



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JAIR LUIZ FERREIRA COSTA

**DIFICULDADE DE ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO
NO CONTEÚDO DE FUNÇÕES AFINS**

João Pessoa

2022

Jair Luiz Ferreira Costa

**DIFICULDADE DE ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO
NO CONTEÚDO DE FUNÇÕES AFINS**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado como exigência para o
título de Licenciatura Plena em
Matemática, pela Universidade
Federal da Paraíba, Campus I –
João Pessoa, sob a orientação do
Professor Doutor Vinícius Martins
Varella.

João Pessoa

2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C837d Costa, Jair Luiz Ferreira.
Dificuldade de alunos do 1º ano do ensino médio no
conteúdo de funções afins / Jair Luiz Ferreira Costa. -
João Pessoa, 2022.
37 p.

Orientação: Vinicius Martins Varella.
TCC (Graduação/Licenciatura em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Ensino da matemática. 2. Função afim. 3. Ensino
médio. I. Varella, Vinicius Martins. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51(043.2)

Jair Luiz Ferreira Costa

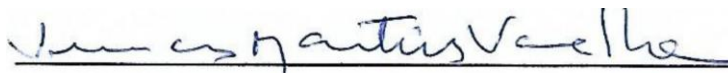
**DIFICULDADE DE ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO NO
CONTEÚDO DE FUNÇÕES AFINS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência para o título de Licenciatura Plena em Matemática, pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB), Campus I – João Pessoa.

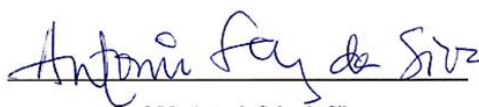
Data: 16/12/2022

Nota: 10,0 (DEZ)

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Vinícius Martins Varella
Universidade Federal da Paraíba
(Orientador)



Prof. Me. Antônio Sales da Silva
(Membro da Banca Examinadora)



Prof. Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo
(Membro da Banca Examinadora)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus por me conceder saúde, forças e perseverança nessa fase da minha vida, devido a dura jornada de trabalho, estudo, vida pessoal e tudo mais, não foram poucas as vezes que o desânimo e os pensamentos de desistir se passaram em minha cabeça, porém Ele sempre me deu direção e foco para superar e fechar mais um ciclo na vida.

Em especial a minha esposa Rosimere pelos momentos que sabiamente me inspirou e me apoiou, e principalmente pela paciência nas horas intermináveis de estudo durante a madrugada. Muito obrigado pelo seu amor.

Aos meus pais, Jorge e Beth, e as minhas irmãs, Sara e Débora que sempre acreditaram em mim durante todos os anos, mesmo nos momentos de dificuldades eles sempre me incentivaram a prosseguir, deixando claro que neles estava o meu porto seguro.

A todos os meus colegas de curso, pelos momentos de experiências compartilhadas e que me ajudaram a construir até aqui esse caminho de estudos.

Aos professores Dra. Rogéria Gaudêncio do Rêgo e professor Dr. Antônio Sales da Silva, pelos momentos de aprendizado e pelo privilégio que tive de tê-los como professores nessa minha trajetória de curso. Obrigado pela disponibilidade, pela leitura e orientações valiosas para a conclusão desse trabalho de pesquisa.

Um agradecimento todo especial ao meu amigo e orientador Vinícius Martins Varella, todo o meu respeito e admiração pelo professor e pela pessoa que és, pela paciência, pelo incentivo e principalmente pela inspiração na construção desse trabalho. Obrigado pelo acolhimento e por todos os conselhos que me guiaram ao aprendizado.

A todos os participantes diretos ou indiretos, que contribuíram para o desenvolvimento desse trabalho de pesquisa, meu muito obrigado a todos.

Resumo

Este trabalho de pesquisa tem como objetivo geral analisar a dificuldade no conteúdo de função afim de alunos do 1º ano do ensino médio. Neste sentido, traçamos como objetivos específicos para essa pesquisa: i) identificar erros recorrentes nas respostas dos alunos quando resolvem questões relacionadas a função afim; ii) identificar as dificuldades apontadas pelos alunos do 1º ano do ensino médio sobre função afim. Como fundamentação teórica para essa pesquisa, inicialmente optamos em trazer um breve relato histórico sobre o conceito de função em geral e para isso nos apoiamos Roque (2012), adotamos também os estudos de Reymond Duval (2003; 2009; 2013) sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica com a finalidade de alinhar os objetivos dessa pesquisa. A investigação, de natureza qualitativa, foi norteadada por um teste de verificação com questões fechadas e abertas, aplicada com alunos do 1º ano do ensino médio de três escolas estaduais distintas, localizados na cidade de João Pessoa, na Paraíba, visando uma diversificação de análise dos resultados para cada questão. Com base nas análises dos resultados pudemos identificar importantes elementos no conhecimento dos alunos em relação ao conceito de função afim, como também suas principais dificuldades em questões envolvendo o objeto matemático em questão. Foi possível observar uma melhor compreensão por partes dos alunos nas questões contextualizadas e uma maior dificuldade nas questões onde havia a necessidade de fazer cálculos para solucionar os problemas propostos. Dessa forma, concluímos que, especialmente em se tratando dos conteúdos de função afim, que o uso de diferentes metodologias de ensino e a contextualização podem ser aliadas da prática docente no auxílio à construção de um aprendizado efetivo dos alunos.

Palavras – chave: Função Afim. Ensino de Matemática. Ensino Médio. Registros de Representação Semiótica.

Abstract

The general objective of this research work is to analyze the difficulty in the affine function content of 1st year high school students. In this sense, we outlined as specific objectives for this research: i) identify recurring errors in students' answers when solving questions related to affine function; ii) identify the difficulties pointed out by 1st year high school students about affine function. As a theoretical foundation for this research, initially we chose to bring a brief historical report on the concept of function in general and for this we supported Roque (2012), we also adopted the studies of Reymond Duval (2003; 2009; 2013) on the Theory of Semiotic Representation Registers in order to align the objectives of this research. The research, qualitative in nature, was guided by a verification test with closed and open questions, applied with 1st year high school students from three different state schools, located in the city of João Pessoa, Paraíba, aiming a diversification of analysis of the results for each question. Based on the analysis of the results we were able to identify important elements in the students' knowledge about the concept of affine function, as well as their main difficulties in questions involving the mathematical object in question. It was possible to observe a better understanding by the students in the contextualized questions and a greater difficulty in questions where there was a need to do calculations to solve the proposed problems. Thus, we conclude that, especially when it comes to the content of affine function, the use of different teaching methodologies and contextualization can be allies of teaching practice in helping to build effective student learning.

Key-words: Linear Function. Mathematics Teaching. High School. Semiotic Representation Registers.

Figura 1: Exemplo de tratamento e conversão.....	16
--	----

Lista de quadros

Quadro 1: Síntese das concepções de função.....	14
Quadro 2: Dados gerais sobre os trabalhos obtidos no BDTD utilizando as palavras “função afim”, “Teoria dos registros de Representação Semióticas” e “Ensino Médio”.....	19
Quadro 3: Identificação do desempenho dos alunos na questão 1 do Teste...	27
Quadro 4: Identificação do desempenho dos alunos na questão 2 do Teste...	29
Quadro 5: Identificação do desempenho dos alunos na questão 3 do Teste...	30
Quadro 6: Identificação do desempenho dos alunos na questão 4 do Teste...	31

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	12
2.1	Breve relato histórico sobre Função Afim.....	12
2.2	Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS).....	15
2.3	Pesquisas sobre função afim e a Teoria dos Registros de Representações Semióticas no ensino médio	18
3	METODOLOGIA.....	22
4	ANÁLISES E RESULTADOS.....	27
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	33
	REFERÊNCIAS.....	36

1 INTRODUÇÃO

Segundo Piaget, o conhecimento não está pré-formado no indivíduo. O processo de aprendizagem está diretamente ligado ao desenvolvimento do sujeito, onde habilidades, comportamentos, competências, valores e conhecimento são adquiridos ou modificados por intermédio da observação, do estudo, da experiência e da relação entre o indivíduo e o objeto de conhecimento. Para Piaget (2002, p. 7-8):

(...) o conhecimento não procede, em suas origens, nem de um sujeito consciente de si mesmo, nem de objetos já constituídos (do ponto de vista do sujeito) que se lhe imporiam: resultaria de interações que se produzem a meio caminho entre o sujeito e objeto, e que dependem, portanto, dos dois ao mesmo tempo, mas em virtude de uma indiferença completa e não de trocas entre formas distintas.

Pesquisas realizadas tanto pela área da Educação, quanto pela área da Psicologia tem apontado que a motivação ocupa um importante papel não apenas para o processo de ensino-aprendizagem, como também para o desenvolvimento emocional, social e cognitivo dos alunos (BZUNECK e BORUCHOVITCH, 2009).

De acordo comBzuneck e Boruchovitch (2009), a motivação pode ser intrínseca ou extrínseca ao sujeito, ou seja, a motivação é uma característica psicológica inata ou pode ser criada, estimulada, cultivada.

Em face desse quadro, sem a compreensão aprofundada de aspectos importantes por parte do aluno, surge a dificuldade na aprendizagem e na compreensão da linguagem matemática para entender o mundo que o cerca.

Como exemplo de conteúdos não aprendido pelos alunos, temos o conceito de função fim, que, por sua vez, tem grande relevância, pois a função afim é o tipo mais básico de função, aprendemos inicialmente a função afim para depois aprendermos outros tipos de funções mais complexas.

Com isso pretendemos nessa pesquisa identificar quais são as dificuldades dos alunos do 1º ano do ensino médio no conteúdo de funções afins?

Podemos observar claramente a dificuldade que os alunos encontram na compreensão da linguagem matemática que envolve tais conceitos, esse déficit pode impedir que o aluno avance no processo de aprendizagem, criando assim uma barreira que o impossibilita de aprender novos conceitos matemáticos que tem como base a função afim como, por exemplo, a função linear, coeficiente angular, coeficiente linear e função polinomial de graus maiores.

Dentro deste contexto, o tema a ser abordado nesta pesquisa foi escolhido mediante nossas experiências em sala de aula nas disciplinas de Estágio Docente Supervisionado III e IV, como também em conversas com colegas de curso no decorrer da graduação em Matemática.

Portanto, esta pesquisa tem por objetivo geral analisar qual a dificuldade dos alunos do 1º ano do ensino médio no conteúdo de funções afins. Com isso, elaboramos objetivos específicos nesta pesquisa: i) Identificar erros recorrentes nas respostas dos alunos quando resolvem questões relacionadas a função afim; ii) Identificar as dificuldades apontadas pelos alunos do 1º ano do ensino médio sobre função afim.

Como metodologia para coletas de dados, aplicamos um teste qualitativo de verificação contendo aspectos específicos de função afim, onde as respostas obtidas foram agrupadas em acertos e erros recorrentes.

As análises e os resultados obtidos neste teste foram organizados no capítulo 4 em quadros, com o objetivo de responder as questões iniciais abordadas nesta pesquisa.

Como fundamento teórico no processo de aprendizagem trazemos a teoria dos registros das representações semióticas de Raymond Durval como embasamento para a construção desta pesquisa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Apresentaremos neste capítulo uma argumentação teórica sobre o ensino das funções afins, seus aspectos e relevância, como também alguns estudos e ponto de vistas de diferentes pesquisas relacionadas ao tema.

2.1 Breve relato histórico sobre Função Afim

Conhecendo a importância da Matemática em nossas vidas nos dias atuais entendemos a relevância que o ensino de certos conceitos tem na vida dos estudantes, principalmente no que diz respeito aos alunos do ensino médio. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEM), considera o Ensino Médio como última e complementar etapa da Educação Básica, como também podemos observar nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000, p.40):

Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessário tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

Entre os conceitos matemáticos de grande importância temos o conceito de função em geral, que tem dentre seus aspectos específicos a relação de correspondência, onde em uma operação matemática se relacionam dois conjuntos A e B na qual, para todo elemento do conjunto A, há um único correspondente no conjunto B. Para Roque (2012, p.295):

Quando pensamos em função, duas coisas nos vêm à mente: a curva que a representa graficamente e sua expressão analítica. E se fizermos um exercício mais formal, também nos lembraremos da ideia de correspondência, como uma máquina com entradas e saídas.

Pensando nessa ideia de correspondência temos os registros das tabelas babilônicas e egípcias, que de certa forma faziam essa relação de dependência entre um número e o resultado das operações que envolvem esse número. Para Roque (2012, p.295):

Se nos fixarmos nessa última ideia, poderemos dizer que as tabelas babilônicas e egípcias já continham, de alguma forma, uma ideia de função, uma vez que tratavam justamente de registros de correspondências (entre um número e o resultado das operações que envolvem esse número). Por essa razão, afirma-se algumas vezes que a noção de função tem sua origem na matemática antiga.

Porém, sem o elemento da variação o conceito geral de função ainda não estaria completo.

A partir do século XVII, com Galileu Galilei (1564 - 1642) e Isaac Newton (1642 – 1727), por exemplo, com a necessidade de explicar os fenômenos da física matemática surgiram as primeiras noções de lei e dependência, onde duas grandezas variam de modo correlato.

No século XVIII o matemático suíço Johann Bernoulli (1667 – 1748) utilizou a definição da noção de função em um artigo apresentado à Academia de Ciência de Paris (1718, p.241): “Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes”.

No século XVIII, seu pupilo Leonard Euler expandiu o conceito de função quando publicou no ano de 1748 em sua obra *Introductio in analysin infinitorum* (Introdução à análise infinita) uma definição de função mais geral e analítica.

Segundo Roque (2012, p.300), ainda no século XVIII surgiu um longo debate sobre o “problema das cordas vibrantes” envolvendo Euler, D’Alembert, Daniel Bernoulli e Lagrange sobre o significado de função, provocando então um novo entendimento do conceito.

Apresentaremos no Quadro1 uma síntese das concepções sobre função mais completa, com os matemáticos e suas contribuições para a definição de função.

Quadro 1: Síntese das concepções de função

Ano	Matemático	Concepção
1637	Descartes	Equação em x e y que mostra dependência.
1670	Newton	Quantidades relacionadas; fluentes expressos analiticamente.
1673	Leibniz	Relação, quantidades geométricas que dependem de um ponto da curva, máquina.
1718	Jean Bernoulli	Relação entre grandezas variáveis.
1748	Euler	Expressão analítica.
1755	Euler	Dependência arbitrária.
1778	Condorcet	Dependência arbitrária.
1797	Lacroix	Dependência arbitrária.
1797	Lagrange	Expressão de cálculo, expressão analítica.
1821	Cauchy	Resultado de operações feitas sobre uma ou várias quantidades constantes e variáveis.
1822	Fourier	Série trigonométrica; sequência de valores; ordenadas não sujeitas a uma lei comum.
1834	Lobatchevsky	Expressão analítica; condição para testar os números, dependência arbitrária.
1837	Dirichlet	Correspondência: para cada valor de x (abscissa), um único valor de y (ordenada); função definida por partes.
1870	Hankel	Para cada valor de x em um certo intervalo, corresponde um valor bem definido de y; não é necessária uma mesma lei para todo o intervalo; y não precisa ser definido por uma expressão matemática explícita em x.
1888	Dedekind	Correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo a uma determinada lei.
1988	Cantor	Subconjunto de um produto cartesiano, obedecendo duas condições.
1939	Bourbaki	Correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo a duas condições.

Fonte: Rossini, 2006, p.54

Podemos observar que função é um conceito matemático que evoluiu ao longo do tempo, ao qual vários matemáticos e povos fizeram contribuições para que se chegasse até a definição usual nos dias de hoje.

Através deste breve relato histórico podemos verificar que o conceito de função passou por diversas mudanças e que a sua construção foi bastante

lenta. Identificamos também algumas representações na evolução do conceito de função através de sua história: função como relação entre quantidades variáveis, como expressão analítica, como relação entre conjuntos e como transformação.

A definição de função encontrada com mais frequência nos livros de ensino médio atualmente é: “Dados dois conjuntos X e Y , uma função $f: X \rightarrow Y$ é uma regra ou que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se domínio e Y é o contradomínio da função”.

Nesta pesquisa em particular iremos abordar as funções afins, que são os casos mais básicos de função, em geral se aprende primeiro a função afim para depois aprendermos os outros casos mais complexos de função.

Atualmente a definição mais comum de função afim encontrada nos livros de ensino médio é: “Uma função f de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ”.

2.2 Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS)

Utilizamos como referencial teórico para essa pesquisa a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) desenvolvida pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval desde os anos de 1970.

Para Duval (2013), a principal dificuldade na aprendizagem da Matemática deriva do fato de que os objetos matemáticos não têm existência física, por essa razão existe a necessidade da utilização de um sistema semiótico para que possamos acessá-los. Logo, muito mais do que em qualquer outra área do conhecimento, na Matemática o sistema semiótico é de grande importância para a aprendizagem e para se construir novos conceitos.

A teoria de Duval destaca que as representações semióticas são totalmente indispensáveis para o desenvolvimento do aprendizado na Matemática. Segundo o autor, não há conhecimento matemático sem recorrer às representações, “[...] não há conhecimento que possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação” (DUVAL, 2009, p. 29).

Duval considera como importantes registros de representações semióticas dos objetos matemáticos: a linguagem natural, a linguagem

algébrica, gráficos, representação geométrica e tabelas. Essa diversidade de registros de representação semiótica e a articulação entre elas são de fundamental importância para a aprendizagem.

Portanto segundo Duval, para que ocorra a compreensão de conhecimentos matemáticos o aluno deve dominar pelo menos duas formas de registros de representação semióticos de um mesmo objeto matemático, “[...] a compreensão matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas” (DUVAL, 2003, p. 15).

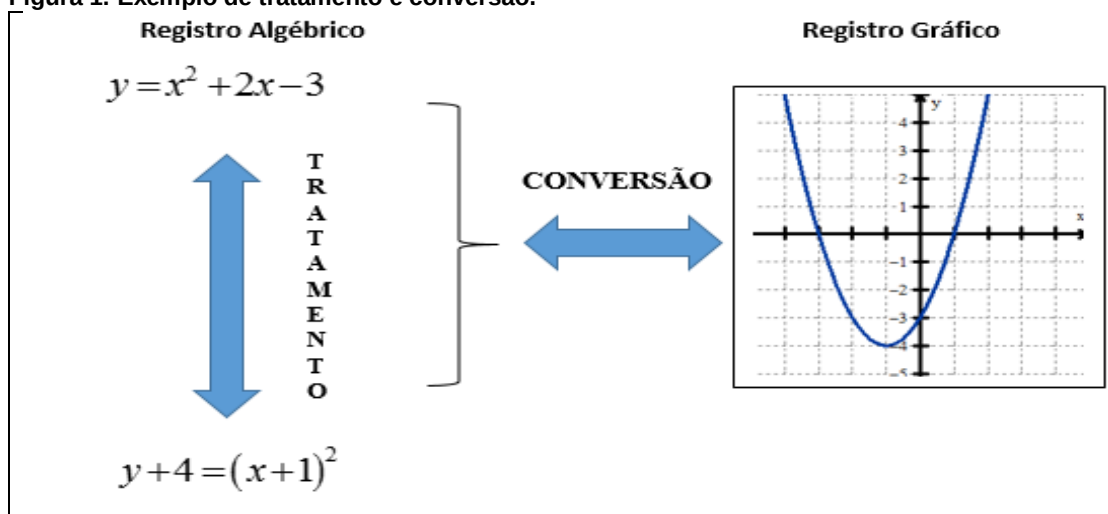
Duval declara que existe a necessidade de transformações entre essas representações semióticas e as classifica em dois tipos: tratamentos e conversões.

Um **tratamento** é uma transformação de representações que acontece no mesmo sistema de representação, “[...] é uma transformação de representação interna a um registro de representação” (DUVAL, 2009, p. 57).

A **conversão** de uma representação é uma transformação que ocorre entre registros diferentes, “[...] transformar a representação de um objeto ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro” (DUVAL, 2009, p. 58).

Para exemplificar a diferença entre tratamento e conversão de um registro semiótico trazemos a Figura 1.

Figura 1: Exemplo de tratamento e conversão.



Fonte: Denardi, 2017, p.07

Podemos notar que o tratamento permanece no mesmo registro semiótico (linguagem algébrica), já a conversão consiste na passagem de um registro semiótico de um tipo (equação algébrica) para outro (gráfico), porém, mantendo a referência ao mesmo objeto.

Com a existência de uma grande variedade de registros de representação, as atividades de transformação e a conversão entre estes registros, para Duval, são essenciais para a compreensão dos objetos matemáticos.

A conversão é a transformação da representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada de um registro em uma representação deste mesmo objeto, desta mesma situação e desta mesma informação num outro registro. As operações que designamos habitualmente pelos termos “tradução”, “ilustração”, “transposição”, “código” etc. São operações que a uma representação de um registro dado faz corresponder uma outra representação de um outro registro (DUVAL, 2009, p.40-41).

No entanto, Duval alega que o fato do aluno conseguir resolver um problema numa determinada representação semiótica não significa que ele tenha aprendido o conceito. Para que aconteça tal aquisição conceitual de um objeto matemático é necessário explorar vários tipos de representação pois cada registro de representação contempla uma característica específica do conteúdo, um diferente sentido do objeto matemático.

Com isso, Duval (2009) garante que o conhecimento só é transformado em saber quando de maneira espontânea por parte do aluno, acontece a mobilização de diferentes registros semióticos de um mesmo objeto matemático.

Vários objetos matemáticos possuem diferentes formas de representação sendo a função afim uma delas. Logo, no ensino do conteúdo de função afim é necessário à exploração de todas estas representações e suas transformações e conversões, assim, os alunos poderão fazer relações entre elas e ter uma aprendizagem de qualidade.

No conteúdo de função afim, em especial, conseguimos trabalhar os diferentes tipos de representações e suas transformações, com a finalidade de levar o aluno a uma melhor compreensão do objeto matemático em questão.

Desta forma, a teoria de Raymond Duval oferece suporte metodológico e agrega consideravelmente fundamentos teóricos aos processos de ensino e aprendizagem no que se refere especificamente ao conceito de função afim.

2.3 Pesquisas sobre função afim e a Teoria dos Registros de Representações Semióticas no ensino médio

As pesquisas já existentes nos auxiliam para fazermos novas investigações, por isso buscamos trabalhos científicos que tiveram como objeto de pesquisa a função afim e a TRRS no ensino médio, objetivando mapear os estudos sobre esse tema. Pretendemos com este levantamento obter sustentação teórica, bem como justificar a relevância de pesquisas nessa área.

Portanto o presente tópico traz um levantamento de pesquisas desenvolvidas na área de matemática entre os anos de 2011 a 2016. O levantamento das pesquisas foi realizado no Banco de Dados de Teses e Dissertações (BDTD), sendo usado as palavras-chaves “Função Afim”, “Teoria dos Registros de Representações Semióticas” e “Ensino Médio”.

A seleção dos materiais encontrados foi feita em duas etapas realizadas simultaneamente, primeiramente foram analisadas pelo título. A outra, se deu através da leitura completa do resumo, para posteriormente selecionar os documentos finais e dar início a escrita do estudo.

Então, analisamos os títulos dos trabalhos que necessariamente tratassem do tema estudado nesta pesquisa e selecionamos 5 pesquisas do Banco de Dados de Teses e Dissertações, conforme apresentamos no quadro 2.

Quadro 2: Dados gerais sobre os trabalhos obtidos no BDTD utilizando as palavras “função afim”, “Teoria dos registros de Representação Semióticas” e “Ensino Médio”.

Título	Ano	Instituição	Fonte	Autor(es)
Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a partir de erros dos alunos no primeiro ano do ensino médio	2011	PUC-SP	BDTD	Adinilson marques Reis
Representações matemáticas nos processos de ensino e de aprendizagem da função afim com uso do software geogebra	2013	CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES	BDTD	Dionara Freire de Almeida
Matemática Dinâmica: Uma abordagem para o ensino de Funções Afins e Quadrática a partir de situações geométricas	2014	UFRS	BDTD	Eliana Bevilacqua Salin
Representações mobilizadas nas turmas de 1º ano do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Sergipe no ensino de função afim e quadrática	2014	UFS	BDTD	Leonel Ricardo Machado Meneses
Tarefas exploratórias-investigativas para a aprendizagem de função afim	2016	UFSCar	BDTD	Fábio Luiz Dias Tozo

Fonte: BDTD 2011-2020.

A finalidade dessa etapa de análise foi de fornecer uma visão geral das produções encontradas entre os anos 2011 a 2016, que pontuasse aspectos relevantes sobre o objeto de estudo, a fim de explicitar possíveis tendências nos estudos realizados neste período, do mesmo modo que nos fornecesse material para prosseguimos nossa pesquisa.

A seguir apresento um breve resumo sobre os documentos que foram selecionados:

Adnilson Marques Reis (2011), traz uma pesquisa que parte da constatação das dificuldades apresentadas nos conceitos de função afim pelos alunos por meio da elaboração e aplicação de uma sequência diagnóstica de atividades, baseada nos erros cometidos pelos alunos e intermediada pelo software GeoGebra. Com o objetivo de compreender melhor o funcionamento cognitivo em relação às dificuldades dos alunos, a pesquisa apoiou-se na teoria dos Registros de Representações Semióticas. Para ele os resultados obtidos com o preparo de atividades usando o software GeoGebra contribuem significante para ampliar os estudos já realizados sobre o tema.

Dionara Freire de Almeida (2013) teve como objetivo elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que envolveu o estudo da Função Afim e das representações matemáticas em uma perspectiva semiótica para a aprendizagem dos alunos utilizando o software GeoGebra. Foi desenvolvida uma sequência didática composta da análise *a priori* e análise *a posteriori*. Para ele após as análises das atividades da sequência didática com uso do GeoGebra, foi possível perceber que os alunos conseguiram reconhecer a Função Afim nos registros de linguagem natural, algébrica, tabular e gráfica, compreender os procedimentos de tratamento nos diferentes registros e realizar o procedimento de conversão entre os diferentes registros. Dessa forma, foi observado que uso do GeoGebra contribuiu para o aprendizado do objeto de estudo Função Afim.

Eliana Bevilacqua Salin (2014), tratou de investigar o papel dos registros de representação semiótica na construção do conceito de função, em particular daquelas do tipo afim e quadrática. Parte da pesquisa também foi investigar de que forma o uso de um software GeoGebra, pode ajudar no processo de aprendizagem do tópico em questão. Segundo Eliana a observação de relações entre variáveis a partir da manipulação de pontos em uma construção no Geogebra propiciou a compreensão do conceito de função e gráfico, através de constante processo de conversão de registros.

Leonel Ricardo Machado Meneses (2014), buscou analisar as representações matemáticas mobilizadas pelos alunos do 1º ano do ensino médio do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Sergipe (CODAP/UFS) durante o ensino de função afim e quadrática. Para tal efeito, o estudo embasou-se na teoria dos registros de representação semiótica, foi

elaborado uma sequência de atividades compostas por 04 problemas as quais foram desenvolvidas com os próprios alunos. Entre os resultados obtidos com essa sequência de atividades destacou-se que a grande maioria dos sujeitos usados na pesquisa recorreu a processos de algoritmização para executar a maioria das conversões realizadas. Por fim, muitos dos alunos usaram análise pontual e demonstraram não saber identificar e usar as variáveis visuais pertinentes para realizar as conversões.

Fábio Luiz Dias Tozo (2016) objetivou verificar as dificuldades de tratamentos e conversões (língua natural, expressões algébricas, tabelas e forma gráfica) de ensino-aprendizagem da função afim com alunos da primeira série do Ensino Médio. O trabalho foi desenvolvido, por meio de tarefas aplicadas, tendo o cuidado de colocar nas tarefas diferentes formas de representações. Para Fábio a articulação das tarefas exploratórias-investigativas com a mobilização e coordenação dos registros de representação semiótica instigaram os alunos ao processo de generalização do conceito e caracterização da função afim, por meio do uso do registro da língua natural na forma de justificativas.

Dessa forma, será importante analisar o que já foi publicado até o momento em relação ao tema de pesquisa, quais métodos deram certos e quais não deram, qual tipo de metodologia é mais viável utilizar, entre outros fatores que contribuirão para o trabalho a ser realizado.

Assim, ao final desta pesquisa esperamos colaborar para o aumento das pesquisas pertinentes ao assunto abordado nesse trabalho e melhoria dos resultados com os alunos do ensino médio em sala de aula no conteúdo de função afim.

3 METODOLOGIA

Nesse capítulo iremos apresentar a metodologia utilizada para a coleta dos dados referente a aplicação do teste a alunos do 1º ano do ensino médio no conteúdo função afim, com a intenção de estabelecer uma base para o próximo capítulo onde iremos trazer a análise dos dados e os resultados da pesquisa.

A metodologia tem por objetivo direcionar o pesquisador quanto aos métodos e ferramentas necessários para elaboração da pesquisa. A pesquisa, por sua vez, visa contribuir para o avanço do conhecimento humano. Do ponto de vista da natureza, Prodanov e Freitas (2012) classificam as pesquisas como sendo de natureza básica ou de natureza aplicada, tal que a “Pesquisa básica objetiva gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência sem aplicação prática prevista. Envolve verdades e interesses universais” (PRODANOV E FREITAS, 2013, p. 51).

Dessa forma, classificamos nossa pesquisa em relação à sua natureza como uma pesquisa básica, visto que os resultados dela podem nos mostrar quais são as principais dificuldades dos alunos sobre a função afim. Já em relação aos procedimentos técnicos, consideramos ser uma pesquisa de campo, concordando com Prodanov e Freitas (2013, p. 59), que afirmam que:

Pesquisa de campo é aquela utilizada com o objetivo de conseguir informações e/ou conhecimentos acerca de um problema para o qual procuramos uma resposta, ou de uma hipótese, que queiramos comprovar, ou, ainda, descobrir novos fenômenos ou as relações entre eles. Consiste na observação de fatos e fenômenos tal como ocorrem espontaneamente, na coleta de dados a eles referentes e no registro de variáveis que presumimos relevantes, para analisá-los.

Nossa pesquisa optou por esse procedimento técnico, pois tivemos como foco coletar e analisar dados e informações ligadas especialmente ao objeto de estudo em questão, procurando explicar e compreender a problemática principal da pesquisa.

A pesquisa de campo requer, como fase inicial, uma pesquisa bibliográfica, como organizamos no capítulo 2 dessa pesquisa, sobre o objeto de estudo elencado. Para Prodanov e Freitas (2013, p. 59):

As fases da pesquisa de campo requerem, em primeiro lugar, a realização de uma pesquisa bibliográfica sobre o tema em questão. Ela servirá, como primeiro passo, para sabermos em que estado se encontra atualmente o problema, que trabalhos já foram realizados a respeito e quais são as opiniões reinantes sobre o assunto.

Em relação aos objetivos, a pesquisa tem como instrumento de coleta de dados a aplicação de um teste de verificação, com a finalidade de levar a melhor compreensão dos seus objetivos, portanto trata-se de uma pesquisa de caráter exploratório que, segundo Prodanov e Freitas (2013, p. 51 - 52):

(...) tem como finalidade proporcionar mais informações sobre o assunto que vamos investigar, possibilitando sua definição e seu delineamento, isto é, facilitar a delimitação do tema da pesquisa; orientar a fixação dos objetivos e a formulação das hipóteses ou descobrir um novo tipo de enfoque para o assunto.

Sobre o ponto de vista da forma de abordagem do problema, podemos classificar a pesquisa como sendo de caráter qualitativo, concordando com Prodanov e Freitas (2013, p. 70), que apontam sobre a pesquisa qualitativa que:

(...) há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Esta não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas.

Consequentemente, a abordagem foi feita sem nenhum tipo de interferência por parte do pesquisador, mantendo o contato direto com o ambiente e o objeto de estudo da pesquisa. Para tal finalidade, os dados coletados são descritivos, ou seja, consistem em detalhar os principais dados analisados, procurando sempre criar uma relação com elementos já estudados, visando com isso a compreensão do problema inicial.

Dessa forma, nossa pesquisa teve como objetivo geral analisar a dificuldade dos alunos do 1º ano do ensino médio no conteúdo de função afim, sendo assim, foi elaborado um teste de verificação com questões fechadas e abertas, visando uma diversificação de análise dos resultados para cada questão dentro da sua especificidade, buscando sempre responder os objetivos da pesquisa.

O teste de verificação teve quatro questões que foram aplicadas para alunos do 1º ano do ensino médio.

1. Dada a função $f(x) = -2x+3$. Determine:

a) x , tal que $f(x) = 5$

b) $f(3)$

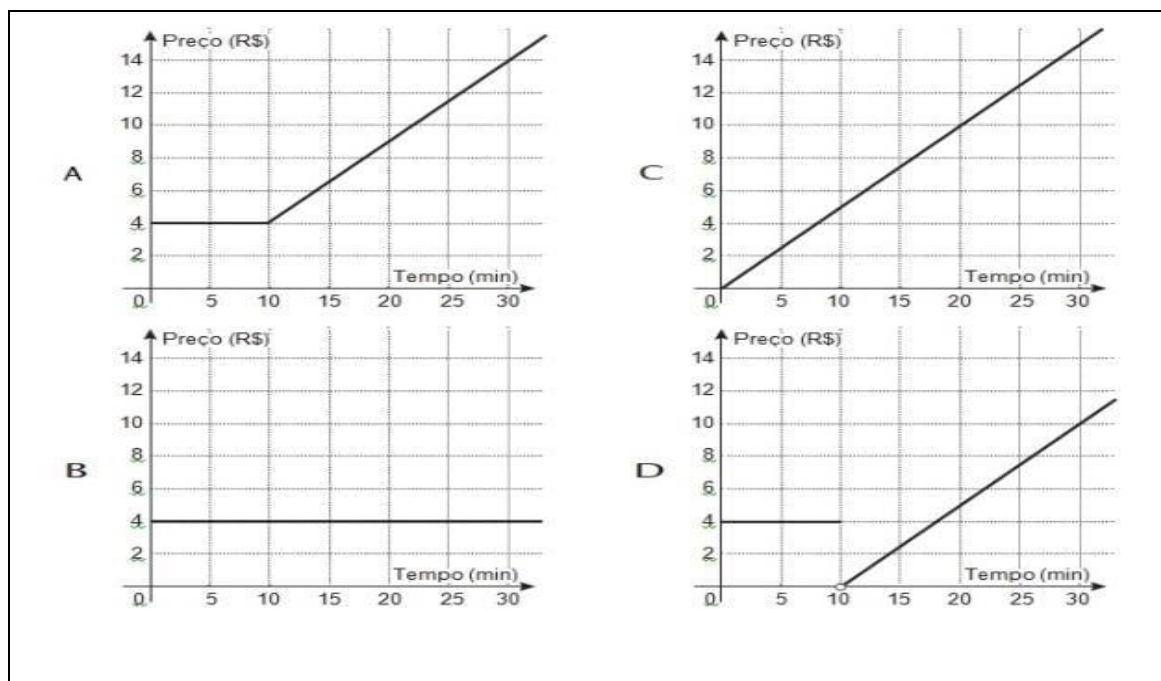
2. Faça um esboço do gráfico da função afim abaixo:

a) $f(x) = -4x+2$

b) $f(x) = -x+3$

3. Uma prestadora de serviços cobra pela visita à residência do cliente e pelo tempo necessário para realizar o serviço na residência. O valor da visita é R\$ 40 e o valor da hora para realização do serviço é R\$ 20. Escreva uma expressão que indica o valor a ser pago (P) em função das horas (h) necessárias à execução do serviço.

4. (ENCEJA, 2020, Questão 36, p.5) – Os moradores de uma cidade terão uma nova opção sustentável para se deslocar: os patinetes elétricos compartilhados. A empresa que está implantando o serviço fixou em R\$ 4,00 o preço para desbloquear e utilizar o equipamento por 10 minutos. Para cada minuto adicional será cobrado um valor de R\$ 0,50. Qual o gráfico representa a relação entre o valor a ser pago por um usuário do patinete em função do tempo de utilização?



Buscamos em cada questão analisar um elemento diferente no conhecimento do aluno, objetivando o tratamento ou a conversão dos registros de representações semióticas, com a intensão de verificar se o aluno compreende o conceito matemático de função afim.

Na primeira questão procuramos verificar se o aluno seria capaz de realizar o tratamento da função afim na sua representação algébrica.

Na questão dois queremos analisar se aluno consegue realizar a conversão da função afim da representação algébrica para a representação gráfica corretamente.

Na terceira questão foi dado a função afim na sua representação em linguagem natural e foi pedido para que o aluno convertesse a função afim para sua representação algébrica.

Na última questão foi proposto ao aluno para que convertesse a função afim da representação natural para a representação gráfica.

A aplicação do teste de verificação foi realizada no mês de outubro de 2022 com três turmas do 1º ano do ensino médio de três escolas distintas, totalizando 93 alunos, sendo duas escolas privadas e uma escola pública.

Durante a aula de Matemática os alunos tiveram o tempo de 50 minutos para responder o teste que foi entregue em folha A4. Foi orientado aos alunos

para que respondessem o teste individualmente e sem o uso de nenhum material de consulta.

Após o término e correção dos testes, buscamos analisá-los através de procedimentos qualitativos, separando os dados em grupos, dessa maneira pudemos identificar os erros mais frequentes, os acertos e os principais procedimentos utilizados pelos alunos nas resoluções. Dessa forma, no próximo capítulo exibiremos com mais detalhes as análises e os resultados obtidos com as respostas dos alunos ao teste de verificação.

4 ANÁLISES E RESULTADOS

Neste Capítulo analisaremos os elementos observados em nossa pesquisa, utilizando como embasamento teórico os estudos contidos no Capítulo 2 referentes à Fundamentação Teórica, juntamente com os dados coletados e conforme o objetivo traçado para essa pesquisa.

Iniciaremos as análises seguidas dos resultados a partir dos dados coletados mediante a aplicação do teste com questões relacionadas a Função Afim. Organizamos quatro questões onde cada uma tinha a ideia de verificar um tipo de conhecimento do aluno em relação a Função Afim. Para tanto, apresentamos os dados em quatro quadros, sendo uma para cada questão, contendo a própria questão, a justificativa de sua aplicação (verificação de conhecimento do aluno) e os acertos ou erros.

Vale lembrar que foram aplicados testes para 93 alunos do 1º ano do Ensino Médio em três turmas de três escolas distintas, sendo uma escola do ensino público e outras duas escolas do ensino privado. Essa amostra pode nos guiar em alternativas de como os alunos estão e o que podemos fazer para melhorar o ensino desse conteúdo.

Para iniciarmos, vejamos a seguir o Quadro 3 com os resultados da questão 1 do teste aplicado.

Quadro 3: Identificação do desempenho dos alunos na questão 1 do Teste.

Questão		Justificativa	Porcentagem		
			Acertos	Erros	Em branco
1. A)	Dada à função $f(x) = -2x+3$ Determine: a) x, tal que $f(x) = 5$	Verificar se o aluno consegue realizar o tratamento com função afim dentro da representação algébrica.	12 alunos; 12,9%	53 alunos; 57%	28 alunos; 30,1%

1. (B)	Dada à função $f(x) = -2x+3$ Determine: b) $f(3)$	Verificar se o aluno consegue realizar o tratamento com função afim dentro da representação algébrica.	37 alunos; 39,8%	24 alunos; 25,8%	32 alunos; 34,4%
--------	--	--	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

Fonte: Correção dos testes aplicados pelo pesquisador.

Podemos identificar, a partir dos resultados apresentados no quadro 3, sobre a questão 1 que o índice de erro da questão (A) foi bem maior do que na questão (B), foi possível observar, através das correções, que isso ocorreu pelo fato de que os alunos na sua maioria não conseguiram diferenciar na questão (A) que " $f(X) = 5$ é diferente de $F(5)$ ", com isso, adotaram a estratégia errada para resolução da questão.

Foi possível identificar que os alunos não realizaram corretamente o processo de tratamento da representação algébrica, que, como vimos anteriormente, segundo Duval (2009), é uma transformação de representação interna a um registro de representação.

Na questão (B) podemos identificar um maior percentual de acertos devido ao uso da estratégia correta para resolução da questão.

Com isso podemos identificar a dificuldade que os alunos encontraram na questão (A), por existir a necessidade de realizar o tratamento na representação algébrica para resolver uma equação afim de solucionar o problema proposto, ao passo que para a questão (B) se resolvia diretamente por substituição.

Além do alto índice de respostas erradas, também chamou nossa atenção a quantidade de questões em branco. Na questão 1 identificamos que a porcentagem de alunos que deixaram a questão em branco também foi alta. Isso pode ocorrer devido ao aluno não ter compreendido o que a questão solicitava, mas também uma comprovação de que o aluno não conseguiu consolidar o conteúdo aprendido.

Dessa forma, consideramos que o professor deve buscar alternativas para levar o aluno a compreender o conteúdo, oportunizando caminhos mais

próximos à sua realidade para a compreensão do conteúdo trabalhado, nesse caso, função afim.

Vejamos agora as respostas da questão 2, representadas no Quadro 4, a seguir.

Quadro 4: Identificação do desempenho dos alunos na questão 2 do Teste.

Questão		Justificativa	Porcentagem		
			Acertos	Erros	Em branco
2. A)	Faça um esboço do gráfico da função afim abaixo: a) $f(x) = -4x+2$	Converter a função afim da representação algébrica para representação gráfica.	17 alunos; 18,3%	37 alunos; 39,8%	39 alunos; 41,9%
2. B)	Faça um esboço do gráfico da função afim abaixo: b) $f(x) = -x+3$	Converter a função afim da representação algébrica para representação gráfica.	21 alunos; 22,6%	28 alunos; 30,1%	44 alunos; 47,3%

Fonte: Correção dos testes aplicados pelo pesquisador.

A partir dos resultados apresentados no Quadro 4, sobre a questão 2, podemos identificar que o índice de erros em ambas as questões foi de igual modo significativo. No momento da correção foi possível identificar que os erros mais recorrentes foram de alunos que optaram por utilizar a fórmula de Bhaskara para a construção do gráfico da função afim, estratégia essa equivocada por não se tratar de uma função quadrática.

Nesta questão em específico podemos notar que os alunos não conseguiram realizar de forma correta a conversão da representação algébrica para a representação gráfica, e segundo Duval (2003), para que ocorra a compreensão de conhecimentos matemáticos o aluno deve dominar pelo menos duas formas de registros de um mesmo objeto matemático e ser capaz de transformar essas representações, portanto neste caso podemos entender

que os alunos, provavelmente não tenham conseguido compreender o conceito de função afim.

Assim, Duval (2011) aponta a possibilidade de as dificuldades apresentadas pelos alunos na conversão entre os registros gráficos e algébricos não estarem ligados diretamente aos conceitos matemáticos ligados a esse conteúdo "(...), mas na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro de representação gráfica e o registro da expressão algébrica".

Na sequência, analisamos a questão 3, com os dados disponíveis no Quadro 5 a seguir.

Quadro 5: Identificação do desempenho dos alunos na questão 3 do Teste.

Questão		Justificativa	Porcentagem		
			Acertos	Erros	Em branco
3.	Uma prestadora de serviços cobra pela visita à residência do cliente e pelo tempo necessário para realizar o serviço na residência. O valor da visita é R\$ 40 e o valor da hora para realização do serviço é R\$ 20. Escreva uma expressão que indica o valor a ser pago (P) em função das horas (h) necessárias à execução do serviço.	Converter a função afim da linguagem natural para a linguagem algébrica.	43 alunos; 46,3%	23 alunos; 24,7%	27 alunos; 29%

Fonte: Correção dos testes aplicados pelo pesquisador.

Podemos identificar, a partir dos resultados apresentados no quadro 5 acima, sobre a questão 3 que, quase a metade dos alunos (46,5%) conseguiu fazer a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica de forma correta. Ressaltamos que nesse caso, em particular, um problema contextualizado foi uma condição necessária para que os alunos conseguissem

resolver o problema sobre função afim, ou seja, a interpretação das informações apresentadas, garantiu ao aluno uma melhor organização dos dados e, conseqüentemente, facilitou a resolução de possíveis operações para a resposta do problema. Segundo Duval (2009), com a existência de uma grande variedade de registros de representação, as atividades de transformação e a conversão entre esses registros, são essenciais para a compreensão dos objetos matemáticos.

Do mesmo modo, consideramos que através das correções foi possível observar que os erros mais recorrentes se deram pelo fato dos alunos trocarem as posições das constantes e as variáveis. Assim, cabe ao docente, propor reflexão por meio de questionamentos e atividades sobre cada elemento presente em uma função afim, no sentido de o aluno compreender sua organização para conseguir resolver as situações apresentadas em forma de problemas, de preferência, contextualizadas.

Vejamos no Quadro 6 os resultados da questão 4 do teste aplicado.

Quadro 6: Identificação do desempenho dos alunos na questão 4 do Teste.

Questão		Justificativa	Porcentagem		
			Acertos	Erros	Em branco
4.	Os moradores de uma cidade terão uma nova opção sustentável para se deslocar: os patinetes elétricos compartilhados. A empresa que está implantando o serviço fixou em R\$ 4,00 o preço para desbloquear e utilizar o equipamento por até dez minutos. Para cada minuto adicional será cobrado um valor de R\$ 0,50. Qual o gráfico representa a relação entre o valor total a ser pago por um usuário do patinete em função do tempo de utilização?	Conversão da linguagem natural para a linguagem gráfica.	52 alunos; 56%	14 alunos; 15%	27 alunos; 29%

Fonte: Correção dos testes aplicados pelo pesquisador.

Podemos identificar, a partir dos resultados apresentados no Quadro 6 que o índice de acertos foi consideravelmente maior do que os outros percentuais (56%), em que mais da metade dos alunos foram capazes de identificar o gráfico que representava a função afim indicada no problema apresentado.

Dessa forma, observa-se que a razão disso pode se dar pelo fato de que a representação gráfica é mais visual, e todas as informações pertinentes à função são dadas simultaneamente, do que em outros registros de representações da função afim.

Foi possível observar, também, que os alunos apresentaram maior facilidade na compreensão do problema proposto devido à contextualização que o representava, uma vez que o mesmo pode fazer parte do cotidiano dos alunos. Para Duval (2013), a principal dificuldade na aprendizagem da Matemática deriva do fato de que os objetos matemáticos não têm existência física

Considerações Finais

Esse trabalho de pesquisa foi direcionado a busca de responder uma pergunta um tanto quanto pertinente e complexa: Quais as dificuldades no conteúdo de função afim pelos alunos do 1º ano do ensino médio? Para responder essa questão, iniciamos com um breve relato histórico de função e de como esse conceito foi construído, foram mencionados também vários matemáticos que contribuíram para a formação desse conceito ao longo da história e como hoje definimos a função, em particular a função afim.

A presente pesquisa apresentou como resultado que o ensino e aprendizagem do conteúdo de função afim é um desafio no ensino médio, pois além do fato, do conceito de função afim ser de difícil compreensão por partes dos alunos e levar maior tempo para ser assimilado, os alunos geralmente chegam ao ensino médio sem os pré-requisitos de conhecimentos matemáticos necessários, o que torna difícil a aprendizagem e a total compreensão do conteúdo sobre funções e, como investigado nessa pesquisa, a função afim.

Na sequência, adotamos como base a teoria dos Registros de Representação semióticas, o referencial teórico se mostrou pertinente no que diz respeito ao conceito de função afim, pois através das variedades dos registros de representações foi possível identificar e analisar as dificuldades dos alunos, tanto no nível de tratamento interno aos registros, como nas conversões de um registro para o outro.

A partir da aplicação de um teste de verificação com os alunos do 1º ano do ensino médio, obtivemos dados que nos possibilitou a análise a respeito da compreensão e da dificuldade que os alunos têm com determinados tipos de registros de representações de função afim.

Nas correções, em particular das questões 1 e 2, foi possível identificar que os erros mais recorrentes aconteceram pelo fato dos alunos utilizarem a estratégia equivocada para a solução das questões.

Ficou evidente, também, como exemplo da questão 1, que uma grande parte dos alunos não diferenciaram $f(5)$ de $f(x) = 5$, e com isso substituíram o 5 na equação e chegaram ao resultado errado. Já na questão 2 foi pedido o esboço de um gráfico e muitos alunos fizeram o uso da fórmula de Bhaskara

com a intenção de construir um gráfico da função afim, o que foi um equívoco, visto que essa fórmula é usada para função quadrática e não para função afim. Sendo assim, nesses casos, podemos afirmar que os alunos encontraram maiores dificuldades com o tratamento dos registros no momento de realizar os cálculos algébricos.

Os erros mais recorrentes na questão 3 se deram pelo fato dos alunos trocarem as posições das constantes com as variáveis, com isso no momento de realizar a conversão de um registro semiótico para o outro a solução estava errada. Nesse caso, foi possível identificar que o erro não aconteceu no momento da conversão e sim na organização dos elementos da equação.

Por fim, na questão 4 o que foi mais nítido de se observar foi o alto índice de acertos, que nos levou a considerar que isso se deu pelo fato de a questão não exigir a realização de cálculos para se chegar a solução correta da questão e, ainda, pela questão visual que pode ter facilitado a compreensão e identificação da função afim.

Dessa forma, ficou evidente de que os alunos estão com muito mais dificuldades no momento da realização dos cálculos e da organização dos elementos das equações do que propriamente na questão das conversões de um registro para outro.

Diante desse contexto, foi possível observar que o assunto de função afim pode ser facilitado quando se trabalha as variadas formas de registros de representação para um mesmo objeto e quando se utiliza a conversão de uma representação para outra, pois isso permite que o aluno conheça o objeto matemático em suas várias formas de representações.

Sendo assim, podemos concluir, que neste caso em particular, os alunos chegaram ao Ensino Médio com pouco ou quase nenhum conhecimento sobre as diferentes características das representações semióticas e sem compreender suas relações, não somente acerca do conteúdo de função afim, mas também nos demais conteúdos matemáticos relacionados, com isso entendemos que é essencial o papel dos professores de maneira efetiva no processo de aprendizagem do aluno sobre tais conceitos.

Sugerimos que outras pesquisas são necessárias a fim de se aprofundar nas questões relativas ao ensino e aprendizagem do conceito de função afim e as relações semióticas na matemática.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Dionara Freire. **Representações matemáticas nos processos de ensino e de aprendizagem da função afim com uso do software geogebra**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) - Centro Universitário Univates, Lajeado, Rio Grande do Sul, 2013.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. /Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BORUCHOVITCH, Evely; BZUNECK, José Aloyseo. **Motivação do aluno: contribuições da psicologia contemporânea**. 4. ed. Petrópolis: Vozes, 2009.
- DENARDI, Vania Bolzan. **Teoria dos Registros de Representações Semióticas**. 2017. Dissertação (Doutorado em Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Pelotas, Rio Grande do Sul.
- DUVAL, Raymond. **Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. 1ed Campinas: Papirus, 2003.
- DUVAL, Raymond. **Semioses e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009
- DUVAL, Raymond. **Teoria dos Registros de Representações Semióticas**. In: Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, v.2, nº3, jul-dez 2013. Entrevista concedida a José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Rezende.
- MENESES, Leonel Ricardo Machado. **Representações mobilizadas nas turmas de 1º ano do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Sergipe no ensino de função afim e quadrática**. 2014. 132 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2014.

PIAGET, Jean. **Epistemologia genética**. 4. ed. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2012.

REIS, Adinilson Marques. **Uma Proposta Dinâmica Para O Ensino De Função Afim A Partir De Erros Dos Alunos No Primeiro Ano Do Ensino Médio**. 2011. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSSINI, Renata. **Saberes docentes sobre o tema Função**. 2006. 384f. Dissertação (Doutorado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SALIN, Eliana Bevilacqua. **Matemática Dinâmica: Uma abordagem para o ensino de Funções Afins e Quadrática a partir de situações geométricas**. 2014. Dissertação (Mestrado em ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2014.

TOZO, Fábio Luiz Dias. **Tarefas exploratórias-investigativas para a aprendizagem de função afim**. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS, São Carlos, 2016.