UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA À DISTÂNCIA

TERCILIO JOSÉ NOBERTO DA SILVA

ALGUMAS APLICAÇÕES DA DERIVADA ORDINÁRIA NA ECONOMIA

João Pessoa-PB
2022

TERCILIO JOSÉ NOBERTO DA SILVA

ALGUMAS APLICAÇÕES DA DERIVADA ORDINÁRIA NA ECONOMIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Gomes de Assis

João Pessoa-PB

2022

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586a Silva, Tercilio Jose Noberto da.
Algumas aplicações da derivada ordinária na economia / Tercilio Jose Noberto da Silva. - João Pessoa, 2022.
40 p.

Educação a Distância, UFPB.
Orientação: José Gomes de Assis.
TCC (Graduação/Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Funções marginais. 2. Máximos e mínimos. 3. Problemas de otimização. I. Assis, José Gomes de. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51(043.2)

Elaborado por Ana Roberta Sousa Mota - CRB-15/101

TERCILIO JOSÉ NOBERTO DA SILVA

ALGUMAS APLICAÇÕES DA DERIVADA ORDINÁRIA NA ECONOMIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 12/12/2022.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. José Gomes de Assis
Orientador – **DM/CCEN/UFPB**

Prof. Jorge Costa Duarte Filho
DM/CCEN/UFPB

Prof. Oswaldo Evaristo da Costa Neto
DM/LMD/UFPB

Dedicatória

A toda minha família que acreditaram em meu potencial em especial a todos aqueles que acreditam em uma educação de qualidade, sem distinção de nenhuma natureza, a fim de construirmos, desta maneira, uma nação mais humana e solidária.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que iluminou o meu caminho, dando saúde, sabedoria, força e coragem para que pudesse obter a essa conquista importante em minha vida.

Não há como deixar de mencionar todos aqueles docentes de Matemática que passaram em minha vida acadêmica nesse período em que estive graduando nessa instituição, em especial ao Prof. Dr. José Gomes de Assis, o qual a partir de sua sabedoria intelectual passou a orientar e auxiliar na superalção dos obstáculos para poder concluir este trabalho.

Ao homem que, em toda a sua simplicidade, me deu a motivação a seguir estudando mostrando que meu sucesso depende diretamente do meu esforço, meu pai Tarciso Noberto (in memoriam). Como também a minha mãe Telma Ferreira que me deu força e apoio para completar mais uma etapa educacional na minha vida.

A minha esposa Kaline Raquel pela compreensão e apoio. Nas horas que pensei em desistir e abandonar o curso, ela que me motivava para seguir caminhando até chegar a conclusão de mais essa etapa educacional da minha vida.

Aos meus dois filhos Thallyson Vinícius e Thállius Miguel pela compreensão de estar afastado nos momentos em família para me dedicar aos estudos. Enfim esse afastamento servirá para um dia poder transmitir os conhecimentos adquiridos para ambos.

A todos meus amigos e amigas que fiz durante o tempo que cursei a graduação.

A UFPB pela oportunidade de concluir o curso de Licenciatura em Matemática.

Muito obrigado.

"Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela, tampouco, a sociedade muda." (Paulo Freire)

RESUMO

É fato que a matemática é uma ferramenta extremamente útil para o desenvolvimento de todas as áreas da ciência. Assim, a função derivada, como uma de suas ferramentas de aplicação, é útil em muitas áreas, dentre elas Administração, Economia. Na economia, à qual é o foco central deste trabalho, sua aplicação é importantíssima para dimensionar não só os custos de produção, mas também de planejamento. Desta forma, surge o conceito de funções marginais, que são obtidas pela derivada de uma função custo, receita, etc. Assim, neste trabalho desenvolvemos um estudo, por meio de resolução de problemas de otimização, aplicados na economia.

Palavras-chave: Funções marginais. Máximos e mínimos. Otimização.

ABSTRACT

Mathematics is an extremely useful tool for developing all areas of science. Thus, the derived function, as one of its application tools, is useful in many areas, including administration, economics. In economics, which is the central focus of this work, its application is crucial to measure not only production costs but also planning costs. In this way, the concept of marginal functions arises, which are obtained by the derivative of a function cost, revenue, etc. Thus, in this work, we developed a study, through the resolution of optimization problems, applied in economics.

Keywords: Marginal functions. Maximums and minimums. Optimization.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho iniciamos com uma pequena descrição das atividades como estudante que se encontram no Memorial Acadêmico. Logo em seguida serão apresentados os objetivos que encaminharam para o desenvolvimento deste trabalho, dando ênfase ao cálculo de derivadas, que possui diversas aplicações, dentre elas no contexto da economia. Por exemplo, se em um problema de otimização a variável de interesse é o custo, assim, é possível determinar a maneira mais economicamente viável avaliando a taxa de variação na produção de um produto. Um outro exemplo é considerar a variável lucro e determinar o lucro máximo em algum tipo de investimento. Assim, faz sentido imaginar a função derivada como uma ferramenta para mensurar a taxa de variação de uma quantidade com relação à outra.

Ademais, do ponto de vista matemático, em sua maioria, os problemas no âmbito das ciências econômicas se reduzem em determinar o maior ou menor valor em algum intervalo de previsibilidade. Com isso, a função derivada faz sentido para estudar o comportamento de problemas com estas características.

Logo após, será apresentado à fundamentação teórica, às aplicações e discussões e por fim às considerações finais.

1.1 MEMORIAL ACADÊMICO

Cursei o ensino fundamental em uma escola nas proximidades de minha residência, conhecida como Colégio Estadual, denominada de Escola Estadual de 1º e 2º Grau Professor José Soares de Carvalho, localizada na cidade de Guarabira-PB.

Ao longo do 6º ano ao 9º, o deslocamento até a escola era a pé em todas as manhãs. Em sala de aula escolhi o local no meio da turma para acompanhar atentamente as aulas ministradas pelos professores. Sempre fui curioso em aprender um pouco mais.

No ensino fundamental conheci diversos professores de matemática, dentre os quais destaco o professor Valetim, professor da 8ª série. No início, quando iniciou o conteúdo de equações do 2º grau, foi um pouco complicado entender o conteúdo. Contudo, sempre quis aprender a desenvolver aqueles cálculos que para muitos eram horríveis. Gostei tanto da didática daquele professor que comecei a desenvolver sozinho, através dos exercícios propostos, os cálculos daquelas equações que levaram a compreender os gráficos das funções. Os momentos bons nessa época era que eu pude ajudar diversos colegas da turma que tiveram dificuldade de assimilar os conteúdos na sala, fazendo dessa forma conquistar verdadeiros amigos. Até os dias atuais encontro os colegas da sala e eles relatam esses momentos que passamos juntos resolvendo os problemas. Passaram diversos professores da disciplina de matemática que, uns mais sérios outros mais extrovertidos na maneira de repassar o conhecimento do conteúdo.

No Ensino Médio, as aulas na escola eram propostas pelos professores que seguiam as orientações do livro didático, expondo o conteúdo no quadro negro e escrito a giz. Nas séries finais do ensino médio tivemos conteúdos de como geometria e trigonometria, onde grande parte dos alunos tiveram dificuldades, pois não compreendiam o que o professor repassava. Os professores do Ensino Médio ensinavam de maneira tradicional, repassavam exercícios no quadro e no final da aula pediam atividades para serem feitas em casa e na próxima aula entregar ao professor para uma avaliação continuada. Durante esse período foi possível perceber a falta de motivação dos profissionais, mas mesmo assim cumprir todos os meus compromissos como estudante entregando todas as atividades solicitadas pelo professor, onde naquela época já percebi que teria uma facilidade pela disciplina de matemática, pois auxiliava outros alunos de sala no desenvolvimento das resoluções das questões sugeridas pelo professor. Devido a minha dedicação aos estudos da disciplina, decidi seguir carreira de professor e o curso escolhido foi o de Licenciatura em Matemática.

O Ensino Superior foi iniciado com algumas dificuldades, tendo em vista que as aulas iniciaram ensino à distância, então não possuía familiaridade com o sistema Moodle, adotado como plataforma de ensino pela Universidade Federal da Paraíba. A partir do momento que fui conhecendo a funcionalidade das ferramentas internas para ter acesso aos cursos comecei a ter excelentes resultados nas atividades propostas pelos professores. Sempre fui dedicado ao curso, dessa forma logo no início de cada semana observava quais atividades estariam disponíveis e já me programava para desenvolver todas as atividades me atentando aos prazos, fazendo com isso entregas pontuais de todos os trabalhos solicitados das disciplinas. Assim como outros alunos também tive dificuldades na disciplina de Cálculo I, onde para mim foi o primeiro contato com os estudos sobre limites, derivadas e integrais. Percebi que essa disciplina era responsável pelo enorme número de alunos que obtinham notas baixas, gerando dessa forma reprovações, motivo pelo qual muitos alunos tomaram a decisão de desistir ou abandonar a graduação. Diante dessa dificuldade, coloquei como meta aprender todos os conceitos envolvendo os assuntos de limites, derivadas e integrais e graças ao meu esforço compreendi suas definições e aplicações gerando consequentemente as devidas aprovações em todas as disciplinas envolvendo cálculo diferencial e integral. Tão logo percebi em mim que com meu esforço sou capaz de aprender e repassar conhecimento das disciplinas de Cálculo para qualquer aluno. Nessa visão, surgiu a ideia de elaborar meu trabalho de conclusão de curso envolvendo algo sobre a aplicação de derivadas.

Por fim, meu foco agora é concluir a graduação e iniciar os trabalhos em sala de aula, transmitindo conhecimento aos alunos.

1.2 OBJETIVO GERAL

Descrever como utilizar a função derivada para resolver problemas de otimização em economia.

1.2.1 Objetivos específicos

• Definir a função derivada e verificar suas aplicações na economia;
• Validar por meio de resolução de problemas a aplicação da derivada em economia.

1.3 METODOLOGIA

Os aspectos metodológicos deste trabalho constitui uma pesquisa do tipo qualitativa. Desta forma, pretendemos apresentar o estudo de derivadas no contexto das ciências econômicas. Para tanto, dividimos este trabalho em quatro capítulos, incluindo a introdução. No Capítulo 2 realizamos uma breve revisão da literatura, em que é apresentado o conceito de limite, derivada e suas propriedades, bem como as principais funções de otimização em economia. No Capítulo 3 foram propostas algumas aplicações e discutimos tais resultados. Finalmente, no Capítulo 4 são apresentas as considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste Capítulo são apresentadas as ferramentas e conceitos que nortearam a composição dos aspectos metodológicos que nortearam o desenvolvimento deste trabalho. Desta forma, são apresentadas as definições de limites e derivada, suas principais propriedades e alguns exemplos. Para tanto, os conceitos são apresentados como adaptações dos textos de S. T. Tan. (2005), Anton et al. (2014), Guidorizzi (2013), Fleming e Gonçalves (2006) e Morettin et al. (2009). J.G. Assis [et al] (2008) Licenciatura em Matemática a distância Vol. 2 e 3.

2.1 CONCEITO DE LIMITES

O conceito de limite é amplamente discutido por diversos autores, utilizaremos aqui o conceito definido por Stewart (2013) em seu livro de cálculo por acha que ele se apresenta de uma forma intuitiva, portanto mais fácil para o entendimento do conceito tão importante do Cálculo Diferencial.

Definição 2.1.1. Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo real contendo número a, exceto possivelmente no próprio a. Então, definimos: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e dizemos “o limite de *f(x)*, quando *x* tende a a, é igual a *L*” se pudermos tornar os valores de *f(x)* arbitrariamente próximos de *L* (tão próximos de *L* quanto quisermos), tornando *x* suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a. (STEWART, 2014 p. 85)

Neste sentido, os valores de *f(x)* tendem a L toda vez que x tender a a, em outras palavras, os valores *f(x)* tende a ficar mais próximo do número L á medida que x tende ao número a, isso para qualquer lado de a, porém com $x \neq a$.

Exemplos

Encontre o limite da função abaixo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Observe que para $x = 1$ a função não está definida. Pela definição de limite, deve-se observar o que ocorre com os valores de x que se aproxima de a, mas nunca será igual a a. Dessa forma, para valores de $x \neq 1$, ou que se aproximam dessa ponto, temos:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$$

Logo, $\lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$

Veja mais esse exemplo:

Encontre o limite da função abaixo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{2x^2 - x - 1}$$

Observe mais uma vez que para $x = 1$ a função não está definida. Dessa forma, para valores de $x \neq 1$, temos:

$$f(x) = \frac{x-1}{2x^2 - x - 1} = \frac{x-1}{(x-1)(2x+1)} = \frac{1}{2x+1}$$

Logo, $\lim_{x \to 1} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{3}$

2.2 LIMITES INFINITOS

No estudo dos limites encontramos a definição de limites no infinito e limites infinitos, mostraremos aqui, sua definição proposta por Stewart (2013).

Definição 2.2.1. Seja f uma função definida para valores maiores e menores que a, mas diferentes de a. Então, se $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes sempre que x for suficientemente próximo de a, mas não igual a a (STEWART, 2013 p. 86).

De forma intuitiva de acordo com tal definição, podemos dizer que:

- Quando $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ simboliza que $f(x)$ cresce ilimitadamente além de qualquer número real x dado, à medida que x se aproxima de a pelo lado direito, ou seja, valores maiores que a.
- Quando $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ simboliza que $f(x)$ cresce ilimitadamente além de qualquer número real x dado, à medida que x se aproxima de a pelo lado esquerdo, ou seja, por valores menores que a.
- Quando tomando o limite de $f(x)$ quando x cresce ilimitadamente utilizamos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

- Quando tomando o limite de $f(x)$ quando x decresce ilimitadamente utilizamos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Exemplos

Calcule os limites abaixo:

a) $\lim_{x \to +\infty} 2x^5$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^5$$

O termo de maior grau é positivo, logo o limite resulta em $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^5 = +\infty$$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{6x-8}$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{6x-8}$$

Dividir todos os termos pela potência mais alta de x que aparece no denominador, ou seja, dividir cada termo por x, dessa forma temos,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{5}{x}}{6-\frac{8}{x}}$$

O limite de um quociente é o quociente dos limites, logo

$$\frac{\lim_{x\to+\infty} 3+\frac{5}{x}}{\lim_{x\to+\infty} 6-\frac{8}{x}}$$

Dessa forma, utilizando a propriedade da soma dos limites, temos

$$\frac{\lim_{x\to+\infty} 3+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}}{\lim_{x\to+\infty} 6-\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x}}$$

O limite de uma constante é a própria constante. Dessa forma resulta no seguinte valor,

$$\frac{3+0}{6-0}=\frac{1}{2}$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^3-2x^2+1}{1-3x}$

Solução:

Dividir todos os termos pela potência mais alta de x que aparece no denominador, ou seja, dividir cada termo por x, dessa forma temos,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-2x+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-3}$$

O limite de um quociente é o quociente dos limites, logo

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2-2x+\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}-3}$$

Dessa forma, utilizando a propriedade da soma dos limites, temos

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2-\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty} 3}$$

O limite de uma constante é a própria constante. Dessa forma, resulta no seguinte valor,

$$\frac{\infty}{-3}=-\infty$$

Após realizar as operações o limite resulta em, -∞.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2-x}{2x^3-5}$

Solução:

O comportamento do limite de uma função racional coincide com o termo de maior grau. Observa-se que temos uma divisão entre dois polinômios, dessa forma deve-se dividir o termo de maior grau do numerador e denominador, dessa forma temos,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{2x^3}$$

Ao realizar a simplificação dos termos o limite resulta em zero, ou seja,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

2.3 DEFINIÇÃO FORMAL DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO

A definição precisa de um limite pode ser enunciada da seguinte maneira:

Definição 2.3.1: Seja f uma função e **a** um ponto do domínio f**.** Dizemos que f tem limite L, quando x tende para **a** , se para todo $\varepsilon > 0$ dado, (não importa quão pequeno ε for) existir $\delta > 0$ talque, se x estiver no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ e $x \neq a$, então $f(x)$ estará no intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Então, a partir da Definição 2.3.1, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é L, se

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, então,\ |f(x) - L| < \varepsilon,$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Exemplo

Prove pela definição formal de limite que $\lim_{x\to 2} 2x - 7 = -3$

Temos que $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, tal\ que,$ se $0 < |x - a| < \delta, então\ |f(x) - L| < \varepsilon$

Calculando o δ, temos,

se $0 < |x - 2| < \delta, então\ |(2x - 7) - (-3)| < \varepsilon$

$$|2x - 7 + 3| < \varepsilon$$

$$|2(x - 2)| < \varepsilon$$

$$2|x - 2| < \varepsilon$$
$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Logo $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, ou seja, $\varepsilon = 2\delta$

Então, para $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, temos:

$$|(2x - 7) - (-3)| < 2\delta$$
$$|2x - 7 + 3| < 2\delta$$
$$2|x - 2| < 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Logo: $|(2x - 7) + 3| < \varepsilon$, dessa forma $|f(x) - L| < \varepsilon$, como queríamos provar.

2.4 FUNÇÃO DERIVADA

Após o conceito de Limite que é fundamental para o estudo do cálculo diferencial e integral vamos apresentar o conceito de Derivada a partir da ideia de reta tangente dado um ponto do gráfico de uma função, ver Figura 1.

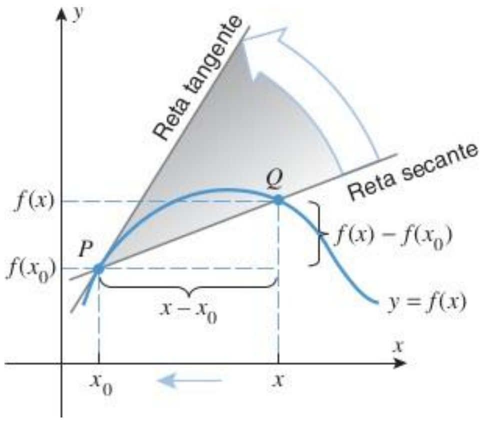

Figura 1 – Fonte: Anton et al. (2014)

Definição 2.4.1 Seja x_0 um ponto pertencente ao domínio da função f. Então, a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é a reta cuja equação é

$$y - f(x_0) = m(x - x_0),$$

em que m representa o coeficiente angular da reta tangente ao ponto x_0. Dessa forma, organizando a equação acima, temos que o coeficiente angular é obtido como:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{2.1}$$

Com isso, se definirmos $h = x - x_0$, então, quando $x \to x_0$ implica que $h \to 0$. Logo, a Equação (2.1) pode ser reescrita como

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{2.2}$$

Desta maneira, se limite na Equação (2.2) existir, e a partir da análise da Figura 1, podemos interpretar tal limite como a inclinação da reta tangente a curva $y = f(x)$ no $x = x_0$ ou como a taxa de variação instantânea de y em relação a x em $x = x_0$.

Diante disso, os livros de Cálculo definem este limite como uma função nomeada de derivada, e usamos a notação

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{2.3}$$

em que se lê “éfe linha”. Seu domínio é conjunto de todos os pontos do domínio de f tais que o limite (2.3) existe. Logo, natural imaginar que o limite em (2.3) não exista para certos pontos do domínio da função f. Então, nestes pontos a derivada não está definida. Neste caso, dizemos que a função não é diferenciável em $x = x_0$.

Exemplo:

Seja a função f tal que $f(x) = 4x + 2$, com $x \in \mathbb{R}$. Calcule a derivada da função no ponto $x_0 = 1$.

Pela definição dada temos,

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Observe que

$$f(x_0 + h) = f(1 + h) = 4(1 + h) + 2$$

$$f(x_0) = 4x_0 + 2 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 4.1 + 2 = 6$$

Logo,

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{4(1+h) + 2 - 6}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h - 4}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} 4$$

Portanto, a derivada da função no ponto $x_0 = 1$ vale 4, ou seja, o coeficiente angular da reta tangente assume valor 4.

Pode-se calcular a derivada da função também pela seguinte notação:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Observe que

$$f(x_0) = 4x_0 + 2 \qquad \Rightarrow \qquad f(1) = 4.1 + 2 = 6$$

Logo

$$f'(1) = \lim_{h \to 1} \frac{4x + 2 - 6}{x - 1}$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 1} \frac{4x - 4}{x - 1}$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 1} \frac{4(x - 1)}{x - 1} = 4$$

Portanto, $f'(1) = 4$

De acordo com (ANTON et al., 2014), geometricamente, uma função f é derivável em x_0 se o gráfico de f possuir uma reta tangente em x_0, ver Figura 1.

Dentro do nosso estudo será necessário compreender a definição de função contínua. O conceito de função contínua que apresentaremos agora:

Definição 2.4.2. Uma função f: D(f) $\rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um ponto a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

De acordo com esta definição uma função para ser contínua deve obedecer três condições:

a) está definida em $f(a)$

b) $\lim_{x \to a} f(x)$ deve existir

c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemplo:

Dado a função $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, verifique se ela é contínua em $x = 3$.

O primeiro passo é verificar se a função está definida no ponto $x = 3$, logo:

$$f(3) = \frac{3^2 - 4}{3 - 2} = 5$$

O segundo passo é calcular o limite $\lim_{x \to 3} f(x)$, temos:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2}$$

$$\lim_{x \to 3}(x + 2) = \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 2 \ = \ 2 \ + \ 3 \ = \ 5$$

Dessa forma, observa-se que $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$, portanto a função é contínua em $x = 3$.

Teorema 2.1 Se a derivada de f existir no ponto x_0, então f é contínua em x_0.

Dizemos que f é uma função derivável, quando a derivada de f existir em todos os pontos do seu domínio.

Podemos demonstrar da seguinte maneira: Supondo que f seja diferenciável em x_0, tem-se que $f'(x_0)$ existe e é dada por

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right]$$

Para mostrar que f é contínua em x_0, devemos mostra que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ou, equivalente,

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

Expressando essa definição em termos da variável $h = x - x_0$, temos:

$$\lim_{h \to 0}[f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h\right]$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right] \cdot \lim_{h \to 0} h$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Logo, se uma função é diferenciável em $x = x_0$, então essa função é contínua também em $x = x_0$, conforme foi demonstrado.

2.4.1 Técnicas de diferenciação

A derivada de uma função definida como um limite é usual para o cálculo de funções derivadas simples. No caso, de funções mais complexas o cálculo da derivada pela definição pode ser muito laborioso. Diante disso, é necessário que sejam estabelecidas algumas técnicas de diferenciação, as quais apresentamos agora.

1. **Derivada da função constante**: A derivada de uma função constante é 0. Então, se **c** é uma constante real, temos

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0, \qquad \forall c.$$

2. **Derivada da função potência**: Seja n um número inteiro positivo, então,

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}.$$

3. **Regra da potência estendida**: Seja r um número real, então,

$$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = rx^{r-1}.$$

4. **Regra do múltiplo constante**: Se f for diferenciável em x e c for um número real qualquer, então cf também será diferenciável em x e

$$g(x) = cf(x) \Rightarrow g'(x) = cf'(x).$$

5. **Regra da soma e da diferença**: Se f e g forem diferenciáveis em x, então $f + g$ e $f - g$ também o serão e

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x).$$

6. **Regra do produto**: Se f e g forem diferenciáveis em x, então o produto $f \cdot g$ também será e

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

7. **Regra do quociente**: Se f e g forem diferenciáveis em x, com $g(x) \neq 0$, então o quociente $\frac{f}{g}$ também será e

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

8. **Regra da cadeia**: Sejam $y = g(u)$ e $u = f(x)$ duas funções deriváveis, isto é, as derivadas $g'(u)$ e $f'(x)$ existem, então a função composta $y = g[f(x)]$ tem derivada que é dada por:

$$y'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$$

Apresentaremos no quadro abaixo as derivadas de algumas funções elementares tais como: derivadas das funções trigonométricas, logaritmicas e exponenciais.

Função Trigonométrica	
$\frac{d}{dx}(sen\ x) = \cos x$	$\frac{d}{dx}(cossec\ x) = -\text{cossec}\, x\ cotg\ x$
$\frac{d}{dx}(cos\ x) = -\text{sen}\, x$	$\frac{d}{dx}(sec\ x) = \sec\ x\ tg\ x$

$\frac{d}{dx}(tg\ x) = sec^2\ x$	$\frac{d}{dx}(cotg\ x) = -cossec^2\ x$
Função Logatitmica	**Função Exponencial Natural**
$\frac{d}{dx}(ln\ x) = \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

Exemplos:

Calcule a derivada das funções abaixo:

a) $f(x) = xsen\ x$

Solução:

Usando a regra do produto, temos

$$\frac{d}{dx}(xsen\ x) = x\frac{d}{dx}(sen\ x) + sen\ x\frac{d}{dx}(x)$$
$$= x\cos x + sen\ x$$

b) $f(x) = \frac{sen\ x}{1+\cos x}$

Solução:

Usando a regra do quociente, temos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{sen\ x}{1+\cos x}\right) = \frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(sen\ x) - (sen\ x)\frac{d}{dx}(1+cosx)}{(1+cosx)^2}$$

$$= \frac{(1+\cos x)\,(cos\ x) - (sen\ x)(-senx)}{(1+cosx)^2}$$

$$= \frac{(\cos x) + (\ cos^2 x) + (sen^2 x)}{(1+cosx)^2}$$

Sabe-se que pela lei fundamental da trigonometria o $(cos^2 x) + (sen^2 x) = 1$, logo

$$= \frac{1 + cosx}{(1 + cosx)(1 + cosx)}$$

$$= \frac{1}{1 + cosx}$$

c) $f(x) = x^2 lnx$

Solução:

Usando as regras da potência e produto, temos

$$\frac{d}{dx}(x^2 lnx) = x^2 \frac{d}{dx}(\ln x) + ln\, x \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 \left(\frac{1}{x}\right) + 2xln\, x$$

$$= x + 2xln\, x$$

d) $f(x) = 2x + e^x tgx + 10$

Solução:

Usando as regras da soma, potência e produto, temos

$$\frac{d}{dx}(x^2 lnx) = \frac{d}{dx}(2x) + e^x \frac{d}{dx}(tg\, x) + tg\, x \frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(10)$$

$$= 2 + e^x \frac{d}{dx}(tg\, x) + tg\, x \frac{d}{dx}(e^x) + 0$$

$$= 2 + e^x sec^2 x + e^x tg\, x$$

e) $f(x) = \cos(x^3)$

Solução:

Usando a regra da cadeia temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}[\cos(u)] \cdot \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$\frac{dy}{dx} = [-\operatorname{sen}(u)] \cdot (3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = [-\operatorname{sen}(x^3)] \cdot (3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -3x^2 \operatorname{sen}(x^3)$$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Solução:

Usando a regra da cadeia temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}(\sqrt{u}) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

2.4.2 Funções marginais

De acordo com Morettin et al. (2009), em economia dada uma função $f(x)$, costuma-se utilizar o conceito de função marginal para avaliar o efeito causado em $f(x)$ por uma pequena variação de x. Segundo o autor a função marginal de $f(x)$ é definida pela sua derivada. Logo, é natural que a função custo marginal é a derivada da função custo, e a função receita marginal é a derivada da função receita.

Desta forma, se denotarmos por $C(x)$ e $R(x)$, em que x representa unidades de um produto, as funções custo e receita, respectivamente, então, segundo a notação de Morettin et al. (2009), o custo marginal é:

$$C_{mg}(x) = C'(x),$$

e a receita marginal como

$$R_{mg}(x) = R'(x).$$

Analogamente, é definida a função produtividade marginal como sendo a derivada de P em relação a x. Em que P é uma função de produção que depende da quantidade x de um fator variável.

2.4.3 Crescimento e decrescimento de funções

O termo crescimento e decrescimento é utilizado para descrevermos o comportamento de uma função em algum intervalo de interesse.

Definição 2.2.3.1 Seja f uma função definida em um intervalo I, e sejam x_1, $x_2 \in$ I. Então, a função é chamada crescente nesse intervalo se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$, ou seja, à medida que aumenta o valor de x dentro do intervalo, as imagens correspondentes também aumentam.

A função f será chamada decrescente se nesse intervalo $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$, ou seja, à medida que aumentam os valores de x dentro do intervalo, as imagens correspondentes diminuem.

A função será constante se $f(x_1) = f(x_2)$ quaisquer que sejam os pontos x_1 e x_2 em I. Ver Figura 2

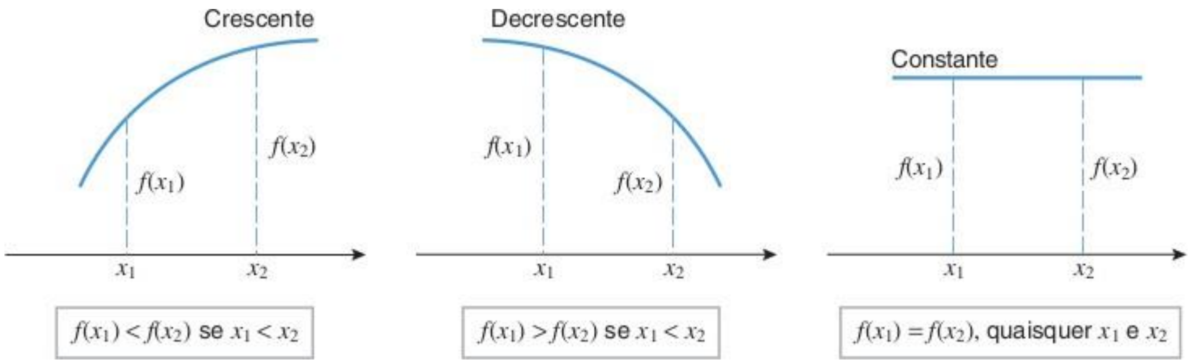

Figura 2 – Fonte: Anton et al. (2014).

Ao avaliarmos a Figura 2, notamos que se a função é diferenciável num certo intervalo, então, ela será crescente neste intervalo se e somente se cada reta tangente ao gráfico tenha inclinação positiva. No caso da inclinação das tangentes ser negativa, a função é decrescente. Se a inclinação for nula a função é constante. Diante disso, somos convidados a enunciar o Teorema 2.2.

Teorema 2.2 Seja f uma função contínua em um intervalo fechado [a, b] e derivável no intervalo aberto (a, b). Então, a função é crescente nesse intervalo se, para todo $x \in (a, b)$ tiver $f'(x) > 0$. A função será decrescente se, para todo $x \in (a, b)$ tiver $f'(x) < 0$. Por fim, a função será constante se, para todo $x \in (a, b)$ tiver $f'(x) = 0$.

Logo, percebe-se que o estudo da primeira derivada é importante para determinar o comportamento do gráfico da função.

Ainda, como a inclinação das retas tangentes ao gráfico de uma função f define sua derivada, então, é possível avaliar o comportamento f' no intervalo considerado, ou seja, f' será crescente em intervalos nos quais f'' é positiva e decrescente em intervalos nos quais f'' é negativa. Além disso, será possível definir a concavidade da função, ver Teorema 2.3.

Teorema 2.3 Seja f uma função duas vezes diferenciável no intervalo aberto (a, b). Então,

a) Se $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, então f é côncava para cima em [a, b].
b) Se $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, então f é côncava para baixo em [a, b].

Demostração: Ver (FLEMING; GONÇALVES, 2006, p. 277).

Portanto, analisando o Teorema 2.3 faz sentido indagar que existam regiões no intervalo (a, b) tais que a concavidade da função muda de sentido, isto é, pontos em que a curva muda de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa. Esta indagação é corroborada pela definição 2.3.

Definição 2.2.3.2 Seja f uma função contínua no intervalo aberto (a, b) contendo x_0. Se f mudar de concavidade no ponto (x_0, f(x_0)), então, diremos que (x_0, f(x_0)) é um ponto de inflexão**.**

Os pontos de inflexão de uma função f são os pontos do gráfico de $y = f(x)$ nos quais as inclinações das retas tangentes mudam de crescente para decrescente ou vice-versa. Ademais, os pontos de inflexão marcam os lugares da curva $y = f(x)$ em que a taxa de variação de y em relação a x muda de crescente para decrescente ou vice-versa.

2.4.4 Máximos e mínimos relativos

Definição 2.2.4.1

a) Uma função f tem um máximo relativo em x_0 se existir um intervalo aberto (a, b) contendo x_0 tal que $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in (a, b)$.

b) Uma função f tem um mínimo relativo em x_0 se existir um intervalo aberto (a, b) contendo x_0 tal que $f(x_0) \leq f(x)$, ∀x ∈ (a, b).

Quando f tiver um máximo ou um mínimo relativo em x_0, diz-se que f tem um extremo relativo em x_0.

Ademais, como é discutido na literatura, um ponto crítico de uma função f é um ponto do seu domínio cujo gráfico apresenta uma reta tangente horizontal ou f não é diferenciável, neste ponto. Ainda, se $f'(x) = 0$ o ponto é chamado de estacionário. Portanto, Uma função f tem um extremo relativo naqueles pontos críticos em que f' troca de sinal. Este resultado é conhecido como teste da primeira derivada, ver Teorema 2.4.

Teorema 2.4 (Teste da primeira derivada) Seja f uma função contínua em x_0. Então,

a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então $f(x_0)$ é um valor máximo relativo.

b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então $f(x_0)$ é um valor mínimo relativo.
c) Se $f'(x)$ tiver o mesmo sinal tanto em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 quanto em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então $f(x_0)$ não é extremo relativo.

Demostração: Ver (ANTON et al., 2014, p. 247).

Teorema 2.5 (Teste da segunda derivada) Seja f uma função duas vezes diferenciável em x_0. Então,

a) Se $f'(x_0) = 0$ e $f'(x_0) > 0$, então $f(x_0)$ é um valor mínimo relativo.
b) Se $f'(x_0) = 0$ e $f'(x_0) < 0$, então $f(x_0)$ é um valor máximo relativo.
c) Se $f'(x_0) = 0$ e $f'(x_0)$ 0, então o teste é inconclusivo, isto é, $f(x_0)$ pode ser um valor máximo ou mínimo relativo ou nenhum dos dois.

Demostração: Como estes resultados são comhecidos nos cursos de cálculo deixamos de apresentar suas demonstrações, caso algum se interese veja (ANTON et al., 2014, p. 248).

3 APLICAÇÕES DA DERIVADA NA ECONOMIA

A partir dos resultados discutidos no Capítulo 2, aqui, discutiremos como utilizar esta poderosa ferramenta, que é a derivada, em problemas de otimização na economia. A metodologia utilizada será pela proposta e resolução de problemas disponíveis nos exercícios do livro Matemática aplicada à administração e economia do autor S. T. TAN, (2005).

Aplicação 1: Em uma empresa o lucro total (em reais) pela fabricação e venda de x unidades do seu produto é dado por

$$P(x) = -0{,}02x^2 + 300x - 200.000 \qquad (0 \leq x \leq 20.000)$$

Quantas unidades desse produto a empresa deve produzir para maximizar seus lucros?

SOLUÇÃO:

Temos que a função lucro total que é dada por $P(x)$, logo sua função marginal é

$$P'(x) = \frac{d}{dx}(-0{,}02x^2 + 300x - 200.000)$$

$$P'(x) = \frac{d}{dx}(-0{,}02x^2) + \frac{d}{dx}(300x) - \frac{d}{dx}(200.000)$$

$$P'(x) = -0{,}04x + 300$$

Então, para encontrar a quantidade x que maximiza o lucro, vamos inicialmente determinar os pontos críticos, ou seja,

$$-0{,}04x + 300 = 0$$

$$0{,}04x = 300$$

$$x = \frac{300}{0{,}04}$$

$$x = 7500$$

Temos ainda que a segunda derivada de $P(x)$ é

$$P''(x) = -0{,}04$$

Logo,

$$P''(7500) = -0{,}04 < 0$$

então, pelo teste da segunda derivada x = 7500 é um ponto de máximo. Portanto, ao avaliar $P(x)$ em $x = 7500$, teremos

$$P(7500) = -0{,}02(7500)^2 + 300(7500) - 200.000$$

$$P(7500) = 925.000$$

Dessa forma, se a empresa produzir 7500 unidades maximizará seu o lucro, que assumirá o valor absoluto máximo da função $P(x)$, ou seja, para ela ter o lucro máximo no valor de R$ 925.000,00, precisará produzir 7500 unidades do seu produto.

Aplicação 2: Um complexo residencial tem 100 unidades de dois dormitórios. O lucro mensal (em reais) realizado pelo aluguel de x apartamentos é dado por

$$P(x) = -10x^2 + 1.760x - 50.000$$

a) Quantas unidades devem ser alugadas para maximizar o lucro mensal?

b) Qual é o máximo lucro mensal realizável?

SOLUÇÃO:

Item a) Para encontrar a quantidades de dormitórios, precisa-se encontrar a função marginal do lucro mensal de $P(x)$ que garantirá sua quantidade máxima, dessa forma temos,

$$P'(x) = \frac{d}{dx}(-10x^2 + 1.760x - 50.000)$$

$$P'(x) = \frac{d}{dx}(-10x^2) + \frac{d}{dx}(1.760x) - \frac{d}{dx}(50.000)$$

$$P'(x) = -20x + 1.760$$

Então, para encontrar a quantidade x apartamentos que maximiza o lucro, deve-se igualar a função marginal a zero e determinar sua solução, ou seja,

$$-20x + 1.760 = 0$$

$$20x = 1.760$$

$$x = 88$$

Da mesma forma que encontramos no problema 1 a quantidade máxima, aqui também não será diferente. Esse complexo residencial precisará alugar 88 unidades para maximizar seu o lucro.

Item b) Logo, o lucro será máximo quando serem alugados 88 unidades. Neste caso, para encontrar lucro máximo mensal, basta substituir a quantidade de unidades alugadas na função lucro inicial, dessa forma, temos

$$P(x) = -10x^2 + 1.760x - 50.000$$

$$P(88) = -10(88)^2 + 1.760(88) - 50.000$$

$$P(88) = 27.440$$

Portanto, ao realizar o alugel de 88 unidades esse complexo garantirá seu lucro máximo que é o valor de R$ 27.440,00.

Aplicação 3: A demanda por pneus de motocicletas importados por uma empresa é 40.000/ano e pode ser considerada uniforme ao longo do ano. O custo de encomenda de um carregamento de pneus é de R$ 400,00, e o custo de estoque de cada pneu por ano é de R$ 2,00. Determine quantos pneus devem ser enviados em cada carregamento para que os custos de encomenda e estoque sejam minimizados. (Assuma que cada carregamento chega assim que o anterior foi totalmente vendido.)

SOLUÇÃO:

Seja o número de pneus a serem enviados dados pela função

$$Q(x) = \frac{\text{número total de pneus demandados por ano}}{\text{pneus a serem enviados em cada carregamento}} = \frac{40000}{x}$$

Dadas as informações do problema, supomos que o número médio de pneus no estoque seja $\frac{x}{2}$. Portanto, o custo de armazenamento no estoque por cada pneu é:

$$C_a(x) = 2\left(\frac{x}{2}\right) = x$$

O custo de cada carregamento é:

$$C_c(x) = 400\left(\frac{40000}{x}\right) = \frac{16000000}{x}$$

Portanto, o custo total é

$$C(x) = C_a(x) + C_c(x) = x + \frac{16000000}{x}$$

Logo, para determinar o número de pneus a serem enviados para que os custos sejam mínimos pode ser determinando fazendo $C'(x) = 0$. Em que

$$C'(x) = 1 - \frac{16000000}{x^2},$$

logo,

$$1 - \frac{16000000}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 16000000$$

$$x = \sqrt{16000000}$$

$x = 4000$ unidades.

Portanto, o número de pneus a serem enviados em cada carregamento para que os custos sejam mínimos é 4000 unidades.

Aplicação 4: À demanda semanal por produtos fabricados por uma empresa é dada por

$$p = -0{,}0005x^2 + 60$$

onde p é o preço unitário em reais e x é a quantidade demandada. A função custo total semanal associada à produção desses produtos é dada por

$$C(x) = -0{,}001x^2 + 18x + 4000$$

onde $C(x)$ denota o custo total (em reais) de prensagem de x produtos. Determine o nível de produção que renderá lucro máximo ao fabricante.
Sugestão: Use a fórmula quadrática.

SOLUÇÃO:

Inicialmente, vamos identificar a função Receita, que será representada da seguinte maneira,

$$R(x) = px$$
$$R(x) = (-0{,}0005x^2 + 60)x$$
$$R(x) = -0{,}0005x^3 + 60x$$

Agora, vamos identificar a função lucro total que é dada por:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$
$$L(x) = -0{,}0005x^3 + 60x - (-0{,}001x^2 + 18x + 4000)$$
$$L(x) = -0{,}0005x^3 + 60x + 0{,}001x^2 - 18x - 4000$$
$$L(x) = -0{,}0005x^3 + 0{,}001x^2 + 42x - 4000$$

Logo, sua função marginal é

$$L'(x) = -0{,}0015x^2 + 0{,}002\text{x} + 42$$

Então, para encontrar a quantidade x maximiza o lucro, vamos igualar sua função marginal a zero e determinar a solução, utilizando a fórmula quadrática, ou seja,

$$-0{,}0015x^2 + 0{,}002x + 42 = 0,$$

multiplicando toda equação por 1000, temos,

$$-1{,}5x^2 \ + 2x + 42000 = 0,$$

logo,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1{,}5)42000}}{2(-1{,}5)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{252004}}{-3}$$

$$x = \frac{-2 \pm 502}{-3}$$

$$x = 168$$

Observe que utilizando a fórmula quadrática em que x representa a quantidade de produtos produzidos deve ser desprezado o valor negativo. Portanto, o fabricante obterá lucro máximo quando forem produzidos 168 peças.

Aplicação 5: A demanda mensal por um certo tipo de produto em frascos é dada pela equação de demanda

$$p = 100e^{-0{,}0002x} + 150$$

onde p é o preço de varejo por unidade (em reais) e x é a quantidade (em frascos) em demanda.

a) Ache a taxa de variação do preço por frasco quando $x = 1000$ e $x = 2000$.

b) Qual é o preço por frasco quando $x = 1000$? E quando $x = 2000$?

SOLUÇÃO:

Item a) Para saber a taxa de variação do preço em relação ao frasco, basca calcular a primeira derivada da função, dessa forma temos,

$$p'(x) = -0{,}02e^{-0{,}0002x}$$

Em $x = 1000$, temos,

$$p'(1000) = -0{,}02e^{-0{,}002x}$$
$$p'(1000) = -0{,}01637\ldots$$

Logo, percebe-se que o preço desse produto terá uma diminuição no valor de 1,63 centavos por frascos quando se tem uma quantidade de 1000 frascos.

Já para $x = 2000$, temos,

$$p'(2000) = -0{,}02e^{-0{,}002x}$$
$$p'(2000) = -0{,}01340\ldots$$

Logo, percebe-se que o preço desse produto também terá uma diminuição no valor de 1,34 centavos por frascos quando se tem uma quantidade de 2000 frascos.

Item b) Para encontrar os valores em reais dos frascos quando $x = 1000$ e $x = 2000$. Basta substituir na função preço, dessa forma, temos,

$$p(1000) = 100e^{-0{,}0002(1000)} + 150$$
$$p(1000) = 231{,}87$$

e,

$$p(2000) = 100e^{-0{,}0002(2000)} + 150$$
$$p(2000) = 217{,}03$$

Para 1000 frascos o valor será de R$ 231,87. Já para 2000 frascos o valor será de R$ 217,03.

Aplicação 6: Um estudo sobre o uso mundial de petróleo foi feito para uma grande companhia petrolífera. O estudo previu que a quantidade de petróleo usado na produção industrial em um certo país é dada por

$$f(t) = 1{,}5 + 1{,}8te^{-1{,}2t} \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

onde $f(t)$ é o número de barris por R$ 1.000,00 de produção econômica e t é medido em décadas ($t = 0$) corresponde a 1965). Calcule $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ e $f'(3)$ e interprete seus resultados.

SOLUÇÃO:

A primeira derivada da função $f(t)$ corresponde:

$$f'(t) = \frac{d}{dt}1{,}5 + \frac{d}{dt}1{,}8te^{-1{,}2t},$$

observa-se que deve ser utilizada a regra da derivada do produto entre funções, dessas forma temos,

$$f'(t) = 1{,}8(e^{-1{,}2t} - 1{,}2te^{-1{,}2t})$$

$$f'(t) = 1{,}8e^{-1{,}2t} - 2{,}16te^{-1{,}2t}$$

$$f'(t) = e^{-1{,}2t}(1{,}8 - 2{,}16t)$$

Portanto,

$$f'(0) = e^{-1{,}2(0)}\big(1{,}8 - 2{,}16(0)\big) = 1{,}8$$

$$f'(1) = e^{-1{,}2(1)}\big(1{,}8 - 2{,}16(1)\big) = -0{,}1084$$

$$f'(2) = e^{-1{,}2(2)}\big(1{,}8 - 2{,}16(2)\big) = -0{,}2286$$

$$f'(3) = e^{-1{,}2(3)}\big(1{,}8 - 2{,}16(3)\big) = -0{,}1278$$

Percebe-se que a produção de barris de petróleo no ano de 1965 estava em crescimento. Já nas próximas três décadas a produção passa por um processo de decrescimento. Logo, esse estudo mundial apresenta como resultados crescimento em t = 0 e decrescimento em t = 1, 2 e 3.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos como o conceito da função derivada ordinária pode ser aplicado em problemas de otimização em economia, podendo, em estudos mais avançados da economia utilizar as derivadas parciais. Como metodologia, para ilustrar as aplicações, utilizamos a proposta e resolução de problemas disponíveis como exercícios na literatura. Os resultados mostraram que a derivada constituem uma valiosa ferramenta com aplicações nas ciências econômicas. Constatou-se que tais objetivos foram atendidos, porque efetivamente foi validado a aplicação da derivada em problemas no contexto da economia. Desta forma, o seu uso permite aos profissionais da economia determinar o custo marginal de um produto, desde que seja definida, a priori, sua função de produção. Portanto, quando utilizada para construção e/ou análise do plano empresarial, a derivada pode ser útil auxiliar as empresas em predizer os custos de produção de seu produto ou serviço.

.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. Cálculo-Volume I-10. [S.l.]: Bookman Editora, 2014.

FLEMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração. [S.l.: s.n.], 2006.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo, vol. 1 . [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2013.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O.; HAZZAN, S. Introdução ao cálculo para administração, economia e contabilidade. [S.l.]: Saraiva Educação SA, 2009.

STEWART, J. Cálculo, volume 1. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TAN, S. T. Matemática aplicada à administração e economia. 5ª ed. São Paulo: Pioneira Thomson Lerning, 2005.