

Gislaine Varão da Silva

**Alguns Resultados Acerca da Termodinâmica
de Buracos Negros no Contexto da Rainbow
Gravity**

João Pessoa

Fevereiro - 2022

Gislaine Varão da Silva

Alguns Resultados Acerca da Termodinâmica de Buracos Negros no Contexto da Rainbow Gravity

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba como requisito para a conclusão do Mestrado em Física.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Valdir Barbosa Bezerra

João Pessoa

Fevereiro - 2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586a Silva, Gislaine Varão da.

Alguns resultados acerca da termodinâmica de buracos negros no contexto da Rainbow Gravity / Gislaine Varão da Silva. - João Pessoa, 2022.

56 f. : il.

Orientação: Valdir Barbosa Bezerra.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Termodinâmica - Buracos negros. 2. Rainbow Gravity. 3. Buraco negro de Kiselev. 4. Efeito Joule-Thomson. I. Bezerra, Valdir Barbosa. II. Título.

UFPB/BC

CDU 536:524.882(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** da aluna **Gislaine Varão da Silva**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

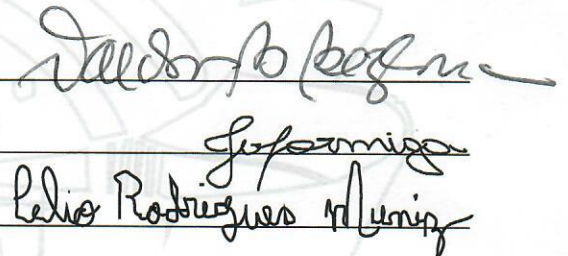
1 Aos vinte e quatro dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e dois, às 16:00,
2 reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar
3 a candidata ao grau de Mestre em Física na área de Gravitação e Cosmologia, **Gislaine**
4 **Varão da Silva**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores:
5 *Valdir Barbosa Bezerra* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Jansen*
6 *Brasileiro Formiga* (UFPB) e *Célio Rodrigues Muniz* (UECE). Dando início aos
7 trabalhos, o Prof. Valdir Barbosa Bezerra comunicou aos presentes a finalidade da
8 reunião. A seguir, passou a palavra à candidata para que a mesma fizesse, oralmente, a
9 exposição do trabalho de dissertação intitulada “*Alguns resultados acerca da*
10 *termodinâmica de buracos negros no contexto da Rainbow Gravity*”. Concluída a
11 exposição, a candidata foi argüida pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte
12 parecer: “**aprovada**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o
13 respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, Bethyanne Leite
14 Aragão, Auxiliar em Administração, redigiu a presente ata que vai assinada pelos
15 membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **24 de fevereiro de 2022**.

16

Prof. Dr. *Valdir Barbosa Bezerra*
Orientador - UFPB

Prof. Dr. *Jansen Brasileiro Formiga*
UFPB

Prof. Dr. *Célio Rodrigues Muniz*
UECE



17 Link da defesa: <https://meet.google.com/pbx-wfm-x-szw>

Agradecimentos

Agradeço ao professor Valdir Barbosa Bezerra, pela orientação, pela paciência e por ser meu modelo de excelência acadêmica.

Agradeço a João Paulo Morais Graça, que compartilha a orientação deste trabalho, pelas discussões, pela dedicação e pela amizade.

Aos meus colaboradores de estudo durante toda a quarentena, Pedro Henrique Morais e Juliana Maria da Silva.

Para concluir, agradeço aos aportes no desenvolvimento deste trabalho de Artur Pinheiro, Iarley Lobo e Thiago Nascimento.

Resumo

Nesta dissertação apresentaremos questões ligadas à termodinâmica de buracos negros no contexto da teoria modificada da gravitação chamada Rainbow Gravity. Analisaremos a termodinâmica de buracos negros na métrica de Kiselev, levando em consideração diferentes fluidos cósmicos, para os casos não carregados e carregados no espaço anti-de Sitter. Particularmente, trataremos dos remanescentes de buracos negros e do efeito Joule-Thomson, este último no contexto do que é hoje conhecido como a termoquímica de buracos negros.

Palavras-chave: Rainbow Gravity, Buraco negro de Kiselev, Termodinâmica de buracos negros, Efeito Joule-Thomson.

Abstract

In this Master thesis we will discuss some questions related to the thermodynamics of black holes, in the context of a modified version of General Relativity which is termed Rainbow Gravity. Thus, we will analyse the thermodynamics of Kiselev black holes, taking into account different kind of fluids surrounding charged and uncharged black holes with cosmological constant. Particularly, we will study the existence remanescant black holes and the Joule-Thompson effect, along with an approach known nowadays as thermochemistry of black hole.

Keywords: Rainbow Gravity, Kiselev black hole, Thermodynamics of black hole, Joule-Thompson effect.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Temperatura em função da massa de um buraco negro de Schwarzschild.	28
Figura 2 – Temperatura em função da massa de um buraco negro carregado. . . .	29
Figura 3 – Transição de fase.	32
Figura 4 – Gráfico de massa pelo raio do horizonte, r_+ , considerando os fluidos cósmicos: $\omega = -1$ e $\omega = -2/3$	36
Figura 5 – Gráfico de energia por r_+ para todas as soluções da relação de dispersão modificada, para os casos $n = 1$ e $n = 4$	37
Figura 6 – Temperatura em função do raio do horizonte, sem fluidos cósmicos, em Rainbow Gravity.	39
Figura 7 – Temperatura em função do raio do horizonte para o buraco negro de Kiselev, em Relatividade Geral.	40
Figura 8 – Temperatura em função do raio do horizonte, para o buraco negro de Kiselev, $\omega = -2/3$, em Rainbow Gravity.	40
Figura 9 – Entropia em função do raio do horizonte para o buraco negro de Kiselev, em Relatividade Geral.	41
Figura 10 – Entropia em função do raio do horizonte, para o buraco negro de Kiselev, $\omega = -2/3$, em Rainbow Gravity.	42
Figura 11 – Calor específico em função do raio do horizonte para o buraco negro de Kiselev, em Relatividade Geral.	43
Figura 12 – Calor específico em função do raio do horizonte, sem nenhum fluido cósmico, em Rainbow Gravity.	43
Figura 13 – Calor específico em função do raio do horizonte, com fluido cósmico, em Rainbow Gravity.	44
Figura 14 – Curvas de inversão da temperatura para $Q = 1$, $Q = 2$, $Q = 10$ e $Q = 20$, de baixo para cima.	47
Figura 15 – Curvas da temperatura de inversão para $n = 1$, $Q = 1$ e $\alpha = 0$	48
Figura 16 – Curvas da temperatura de inversão para $n = 2$, $Q = 1$ e $\alpha = 0$	49
Figura 17 – Curvas da temperatura de inversão para $n = 4$, $Q = 1$ e $\alpha = 0$	49
Figura 18 – Curvas de inversão da temperatura para $Q = 2$, $\eta = 1$, $\alpha = 0$	50
Figura 19 – Curvas da temperatura de inversão para o fluido cósmico $\omega = -4/3$	51
Figura 20 – Curvas da temperatura de inversão para o fluido cósmico $\omega = -1/6$	52
Figura 21 – As curvas fechadas são isentálpicas para o valor de massa indicado, enquanto a curva aberta é a curva de inversão de temperatura em $\omega = -4/3$	52

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	RAINBOW GRAVITY: UMA BREVE INTRODUÇÃO	17
2.1	Double Special Relativity	17
2.2	Rainbow Gravity	20
2.2.1	Aplicação: Buracos Negros	21
2.2.2	Aplicação: Limite Assintótico	23
3	TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS	25
3.1	Leis da Termodinâmica	25
3.1.1	Aplicação: Entropia e Calor Específico	27
3.1.1.1	Buraco negro de Schwarzschild	27
3.1.1.2	Buraco negro de Schwarzschild em Rainbow Gravity	27
3.1.2	Aplicação: Buraco Negro Remanescente	28
3.2	Termoquímica de Buracos Negros	30
3.2.1	Expansão Joule-Thomson	32
4	BURACOS NEGROS REMANESCENTES	35
4.1	Método	35
4.2	Relação de dispersão modificada	37
4.3	Temperatura, entropia e calor específico	38
5	EXPANSÃO DE JOULE-THOMSON	45
5.1	Método	45
5.2	Temperatura de Inversão	46
5.2.1	A temperatura de inversão em Relatividade Geral	46
5.2.2	A temperatura de inversão em Rainbow Gravity	47
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	53
	REFERÊNCIAS	57
	APÊNDICES	61
	APÊNDICE A – BURACO NEGRO DE KISELEV EM RAINBOW GRAVITY	63

1 Introdução

A teoria da Relatividade Geral (TRG) foi proposta há mais de cem anos, e desde então, tem-se mostrado uma teoria sólida, consistente, tendo passado pelas várias observações feitas, desde o desvio da luz observado no eclipse solar de 1919 até as observações feitas recentemente pelo Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory (LIGO), e pelo Variability of Solar Irradiance and Gravity Oscillations (Virgo), que detectaram ondas gravitacionais em eventos envolvendo buracos negros [1]. No entanto, existem questões que permanecem em aberto que esta teoria não foi capaz de responder, gerando indicações sobre a necessidade de modificá-la, como, por exemplo, a expansão acelerada do Universo [2, 3], e a possível existência das componentes escuras de matéria e energia [4], sugeridas pelas observações feitas até o momento [5, 6]. Por outro lado, do ponto de vista teórico, existe a questão relacionada ao fato de que a teoria não é renormalizável. Para contornar este problema existem várias linhas de pesquisa, a mais natural, assim entendemos, modifica a TRG, de modo a preservar as previsões originais desta teoria, bem como as observações feitas até o momento. Dentre as várias propostas nesta direção, vamos focalizar esta dissertação na chamada Rainbow Gravity [7], que considera que espaço-tempo não é mais representado por uma única geometria, mas por um conjunto de geometrias, a depender da razão entre a energia do corpo que gravita e a energia de Planck, sendo uma consequência da introdução de uma escala adicional ao formalismo, além da já estabelecida escala associada à velocidade da luz no vácuo. Portanto, no contexto da Rainbow Gravity, as propriedades e características do espaço-tempo dependem da energia do corpo que gravita, e de tal modo que para energias muito menores do que a de Planck, elas coincidem com as obtidas na TRG.

A proposta de tornar o comprimento de Planck uma constante universal é uma linha de pesquisa atual, com implicação direta sobre a bem consolidada teoria da Relatividade Especial (TRE) apresentada por Einstein em 1905, alicerçada em dois postulados: as leis da física são as mesmas para qualquer referencial inercial, e a velocidade da luz é um invariante. Em 2000, Amelino-Camelia [8], baseando-se em anomalias observadas na relação de dispersão da energia pelos raios cósmicos ultra-energéticos, propôs uma modificação na teoria da Relatividade Especial (TRE), através da introdução de uma nova escala, a energia de Planck ou, de modo equivalente, o comprimento de Planck, à qual chamou Double Special Relativity (DSR), uma extensão da TRE que incorporar novas evidências teóricas e observacionais [9], e possui duas escalas invariantes, a velocidade da luz e o comprimento de Planck. Nesta extensão, a transformação entre dois observadores não será dada pelas transformações de Lorentz usuais, mas por uma versão não linear.

Uma maneira de generalizar a DSR para referenciais não inerciais foi proposta em

2003 por Magueijo e Smolin, denominada Rainbow Gravity [7]. Esta proposta deforma a métrica do espaço-tempo e resolve algumas divergências. A deformação exibe um tratamento diferente entre espaço e tempo no limite do ultravioleta (UV), próximo à escala de Planck, dependendo da energia da partícula que testa o espaço-tempo, enquanto no limite de baixa energia recupera-se a forma padrão da métrica na teoria da Relatividade Geral.

É sabido que quantização da gravidade é um problema em aberto, em que várias ideias concorrem com as diferentes propostas relacionadas à construção de uma possível teoria Quântica da Gravitação, desde meados de 1930 [10]. Entre os problemas destas propostas, os possíveis testes para sua comprovação é uma área bastante ativa. Aspectos fenomenológicos têm sido explorados para o falseamento de algumas dessas ideias.

Há 50 anos, o estudo sobre a termodinâmica de buracos negros é considerado como uma forma de aplicação destas possíveis teorias. Os primeiros trabalhos no assunto, como o de Bekenstein [11] e de Hawking [12], sobre termodinâmica de buracos negros com conexões fundamentais entre a termodinâmica clássica, relatividade geral e mecânica quântica, surgem nos anos de 1972 e 1973, respectivamente.

Uma literatura robusta sobre termodinâmica de buracos negros em diferentes contextos foi desenvolvida ao longo do tempo. Tendo destaque o trabalho de Kastor, Ray e Traschen [13] em 2009, que propuseram uma pressão mecânica proporcional à constante cosmológica para buracos negros no espaço de anti-De Sitter, que geraria uma modificação na interpretação de sua massa, antes análoga à energia interna e passando a ser análoga à entalpia. Em 2013, Kubiznak e Mann usaram a ideia de pressão mecânica para estudar transições de fase em buracos Negros [14], e em 2018, Okcu [15] apresenta estudos sobre a expansão de Joule-Thomson.

Nesta dissertação, estudamos espaços-tempos correspondentes a buracos negros estáticos, carregados ou não, na teoria da Relatividade Geral e em Rainbow Gravity, com quintessência, abordando suas propriedades e seu comportamento termodinâmico. A divisão deste trabalho ocorre em três partes. Na primeira parte, capítulo 2, apresentamos de forma breve os aspectos fundamentais da modificação da relatividade proposta pela Rainbow Gravity. Na segunda parte, capítulo 3, apresentamos as relações entre propriedades geométricas do horizonte de eventos e as quantidades termodinâmicas. Na terceira parte, que corresponde aos capítulos 4 e 5, mostraremos uma análise sobre remanescentes de buracos negros, com quintessência, no contexto da Rainbow Gravity. Em seguida, apresentamos outro processo termodinâmico, a expansão de Joule-Thomson (JT).

2 Rainbow Gravity: Uma Breve Introdução

Para a ambiciosa tentativa de criar uma teoria quântica relativa à interação gravitacional, várias propostas foram apresentadas após anos de pesquisa, algumas delas tornando-se obsoletas [16]. Podemos distinguir três grandes linhas de pesquisa: a proposta da física de partículas que estabelece como partícula elementar o gráviton, correspondente ao ‘quantum’ do campo gravitacional [17]; a proposta de superestruturas, uma abordagem motivada pela teoria não renormalizável das interações fracas para a nova unificação renormalizável das forças fracas e eletromagnéticas introduzida por Salam, Glashow e Weinberg [18, 19, 20]; e a proposta de Gravidade Quântica Canônica que começa com a teoria de Wheeler-DeWitt [21].

Todavia, sabe-se que qualquer teoria quântica da gravidade deverá reproduzir os sucessos da TRG. Isso envolve a reconstrução da geometria local a partir dos observáveis não locais. Além disso, a gravidade quântica deverá prever os fenômenos na escala de Planck [22].

A escala de Planck apresenta as quantidades presentes na TRE, na mecânica quântica e na gravitação Newtoniana, ou seja, a velocidade da luz (c), a contante de Planck (h) e a constante de Newton (G). O comprimento de Planck (l_p) é definido como

$$l_p = \sqrt{\frac{hG}{2\pi c^3}}. \quad (2.1)$$

A energia de Planck (E_p) é definida como

$$E_p = \sqrt{\frac{hc^5}{2\pi G}}. \quad (2.2)$$

Para a escala de energia de Planck, atualmente, são propostos vários testes baseados nas possibilidades de detectar desvios muito pequenos em sistemas de simetrias exatas, e estender para longas distâncias ou tempos para observar efeitos coletivos muito pequenos. Algumas destes testes são usados para a construção do que é chamado fenomenologia da gravitação quântica. Neste capítulo apresentamos os aspectos básicos de uma teoria modificada na escala de Planck.

2.1 Double Special Relativity

A fenomenologia dos eventos que possam estar associados ao cenário quântico concentra parte de seus esforços em pesquisar possíveis sinais de violação da simetria de Lorentz na escala de Planck, atribuindo importância a ideia de que os novos efeitos

conjecturados podem se manifestar no regime de baixas energias, ou melhor, nas energias acessíveis aos detectores atuais, que estão muito abaixo da escala de Planck. Na forma de correções ultravioleta, essas correções são apresentadas em termos de potências de energia no numerador e potências da escala de Planck no denominador [23].

Dentre os possíveis efeitos que podem sinalizar desvios da simetria de Lorentz, o interesse tem se voltado predominantemente para o estudo da forma da relação energia-momento (relação de dispersão). Na teoria da Relatividade Especial (TRE), esta relação é dada por

$$E^2 = p^2 + m^2, \quad (2.3)$$

podendo ser modificada para energias próximas às da escala de Planck. A robustez dos dados observacionais associados aos eventos que poderão ter relação com fenômenos quânticos da gravitação, como as anomalias observadas nos raios cósmicos ultra energéticos [24], permite que sejam feitas análises muito precisas dos sinais de gravitação quântica desses fenômenos [25].

Conforme apontado por Amelino-Camelia e Piran [26], essas anomalias podem ser explicadas por modificações na relação de dispersão na forma

$$E^2 = p^2 + m^2 + \lambda E^3 \dots, \quad (2.4)$$

onde λ é da ordem do comprimento de Planck¹. Esta relação de dispersão modificada não é invariante por transformação de Lorentz.

A teoria da Relatividade Especial, apresentada por Einstein em 1905, possui dois postulados. O primeiro postulado diz que as leis da física são as mesmas para qualquer referencial inercial, e o segundo postulado diz que a velocidade da luz é invariante para qualquer referencial inercial. Porém, em 2002, Amelino-Camelia [27] apresenta a Double Special Relativity (DSR I), uma proposta que incorpora outro invariante ao segundo postulado, o comprimento de Planck (2.1), sendo fisicamente relevante apenas para energias próximas à escala de energia de Planck. De forma independente, Magueijo e Smolin propuseram deformar a álgebra de Poincaré na escala de energia, chamada DSR II [28].

Neste trabalho nos restringimos a DSR II. De modo que, no limite $E/E_P \rightarrow 0$ a velocidade de um fóton ou partícula sem massa tende para a constante universal, c , que é a mesma para todos os observadores inerciais, de acordo com a TRE. A energia de Planck, E_P , neste novo cenário, também é uma constante universal e é a mesma para todos os observadores inerciais, o que significa dizer que, observadores com a energia de Planck, atribuirão os mesmos comprimentos a um determinado objeto, não havendo, portanto, o

¹ Consideramos,

$$\lambda = \alpha l_p$$

onde α é uma constante adimensional.

fenômeno da contração dos comprimentos que ocorre a baixas energias, isto é, para energias muito menores do que a energia de Planck. Teremos, então, duas escalas invariantes, a energia de Planck ou comprimento de Planck, E_P e a velocidade da luz no vácuo, c .

No cenário da DSR, a transformação de Lorentz é não linear no espaço dos momentos, implicando em uma simetria de Lorentz deformada, de tal forma que as relações de dispersão usuais na TRE podem ser modificadas por correções de escala de Planck [28]. Isso pode ser realizado pela ação de um mapeamento não linear do espaço de momentos para ele mesmo, denotado como $U : P \rightarrow P$, e dado por

$$U(E, p_i) = (U_0, U_i) = \left(f\left(\frac{E}{E_P}\right) E, g\left(\frac{E}{E_P}\right) p_i \right). \quad (2.5)$$

Isso implica que o espaço de momento tem uma norma não-linear,

$$|p|^2 = \eta^{ab} U_a(p) U_b(p). \quad (2.6)$$

Esta norma é preservada por uma realização não linear do grupo Lorentz, dada por

$$\bar{L}_b^a = U^{-1} L_b^a U. \quad (2.7)$$

Contudo, podemos construir uma estrutura ortonormal dependente da energia localmente, de modo que a energia pode ser incorporada na métrica, h , através da definição

$$h(E/E_P) = \eta^{ab} e_a(E/E_P) \otimes e_b(E/E_P), \quad (2.8)$$

onde o princípio da correspondência modificado é estabelecido explicitamente para a base ortonormal (e_0 e e_i) em termos da antiga base ($\bar{e}_0$ e $\bar{e}_i$), de modo que

$$e_0(E/E_P) = \frac{1}{f(E/E_P)} \bar{e}_0 \quad (2.9)$$

e

$$e_i(E/E_P) = \frac{1}{g(E/E_P)} \bar{e}_i. \quad (2.10)$$

A relação dispersão de energia passa a ser dada por

$$E^2 f(E/E_P)^2 - p^2 g(E/E_P)^2 = m^2, \quad (2.11)$$

onde $f(E/E_P)$ e $g(E/E_P)$ são funções dependentes de energia, ou seja, incorporam as modificações fenomenológicas e são as chamadas de funções rainbow. Elas devem satisfazer às seguintes condições, no limite de baixas energias:

$$\lim_{E \rightarrow 0} f(E/E_P) = 1,$$

$$\lim_{E \rightarrow 0} g(E/E_P) = 1.$$

Os elementos que levam à DSR não dependem de nenhum aspecto particular de uma teoria quântica da gravidade e, na verdade, esta baseia-se, apenas, na ideia de introduzir uma escala invariante adicional, a do comprimento de Planck, ao cenário descrito pela TRE. Devido à simplicidade de sua construção, a imagem do espaço-tempo resultante da DSR é, de certa forma, ainda uma questão em aberto. Enfatizamos que a violação da invariância de Lorentz [29] e a deformação da invariância de Lorentz são, em geral, cenários conceitualmente diferentes [30].

2.2 Rainbow Gravity

Na seção anterior apresentamos uma teoria de relação de dispersão modificada no espaço-tempo plano. A proposta da Double Special Relativity pode ser estendida para o espaço-tempo curvo, e desta forma, modificar a teoria da Relatividade Geral, construindo-se assim, a denominada Rainbow Gravity, proposta por Magueijo e Smolin em 2004 [31], e baseia-se em dois princípios:

1. O **princípio da correspondência modificado** estabelece que no limite de baixas energias em relação à energia de Planck a TRG é válida,

$$\frac{E}{E_P} \ll 1. \quad (2.12)$$

2. O **princípio da equivalência modificado** estabelece que um observador em queda livre usará as mesmas leis físicas que na Double Special Relativity (DSR).

Como no caso do espaço-tempo plano, devemos fazer a correspondência com cada parâmetro da métrica em termos de bases ortonormais dependentes da energia. Deste modo temos uma versão modificada das equações de Einstein, dada por

$$G_{\mu\nu}(E/E_p) + \Lambda(E/E_p)g_{\mu\nu}(E/E_p) = 8\pi G_N(E/E_p)T_{\mu\nu}(E/E_p) \quad (2.13)$$

onde $G_N(E/E_p)$ é a constante de Newton e $\Lambda(E/E_p)$ é a constante cosmológica.

A dependência em relação ao quociente entre a energia do corpo que gravita e a energia de Planck da quantidade $G_N(E/E_p)$ reflete a expectativa de que o acoplamento gravitacional efetivo dependerá da escala de energia.

Como na TRG, as equações de campo (2.13) devem satisfazer uma série de condições de consistência, chamadas identidades de Bianchi. Esta identidade nos garante que

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.14)$$

Considere uma solução geral para uma métrica esfericamente simétrica. A modificação fica

$$ds^2 = \frac{N(r)}{f^2(E/E_p)} dt^2 - \frac{1}{g^2(E/E_p)N(r)} dr^2 - \frac{r^2}{g^2(E/E_p)} d\Omega^2, \quad (2.15)$$

onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido, e as funções que aparecem nos coeficientes métricos, $f(E/E_p)$ e $g(E/E_p)$, são denominadas funções rainbow, cujas expressões são fixadas levando-se em conta diferentes motivações fenomenológicas [32, 23]. Com base nos espectros de raios gama em distâncias cosmológicas, podemos utilizar as funções rainbow

$$f(E/E_p) = (e^{\alpha E/E_p} - 1)(\alpha E/E_p)^{-1}, \quad g(E/E_p) = 1. \quad (2.16)$$

Também é possível escolher essas funções a partir de motivações vindas da Loop Quantum Gravity (LQG) e da geometria não-comutativa, como seguem

$$f(E/E_p) = 1, \quad g(E/E_p) = \sqrt{1 - \eta(E/E_p)^n}. \quad (2.17)$$

A propriedade principal de todas essas funções rainbow é que elas tornam a métrica do espaço-tempo dependente da energia da partícula de prova, sendo o que necessitamos para nossa análise.

2.2.1 Aplicação: Buracos Negros

Usando as funções rainbow dadas por (2.17), vamos trabalhar o exemplo da métrica do buraco negro de Schwarzschild e verificar o comportamento de uma partícula de prova sob a influência das correções (deformações) da teoria Geral da relatividade [33].

Considere o espaço-tempo de Schwarzschild, dado por (2.15), em que $N(r)$ é dada por

$$N(r) = 1 - \frac{2MG}{r}. \quad (2.18)$$

Para encontrar as geodésicas, utilizamos o princípio variacional, e para isto, precisamos exibir a densidade Lagrangiana [34]. Considere o elemento de linha

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Para um parâmetro afim τ , obtemos:

$$2\mathcal{L} = g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}.$$

Deste modo, a lagrangiana para a métrica do espaço-tempo de Schwarzschild modificado fica

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{f^2(E/E_p)} \left(1 - \frac{2MG}{r} \right) \dot{t}^2 - \frac{1}{g^2(E/E_p)} \left(1 - \frac{2MG}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{r^2}{g^2(E/E_p)} \dot{\Omega}^2 \right]. \quad (2.19)$$

Como $\mathcal{L}$ não depende de (θ, ϕ) , os momentos conjugados correspondentes são conservados (faremos o cálculo no plano $\theta = \pi/2$). Deste modo,

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \frac{1}{f^2(E/E_p)} \left(1 - \frac{2MG}{r} \right) \dot{t} = E, \quad (2.20)$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = -\frac{r^2 \sin^2 \theta}{g^2(E/E_p)} \dot{\phi} = -L, \quad (2.21)$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{g^2(E/E_p)} \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} \dot{r}. \quad (2.22)$$

Usando as redefinições listadas na sequência

- $\bar{\tau} = g(E/E_p)\tau$,
- $\bar{E} = f(E/E_p)E$,
- $\bar{L} = g(E/E_p)L$,
- $\dot{\bar{r}} = dr/d\bar{\tau}$,

temos

$$-2\mathcal{L} = -m = -\frac{\bar{E}^2}{N(r)} + \frac{\dot{\bar{r}}^2}{N(r)} + \frac{\bar{L}}{r^2}.$$

Por normalização,

$$m = \begin{cases} 1, & \text{para partículas com massas (geodésicas tipo-tempo)} \\ 0, & \text{para partículas sem massa (geodésicas nulas).} \end{cases}$$

Desta forma, a equação de movimento resulta em

$$\dot{\bar{r}}^2 = \bar{E}^2 - \mathcal{V}_G(r; m, \bar{L}). \quad (2.23)$$

onde $\mathcal{V}_G(r; m, \bar{L})$ é uma generalização do potencial efetivo.

Para encontrar as geodésicas nulas-radiais, vamos nos concentrar no caso onde $\mathcal{V}_G(r; 0, \bar{L}) = \mathcal{V}_G(r; \bar{L}) = 0$, ou seja, para um fóton que descreve uma geodésica radial. Deste modo, $\dot{\bar{r}}^2 = \bar{E}^2$, temos os seguintes resultados

$$\dot{\bar{r}} = \bar{E} = \frac{dr}{d\bar{\tau}} = \frac{dr}{d(g(E/E_p)\tau)}, \quad (2.24)$$

$$Ef(E/E_p) = \frac{1}{g(E/E_p)} \frac{dr}{d\tau} \quad (2.25)$$

$$\frac{dr/E}{g(E/E_p)f(E/E_p)} = d\tau. \quad (2.26)$$

Portanto, o tempo-próprio é reescalonado como

$$\Delta\tau = \frac{(\Delta r/E)}{g(E/E_p)f(E/E_p)} = \frac{\Delta\tau_{Sch}}{g(E/E_p)f(E/E_p)}. \quad (2.27)$$

Obtemos assim uma nova expressão para a coordenada de tempo, t , de modo que

$$dt = \frac{g(E/E_P)}{f(E/E_P)N(r)} dr, \quad (2.28)$$

$$dt = \frac{g(E/E_P)}{f(E/E_P)} \Delta t_{Sch}.$$

Onde Δt_{Sch} é o tempo próprio de Schwarzschild. Para as partículas afastando-se do buraco negro, temos

$$t = \frac{f(E/E_P)}{g(E/E_P)} \left[r + 2m \ln \left| 1 - \frac{r}{2M} \right| \right], \quad (2.29)$$

e, para as que se aproximam, temos

$$t = -\frac{f(E/E_P)}{g(E/E_P)} \left[r + 2m \ln \left| 1 - \frac{r}{2M} \right| \right]. \quad (2.30)$$

2.2.2 Aplicação: Limite Assintótico

O comportamento assintótico do espaço-tempo é uma maneira de avaliar as quantidades ‘infinitamente distantes’ em direções nulas e espaciais. Para poder conceituar o comportamento assintótico de espaço-tempo na DSR, precisamos ser capazes de identificar o comportamento do espaço-tempo plano na DSR, neste regime. Para isto, devemos estender as ideias de geodésicas tipo-espaço, $\mathcal{I}$, e geodésicas tipo-tempo, ι_0 , na DSR, procedendo de maneira semelhante às demonstrações para o espaço-tempo de Minkowski [35, 36, 37].

Considere as componentes da métrica do espaço-tempo DSR plano (que chamaremos espaço-tempo deformado de Minkowski) dado pela métrica (2.15) em que $ds^2 = d\Omega^2 = 0$ e $N(r) = 1$, de modo que

$$\frac{1}{f^2(E/E_P)} dt^2 - \frac{1}{g^2(E/E_P)} dr^2 = 0. \quad (2.31)$$

Podemos identificar a velocidade da luz como

$$c = \frac{dr}{dt} = \frac{g(E/E_P)}{f(E/E_P)}. \quad (2.32)$$

Com isso, podemos construir coordenadas nulas (dependentes de energia) dadas por

$$v = t + \frac{f(E/E_P)}{g(E/E_P)} r, \quad (2.33)$$

$$u = t - \frac{f(E/E_P)}{g(E/E_P)} r. \quad (2.34)$$

Reescrevendo a métrica para essas novas coordenadas (u, v) , temos

$$ds^2 = \frac{1}{f^2(E/E_P)} \left[-dudv + \frac{1}{4}(u-v)^2 d\Omega^2 \right]. \quad (2.35)$$

Observe que a única diferença entre esta métrica e a métrica do espaço-tempo de Minkowski em coordenadas nulas é um fator $1/f^2(E/E_p)$, o que nos permite realizar um mapeamento conforme deste espaço-tempo em uma restrição do universo estático de Einstein usando um fator conforme

$$\Theta^2 = \frac{4}{f^2(E/E_p)(1+v(E/E_p)^2)(1+u(E/E_p)^2)}, \quad (2.36)$$

de modo que a nova métrica $\bar{g}_{ab}$ está relacionado com a antiga por:

$$\bar{g}_{ab} = \Theta^2 g_{ab}. \quad (2.37)$$

As únicas restrições decorrentes são que

$$\frac{f(E/E_p)}{g(E/E_p)} \neq 0, \quad (2.38)$$

$$f(E/E_p) \neq 0. \quad (2.39)$$

As duas restrições são finitas, de modo que o fator conforme Θ^2 é bem definido para todos os valores de E . Este mapeamento fica evidente pela escolha de novas coordenadas de

$$R(E/E_p) = \text{tg}^{-1}v(E/E_p) - \text{tg}^{-1}u(E/E_p), \quad (2.40)$$

$$T(E/E_p) = \text{tg}^{-1}v(E/E_p) + \text{tg}^{-1}u(E/E_p), \quad (2.41)$$

cujos intervalos correspondem a

- $-\pi < T(E/E_p) + R(E/E_p) < \pi$,
- $-\pi < T(E/E_p) - R(E/E_p) < \pi$
- $0 \leq R$.

Assim chegamos à nova métrica

$$ds^2 = dT^2 - dR^2 - \text{sen}^2(R)d\Omega^2. \quad (2.42)$$

Agora, vamos estender o espaço-tempo original até a fronteira do espaço-tempo para produzir uma identificação do ‘infinito’ do espaço-tempo deformado de Minkowski da seguinte forma:

- **Future Null infinity** $\mathcal{I}^+$: $T(E/E_p) = \pi - R(E/E_p)$ para $0 < R < \pi$,
- **Past Null infinity** $\mathcal{I}^-$: $T(E/E_p) = -\pi + R(E/E_p)$ para $0 < R < \pi$
- **Spatial infinity** (ι_0) : $R(E/E_p) = \pi$ e $T(E/E_p) = 0$.

Portanto, agora temos uma identificação da infinidade conforme do espaço-tempo deformado de Minkowski com duas restrições razoavelmente físicas dadas pelas equações (2.38) e (2.39).

3 termodinâmica de Buracos Negros

Do fascínio sobre buracos negros vieram algumas perguntas que norteiam este capítulo. O próprio Einstein era receoso sobre buracos negros, cuja solução matemática foi apresentada no ano posterior aos seus trabalhos sobre a teoria Geral da relatividade. Por volta de 1960, novos estudos sobre buracos negros ganharam notoriedade, como a solução de Kerr para buracos negros em rotação, descoberta em 1963. Em seguida, foi estimado que existe uma energia gravitacional que pode ser extraída de buracos negros. Em 1965 veio a descrição matemática de buracos negros e o estabelecimento dos teoremas relacionados, devido a Penrose¹, e em 1967 surge o teorema conhecido como “*no-hair theorem*”, que diz que um buraco negro é descrito apenas por sua massa (M), sua carga (Q) e seu momento angular (J). Nos anos seguintes vieram os trabalhos em termodinâmica de buracos negros que fazem analogia da área do horizonte com a entropia e, por último, Hawking publicou trabalhos sobre evaporação dos buracos negros [38]. Apresentaremos algumas noções do que chamamos termodinâmica de buracos negros.

3.1 Leis da Termodinâmica

A teoria Geral da Relatividade descreve a interação gravitacional, associando-a à curvatura do espaço-tempo, de modo que o valor desta está diretamente ligado à intensidade da interação. O valor máximo da curvatura ocorre em um buraco negro, no centro do qual a curvatura se torna infinita no que chamamos singularidade. Um buraco negro pode ser descrito por três parâmetros derivados do princípio de conservação: a carga, a massa e o momento angular. Esta propriedade é conhecida como “*no-hair theorem*”.

Em termodinâmica clássica, através de parâmetros macroscópicos, é possível descrever sistemas com muitas partículas [39]. Em termodinâmica de buracos negros os parâmetros são:

- Massa irreduzível (M) e a área (A);
- Carga (Q) e potencial elétrico (Φ);
- Momento angular (J) e velocidade angular (Ω).

Por analogia, tomando como exemplo a métrica de um buraco negro com simetria esférica,

$$ds^2 = N(r)dt^2 - \frac{1}{N(r)}dr^2 - r^2d\Omega^2. \quad (3.1)$$

¹ Premiado com Nobel de 2020 em decorrência desse trabalho.

No limite em que $N(r)$ vai a zero, definimos o valor do raio do horizonte, que deve ser o maior valor para o raio, que será denotado, r_+ . A força (por unidade de massa) necessária para manter uma partícula o mais próxima possível do horizonte de eventos é chamada **gravidade de superfície** (κ). Ela é definida por:

$$\kappa = \lim_{r \rightarrow r_+} \sqrt{-\frac{1}{4}g^{rr}g^{tt} \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right)^2}. \quad (3.2)$$

A temperatura (T_H) do buraco negro está relacionada à gravidade de superfície, sendo definida como:

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (3.3)$$

A diferencial da massa de um buraco negro carregado, com rotação, é dada por²

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Phi dQ + \Omega_h dL. \quad (3.4)$$

Temos a **primeira lei da termodinâmica**. Observe que não apresentamos um análogo à pressão. A entropia, dada por $S = A/4G$ [12], também poderá ser obtida como

$$dS = \int \frac{dM}{T_H}. \quad (3.5)$$

Deste modo, para casos futuros em que modificações na TRG alterem o valor da gravidade de superfície (κ), a entropia terá seu valor corrigido.

A **segunda lei** estabelece que a área do horizonte de eventos de um buraco negro nunca decresce, ou seja,

$$\delta A_h \geq 0. \quad (3.6)$$

A **terceira lei da termodinâmica** não possui um postulado rigoroso. No entanto, se considera que, caso a gravidade de superfície seja zero, teremos uma singularidade nua. Ou seja, sob nenhum processo podemos reduzir a gravidade de superfície de um buraco negro a zero.

Em termodinâmica clássica, a **lei zero** estabelece equilíbrio da energia de um sistema. Em buracos negros, se espera que se estabeleça um equilíbrio entre os parâmetros termodinâmicos. Uma vez que se mantenham em uma configuração estacionária, a gravidade de superfície será constante em todo o horizonte de eventos. As quatro leis estão resumidas na Tabela 1.

² Obtida através de

$$dM = \left(\frac{\partial M}{\partial A} \right) dA + \left(\frac{\partial M}{\partial Q} \right) dQ + \left(\frac{\partial M}{\partial L} \right) dL,$$

Em que,

$$\left(\frac{\partial M}{\partial A} \right) dA = \left(\frac{\partial M}{\partial A} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial S} \right) dS = \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right) dS = T dS$$

Tabela 1 – Leis da termodinâmica de Buracos Negros.

Lei	Termodinâmica Clássica	Termodinâmica Buracos Negros
Zero	$T = \text{Constante}$	$\kappa = \text{Constante}$ (Horizonte)
Primeira	$dU = TdS - PdV + \mu dN$	$dM = \frac{k}{8\pi}dA + \Phi dQ + \Omega dJ$
Segunda	$\delta S \geq 0$	$\delta A_h \geq 0$
Terceira	$T > 0$ Em todo o processo	$\kappa > 0$ Em todo o processo

3.1.1 Aplicação: Entropia e Calor Específico

Apresentaremos de forma ilustrativa como obter alguns parâmetros termodinâmicos. Utilizaremos a métrica de um buraco negro estático e sem carga, em razão da simplicidade.

3.1.1.1 Buraco negro de Schwarzschild

O espaço-tempo de buraco negro estático não carregado é descrito pela métrica de Schwarzschild, dada por

$$ds^2 = N(r)dt^2 - \frac{1}{N(r)}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (3.7)$$

onde $N(r) = 1 - \frac{2MG}{r}$ e $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido. O horizonte de eventos ocorre quando $N(r) = 0$, o que nos permite escrever $M = r_+/2G$. A gravidade de superfície (3.2) será dada por $\kappa = GM/r_+^2$. Logo, a temperatura Hawking (3.3) se torna

$$T_H = \frac{GM}{2\pi r_+^2} = \frac{1}{8\pi GM}. \quad (3.8)$$

Note que, quando a massa tende a zero, a temperatura tende ao infinito. Neste exemplo, a entropia (3.5) é

$$S = \frac{\pi r_+^2}{G}, \quad (3.9)$$

e o calor específico é dado por

$$C = \frac{dM}{dT_H} = -\frac{1}{8\pi GT_H^2}. \quad (3.10)$$

Em decorrência do calor específico ser negativo, o sistema termodinâmico é instável. A análise deste comportamento será relevante no capítulo 4, para um estudo sobre buracos negros remanescentes.

3.1.1.2 Buraco negro de Schwarzschild em Rainbow Gravity

Ao introduzir as correções na métrica, as quantidades termodinâmicas de buracos negros também serão modificadas em Rainbow Gravity. A gravidade de superfície é

modificada, e a temperatura será

$$T_H = \frac{g(E/E_p)}{f(E/E_p)} \bar{T}_H. \quad (3.11)$$

Onde $\bar{T}_H$ é a temperatura Hawking, dada pela equação (3.3). A entropia modificada pode ser calculada da primeira lei da termodinâmica de buracos negros (3.5),

$$S = \int \frac{1}{T_H} \frac{dM}{dT_H} dT_H = \int \frac{1}{T_H} \frac{dM}{dr_+} dr_+. \quad (3.12)$$

O calor específico modificado pode ser derivado, como

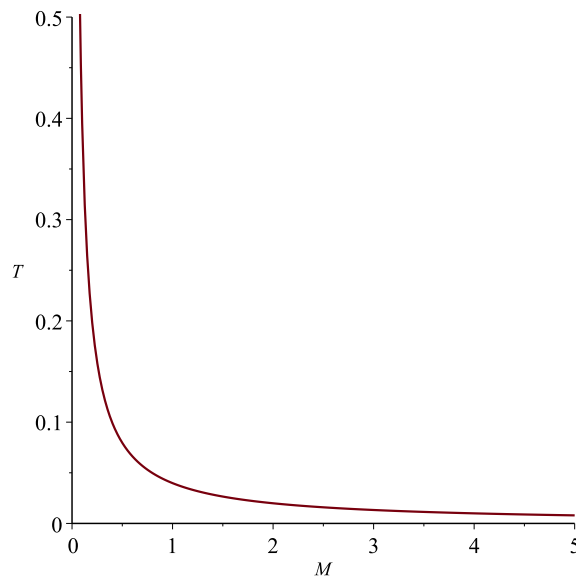
$$C = \frac{dM}{dT_H} = \frac{dM}{dr_+} \left(\frac{dT_H}{dr_+} \right)^{-1}, \quad (3.13)$$

e vários outros aspectos podem ser analisados com esta modificação.

3.1.2 Aplicação: Buraco Negro Remanescente

Apresentamos de forma breve a relação entre a temperatura e massa de um buraco negro. Utilizaremos a métrica de um buraco negro estático, não carregado e carregado. Para um buraco negro de Schwarzschild, mostramos na Figura 1 a temperatura (3.8) em função da massa. Note que, a medida que a massa diminui, a temperatura aumenta, e no limite em que a massa tende a zero, a temperatura cresce indefinidamente, gerando um comportamento catastrófico.

Figura 1 – Temperatura em função da massa de um buraco negro de Schwarzschild.



Fonte – Compilação do autor.

Agora, vamos considerar um buraco negro estático e carregado, chamado Reissner-Nordström. A função horizonte é dada por

$$N(r) = 1 - \frac{2MG}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (3.14)$$

onde Q é a carga. O raio do horizonte é calculado quando $N(r) = 0$, o que resulta em

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (3.15)$$

Teremos raízes reais não negativas apenas quando $M \geq |Q|$. O que nos leva à gravidade de superfície (3.2)

$$\kappa = \frac{(r_+^2 - Q^2)}{2r_+^3}, \quad (3.16)$$

à massa

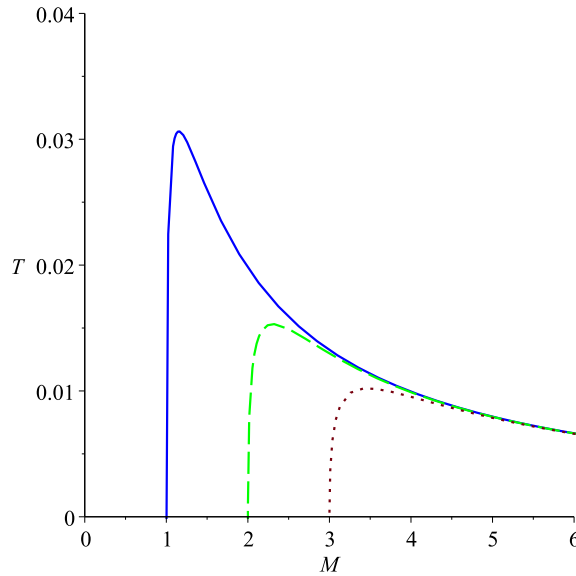
$$M = \frac{(r_+^2 + Q^2)}{2r_+}, \quad (3.17)$$

e à temperatura Hawking

$$T_H = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Mr_+ - Q^2}{r_+^3} \right). \quad (3.18)$$

Para o buraco negro carregado, temos o horizonte extremo, r_+ , e o horizonte de Cauchy, r_- . Na figura 2, os pontos em que a temperatura vai a zero, a massa e a carga possuem valores iguais, ou seja, os horizontes extremo e de Cauchy coincidem. No que diz respeito aos remanescentes de buracos negros, estes ocorrem no limite em que a massa é finita e a temperatura tende a zero.

Figura 2 – Temperatura em função da massa de um buraco negro carregado.



Fonte – Compilação do autor.

No caso de um buraco negro de Reissner-Nordström, esta é uma situação ideal, pois a perda de massa implica em perda de carga, o que não foi considerado. Isso é fácil

de ver se considerarmos que só temos um buraco negro quando temos o seu respectivo horizonte de eventos, e para ter um horizonte de eventos a massa deve ser maior que a carga, $M > Q$. Esta discussão será relevante no capítulo 4.

3.2 Termoquímica de Buracos Negros

Vimos na seção anterior que a massa (M) de um buraco negro está relacionada com a energia interna (U). No entanto, a abordagem não abrange todos os parâmetros (intensivos e extensivos) [40], sendo necessário identificar a pressão (P) e o volume (V) termodinâmico. Para isso, podemos usar as propriedades termodinâmicas de buracos negros assintoticamente Anti-de Sitter (AdS). Tomaremos como exemplo um buraco negro carregado, que será de nosso interesse nos próximos capítulos. Em particular, no caso de um buraco negro assintoticamente AdS em quatro dimensões, a constante cosmológica é identificada com a pressão através da relação

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi}, \quad (3.19)$$

sendo o volume sua variável conjugada na termodinâmica de buracos negros, dada por

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)_{S,Q} = \frac{4}{3}\pi r_+^3. \quad (3.20)$$

A primeira lei da termodinâmica, apresentada na equação (3.4), será modificada através da definição de entalpia, $H = U + PV$. A entalpia total do buraco negro é dada por³

$$dM = TdS + \Phi dQ + VdP \quad (3.21)$$

onde o potencial elétrico é $\Phi = Q/r_+$.

Em 2012, Kubiznák e Mann desenvolveram estudos sobre transições de fase no espaço-tempo do buraco negro, considerando a constante cosmológica negativa proporcional à pressão. Esta transição apresenta um comportamento crítico clássico e é análogo à transição de fase líquido-gás semelhante ao descrito pela equação de Van der Waals [14].

Sabemos que a equação de Van der Waals é uma generalização da equação para um gás ideal, usada para descrever o comportamento líquido-gás da transição de fase para fluidos reais [41]. Isto acontece devido ao tamanho das moléculas e da atração entre elas. Ela é definida por

$$P = \frac{k_B T}{v - b} - \frac{a}{v^2}, \quad (3.22)$$

³ A temperatura Hawking em Relatividade Geral poderá ser encontrada por:

$$T_H = \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_{P,Q} = \left(\frac{\partial M}{\partial r_+} \right) \left(\frac{\partial r_+}{\partial S} \right)_{P,Q}.$$

No contexto da Rainbow Gravity deve-se considerar as correções na gravidade de superfície.

onde $v = V/N$, P , T e k_B são respectivamente o volume específico (razão entre o volume e o número de moléculas), pressão, temperatura e a constante de Boltzmann. Sendo a e b constantes determinadas experimentalmente, em que se considera a medida da atração entre as partículas quando $a > 0$, e a medida do volume molecular quando $b > 0$. Podemos expandir a pressão para uma equação cúbica em função de v ,

$$Pv^3 - (k_B T + bP)v^2 + av - ab = 0. \quad (3.23)$$

Os pontos críticos para pressão, temperatura e raio são obtidos quando

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right) = 0. \quad (3.24)$$

De maneira equivalente, podemos ilustrar a transição de fase tomando como exemplo um buraco negro carregado AdS no espaço de fase estendido. Considerando a função do horizonte

$$N(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}, \quad (3.25)$$

onde Q é a carga, r^2/l^2 é o termo da constante cosmológica negativa e l^2 é o raio do espaço AdS, $l^2 = -3/\Lambda$. A massa é calculada quando $N(r) = 0$, o que resulta em

$$M = \frac{r_+}{2} \left(1 + \frac{Q^2}{r_+^2} + \frac{r_+^2}{l^2}\right). \quad (3.26)$$

A temperatura será dada por

$$T = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M}{r_+^2} - \frac{Q^2}{r_+^3} + \frac{r_+}{l^2} \right), \quad (3.27)$$

e a pressão (3.19) em função da temperatura e volume, $P = P(V, T)$, resulta em

$$P = \frac{T}{2r_+} - \frac{1}{8\pi r_+^2} + \frac{Q^2}{8\pi r_+^4}, \quad (3.28)$$

onde o raio do horizonte é $r_+ = (3V/4\pi)^{1/3}$ e V é o volume termodinâmico (3.20). Na figura 3, consideramos a carga e a temperatura do buraco negro com a carga fixada em $Q = 1$. Os pontos críticos serão obtidos através das equações

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r_+}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r_+^2}\right) = 0. \quad (3.29)$$

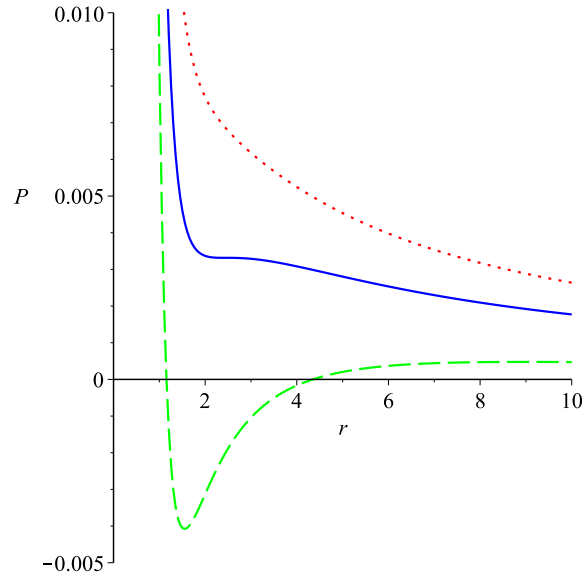
Assim obtemos a temperatura crítica, a pressão crítica e o raio crítico, respectivamente,

$$T_c = \frac{\sqrt{6}}{18\pi Q}, \quad (3.30)$$

$$P_c = \frac{1}{96\pi Q^2}, \quad (3.31)$$

$$r_c = \sqrt{6}Q. \quad (3.32)$$

Figura 3 – Transição de fase.



Fonte – Compilação do autor.

Note que, na figura 3, a linha azul corresponde à isoterma crítica $T = T_c$. Com isso a temperatura das isotérmicas diminui de cima para baixo, ou seja, a linha tracejada superior vermelha corresponde ao comportamento monofásico do “gás ideal” para $T > T_c$ e a linha tracejada inferior verde corresponde a temperaturas menores que a temperatura crítica, $T < T_c$.

Outras propriedades termodinâmicas podem ser calculadas, como as capacidades de calor à pressão e a volume constante, respectivamente, dadas por:

$$c_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P,Q} \quad (3.33)$$

$$c_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,Q} \quad (3.34)$$

3.2.1 Expansão Joule-Thomson

Ao identificarmos a entalpia, podemos estudar outros efeitos termodinâmicos em buracos negros, como a expansão de Joule-Thomson (JT). Esta expansão ocorre quando um gás em alta pressão atravessa uma região estreita que liga duas regiões de pressões opostas. Ela ocorre sempre em direção a região com pressão mais baixa, com a entalpia constante durante todo o processo. Nesta situação, temos uma mudança de temperatura em relação à pressão, descrita por

$$\mu_{jt} = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H, \quad (3.35)$$

onde chamamos μ_{jt} de *coeficiente de Joule-Thomson*. O sinal do coeficiente determina se haverá um resfriamento ou um aquecimento.

Durante a expansão, a pressão diminui e passa a ser negativa. Então, quando a mudança de temperatura for positiva, temos μ_{jt} negativo e o gás é aquecido. Do contrário, quando a mudança de temperatura for negativa, temos μ_{jt} positiva e o gás resfria.

É possível expressar a capacidade térmica a pressão constante, c_p , em termos de μ_{jt} . Da primeira lei da termodinâmica para um número constante, de partículas, N , temos

$$dU = TdS - PdV. \quad (3.36)$$

Podemos considerar a relação para a entalpia, dada por

$$H = U + PV, \quad (3.37)$$

diferenciando a equação (3.37), de modo a obtermos

$$dH = dU + VdP + PdV = (TdS - PdV) + VdP + PdV = TdS + VdP. \quad (3.38)$$

Ao considerar $dH = 0$, teremos

$$0 = TdS + VdP, \quad (3.39)$$

$$0 = T \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_H + V. \quad (3.40)$$

Como a entropia é uma função de estado, sua diferencial é dada por:

$$S = S(P, T),$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dP + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P dT.$$

Organizando a equação acima, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_H &= \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial P} \right)_H + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_H &= \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Agora, vamos substituir a equação (3.41) na equação (3.40), de modo que

$$T \left[\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H \right] + V = 0. \quad (3.42)$$

Lembrando que a equação para o calor específico a pressão constante é dada por

$$c_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P, \quad (3.43)$$

obtemos a seguinte relação,

$$T \left[\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T + \left(\frac{c_P}{T} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H \right] + V = 0. \quad (3.44)$$

Portanto, o coeficiente de Joule-Thomson pode ser reescrito como

$$\mu_{jt} = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = -\frac{1}{c_P} \left[T \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T + V \right]. \quad (3.45)$$

Das relações de Maxwell, deduzimos que

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P,$$

o que nos leva à

$$\mu_{jt} = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \frac{1}{c_P} \left[T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - V \right]. \quad (3.46)$$

A partir daqui, podemos encontrar a temperatura de inversão (T_i) quando $\mu_{jt} = 0$. Ou seja, usando as relações listadas no que se segue

$$0 = \frac{1}{c_P} \left[T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - V \right] \quad (3.47)$$

$$T_i = V \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P, \quad (3.48)$$

que será usada posteriormente para determinar as regiões de resfriamento e aquecimento no plano (T,P).

4 Buracos negros remanescentes

A formação de um buraco negro astrofísico ocorre quando uma estrela muito massiva entra em colapso devido a sua própria força gravitacional [42]. O colapso gravitacional provoca a formação de um horizonte de eventos, e isso impede que informação saia do buraco negro. Com o tempo, o buraco negro pode evaporar ao emitir uma radiação térmica, conhecida como radiação de Hawking. Isso nos leva ao paradoxo da informação em buracos negros [43, 44].

Neste cenário, com a criação de pares virtuais de partículas e a posterior emissão da radiação Hawking, pode-se estudar a evolução e o destino dos buracos negros. Ou seja, se a radiação Hawking parasse em algum ponto antes da evaporação total, o surgimento de um buraco negro remanescente poderia ajudar a resolver problemas importantes na física, como o paradoxo da informação e, talvez, fornecer uma explicação para a origem da matéria escura [45].

Neste capítulo, desenvolvemos um estudo sobre o aparecimento de remanescentes de buracos negros em Rainbow Gravity [46]. Através da termodinâmica de buracos negros de Kiselev [47], considerando diferentes fluidos cósmicos que podem imitar vários cenários de energia, vamos averiguar o limite de massa mínima para o sistema.

4.1 Método

Para este estudo, usaremos as modificações da TRG apresentada no capítulo 2 e a termodinâmica de buracos negros apresentada no capítulo 3. Escolhemos uma métrica esfericamente simétrica modificada, como em (3.1). A função horizonte é definida por

$$N(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega+1}}\right), \quad (4.1)$$

ou seja, usamos a métrica de Kiselev para uma espaço-tempo esfericamente simétrico, sem carga e sem rotação, onde α é uma constante e ω é um parâmetro relacionado à equação de estado que circunda a matéria (A). Primeiro, consideramos um buraco negro em um espaço com uma constante cosmológica (Λ), logo $\omega = -1$. Em seguida, consideramos o cenário em que $\omega = -2/3$, que corresponde a um tipo de quintessência.

A gravidade de superfície (3.2) é modificada no contexto da Rainbow Gravity, e a temperatura Hawking, dada por (3.3), passa a ser descrita por

$$T_H = \frac{g(E/E_p)}{f(E/E_p)} \bar{T}_H, \quad (4.2)$$

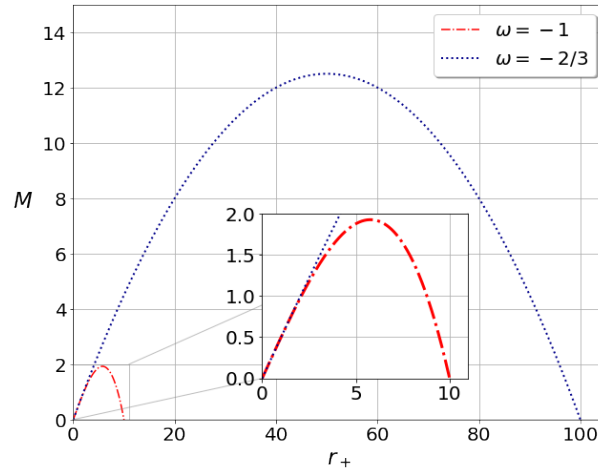
em que distinguimos $\bar{T}_H$ como a temperatura do buraco negro equivalente na TRG. Isso significa que, quando as funções rainbow (2.17) forem iguais, ou seja, $f(E/E_p) = g(E/E_p)$, a temperatura de Hawking em ambas as teorias serão a mesma.

Como vimos, a massa do buraco negro é dada pelo parâmetro M , que aparece na métrica sendo obtida quando a função do horizonte (4.1) é nula, $N(r) = 0$. Ou seja,

$$M = \frac{r_+}{2G} - \frac{\alpha}{2Gr_+^{3\omega}}. \quad (4.3)$$

A entropia pode ser calculada usando a primeira lei da termodinâmica (3.4), $dU = TdS$, considerando a massa do buraco negro como a energia interna $U(S)$. No momento, iremos desconsiderar qualquer tipo de trabalho, pois nosso objetivo é estudar o comportamento da temperatura, calor específico, entropia e diminuição da massa em função do raio do buraco negro.

Figura 4 – Gráfico de massa pelo raio do horizonte, r_+ , considerando os fluidos cósmicos: $\omega = -1$ e $\omega = -2/3$.



Fonte – MORAIS, P. H. et al. Thermodynamics and remnants of Kiselev black holes in Rainbow gravity. *General Relativity and Gravitation*, v. 54, n. 1, p. 1-17, 2022.

Antes de prosseguir com o estudo, analisaremos os horizontes em um buraco negro de Kiselev. Tais horizontes serão os mesmos tanto em relatividade geral quanto em Rainbow, já que não dependem das funções Rainbow. Como sabemos, os horizontes são dados por $N(r) = 0$. Com isso, os valores positivos para a massa dependerá de uma relação entre os parâmetros da teoria e o raio do horizonte, r_+ .

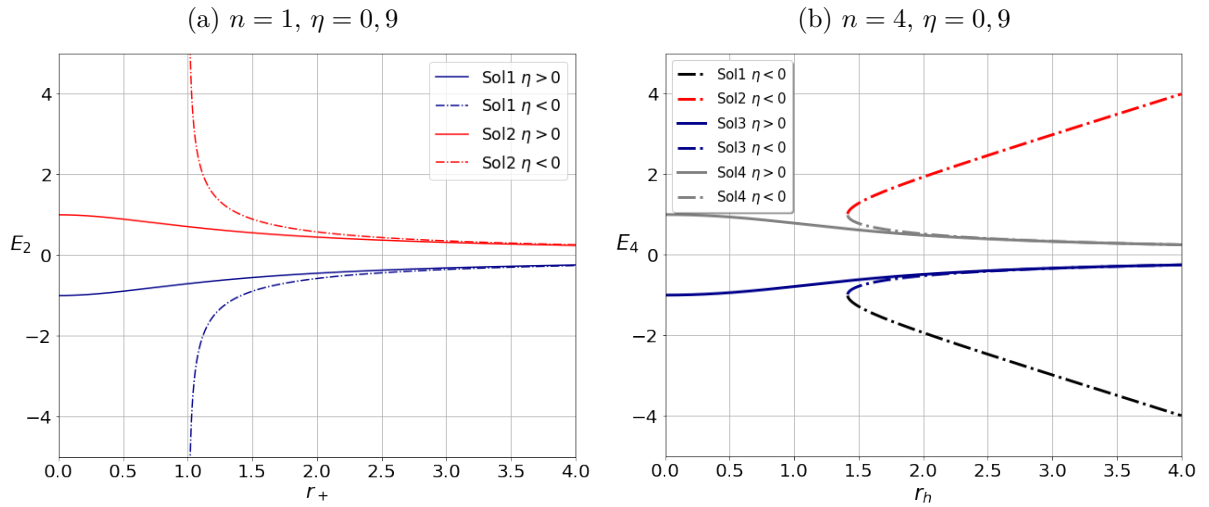
Na figura 4, representamos essa relação para alguns valores de ω , constante cosmológica e quintessência, para os valores de G e de α dados por $G = 1/E_p^2 = 1$ e $\alpha = 0.01$ e serão usados no restante da discussão [47]. Portanto, a massa possui um limite superior que corresponde ao caso em que dois horizontes coincidem: o horizonte do buraco negro e o horizonte cosmológico.

Na medida que a massa diminui, os horizontes começam a se afastar um do outro; o horizonte esquerdo é o horizonte do buraco negro, enquanto o direito é o horizonte cosmológico.

4.2 Relação de dispersão modificada

Como a temperatura Hawking deve conter apenas parâmetros do espaço-tempo, temos que relacionar a energia dos fótons aos parâmetros do buraco negro que os irradia. Faremos isso considerando que os fótons estão a uma temperatura bem definida. A energia dos fótons é dada pela relação de dispersão modificada, equação (2.11), e podemos relacionar o momento de um fóton com o raio do horizonte por meio da relação de incerteza de Heisenberg, $p = 1/r_+$, em que consideramos $\hbar = 1$. Usaremos as funções rainbow dadas pelas equações (2.17) para o desenvolvimento de nossa análise.

Figura 5 – Gráfico de energia por r_+ para todas as soluções da relação de dispersão modificada, para os casos $n = 1$ e $n = 4$.



Fonte – MORAIS, P. H. et al. Thermodynamics and remnants of Kiselev black holes in Rainbow gravity. General Relativity and Gravitation, v. 54, n. 1, p. 1-17, 2022.

Alguns trabalhos utilizam a relação de dispersão como $p = E$. O uso desta relação de dispersão levou os autores desses trabalhos a encontrar remanescente de buracos negros. Outros autores afirmaram que a Rainbow Gravity permite o surgimento de buracos negros remanescentes [48]. Porém, nosso estudo não os identificou.

Faremos algumas observações sobre a relação de dispersão modificada (MDR). A primeira é que a equação (2.11) trata de um polinômio na energia. A relação de dispersão usual é um polinômio quadrático e nos dá dois valores para a energia, um positivo e outro negativo. Para a MDR, e especialmente para $n > 2$, haverá mais de duas soluções, e precisamos verificar quais delas são fisicamente aceitáveis.

Para $n = 1$, podemos encontrar uma solução analítica

$$E_{n=1} = \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 + 4r_+^2}}{2r_+^2}, \quad (4.4)$$

onde η pode ser positivo ou negativo. Para $n = 2$, temos

$$E_{n=2} = \pm \frac{1}{\sqrt{\eta + r_+^2}}. \quad (4.5)$$

Para $n = 4$, existem quatro soluções e suas expressões são muito grandes para mostrarmos aqui. Na figura 5, traçamos as soluções para $n = 1$ e $n = 4$.

Para o caso em que $n = 1$, temos duas soluções positivas: a primeira vai para o infinito quando r_+ tende a zero, o mesmo comportamento observado para o buraco negro de Schwarzschild usual. A segunda apresenta um comportamento diferente e, quando r_+ tende a zero, a energia se aproxima de um valor finito. O mesmo acontece com $n = 2$. No caso em que $n = 4$ encontramos três soluções reais positivas, porém apenas uma é válida para todos os valores de r_+ . Além disso, há um intercâmbio de soluções para $\eta < 0$ que deve ser melhor analisado quando avaliarmos a termodinâmica de buracos negros. Observe que esta solução parece ser contínua, então pode ser considerada como uma solução real válida descrita por uma função por partes, mesmo que ela não cubra todos os valores para o raio do horizonte.

4.3 Temperatura, entropia e calor específico

Para o estudo do possível surgimento de um buraco negro remanescente, devemos calcular a temperatura, a entropia e o calor específico para a configuração escolhida. Nesta dissertação, estas grandezas serão obtidas com o uso das seguintes relações

$$T_H = \frac{r_+^{-3\omega-2} |3\alpha\omega + r_+^{3\omega+1}|}{4\pi} \sqrt{1 - \eta \left(\frac{E}{E_p} \right)^n}, \quad (4.6)$$

$$S = \int \frac{1}{T} \frac{dM}{dT} dT = \int \frac{1}{T} \frac{dM}{dr_+} dr_+, \quad (4.7)$$

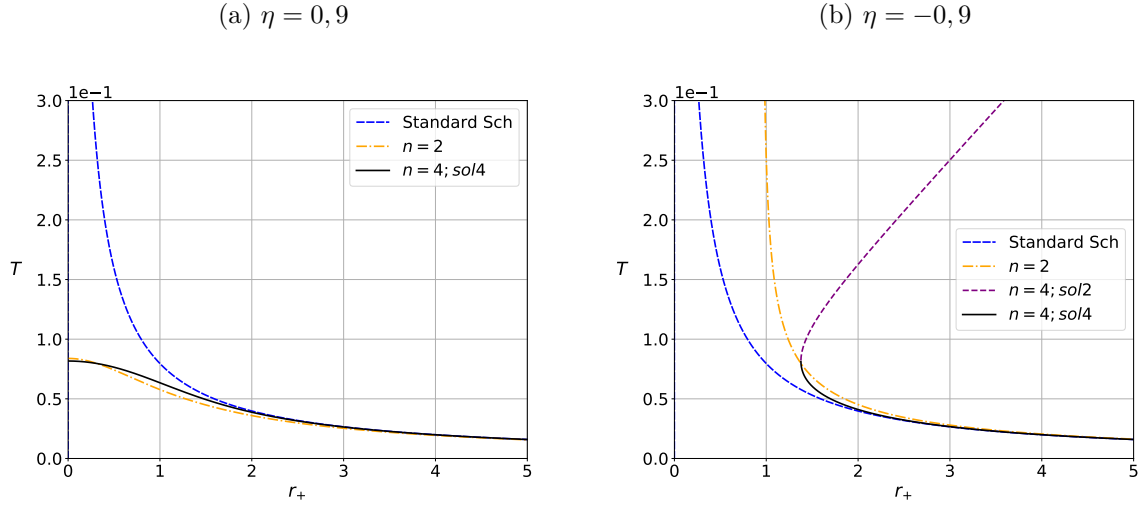
$$C = \frac{dM}{dT} = \frac{dM}{dr_+} \left(\frac{dT}{dr_+} \right)^{-1}. \quad (4.8)$$

A solução analítica dessas equações requer valores para os parâmetros Rainbow n e η , e os parâmetros do fluido cósmico. No entanto, optamos por construir gráficos para analisar os parâmetros.

Começaremos a análise ignorando o fluido cósmico, de modo a produzir um estudo preliminar da termodinâmica de buracos negros na Rainbow Gravity. Para isso, buscamos

soluções para diferentes valores do parâmetro n e descrevemos de forma explícita a temperatura em função do raio do horizonte, como mostrado na figura 6. Incluímos a representação gráfica da temperatura do buraco negro de Schwarzschild para comparar os efeitos da Rainbow Gravity com a Relatividade Geral.

Figura 6 – Temperatura em função do raio do horizonte, sem fluidos cósmicos, em Rainbow Gravity.



Fonte – MORAIS, P. H. et al. Thermodynamics and remnants of Kiselev black holes in Rainbow gravity. General Relativity and Gravitation, v. 54, n. 1, p. 1-17, 2022.

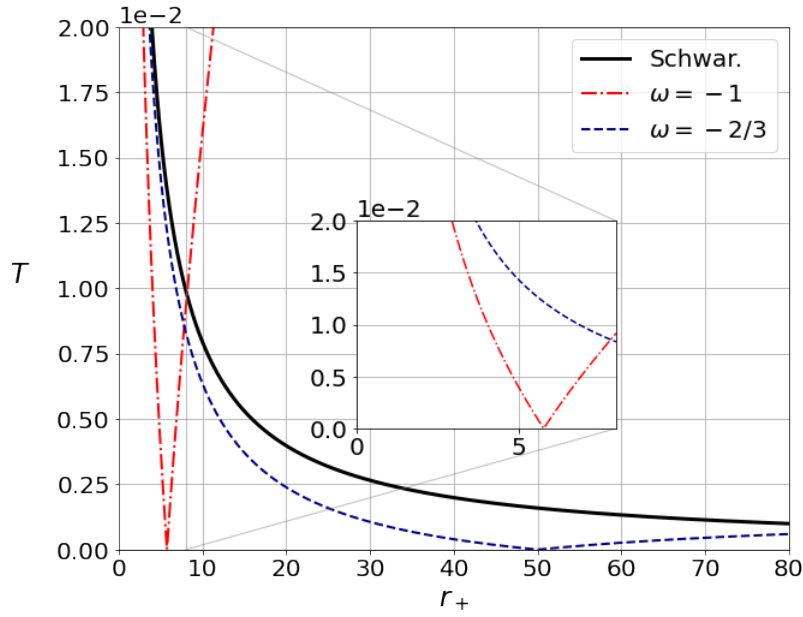
Para o caso em que $\eta > 0$, a temperatura aumenta no contexto da TRG e também para $n = 0$, caso contrário, ele se aproxima de um valor finito. A forma da curva difere para os diferentes expoentes, porém seu comportamento é semelhante.

Para o caso em que $\eta < 0$, todos os casos estudados até $n < 4$ levam a uma temperatura infinita conforme o raio se aproxima de zero, sendo consistente com a energia dos fótons (ou qualquer partícula sem massa) perto do buraco negro quando se usa a relação de dispersão modificada. Para $n = 4$ temos duas soluções com um limite para o raio do horizonte. Neste limite, a temperatura não é zero, então ela deve continuar a irradiar em uma espécie de comportamento saltitante. Este é um comportamento interessante, dado que o raio pode primeiro diminuir e depois aumentar (ou o contrário), mas a temperatura sempre diminuirá (ou sempre aumentará).

Agora, analisaremos a temperatura do buraco negro no espaço-tempo de Kiselev, desconsiderando as funções Rainbow. A temperatura é mostrada na figura 7, e pode-se observar que há um ponto onde a temperatura é zero. Neste ponto os horizontes do buraco negro e cosmológico coincidem.

Isso ocorre para todos os valores de ω estudados, e o que varia é apenas o raio do horizonte crítico. Desta maneira, para valores do raio do horizonte maior do que este valor

Figura 7 – Temperatura em função do raio do horizonte para o buraco negro de Kiselev, em Relatividade Geral.



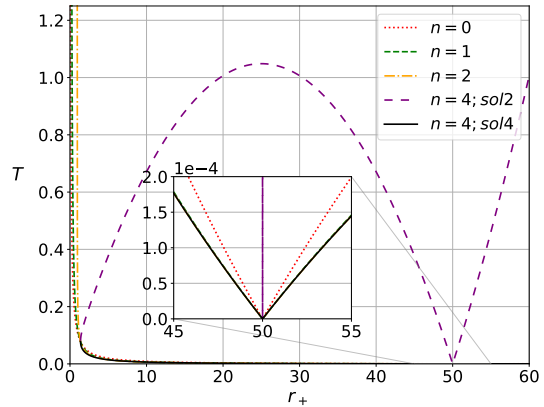
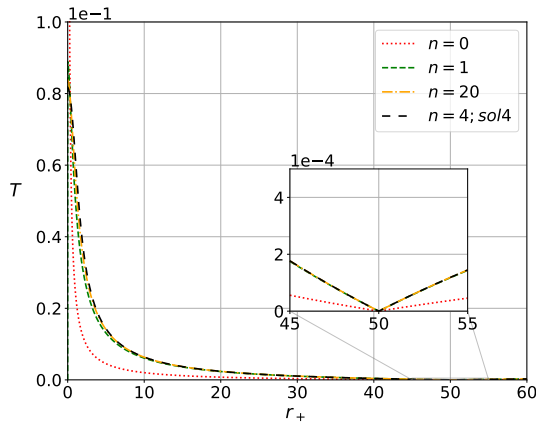
Fonte – MORAIS, P. H. et al. Thermodynamics and remnants of Kiselev black holes in Rainbow gravity. General Relativity and Gravitation, v. 54, n. 1, p. 1-17, 2022.

crítico, estamos considerando o horizonte cosmológico ou o que temos é uma singularidade nua. Em qualquer caso, não se trata da temperatura do buraco negro.

Figura 8 – Temperatura em função do raio do horizonte, para o buraco negro de Kiselev, $\omega = -2/3$, em Rainbow Gravity.

(a) $\eta = 0,9$

(b) $\eta = -0,9$



Fonte – MORAIS, P. H. et al. Thermodynamics and remnants of Kiselev black holes in Rainbow gravity. General Relativity and Gravitation, v. 54, n. 1, p. 1-17, 2022.

Na figura (8), estudamos os casos $\omega = -2/3$, para diferentes valores do parâmetro n . À esquerda, temos o caso $\eta > 0$, e à direita, o caso $\eta < 0$. Devido à incorporação de um

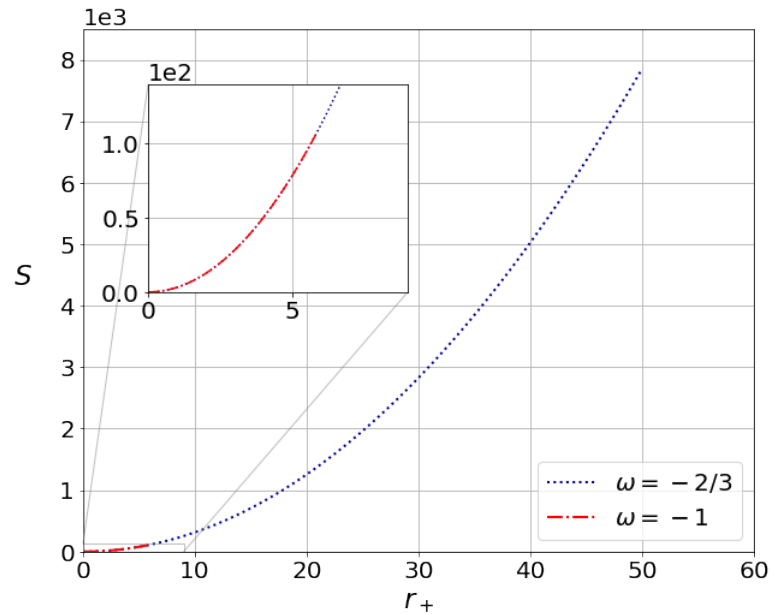
fluido cósmico, a temperatura agora irá para zero em um raio do horizonte crítico, em vez de ir para o infinito, e o horizonte do buraco negro deve ser menor que esse horizonte crítico. Para $n < 4$, conforme o raio do horizonte diminui, a temperatura pode ir para o infinito ou um valor limite. De qualquer forma, não vai a zero. Isso é importante para o estudo dos remanescentes. Note que o caso $\eta < 0$ apresenta resultados anômalos, duas temperaturas o que pode indicar fragilidade da teoria.

A entropia de um buraco negro, no caso da TRG, é dada pela fórmula de Bekenstein (3.5). Ela dependerá apenas da área do buraco negro. Isso significa que, para os buracos negros de Kiselev, o único efeito será limitar o valor para o raio do horizonte, como exposta na figura 9.

O mesmo não acontecerá no contexto da Rainbow Gravity, visto que não podemos considerar a fórmula Bekenstein como sendo válida. As funções Rainbow corrigem os valores do raio. A figura 10 mostra a entropia com as correções quando $\omega = -2/3$.

Para alguns valores do parâmetro n , podemos encontrar uma fórmula analítica para a entropia, mas não para todos os valores do expoente, por exemplo, quando $n = 4$. Quando consideramos o caso completo do buraco negro de Kiselev em Rainbow Gravity, estes comportamentos são complementares; a forma do gráfico não muda para diferentes valores de ω , apenas mudando o limite para o raio do horizonte, mas a entropia muda para diferentes valores do parâmetro n . Agora vamos estudar o calor específico. Para o buraco

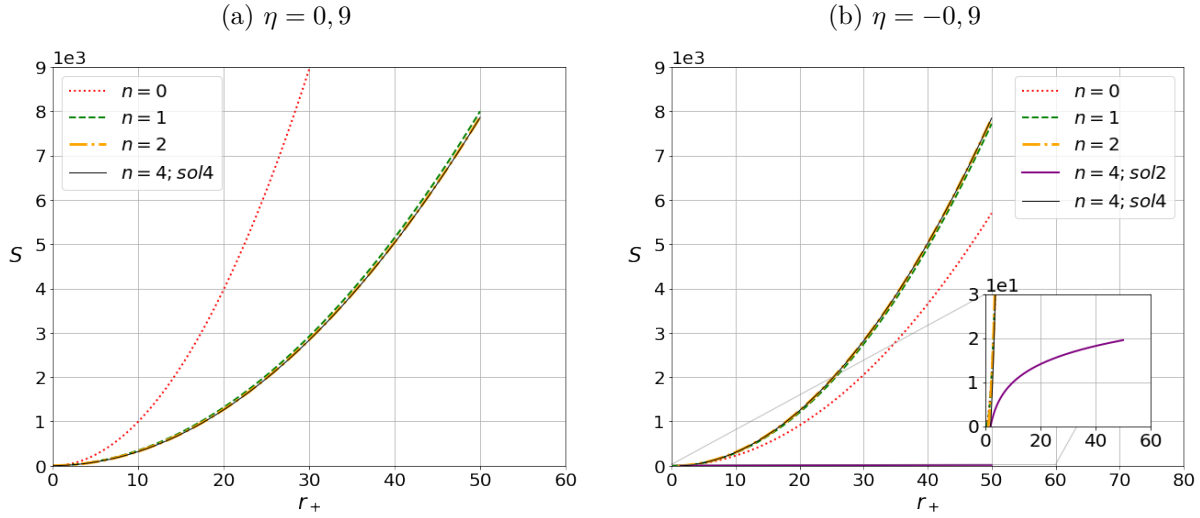
Figura 9 – Entropia em função do raio do horizonte para o buraco negro de Kiselev, em Relatividade Geral.



Fonte – MORAIS, P. H. et al. Thermodynamics and remnants of Kiselev black holes in Rainbow gravity. General Relativity and Gravitation, v. 54, n. 1, p. 1-17, 2022.

negro de Schwarzschild, na teoria da Relatividade Geral, o calor específico é negativo para

Figura 10 – Entropia em função do raio do horizonte, para o buraco negro de Kiselev, $\omega = -2/3$, em Rainbow Gravity.



Fonte – MORAIS, P. H. et al. Thermodynamics and remnants of Kiselev black holes in Rainbow gravity. *General Relativity and Gravitation*, v. 54, n. 1, p. 1-17, 2022.

todos os valores do raio do horizonte. O mesmo é um reflexo do fato de que a temperatura diminuiu com o aumento do raio.

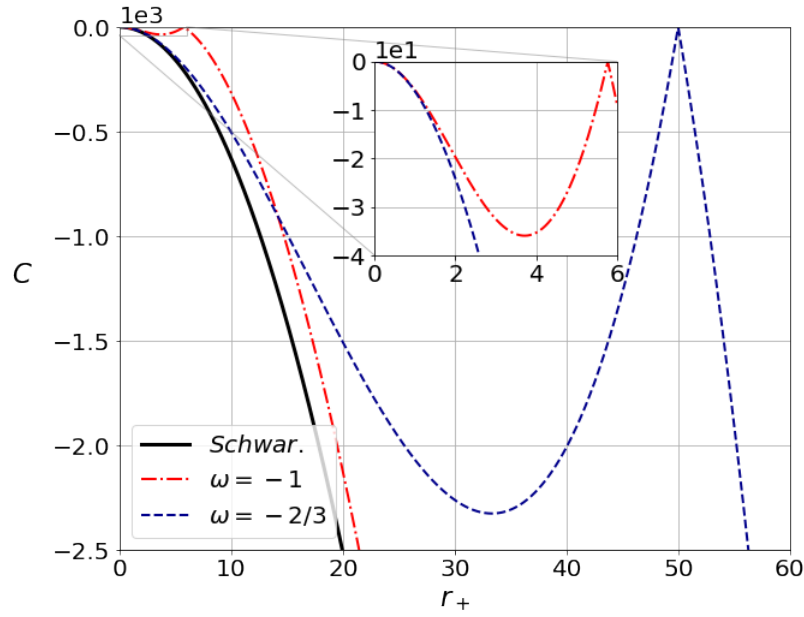
Para o buraco negro de Kiselev notamos um comportamento diferente. Na figura 11, mostramos os casos do parâmetro $\omega = -1$ e $\omega = -2/3$. Observe que o calor específico ainda é negativo, mas agora tem um ponto de inflexão, pois o raio do horizonte tem um limite. A seguir, vamos estudar o calor específico em Rainbow, sem o fluido cósmico. Observe que quando a temperatura tende para o infinito, o calor específico tende para zero. Quando a temperatura tende a um valor finito, o calor específico tende a menos infinito, como descrito na figura 12.

A possível explicação deve seguir as seguintes linhas. Um calor específico muito pequeno permite um aumento na temperatura, mesmo para uma pequena variação na troca de calor com o meio. Por outro lado, um calor específico muito grande (em valor absoluto) resultará em uma pequena variação na temperatura. Assim, os gráficos de temperatura e calor específico são consistentes.

Note que em $n = 4$ o modelo possui calor específico positivo em uma certa região, uma característica não muito comum para buracos negros. Isso ocorre porque, em uma determinada região, a temperatura do buraco negro pode diminuir com o raio do horizonte.

Agora, vamos considerar o caso completo do buraco negro de Kiselev em Rainbow, incluindo a contribuição da quintessência. Na figura 13 o que percebemos é um comportamento complementar, cuja explicação se baseia em comentários anteriores.

Figura 11 – Calor específico em função do raio do horizonte para o buraco negro de Kiselev, em Relatividade Geral.

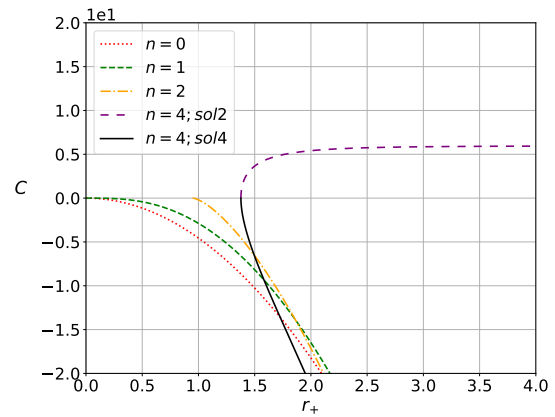
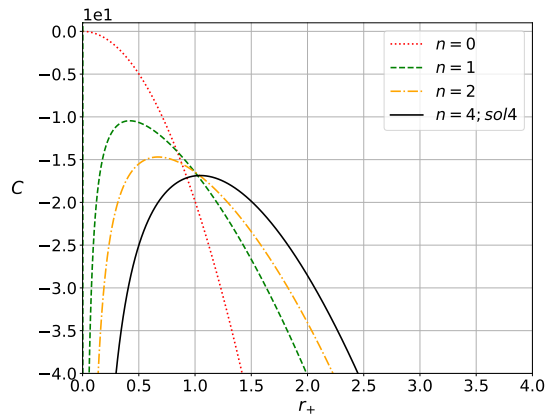


Fonte – MORAIS, P. H. et al. Thermodynamics and remnants of Kiselev black holes in Rainbow gravity. General Relativity and Gravitation, v. 54, n. 1, p. 1-17, 2022.

Figura 12 – Calor específico em função do raio do horizonte, sem nenhum fluido cósmico, em Rainbow Gravity.

(a) $\eta = 0,9$

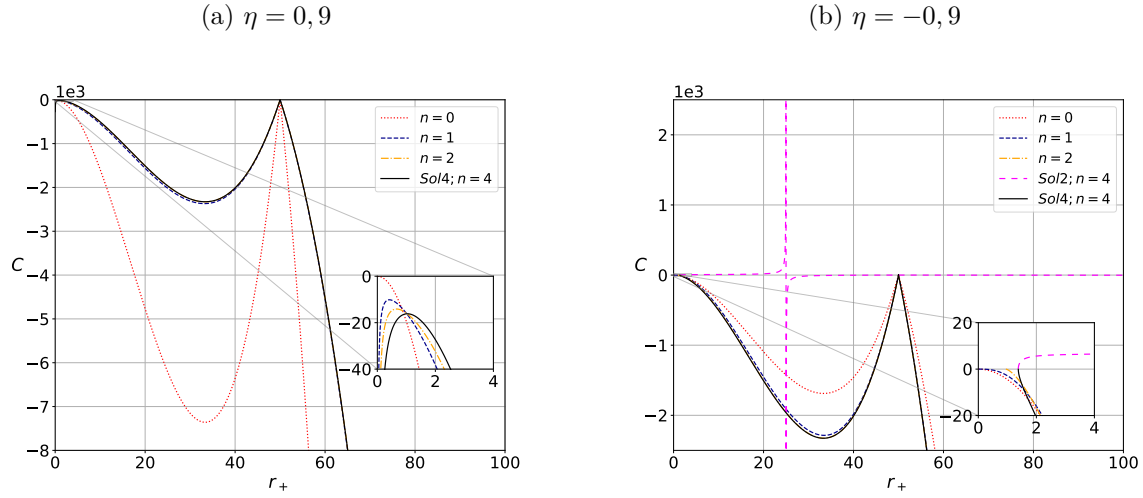
(b) $\eta = -0,9$



Fonte – MORAIS, P. H. et al. Thermodynamics and remnants of Kiselev black holes in Rainbow gravity. General Relativity and Gravitation, v. 54, n. 1, p. 1-17, 2022.

Um dos assuntos mais interessantes da física dos buracos negros é o conceito de remanescentes. A questão do que é um remanescente e quando podemos ter certeza de sua existência não parece ser uma questão bem compreendida. O principal problema é que muitas vezes as soluções que buscamos não são válidas para todos os valores do raio do horizonte, por isso não está claro se os resultados dos estudos representam remanescente

Figura 13 – Calor específico em função do raio do horizonte, com fluido cósmico, em Rainbow Gravity.



Fonte – MORAIS, P. H. et al. Thermodynamics and remnants of Kiselev black holes in Rainbow gravity. General Relativity and Gravitation, v. 54, n. 1, p. 1-17, 2022.

ou uma falha no sistema de coordenadas.

Nesta dissertação, consideraremos que buracos negros remanescentes devem ser definidos como objetos com massa/raio sejam finitos quando temperatura se aproxima de zero. Assim, com este entendimento, não encontramos evidências de que a Rainbow Gravity permita a existência de remanescentes por si só, pelo menos para as funções rainbow estudadas. A única exceção ocorre para $n = 4$ com $\eta < 0$, cuja solução parece ter problemas envolvendo seu sistema de coordenadas.

5 Expansão de Joule-Thomson

Neste capítulo, apresentaremos um estudo sobre a expansão de Joule-Thomson em um buraco negro carregado no espaço de anti-de Sitter, cercado por um fluido cosmológico. Estudaremos principalmente a existência de temperatura de inversão, ou seja, a possibilidade de que um sistema termodinâmico usual, como um gás, passe do resfriamento para o aquecimento, ou vice-versa, quando submetido a uma variação de pressão. Este efeito ocorre quando o coeficiente de Joule-Thomson, dado por (3.46), se anula.

O efeito de Joule-Thomson, no contexto da termoquímica de buracos negros, foi originalmente estudado em [15], na teoria da relatividade geral. Nosso objetivo é levar este estudo para a Rainbow Gravity.

5.1 Método

Vamos usar a métrica do buraco negro carregado em anti-de Sitter, com um segundo fluido cosmológico. Considere uma métrica modificada, tal como a (2.15), com a função do horizonte dada por

$$N(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2} - \frac{\alpha}{r^{3\omega+1}} \right), \quad (5.1)$$

onde Q é a carga, r^2/l^2 é o termo da constante cosmológica negativa e l^2 é o raio do espaço anti-De Sitter. O último termo pode ser usado para descrever vários tipos de fluidos cosmológicos. Na verdade, a função do horizonte dada pela equação (5.1) pode ser descrita por uma métrica de Kiselev (A), com muitos fluidos, em particular, com dois fluidos definidos por $\omega = -1$, $\alpha = -1/l^2$ e $\omega = 1/3$, $\alpha = -Q^2$ [49]. A constante cosmológica negativa será necessária para definir uma pressão mecânica. O fluido cosmológico foi adicionado por completeza, para contemplar algum tipo de energia escura.

No contexto da Rainbow Gravity, a massa de um buraco negro esfericamente simétrico e estático é dada por

$$M = \frac{1}{2G} \left(\frac{r_+^3}{l^2} + \frac{Q^2}{r_+} + r_+ - \frac{\alpha}{r_+^{3\omega}} \right). \quad (5.2)$$

Como vimos no capítulo 3, r_+ é o raio do horizonte de eventos mais externo. Na formulação do espaço de fase estendida, quando consideramos a constante cosmológica como uma variável termodinâmica, a massa está relacionada à entalpia do sistema. Temos a pressão mecânica e o volume dados por (3.19) e (3.20), respectivamente. A temperatura pode ser

calculada através da gravidade superficial κ , dada por (3.2), e deste modo, temos

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \sqrt{1 - \eta \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + \eta}} \right)^n} \left(2 \frac{M}{r^2} + 2 \frac{r}{l} - 2 \frac{Q^2}{r^3} + \frac{\alpha(3\omega + 1)}{r^{3\omega+2}} \right), \quad (5.3)$$

e, para simplificar, usaremos $G = 1/E_p^2 = 1$. Iremos considerar apenas partículas sem massa. Observe que a temperatura Hawking passou a depender dos parâmetros "rainbow", n e η , e dos parâmetros de Kiselev ω e α .

No que segue, não iremos calcular o coeficiente de Joule-Thomson, (3.46), pois o que nos interessa é apenas a temperatura de inversão, ou seja, quando o coeficiente da expansão de JT é nulo. Vamos buscar a temperatura de inversão do sistema para diferentes parâmetros.

Sem a inclusão de um fluido cosmológico em (5.1), e no caso do parâmetro $n = 2$ na função rainbow, é possível encontrar um resultado analítico para a equação acima em termos de pressão. No entanto, iremos analisar outros cenários, por isso faremos um estudo numérico.

5.2 Temperatura de Inversão

A temperatura de inversão será função da pressão, variando com os parâmetros da teoria de gravitação considerada e da natureza do buraco negro. A curva da temperatura de inversão, conforme variamos a carga do buraco negro, já se encontra bem explorada na literatura [15], por isso iremos explorar a variação com outros parâmetros, como os parâmetros das funções rainbow e do fluido cosmológico (Kiselev).

Para detalhar melhor o método utilizado, vamos começar estudando a temperatura de inversão para o buraco negro carregado em anti-de Sitter, no caso teoria Geral da relatividade.

5.2.1 A temperatura de inversão em Relatividade Geral

Considere a métrica do buraco negro carregado em anti-de Sitter. A função horizonte é dada por

$$N(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}, \quad (5.4)$$

e quando $N(r) = 0$, encontramos os raios do horizonte, r_+ e r_- , sendo r_+ , o mais externo dos dois. A massa é dada por

$$M = \frac{1}{2} \left(\frac{r_+^3}{l^2} + \frac{Q^2}{r_+} + r_+ \right), \quad (5.5)$$

e a temperatura Hawking, em função da pressão, é dada por

$$T_H = 2Pr_+ - \frac{Q^2}{4\pi r_+^3} + \frac{1}{4\pi r_+}. \quad (5.6)$$

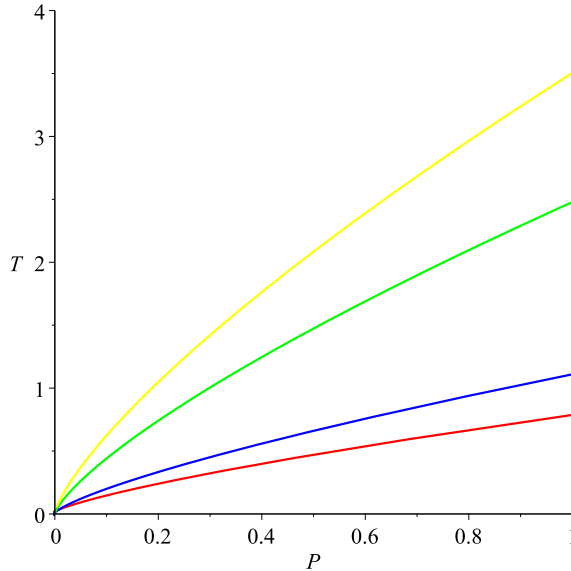
A temperatura de inversão é calculada pela equação (3.48),

$$T_i = \frac{Q^2}{4\pi r_+^3} - \frac{1}{12\pi r_+} + \frac{2r_+ P_i}{3}, \quad (5.7)$$

onde P_i é agora a pressão de inversão e o volume foi substituído pelo raio, $r_+ = (3V/4\pi)^{1/3}$. Comparando as duas equações acima, podemos encontrar a pressão de inversão, P_i , em função de r_+ e da carga.

Inserindo a pressão de inversão na equação (5.6), temos a temperatura de inversão em função de r_+ e da carga. Com isso, podemos fazer um gráfico paramétrico de T_i por P_i , como mostrado na figura abaixo.

Figura 14 – Curvas de inversão da temperatura para $Q = 1$, $Q = 2$, $Q = 10$ e $Q = 20$, de baixo para cima.



Fonte – ÖKCÜ, Özgür; AYDINER, Ekrem. Joule–Thomson expansion of the charged AdS black holes. The European Physical Journal C, v. 77, n. 1, p. 1-7, 2017.

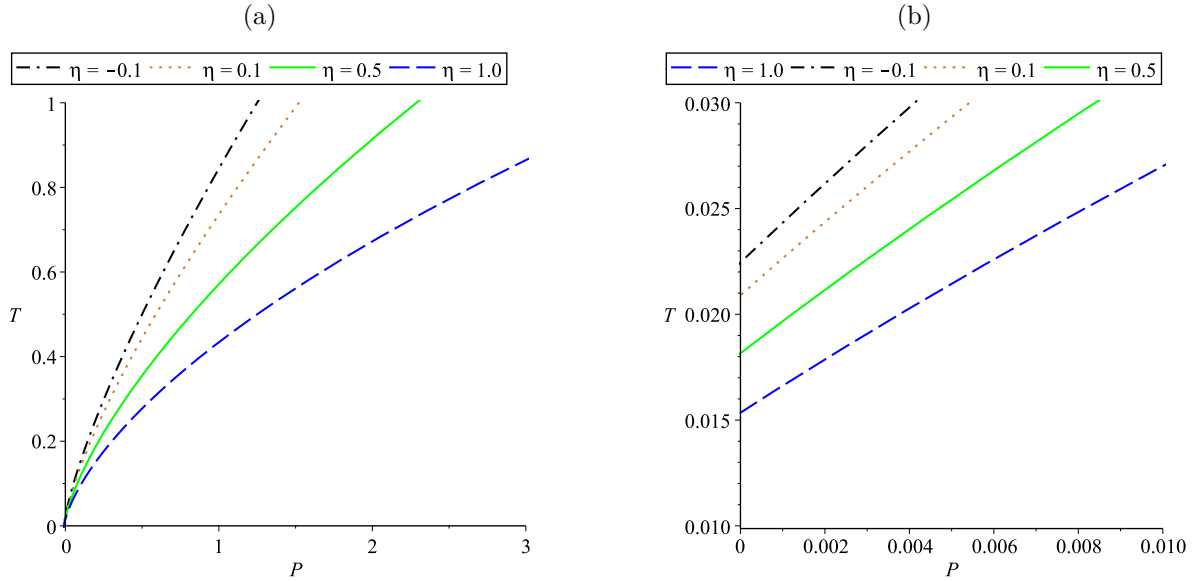
Isso nos mostra que este sistema possui temperatura de inversão para qualquer valor da pressão, e sua dependência com a temperatura. Haverá, no entanto, uma temperatura mínima para que ocorra a inversão. Agora iremos investigar como o sistema muda na Rainbow Gravity.

5.2.2 A temperatura de inversão em Rainbow Gravity

Realizando o mesmo procedimento da seção acima, primeiro, utilizando a métrica sem os parâmetros de Kiselev, em Rainbow Gravity, plotamos as curvas de temperatura de inversão para vários valores dos parâmetros rainbow η e n . O parâmetro η é uma indicação de quão longe a Rainbow Gravity se distancia da Relatividade Geral.

Por outro lado, o expoente indica um tipo de ordem de correção, e quanto menor o valor de n , maiores devem ser as correções esperadas. Para as curvas mencionadas, usamos expoentes $n = 1$, $n = 2$ e $n = 4$, e alguns valores do parâmetro η . À esquerda, traçamos a curva para uma grande faixa de pressão, enquanto à direita nos limitamos a pequenas faixas de pressão, pois estaremos interessados em um valor mínimo para a temperatura de inversão.

Figura 15 – Curvas da temperatura de inversão para $n = 1$, $Q = 1$ e $\alpha = 0$.



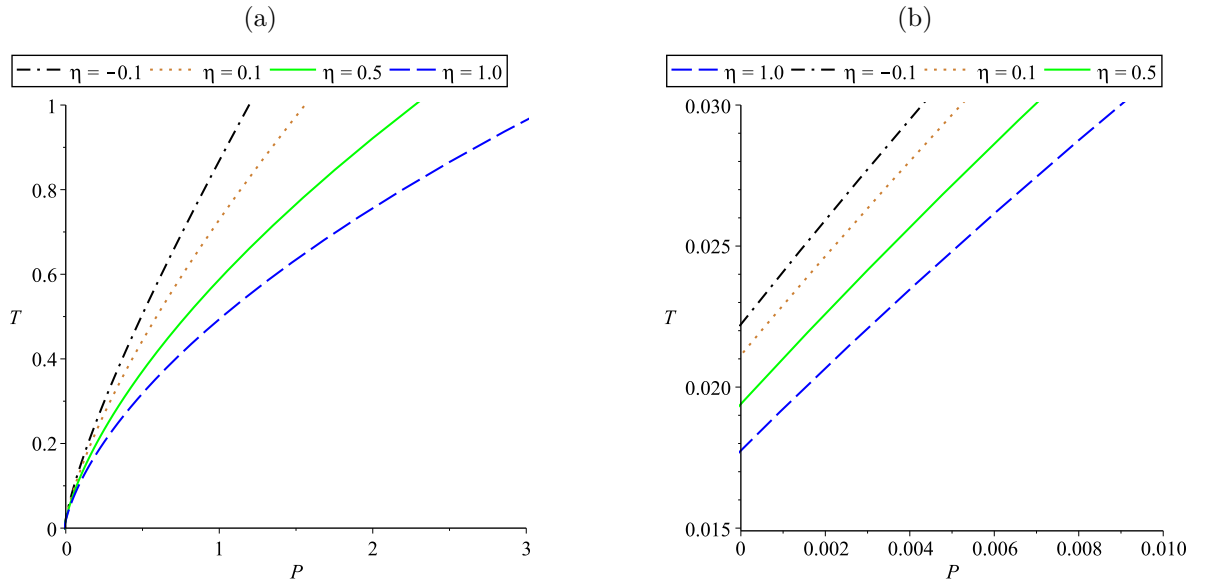
Fonte – SILVA, G. V. et al. Joule–Thomson expansion in charged AdS black hole surrounded by a cosmological fluid in Rainbow Gravity. Modern Physics Letters A, p. 2150278, 2022.

Como esperado, os números nos mostram que valores menores do expoente n levam à maiores correções na temperatura de inversão. Para um expoente fixo, valores maiores do parâmetro η levam a valores menores para a temperatura de inversão. Quando o parâmetro se torna negativo, ocorre o inverso. Esse comportamento é válido para pressões grandes e pequenas.

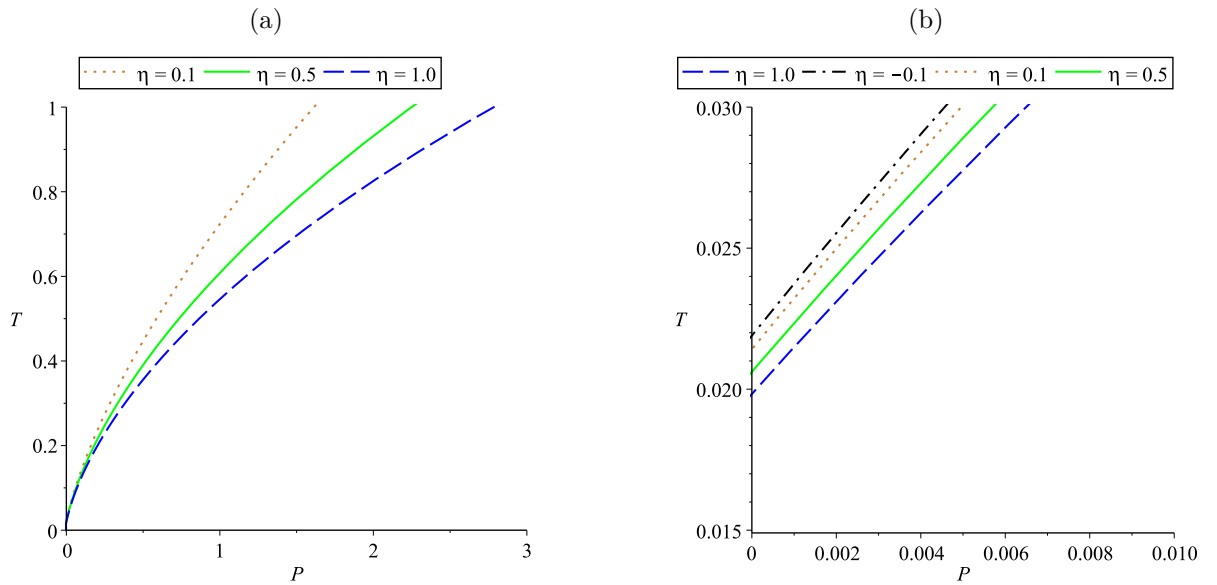
Para deixar mais evidente que a correção depende do expoente n , na figura 18 traçamos a curva de temperatura de inversão, com $\eta = 1$, para os três valores do expoente ($n = 1$, $n = 2$ e $n = 4$) no contexto da Rainbow Gravity, bem como em TRG, para efeito de comparação. Como pode ser visto, a maior correção ocorre quando $n = 1$.

O único caso em que não fizemos o gráfico para um valor negativo para η foi quando $n = 4$, e a razão é que neste caso a solução da relação de dispersão da energia em função do raio do horizonte é por partes (piecewise function), o que complica a análise numérica. De qualquer modo, o padrão já parece bem estabelecido.

Antes de estudarmos o efeito do fluido cosmológico, vamos dar uma olhada mais de perto na temperatura de inversão mínima. As figuras nos mostram que elas são menores na

Figura 16 – Curvas da temperatura de inversão para $n = 2$, $Q = 1$ e $\alpha = 0$.

Fonte – SILVA, G. V. et al. Joule–Thomson expansion in charged AdS black hole surrounded by a cosmological fluid in Rainbow Gravity. *Modern Physics Letters A*, p. 2150278, 2022.

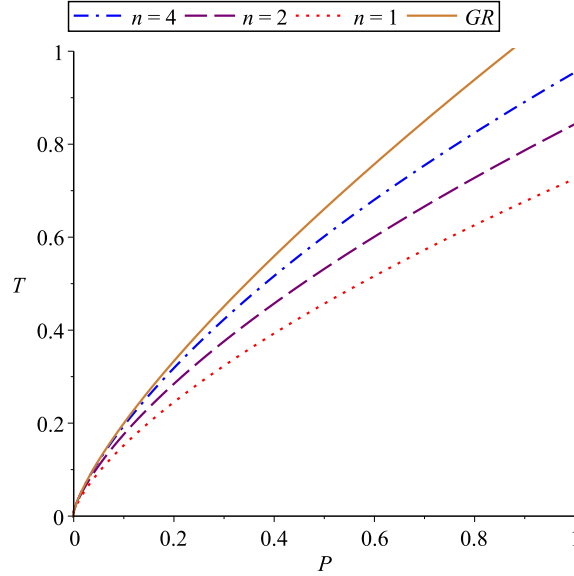
Figura 17 – Curvas da temperatura de inversão para $n = 4$, $Q = 1$ e $\alpha = 0$.

Fonte – SILVA, G. V. et al. Joule–Thomson expansion in charged AdS black hole surrounded by a cosmological fluid in Rainbow Gravity. *Modern Physics Letters A*, p. 2150278, 2022.

Rainbow Gravity, quando comparadas com as correspondentes temperaturas encontradas na TRG. Outro ponto de interesse é a relação entre a temperatura mínima de inversão e a temperatura crítica, T_{min}/T_c . Para o buraco negro de Reissner Nordström em anti-de Sitter, na TRG, tal valor é calculado em $1/2$ [15].

Para a Rainbow Gravity, já havia sido dito que haveria uma correção. Yekta,

Figura 18 – Curvas de inversão da temperatura para $Q = 2$, $\eta = 1$, $\alpha = 0$.



Fonte – SILVA, G. V. et al. Joule–Thomson expansion in charged AdS black hole surrounded by a cosmological fluid in Rainbow Gravity. *Modern Physics Letters A*, p. 2150278, 2022.

Hadikhani e Ökcü [50] usaram métodos de aproximação para tal cálculo, no caso de $n = 2$. Fizemos o cálculo para os casos $n = 1, 2, 4$, numericamente. Para $n = 2$, nossos resultados são totalmente compatíveis com o acima mencionado. Tais resultados são mostrados nas tabelas 2 ($n = 1$), 3 ($n = 2$) e 4 ($n = 4$). Eles mostram que o fator de correção da função rainbow (2.17) é bastante relevante, mas para uma carga grande, parece tender para $1/2$, como no caso $n = 2$. Devemos mencionar que os cálculos para a temperatura crítica foram obtidos em [51].

Quando também consideramos o fluido cosmológico, a Rainbow Gravity mudará a forma das curvas. Escolhemos dois tipos de fluido cosmológico para acentuar as distinções. Na figura 19, utilizando $\omega = -4/3$, notamos que as curvas se deformam se compararmos rainbow (à esquerda) com a relatividade geral (à direita), porém a variação não é grande. Traçamos somente o caso $n = 2$, mas com base nos resultados obtidos acima, esperamos que para outros valores do expoente n , as modificações sigam o mesmo padrão.

Uma propriedade interessante quando fluidos cosmológicos estão presentes é que a temperatura de inversão mínima pode cair para zero, e desta forma, podemos ter uma pressão de inversão mínima. Tal característica não requer que estejamos no cenário da Rainbow Gravity, pois esse fato já ocorre na Relatividade Geral.

O que pode ser visto aqui, mais claramente na figura (20), para $\omega = -1/6$, é que os efeitos da Rainbow Gravity e do fluido cosmológico são complementares: ambos diminuem o valor da temperatura mínima de inversão.

Finalmente, na figura 21, traçamos algumas isentálpicas, para um caso específico

Tabela 2 – T_i^{min}/T_c para $n = 1$

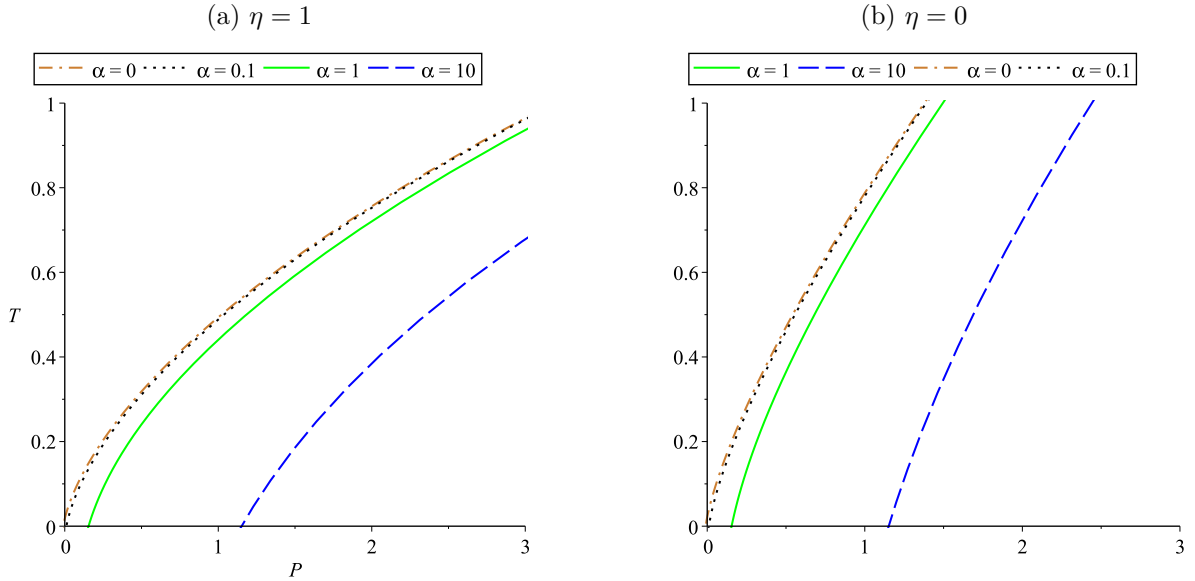
$n = 1$	$\eta = 0.1$	$\eta = 1$	$\eta = 10$
$Q = 0.1$	$0.1472/0.3015 \approx 0.448$	$0.0286/0.0715 \approx 0.400$	$0.0029/0.0079 \approx 0.367$
$Q = 1$	$0.0209/0.0416 \approx 0.502$	$0.0153/0.0301 \approx 0.508$	$0.0031/0.0072 \approx 0.431$

Tabela 3 – T_i^{min}/T_c para $n = 2$

$n = 2$	$\eta = 0.1$	$\eta = 1$	$\eta = 10$
$Q = 0.1$	$0.0841/0.1973 \approx 0.426$	$0.0289/0.0749 \approx 0.386$	$0.0092/0.0248 \approx 0.371$
$Q = 1$	$0.0211/0.0423 \approx 0.499$	$0.0177/0.0358 \approx 0.494$	$0.0091/0.0197 \approx 0.462$

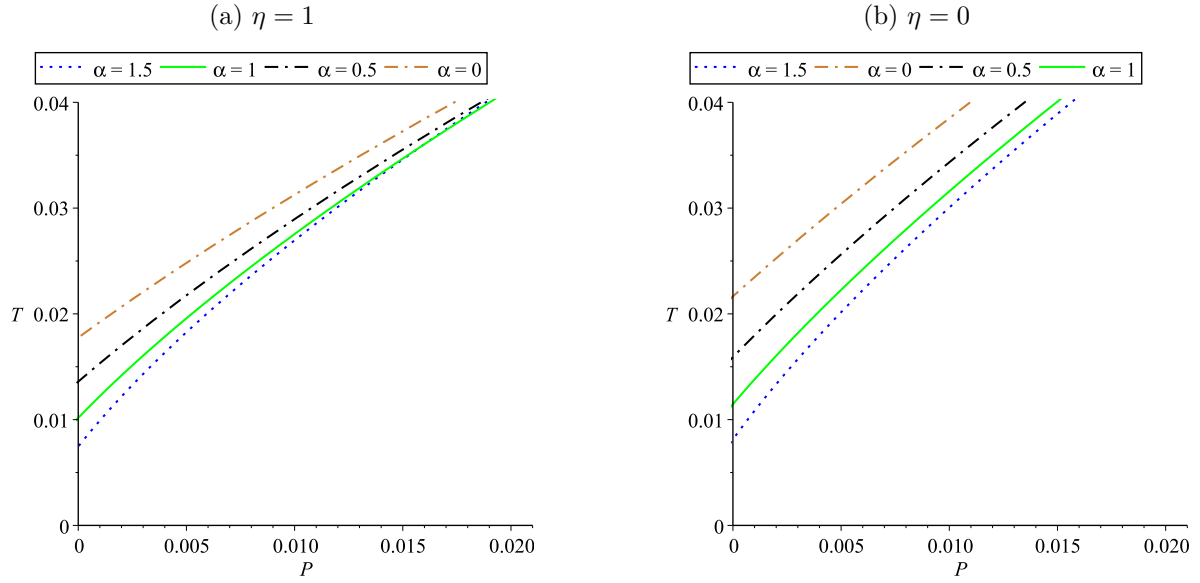
Tabela 4 – T_i^{min}/T_c para $n = 4$

$n = 2$	$\eta = 0.1$	$\eta = 1$	$\eta = 10$
$Q = 0.1$	$0.0511/0.1370 \approx 0.373$	$0.0291/0.0794 \approx 0.366$	$0.0154/0.0251 \approx 0.364$
$Q = 1$	$0.0214/0.0430 \approx 0.498$	$0.0198/0.0410 \approx 0.483$	$0.0150/0.0334 \approx 0.450$

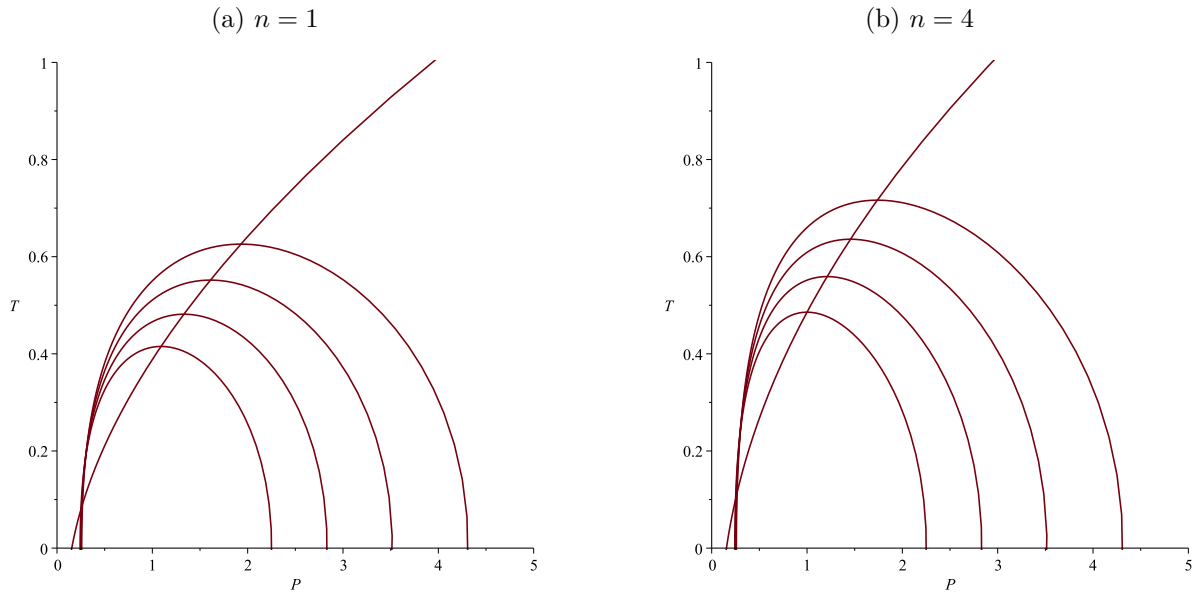
Figura 19 – Curvas da temperatura de inversão para o fluido cósmico $\omega = -4/3$.

Fonte – SILVA, G. V. et al. Joule–Thomson expansion in charged AdS black hole surrounded by a cosmological fluid in Rainbow Gravity. Modern Physics Letters A, p. 2150278, 2022.

de $\omega = -4/3$, $n = 1$ e $n = 4$. O estudo das isentálpicas não parece muito relevante para a compreensão da expansão de Joule-Thomson, mas é importante que seu comportamento seja consistente com o fato de que a curva de inversão de temperatura deve tocar as isentálpicas em seus pontos de máximo, como pode ser visto em [52].

Figura 20 – Curvas da temperatura de inversão para o fluido cósmico $\omega = -1/6$.

Fonte – SILVA, G. V. et al. Joule–Thomson expansion in charged AdS black hole surrounded by a cosmological fluid in Rainbow Gravity. Modern Physics Letters A, p. 2150278, 2022.

Figura 21 – As curvas fechadas são isentálpicas para o valor de massa indicado, enquanto a curva aberta é a curva de inversão de temperatura em $\omega = -4/3$.

Fonte – SILVA, G. V. et al. Joule–Thomson expansion in charged AdS black hole surrounded by a cosmological fluid in Rainbow Gravity. Modern Physics Letters A, p. 2150278, 2022.

6 Considerações finais

As consequências da estrutura formal de uma teoria bem consolidada, como a Teoria da Relatividade Especial (TRE), no que diz respeito, por exemplo, ao fato de que diferentes observadores inerciais irão atribuir diferentes comprimentos a um dado objeto, sem especificar a escala particular de energia, constitui-se em obstáculo para se estabelecer o comprimento de Planck como uma nova escala de comprimento. A ideia de Double Special Relativity (DSR) [27] surgiu como uma proposta de modificação da TRE, que é realizada através da inclusão de uma nova escala, a do comprimento de Planck, além da escala invariante para todos os observadores, a velocidade da luz, postulada por Einstein, na construção da TRE. Uma vez construída a DSR, cujos resultados devem coincidir com os da TRE, para energias muito menores do que a energia de Planck, ou de modo equivalente, para comprimentos muito maiores do que o comprimento de Planck, o próximo passo seria modificar a Teoria da Relatividade Geral, de modo a incorporar a nova escala, qual seja o comprimento de Planck. Esta modificação foi construída e é conhecida com Rainbow Gravity [7]. Nesta, a modificação do espaço-tempo torna-se relevante para energias próximas à energia de Planck.

Nesta dissertação, apresentamos de forma breve no capítulo 2 a estrutura da Rainbow Gravity. No capítulo 3 estudamos a termodinâmica de buracos negros e suas possíveis aplicações. No capítulo 4 estudamos a possibilidade de existência de remanescentes de buracos negros, imersos em uma métrica Kiselev, em Rainbow Gravity. Ainda no capítulo 4, construímos uma análise formal e gráfica detalhadas de vários parâmetros da teoria, como massa / energia interna, temperatura, entropia e calor específico, priorizando a métrica de Kiselev e as funções rainbow.

No capítulo 4, mostramos explicitamente que existe um valor limite para o horizonte de eventos, no caso de Kiselev, que depende da massa do buraco negro. Por este motivo, existe um valor limite para a relação temperatura / entropia deste espaço-tempo. É por isso que alguns autores encontram uma temperatura negativa em seus trabalhos, quando não limitam os valores para o raio do horizonte.

Quando consideramos a Rainbow Gravity, conseguimos encontrar um valor finito para a temperatura à medida que o raio do horizonte diminui. Este comportamento não ocorre para o buraco negro de Schwarzschild, onde a temperatura tende ao infinito conforme o raio do horizonte diminui. Embora este caso não resulte em um remanescente, ao menos evita o comportamento catastrófico presente na Relatividade Geral.

Quando incorporamos a métrica Kiselev, como no caso na constante cosmológica, encontramos um ponto onde a temperatura vai a zero e a massa segue finita, porém

ele ocorre no encontro entre dois horizontes, o do buraco negro e o cosmológico. Este não parece um quadro fisicamente aceitável. Em $n = 4$, quando $\eta < 0$, encontramos um comportamento incomum para a temperatura, quando um mesmo raio do horizonte possui dois valores para a temperatura. Isto pode ser um problema com o sistema de coordenadas.

No capítulo 5, com base no trabalho de Ökcü e Aydiner [15], analisamos a expansão de Joule-Thomson em um buraco negro AdS carregado, cercado por um fluido cosmológico, em Rainbow Gravity. O objetivo foi investigar as curvas de temperatura de inversão e o valor mínimo para temperatura de inversão. Priorizamos o estudo de como as funções rainbow alteram o comportamento de tais curvas e valores, quando comparadas à Relatividade Geral.

Como esperado, ao modificar os parâmetros que corrigem (deformam) a relação de dispersão energia-momento, verificamos que ela altera a forma das curvas de temperatura de inversão, alterando também o valor mínimo para a temperatura de inversão. A temperatura diminui para a propagação subluminal ($\eta > 0$), e aumenta para propagação superluminal ($\eta < 0$).

Ao estudar numericamente a expansão de Joule-Thomson, mostramos que quanto maior a correção para a relação de dispersão, maior será a correção dos parâmetros termodinâmicos analisados, o que é razoável de se esperar, mas não necessariamente óbvio. Com a mesma motivação, analisamos a razão entre a temperatura mínima de inversão e a temperatura crítica. Como já apontado por Yekta, Hadikhani e Ökcü [50], essa proporção não é mais constante para a Rainbow Gravity, e mostramos que essa proporção depende das funções Rainbow escolhidas. Aparentemente, para altos valores de carga elétrica, essa relação tende ao mesmo valor que encontraríamos para a relatividade geral.

Outra observação é que na presença de um fluido cosmológico, podemos observar o mesmo tipo de comportamento quando comparamos os parâmetros da expansão de Joule-Thomson em Rainbow Gravity com a relatividade geral. A curva da temperatura de inversão é achatada e o valor mínimo para a temperatura de inversão diminui quando não é zero, o que pode acontecer na presença de certos tipos de fluidos cosmológicos. Neste trabalho, mostramos que o valor mínimo para a temperatura de inversão pode ser zero para $\omega = -4/3$ e certos valores para o parâmetro α , que corresponde a uma espécie de acoplamento entre a geometria e a energia do fluido cosmológico.

Considerando os vários dados observacionais realizados nos últimos anos, podemos afirmar que, até agora, não existe nenhuma evidência direta de detecção de algum fenômeno que possamos assegurar, com alto nível de certeza, estar associado a realizações quânticas da interação gravitacional. Portanto, propostas como a Rainbow Gravity são perfeitamente válidas, e nos fornecem uma perspectiva de se construir um cenário que permita compreender melhor o caminho a ser seguido na construção de uma possível teoria quântica da gravitação.

Inspirada nesse cenário da Rainbow Gravity, nesta dissertação fizemos algumas investigações e análises sobre diferentes aspectos da termodinâmica de buracos negros, sempre tendo como elemento de fundo ou de comparação, a Teoria da Relatividade Geral.

Referências

- 1 ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 116, p. 061102, Feb 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>>. Citado na página 15.
- 2 RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998. Citado na página 15.
- 3 PERLMUTTER, S. et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565, 1999. Citado na página 15.
- 4 STELLE, K. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Physical Review D*, APS, v. 16, n. 4, p. 953, 1977. Citado na página 15.
- 5 HEROS, C. Pérez de los. Status, challenges and directions in indirect dark matter searches. *Symmetry*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 12, n. 10, p. 1648, 2020. Citado na página 15.
- 6 AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. *Dark energy: theory and observations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado na página 15.
- 7 MAGUEIJO, J.; SMOLIN, L. Gravity's rainbow. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 21, n. 7, p. 1725, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 53.
- 8 AMELINO-CAMELIA, G. Testable scenario for relativity with minimum length. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 510, n. 1-4, p. 255–263, 2001. Citado na página 15.
- 9 ZATSEPIN, G. T.; KUZ'MIN, V. A. Upper limit of the spectrum of cosmic rays. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, v. 4, p. 78, 1966. Citado na página 15.
- 10 CARLIP, S. et al. Quantum gravity: A brief history of ideas and some prospects. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 24, n. 11, p. 1530028, 2015. Citado na página 16.
- 11 BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 7, p. 2333–2346, Apr 1973. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.2333>>. Citado na página 16.
- 12 HAWKING, S. W.; PAGE, D. N. Thermodynamics of black holes in anti-de sitter space. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 87, n. 4, p. 577–588, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 26.
- 13 KASTOR, D.; RAY, S.; TRASCHEN, J. Enthalpy and the mechanics of ads black holes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 26, n. 19, p. 195011, 2009. Citado na página 16.

- 14 KUBIZŇÁK, D.; MANN, R. B. P- v criticality of charged ads black holes. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2012, n. 7, p. 1–25, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 30.
- 15 ÖKCÜ, Ö.; AYDINER, E. Joule–thomson expansion of the charged ads black holes. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 77, n. 1, p. 1–7, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 16, 45, 46, 49 e 54.
- 16 BUTTERFIELD, J.; ISHAM, C. J. Spacetime and the philosophical challenge of quantum gravity. *arXiv preprint gr-qc/9903072*, 1999. Citado na página 17.
- 17 ROTHMAN, T.; BOUGHN, S. P. Can gravitons be detected? *Foundations of Physics*, v. 36, p. 1801–1825, 2006. Citado na página 17.
- 18 SALAM, A.; WARD, J. C. Weak and electromagnetic interactions. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, v. 11, p. 568–577, 1959. Citado na página 17.
- 19 GLASHOW, S. L. The renormalizability of vector meson interactions. *Nuclear Physics*, Elsevier, v. 10, p. 107–117, 1959. Citado na página 17.
- 20 WEINBERG, S. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 19, p. 1264–1266, Nov 1967. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.19.1264>>. Citado na página 17.
- 21 DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 160, p. 1113–1148, Aug 1967. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.160.1113>>. Citado na página 17.
- 22 SFETCU, N. Heuristics and tests of quantum gravity. 2019. Citado na página 17.
- 23 AMELINO-CAMELIA, G. Quantum-spacetime phenomenology. *Living Reviews in Relativity*, Springer, v. 16, n. 1, p. 1–137, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 21.
- 24 TAKEDA, M. et al. Small-scale anisotropy of cosmic rays above 1019 ev observed with the akeno giant air shower array. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 522, n. 1, p. 225, 1999. Citado na página 18.
- 25 STECKER, F. W. Cosmic physics: The high energy frontier. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 29, n. 10, p. R47, 2003. Citado na página 18.
- 26 AMELINO-CAMELIA, G.; PIRAN, T. Planck-scale deformation of lorentz symmetry as a solution to the ultrahigh energy cosmic ray and the tev-photon paradoxes. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 64, p. 036005, Jul 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.036005>>. Citado na página 18.
- 27 AMELINO-CAMELIA, G. Doubly special relativity. *arXiv preprint gr-qc/0207049*, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 53.
- 28 MAGUEIJO, J.; SMOLIN, L. Lorentz invariance with an invariant energy scale. *Physical Review Letters*, APS, v. 88, n. 19, p. 190403, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

- 29 PAVLOPOULOS, T. Breakdown of lorentz invariance. *Physical Review*, APS, v. 159, n. 5, p. 1106, 1967. Citado na página 20.
- 30 AMELINO-CAMELIA, G. Relativity in spacetimes with short-distance structure governed by an observer-independent (planckian) length scale. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 11, n. 01, p. 35–59, 2002. Citado na página 20.
- 31 MAGUEIJO, J.; SMOLIN, L. Generalized lorentz invariance with an invariant energy scale. *Physical Review D*, APS, v. 67, n. 4, p. 044017, 2003. Citado na página 20.
- 32 JACOB, U. et al. Modifications to lorentz invariant dispersion in relatively boosted frames. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 82, p. 084021, Oct 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.084021>>. Citado na página 21.
- 33 LEIVA, C.; SAAVEDRA, J.; VILLANUEVA, J. Geodesic structure of the schwarzschild black hole in rainbow gravity. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 24, n. 18, p. 1443–1451, 2009. Citado na página 21.
- 34 CHANDRASEKHAR, S. The mathematical theory of black holes. In: *General Relativity and Gravitation*. [S.l.]: Springer, 1984. p. 5–26. Citado na página 21.
- 35 HACKETT, J. Asymptotic flatness in rainbow gravity. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 23, n. 11, p. 3833, 2006. Citado na página 23.
- 36 WALD, R. M. General relativity(book). *Chicago, University of Chicago Press, 1984, 504 p*, 1984. Citado na página 23.
- 37 D’INVERNO, R. A. Introducing einstein’s relativity. *Introducing Einstein’s relativity by RA D’Inverno*. New York: Oxford University Press, p. 230–237, 1992. Citado na página 23.
- 38 HAWKING, S. W. Black holes and thermodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 13, n. 2, p. 191, 1976. Citado na página 25.
- 39 CARLIP, S. Black hole thermodynamics. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 23, n. 11, p. 1430023, 2014. Citado na página 25.
- 40 KUBIZŇÁK, D.; MANN, R. B. Black hole chemistry. *Canadian Journal of Physics*, NRC Research Press, v. 93, n. 9, p. 999–1002, 2015. Citado na página 30.
- 41 FENG, Z.-W.; YANG, S.-Z. Thermodynamic phase transition of a black hole in rainbow gravity. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 772, p. 737–742, 2017. Citado na página 30.
- 42 GIDDINGS, S. B. Black holes and massive remnants. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 46, p. 1347–1352, Aug 1992. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.46.1347>>. Citado na página 35.
- 43 HAWKING, S. W. Breakdown of predictability in gravitational collapse. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 14, p. 2460–2473, Nov 1976. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.2460>>. Citado na página 35.

- 44 PAPADODIMAS, K.; RAJU, S. Black hole interior in the holographic correspondence and the information paradox. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 112, p. 051301, Feb 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.051301>>. Citado na página 35.
- 45 CHEN, P.; ADLER, R. J. Black hole remnants and dark matter. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, Elsevier BV, v. 124, p. 103–106, Jul 2003. ISSN 0920-5632. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0920-5632\(03\)02088-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0920-5632(03)02088-7)>. Citado na página 35.
- 46 ALI, A. F. Black hole remnant from gravity's rainbow. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 89, p. 104040, May 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.104040>>. Citado na página 35.
- 47 MORAIS, P. et al. Thermodynamics and remnants of kiselev black holes in rainbow gravity. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 54, n. 1, p. 1–17, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 65.
- 48 ALI, A. F. Black hole remnant from gravity's rainbow. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 89, p. 104040, May 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.104040>>. Citado na página 37.
- 49 KISELEV, V. Quintessence and black holes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 20, n. 6, p. 1187, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 45, 63 e 64.
- 50 YEKTA, D. M.; HADIKHANI, A.; ÖKCÜ, Ö. Joule-thomson expansion of charged ads black holes in rainbow gravity. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 795, p. 521–527, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 54.
- 51 MORAIS, P. H.; GRAÇA, J. P. M.; BEZERRA, V. B. Phase transitions in charged AdS black hole with quintessence in Rainbow Gravity. 10 2021. Citado na página 50.
- 52 SILVA, G. et al. Joule–thomson expansion in charged ads black hole surrounded by a cosmological fluid in rainbow gravity. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, p. 2150278, 2022. Citado na página 51.

Apêndices

APÊNDICE A – Buraco negro de Kiselev em Rainbow Gravity

Em 1998, observações astronômicas forneceram indícios robustos de que o Universo encontra-se em expansão acelerada. Esta expansão pode ser explicada, em princípio, admitindo-se a existência de uma de pressão negativa, que se oporia a força gravitacional, em escala cosmológica. Esta pressão poderia ser explicada com o uso da constante cosmológica ou da chamada quintessência, dentre outras possibilidades. A quintessência é um tipo de energia escura cuja origem está associada a um campo escalar [49]. Nos modelos de quintessência, a densidade se define como:

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (\text{A.1})$$

onde ϕ é o campo escalar, $\frac{\dot{\phi}^2}{2}$ é a energia cinética do campo escalar, $V(\phi)$ é o potencial de auto-interação. A pressão no modelo de quintessência é definida como

$$P = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (\text{A.2})$$

O parâmetro para a quintessência é introduzido como

$$\omega = \frac{P}{\rho} = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)}, \quad (\text{A.3})$$

onde $\omega \geq -1$ quando $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$. Na equação de estado definida por

$$P = \omega \rho, \quad (\text{A.4})$$

a expansão acelerada do universo é possível no intervalo $-1 \leq \omega \leq -\frac{1}{3}$. Quando $\omega = -1$, os efeitos da quintessência são equivalentes aos produzidos pela constante cosmológica.

Neste cenário de quintessência, vamos considerar um buraco negro estático, esfericamente simétrico, rodeado por este fluido, inicialmente, no contexto da Relatividade Geral. Para este cenário, o tensor energia-momento é dado por

$$T_t^t = T_r^r = \rho_q(r), \quad (\text{A.5})$$

$$T_\phi^\phi = T_\theta^\theta = -\frac{1}{2}\rho_q(r)(1 + 3\omega). \quad (\text{A.6})$$

Levando-se em conta a simetria, podemos escrever o elemento de linha do espaço-tempo gerado por esse buraco negro, como sendo dado por

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (\text{A.7})$$

onde $\nu = \nu(r)$, $\lambda = \lambda(r)$ são funções somente da coordenada radial. Usando as equações de Einstein

$$G^\mu_\nu = R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu = 2T^\mu_\nu, \quad (\text{A.8})$$

obtemos o seguinte resultado

$$2T^t_t = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 2\rho_q(r), \quad (\text{A.9})$$

$$2T^r_r = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 2\rho_q(r), \quad (\text{A.10})$$

$$2T^\theta_\theta = 2T^\phi_\phi = -e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) = -\rho_q(r)(1 + 3\omega). \quad (\text{A.11})$$

Podemos assumir que $\lambda = -\nu$. Com isso, substituir $\lambda = -\ln(1 + z(r))$ e, em seguida, vamos subtrair as equações (A.9) e (A.11). Agora, temos uma equação diferencial homogênea

$$(1 + 3\omega)z + (1 + 3\omega)rz' + r^2z'' = 0, \quad (\text{A.12})$$

com a solução

$$z(r) = -\frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}. \quad (\text{A.13})$$

O elemento de linha (A.7) toma a forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{1+3\omega_q}} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{1+3\omega_q}} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (\text{A.14})$$

Esta solução corresponde a um buraco negro rodeado por quintessência, em Relatividade Geral, e obtida por Kiselev, recentemente [49].

Agora, vamos obter a solução para as fontes consideradas anteriormente, porém, no contexto da Rainbow Gravity. Para isto, usaremos o ‘Ansatz’ dado por (2.15), para escrevermos a métrica correspondente a um buraco negro estático e esfericamente simétrico, da seguinte forma;

$$ds^2 = \frac{e^\nu}{f^2(E/E_p)} dt^2 - \frac{e^\lambda}{g^2(E/E_p)} dr^2 - \frac{r^2}{g^2(E/E_p)} d\Omega^2. \quad (\text{A.15})$$

O tensor energia-momento é reescrito na forma

$$2T^t_t = g^2(E/E_p) \left[-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \right], \quad (\text{A.16})$$

$$2T_r^r = g^2(E/E_p) \left[-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \right], \quad (\text{A.17})$$

$$2T_\theta^\theta = 2T_\phi^\phi = g^2(E/E_p) \left[-e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) \right]. \quad (\text{A.18})$$

Procedendo de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, obtemos

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{1+3\omega_q}} \right) \frac{dt^2}{f^2(E/E_p)} - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{1+3\omega_q}} \right)^{-1} \frac{dr^2}{g^2(E/E_p)} - \frac{r^2}{g^2(E/E_p)} d\Omega^2. \quad (\text{A.19})$$

Esta solução descreve o espaço-tempo de um buraco negro estático, esfericamente simétrico, em Rainbow Gravity [47].