difx
            posat(i,2) = dify
            i = i + 1
        end do
close(230)

```

```

open(unit=240, file='Hen08_mtcxaseca')

n = 1

i = 1

j = 1

do

    if (j.lt.63) then

        read(240,125,advance='no',iostat = estado_entrada)

>        difx

        if (estado_entrada.lt.0) exit

        if (estado_entrada.gt.0) stop"*erro de entrada 35a*"

        cxa_seca(i,j) = difx

    else

        read(240,125,advance='yes',iostat = estado_entrada)

>        difx

        if (estado_entrada.lt.0) exit

        if (estado_entrada.gt.0) stop"*erro de entrada 35b*"

        cxa_seca(i,j) = difx

    end if

    j = j + 1

    if ((mod(j-1,63).eq.0)) then

        i = i + 1

        j = 1

    end if

    n = n + 1

end do

close(240)

open(unit=250, file='Hen09_mtcxachul')

i = 1

j = 1

n = 1

```

```

do
    if (j.lt.63) then
        read(250,125,advance='no',iostat=estado_entrada) difx
        if (estado_entrada.lt.0) exit
        if (estado_entrada.gt.0) stop "*erro de entrada 36a*"
        cxa_chuva_1(i,j) = difx
    else
        read(250,125,advance='yes',iostat=estado_entrada) difx
        if (estado_entrada.lt.0) exit
        if (estado_entrada.gt.0) stop "*erro de entrada 36b*"
        cxa_chuva_1(i,j) = difx
    end if
    j = j + 1
    if ((mod(j-1,63).eq.0)) then
        i = i + 1
        j = 1
    end if
    n = n + 1
end do
close(250)
open(unit=260, file='Hen10_mtcxachu2')

i = 1
j = 1
n = 1
do
    if (j.lt.63) then
        read(260,125,advance='no',iostat=estado_entrada) difx
        if (estado_entrada.lt.0) exit
        if (estado_entrada.gt.0) stop "*erro de entrada 37a*"

```

```

        cxa_chuva_2(i,j) = difx
    else
        read(260,125,advance='yes',iostat=estado_entrada) difx
        if (estado_entrada.lt.0) exit
        if (estado_entrada.gt.0) stop "* erro de entrada 37b*"
        cxa_chuva_2(i,j) = difx
    end if
    j = j + 1
    if ((mod(j-1,63).eq.0)) then
        i = i + 1
        j = 1
    end if
    n = n + 1
end do
close(260)
open(unit=270, file='Hen11_continten')
i = 1
do
    read(270,125, iostat = estado_entrada) difx
    if (estado_entrada.lt.0) exit
    if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 38**"
    cont_int(i) = difx
    i = i + 1
end do
close(270)
open(unit=280, file='Hen12_contchuva')
i = 1
do
    read(280,125, iostat = estado_entrada) difx
    if (estado_entrada.lt.0) exit

```

```

        if (estado_entrada.gt.0) stop"** erro de entrada 39**"

        cont_chuva(i) = difx

        i = i + 1

    end do

close(280)

open(unit=290, file='Hen13_contseca')

    i = 1

    do

        read(290,125, iostat = estado_entrada) difx

        if (estado_entrada.lt.0) exit

        if (estado_entrada.gt.0) stop"** erro de entrada 40**"

        cont_seca(i) = difx

        i = i + 1

    end do

close(290)

open(unit=300, file='Hen14_eventochu')

    i = 1

    do

        read(300,125, iostat = estado_entrada) difx

        if (estado_entrada.lt.0) exit

        if (estado_entrada.gt.0) stop"** erro de entrada 41**"

        even_chu(i) = difx

        i = i + 1

    end do

close(300)

open(unit=310, file='Hen15_eventosec')

    i = 1

    do

        read(310,125, iostat = estado_entrada) difx

```

```
        if (estado_entrada.lt.0) exit

        if (estado_entrada.gt.0) stop "*** erro de entrada 42**"

        even_sec(i) = difx

        i = i + 1

    end do

    close(310)

ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Fim, leituras em arquivos de recuperacao: configuracoes ccccccc
cccccccc          e parametros para retorno          ccccccccccccccccccccc
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

        retorno = .false.

    end if

ccccccc Incremento do contador de insercoes cccccccccccccccccccccccccccccc

        cont_ins = cont_ins + 1

ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Fim, repeticao para intervalos de insercao cccccccccccccccccccccccc
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

        end do

ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Quantidades de eventos acumuladas, em cada estacao, cccccccccccc
cccccccc          at? a ?tima realizacao finalizada          cccccccccccc
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

do cont_est=1, num_est

    even_chu(cont_est) = even_chu(cont_est)

>                                + trans_chu_sec(cont_est)

    even_sec(cont_est) = even_sec(cont_est)

>                                + trans_sec_chu(cont_est)

end do

ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Escritas finais em arquivos de saida: eventos cccccccccccccccccccc
```

[illegible]


```
if (mod(cont_real,1).eq.0) then
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Acumulacoes das estatisticas sobre todas as estacoes ccccccccc
cccccccc      at? a ?tima realizacao finalizada      cccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

    cxa_seca_tot = 0
    cxa_chuva1_tot = 0
    cxa_chuva2_tot = 0

    do cont_est = 1, num_est
        do l = 1, 63
            cxa_seca_tot(l)=cxa_seca_tot(l)+cxa_seca(cont_est,l)
            cxa_chuva1_tot(l)=cxa_chuva1_tot(l)+
>                cxa_chuva_1(cont_est,l)
            cxa_chuva2_tot(l)=cxa_chuva2_tot(l)+
>                cxa_chuva_2(cont_est,l)
        end do
    end do

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Escritas em arquivos de saida: decadas acumuladas   ccccccccccc
cccccccc      sobre todas as esta??es      cccccccccccccccccccccc
cccccccc      at? a ?tima realizacao finalizada      cccccccccccccccccccccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Compen. do aumen. da cont. devido ao aumen. da larg. da caixa c

    do l = 1, 63
        select case (l)
            case (1:9)
                decada = 1
            case (10:18)
                decada = 2
            case (19:27)
```

```

        decada = 3
    case (28:36)
        decada = 4
    case (37:45)
        decada = 5
    case (46:54)
        decada = 6
    case (55:63)
        decada = 7
end select

fat_nor=10**(decada-1)

cxa_seca_tot(1)=cxa_seca_tot(1)/fat_nor
cxa_chuva1_tot(1)=cxa_chuva1_tot(1)/fat_nor
cxa_chuva2_tot(1)=cxa_chuva2_tot(1)/fat_nor
end do

open(unit=105, file='HenE_chu_out.dat')
open(unit=95, file='HenE_sec_out.dat')

do 1 = 1, 63

cccccccc Escrita no arquivo de saida: Hen_chu_out: cccccccccccccc
cccccccc estatisticas sobre chuvas: duracoes e intensidades cccc

    if (cxa_chuva1_tot(1).eq.0) then
        log_dec_chu1 = cxa_chuva1_tot(1)
    else
        log_dec_chu1 = log10(real(cxa_chuva1_tot(1)))
    end if

    if (cxa_chuva2_tot(1).eq.0) then
        log_dec_chu2 = cxa_chuva2_tot(1)
    else
        log_dec_chu2 = log10(real(cxa_chuva2_tot(1)))

```

[illegible]

```

orig_y = cto_fig(ccgy, ccgx, 2)
ccgx = ccgx - 1
if (ccgx.eq.0) then
    ccgx = ccgx + mx
    ccgy = ccgy - 1
end if
else
    orig_x = cto_fig(ccfy, ccfx, 1)
    orig_y = cto_fig(ccfy, ccfx, 2)
    ccfx = ccfx + 1
    if (mod(ccfx-1, mx).eq.0) then
        ccfx = ccfx - mx
        ccfy = ccfy + 1
    end if
end if
else
    !Varredura ascendente
    if (vrd_fig.eq.'asc') then
        ccgx = ccgx - 1
        if (ccgx.eq.0) then
            ccgx = ccgx + mx
            ccgy = ccgy - 1
        end if
        orig_x = cto_fig(ccgy, ccgx, 1)
        orig_y = cto_fig(ccgy, ccgx, 2)
    else
        !Varredura descendente
        orig_x = cto_fig(ccfy, ccfx, 1)
        orig_y = cto_fig(ccfy, ccfx, 2)
    end if
end if

```

```

        ccfx = ccfx + 1

        if (mod(ccfx-1,mx).eq.0) then

            ccfx = ccfx - mx

            ccfy = ccfy + 1

        end if

    end if

end if

cccccccc Escrita em arquivo de saida: hen_config000.dat ccccccccccccccccc
cccccccc configura?? inicial para a pr??xima realiza?? ccccccccccccccccc

        open(unit=35, file='Hen_config000.dat')

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
cccccccc Condições de fronteira para os blocos de condições iniciais ccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

        ! Na primeira linha, fora da primeira coluna !!!!!!!!!!!!!!!

        if ((cont_real.ge.2).and.(cont_real.le.mx)) then

            l = 1

            xce = orig_x - dim_fig*5.d-1

            do i = 1, sqr_npr

                cp_x=orig_x+dim_fig*(i-1)/(sqr_npr-1)-dim_fig*5.d-1

                if (cp_x.eq.xce) then

                    do j = 1, sqr_npr

                        cp_y=orig_y+dim_fig*(j-1)/(sqr_npr-1)-dim_fig*5.d-1

                        write(35,30) cp_x, cp_y

                        posat(1,1) = cp_x

                        posat(1,2) = -1.d+3

                        l = l + 1

                    end do

                else

                    do j = 1, sqr_npr

                        cp_y=orig_y+dim_fig*(j-1)/(sqr_npr-1)-dim_fig*5.d-1

```

```

        write(35,30) cp_x, cp_y

        posat(1,1) = cp_x

        posat(1,2) = cp_y

        l = l + 1

    end do

end if

end do

! Fora da primeira linha !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

else

    ! Fora da última coluna na linha !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

    if (mod(cont_real,mx).ne.0) then

        l = 1

        yls = orig_y + dim_fig*5.d-1

        xcd = orig_x + dim_fig*5.d-1

        do i = 1, sqr_npr

            cp_x=orig_x+dim_fig*(i-1)/(sqr_npr-1)-dim_fig*5.d-1

            if (cp_x.eq.xcd) then

                do j = 1, sqr_npr

                    cp_y=orig_y+dim_fig*(j-1)/(sqr_npr-1)

                    -dim_fig*5.d-1

                    write(35,30) cp_x, cp_y

                    posat(1,1) = cp_x

                    posat(1,2) = -1.d+3

                    l = l + 1

                end do

            else

                do j = 1, sqr_npr

                    cp_y=orig_y+dim_fig*(j-1)/(sqr_npr-1)

                    -dim_fig*5.d-1

```

```

        if (cp_y.eq.yls) then
            write(35,30) cp_x, cp_y
            posat(1,1) = -1.d+3
            posat(1,2) = cp_y
            l = l + 1
        else
            write(35,30) cp_x, cp_y
            posat(1,1) = cp_x
            posat(1,2) = cp_y
            l = l + 1
        end if
    end do
end if

end do

! Na ultima coluna da linha !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
else
    l = 1
    yls = orig_y + dim_fig*5.d-1
    do i = 1, sqr_npr
        cp_x=orig_x+dim_fig*(i-1)/(sqr_npr-1)-dim_fig*5.d-1
        do j = 1, sqr_npr
            cp_y=orig_y+dim_fig*(j-1)/(sqr_npr-1)-dim_fig*5.d-1
            if (cp_y.eq.yls) then
                write(35,30) cp_x, cp_y
                posat(1,1) = -1.d+3
                posat(1,2) = cp_y
                l = l + 1
            else
                write(35,30) cp_x, cp_y
                posat(1,1) = cp_x

```

[illegible]

Componente horizontal da dimensao da regioao:
3.65d0
Componente vertical da dimensao da regioao:
3.65d0
Dimensao da figura:
5.d-2
Dimensao das estacoes:
2.5d-2
Componente horiz. do cont. das cond. iniciais:
4.d0
Componente verti. do cont. das cond. iniciais:
4.d0
Dimensao horizontal do contorno do atrator:
3.65d0
Dimensao vertical do contorno do atrator:
3.65d0
Numero de particulas:
10000
Numero de insercoes:
25
Componente horizontal do centro da regioao:
0.d0
Componente vertical do centro da regioao:
0.d0
Numero de iteracoes:
1.5d+4
Selecao do modo de execucao (rei(sim)/reg(nao))
sim
Selecao do modo de varredura (smt/asc/dsc):
smt