

Pedro Henrique Morais

**Termodinâmica de buracos negros rodeados por
diferentes fluidos, no contexto da Gravity's
Rainbow**

Brasil

Julho - 2021

Pedro Henrique Morais

**Termodinâmica de buracos negros rodeados por
diferentes fluidos, no contexto da Gravity's Rainbow**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba como requisito para a conclusão do Curso de Mestrado em Física.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra

Brasil

Julho - 2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M827t Moraes, Pedro Henrique.

Termodinâmica de buracos negros rodeados por
diferentes fluidos, no contexto da Gravity's Rainbow /
Pedro Henrique Moraes. - João Pessoa, 2021.
104 f. : il.

Orientação: Valdir Barbosa Bezerra.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Teoria da Relatividade Geral. 3.
Teoria da Relatividade Especial. 4. Termodinâmica de
buracos negros. 5. Gravity's Rainbow. I. Bezerra,
Valdir Barbosa. II. Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de
Dissertação de **Mestrado** do aluno
Pedro Henrique Moraes, candidato ao
Título de Mestre em Física na Área de
Concentração Gravitação e Cosmologia.

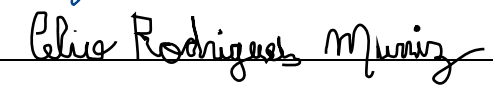
Aos trinta dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e um, às 09:00, reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Gravitação e Cosmologia, **Pedro Henrique Moraes**. A comissão examinadora composta pelos professores doutores: Valdir Barbosa Bezerra (DF/UFPB), orientador e presidente da Banca Examinadora, Iarley Pereira Lobo (UFPB) e Célio R. Muniz (UECE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Valdir Barbosa Bezerra comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado “*Termodinâmica de buracos negros rodeados por diferentes fluidos, no contexto da Gravity's Rainbow*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: **“aprovado”**. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu, José Sérgio Trindade Silva, lavrei esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, **30 de julho de 2021**.

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Iarley Pereira Lobo
UFPB

Prof. Dr. Célio R. Muniz
UECE





Link da reunião: <https://meet.google.com/ogy-ptmd-yaa>

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

Agradecimentos

A realização deste trabalho só foi possível graças ao apoio de familiares, amigos, professores e dos gigantes da Física que pavimentaram as estradas que nós, estudantes e pesquisadores, desbravamos. Um agradecimento especial à minha mãe, Maria Sônia de Moraes, por me incentivar e me ajudar em todos os momentos de dificuldade, a minha companheira Ana Paula Freire por me apoiar na busca pelos meus sonhos e estar sempre ao meu lado com seu incrível sorriso, sua luz radiante e sua alegria que me deram forças para chegar aqui. Sou imensamente grato a orientação do Prof. Valdir Barbosa Bezerra, por compartilhar seu conhecimento de Físico e de ser humano, também agradeço pelo incrível papel como educador, estando sempre a disposição para discutir o trabalho por nós desenvolvido. Também sou grato a todos os professores que proporcionaram a minha formação, em especial ao Prof. Carlos Romero Filho, por suas incríveis aulas e por compartilhar seu rico conhecimento de física ao Joel Batista de Fonseca, que me ensinou muito mais que a física, mas sim, a importância de procurarmos viver bem e sempre buscarmos o bem no próximo, seu trabalho estará sempre vivo em todos os seus alunos. Também agradeço a João Paulo Moraes por todo o apoio durante a pandemia e esforço em compartilhar os seus conhecimentos e ajuda na construção desta dissertação.

Agradeço também a todos os meus amigos e colegas que o curso de física proporcionou durante toda a minha formação, este trabalho também é fruto de vocês.

Ao meu melhor amigo Cícero Augusto, agradeço por sua ajuda imensa em revisar este trabalho, pelo apoio e pela sua amizade.

Esse trabalho só foi possível graças ao auxílio da CAPES, que fomenta pesquisa em todo o país e ajuda milhares de estudantes a realizar seus sonhos de se tornarem pesquisadores e contribuir de alguma forma com o desenvolvimento do conhecimento humano.

“Nós somos uma maneira de o cosmos se autoconhecer. Se somos feitos de poeira de estrelas sistematicamente organizada para formar seres dotados de consciência, então podemos dizer que somos o universo pensando sobre si próprio.”
(Carl Sagan, O mundo assombrado pelos demônios)

Resumo

Nesta dissertação, investigamos o papel da introdução de uma nova escala independente do observador, a escala de Planck, produzindo uma modificação na Teoria da Relatividade Geral (TRG) que ficou conhecida como Gravity's Rainbow (G'sR). Iniciamos fazendo uma revisão teórica dos fundamentos da Doubly Special Relativity (DSR), da sua extensão para a GsR, da modificação da estrutura da relação de dispersão da energia-momento usual de Einstein, em que consideramos a introdução de um novo invariante, a escala de Planck e dos postulados da TRG. Posteriormente, obtemos a métrica dos espaços-tempos de Schwarzschild e de Kislev, no contexto da GsR, nos quais observamos que as métricas passam a depender da energia das partículas relativa à energia de Planck. Em seguida, é realizada uma revisão da termodinâmica de buracos negros na TRG com o objetivo de servir como comparação dos resultados entre as teorias, juntamente com aplicação em buracos negros rodeados por diferentes fluidos cósmicos. Por último, de posse de todo o arcabouço desenvolvido, consideramos a termodinâmica de buracos negros no contexto da G'sR, estudamos buracos negros imersos em diferentes fluidos e estudamos como esse espaço-tempo dependente da energia das partículas pode influenciar as propriedades termodinâmicas de buracos negros construídas no cenário da Gravity's Rainbow.

Palavras-chave: Teoria da Relatividade Geral; Teoria da Relatividade Especial; Relatividade Duplamente Especial; Gravity's Rainbow; Termodinâmica de Buracos Negros; Fluido Cósmico

Abstract

In this dissertation, we investigate the role of the introduction of a new observer-independent scale, the Planck scale, producing a modification in Theory of General Relativity (TGR) that became known as Gravity's Rainbow (G'sR). We begin with a theoretical review of the fundamentals of Doubly Special Relativity (DSR), its extension to GsR, the modification of the structure of Einstein's usual energy-moment dispersion relation, in which we consider the introduction of a new invariant, the Planck scale and the postulates of TGR. Later, we obtain the Schwarzschild and Kiselev spacetime metrics, in the context of GsR, in which we observe that the metrics come to depend on the energy of the particles compared to the Planck energy. Then, a review of the thermodynamics of black holes in TGR is carried out in order to serve as a comparison of results between theories, together with an application to black holes surrounded by different cosmic fluids. Finally, in possession of the entire framework developed, we consider the thermodynamics of black holes in the context of G'sR, in which we study black holes immersed in different fluids and study how this space-time that depends on the energy of particles can influence the thermodynamic properties of black holes whose solutions were obtained in the framework of Gravity's Rainbow

Keywords:Theory of General Relativity; Special Relativity; Doubly Special Relativity; Gravity's Rainbow; Black Hole Thermodynamics; Cosmic Fluid

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico da Energia em função do raio do horizonte de eventos para as soluções da relação de dispersão modificada considerando os casos com $n = 1$ e $n = 4$	38
Figura 2 – Geodésicas nulas e cones de luz em coordenadas de Schwarzschild Modificado. Para $n = 2$	46
Figura 3 – Objeto em queda livre, em que consideramos as funções rainbow com $n = 2$	49
Figura 4 – Cones de luz nas coordenadas de Eddington-Finkelstein, considerando as funções rainbow com $n = 1$ e $\eta = 1 $	50
Figura 5 – Horizonte de eventos para diferentes valores do ω_q . No centro do gráfico temos um zoom para pequenos valores do raio do horizonte	54
Figura 6 – Horizonte de eventos para diferentes valores do α , com $w_q = -4/3$	55
Figura 7 – Radiação Hawking: produção de par partículas-antipartículas na vizinhança de um buraco negro.	62
Figura 8 – Temperatura Hawking em função do raio do horizonte de eventos para os casos com quintessência, $\omega = -2/3$, e o phantom, $\omega = -4/3$, com $\alpha = 0.01$ e Schwarzschild, sem influência de um fluido cosmológico.	64
Figura 9 – Entropia em função do raio do horizonte de eventos para os casos com quintessência, $\omega = -2/3$, e o phantom, $\omega = -4/3$, com $\alpha = 0.01$	65
Figura 10 – Capacidade térmica em função do raio do horizonte de eventos para os casos com quintessência, $\omega = -2/3$, e o phantom, $\omega = -4/3$, com $\alpha = 0.01$ e Schwarzschild.	67
Figura 11 – Função $f(r)$ para os valores $M = 1$, $Q = 1$ e $\Lambda = -0.01$	68
Figura 12 – Massa do buraco negro de RN com quintessência e constante cosmológica para os valores $Q = 1$ e $\Lambda = -0.01$	69
Figura 13 – Temperatura Hawking do buraco negro de RN com quintessência e constante cosmológica, para diferentes valores de α e para os valores $Q = 1$, $\omega = -2/3$, $\Lambda = -0.01$	70
Figura 14 – Capacidade térmica a pressão constante, C_P , como função do raio do horizonte de eventos para diferentes valores de α e $Q = 1$, $\omega = -2/3$, $\Lambda = -0.01$	72
Figura 15 – Diagrama de fase $P \times v$ para o buraco negro carregado AdS imerso em quintessência para $Q = 1$, $\omega = -2/3$ e $\alpha = 0.11$	75
Figura 16 – Energia livre de Gibbs em termos da temperatura Hawking com $\omega = -2/3$	76
Figura 17 – Temperatura Hawking para o buraco negro imerso em um fluido com $\omega = -2/3$, com $\alpha = 0.01$ na Gravity's Rainbow.	80

Figura 18 – Temperatura Hawking para o buraco negro imerso no cenário do phantom, $\omega = -4/3$, com $\alpha = 0.01$ em Gravity's Rainbow.	80
Figura 19 – Entropia em função do raio do horizonte em Gravity's Rainbow para $\omega = -2/3$ e $\alpha = 0.01$	81
Figura 20 – Capacidade térmica em função do raio do horizonte em Gravity's Rainbow para $\omega = -4/3$ e $\alpha = 0.01$	82
Figura 21 – Temperatura Hawking em função do raio do horizonte em Gravity's Rainbow para os valores $n = 1$, $\omega = -2/3$, $\alpha = 0.01$ e $\Lambda = -0.01$. . .	84
Figura 22 – Capacidade térmica em função do raio do horizonte na Gravity's Rainbow, para $n = 1$, $\omega = -2/3$, $\alpha = 0.01$ e $\Lambda = -0.01$	84
Figura 23 – Curvas críticas no diagrama de fase $P \times v$ para o buraco negro imerso em quintessência, $\omega = -2/3$, com $\alpha = 0.11$ e $Q = 1$ na Gravity's Rainbow.	88
Figura 24 – Diagrama de fase $P \times v$ para o buraco negro imerso em quintessência, $\omega = -2/3$, com $\alpha = 0.11$, $Q = 1$ e $\eta = 0.9 $ na Gravity's Rainbow.	88
Figura 25 – Curvas críticas da energia livre de Gibbs para o buraco negro imerso em quintessência, $\omega = -2/3$, com $\alpha = 0.11$ e $Q = 1$ na Gravity's Rainbow.	89
Figura 26 – Energia livre de Gibbs para o buraco negro imerso em quintessência, $\omega = -2/3$, com $\alpha = 0.11$, $Q = 1$ e $\eta = 0.9 $ na Gravity's Rainbow.	89

Lista de quadros

Quadro 1	–	Quantidades críticas para $\omega = -2/3$ e $\alpha = 0.01$, com diferentes valores para a carga, Q	74
Quadro 2	–	Quantidades críticas para $\omega = -2/3$ e $Q = 1$, com diferentes valores para α	75
Quadro 3	–	Comparação entre a temperatura crítica na Teoria da Relatividade Geral com a Gravity's Rainbow. Consideramos $\omega = -2/3$ e $\alpha = 0.01$, e diferentes valores para a carga Q	86
Quadro 4	–	Comparação entre a temperatura crítica na Teoria da Relatividade Geral com a Gravity's Rainbow. Consideramos $\omega = -2/3$ e $Q = 1$, e diferentes valores para o parâmetro da quintessência α	86
Quadro 5	–	Grandezas termodinâmicas críticas para $n = 1$ e diferentes valores para a carga, Q . Consideramos $\omega = -2/3$ e $\alpha = 0.01$	87
Quadro 6	–	Grandezas termodinâmicas críticas para $n = 1$ e diferentes valores para a intensidade da quintessência α . Consideramos $\omega = -2/3$ e $Q = 1$. . .	87

Sumário

1	INTRODUÇÃO	21
2	ASPECTOS FUNDAMENTAIS DA TEORIA DA GRAVITY'S RAINBOW	25
2.1	Relatividade Duplamente Especial	27
2.2	Modificação da Relação de Dispersão e DSRs	29
2.2.1	DSR I	30
2.2.2	DSR II	31
2.3	Gravity's Rainbow	32
2.4	Funções Rainbow	35
3	BURACOS NEGROS NA GRAVITY'S RAINBOW	39
3.1	Espaço-tempo modificado de Schwarzschild	41
3.1.1	Diagrama do espaço-tempo modificado de Schwarzschild	43
3.1.2	Geodésicas nulas e cones de luz	45
3.1.3	Objeto massivo em queda livre	47
3.1.4	Coordenadas de Eddington-Finkelstein	49
3.2	Espaço-tempo modificado de Kiselev	50
3.2.1	Buraco negro imerso em quintessência	51
3.2.2	Horizonte de eventos	53
4	TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	57
4.1	Aspectos gerais da termodinâmica	57
4.1.1	Gravidade superficial	57
4.1.2	As quatro leis da termodinâmica de buracos negros	59
4.1.3	Radiação Hawking	61
4.2	Termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild imerso em quintessência	63
4.3	Termodinâmica do buraco negro de Reissner-Nordström-AdS imerso em quintessência	67
4.3.1	Grandezas termodinâmicas críticas	72
5	TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS NO CONTEXTO DA GRAVITY'S RAINBOW	77

5.1	Termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild imerso em quintessência	78
5.2	Termodinâmica de buraco negro de Reissner-Nordstrom-AdS imerso em quintessência	83
5.2.1	Grandezas termodinâmicas críticas	84
6	CONCLUSÕES	91
	REFERÊNCIAS	95

1 Introdução

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) publicada por Einstein em 1915 é um dos feitos mais notáveis da criação humana na busca da compreensão acerca do nosso universo, sua origem e evolução. A TRG é um dos pilares da física moderna, juntamente com a mecânica quântica. O seu sucesso em descrever e prever fenômenos gravitacionais, tais como: a precessão do periélio dos planetas, a deflexão dos raios de luz ao passarem próximo do Sol, por exemplo, a explicação do comportamento dos pulsares binários, e mais recentemente a confirmação de previsão feita há cem anos, exatamente, da existência de ondas gravitacionais, a torna indiscutivelmente robusta, dentro dos limites de sua aplicabilidade. Contudo, mesmo com a confirmação da existência de ondas gravitacionais [1, 2] e todos os demais testes a que foi submetida, a TRG ainda possui alguns problemas em aberto. Um deles são as observações de partículas extremamente energéticas, a saber, Raios Cósmicos com Altíssimas Energias (UHECRS) e fótons com energia da ordem de TeV (trilhões de elétrons-Volt), que não podem ser explicadas pela TRG. Outro problema diz respeito à inexistência de uma explicação conveniente para o estágio de expansão acelerada do universo, que tem levado a uma procura por uma forma de energia capaz de dar conta deste fato, a chamada “energia escura”, que pode ser capaz de atuar como uma força repulsiva, podendo ser usada para justificar tal expansão acelerada do universo. Um outro problema presente na TRG é a existência das singularidades espaço-temporais. Hawking e Penrose, nos anos 60 a 70, nos revelam por meio de diversos teoremas a existência de singularidades em diversas configurações bem gerais e, ainda mais, Penrose provou que buracos negros podem ser formados a partir do processo de colapso gravitacional. Por outro lado, Hawking aponta que uma singularidade inicial deve estar presente em qualquer modelo cosmológico que recorra aos dados presentes na época, relacionados à Radiação Cósmica de Fundo. Toda essa base foi fundamental para sedimentar o entendimento acerca dos buracos negros e do paradigma do Big Bang, que passaram a ter base experimental com o advento das descobertas da Radiação Cósmica de Fundo, cuja explicação só poderia ser dada para um universo que tivesse uma singularidade inicial, o Big Bang. Já para os buracos negros temos as ondas gravitacionais [1], que revelaram a colisão de dois grandes buracos negros e, mais recentemente [1], as primeiras imagens dos buracos negros. Portanto, por mais que a TRG proporcione grandes resultados, os problemas das partículas altamente energéticas e os fótons TeV, além do Big Bang no contexto cosmológico, talvez estejam nos indicando que, nesses regimes, a teoria atual não seja suficiente para descrever a física, portanto, uma nova teoria que explique esses fenômenos seja necessária.

A física já passou por um momento semelhante, no início do século passado e os problemas foram resolvidos com a formulação da mecânica quântica e da Teoria da

Relatividade Especial (TRE). Sendo assim, é coerente considerarmos que os problemas apresentados até agora são indícios de que uma nova teoria mais fundamental deve ser pensada nos fenômenos físicos nesses regimes. É sabido que a TRG é, na verdade, uma teoria clássica da gravitação, portanto, existe a necessidade de se formular uma teoria quântica da gravitação capaz de descrever e explicar fenômenos, mesmo no regime de energia em torno da energia de Planck $E_p \cong 10^{19} GeV$, que deve separar as descrições clássica e quântica, dos fenômenos gravitacionais.

Com o objetivo de construir uma teoria quântica da gravitação ou uma teoria que possua elementos da teoria quântica, que neste trabalho iremos tratar de uma teoria modificada da TRG, onde será feita a inclusão de uma nova escala independente do observador, uma escala de energia/comprimento, sugerida por observações e os estudos fenomenológicos de partículas e fótons altamente energéticos.

Ao longo das décadas, desde o surgimento da TRG, foram feitas várias propostas no sentido de se construir teorias alternativas à TRG, por diferentes motivações. Na verdade, essas teorias devem ser denominadas, mais apropriadamente, de teorias modificadas, pois, são baseadas em modificações feitas, de diferentes formas, na TRG. Para citar algumas iniciativas nesse sentido, temos as teorias escalares-tensoriais [3], teoria de Lovelock [4], teoria de Rastall [5], dentre várias outras. Recentemente, surgiu uma nova proposta de teoria modificada, a saber, a Gravity's Rainbow [6], construída a partir da extensão, de modo a considerar espaço-tempo curvos, de uma generalização da Teoria da Relatividade Especial, chamada de Doubly Special Relativity (DSR) [7], que inclui uma segunda escala invariante, que é adotada como sendo a energia de Planck, adicionalmente à já estabelecida velocidade da luz no vácuo no infravermelho, da TRE. Nesta dissertação, adotaremos a Gravity's Rainbow como sendo a teoria que descreve os fenômenos gravitacionais.

Os principais objetos de estudo desta dissertação são os buracos negros que surgem tanto na TRG, quanto nas teorias modificadas de gravitação. Devido à sua capacidade de estarem relacionados com a gravitação, a termodinâmica e a teoria quântica, os buracos negros podem ser a ponte que conecta as teorias e contribuir para a formulação de uma teoria quântica de gravitação. Assim, é fundamental estudar esses objetos tanto na TRG, quanto suas diferentes versões que a modificam.

Nesta dissertação, estudaremos os espaços-tempos correspondentes a diversos buracos negros, na TRG e na G'sR, rodeados por diferentes fluidos, abordando suas propriedades e dando ênfase ao estudo da termodinâmica de buracos negros e da radiação Hawking, além de outros pontos, tais como transições de fase.

Esta dissertação está dividida em cinco partes: No Capítulo 2, discutimos a necessidade da construção de uma teoria quântica da gravitação. Abordamos a construção da Doubly Special Relativity (DSR), em que é introduzida uma nova escala invariante de energia, a energia de Planck, e também o papel que as transformações de Lorentz possuem.

Em seguida, estendemos a DSR para considerarmos os efeitos de campos gravitacionais, obtendo a teoria da Gravity's Rainbow.

Abordaremos, no Capítulo 3, a construção da métrica do espaço-tempo de Schwarzschild, no contexto da G'sR, e estudaremos o comportamento das geodésicas nulas em um espaço-tempo dependente da energia das partículas. Posteriormente, analisaremos um objeto em queda livre, calculando os tempos coordenado e próprio, e a mudança de coordenada Eddington-Finkelstein. Nesse mesmo capítulo, também obteremos a métrica do espaço-tempo de Kiselev no contexto da G'sR e analisaremos os horizontes de eventos.

No Capítulo 4, faremos uma breve revisão da termodinâmica de buracos negros na TRG. Abordaremos a construção da gravidade da superfície, essencial para definirmos a temperatura Hawking que será estudada logo em seguida juntamente com a radiação Hawking. Posteriormente, anunciaremos as quatro leis da termodinâmica de buracos negros e aplicaremos esses conhecimentos ao buraco negro imerso em quintessência e ao buraco negro de Raissner-Nordström-AdS imerso em quintessência. Para ambos, calcularemos a temperatura Hawking, a entropia e a capacidade térmica. Para o último, no entanto, obteremos adicionalmente, a equação de estado $P = P(v, T)$ e a energia livre de Gibbs.

O Capítulo 5, aplicaremos todo o arcabouço produzido para estudar a termodinâmica de buracos negros, mas no contexto da G'sR. Repetiremos o mesmo procedimento adotado no capítulo anterior para os dois tipos de buracos negros estudados e compararemos os resultados obtidos.

Finalmente, no Capítulo 6, são apresentados as conclusões, com destaque para os principais resultados obtidos nesta dissertação.

Ao longo de toda a dissertação utilizaremos as unidades naturais: $c = \hbar = G = k_B = 1$. Este sistema de unidades é extremamente comum em textos de teoria da gravitação, e simplifica bastante as notações. Além disso, utilizamos a assinatura $(+, -, -, -)$ para o tensor métrico, $g^{\mu\nu}$. E a notação para o tensor de Riemann e o tensor de Einstein são, respectivamente:

$$R^\nu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\nu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\nu_{\nu\alpha} + \Gamma^\lambda_{\nu\beta} \Gamma^\nu_{\lambda\alpha} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} \Gamma^\nu_{\lambda\beta}$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R.$$

2 Aspectos fundamentais da teoria da Gravity's Rainbow

Neste capítulo vamos abordar a construção da G'sR proposta por João Magueijo e Lee Smolin [6] como sendo uma teoria modificada da TRG visando entender certos sinais fenomenológicos à luz de uma possível descrição quântica do espaço-tempo.

Algumas propostas têm tentado formular uma abordagem para descrever o regime quântico do campo gravitacional. Alguns exemplos são: Loop Quantum Gravity (LQG) [8, 9]; String Theory [10]; Casual Dynamical Triangulation (CDT) [11]; κ -Minkowski non-commutative spacetime [12], dentre outras. Essas teorias nos levam a questionar qual a natureza da descrição quântica fundamental em comparação com a descrição efetiva de baixas energias em termos da TRG. Compreender os efeitos de transições entre as descrições das teorias não é apenas de objetivo teórico, mas é também um norte na busca por uma compreensão mais completa da natureza. Os efeitos de uma escala de comprimento de Planck ou energia de Planck podem ser estudados inicialmente nas proximidades do limite clássico, ao incluirmos modificações na relação de dispersão de energia-momento usual proposto por Einstein (2.1) (neste trabalho iremos usar as unidades naturais para as constantes $c = \hbar = G = k_B = 1$, e quando houver necessidade serão recuperadas), dada por

$$E^2 - p^2 = m^2. \quad (2.1)$$

As modificações na relação de dispersão (Modified Dispersion Relation - MDR) de energia-momento têm sido abordadas por várias teorias da Gravidade Quântica. A semente para essa ideia nasce na verdade com Max Born, no seu conceito de espaço “momento-energia” curvo [13]. Podemos encontrar essas modificações nas seguintes teorias: LQG [14], Dinâmica Lorentziana de Triangulações [15], Horava-Lifshitz [16, 17] e κ -Minkowski não comutativo [12]. Essas modificações produzem correções nos regimes de altas energias, obtendo novas relações de dispersão, dadas por:

$$\text{LQG} : E_{\pm}^2 = p^2 \mp l_1 p^3 \quad (2.2)$$

$$\text{CDT} : E_{IR} \approx p^2 + l_2^2 p^3 \quad (2.3)$$

$$\text{Horava - Lifshitz} : E_{IR}^2 \approx p^2 + l_3^2 p^4 \quad (2.4)$$

$$\kappa - \text{Minkowski} : E^2 \approx p^2 + l_4 E p^2 \quad (2.5)$$

onde l_i são os parâmetros correspondentes às deformações, os quais espera-se que sejam da ordem do comprimento de Planck, em que o comprimento de Planck está relacionado com a energia de Planck por meio de $l_p = 1/E_p$. Assim, as MDRs podem ser um conceito que unifica diversas propostas no limite semiclássico [18].

Por mais que não saibamos qual será a forma correta da teoria fundamental, podemos nos basear em observações fenomenológicas e intuir algumas possíveis modificações das equações fundamentais. De certa forma, podemos parametrizar as deformações gerais da relação de dispersão e usar dados observacionais para restringir os parâmetros e descartar aquelas que não estão de acordo com os resultados. Um exemplo é propor uma configuração muito geral para a deformação de primeira ordem das relações de dispersão, como segue

$$E^2 = m^2 + p^2 + l \sum_{m_\mu} \zeta_{m_0, m_1, m_2, m_3} (E^{m_0} p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3}) + \mathcal{O}(l^4 E^6) \quad (2.6)$$

onde $m_0 + m_1 + m_2 + m_3 = 3$ e l é o comprimento de Planck [18]. Alguns efeitos podem ser observados em testes ou até mesmo descartados ao incluirmos testes de limiares para raios cósmicos de energias ultra altas [19, 20, 21] e fótons TeV [22]. Há também uma possibilidade para uma dependência energética da velocidade da luz, observável em explosões de raios- γ [23], bem como testes envolvendo radiação síncrotron [24, 25]. Os efeitos relacionados também podem ser detectados em um futuro próximo nas observações das radiações cósmicas de fundo em micro-ondas [26].

O ponto fundamental para entender os efeitos de tais fenômenos é compreender o papel da simetria global de Lorentz entre os limites clássico e quântico. Discutidos extensamente e expostos em vários trabalhos do final dos anos 90, os estudos defendiam a modificação, na escala de Planck, da relação de dispersão e, segundo resultados da análise de vários formalismos, foi assumido que tais modificações da relação de dispersão equivaleriam a uma quebra da simetria de Lorentz [27]. Assim, para a TRG, a invariância de Lorentz é apenas uma simetria accidental de uma solução particular para as equações de campo de Einstein, portanto, seja modificada ou quebrada, a invariância global de Lorentz deixa de ser uma simetria exata da teoria. Em vez disso, é uma simetria que surge em baixas energias de uma TRG, formulada no regime quântico. Segundo os autores João Magueijo e Lee Smolin [6] existiriam 4 possibilidades para a forma a qual a invariância de Lorentz poderia assumir ao levarmos em conta os efeitos em ordens de $l_p E$, a saber:

- i) A invariância de Lorentz e a relatividade dos referenciais inerciais são mantidos sem sofrerem quaisquer modificações, porém, os graus de liberdades fundamentais da matéria podem não ser mais pontuais. Essa proposta é assumida na construção de teorias perturbativas de cordas, nas quais os constituintes da natureza são descritos por cordas fundamentais.
- ii) Uma outra possibilidade é a existência de um certo cenário no qual temos observações dos efeitos de ordem de $l_p E$, provocando a quebra da invariância de Lorentz.
- iii) A quebra da invariância de Lorentz pode surgir de forma espontânea devido a um campo vetorial assumindo um valor esperado no vácuo, produzindo, então, um referencial privilegiado.

- iv) Por último, a relatividade dos referenciais inerciais é mantida, entretanto, temos novas leis de transformações atuando no espaço de momento não linear, produzindo novos termos em $l_p E$.

Neste trabalho iremos abordar a última proposta conhecida como deformação não linear da Relatividade ou Doubly Special Relativity, que resulta nas leis de conservação de energia-momento, em todos os referenciais inerciais, porém, as transformações de Lorentz não são mais lineares. Uma das motivações para estudar a DSR provém do fato de que a energia de Planck E_p passa a representar a fronteira entre a descrição clássica e a quântica do espaço-tempo, tornando-se um invariante para as novas transformações de Lorentz. Assim, todos os observadores inerciais iriam concordar se uma partícula tem mais ou menos energia comparada com a energia de Planck.

2.1 Relatividade Duplamente Especial

Por muitos anos a Relatividade de Galileu/Newton tem nos auxiliado na descrição dos fenômenos cotidianos que nos rodeiam e na descrição do espaço e do tempo. Porém, a sua incompatibilidade com as equações de Maxwell do eletromagnetismo levou ao questionamento sobre a validade da Relatividade Newtoniana. O fato das equações de Maxwell possuírem uma escala de velocidade fundamental (c) parecia exigir a introdução de uma classe preferencial de observadores inerciais. Entretanto, não foi necessário a introdução de um referencial privilegiado, mas a modificação das leis de transformações entre observadores inerciais para assim serem compatíveis com a estrutura das equações de Maxwell.

Einstein em seu trabalho sobre a TRE, publicado em 1905, introduziu a primeira escala relativística independente do observador (escala de velocidade da luz no vácuo, c), que surge naturalmente das equações de Maxwell. A TRE é baseada em três postulados:

- **Postulado da Covariância:** as relações matemáticas que governam os fenômenos físicos têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais.

Em outras palavras, o postulado da covariância nos diz que não existe um referencial privilegiado entre todos os referenciais inerciais. Este postulado estende o princípio da relatividade de Galileu para todos os fenômenos físicos, não somente para a mecânica. Uma consequência deste postulado é o fim da concepção de espaço absoluto, uma vez que todos os referenciais inerciais são equivalentes, deixando de existir um referencial privilegiado.

- **Postulado da constância da velocidade da luz:** O módulo da velocidade de propagação da luz no vácuo é igual em todas as direções em um dado referencial inercial e o mesmo em qualquer referencial inercial.

O postulado da velocidade da luz nos diz que o módulo da velocidade da luz no vácuo independe do movimento da fonte que a está emitindo.

- **Postulado dos relógios comóveis:** Uma vez construídas as coordenadas do espaço-tempo, onde usamos os postulados anteriores, relógios comóveis e ideais medem o parâmetro τ (chamado de tempo próprio) definido por $d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$.

Em outras palavras, o último postulado nos indica a taxa de relógios comóveis.

Assim, na TRE, as transformações de um referencial inercial K para um referencial inercial K' , que move-se em relação a K com uma velocidade V constante ao longo do eixo x e que são condizentes com os postulados, são dadas por:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (2.7)$$

$$y = y', \quad (2.8)$$

$$z = z', \quad (2.9)$$

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (2.10)$$

que são denominadas de transformações de Lorentz. Assim, a TRE teve como papel adicionar uma nova escala independente do observador, a escala da velocidade da luz no vácuo, e novas transformações entre observadores inerciais, abandonando então as antigas transformações de Galileu/Newton. Porém, quando estamos trabalhando em baixas velocidades as transformações de Lorentz são recuperadas às transformações de Galileu e recuperamos a física Newtoniana.

Os novos dados e informações sobre os raios cósmicos com energias ultra-altas (Ultrahigh-energy cosmic rays - UHECRs), fótons TeV e rajadas de raios gammas (Gamma Ray Bursts), que fazem parte do novo conjunto de mensageiros cósmicos, parecem não concordar com as previsões da TRG. Uma delas é o limite de Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK), que estabelece um limite superior teórico para as energias de prótons dos raios cósmicos que viajam vindo de outras galáxias através do meio intergalático. Este limite é definido subtraindo-se as interações dos prótons com a radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB) por meio da combinação das leis de conservação de energia-momento e da relação de dispersão. O limite teórico previsto pela TRG é da ordem de $E_{GZK} = 5 \cdot 10^{19} eV$ ($50 EeV$) ou seja, de aproximadamente 8 joules, o que seria a energia de um próton viajando a $\approx 99,999999999999999998\%$ da velocidade da luz. Para efeito de comparação, o Large Hadron Collider (LHC) no CERN pode acelerar prótons no máximo, cerca de $10^{13} eV$ e portanto, seis ordens de grandeza menor. Devido às interações dos prótons provenientes dos raios gammas com a CMB, não deveria ser possível que raios cósmicos com energias acima E_{GZK} cheguem aos nossos detectores [28]. Com a chegada

dos mensageiros cósmicos, podemos novamente questionar a validade da TRG, para certos regimes. Assim, como Einstein fez com a física Newtoniana, podemos dar início a um novo cenário onde talvez a TRE não seja válida. Portanto, quando estamos em um cenário de energias ultra-altas, talvez seja necessário modificar os postulados desta teoria, de modo, semelhante à transição da Relatividade Galileana/Newtoniana para a Relatividade de Einstein, quando foi introduzida uma escala invariante, a saber, a velocidade da luz no vácuo.

A busca por descrever partículas energéticas nos sugere abandonar a TRE e adotar uma nova relatividade com duas escalas invariantes características, uma nova escala de comprimento ou energia, juntamente com a escala de velocidade familiar. Foi proposto por Giovanni Amelino-Camelia no início dos anos 2000 [29] - um novo cenário para o espaço-tempo cuja estrutura é governada por duas escalas independentes de observadores. É, então, introduzido um novo invariante, uma escala de comprimento mínimo, no caso, a escala de Planck em conjunto com a invariância da velocidade da luz. Neste novo cenário é observado que esses espaços-tempos podem naturalmente hospedar uma modificação da contração de FitzGerald-Lorentz, tal que os comprimentos que em sua estrutura de repouso inercial são maiores do que um “comprimento mínimo” também são maiores do que o comprimento mínimo em todas as outras estruturas inerciais. Essa nova abordagem passou a ser conhecida como Doubly Special Relativity [30], onde as novas leis de transformações passam a ser caracterizadas por duas escalas (c e l_p) em vez de uma única escala. Daí a nomenclatura “duplamente especial”.

A construção de uma teoria compatível com a DSR exige que devamos ter equivalência completa com os observadores inerciais (Princípio da Relatividade). Portanto, as leis de transformações devem ser caracterizadas por duas escalas, uma de altas velocidades e uma de altas energias/curtos comprimentos. Devido ao fato de que a DSR propõe modificações no setor de altas energias, a caracterização operativa da escala de velocidades deve ser preservada. No caso, a velocidade de partículas sem massa com baixas energias deve permanecer sendo a velocidade c . As modificações das relações de dispersão de energia-momento também proporcionarão efeitos no limite da energia E_{GZK} , tornando-se relevantes para o paradoxo relacionado aos raios cósmicos.

2.2 Modificação da Relação de Dispersão e DSRs

No âmbito da busca por uma teoria quântica da gravitação, a introdução de modificações na relação de dispersão de energia-momento tornou-se um ponto central nas teorias que buscam um entendimento da transição do clássico para o quântico. Portanto, a relação de dispersão deve ser objeto da análise. Entretanto, as modificações na relação de dispersão são introduzidas por meio de deformações da simetria de Lorentz, que ocorre

no espaço de momento em vez de no espaço-tempo, tornando-se o espaço de momento fundamental. Assim, as deformações podem ocorrer de formas diferentes. Vamos analisar algumas delas.

2.2.1 DSR I

A primeira proposta de DSR foi apresentada por Amelino-Camelia [29], onde são explicitadas as principais condições para modificar os postulados da TRE, e como vimos, as MDRs pareciam violar o princípio da relatividade. Porém, neste mesmo trabalho, é proposta uma modificação da relação de dispersão que é compatível com a DSR

$$E^2 = m^2 + p^2 + l_p E p^2. \quad (2.11)$$

É possível construir os geradores da simetria de Lorentz deformados que passam a ser compatíveis com essa MDR. Vamos olhar um exemplo de como seria essa construção para uma partícula que esteja se movendo na direção do eixo z , apresentado em [18].

O gerador ao longo do eixo z torna-se

$$B_z^{l_p} \approx i p_z \frac{\partial}{\partial E} + i \left(E + l_p E^2 + l_p \frac{p_z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial p_z}. \quad (2.12)$$

De posse dessas transformações, podemos encontrar os geradores de momentos finitos da maneira usual por meio de $dE/d\zeta = i[B_z^{l_p}, E]$ e $dp_z/d\zeta = i[B_z^{l_p}, p_z]$,

$$E(\zeta) = -c^{-1} \alpha e^\zeta + c^{-1} \beta e^{-\zeta} + l_p c^{-2} \frac{\alpha^2}{2} e^{2\zeta} + l_p c^{-2} \frac{\beta^2}{2} e^{-2\zeta} + l_p c^{-2} \alpha \beta, \quad (2.13)$$

$$p_z(\zeta) = \alpha e^\zeta + \beta e^{-\zeta} - l_p \alpha^2 e^2 e^{2\zeta} + l_p \beta^2 e^2 e^{-2\zeta}, \quad (2.14)$$

onde temos que α e β são funções de $E_0 \doteq E(\zeta = 0)$ e $p_{z,0} \doteq p_z(\zeta = 0)$,

$$\alpha = c \frac{p_{z,0}}{2} - \frac{E_0}{2} - \frac{l_p E_0 p_{z,0}}{2} + \frac{l_p c p_{z,0}^2}{4}, \quad (2.15)$$

$$\beta = c \frac{p_{z,0}}{2} + \frac{E_0}{2} - \frac{l_p E_0 p_{z,0}}{2} - \frac{l_p c p_{z,0}^2}{4}. \quad (2.16)$$

É possível construir resultados semelhantes para os outros elementos do grupo de Lorentz, como as rotações. Também devemos ter concordância entre dois observadores sobre a lei de conservação para as interações das partículas. Como vimos, as transformações de simetria deformadas não são mais lineares. Portanto, neste caso, não são mais compatíveis com a lei de conservação linear dos momentos, que na TRE é. Entretanto, podemos contornar esse problema através de uma covariância entre uma transformação de Lorentz Λ deformada e uma lei de composição de deformada $\oplus$ entre os momentos $\Lambda(p \oplus q) = \Lambda(p) \oplus \Lambda(q)$. Esses resultados são expostos em [29]. Por fim, a DSR I possui compatibilidade com os resultados da LQG e da abordagem relacionada ao espaço-tempo não comutativo [31].

2.2.2 DSR II

Outro modelo de DSR foi proposto independentemente por Magueijo e Smolin [32]. Nesta abordagem, temos que a álgebra de Poincaré é deformada devido à introdução de uma escala de energia invariante, assim, introduzindo um limite máximo para a energia de partículas fundamentais medida por qualquer referencial, como acontece na TRE, onde a velocidade da luz possui um limite para qualquer referencial inercial. O procedimento para a introdução de uma energia máxima é realizado por uma deformação das coordenadas de momento por um mapa U -map $p \rightarrow U(p)$, que carrega todas as informações da DSR.

Em seu trabalho, Magueijo e Smolin [32] realizam uma deformação no espaço de momento por meio do mapa

$$U \triangleright p_\mu \doteq U(p; E_p) = \frac{p_\mu}{1 - l_p p_0}. \quad (2.17)$$

Essa escolha de deformação é responsável por ter a energia de Planck $E_p = l_p^{-1}$ como sendo um limite para a energia das partículas elementares. Neste caso, a relação de dispersão é definida como sendo

$$\|p\|^2 \doteq \eta^{\mu\nu} [U(p; E_p)]_\mu [U(p; E_p)]_\nu = \frac{\eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu}{(1 - l_p p_0)^2}, \quad (2.18)$$

implicando que o espaço de momenta tem uma forma não linear e a norma é preservada por uma transformação não linear do grupo de Lorentz, dada por

$$\tilde{L}_\nu^\mu = U^{-1} \cdot L_\nu^\mu \cdot U, \quad (2.19)$$

onde L_ν^μ são os geradores usuais.

As transformações de boost para os movimentos na direção z podem ser escritas da seguinte forma:

$$p'_0 = \frac{\gamma(p_0 - vp_z)}{1 + l_p(\gamma - 1)p_0 - l_p\gamma vp_z}, \quad (2.20)$$

$$p'_z = \frac{\gamma(p_0 - vp_z)}{1 + l_p(\gamma - 1)p_0 - l_p\gamma vp_z}, \quad (2.21)$$

$$p'_{x,y} = \frac{p_{x,y}}{1 + l_p(\gamma - 1)p_0 - l_p\gamma vp_z}, \quad (2.22)$$

onde temos $\gamma = [1 - v^2]^{-1/2}$.

Posteriormente, em um segundo trabalho, Magueijo e Smolin [33] apresentaram um formalismo geral para teorias que preservam a relatividade dos referenciais inerciais com uma ação não linear das transformações de Lorentz no espaço de momento, partindo de uma medida hipotética de conjunto de relações de dispersão e dela inferindo a ação do grupo. Portanto, qualquer relação de dispersão isotrópica pode ser escrita como sendo

$$E^2 f^2(E; l_p) - p^2 g^2(E; l_p) = m^2 \quad (2.23)$$

onde $f^2(E; l_p)$ e $g^2(E; l_p)$ são funções que dependem da energia/comprimento de Planck. Para essa construção implica que o mapeamento do espaço de momento é dado por

$$U \circ (E, \mathbf{p}) = (Ef, \mathbf{p}g). \quad (2.24)$$

Definindo U desta forma, mapeamos o espaço energia-momento, $\mathcal{P}$, sobre si mesmo. De forma geral o mapa é não invertível. Portanto, deve existir um setor de $\mathcal{P}$, que será chamado de $\mathcal{P}^{físico}$, tal que U , com um intervalo restrito a $\mathcal{P}^{físico}$, é invertível. Os exemplos típicos que surgem da restrição $\mathcal{P}^{físico}$ são $E < E_{Planck}$ ou $\|\mathbf{p}\| < E_{Planck}$, e as escolhas das funções $f(E)$ e $g(E)$ passam a ter um carácter fenomenológico, sendo os dados experimentais utilizados para direcionar a escolha delas.

Nesse novo formalismo, podemos definir as funções $f(E)$ e $g(E)$ compatíveis com a DSR proposta por Amelino-Camelia [29] em (2.11):

$$f(E)^2 E^2 + g(E)^2 p^2 = m^2 \quad (2.25)$$

$$f(E) = 1 \quad g(E) = \sqrt{1 - l_p E}. \quad (2.26)$$

Outros casos de DSR podem ser exemplificados em termos das funções $f(E)$ e $g(E)$ em [33]. São expostos alguns cenários para os quais a velocidade da luz varia, sendo uma alternativa interessante para a inflação cosmológica e a solução do problema do horizonte cosmológico. Neste modelo a relação de dispersão é expressa em termos das funções

$$f(E) = 1 \quad g(E) = 1 + l_p E \quad (2.27)$$

onde a velocidade da luz passa a ser dependente da energia $c(E) = dE/dp = (1 + l_p E)^2$.

Há também outro modelo abordado por Amelino-Camelia, no qual podemos escrever a relação de dispersão modificada em termos das funções $f(E)$ e $g(E)$, como sendo:

$$f(E) = \frac{e^{\alpha E/E_p} - 1}{\alpha E/E_p} \quad g(E) = 1 \quad (2.28)$$

proposto com o objetivo de explicar os espectros dos Gamma-Ray Bursts [34]

2.3 Gravity's Rainbow

Buscamos agora fazer uma extensão da Relatividade Especial Modificada, a DSR proposta por Giovanni Amelino-Camelia [7], para uma modificação na TRG que incorpore as propriedades da DSR. Os modelos de DSR possuem a característica de deformar a cinemática da Relatividade Especial, alterando as leis de conservação de energia-momento e o grupo de simetria de Lorentz, proporcionando novas leis de conservação de energia-momento não lineares. Essas modificações ocorrem ao admitir uma escala de energia invariante, a energia de Planck.

Vimos que os modelos das DSRs são formulados no espaço de momento de forma que sejam não lineares. Para realizarmos uma extensão para a TRG, devemos identificar qual é o espaço dual que representa as posições. Porém, este trabalho não é algo simples de ser feito. Existem algumas propostas para incorporar à DSR uma geometria do espaço-tempo coerente com seus princípios, como por exemplo: Geometria não comutativa [35], κ -Minkowski deformado [36], entre outros.

Em seu trabalho, Magueijo e Smolin [6] propõem abordar o problema de uma outra forma. O espaço-tempo clássico não é representado por apenas uma geometria quando consideramos os efeitos da ordem de $l_p E$, mas por uma família de métricas possuindo um único parâmetro e parametrizada pela razão E/E_p . Portanto, a geometria do espaço-tempo pode depender da energia de uma partícula movendo-se nele. Entretanto, não teremos um espaço dual para o espaço de momento, mas uma família de métricas que depende da energia. Sendo assim, para a estrutura do espaço-tempo com a métrica dada por $g_{ab}(E)$, dependente da energia, se um dado observador que desejar realizar medições sobre a geometria do espaço-tempo recorrer a uma partícula livre ou sistema de partículas, a quantidade E representa a energia total dessa partícula ou sistema de partículas.

Também necessitamos que a métrica seja covariante em relação ao dual da representação não linear do grupo de Lorentz (2.19) se desejamos codificar a DSR. Portanto, usando a equação de mapeamento generalizada (2.24), juntamente com a definição do momento não linear, obtemos:

$$\|p\|^2 \doteq \eta^{AB}[U(p; E_p)]_A[U(p; E_p)]_B = (f_E)^2 p_0^2 - (g_E)^2 p_i^2. \quad (2.29)$$

A ideia proposta por João Magueijo e Smolin [6] é de que a MDR possa ser descrita por campos de tetradas dependentes da energia, que por sua vez produzem uma métrica dependente da energia. De fato, da equação (2.29) é possível escrever

$$\|p\|^2 = \tilde{p}_0^2 - \delta^{IJ} \tilde{p}_I \tilde{p}_J = (\tilde{e}_0^\mu p_\mu)^2 - \delta^{IJ} (\tilde{e}_I^\mu p_\mu) (\tilde{e}_J^\nu p_\nu), \quad (2.30)$$

$$\|p\|^2 = (f_E)^2 p_0^2 - (g_E)^2 \delta^{IJ} p_I p_J = (f_E)^2 (e_0^\mu p_\mu)^2 - (g_E)^2 \delta_{IJ} (e_I^\mu p_\mu) (e_J^\nu p_\nu), \quad (2.31)$$

onde

$$\tilde{e}_O^\mu = f_E e_O^\mu; \quad \tilde{e}_I^\mu = g_E e_I^\mu, \quad (2.32)$$

e a inversa de e_A^μ é θ_μ^A , isto é, $e_A^\mu \theta_\mu^B = \tilde{e}_A^\mu \tilde{\theta}_\mu^B = \delta_A^B$, o que implica que

$$\tilde{\theta}_\mu^O = (f_E)^{-1} \theta_\mu^O; \quad \tilde{\theta}_\mu^I = (g_E)^{-1} \theta_\mu^I. \quad (2.33)$$

Portanto, o elemento de linha é dado por

$$ds^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \tilde{\theta}_\mu^A \tilde{\theta}_\nu^B \eta_{AB} dx^\mu dx^\nu = (\theta_0^0)^2 \frac{(dx^0)^2}{(f_E)^2} - \delta_{IJ} \theta_i^I \theta_j^J \frac{1}{(g_E)^2} dx^i dx^j \quad (2.34)$$

onde δ_{IJ} é o delta de Kronecker, para $I, J = 1, 2, 3$. Portanto, temos um espaço-tempo deformado de forma inversa ao espaço de momento [6].

A métrica deformada (2.34) é uma família de métricas planas de um único parâmetro - a energia E - onde todas as métricas possuem o mesmo sistema de referenciais, entretanto, devido às escalas de energia, provavelmente essas métricas não compartilham todas as geodésicas. Na verdade, o que teremos são geodésicas que passam a depender da energia da partícula. Dessa forma, uma vez que temos um espaço-tempo sondado por cada partícula dependente de sua energia ou frequência, nos referimos a isso como um espaço-tempo Rainbow, no sentido de que a geometria do espaço-tempo e as trajetórias dependem da “cor” da partícula, ou energia da partícula, ou ainda frequências de onda associada. Neste caso, chamamos a teoria de Gravity's Rainbow, fazendo alusão a ideia de um arco-íris.

Os argumentos apresentados são válidos para um espaço-tempo plano, mas é possível transportarmos, localmente, para espaços-tempos curvos usando o princípio da equivalência modificado e recuperarmos a TRG por meio do princípio da correspondência modificado [6].

- **Princípio da Equivalência Modificado:** Seja dada uma região do espaço-tempo cujo raio de curvatura R é muito maior que o comprimento de Planck $l_p = E_p^{-1}$. Para observadores que fazem medidas sobre propriedades associadas a partículas e campos, com energias que satisfazem $1/R \ll E \ll E_p$, as leis da física são, em primeira ordem em $1/R$, as mesmas da Relatividade Especial Modificada, no caso, a DSR. Portanto, observadores em queda livre podem ser descritos como sendo observadores inerciais no espaço-tempo da G'sR, assintoticamente plano.
- **Princípio da Correspondência Modificado:** Devemos recuperar a TRG quando estamos trabalhando com energias muito baixas comparadas com a escala de Planck. Portanto, quando $E/E_p \rightarrow 0$, recuperamos a TRG como é esperado.

A modificação desses dois princípios possibilita estender a DSR para o contexto onde temos campo gravitacional, construindo uma teoria da gravidade na qual o espaço-tempo depende da energia das partículas que o percorrem, o que significa dizer que a métrica será dependente da energia $g(E) = \eta^{AB} \tilde{e}_A(E) \otimes \tilde{e}_B(E)$, e portanto,

$$\tilde{e}_0(E) = \frac{1}{f_E} e_0; \quad \tilde{e}_i(E) = \frac{1}{f_E} e_i. \quad (2.35)$$

As funções f_E e g_E são denominadas funções rainbow. O princípio da correspondência modificado exige que:

$$\lim_{E/E_p \rightarrow 0} f(E/E_p) = \lim_{E/E_p \rightarrow 0} g(E/E_p) = 1 \quad (2.36)$$

Com essas definições e modificações é possível construir uma família de conexões $\nabla(E)_\mu$ e curvaturas $R(E)^\sigma_{\mu\nu\lambda}$ definidas de forma usual, mas dependentes da energia. Também é definida uma família com um único parâmetro do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}(E)$ e, por fim, as equações de Einstein é substituídas por uma família de equações com um parâmetro que é a energia E , dada por

$$G_{\mu\nu}(E) = 8\pi G(E)T_{\mu\nu}(E) + g_{\mu\nu}(E)\Lambda(E), \quad (2.37)$$

onde a constante de Newton $G(E)$ dependente da energia, e é definida de tal forma que $G(0)$ é a constante usual da teoria Newtoniana. Da mesma forma, a constante cosmológica, $\Lambda(E)$, também é dependente da energia. Temos agora todo o arcabouço necessário para estudarmos problemas da TRG, mas agora no contexto da G'sR. Na próxima seção iremos analisar uma família de funções rainbow.

2.4 Funções Rainbow

Vimos que a construção da relação de dispersão modificada é realizada por escolhas fenomenológicas e citamos alguns exemplos delas em (2.2) e que poderíamos escrever uma relação modificada generalizada (2.23) em termos das funções rainbow. Nesta dissertação iremos adotar as funções:

$$f(E/E_p) = 1, \quad g(E/E_p) = \sqrt{1 - \eta \left(\frac{E}{E_p} \right)^n}, \quad (2.38)$$

$$E^2 - p^2 + p^2 \eta \left(\frac{E}{E_p} \right)^n = m^2, \quad (2.39)$$

onde η é um parâmetro adimensional, podendo ser negativo ou positivo. Essas funções juntamente com a MDR proporcionam resultados compatíveis com as teorias de cordas, Loop Quantum Gravity, espaço-tempo não comutativo de κ -Minkowski, entre outros. Elas têm sido usadas para estudar a dispersão de ondas eletromagnéticas de Gamma Ray Bursts [23]. Também propõem resolver o paradoxo dos raios gamma de energias ultra altas [7, 37], e o paradoxo dos raios gama de 20 TeV da galáxia Markarian 501 [38]. Além disso, esta MDR fornece restrições sobre deformações da TRE e violações de Lorentz [39, 40]. Para discussões sobre as implicações fenomenológicas das funções (2.38) na revisão, veja [31].

Muitas vezes desejamos obter as funções rainbow apenas em termos dos parâmetros do espaço-tempo. Uma forma de fazer isso é relacionar a energia dos fótons que circundam o buraco negro que os irradia. Esta afirmação ficará mais clara quando introduzirmos os estudos sobre termodinâmica de buracos negros. No momento, é de interesse dizermos apenas que a energia de um fóton é dada pela relação de dispersão modificada (2.38), e que relacionamos o momento de um fóton com o raio do horizonte de eventos de um buraco negro através da relação de incerteza de Heisenberg $\Delta p \Delta x \geq 1$, onde fazemos

$\hbar = 1$ e cuja posição seja $\Delta x \approx r_h$, o que nos leva à $\Delta p = 1/r_h$. É importante chamar a atenção que o autor em [41] usa $p = E$ - que seria a relação de dispersão usual proposta por Einstein - no princípio de incerteza de Heisenberg, o que levaria à possibilidade da existência de buracos negros remanescentes. Todavia, se estamos trabalhando com uma relação de dispersão modificada, devemos recorrer a ela. Este problema foi mencionado e corrigido em [42], onde a MDR correta foi usada. Contudo, muitos autores ainda afirmam que a G'sR permitiria buracos negros remanescentes com base nos estudos apresentados em [41]. Voltaremos a discutir este tópico quando abordarmos a termodinâmica desses objetos.

Desejamos obter as energias dos fótons que permeiam o buraco negro. Neste caso, temos $m = 0$ e a MDR (2.39) resulta em

$$E^2 - p^2 + p^2 \eta \left(\frac{E}{E_p} \right)^n = 0 \quad (2.40)$$

onde temos uma equação polinomial para E de ordem n e cujo parâmetro η está relacionado com propriedades da Loop Quantum Gravity que permite valores positivos e negativos para η . Para resolvermos a equação (2.40) é necessário escolhermos valores para n e estudar em quais condições teremos energias físicas. Vamos analisar alguns valores para $n = (0, 1, 2, 4)$. Note que para $n = 0$ temos apenas um reescalonamento na equação (2.40) e a partir de $n \leq 1$ temos correções nos valores. É feita a análise até $n = 4$, em que é deixado de lado $n = 3$ pela dificuldade de obter uma solução para (2.40).

Para o caso onde temos $n = 0$, a MDR torna-se uma equação simples

$$E^2 + \eta p^2 - p^2 = 0 \quad (2.41)$$

onde a energia do fóton é dada por

$$E_{n=0} = \pm p \sqrt{1 - \eta}. \quad (2.42)$$

Neste caso, temos duas soluções para energia. Porém, apenas uma é positiva e o parâmetro adimensional $\eta \leq 1$.

Para $n = 1$, a MDR torna-se uma equação um pouco mais complicada

$$E^2 - p^2 + \eta p^2 \frac{E}{E_p} = 0. \quad (2.43)$$

cujas as soluções são dadas por

$$E_{n=1} = \pm \frac{p \left(-\eta p + \sqrt{4E_p^2 + \eta^2 p^2} \right)}{2E_p}. \quad (2.44)$$

Entretanto, não podemos dizer qual das soluções é positiva ou negativa, uma vez que o parâmetro η pode ser negativo ou positivo. Neste caso, podemos olhar para um

gráfico onde consideramos tanto o caso com η positivo, quanto negativo. Este resultado está expresso na figura (1a). Podemos ver que apenas uma das soluções possibilita uma energia positiva, que neste caso devemos optar pela solução com o sinal positivo.

Considerando agora $n = 2$, teremos uma equação do segundo grau para E , dada por

$$E^2 - (1 - \eta(\frac{E}{E_p})^2)p^2 = 0. \quad (2.45)$$

A solução é dada por

$$E_{n=2} = \pm E_p p \frac{1}{\sqrt{E_p^2 + \eta p^2}}. \quad (2.46)$$

Neste caso, é fácil ver que apenas uma delas produz energia positiva e temos $\eta > E_p^2/p^2$

Por último, consideremos o caso com $n = 4$. Teremos a seguinte MDR sendo uma equação bi-quadrática em E :

$$E^2 - (1 - \eta(\frac{E}{E_p})^4)p^2 = 0. \quad (2.47)$$

Produzindo quatro soluções possíveis para E , são elas:

$$E_{sol1} = - \frac{\sqrt{2}\sqrt{-\frac{E_p^4}{\eta} - \frac{E_p^2\sqrt{E_p^4+4\eta p^4}}{\eta}}}{2p} \quad (2.48)$$

$$E_{sol2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{-\frac{E_p^4}{\eta} - \frac{E_p^2\sqrt{E_p^4+4\eta p^4}}{\eta}}}{2p} \quad (2.49)$$

$$E_{sol3} = - \frac{\sqrt{2}\sqrt{-\frac{E_p^4}{\eta} + \frac{E_p^2\sqrt{E_p^4+4\eta p^4}}{\eta}}}{2p} \quad (2.50)$$

$$E_{sol4} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{-\frac{E_p^4}{\eta} + \frac{E_p^2\sqrt{E_p^4+4\eta p^4}}{\eta}}}{2p} \quad (2.51)$$

É possível ver que duas soluções não são aceitáveis por permitir energias negativas. É o caso de (2.48) e (2.50). Entretanto, para discutirmos as condições possíveis para energias positivas das outras soluções, devemos analisar o gráfico da energia em função do raio do horizonte de eventos. Este resultado está apresentado na figura (1b). Podemos ver que as soluções (2.48) e (2.50) produzem, de fato, energias negativas independentemente do valor para η . Em contrapartida, a solução (2.51) é válida para todos os valores de $p = 1/r_h$ quando consideramos valores $\eta > 0$. Já para valores de $\eta < 0$, devemos ter $p^4 \geq -E_p^4/4\eta$. Por fim, a solução (2.49) também produz uma energia positiva desde que consideremos $\eta < 0$ e $p^4 \geq -E_p^4/4\eta$. Podemos ver que ao considerarmos as soluções (2.49) e (2.51) para $\eta < 0$, elas parecem ser contínuas, portanto, podemos considerá-las como uma solução real, válida mesmo que não cubra todos os valores para o raio do horizonte.

Feita a análise das energias fisicamente possíveis, podemos voltar para as funções rainbow, dadas pela equação (2.38). Devemos substituir a energia correspondente para cada n . Não teremos mudanças para a função f_E . Entretanto, para a função g_E , onde consideremos $E_p = 1$ e $p = 1/r_h$, temos as seguintes relações:

Para $n = 0$, temos

$$g_{E_{n=0}} = \sqrt{1 - \eta} \quad (2.52)$$

com $\eta \leq 1$.

Para $n = 1$, encontramos

$$g_{E_{n=1}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{-\eta(-\eta + \sqrt{\eta^2 + 4r_h^2}) + 2r_h^2}}{2r_h} \quad (2.53)$$

Para $n = 2$, temos

$$g_{E_{n=2}} = \frac{r_h}{\sqrt{\eta + r_h^2}}. \quad (2.54)$$

Por fim, para $n = 4$ teremos duas funções g_E , que são

$$g_{E_{sol2;n=4}} = r_h \sqrt{1 - \frac{(r_h^2 + \sqrt{4\eta + r_h^4})^2}{4\eta}} \quad (2.55)$$

$$g_{E_{sol4;n=4}} = \sqrt{2}r_h \sqrt{\frac{-r_h^2 + \sqrt{4\eta + r_h^4}}{4\eta}}. \quad (2.56)$$

Essas funções irão desempenhar papel importante ao longo desta dissertação, sendo assim, podemos iniciar o estudo dos buracos negros na Gravity's Rainbow.

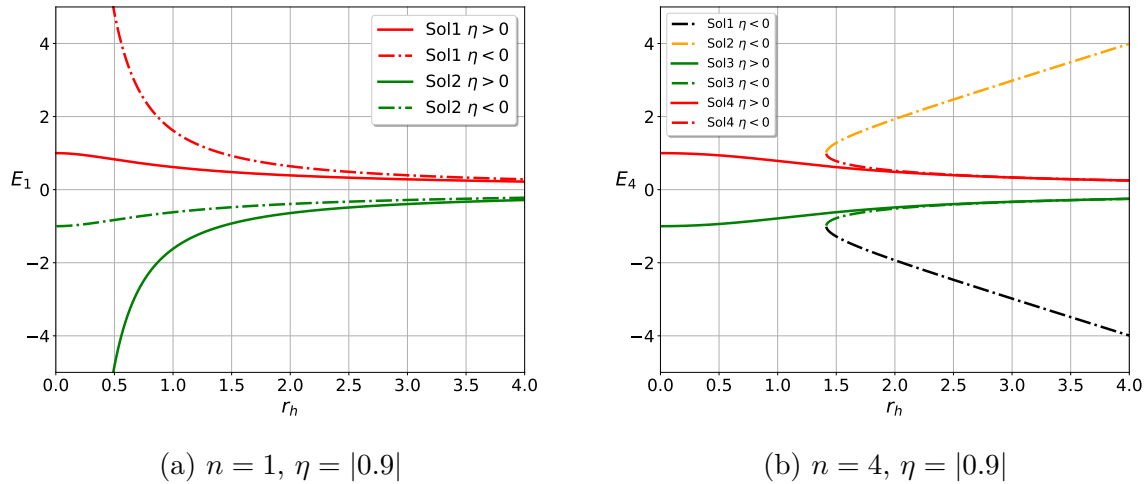


Figura 1 – Gráfico da Energia em função do raio do horizonte de eventos para as soluções da relação de dispersão modificada considerando os casos com $n = 1$ e $n = 4$

3 Buracos Negros na Gravity's Rainbow

A teoria da evolução estelar nos diz que estrelas cujas massas são da ordem da massa do Sol podem atingir um estado de equilíbrio final como uma anã branca ou uma estrela de nêutrons. Mas, para massas muito maiores, esse equilíbrio talvez não seja possível. Assim, estrelas muito maiores que o Sol em seu processo final de vida iriam consumir toda sua reserva energética e começariam a se contrair a tal ponto que os efeitos gravitacionais superariam a pressão interna e as tensões, não sendo mais capazes de interromper o processo de colapso. Segundo a (TRG), uma estrela esfericamente simétrica necessariamente se contrairá até que toda a matéria contida na estrela fique estrita a um ponto no centro da simetria. Este processo do colapso gravitacional de uma estrela produz os conhecidos buracos negros [43]. Estes são capazes de produzir uma região com gravidade tão intensa que nem a luz escapa de sua atração [44].

O conceito de buraco negro antecede a TRG. Podemos imaginar o buraco negro como sendo um objeto do qual uma partícula escaparia somente se sua velocidade de escape fosse maior que a velocidade da luz. Utilizando a física Newtoniana, podemos calcular qual deve ser o maior raio r para o qual um corpo esférico de massa M produz uma gravidade tão intensa a ponto de impedir partículas massivas de escaparem (em 1795 é realizado uma estimativa do raio feito por Laplace [45]). A velocidade de escape de um objeto na superfície de um corpo de massa M é $v = 2GM/r$. Se escolhermos a velocidade de escape como sendo a velocidade da luz, $v = c$, teremos que o raio é $r = 2GM/c$.

A imagem clássica de que buracos negros não podem ser “vistos” e que absorvem tudo sem emitir qualquer radiação ou partícula foi confrontada por Hawking na década de 1970 [46] e juntamente com base nas ideias acerca da termodinâmica de buracos negros [47, 48, 49] uma nova imagem a respeito desses objetos passou a ser construída. A entropia é então identificada com a área do horizonte de eventos proporcionando certo sentido, tendo em vista que a informação perdida sobre um buraco negro é proporcional à área do horizonte [49]. No entanto, a ideia de que o buraco negro tem uma temperatura a ele associada, é mais sutil. Como um buraco negro pode ter uma temperatura? Para se falar de temperatura, é preciso estar em equilíbrio com um banho térmico, e para isto é necessário não somente absorver, mas também, emitir partículas. A resolução para este problema pode ser encontrada no contexto da teoria quântica de campos, com o buraco negro sendo tratado em um cenário, no qual os campos quânticos existem. Neste caso, encontramos que os buracos negros emitem partículas - radiação a uma temperatura

$$T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi} \quad (3.1)$$

em unidades em que $c = \hbar = G = k_B = 1$, sendo κ a gravidade superficial do horizonte

de eventos. No caso do buraco negro de Schwarzschild, para o qual $\kappa = 1/4M$, temos que

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \approx 10^{-6} K \times \left(\frac{M_0}{M} \right), \quad (3.2)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e M_0 é a massa do Sol, e introduzimos as constantes c e G . Portanto, um buraco negro típico, oriundo de um colapso estelar tem uma temperatura da ordem de $10^{-6}K$, que é muito menor do que a da Radiação Cósmica de Fundo. Hawking mostrou que, ao serem considerados efeitos quânticos na vizinhança dos buracos negros, eles emitem partículas, produzindo um espectro térmico como um corpo negro [50, 47, 49, 48].

A existência de buracos negros nos leva a questionar se as singularidades presentes são de fato reais - uma característica da natureza - ou uma quebra da teoria nas escalas de comprimento pequeno. Os teoremas de singularidades de Penrose e Hawking mostram que em certas condições, as singularidades parecem ser inevitáveis assumindo-se a TRG [51, 52]. Tais questionamentos podem sugerir a necessidade de uma teoria mais fundamental que seja capaz de descrever a física nos regimes próximos às singularidades. Devido às suas características, os buracos negros passaram a ganhar destaque na física contemporânea, dada a conexão entre gravitação, termodinâmica e teoria quântica que eles proporcionam, podendo ser uma chave para uma teoria quântica da gravitação.

No ano de 2015, os buracos negros ganharam destaque devido às primeiras observações de ondas gravitacionais pelos experimentos LIGO/VIRGO, o que rendeu a Rainer Weiss, Barry C. Barish e Kip S. Thorne o prêmio Nobel de física de 2017 [1]. Em 2019 foi exibida a primeira “foto” de um buraco negro, *M87*, realizada pelo Telescópio do Horizonte de Eventos (The Event Horizon Telescope - EHT), que é uma rede de oito radiotelescópios potentes, que trabalharam em conjunto para “fotografar” a sombra do buraco negro [53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60]. Em 2020 foram laureados com o prêmio Nobel, os cientistas Roger Penrose, Reinhard Genzel e Andrea Ghez, pelos seus trabalhos com buracos negros. Penrose, por meio de métodos matemáticos impressionantes, provou que os buracos negros são estruturas inerentes à TRG [61], enquanto os trabalhos de Reinhard Genzel e Andrea Ghez descobriram provas irrefutáveis de que há de fato um objeto compacto de grande massa no centro da Via Láctea, hoje conhecida pelo nome de Sagitário A* [62, 63, 64].

Neste capítulo iremos tratar alguns aspectos da física de buracos negros, estudando as propriedades geométricas das soluções estáticas e estacionárias, mas no contexto da G'sR. Buscaremos analisar as implicações que surgem ao inserirmos uma nova escala independente de observadores e uma métrica dependente da energia do observador.

3.1 Espaço-tempo modificado de Schwarzschild

Para estudarmos a solução modificada de Schwarzschild a saber, a solução correspondente à de Schwarzschild, porém, no contexto da G'sR, devemos adotar a simetria esférica mais geral possível, lembrando que agora teremos uma métrica dependente da energia. Podemos escrever a métrica em coordenadas dependentes da energia ou coordenadas independentes. Vamos denotar as coordenadas independentes da energia, como sendo as coordenadas (r, t, θ, ϕ) . É possível absorver a dependência da energia nas coordenadas radial e temporal, construindo, desta forma, coordenadas dependentes da energia, que serão denotadas por $\tilde{r}(E), \tilde{t}(E)$. Em contrapartida, as coordenadas θ, ϕ são sempre independentes da energia. As coordenadas independentes e dependentes da energia coincidirão no limite $E/E_p \rightarrow 0$, recuperando a TRG.

A métrica mais geral com simetria esférica em termos das coordenadas independentes da energia é dada por

$$ds^2 = \frac{A(r)}{f_E^2} dt^2 - \frac{B(r)}{g_E^2} dr^2 - \frac{r^2}{g_E^2} d\Omega^2, \quad (3.3)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Temos que r é a coordenada da área, definida de forma que seja proporcional à raiz quadrada de uma área medida naquele raio por observadores no limite $E/E_p \rightarrow 0$. Contudo, como a métrica é dependente da energia, observadores usando quanta de energia E irão medir uma esfera com r constante, ao passo que, uma área diferente é medida por observadores que usam $E = 0$ para sondar o espaço-tempo. Portanto, a coordenada de área coerente para realizar medições por quanta de energia deve ser

$$\tilde{r}(E) = \frac{r}{g_E}. \quad (3.4)$$

Podemos, então, definir novas funções dependentes da energia:

$$\tilde{A}(\tilde{r}(E), E) = A(r) \quad (3.5)$$

$$\tilde{B}(\tilde{r}(E), E) = B(r). \quad (3.6)$$

Também é possível definir uma nova coordenada temporal, dependente da energia, dada por

$$\tilde{t}(E) = \frac{t}{f_E}. \quad (3.7)$$

Então a métrica passa a ter a seguinte forma:

$$ds^2 = \tilde{A}(\tilde{r}(E), E) d\tilde{t}(E)^2 - \tilde{B}(\tilde{r}(E), E) d\tilde{r}(E)^2 - \tilde{r}(E)^2 d\Omega^2. \quad (3.8)$$

Sendo assim, temos uma família de métricas de um único parâmetro. O Teorema de Birkoff's nos garante que a solução das equações de Einstein com simetria esférica na

ausência da matéria e estática, é dada pela métrica de Schwarzschild. Portanto, a solução para o espaço vazio é

$$\tilde{A}(\tilde{r}(E), E) = \tilde{B}^{-1}(\tilde{r}(E), E) = \left(1 - \frac{\tilde{C}(E)}{\tilde{r}(E)}\right), \quad (3.9)$$

com $\tilde{C}(E)$ uma constante de normalização que agora depende da energia.

Entretanto, determinamos a dependência energética da constante de integração ao lembrarmos que por (3.6), toda a dependência energética nas coordenadas independentes de energia deve estar nas funções f_E e g_E , como explicitado na forma original (3.3). Portanto, temos

$$\tilde{A}(\tilde{r}(E), E) = \left(1 - \frac{\tilde{C}(E)g_E}{r}\right) = A(r). \quad (3.10)$$

Recorrendo ao princípio da correspondência, que diz que no limite de baixas energias, comparadas à energia de Planck a TRG é recuperada, concluímos que

$$\tilde{C}(E) = \frac{2G(0)M}{g_E}, \quad (3.11)$$

onde M é a massa independente da energia e $G(0)$ é a constante gravitacional de Newton. Por fim, em termos das coordenadas independentes, a métrica modificada de Schwarzschild no contexto da G'sR assume a forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G(0)M}{r}\right) \frac{dt^2}{f_E^2} - \frac{1}{\left(1 - \frac{2G(0)M}{r}\right)} \frac{dr^2}{g_E^2} - \frac{r^2}{g_E^2} d\Omega^2. \quad (3.12)$$

Muitas vezes, um dado sistema de coordenadas não é capaz de cobrir toda a variedade que representa o espaço-tempo. Por exemplo, os eixos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ não podem ser descritos por essa métrica nas coordenadas (t, r, θ, ϕ) , já que para tais valores do ângulo θ , o elemento de linha é degenerado. Essas regiões são conhecidas como singularidades de coordenadas, pois refletem uma inadequação do sistema de coordenadas escolhido, que pode ser resolvida através de uma transformação de coordenadas.

Entretanto, a métrica (3.12) também é degenerada em outros dois casos: $r = 0$ e $r = 2G(0)M$. Assim, qual deve ser o critério para decidir se uma singularidade está associada às coordenadas usadas ou é intrinsecamente associada à natureza da solução? Poderíamos calcular alguns invariantes associados à curvatura, e se algum deles divergisse, estaríamos na presença de uma singularidade intrínseca ou "essencial", pois a invariância nos assegura que a divergência aconteceria em qualquer sistema coordenado. Portanto, devemos calcular um dos invariantes e verificar o que acontece quando fazemos $r = 0$ e $r = 2G(0)M$. Para esta análise, vamos calcular o escalar de Kretschmann (usando as unidades naturais $G(0) = c = 1$), definido por

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (3.13)$$

cujo resultado, no presente caso, é

$$K = g_E^2 \frac{48M^2}{r^6}. \quad (3.14)$$

Verificamos que o escalar de Kretschmann contém a função rainbow g_E . Para $r = 0$, o escalar de Kretschmann diverge, portanto, temos uma singularidade essencial, intrínseca ou física. Mas o escalar de Kretschmann não permite concluir nada sobre a superfície $r = 2M$.

Vamos olhar para a superfície $r = r_h = 2M$, conhecida como horizonte de eventos, com desvio para o vermelho infinito, cujo raio é denominado raio de Schwarzschild. Vimos que o escalar de Kretschmann não diverge para este raio. Veremos que o horizonte de eventos é uma singularidade removível. Sendo assim, precisamos fazer uma mudança de coordenadas. Mas antes, vamos estudar esse espaço-tempo.

Interpretamos a solução de Schwarzschild como uma solução exterior a algum corpo esférico de raio $r > 2M$. No entanto, nosso objetivo é estudar a solução de vácuo de Schwarzschild abstraída de qualquer fonte para os valores de r . Portanto, devemos incluir $r = 2M$, que é uma hipersuperfície nula que divide a variedade em dois componentes desconectados:

I. $2M < r < \infty$.

II. $0 < r < 2M$.

Dentro da região II as coordenadas t e r possuem seu carácter alterado. A coordenada t agora passa a ser tipo-espaço e r é tipo-tempo, produzindo efeitos no cone de luz, como veremos mais adiante.

3.1.1 Diagrama do espaço-tempo modificado de Schwarzschild

Buscamos agora explorar mais do significado do horizonte de eventos, estudando o cone de luz no espaço-tempo modificado de Schwarzschild e as implicações das funções rainbow.

Na TRG, a luz determina um limite superior de quão rápido as partículas podem viajar e também serve como uma medida do quanto uma informação demora para ser recebida. Em toda a história humana, sempre olhamos para as estrelas contemplando quais seriam aqueles mundos, e se seriam habitados por vidas inteligentes. Einstein, com sua nova teoria, nos revelou que, ao olharmos para essas estrelas, estávamos na verdade olhando para o passado delas. O cone de luz nos diz de qual região do espaço-tempo podemos acessar as informações: se nossa linha-mundo estiver fora do futuro do cone de luz de algum evento, então nunca iremos obter informações sobre ele. Mas, esta afirmação

ainda continua válida para uma teoria onde o espaço-tempo também depende da escala de energia? Para responder a esta pergunta, devemos fazer um estudo da estrutura das geodésicas e suas relações com as funções rainbow.

Usando o princípio variacional [65], a métrica (3.12) pode ser deduzida da densidade Lagrangiana $\mathcal{L}$, dada através da relação

$$2\mathcal{L} = \frac{F(r)}{f_E^2} \dot{t}^2 - \frac{1}{F(r)g_E^2} \dot{r}^2 - \frac{r^2}{g_E^2} \dot{\Omega}^2, \quad (3.15)$$

onde $F(r)$ é a função usual do espaço-tempo modificado de Schwarzschild

$$F(r) = 1 - \frac{r_h}{r}, \quad (3.16)$$

e $\dot{\Omega}^2 = \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2$. Nesta notação, o “ponto” representa derivada em relação ao tempo próprio, τ (um parâmetro afim ao longo de uma geodésica). Note que a Lagrangiana não depende de (t, ϕ) , portanto, temos uma simetria temporal e uma azimutal. Assim, teremos algumas quantidades físicas conservadas. Utilizando as equações de Euler-Lagrange podemos obter as geodésicas e os momentos conjugados conservados correspondentes a (t, ϕ) . Logo, considerando o plano $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \frac{F(r)\dot{t}}{f_E^2}. \quad (3.18)$$

o que nos leva a:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{F(r)\dot{t}}{f_E^2} \right) = 0 \longrightarrow \frac{F(r)\dot{t}}{f_E^2} = E = \text{const.} \quad (3.19)$$

Temos uma quantidade física conservada e associada à coordenada temporal, esta quantidade é a energia E .

Derivando em relação à coordenada ϕ , temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = -\frac{r^2 \dot{\phi}}{g_E^2}, \quad (3.21)$$

o que nos leva a:

$$\frac{d}{d\tau} \left(-\frac{r^2 \dot{\phi}}{g_E^2} \right) = 0, \longrightarrow \frac{r^2 \dot{\phi}}{g_E^2} = L = \text{const.} \quad (3.22)$$

Novamente, temos uma quantidade física conservada, neste caso, associada à simetria de rotação. Esta quantidade é o momento angular. Definindo as quantidades

$$\mathbb{E} = f_E E; \quad \mathbb{L} = g_E L, \quad (3.23)$$

e um parâmetro afim dependente da energia, $\bar{\tau} = g_e \tau$. A Lagrangiana (3.15) pode ser escrita na forma

$$2\mathcal{L} = m = \frac{\mathbb{E}^2}{F(r)} - \frac{\dot{r}^2}{F(r)} - \frac{\mathbb{L}^2}{r^2}, \quad (3.24)$$

onde $\dot{r} = \frac{dr}{d\bar{\tau}}$. Por normalização, fazemos $m = 1$ para representar uma partícula com massa, que terá geodésicas tipo-tempo. Agora, fazendo $m = 0$ (partículas sem massa), teremos geodésicas tipo-luz. Portanto, a equação de movimento torna-se:

$$\dot{r}^2 = \mathbb{E}^2 - \mathbb{V}_G(r; m, \mathbb{L}), \quad (3.25)$$

onde $\mathbb{V}_G(r; m, \mathbb{L})$ é o potencial generalizado efetivo, que é dado por

$$\mathbb{V}_G(r; 0, \mathbb{L}) \equiv \mathbb{V}_N(r, \mathbb{L}) = F(r) \frac{\mathbb{L}^2}{r^2} \quad (3.26)$$

para geodésicas nulas, e por

$$\mathbb{V}_G(r; 1, \mathbb{L}) \equiv \mathbb{V}_T(r, \mathbb{L}) = F(r) \left(1 + \frac{\mathbb{L}^2}{r^2}\right) \quad (3.27)$$

para geodésicas tipo-tempo.

3.1.2 Geodésicas nulas e cones de luz

Vamos considerar o movimento radial de um feixe de luz no espaço-tempo modificado de Schwarzschild. O movimento radial significa que a velocidade angular é zero, então a parte angular é nula ($\mathbb{L} = 0$). Como estamos considerando um feixe de luz, a massa da partícula também é nula ($m = 0$). Portanto, devemos trabalhar com a equação (3.25), onde teremos o termo (3.26) sendo nulo. Logo, temos:

$$\dot{r} = \pm \mathbb{E}. \quad (3.28)$$

O sinal $+$ ($-$) corresponde às geodésicas outgoing(ingoing). Como $\bar{\tau} = g_E \tau$, $d\tau/d\bar{\tau} = 1/g_E$. Consequentemente, temos:

$$\frac{dr}{d\bar{\tau}} = \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{d\bar{\tau}} = \mathbb{E}. \quad (3.29)$$

Usando a equação (3.23) e $\Delta r = dr/d\tau$ podemos escrever o seguinte resultado:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta\tau_{Sch}}{\Gamma_1}, \quad (3.30)$$

onde $\Delta\tau_{Sch} = \Delta r/E$ é o tempo próprio usual de Schwarzschild na TRG, e $\Gamma_1 = g_E f_E$, fator que depende da energia do observador. Aqui surgem os primeiros resultados de uma métrica dependente da energia, com o tempo próprio reescalado por uma família de funções f_E e g_E .

Podemos ainda obter uma expressão para a coordenada t . Das equações (3.19) e (3.29) encontramos a seguinte expressão:

$$\Delta t = \Gamma_2 \Delta t_{Sch} = \Gamma_2 (r + r_h \ln |r - r_h| + const) \quad (3.31)$$

onde $\Gamma_2 = f_E/g_E$. Da equação (3.31), podemos ver que, para a região com $r > r_h$, temos as geodésicas nulas se distanciando (outgoing) do horizonte do buraco negro. E quando fazemos $t \rightarrow -t$, teremos geodésicas nulas se aproximando (ingoing) do horizonte do buraco negro. Porém, devido ao fato de que Γ_2 depende das funções rainbow e surgir como um termo multiplicativo na equação (3.31), teremos alterações nos cones de luz. Quando temos $f_E = g_E$, então $\Gamma_2 = 1$, e nenhuma alteração acontece. Entretanto, para $\Gamma_2 > 1$, o cone de luz passa a ser mais estreito. Já para $\Gamma_2 < 1$, o cone de luz é alargado. Podemos ver esses resultados na figura (2), onde consideramos a família de MDR (2.39) e as funções rainbow (2.38). Para $n = 2$, teremos $f_E = 1$ e g_E dada por (2.54), e escolhendo $\eta = |1|$. Para os outros valores de n teremos um comportamento semelhante.

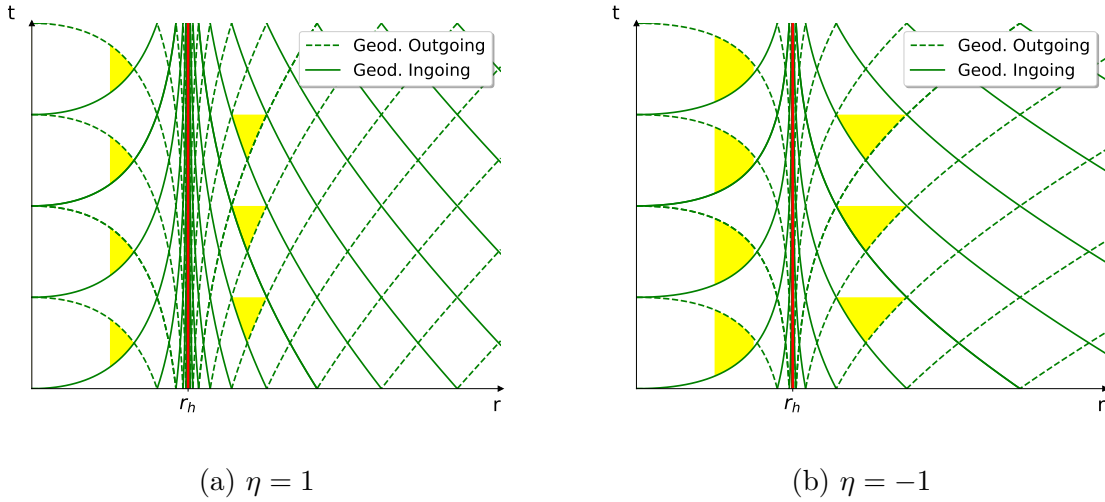


Figura 2 – Geodésicas nulas e cones de luz em coordenadas de Schwarzschild Modificado. Para $n = 2$

Para a região em que $r < r_h$, os cones de luz mudam de direção, tornando-se horizontais, devido ao fato das coordenadas r e t trocarem de natureza. Para essa região, o único caminho possível para o observador é ir em direção à singularidade, na origem, $r = 0$. E para $r \rightarrow \infty$, os cones de luz formam um ângulo de $\Gamma_2 45^\circ$ entre si, e a função Γ_2 acaba produzindo uma alteração na estrutura dos cones de luz. Sendo assim, uma nova característica surge ao considerarmos um espaço-tempo dependente da energia. Temos partículas sem massa podendo acessar velocidades menores que c , produzindo cones de luz mais fechados, como mostrado na figura (2a). E este efeito é conhecido como subluminal e que está associado à escolha do $\eta > 0$. O contrário acontece na figura (2b), quando temos feixes de luz que alcançam velocidades maiores que c , produzindo cones de luz mais

abertos, este resultado é chamado de superluminal e está associado à escolha de $\eta < 0$. Às características subluminal e superluminal são resultados comparáveis ao que se esperava na TRG.

Um ponto importante a ressaltar é a constante c . Por mais que os feixes de partículas sem massa possam alcançar velocidades maiores ou menores que c , ela ainda permanece sendo uma constante fundamental. Portanto, seu valor não muda quando temos um espaço-tempo que depende da energia quando comparamos com a energia de Planck.

3.1.3 Objeto massivo em queda livre

Vamos, agora, considerar uma partícula com massa, que está em queda livre, caindo radialmente no buraco negro. Voltamos à equação de movimento (3.25), onde temos o potencial efetivo (3.27), porém para $\mathbb{L}$ nulo, pois estamos considerando o movimento radial. Sendo assim, temos:

$$\left(\frac{dr}{d\bar{\tau}}\right)^2 = \frac{r_h}{r} - (1 - \mathbb{E}^2), \quad (3.32)$$

$$\frac{dt}{d\bar{\tau}} = \frac{f_E \mathbb{E}}{g_E(1 - r_h/r)}. \quad (3.33)$$

Vamos considerar as trajetórias de partículas que partem do repouso a alguma distância finita r_i e caem em direção ao centro do buraco. Neste caso, temos $dr/d\bar{\tau} = 0$ e a distância inicial está relacionada com a contante $\mathbb{E}$ por

$$r_i = \frac{r_h}{1 - \mathbb{E}^2}. \quad (3.34)$$

É conveniente fazermos uma mudança de variável para trabalharmos com as equações de movimento. Adotando $R = \frac{r}{r_i} = \cos^2(\gamma/2)$, teremos as seguintes relações:

$$r = r_i \rightarrow \gamma_i = 0, \quad (3.35)$$

$$r = r_h \rightarrow \gamma_h = 2 \operatorname{sen}^{-1} \mathbb{E}, \quad (3.36)$$

$$r = 0 \rightarrow \gamma_0 = \pi, \quad (3.37)$$

$$dr = -r_i \frac{\operatorname{sen} \gamma}{2} d\gamma. \quad (3.38)$$

Fazendo uso dessas relações, encontramos:

$$\left(\frac{d\bar{\tau}}{d\gamma}\right) = \left(\frac{r_i^3}{r_h}\right)^{1/2} \cos^2 \gamma/2, \quad (3.39)$$

$$\left(\frac{d\tau}{d\gamma}\right) = \frac{1}{g_E} \left(\frac{r_i^3}{r_h}\right)^{1/2} \cos^2 \gamma/2. \quad (3.40)$$

Integrando a equação (3.40), onde assumimos que $\tau_i = 0$ no ponto de partida $\gamma_i = 0$, encontramos

$$\tau = \frac{1}{g_E} \left(\frac{r_i^3}{4r_h} \right)^{1/2} (\gamma + \operatorname{sen} \gamma), \quad (3.41)$$

Portanto, podemos ver que a partícula cruza o horizonte de eventos e chega à singularidade no horizonte com tempos próprios finitos

$$\tau_h = \frac{1}{g_E} \left(\frac{r_i^3}{4r_h} \right)^{1/2} \left[\arcsin \left(\frac{r_h}{r_i} \right)^{1/2} + \frac{r_h}{r_i} \left(1 - \frac{r_h}{r_i} \right)^{1/2} \right], \quad (3.42)$$

$$\tau_0 = \frac{\pi}{g_E} \left(\frac{r_i^3}{4r_h} \right)^{1/2}. \quad (3.43)$$

Já para analisarmos o comportamento da coordenada temporal devemos olhar para as equações (3.32) e (3.33), das quais encontramos o seguinte resultado:

$$t = \frac{f_E}{g_E} \left[\mathbb{E} \left(\frac{r_i^3}{r_h} \right)^{1/2} \left[1/2(\gamma + \operatorname{sen} \gamma) + (1 - \mathbb{E}^2)\gamma \right] + r_h \ln \left(\frac{\operatorname{tg}^{\gamma_h/2} + \operatorname{tg}^{\gamma/2}}{\operatorname{tg}^{\gamma_h/2} - \operatorname{tg}^{\gamma/2}} \right) \right], \quad (3.44)$$

sendo $\mathbb{E}^2 = 1 - \frac{r_h}{r_i}$.

Notamos que as funções rainbow podem contrair ou dilatar o tempo próprio τ e o tempo coordenado t . Na figura (3), temos, respectivamente, nas linhas sólidas verde e azul, o tempo próprio e o coordenado de Schwarzschild na Teoria da Relatividade. Ao considerarmos as funções rainbow, com $\eta > 0$, temos um atraso no tempo próprio (linha verde pontilhada) para chegar à singularidade $r = 0$. Agora, considerando $\eta < 0$, temos um encurtamento no tempo próprio (linha verde tracejada) para chegar à singularidade $r = 0$. Podemos ver que, quando consideramos as funções rainbow, um objeto em queda livre pode chegar antes ou depois do tempo próprio medido na TRG. Já o observador em repouso e distante do horizonte de eventos medirá a coordenada temporal t e, para esse observador, o tempo medido para um objeto em queda livre atingir o horizonte de eventos será infinito.

Aqui, mais uma vez, utilizamos as famílias de funções rainbow dadas por (2.38), onde consideramos $n = 2$, produzindo $f_E = 1$ e g_E dada por (2.54) com $\eta = |1|$, por permitir os fenômenos subluminal e superluminal.

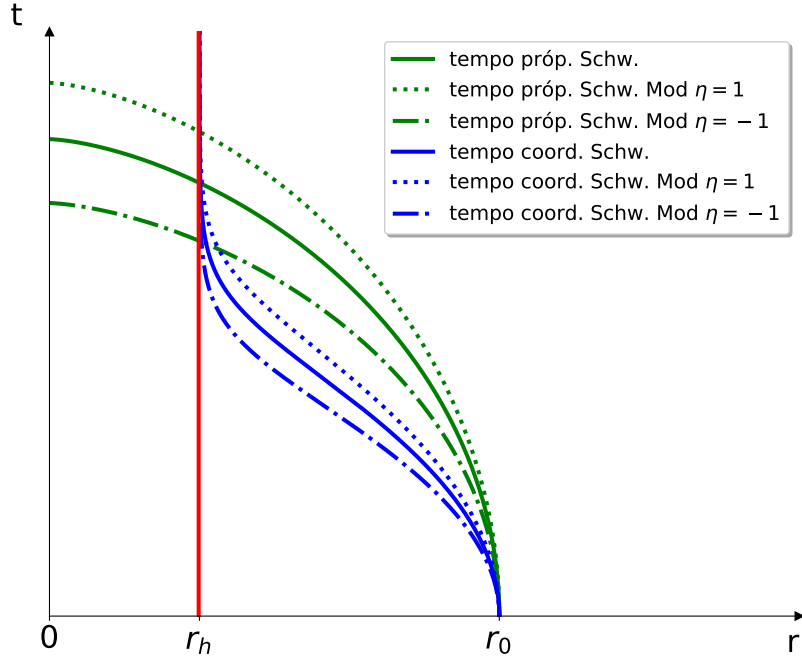


Figura 3 – Objeto em queda livre, em que consideramos as funções rainbow com $n = 2$.

3.1.4 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Vimos na seção anterior que a região $r = r_h$ é uma superfície que não interfere na queda de um objeto no buraco negro. Como já havíamos comentando anteriormente, nada poderíamos dizer sobre a singularidade $r = r_h$, ao calcularmos o escalar de Kretschmann em (3.14). Porém, como observado, um objeto em queda livre atravessa essa membrana e chega à singularidade na origem em um tempo próprio finito. Portanto, devemos ter algum problema associado ao sistema de coordenadas usadas

Devemos fazer uma mudança de coordenadas de tal forma que as geodésicas nulas radiais que entram no buraco negro tornem-se linhas retas, removendo a singularidade em $r = r_h$:

$$t \rightarrow \bar{t} = t + \Gamma_2 r_h \ln |r - r_h|. \quad (3.45)$$

Teremos, assim, um novo sistema de coordenadas $(\bar{t}, r, \phi, \theta)$, de onde, a partir de (3.31), obtemos

$$\bar{t} = -\Gamma_2 r_h + \text{const} = -\frac{g_E}{f_E} r_h + \text{const}. \quad (3.46)$$

Neste caso, no entanto, não teremos mais linhas formando ângulos de -45° como esperado na TRG [66]. Devido à presença das funções rainbow em Γ_2 , a inclinação da reta irá depender da energia da partícula sem massa em comparação com a energia de Planck. Diferenciando a equação (3.45), encontramos

$$d\bar{t} = dt + \Gamma_2 \frac{r_h}{r - r_h} dr, \quad (3.47)$$

e substituindo por dt no elemento de linha de Schwarzschild Modificado (3.12), obtemos a forma Eddington-Finkelstein:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_h}{r}\right) \frac{d\bar{t}^2}{f_E^2} - \frac{2r_h}{r} \frac{d\bar{t}dr}{f_E g_E} - \left(1 + \frac{r_h}{r}\right) \frac{dr^2}{g_E^2} - \frac{r^2}{g_E^2} d\Omega^2. \quad (3.48)$$

A solução ainda assume zero na métrica, mas agora é regular em $r = r_h$, estendendo o intervalo de coordenada $0 < r < r_h$ para todos os valores $0 < r < \infty$. Este processo é conhecido como extensão analítica. Para a família de funções rainbow (2.38), escolhendo $n = 2$ e $\eta = |1|$, teremos os resultados apresentados na figura (4). Na figura (4a) temos o caso de partículas sem massa cujas velocidades estão limitadas pela velocidade da luz c . Desta forma, a inclinação das geodésicas que entram é maior que 45° . Em contrapartida, na figura (4b), temos partículas sem massa, com velocidades superiores à velocidade c e, por consequência, a inclinação das geodésicas é menor que 45° .

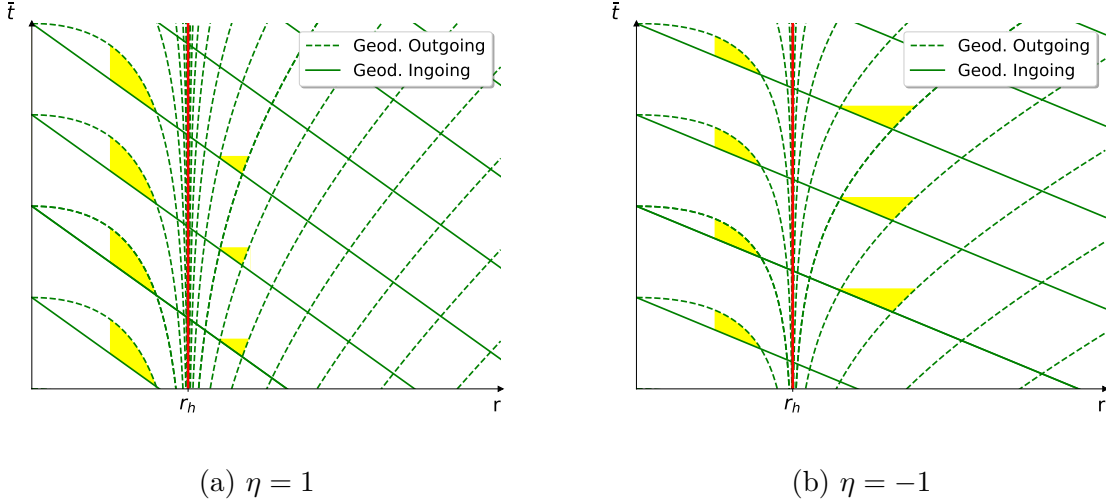


Figura 4 – Cones de luz nas coordenadas de Eddington-Finkelstein, considerando as funções rainbow com $n = 1$ e $\eta = |1|$.

3.2 Espaço-tempo modificado de Kiselev

Devido às evidências encontradas nas observações de Edwin Hubble na década de 1920, já tínhamos consciência de que o universo se expande. No entanto, as observações de supernovas tipo Ia (SN Ia) realizadas por volta do final da década de 1990 causaram uma importante mudança nos estudos de cosmologia: descobriu-se que o universo não somente se expande, mas o faz de maneira acelerada [67, 68, 69].

Para explicar os dados observados é necessário introduzir um novo tipo de energia capaz de provocar uma pressão negativa, a fim de exercer um papel de anti-gravidade. Essa energia passou a ser conhecida na literatura como energia escura, que seria responsável por cerca de 70% do conteúdo de matéria e energia do universo. Muitos modelos foram

criados com objetivo de solucionar esse problema. Um deles é o modelo de constante cosmológica, sugerido por Einstein, originalmente, porém com objetivo completamente diferente, qual seja, a constante cosmológica foi introduzida nas equações de campo na tentativa de se obter um universo estático. Com a descoberta da expansão acelerada do universo, a constante cosmológica foi reintroduzida nas equações de campo, mas agora na visão contemporânea é considerada como sendo homogênea, possuindo o mesmo valor em qualquer região do universo e seu efeito seria de produzir uma expansão acelerada, tendo sua origem associada à energia do vácuo.

Outro modelo bastante estudado na tentativa de dar conta da energia escura é o de quintessência, no qual modelos com campos escalares constituem outra forma de se obter um modelo correspondente à energia escura. Algumas dessas tentativas são a própria quintessência, os phantoms, a K-essência, tachyons, condensados fantasmas e energia escura dilatônica [70]. Dessa forma, a busca por compreender os possíveis papéis da energia escura no universo nos leva a investigar os modelos teóricos que a descrevem. Neste trabalho iremos utilizar a quintessência para descrever a energia escura. Iremos discorrer sobre as soluções de buraco negro imerso em quintessência, mas no contexto da G'sR.

3.2.1 Buraco negro imerso em quintessência

No início dos anos 2000, uma solução para um buraco negro estático e esfericamente simétrico imerso em quintessência foi obtida na TRG por Kiselev, cujo tensor energia-momento é dado por [71]:

$$T_t^t = T_r^r = \rho_q \quad (3.49)$$

$$T_\phi^\phi = T_\theta^\theta = \frac{1}{2}\rho_q(3\omega_q + 1), \quad (3.50)$$

em que temos a pressão e a densidade de energia associadas à quintessência pela relação $p_q = \omega_q \rho_q$, com ω_q pertencendo ao intervalo $-1 < \omega_q < -\frac{1}{3}$, de modo a permitir que se tenha a expansão acelerada.

Considerando o tensor momento-energia, a simetria esférica do buraco negro no contexto da G'sR e adotando a métrica canônica para problemas com simetria esférica, temos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = \frac{e^\nu}{f_E^2} dt^2 - \frac{e^\lambda}{g_E^2} dr^2 - \frac{r^2}{g_E^2} d\Omega^2. \quad (3.51)$$

A partir da métrica podemos obter o tensor de Einstein, dado por

$$G_t^t = g_E^2 \left(-e^\lambda \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \right), \quad (3.52)$$

$$G_r^r = g_E^2 \left(-e^\lambda \left(\frac{1}{r^2} + \frac{v'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \right), \quad (3.53)$$

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = -g_E^2 \frac{e^{-\lambda}}{2} \left(v'' + \frac{v'^2}{2} + \frac{v' - \lambda'}{r} - \frac{v' \lambda'}{2} \right). \quad (3.54)$$

As equações de Einstein são dadas em termos de $G_\nu^\mu = 2T_\nu^\mu$, onde fazemos $4\pi \frac{G}{c^4} = 1$. O princípio da aditividade e linearidade é obtido por meio de $T_t^t = T_r^r$, o que acarreta $\lambda' + v' = 0 \rightarrow \lambda + v = \text{constante}$. Sem perda de generalidade podemos tomar a constante como sendo nula, obtendo o resultado $\lambda = -v$. Fazendo a substituição $\lambda = -\ln(1+z)$ nas equações de Einstein, dadas por (3.52), (3.53), (3.54), obtemos os seguintes resultados:

$$G_t^t = -g_E^2 \left(\frac{z + rz'}{r^2} \right) = 2T_t^t, \quad (3.55)$$

$$G_r^r = -g_E^2 \left(\frac{z + rz'}{r^2} \right) = 2T_r^r, \quad (3.56)$$

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = -g_E^2 \left(\frac{rz'' + 2z'}{2r} \right) = 2T_\theta^\theta = 2T_\phi^\phi. \quad (3.57)$$

Substituindo os resultados relativos ao tensor energia-momento dados na equação (3.50), nas equações (3.55), (3.56), (3.57), obtemos uma equação de Euler-Cauchy, dada por:

$$r^2 z'' + 3(1 + \omega_q) r z' + (1 + 3\omega_q) z = 0, \quad (3.58)$$

cujas soluções são

$$z_1 = \frac{A}{r}, \quad (3.59)$$

$$z_2 = \frac{c}{r^{1+3\omega_q}}. \quad (3.60)$$

A constante de integração A é determinada ao tomarmos os limites sem quintessência na TRG, o que nos permite obter $A = -2M$. Portanto, o elemento de linha toma a seguinte forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{c}{r^{1+3\omega_q}} \right) \frac{dt^2}{f_E^2} - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{c}{r^{1+3\omega_q}} \right)^{-1} \frac{dr^2}{g_E^2} - \frac{r^2}{g_E^2} d\Omega^2. \quad (3.61)$$

Também podemos calcular a densidade de energia por intermédio da solução (3.60). Substituindo suas derivadas na equação (3.55), temos

$$\rho_q = g_E^2 \frac{c}{2} \frac{3\omega_q}{r^{3(1+\omega_q)}}. \quad (3.62)$$

Concluimos que o sinal da constante de integração (c) deve coincidir com o sinal do parâmetro da equação de estado da matéria (ω) para obtermos matéria com energia positiva, ou seja,

$$c\omega_q \geq 0, \quad (3.63)$$

resultando que c é negativo para a quintessência ($\omega_q < 0$). Por simplicidade, definimos $c = -\alpha$, sendo α positivo. Neste caso, o elemento de linha dado por (3.61) torna-se

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{1+3\omega_q}}\right) \frac{dt^2}{f_E^2} - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{1+3\omega_q}}\right)^{-1} \frac{dr^2}{g_E^2} - \frac{r^2}{g_E^2} d\Omega^2. \quad (3.64)$$

Verificamos, também que, ao analisar o elemento de linha (3.64) para o $\lim_{\frac{E}{E_p} \rightarrow 0} f_E = \lim_{\frac{E}{E_p} \rightarrow 0} g_E = 1$ recuperamos a solução obtida por Kiselev em [71].

O escalar de curvatura tem como expressão:

$$R = 2T_\mu^\mu, \quad (3.65)$$

$$R = 4 \left(\rho_q - \frac{\rho_q}{2} (1 + 3\omega_q) \right) = 2\rho_q (1 - 3\omega_q), \quad (3.66)$$

$$R = 3g_E^2 c \omega_q \frac{(1 - 3\omega_q)}{r^{3(1+\omega_q)}}. \quad (3.67)$$

A distinção entre os resultados obtidos por Kiselev em [71] para os resultados neste trabalho é a presença da Função Rainbow g_E^2 nas equações (3.62) e (3.67) e as funções f_E^2 e g_E^2 no elemento de linha em (3.64). Assim, para o caso do Buraco Negro imerso em quintessência no contexto da G'sR, o elemento de linha apresenta correções que dependem das Funções Rainbow utilizadas e, ao tomarmos o limite em baixas energias comparadas a escala de Planck, obtemos os resultados clássicos.

3.2.2 Horizonte de eventos

O horizonte de eventos é obtido quando o termo g_{rr} da equação (3.64) é igual a zero. Assim, temos

$$1 - \frac{2M}{r_h} - \frac{\alpha}{r_h^{1+3\omega_q}} = 0 \quad (3.68)$$

e resolvendo para $M(r_+)$, temos a massa do buraco negro

$$M = \frac{r_h}{2} - \frac{\alpha}{2r_h^{3\omega_q}}. \quad (3.69)$$

Podemos ver que o horizonte de eventos não depende das funções rainbow. Mas os valores da massa irão depender dos parâmetros da teoria e do raio do horizonte de eventos (r_h). Na figura (5) construímos o gráfico da massa do horizonte de eventos para alguns valores de ω_q , em que é analisado a quintessência, $\omega_q = -2/3$ e o phantom, $\omega_q = -4/3$ com $\alpha = 0.01$.

Também podemos examinar como o horizonte de eventos é alterado ao mudarmos o parâmetro da quintessência. Este resultado é exposto na figura (6), fixando um valor para ω_q e variando o parâmetro α . Como se pode ver, a massa possui um limite superior que corresponde ao caso em que dois horizontes coincidem: o horizonte do buraco negro e o horizonte cósmico. Este tipo de buraco negro é geralmente chamado de buraco negro de

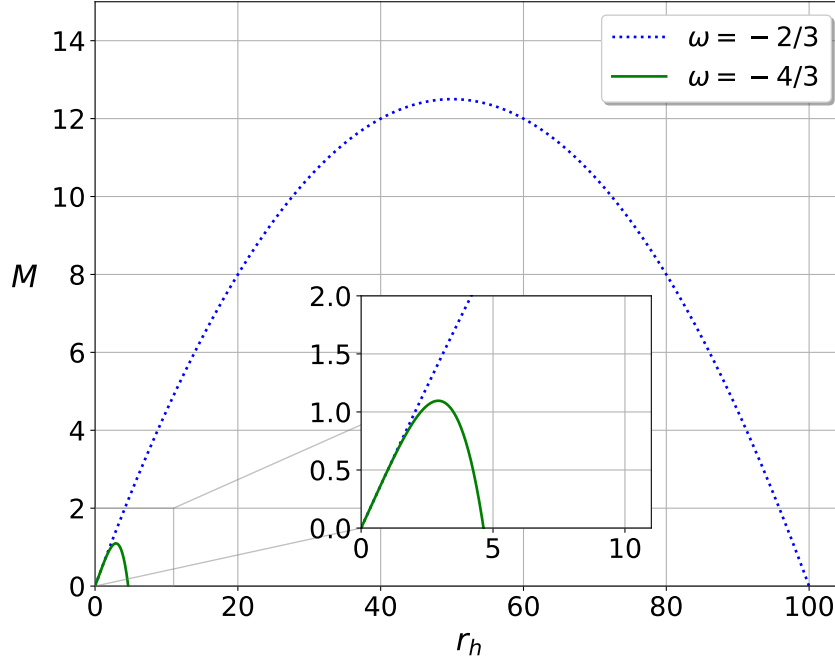


Figura 5 – Horizonte de eventos para diferentes valores do ω_q . No centro do gráfico temos um zoom para pequenos valores do raio do horizonte

Nariai [72]. À medida que a massa diminui, os horizontes começam a se afastar um do outro. Observe na figura (6), a linha verde, o horizonte à esquerda é o horizonte do buraco negro, enquanto o da direita é o horizonte cosmológico. Isso significa que o valor máximo para o horizonte do buraco negro é o ponto onde a massa atinge seu ponto crítico o que significa que; acima desse valor, ou estamos atrás do horizonte cosmológico, ou temos uma singularidade nua. Chamamos atenção para este ponto porque será relevante para o estudo da termodinâmica do sistema. Como veremos, este é exatamente o ponto onde a temperatura atingirá um valor crítico e não pode ser estendida para valores grandes de r_h .

Observamos que, ao diminuirmos o valor do parâmetro da quintessência α , o raio máximo possível do horizonte de eventos aumenta. Quando temos $\alpha = 0$, deixamos de ter dois horizontes de eventos, a massa do buraco negro passa a ser proporcional ao raio do horizonte e deixa de ser limitada a um ponto extremo.

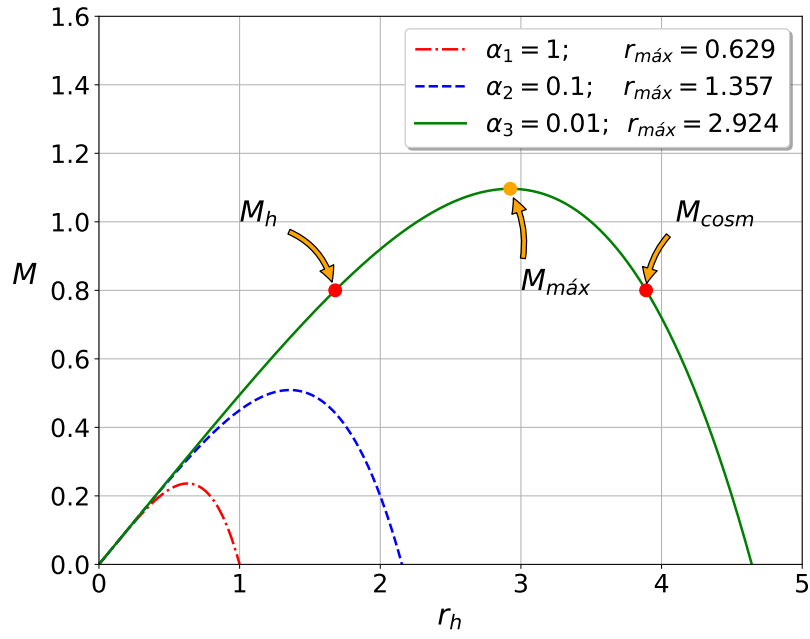


Figura 6 – Horizonte de eventos para diferentes valores do α , com $w_q = -4/3$.

4 Termodinâmica de Buracos Negros na Teoria da Relatividade Geral

Em meados dos anos 70, Bekenstein [48, 49, 73] e Hawking [50, 74, 75] nos revelaram que os buracos negros possuem comportamentos semelhantes aos corpos negros, seguindo leis análogas às da termodinâmica [47], mostrando que esses objetos não são tão negros como se imaginava. Ao considerar efeitos quânticos na vizinhança do buraco negro, Hawking mostrou que esses objetos emitem radiação, fato este que rompeu com a visão clássica que se tinha dos buracos negros [46, 76]. Esta introdução de efeitos quânticos feita por Hawking representou o início de uma combinação entre a gravitação e a física quântica, ou melhor, da teoria quântica de campos.

Neste capítulo iremos fazer uma breve digressão sobre a termodinâmica de buracos negros na TRG. Também iremos avaliar algumas variáveis termodinâmicas e fazer um estudo de transição de fase. Esta análise tem como objetivo comparar com o estudo de termodinâmica de buracos negros no contexto da G'sR que será realizado no capítulo seguinte.

4.1 Aspectos gerais da termodinâmica

Um buraco negro isolado pode ser caracterizado classicamente, por um pequeno conjunto de três parâmetros, a saber: massa, momento angular e carga, as quais estão relacionados através de leis similares às da termodinâmica clássica [77, 78]. Como desejamos estudar a termodinâmica dos buracos negros, é necessário antes entender o conceito de gravidade superficial que será fundamental para as definições das leis da termodinâmica de buracos negros.

4.1.1 Gravidade superficial

A gravidade superficial é uma expressão para a aceleração gravitacional na superfície do horizonte de eventos de um buraco negro. Comumente é definida por meio do vetor de Killing, que é ortogonal ao horizonte, ou também em termos da 4-aceleração e 4-velocidade de uma partícula livre. Iremos definir a gravidade superficial da primeira forma. A definição relativa à segunda abordagem pode ser encontrada na literatura [79].

O horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild é, na verdade, uma superfície nula, e é fácil ver isso quando consideramos as coordenadas de Kruskal. Nesta superfície qualquer vetor normal à mesma é um vetor nulo. Vamos considerar o vetor de

Killing que gera translações temporais, $\xi = \xi^\mu \mathbf{e}_\mu$. Para o espaço-tempo de Schwarzschild, este vetor é simplesmente $\xi = \mathbf{e}_t$. Como este vetor é normal ao horizonte de eventos, então $\xi_\mu \xi^\mu = 0$, ou mais precisamente, $\xi_\mu \xi^\mu$ é constante no horizonte. Dessa forma, podemos olhar para o gradiente $\nabla^\alpha(\xi_\mu \xi^\mu)$ que também é normal ao horizonte. Assim, deve existir uma função κ , chamada de gravidade superficial, tal que

$$\nabla^\alpha(\xi_\mu \xi^\mu) = -2\kappa \xi^\alpha. \quad (4.1)$$

Essa equação pode ser escrita na seguinte forma:

$$\xi^\nu \nabla_\mu \xi_\nu = -\xi^\nu \nabla_\nu \xi_\mu = -\kappa \xi_\mu. \quad (4.2)$$

Um vetor ξ_μ é uma hipersuperfície ortogonal se

$$\xi_{[\mu} \nabla_\nu \xi_{\rho]} = 0, \quad (4.3)$$

quando avaliado na hipersuperfície de acordo com o Teorema de Frobenius [80]. Então, para o vetor de Killing, $\nabla_\mu \xi_\nu = -\nabla_\nu \xi_\mu$, portanto, no horizonte, temos

$$\xi_\rho \nabla_\mu \xi_\nu = -2\xi_\nu [\mu \nabla_\nu] \xi_\rho. \quad (4.4)$$

Podemos, então, contrair ambos os membros da equação (4.4) com $\nabla^\mu \xi^\nu$, de modo a obtermos

$$\xi_\rho (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\mu \xi_\nu) = -(\nabla^\mu \xi^\nu) (\xi_{[\mu} \nabla_\nu] \xi_\rho) = -2\kappa \xi^\mu \nabla_\mu \xi_\rho = -2\kappa^2 \xi_\rho \quad (4.5)$$

onde usamos a equação (4.2). Assim, obtemos uma expressão para a gravidade superficial, que é dada por

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla_\mu \xi_n u) (\nabla^\mu \xi^n u) \quad (4.6)$$

sendo essa quantidade avaliada no horizonte de eventos do buraco negro. Uma vez que sabemos que a métrica de Schwarzschild é diagonal, temos que

$$\xi^\mu = \delta_t^\mu, \quad \xi_\mu = \delta_{\mu t} g_{tt}. \quad (4.7)$$

A derivada covariante, $\nabla_\mu \xi_\nu$, pode ser dada em termos dos símbolos de Christoffel:

$$\nabla_\mu \xi_\nu = \xi_{\nu,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \xi_\alpha. \quad (4.8)$$

O único termo não nulo de $\xi_{\nu,\mu}$ é $\xi_{t,r} = g_{tt,r}$, uma vez que os componentes métricos dependem apenas de r . Da equação de Killing dada por $\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0$, temos que $\nabla_\mu \xi_\nu = -\nabla_\nu \xi_\mu$, e se em uma base de coordenadas os coeficientes da conexão são simétricos para os índices inferiores, então os únicos termos diferentes de zero de $\nabla_\mu \xi_\nu$, só podem ser $\nabla_r \xi_t$ e $\nabla_t \xi_r$. Logo

$$\nabla_r \xi_t = \xi_{t,r} - \Gamma_{tr}^t \xi_t = -(\xi_{r,t} - \Gamma_{tr}^t \xi_t) = -\nabla_t \xi_r, \quad (4.9)$$

no qual temos $\xi_{r,t} = 0$ e $\Gamma_{tr}^t = +\frac{1}{2}g^{tt}g_{tt,r}$. Obtemos, finalmente, uma expressão para a gravidade superficial em termos dos componentes da métrica de Schwarzschild na TRG, que é dada por

$$\kappa = \lim_{r \rightarrow r_h} \sqrt{-\frac{1}{2}(\nabla_\mu \xi_\nu)(\nabla^\mu \xi^\nu)} = \lim_{r \rightarrow r_h} \sqrt{-\frac{1}{4}g^{rr}g^{tt}(g_{tt,r})^2}. \quad (4.10)$$

Ao avaliarmos esta equação em $r_h = 2M$ a gravidade superficial para o buraco negro de Schwarzschild é

$$\kappa = \frac{1}{4M} \quad (4.11)$$

É possível obter a gravidade superficial para um buraco negro mais geral se, em vez de considerarmos o espaço-tempo de Schwarzschild, escolhermos o espaço-tempo de Kerr–Newman. Ainda teríamos uma carga e um momento angular, porém, para este caso, a gravidade superficial é obtida por meio da 4-aceleração e seria necessário considerar vetores de Killing associados ao espaço-tempo de Kerr–Newman. Este procedimento pode ser visto em [79].

4.1.2 As quatro leis da termodinâmica de buracos negros

De acordo com os autores [78, 81], podemos escrever as seguintes leis para a termodinâmica de buracos negros:

Lei zero: Existe uma quantidade física associada ao buraco negro que permanece constante. Essa quantidade é a gravidade superficial, κ , que é constante em toda a superfície do horizonte de eventos. Esta lei é, análoga à lei zero da termodinâmica clássica.

Primeira Lei: Considerando um Buraco Negro estacionário, carregado e dotado de massa é possível escrever a variação a área do horizonte de eventos em termos das quantidades que o descrevem:

$$\delta A_{hor} = \frac{8\pi}{\kappa}(\delta M - \Omega \delta J - \Phi \delta Q), \quad (4.12)$$

onde A_{hor} é a área do horizonte de eventos, M a massa do buraco negro, Ω a velocidade angular e Φ o potencial elétrico. Podemos reescrever esta equação em analogia com a primeira lei da termodinâmica clássica, da seguinte

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A_{hor} + \Omega \delta J + \Phi \delta Q, \quad (4.13)$$

ou, ainda, introduzindo as constantes c e G , como

$$\delta(m c^2) = \frac{\kappa c^2}{8\pi G} \delta A_{hor} + \Omega \delta J + \Phi \delta Q. \quad (4.14)$$

Esta é a primeira lei da termodinâmica de buracos negros, que expressa uma conservação da energia, relacionando a variação da massa M do buraco negro com a variação na área

do seu horizonte A_{hor} , a variação do seu momento angular J e a variação de sua carga Q . Comparando com a primeira lei da termodinâmica ordinária

$$\delta U = T\delta S + \delta W \quad (4.15)$$

Bekenstein [73] sugeriu inicialmente que a temperatura T e a entropia S do buraco negro fossem associados à gravidade superficial κ e à área do horizonte de eventos, de modo que $T \propto \kappa$ e $S \propto A_{hor}$.

Segunda Lei: Nenhum processo clássico pode diminuir a área do horizonte de um buraco negro, isto é,

$$\delta A_{hor} \geq 0, \quad (4.16)$$

onde $\delta A_{hor} \geq 0$ ocorre para os processo irreversíveis. Devido ao fato de podermos relacionar a área do horizonte de eventos com a entropia, a afirmação da lei (4.16) é análoga à segunda lei da termodinâmica ordinária, que nos diz que a entropia de um sistema isolado não diminui.

Terceira Lei: A gravidade superficial, κ , não pode ser reduzida a zero por processos constituídos de um conjunto finito de passos. Assim como na terceira lei da termodinâmica ordinária, formulada na versão de Nernst, afirmando que não é possível a temperatura de um sistema atingir o zero absoluto por meio de processos formados por um conjunto finitos de passos.

A tentativa de formular a termodinâmica de buracos negros por Bekenstein [49, 73] foi apoiada por descobertas feitas por Hawking [46] que, ao aplicar a teoria quântica de campos em um espaço-tempo curvo gerado por um buraco negro, descobriu que esses objetos emitem uma radiação eletromagnética com uma temperatura

$$T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B c} \quad (4.17)$$

que chamaremos de Temperatura Hawking, em que $\hbar$ é a constante de Planck e k_B é a constante de Boltzmann. Para o caso do espaço-tempo de Schwarzschild, no qual obtemos a gravidade superficial em (4.11), a temperatura Hawking se reduz a

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M}. \quad (4.18)$$

A leitura que podemos fazer da equação (4.18) é que, conforme a massa do buraco negro diminui no processo em decorrência da emissão de radiação, sua temperatura aumenta, nos dizendo que o seu calor específico é negativo.

A entropia do buraco negro pode ser obtida por meio das equações (4.13), (4.14) e (4.17) e é dada por

$$S_{BN} = \frac{1}{4} \frac{k_B c^3}{G \hbar} A. \quad (4.19)$$

Essa entropia do buraco negro vem em adição à entropia da matéria. O fato da entropia do buraco negro estar relacionada à área do horizonte de eventos, nos leva a afirmar que ela é “holográfica”, sendo distinta da entropia ordinária, que é uma grandeza termodinâmica extensiva, associada ao volume do sistema físico.

4.1.3 Radiação Hawking

Vimos que a Radiação Hawking é um dos pontos fundamentais do estudo da termodinâmica de buracos negros, e que possui um espectro semelhante ao emitido por um corpo negro. Vamos revisar sua definição na TRG e obter os resultados concernentes à emissão de partículas por buracos negros, de forma mais simples, fazendo algumas considerações. Desta forma, e para atingir este objetivo, iremos usar um “argumento de plausibilidade” para evidenciar a Radiação Hawking. Esta abordagem é apresentada em [82].

Conforme a teoria de campos, flutuações de campos podem, no espaço vazio, produzir um par de partícula e antipartícula e, em seguida, esse par se recombina, fato este que deveria violar o princípio da conservação de energia. Entretanto, segundo o princípio da incerteza de Heisenberg, existe uma incerteza mínima na medida da energia de um certo estado, ΔE , bem como no tempo em que o sistema permanece no estado, Δt , dado pela relação $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$. Sendo assim, se um par de partícula e antipartícula que surge do vácuo durar menos que $\Delta t = \hbar/2\Delta E$, não estão violando nenhuma lei física.

No espaço-tempo nas proximidades do horizonte de eventos de um buraco negro é perfeitamente possível a existência de flutuações quânticas. Vamos considerar que essas flutuações produzem pares de fótons na região externa ao horizonte, mas próximos a ela, conforme a figura (7). Os fótons surgem um com energia E e outro com energia $-E$, e existe a possibilidade de um dos fótons cruzar o horizonte antes que o tempo $\hbar/2E$ se esgote. Uma vez dentro do horizonte, qual deve ser o seu comportamento? Consideremos o espaço-tempo de Schwarzschild por simplicidade e consideramos um observador local para responder a pergunta. Seja um observador que se movimenta com uma 4-velocidade $u = (0, u^r, 0, 0)$. Adotando a condição de normalização $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$, teremos que:

$$u^r = - \left(\frac{2M}{r} - 1 \right)^{1/2}, \quad r < 2M \quad (4.20)$$

A escolha do sinal negativo indica as geodésicas ingoing, o movimento ocorre no sentido $-r$. Além disso, vamos considerar que o fóton tem momento angular nulo, e que se move radialmente dentro do horizonte. Da equação (3.25), tomando $f_E = g_E = 1$ para termos o caso usual, e concluímos que a energia do fóton é $E = \pm p^r$. Então, a sua energia relativa ao observador dentro do horizonte de eventos é

$$g_{\mu\nu}p^\mu u^\nu = g_{rr}p^r u^r = - \left(\frac{2M}{r} - 1 \right)^{-1/2} p^r \quad (4.21)$$

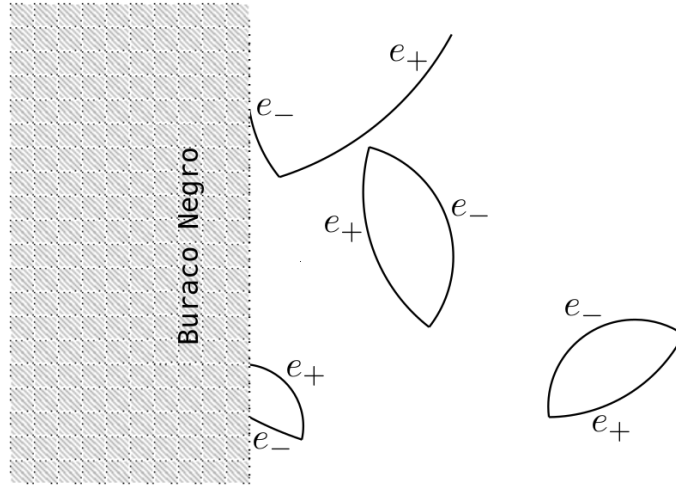


Figura 7 – Radiação Hawking: produção de par partículas-antipartículas na vizinhança de um buraco negro.

que é positiva se, e somente se, o fóton também estiver indo em direção à singularidade ($p^r < 0$) e contudo, esta afirmação não estabelece nenhuma restrição para a energia do fóton, portanto, podemos ter fótons com energias positivas ou negativas.

Uma vez que uma flutuação próxima ao horizonte pode colocar o fóton de energia negativa em uma trajetória realizável em direção à origem, o fóton de energia positiva pode escapar para o infinito. Vamos analisar a energia do fóton que escapa. Devemos analisar as flutuações em um referencial inercial em queda livre, que é aquele para o qual o espaço-tempo é localmente plano e no qual as flutuações deveriam ser as usuais no espaço-tempo de Minkowski. Considerando que o observador parte do repouso no ponto $r = 2M + \epsilon$, imediatamente começa a cair em direção ao buraco negro e atinge o ponto $r = 2M$, seguindo a trajetória com $\bar{L} = 0$ que pode ser descrita por (3.25) tomando $f_E = g_E = 1$, o que nos leva ao seguinte resultado para a energia

$$\bar{E} = \left(1 - \frac{2M}{(2M + \epsilon)}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{\epsilon}{2M}\right)^{1/2}. \quad (4.22)$$

É importante notar que estamos adotando a notação $\bar{E}$ para a energia do referencial, para não a confundirmos com a energia do fóton.

Podemos calcular o tempo necessário para o fóton atingir o horizonte de eventos, fazendo $f_E = g_E = 1$ na equação (3.25), e assim, obtemos

$$\Delta\tau = \int_{2M+\epsilon}^{2M} \left(\frac{2M}{r} - \frac{2M}{2M+\epsilon}\right)^{-1/2} dr. \quad (4.23)$$

Para a primeira ordem em ϵ , temos

$$\Delta\tau = 2(2M\epsilon)^{1/2}. \quad (4.24)$$

como sendo o tempo da duração da flutuação quântica. Com esse resultado, podemos calcular a energia do fóton $\mathcal{E}$ nesse referencial por meio da relação de incerteza de Heisenberg. Assim, temos:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4}\hbar(2M\epsilon)^{-1/2}. \quad (4.25)$$

Essa é a energia do fóton que escapa para o infinito, calculado no referencial inercial local. Para calcular a sua energia ao chegar ao infinito, lembramos que

$$\mathcal{E} = g^{\mu\nu}p_\mu u_\nu = g^{00}Eu_0 \quad (4.26)$$

em que $u_0 = \bar{E} \approx (\frac{\epsilon}{2M})^{1/2}$ e E é a energia conservada do fóton, que é a energia que ele deve ter quando chegar ao infinito. Avaliando g^{00} em $2M + \epsilon$, temos, finalmente,

$$E = \mathcal{E} \left(\frac{\epsilon}{2M} \right)^{1/2} = \frac{\hbar}{8M}. \quad (4.27)$$

Podemos ver que o buraco negro pode emitir partículas com energia $\hbar/8M$, calculando de forma simples a radiação Hawking. O cálculo rigoroso realizado por Hawking mostrou que os fótons que saem têm o espectro característico de um corpo negro com temperatura dada por (4.17). Com isso, a energia dos fótons será

$$E = T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M}. \quad (4.28)$$

4.2 Termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild imerso em quintessência

Como já mencionado na seção (3.2), o universo pode ser constituído, além da matéria bariônica e matéria escura, por uma energia escura que seria responsável pela expansão acelerada do universo. Muitos modelos teóricos buscam descrever a energia escura, mas podemos citar um que iremos considerar que é o modelo de quintessência [69].

Iremos estudar a termodinâmica do buraco negro estático imerso em quintessência na TRG, afim de podermos criar um pano de fundo para comparar com o próximo capítulo, quando considerarmos a G'sR.

A métrica que descreve o espaço-tempo de Kiselev é dada por (3.64), fazendo $f_E = g_E = 1$, o que resulta em

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{1+3\omega_q}}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{1+3\omega_q}}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (4.29)$$

Para estudarmos as propriedades termodinâmicas, devemos obter a gravidade superficial por meio da equação (4.10) e, em seguida, da equação (4.17), a temperatura

Hawking do buraco negro de Schwarzschild imerso em quintessência. Para a métrica (4.29), a gravidade superficial é

$$\kappa_{kis} = \frac{|2Mr_h + \alpha r_h^{1-3\omega} (3\omega + 1)|}{2r_h^3}. \quad (4.30)$$

A temperatura Hawking, portanto, é dada por

$$T_{H_{kis}} = \frac{r_h^{-3\omega-2} |3\alpha\omega + r_h^{3\omega+1}|}{4\pi} \quad (4.31)$$

em que substituímos κ_{kis} e a massa efetiva do buraco negro por (3.69). Note que a temperatura Hawking no caso da solução de Kiselev é a temperatura Hawking de Schwarzschild mais um termo relacionado à quintessência. O comportamento é apresentado na figura (8), onde escolhemos $\omega = -2/3$, que produz a quintessência, e $\omega = -4/3$, representando o phantom com $\alpha = 0.01$. Mas também foi adicionado o caso com $\alpha = 0$, que recupera o espaço-tempo de Schwarzschild. É possível ver que, ao introduzirmos um espaço-tempo com um fluido cosmológico, teremos um raio crítico para o horizonte de eventos, ponto em que a temperatura é zero. Este valor crítico para o raio do horizonte é justamente quando a massa atinge seu valor crítico, produzindo o buraco negro de Nariai [72], já mencionado na seção (3.2.2). Sendo assim, para valores maiores que o raio crítico, devemos desconsiderar os valores para a temperatura Hawking, produzindo um resultado novo ao compararmos com o espaço-tempo usual de Schwarzschild.

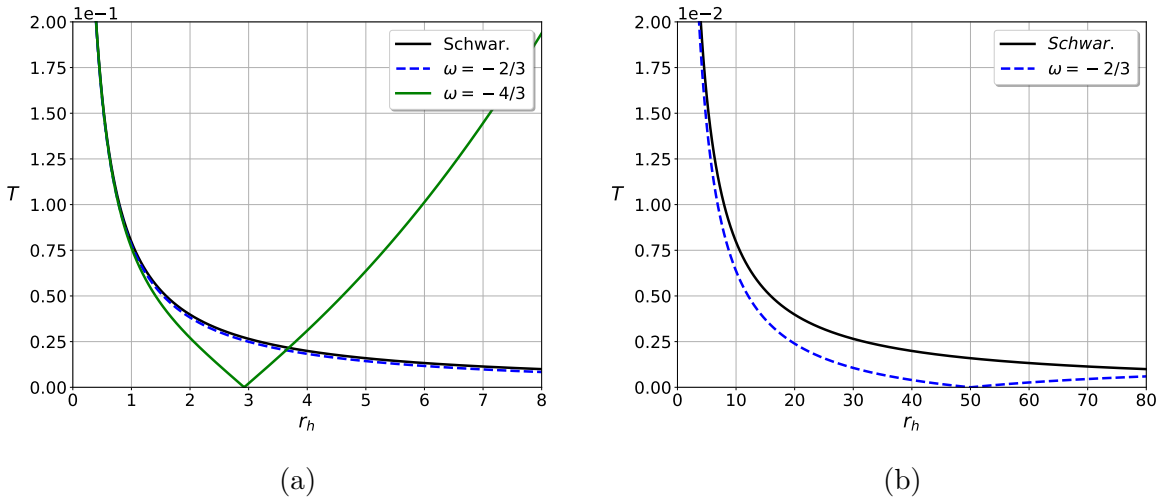


Figura 8 – Temperatura Hawking em função do raio do horizonte de eventos para os casos com quintessência, $\omega = -2/3$, e o phantom, $\omega = -4/3$, com $\alpha = 0.01$ e Schwarzschild, sem influência de um fluido cosmológico.

Da primeira lei da termodinâmica de buracos negros (4.13), podemos obter a entropia associada ao buraco negro estático e sem carga, imerso em quintessência que é dada por

$$dS = \frac{1}{T_H} dM = \frac{1}{T_H} \frac{dM}{dr_h} dr_h. \quad (4.32)$$

Substituindo a temperatura Hawking (4.31) e o termo dM/dr_h , na equação (4.32), obtemos

$$dS = \frac{2\pi r_h^{3\omega+2} \left(\frac{3\alpha r_h^{-3\omega}}{r_h} + 1 \right)}{|3\alpha\omega + r_h^{3\omega+1}|} dr_h. \quad (4.33)$$

Resolver esta equação não é tão simples devido à presença do módulo e à necessidade de termos que escolher um valor para ω . Entretanto, podemos analisá-la numericamente. Este resultado é apresentado na figura (9), onde é realizado o cálculo numérico para $\omega = -2/3$ e $\omega = -4/3$, com $\alpha = 0.01$. Podemos ver que, devido ao raio máximo que o horizonte pode atingir, a entropia do buraco negro também terá um valor máximo, sendo maior para a quintessência em comparação com o caso do phantom. Portanto, a presença de um fluido cosmológico impõe limites para o buraco negro.

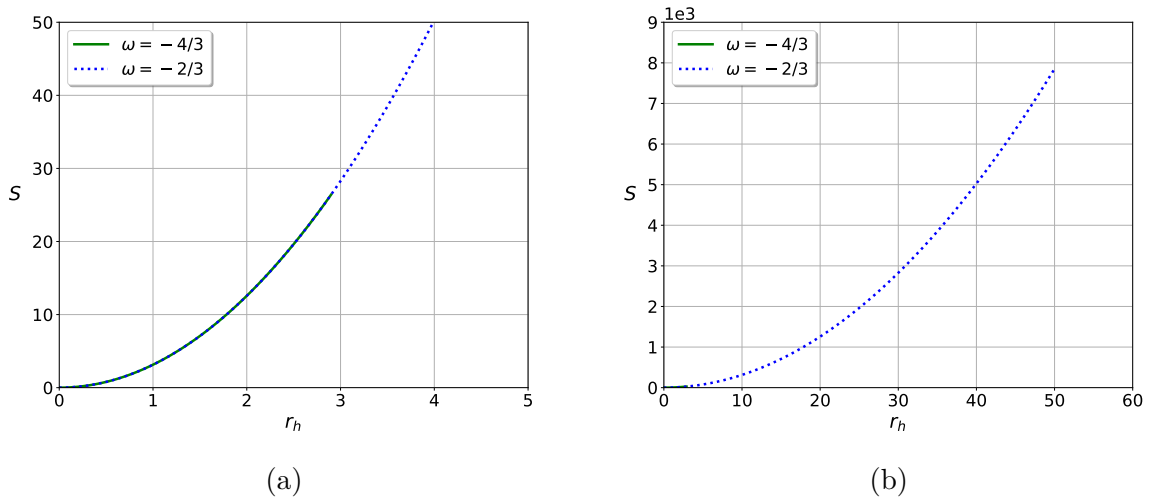


Figura 9 – Entropia em função do raio do horizonte de eventos para os casos com quintessência, $\omega = -2/3$, e o phantom, $\omega = -4/3$, com $\alpha = 0.01$.

De posse do arcabouço da termodinâmica é possível estudar a capacidade térmica do sistema. Sabemos que a capacidade térmica de um corpo é definida como a razão $Q/\Delta T$ entre a quantidade de calor recebido Q e o correspondente incremento na temperatura ΔT . Mais precisamente, definida como o limite dessa razão quando $\Delta T \rightarrow 0$. Assim, para uma pequena quantidade de calor, $Q = T\Delta S$, sendo ΔS o incremento na entropia, o que nos leva a escrever a capacidade térmica como sendo dada por TdS/dT . Na termodinâmica ordinária é necessário fazermos uma distinção na forma como o calor é recebido pelo sistema. Se for feito a volume constante, é dito que temos uma capacidade térmica isocórica

C_v , ou se for feita à pressão constante, teremos uma capacidade térmica isobárica C_p . Para este caso especial, estamos considerando uma situação mais simples onde não temos pressão, não precisando fazer distinção entre os tipos de capacidade térmica. Sendo assim, partindo da forma usual, podemos construir a capacidade térmica do buraco negro, com o uso da seguinte definição

$$C = T_H \frac{\partial S}{\partial T_H} = T_H \frac{\partial S}{\partial r_h} \frac{\partial r_h}{\partial T_H} = \frac{\partial M}{\partial r_h} \left(\frac{\partial T_H}{\partial r_h} \right)^{-1} \quad (4.34)$$

Desta forma, podemos calcular a capacidade térmica associada ao buraco negro imerso em quintessência, que é dada por

$$C = - \frac{2\pi r_h^2 (3\omega\alpha + r_h^{3\omega+1})}{9\omega^2\alpha + 6\omega\alpha + r_h^{3\omega+1}} \quad (4.35)$$

Ao considerarmos $\alpha = 0$ temos a capacidade térmica usual de Schwarzschild $C_{Sch} = -2\pi r_h^2$, que é negativa para todos os valores do raio do horizonte. Este resultado indica que quando o buraco negro irradia, sua massa diminui e, conseqüentemente, o raio do seu horizonte, também diminui. Porém, ao irradiar, a temperatura associada ao buraco negro aumenta, produzindo um resultado incomum na física. Esta característica não é algo peculiar dos buracos negros. Em sistemas Newtoniano auto-gravitantes é possível ver o mesmo comportamento, como no caso de um satélite em baixa órbita da Terra, que perde parte da sua energia devido ao atrito atmosférico, caindo para um orbita de altitude menor, aumentando sua energia cinética. Outro exemplo são sistemas estelares gravitacionalmente vinculados. Lynden-Bell analisou esse comportamento, que chamou de “gravothermal catastrophe”, apresentando em detalhes em [83].

Agora, considerando o espaço-tempo de Kiselev, sabemos que existe um limite superior para o raio do horizonte, o que nos leva a desconsiderar os valores superiores a esse limite, produzindo também um limite para a capacidade térmica. Na figura (10), apresentamos os resultados para a capacidade térmica dada por (4.35), onde consideramos mais uma vez aos valores $\omega = -2/3$ e $\omega = -4/3$, com $\alpha = 0.01$, juntamente com o caso de Schwarzschild, ao fazermos $\alpha = 0$. Notamos que a capacidade térmica ainda é negativa até o limite do raio máximo. Deste ponto em diante, a priori, a capacidade térmica estaria associada ao raio cosmológico.

Em resumo, a presença de uma quintessência permeando o buraco negro de Schwarzschild produz limites tanto para o raio do horizonte de eventos, quanto para as variáveis termodinâmicas dependentes dos parâmetros que caracterizam o buraco negro e os fluidos. Na próxima seção, vamos trabalhar com dois novos elementos: a constante cosmológica, que terá um papel importante, e a carga.

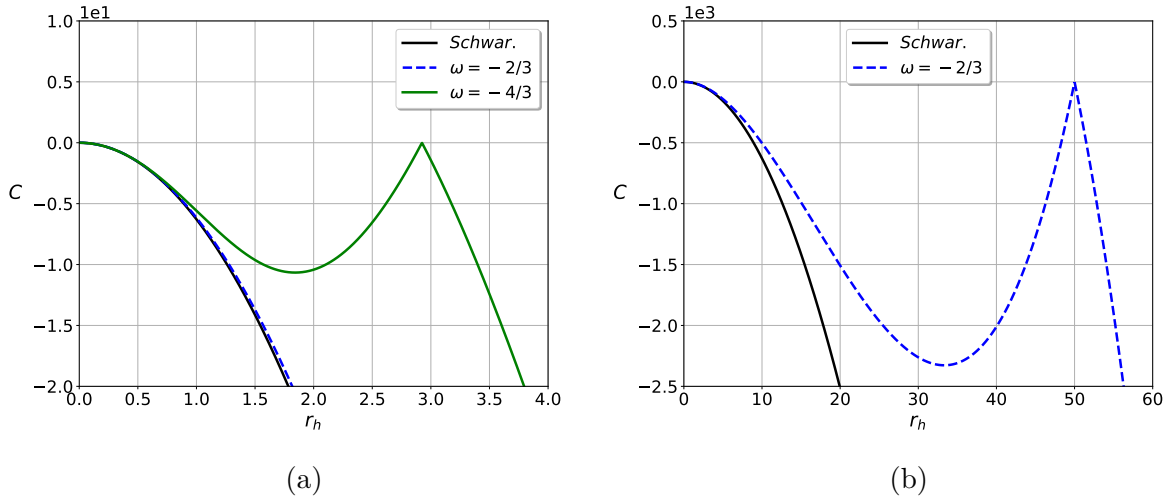


Figura 10 – Capacidade térmica em função do raio do horizonte de eventos para os casos com quintessência, $\omega = -2/3$, e o phantom, $\omega = -4/3$, com $\alpha = 0.01$ e Schwarzschild.

4.3 Termodinâmica do buraco negro de Reissner-Nordström-AdS imerso em quintessência

A constante cosmológica introduzida inicialmente por Einstein tinha o objetivo gerar uma solução que correspondesse a um universo estático. A descoberta da expansão do universo feita por Hubble, levou ao abandono dessa ideia de usar a constante cosmológica com esse objetivo, retomada mais tarde, após medidas de supernovas que indicavam uma expansão acelerada. Entretanto, a constante cosmológica passou a ter um papel diferente na cosmologia, deixando de ser um elemento para tornar o universo estático, qual seja, o de explicar a expansão acelerada. Sendo assim, buscamos estudar a termodinâmica de buracos negros carregados e imersos em quintessência, na presença da constante cosmológica Λ negativa, no contexto da TRG. Para esta configuração, muitos trabalhos podem ser encontrados na literatura, mostrando que existe uma similaridade entre sistemas líquido-gás. Em particular, o buraco negro de Reissner-Nordström AdS apresenta transições de fase de primeira ordem similares aos sistemas da matéria condensada [84, 85].

Para estudarmos a métrica correspondente ao buraco negro de Reissner-Nordström-AdS com quintessência, devemos acrescentar ao elemento de linha (4.29) a carga elétrica Q e a constante cosmológica Λ de tal forma que possa satisfazer as equações usuais de Einstein. Isso é feito tomando o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^{1+3\omega_q}} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^{1+3\omega_q}} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (4.36)$$

Os estudos dos horizontes de eventos do buraco negro são obtidos para $f(r) = 0$, ou seja,

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^{1+3\omega_q}} - \frac{\Lambda r^2}{3} = 0. \quad (4.37)$$

Os horizontes de eventos passam a depender dos seguintes parâmetros: a quintessência ω , a carga Q e a constante cosmológica Λ . Para $\omega = -2/3$, a função $f(r)$, tem a seguinte forma:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \alpha r - \frac{\Lambda r^2}{3} = 0. \quad (4.38)$$

A cada cenário considerado, em outras palavras, para cada nova fonte introduzida, em

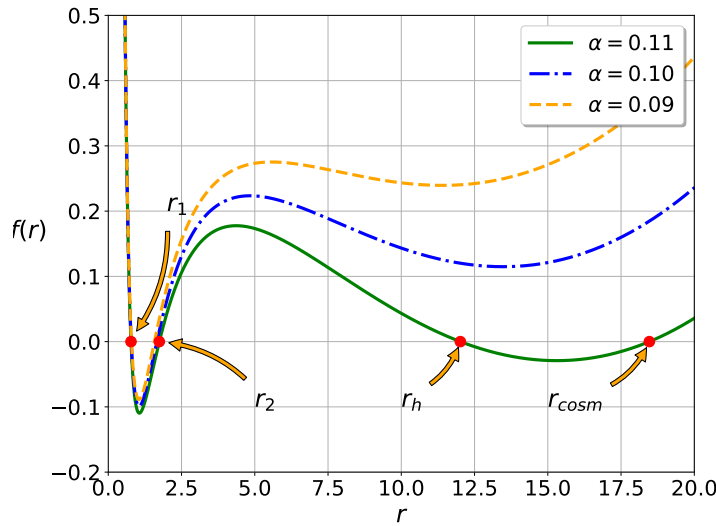


Figura 11 – Função $f(r)$ para os valores $M = 1$, $Q = 1$ e $\Lambda = -0.01$

comparação com a da solução de Schwarzschild, que é o vazio, os horizontes tornam-se mais ricos e diversos, levando à existência de mais um horizonte, para cada fonte adicionada. Como adicionamos a quintessência, a carga e a constante cosmológica, teremos até quatro possíveis horizontes positivos, são eles: dois horizontes internos, r_{intI} e r_{intII} , o horizonte de eventos, r_h e o horizonte cosmológico, r_{cosm} . É possível observar na figura (11) os pontos onde a função $f(r)$ se anula. Observe que para os valores escolhidos temos quatro horizontes de eventos, contudo, mudando os parâmetros podemos reduzir o número de horizontes.

Fazendo $f(r) = 0$ na equação (4.38), podemos obter a massa efetiva do buraco negro em termos do raio do horizonte, dada por

$$M = \frac{Q^2}{2r_h} - \frac{\Lambda r_h^3}{6} - \frac{\alpha r_h^{-3\omega}}{2} + \frac{r_h}{2}. \quad (4.39)$$

É preciso definir os parâmetros $(Q, \Lambda, \alpha, \omega)$ caso desejemos construir o gráfico da massa do buraco negro. Vamos repetir os mesmos parâmetros adotados no gráfico da função $f(r)$.

Note que, na figura (12), a linha sólida verde possui quatro pontos vermelhos com $M = 1$, são exatamente os pontos em que a função $f(r)$ se anula, apresentado na figura (11). Note também que, mudando os valores dos parâmetros, exposto nas linhas pontilhadas azul e amarelo, a massa do buraco negro possui apenas dois raios de horizonte. Outro detalhe importante é, conforme o raio do horizonte aumenta em um dado momento, os horizontes de evento e cosmológico coincidem, produzindo o horizonte de Nariai [72]. Portanto, temos um limite superior para o raio do horizonte do buraco negro.

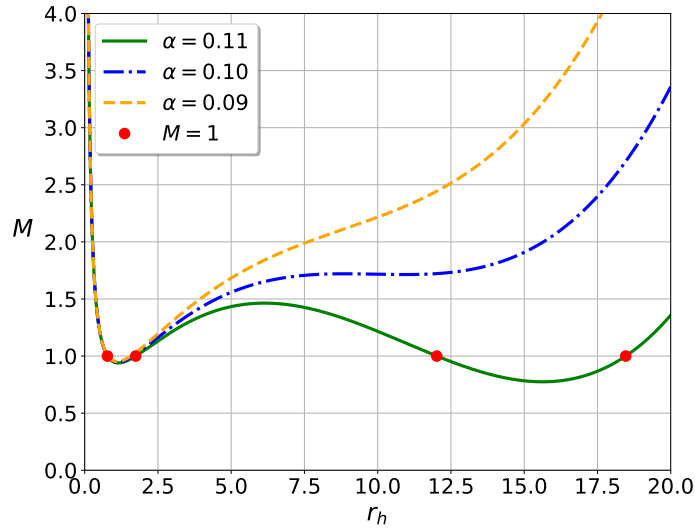


Figura 12 – Massa do buraco negro de RN com quintessência e constante cosmológica para os valores $Q = 1$ e $\Lambda = -0.01$

Em princípio, do raio limite em diante estaríamos atrás do horizonte cosmológico. É importante ressaltar que a análise dos limites para a massa do buraco negro é extremamente dependente dos parâmetros escolhidos. Assim, cada caso pode apresentar diferenças, pois podemos ter mais ou menos horizontes de eventos. Também é possível que tenhamos uma região com massa negativa ou, como vimos, exista um ponto onde os raios dos horizontes de eventos e cosmológico sejam os mesmos, produzindo um limite para a massa. Portanto, é importante estar atento a cada situação.

Para obtermos a temperatura Hawking, devemos recorrer às equações (4.17) e (4.10). Sendo assim, para a métrica (4.36), a temperatura Hawking é

$$T_H = -\frac{Q^2}{4\pi r_h^3} - \frac{\Lambda r_h}{4\pi} + \frac{3\omega\alpha r_h^{-3\omega}}{4\pi r_h^2} + \frac{1}{4\pi r_h} \quad (4.40)$$

É importante observar que a temperatura Hawking depende dos parâmetros $(Q, \Lambda, \omega, \alpha)$, levando a situações distintas para cada valor. Na figura (13), expressamos o comportamento da temperatura, para $\omega = -2/3$, $Q = 1$ e $\Lambda = -0.01$.

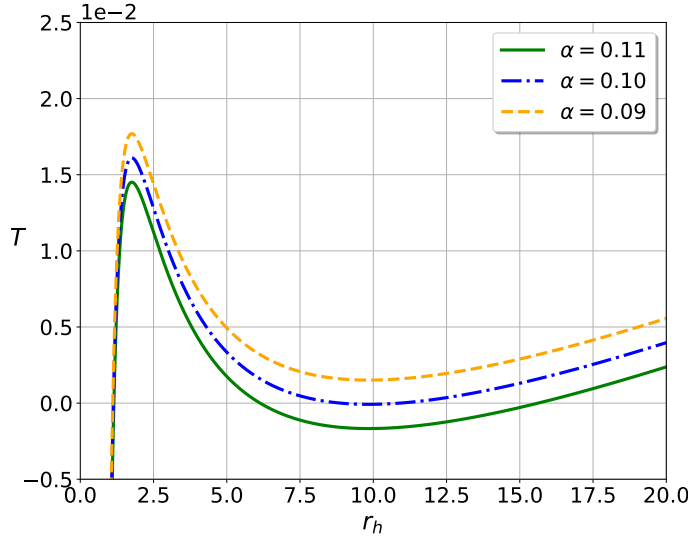


Figura 13 – Temperatura Hawking do buraco negro de RN com quintessência e constante cosmológica, para diferentes valores de α e para os valores $Q = 1$, $\omega = -2/3$, $\Lambda = -0.01$.

Note que, para $\alpha = 0.11$, existem regiões onde a temperatura passa a ser negativa. Já para $\alpha = 0.09$, temos apenas um valor mínimo para o raio do horizonte, onde a temperatura passa a ser negativa.

É possível admitir no contexto da termodinâmica, que a pressão está relacionada com a constante cosmológica por [86]:

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (4.41)$$

Portanto, escrevendo a entropia em termos da área e usando a definição da pressão, podemos reescrever a massa efetiva do buraco negro como sendo $M = M(S, Q, P)$

$$M = -\frac{\pi^{\frac{3\omega}{2}} S^{-\frac{3\omega}{2}} \alpha}{2} + \frac{4PS^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}Q^2}{2\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{\pi}}. \quad (4.42)$$

Como consideramos variações de Λ na primeira lei, o parâmetro da massa $M = M(S, Q, P)$ pode ser identificado como a entalpia $H = H(S, Q, P)$, e a primeira lei da termodinâmica de buracos negros torna-se

$$\delta M = T\delta S + \Phi\delta Q + V\delta P \quad (4.43)$$

em que temos a temperatura Hawking T e também o potencial elétrico Φ e o volume termodinâmico, que são dados por:

$$\Phi = \left(\frac{\partial M}{\partial Q} \right)_{S,P} = \sqrt{\frac{\pi}{S}} Q = \frac{Q}{r_h} \quad (4.44)$$

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)_{S,Q} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{S}{\pi} \right)^{2/3} = \frac{4\pi r_h^3}{3}. \quad (4.45)$$

Note que o volume termodinâmico é uma função monotônica do raio do horizonte de eventos, e o potencial elétrico é o mesmo obtido pela eletrodinâmica clássica.

Podemos realizar uma transformação de Legendre em (4.42) para obtermos a energia interna do buraco negro. Sendo assim, temos

$$E(S, Q, V) = M(S, Q, P) - PV = \frac{Q^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{S}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{S}{\pi} \right)^{-3\omega}. \quad (4.46)$$

Agora que temos um sistema com pressão e volume, podemos calcular a capacidade térmica a volume e carga constante e a pressão e carga constante. No caso em que o volume é constante, a equação (4.34) torna-se

$$C_{P,Q} = \frac{\partial M}{\partial r_h} \bigg|_{Q,P} \left(\frac{\partial T_H}{\partial r_h} \bigg|_{Q,P} \right)^{-1} \quad (4.47)$$

Considerando a massa dada por (4.42), obtemos

$$C_{P,Q} = \frac{2\pi r_h (Q^2 r_h^{3\omega+1} - 3\omega \alpha r_h^2 - r_h^{3\omega+3} (8\pi P r_h^2 + 1))}{-8\pi P r_h^{3\omega+4} - 3Q^2 r_h^{3\omega} + 3\omega \alpha r_h (3\omega + 2) + r_h^{3\omega+2}} \quad (4.48)$$

Em termos da entropia, temos

$$C_{P,Q} = \frac{2 \left(-3\pi^{\frac{3\omega}{2}+\frac{1}{2}} S^{\frac{3}{2}} \omega \alpha - 8PS^{\frac{3\omega}{2}+3} + \pi Q^2 S^{\frac{3\omega}{2}+1} - S^{\frac{3\omega}{2}+2} \right)}{9\pi^{\frac{3\omega}{2}+\frac{1}{2}} \sqrt{S} \omega^2 \alpha + 6\pi^{\frac{3\omega}{2}+\frac{1}{2}} \sqrt{S} \omega \alpha - 8PS^{\frac{3\omega}{2}+2} - 3\pi Q^2 S^{\frac{3\omega}{2}} + S^{\frac{3\omega}{2}+1}} \quad (4.49)$$

Considerando $\omega = -2/3$, temos

$$C_{P,Q} = \frac{2 \left(8\sqrt{\pi} P S^3 - \pi^{\frac{3}{2}} Q^2 S - 2S^{\frac{5}{2}} \alpha + \sqrt{\pi} S^2 \right)}{\sqrt{\pi} (8PS^2 + 3\pi Q^2 - S)}. \quad (4.50)$$

No caso do volume constante, temos

$$C_{V,Q} = \frac{\partial M}{\partial r_h} \bigg|_{V,P} \left(\frac{\partial T_H}{\partial r_h} \bigg|_{V,P} \right)^{-1} = 0. \quad (4.51)$$

Quando calculamos a volume constante, significa que estamos calculando com raio do horizonte constante. Portanto, entropia constante. Logo, temos que a capacidade térmica a volume constante é nula. Assim, para o buraco negro que estamos analisando, os processos isocóricos também são adiabáticos. É possível analisar o comportamento de $C_{P,Q}$ mostrado na figura (14), na qual podemos ver duas transições de fases que correspondem ao máximo e ao mínimo da temperatura.

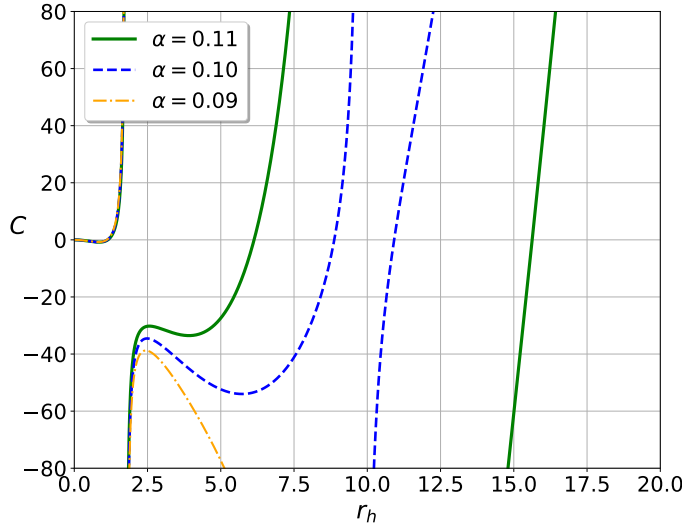


Figura 14 – Capacidade térmica a pressão constante, C_P , como função do raio do horizonte de eventos para diferentes valores de α e $Q = 1$, $\omega = -2/3$, $\Lambda = -0.01$.

4.3.1 Grandezas termodinâmicas críticas

A introdução de um volume e pressão para o buraco negro possibilitou estudar novas propriedades, como sua compressibilidade. Também permitiu o estudo de novos tipos de transições de fase, mais especificamente aquelas semelhantes às transições líquido-gás. Recentemente, David Kubiznak [87] mostrou que fenômenos tipo gás que podem ser modelados pela equação de estado de Van Der Waals estão presentes na termodinâmica de buracos negros com constante cosmológica negativa, como transição líquido-gás, pontos críticos, pontos triplos, etc [87]. Sendo assim, vamos analisar a transição de fase do sistema do buraco negro carregado AdS com quintessência no espaço de fase estendido. Trataremos a carga Q como um parâmetro fixo externo.

Para uma dada carga Q fixa, a partir da equação da temperatura Hawking (4.40), podemos obter a equação de estado, $P = P(V, T)$, para um buraco negro carregado AdS imerso em quintessência, que é dada por:

$$P = \frac{Q^2}{8\pi r_h^4} + \frac{T}{2r_h} - \frac{3\omega\alpha r_+^{-3\omega}}{8\pi r_h^3} - \frac{1}{8\pi r_h^2} \quad (4.52)$$

em que o raio do horizonte pode ser dado por meio do volume termodinâmico (4.45)

$$r_h = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3}. \quad (4.53)$$

Antes de prosseguirmos, vamos relembrar a equação de estado de Van der Waals. A teoria de Van der Waals proporciona uma descrição quantitativa da transição líquido-gás e do correspondente ponto crítico. Muito embora não descreva de forma precisa o comportamento das propriedades termodinâmicas nas proximidades do ponto crítico, ela

nos fornece uma descrição adequada da coexistência de fases e suas relações com o ponto crítico.

A equação de Van Der Waals é dada por

$$\left(P - \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = k_B T \quad (4.54)$$

em que $v = V/N$ é o volume específico do fluido, P a pressão, T a temperatura e k_B a constante de Boltzmann. Feita essa pequena introdução, realizemos uma análise dimensional, traduzindo a equação de estado “geométrico” (4.52) para uma equação física. A pressão e a temperatura são dadas por

$$\text{Press} = \frac{\hbar c}{l_p^2} P, \quad (4.55)$$

$$\text{Temp} = \frac{\hbar c}{k_B} T \quad (4.56)$$

onde l_p é a comprimento de Planck. Multiplicando a equação (4.52) por $\frac{\hbar c}{l_p^2}$, obtemos

$$\text{Press} = \frac{\hbar c}{l_p^2} P = \frac{\hbar c}{k_B} \frac{T}{2r_h} + \dots = \frac{k_B \text{Temp}}{2l_p^2 r_h} + \dots \quad (4.57)$$

Comparando com a equação de Van Der Waals, (4.54), podemos identificar que o volume específico é dado por

$$v = 2l_p^2 r_h \quad (4.58)$$

Este resultado nos diz que é o raio do horizonte que deve ser associado ao volume do fluido, e não o volume termodinâmico. Dando continuidade e voltando para as unidades geométricas, a equação de estado (4.52) pode ser reescrita em termos do volume específico, como sendo:

$$P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} + \frac{2Q^2}{\pi v^4} - \frac{3\alpha\omega 8^\omega}{\pi v^{3(1+\omega)}} \quad (4.59)$$

Na teoria de Van Der Waals, ao percorrermos a linha das fases de coexistência líquido-gás de uma substância pura em direção a altas pressões e altas temperaturas, a densidade do gás cresce e a densidade do líquido decresce até o ponto em que as duas densidades se tornam iguais. Esse ponto determina o término da linha de coexistência e corresponde ao estado em que as duas fases se tornam idênticas. Este ponto é chamado de ponto crítico. Assim, acima da temperatura crítica o fluido de Van Der Waals exibe uma única fase.

O ponto crítico é ao mesmo tempo um ponto estacionário e um ponto de inflexão, sendo assim, podemos determinar o ponto crítico por meio de

$$\frac{\partial P}{\partial v} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = 0. \quad (4.60)$$

onde $P = P_c$ é a pressão crítica, $T = T_c$ a temperatura Hawking crítica e $v = v_c$ o volume específico crítico. Da primeira condição podemos obter a relação entre temperatura crítica e volume específico crítico, que é dada por

$$T_c = \frac{1}{\pi v_c} - \frac{8Q^2}{\pi v_c^3} + \frac{9\alpha\omega(1+\omega)8^\omega}{\pi v_c^{2+3\omega}} \quad (4.61)$$

Substituindo a temperatura crítica na segunda condição de criticalidade, obtemos a seguinte equação para o volume crítico:

$$v_c^2 - 24Q^2 + \frac{8^\omega(3\omega+2)(\omega+1)9\alpha\omega}{v_c^{3\omega-1}} = 0 \quad (4.62)$$

O valor do raio crítico nem sempre pode ser obtido de forma analítica. Entretanto, para o caso da quintessência, $\omega = -2/3$, encontramos os seguintes valores críticos:

$$v_c = 2\sqrt{6}Q, \quad T_c = \frac{\sqrt{6}}{18\pi Q} - \frac{\alpha}{2\pi}, \quad P_c = \frac{1}{96\pi Q^2}. \quad (4.63)$$

Podemos ver pelas grandezas críticas que a introdução da quintessência altera a temperatura crítica do buraco negro. Fazendo $\alpha = 0$, recuperamos o resultado obtido por Kubiznak [87]. Outro ponto importante é o fato que, para não termos uma temperatura crítica, a constante α deve ser menor ou igual a $\sqrt{6}/9Q$. É possível ver na Quadro (1) os diferentes valores para as variáveis termodinâmicas críticas para diferentes valores da carga, Q .

Quadro 1 – Quantidades críticas para $\omega = -2/3$ e $\alpha = 0.01$, com diferentes valores para a carga, Q .

Q	T_c	v_c	P_c	$\frac{P_c v_c}{T_c}$
0.5	0.08504	2.44948	0.01326	0.38201
1.0	0.04172	4.89897	0.00331	0.38930
1.5	0.02728	7.34846	0.00147	0.39687
2.0	0.02006	9.79795	0.00082	0.40474
2.5	0.01573	12.2474	0.00053	0.41293

No Quadro (2), fixamos o valor da carga, $Q = 1$, e escolhemos diferentes valores para a intensidade da quintessência α . Note que a variação do parâmetro da quintessência não produz mudanças nas grandezas críticas da pressão e do volume, apenas na da temperatura.

De posse das variáveis termodinâmica críticas, podemos construir o diagrama $P = P(v)$ do buraco negro carregado AdS na presença de uma quintessência para uma temperatura fixa na figura (15) apresentamos o comportamento da equação de estado (4.59), para as isotérmicas. As temperaturas das isotérmicas diminuem de cima para baixo. As linhas tracejadas em laranja correspondem ao comportamento monofásico do “gás ideal”

Quadro 2 – Quantidades críticas para $\omega = -2/3$ e $Q = 1$, com diferentes valores para α .

α	T_c	v_c	P_c	$\frac{P_c v_c}{T_c}$
0.27	0.00034	4.89897	0.00331	0.62936
0.10	0.02740	4.89897	0.00331	0.59281
0.01	0.04172	4.89897	0.00331	0.56027

para ($T > T_c$). A isotérmica crítica é apresentada na linha sólida verde, onde temos o ponto crítico. Já as linhas tracejadas em azul correspondem a temperaturas menores que a temperatura crítica ($T < T_c$), para os quais temos uma transição de fase.

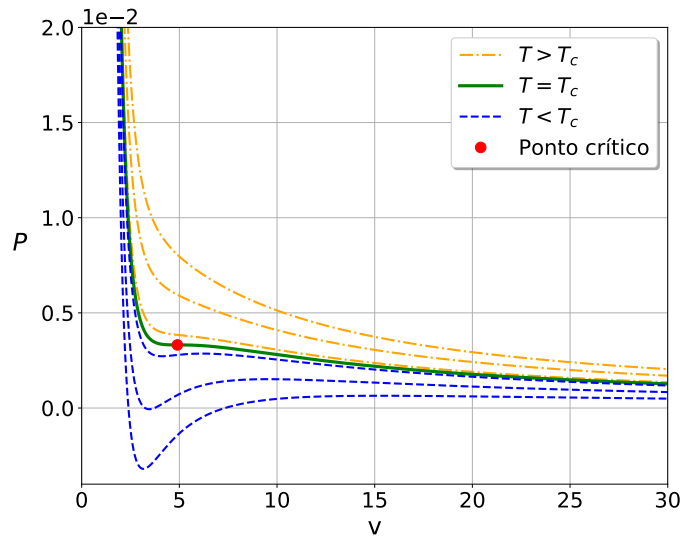


Figura 15 – Diagrama de fase $P \times v$ para o buraco negro carregado AdS imerso em quintessência para $Q = 1$, $\omega = -2/3$ e $\alpha = 0.11$

Por fim, podemos obter a energia livre de Gibbs do buraco negro, a qual é mais apropriada para estudar as propriedades termodinâmicas. Podemos escrever a energia livre de Gibbs $G = G(T, Q, P)$ em termos da entalpia $H = H(S, Q, P)$, a qual identificamos como sendo a massa do buraco negro, $M = M(S, Q, P)$. Assim a energia livre de Gibbs é:

$$G(T, Q, P) = H(S, Q, P) - TS = M(S, Q, P) - TS. \quad (4.64)$$

Fixando a carga Q , a energia livre de Gibbs é dada por

$$G(T, P) = \frac{1}{4} \left(r_h - \frac{8\pi}{3} P r_h^3 + \frac{3Q^2}{r_h} - (3\omega + 2)\alpha r_h^{-3\omega} \right) \quad (4.65)$$

Note que, em princípio, para $\omega = -2/3$, a energia livre de Gibbs não sofre alteração. Contudo, r_h é entendido como uma função da pressão e da temperatura, $r_h = r_h(T, P)$. Sendo assim, a dependência com relação aos valores da quintessência são introduzidas pela pressão e pela temperatura. Para construir o gráfico da energia livre de Gibbs, devemos

fazer um plot paramétrico, $G(r_h) \times T(r_h)$. Apresentamos na figura (16) duas situações: na primeira, escolhemos diferentes valores para α e notamos que o ponto crítico aumenta conforme aumentamos o parâmetro da quintessência; na segunda, fixamos o parâmetro α e construímos a energia livre de Gibbs para três valores da pressão, mostrando que para valores com pressão menor que a pressão crítica, existe transição de fase.

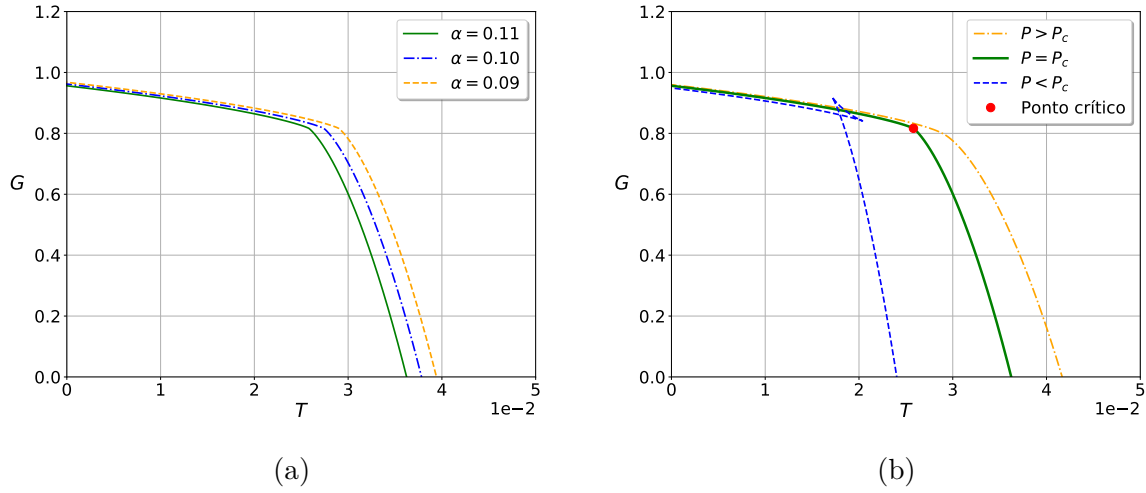


Figura 16 – Energia livre de Gibbs em termos da temperatura Hawking com $\omega = -2/3$.

Chegamos ao fim da revisão dos conceitos e de algumas aplicações da termodinâmica de buracos negros na TRG. Iremos caminhar para o nosso último capítulo, no qual aplicaremos os conceitos aprendidos da termodinâmica de buracos negros, mas agora na G'sR.

5 Termodinâmica de Buracos Negros no contexto da Gravity's Rainbow

Como mencionado no capítulo (2), a Relatividade Especial, desenvolvida por Albert Einstein, em 1905, é alicerçada em dois grandes pilares: a invariância das leis da física e a constância da velocidade da luz para quaisquer observadores inerciais. Esses pilares foram fundamentais para reconciliar a cinemática com a eletrodinâmica e explicar o experimento de Michelson-Morley. Posteriormente, a teoria foi generalizada para incluir referenciais não inerciais, denominada TRG.

Os dados observacionais obtidos de outras fontes, além da radiação eletromagnética, como por exemplo, ondas gravitacionais, explosões de raios gamma, e outras fontes, no contexto da chamada astronomia multi-mensageira, têm fornecido novas evidências sobre a estrutura do universo. Adicionalmente, do ponto de vista teórico, tem-se a ausência de uma teoria mais fundamental da gravidade quântica. Estes cenários, fornecem fortes motivos para questionar a validade da Teoria da Relatividade Especial e Geral em alguns regimes de energia. Em virtude destes motivos, a ideia de modificar a TRG com o intuito de incorporar os novos dados observacionais passou a ser de grande interesse. Por exemplo, os raios cósmicos altamente energéticos têm se colocado como um desafio na relação de dispersão estabelecida pela Relatividade Especial [7, 88].

As teorias que se propõem a descrever a gravidade quântica possuem uma característica em comum: a modificação da relação de dispersão usual proposta por Einstein, que descreve a relação entre o momento e a energia de uma partícula. Uma das propostas de modificação da relação de dispersão (MDR) é conhecida como Relatividade Duplamente Especial - Doubly Special Relativity (DSR) [20, 29, 30] -, que produz uma extensão da Relatividade Especial ao inserir um novo invariante da natureza. Assim, temos não apenas uma constante da natureza, mas duas: a velocidade da luz c e a escala de energia de Planck. É uma vez que a energia não é invariante para as transformações de Lorentz, espera-se que a DSR possa nos levar às novas transformações - não lineares - de coordenadas. Devido à dificuldade de se obter essas transformações de Lorentz modificadas, Magueijo e Smolin [33] propuseram uma generalização (2.39), que incluiria a presença da energia/comprimento ($E_p = l_p^{-1}$) de Planck por meio das funções rainbow $f(E/E_p)$ e $g(E/E_p)$. Magueijo e Smolin estenderam a DSR para considerar efeitos de campos gravitacionais, consequentemente o espaço-tempo passa a depender da energia do observador. Assim, o efeito de um campo gravitacional que uma partícula teste de energia E “sente”, deve depender de sua energia. Para a teoria ser consistente, é necessário que $\lim_{E/E_p \rightarrow 0} f(E/E_p), g(E/E_p) = 1$. Essa teoria ficou conhecida como G'sR, a métrica não é a mesma para todas as partículas-teste,

mas depende da energia delas. Nesse sentido, é uma família de métricas com a energia da partícula-teste sendo o parâmetro. E o princípio da correspondência modificado nos diz que, ao irmos para baixas energias comparada com a escala de Planck, recuperamos a TRG. Contudo, em regimes de altas energias, forte gravidade e próximos a singularidades, como nas proximidades de um buraco negro, espera-se discrepâncias entre as teorias.

O comportamento de buracos negros com a criação de pares de partículas virtuais ao seu redor e proporcionando a emissão de radiação Hawking podem ser estudadas na G'sR. A sua importância pode ser justificada por meio da possibilidade da radiação Hawking parar em algum momento antes da evaporação total do buraco negro, surgindo um buraco negro remanescente que poderia resolver o problema do paradoxo da informação e, talvez, o da matéria escura [89, 90, 91]. O objetivo desse capítulo é estudar a termodinâmica de buracos negros na G'sR na presença de um fluido cosmológico que pode mimetizar vários tipos de energia escura. Desta forma, iremos estudar as implicações das funções rainbow no cenário da termodinâmica de buracos negros que será adotada. Para isto, iremos adotar as funções rainbow estudadas na seção (2.4) para diferentes valores de n e η . Também vamos estudar as transições de fase ao considerar que a constante cosmológica pode estar associada com a pressão. Veremos como as propriedades termodinâmicas podem ser afetadas ao considerarmos um espaço-tempo em que as medidas das grandezas físicas dependem da energia do observador.

5.1 Termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild imerso em quintessência

No capítulo (4) estudamos alguns modelos de espaço-tempo na G'sR. Um deles foi o espaço-tempo de Kiselev, que pode ser visto como o espaço-tempo de Schwarzschild modificado pela presença da quintessência. Obtivemos a métrica correspondente, analisamos suas singularidades e a massa do buraco negro imerso em quintessência a qual verificamos que a massa do buraco negro não sofre influência das funções rainbow.

Para começarmos o estudo da termodinâmica de buraco negro na G'sR, o procedimento não difere muito do adotado no capítulo anterior. Contudo, devemos ficar atentos às famílias de funções rainbow adotadas. Recorremos às funções discutidas no início deste trabalho, ver equação (2.38), em que foram analisadas as energias possíveis para diferentes valores de n .

Iniciamos com o cálculo da temperatura Hawking, considerando o elemento de linha dado por (3.64). Note que, para esta configuração, temos a presença das funções rainbow. Sendo assim, devemos ter alguma diferenciação na gravidade superficial em comparação

com o resultado clássico. Na sequência, calculando a temperatura Hawking, obtemos

$$\tilde{T}_{H_{kis}} = \frac{g_E}{f_E} T_{H_{kis}} \quad (5.1)$$

sendo $\tilde{T}_{H_{kis}}$ a temperatura Hawking dependente da energia e, tal que se considerarmos $g_E = f_E = 1$ recuperamos a temperatura usual. Com o intuito de simplificar o estudo, consideramos que as partículas virtuais não possuem massa, são apenas fótons irradiados.

A temperatura Hawking é determinada a partir dos parâmetros do espaço-tempo. Consequentemente, devemos transcrever a informação da energia dos fótons em termos dos parâmetros do buraco negro que os irradia. Em virtude disto, consideramos que os fótons possuem energias bem definidas dada pela MDR conforme (2.39). Como esses fótons estão próximos ao raio do horizonte de eventos, podemos recorrer ao princípio da incerteza de Heisenberg, associando a posição dos fótons, $\Delta x \approx r_h$, com o momento p , obtendo a relação $p \approx 1/r_h$, em que tomamos $\hbar = 1$. Este é o principal argumento necessário para a construção da MDR dada por (2.39), e consequentemente das funções rainbow que abordamos na seção (2.4).

Como mencionado no início deste trabalho, em [41] foi usada a relação $E = p$, que é a dispersão da energia momento, apropriada para expressar a energia dos fótons em termos dos parâmetros do buraco negro. Entretanto, uma vez que estamos trabalhando com uma relação modificada de dispersão, devemos recorrer a ela para relacionar a energia dos fótons com o buraco negro. O uso da relação usual de dispersão é o motivo pelo qual os autores encontram, remanescentes, de buracos negros em seus trabalhos. Este problema é mencionado e corrigido no trabalho [42], em que a MDR correta foi usada. Contudo, muitos autores ainda afirmam que a G'sR permite remanescentes com base nos resultados encontrados em [41].

Dando continuidade, a temperatura Hawking pode ser escrita em termos das funções rainbow nas unidades naturais, como segue

$$\tilde{T}_{H_{kis}} = \sqrt{1 - \eta E^n} \frac{|3\alpha\omega + r_h^{3\omega+1}|}{4\pi r_h^{3\omega+2}}. \quad (5.2)$$

Note que as funções rainbow surgem como correção para a temperatura Hawking na TRG, na qual devemos considerar os diferentes casos para n e η . Apresentamos os resultados na figura (17), para os valores de $n = 0$ e $n = 1$, considerando o caso da quintessência $\omega = -2/3$, com $\alpha = 0.01$ e $\eta = |0.9|$. Observe que, para o caso $n = 1$ em que consideramos $\eta > 0$, a temperatura apresenta um limite finito, diferenciando do resultado clássico. Já o ponto crítico não é alterado pela presença das funções rainbow. Entretanto, para $\eta < 0$, o comportamento da temperatura quando r_h vai a zero é diferente, e portanto, semelhante ao obtido na TRG. Também é apresentado o caso do phantom, $\omega = -4/3$, na figura (18b), onde se pode ver que, as curvas apresentam um comportamento análogo.

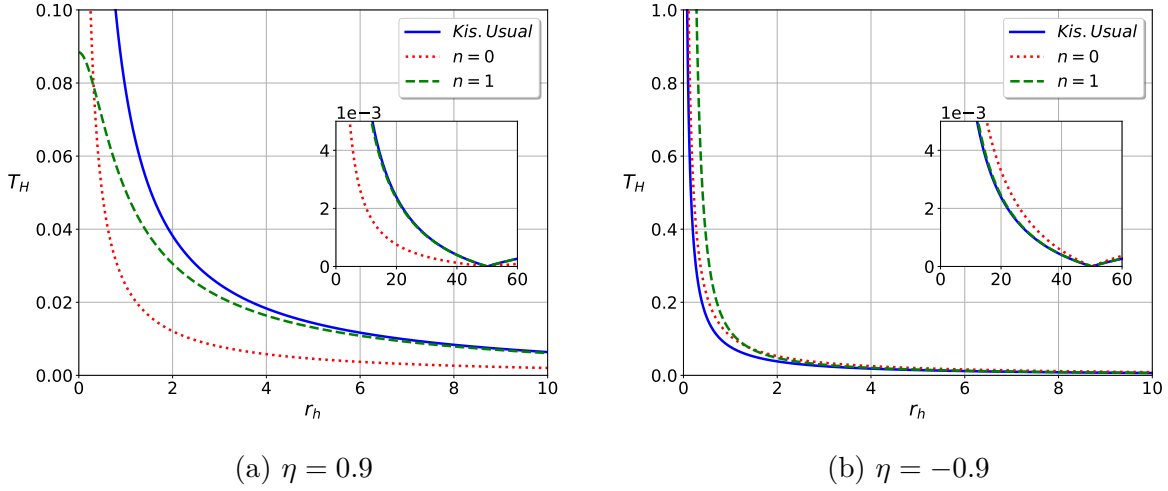


Figura 17 – Temperatura Hawking para o buraco negro imerso em um fluido com $\omega = -2/3$, com $\alpha = 0.01$ na Gravity's Rainbow.

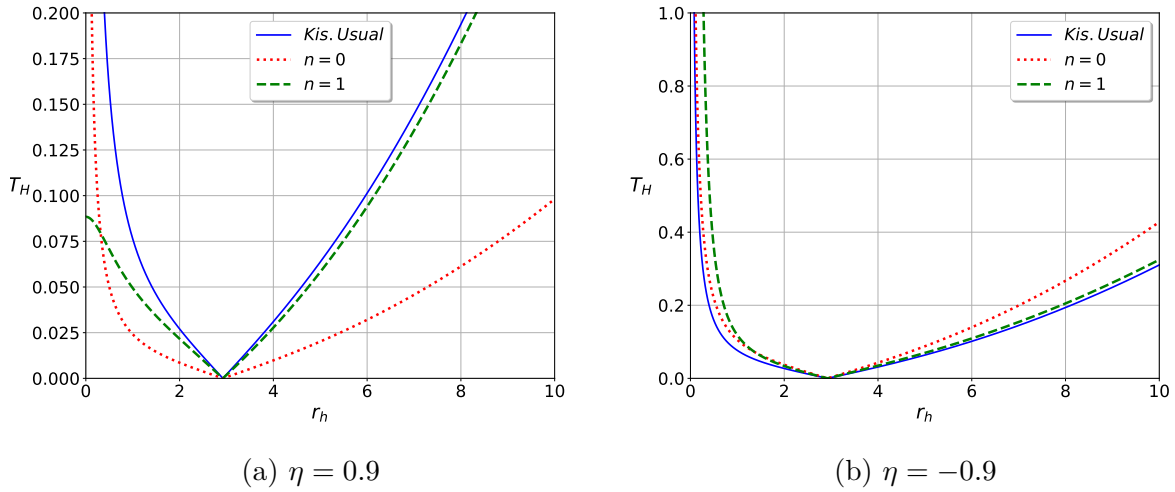


Figura 18 – Temperatura Hawking para o buraco negro imerso no cenário do phantom, $\omega = -4/3$, com $\alpha = 0.01$ em Gravity's Rainbow.

Vimos que a entropia é obtida por meio da primeira lei da termodinâmica de buracos negros. Também observamos que, ao considerarmos diferentes fluidos, a entropia não mudava o seu comportamento, mas possui diferentes limites superiores para o raio do horizonte, de acordo com o fluido cosmológico escolhido. Para encontrarmos a entropia em G'sR devemos realizar o mesmo procedimento, recorrendo à primeira lei da termodinâmica e considerando a temperatura Hawking dada por (5.2), o que nos leva ao seguinte resultado

$$d\tilde{S} = \frac{1}{\tilde{T}_H} dM = \frac{f_E}{g_E} \frac{1}{T_H} \frac{dM}{dr_h} dr_h. \quad (5.3)$$

Escrevendo este resultado em termos das funções rainbow, obtemos

$$d\tilde{S} = \frac{1}{\sqrt{1-\eta E^n}} \frac{2\pi r_h (3\omega\alpha + r_h^{3\omega+1})}{|3\omega\alpha + r_h^{3\omega+1}|} dr_h \quad (5.4)$$

Para resolver essa equação é necessário indicar valores para os parâmetros η , n e ω , e em seguida, aplicar métodos de integração numérica. Os resultados assim obtidos, são apresentados na figura (19), considerando os seguintes valores: $\alpha = 0.01$, $\omega = -2/3$ e η possuindo valores positivos e negativos. Observamos correções nos valores da entropia ao compararmos com o resultado clássico exposto na figura (9). As correções na entropia já eram previstas em [92], bem como para valores maiores de n , que são tratadas em [93].

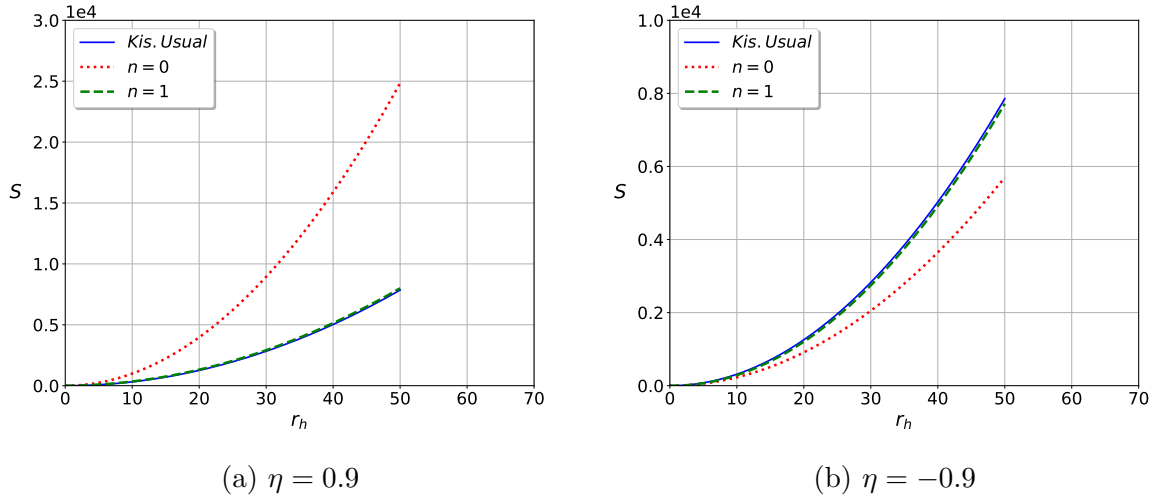


Figura 19 – Entropia em função do raio do horizonte em Gravity's Rainbow para $\omega = -2/3$ e $\alpha = 0.01$.

Para estudarmos a capacidade térmica, podemos recorrer a equação (4.34), em que consideramos a temperatura Hawking modificada pela presença das funções rainbow. Assim, obtemos a seguinte expressão:

$$C = \frac{\partial M}{\partial r_h} \left(\frac{\partial \tilde{T}_H}{\partial r_h} \right)^{-1} = \frac{\partial M}{\partial r_h} \left(\frac{\partial}{\partial r_h} \left[\frac{g_E T_H}{f_E} \right] \right)^{-1}. \quad (5.5)$$

Note que as funções rainbow não podem sair da derivada parcial, pois dependem do raio do horizonte. Sendo assim, para calcularmos a capacidade térmica, devemos indicar quais funções rainbow estamos adotando. Na figura (20) apresentamos a capacidade térmica para o caso do phantom $\omega = -4/3$. Notamos que a capacidade térmica ainda é negativa quando consideramos os efeitos de um espaço-tempo dependente da energia dos observadores. Observe que, quando o raio do horizonte tende a zero, a temperatura Hawking vai para infinito no caso usual de Kiselev e em Rainbow com $n = 0$. Consequentemente, a capacidade térmica vai a zero. Contudo, para $n = 1$, com $\eta > 0$, a temperatura Hawking é

finita quando o raio do horizonte tende a zero, de modo que a capacidade térmica tende a menos infinito. A possível explicação deve ser a seguinte: um calor específico muito pequeno permite um grande aumento na temperatura, mesmo para uma pequena variação na troca de calor com o ambiente. Por outro lado, um calor específico muito grande (em valor absoluto) resultará em uma pequena variação de temperatura. Assim, os gráficos de temperatura e calor específico são consistentes. Para valores superiores de n é observada uma temperatura finita quando consideramos $\eta > 0$ [93].

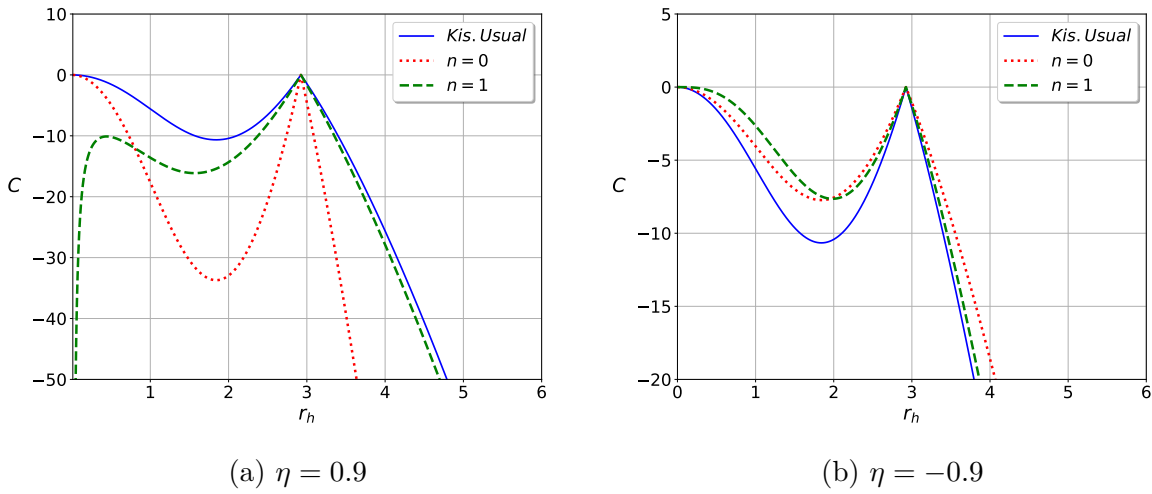


Figura 20 – Capacidade térmica em função do raio do horizonte em Gravity's Rainbow para $\omega = -4/3$ e $\alpha = 0.01$.

Nesta seção estudamos a termodinâmica de buracos negros no espaço-tempo de Kiselev com modificações feitas pela G'sR. Obtivemos a temperatura Hawking, a entropia, a capacidade térmica e construímos graficamente as grandezas termodinâmicas para diferentes parâmetros da teoria. Verificamos que o valor limite para o raio do horizonte de eventos não sofre influência das funções rainbow, mas depende da massa do buraco negro e do tipo de fluido cosmológico estudado. Por consequência, existe um limite para a temperatura/entropia nesse espaço-tempo. Quando consideramos a G'sR, encontramos uma temperatura finita conforme o raio do horizonte diminui, para o caso em que temos $n > 1$ e $\eta > 0$. Este comportamento não é observado no espaço-tempo de Schwarzschild ou Kiselev na TRG. Embora este resultado não permita um buraco negro remanescente, ao menos evita o comportamento catastrófico presente na TRG. A entropia na G'sR deve ser obtida por meio da primeira lei da termodinâmica modificada e, passa a possuir correções para os seus valores que dependem dos parâmetros da teoria da G'sR, assim como, a capacidade térmica que também sofre correções nos seus valores.

5.2 Termodinâmica de buraco negro de Reissner-Nordstrom-AdS imerso em quintessência

Vimos na seção (4.3) o estudo da termodinâmica do buraco negro de Reissner-Nordstrom-AdS imerso em um fluido cósmico na TRG. Buscaremos agora identificar as principais mudanças que podem ocorrer devido à introdução de um espaço-tempo dependente da energia. Iniciamos com o elemento de linha dado por (4.36), em que são acrescentadas as funções rainbow (f_E, g_E). Portanto, temos

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^{1+3\omega_q}} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) \frac{dt^2}{f_E^2} - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^{1+3\omega_q}} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} \frac{dr^2}{g_E^2} - r^2 \frac{d\Omega^2}{g_E^2}. \quad (5.6)$$

Como vimos, o estudo dos horizontes de eventos é dado por (4.37) que permanece o mesmo na G'sR, pois a função $f(r)$, não é alterada pela presença das funções rainbow. Já a temperatura Hawking é modificada e dada por (5.1). Sendo assim, considerando a métrica (5.6) é possível obter a gravidade superficial e, em seguida, encontrar a temperatura Hawking, que é dada por

$$\tilde{T}_H = \frac{g_E}{f_E} \left(-\frac{Q^2}{4\pi r_h^3} - \frac{\Lambda r_h}{4\pi} + \frac{3\omega\alpha r_h^{-3\omega}}{4\pi r_h^2} + \frac{1}{4\pi r_h} \right). \quad (5.7)$$

Considerando as funções adotadas neste trabalho, obtemos o seguinte resultado

$$\tilde{T}_H = \frac{\sqrt{1-\eta E^n}}{4\pi} \left(-\frac{Q^2}{r_h^3} - \Lambda r_h + \frac{3\omega\alpha r_h^{-3\omega}}{r_h^2} + \frac{1}{r_h} \right) \quad (5.8)$$

Podemos ver o comportamento da temperatura na figura em (21), em que consideramos $n = 1$. Note que, para $n > 0$, os valores da temperatura diminui. Já para $n < 0$, os valores da temperatura aumentam. Para ambos os casos dos valores de η , a temperatura reproduz o mesmo comportamento obtido na TRG, na figura em (13). A novidade são as correções nos valores da temperatura Hawking.

Como vimos, a constante cosmológica está relacionada com a pressão por meio da equação (4.41). Portanto, a massa do buraco negro passa a ter uma dependência com a pressão, ou seja, $M = M(r_h, Q, P)$, a qual não é afetada pelas funções rainbow. Portanto, a massa do buraco negro continua sendo dada pela equação (4.42). Consequentemente, o volume termodinâmico e o potencial elétrico também permanecem inalterados.

A capacidade térmica, por estar relacionada com a temperatura, sofre alguma mudança como era de se esperar, para a capacidade térmica a volume constante, continuamos com o mesmo resultado, qual seja, zero. Contudo, a capacidade térmica a pressão e carga constantes será dada por (4.48), em que consideramos a temperatura Hawking modificada,

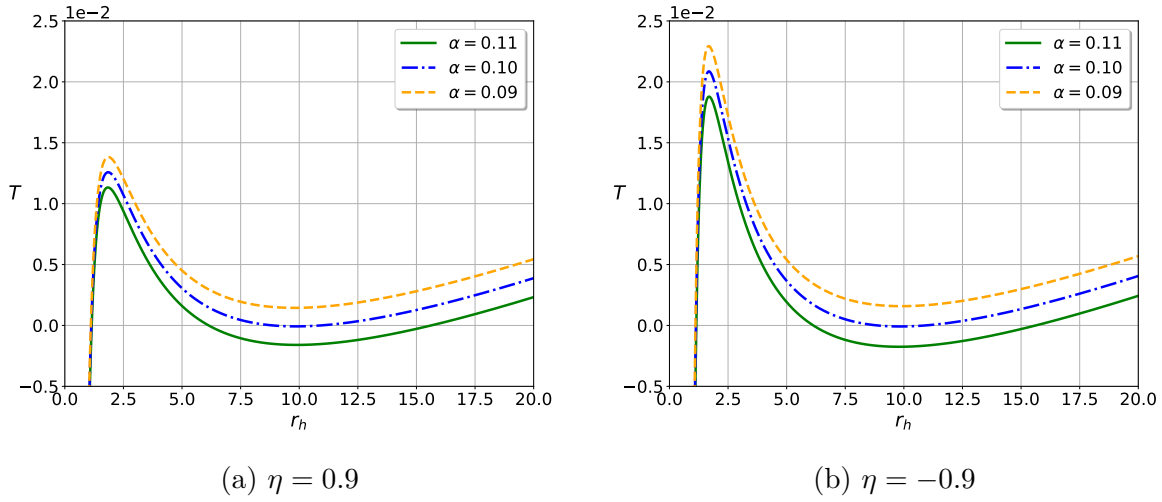


Figura 21 – Temperatura Hawking em função do raio do horizonte em Gravity's Rainbow para os valores $n = 1$, $\omega = -2/3$, $\alpha = 0.01$ e $\Lambda = -0.01$

dada por (5.8). É importante estar atento ao fato de que as funções rainbow não podem sair da derivada parcial. Para obter a capacidade térmica, vamos considerar o caso com $n = 1$, o resultado é apresentado na figura (22). Note que o comportamento é análogo ao obtido na figura (14). Entretanto, devido às funções rainbow, observamos correções na capacidade térmica, mas sem gerar mudanças nas estruturas das curvas.

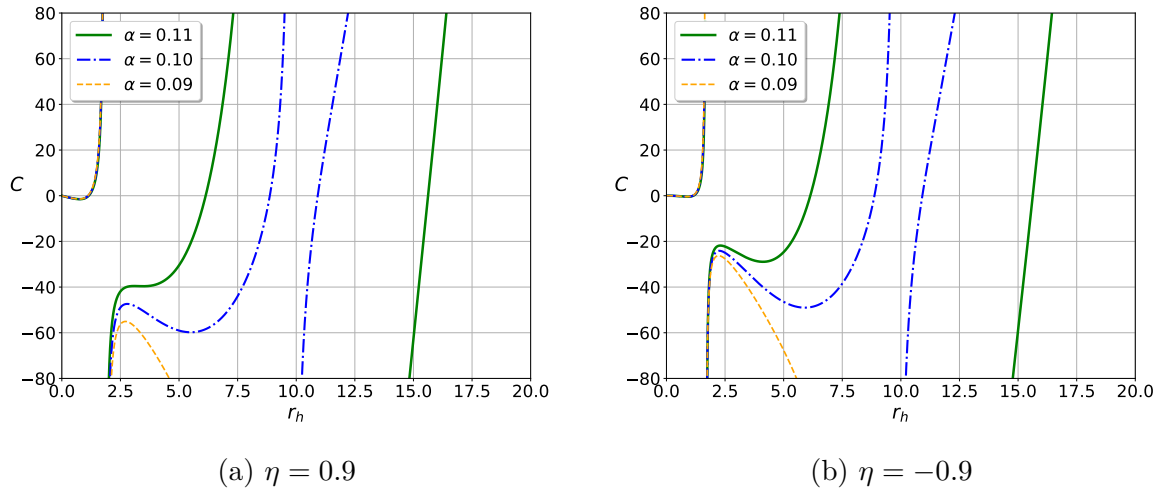


Figura 22 – Capacidade térmica em função do raio do horizonte na Gravity's Rainbow, para $n = 1$, $\omega = -2/3$, $\alpha = 0.01$ e $\Lambda = -0.01$

5.2.1 Grandezas termodinâmicas críticas

Para analisarmos o comportamento das grandezas termodinâmicas críticas, devemos reescrever a equação (5.8) em termos da pressão, conforme proposto por Kastor [94], por

meio da relação (4.41). Em seguida, obtemos a pressão, dada por:

$$P = \frac{f_E}{g_E} \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} + \frac{2Q^2}{\pi v^4} - \frac{3\alpha\omega 8^\omega}{\pi v^{3(1+\omega)}} \quad (5.9)$$

em que v é o volume específico dado por (4.58). Observe que a pressão em termos da constante cosmológica não é modificada pelas funções rainbow. Entretanto, quando escrevemos a pressão em termos do volume e da temperatura, a pressão passa a ser dependente das funções rainbow, uma vez que a temperatura é modificada por essas funções, como verificado no item (5.7). É possível comparar a equação (5.9) modificada da pressão com a equação (4.59) clássica evidenciando novamente que a modificação ocorre no setor da temperatura Hawking.

Para determinar o ponto crítico do buraco negro carregado imerso em um fluido cosmológico na G'sR, recorreremos à sua definição, dada por meio das equações (4.60), mas considerando a pressão modificada pelas funções rainbow. Vamos analisar para diferentes valores de n , considerando a quintessência $\omega = -2/3$.

- Iniciando com $n = 0$:

Para as funções rainbow, a equação de estado é dada por

$$P_{n=0} = \frac{Q^2}{8\pi r_h^4} + \frac{T}{2r_h\sqrt{1-\eta}} + \frac{\alpha}{4\pi r_h} - \frac{1}{8\pi r_h^2} \quad (5.10)$$

Da equação de estado (5.10), concluímos que o volume específico crítico e a pressão crítica continuam sendo dados por (4.63), ao passo que a temperatura crítica não é mais a mesma, agora é dada por

$$T_c = \frac{\sqrt{1-\eta}(-9Q\alpha + \sqrt{6})}{18\pi Q} \quad (5.11)$$

Nas tabelas (1) e (4) comparamos os valores da temperatura crítica na G'sR com os valores obtidos na TRG. Observe que as correções dependem do valor do parâmetro η . Para $\eta > 0$, temos valores menores para a temperatura crítica. O contrário acontece quando consideramos $\eta < 0$, o que resulta em temperaturas críticas maiores.

Conhecendo-se as grandezas termodinâmicas críticas, é possível construir o diagrama $P = P(v)$ do buraco negro carregado AdS imerso em quintessência na G'sR, para uma temperatura fixa. Entretanto, para $n = 0$, ao substituirmos a temperatura crítica (5.11) na equação da pressão (5.10), observamos que não há mudanças aparentes no diagrama pressão $\times$ volume.

- Vamos analisar o caso $n = 1$:

Quadro 3 – Comparação entre a temperatura crítica na Teoria da Relatividade Geral com a Gravity's Rainbow. Consideramos $\omega = -2/3$ e $\alpha = 0.01$, e diferentes valores para a carga Q .

Rel. Geral Clássica			Gravity's Rainbow	
T_c	Q	$\eta = 0$	$\eta = 0.9$	$\eta = -0.9$
	0.5	0.08504	0.02689	0.11722
	1.0	0.04172	0.01319	0.05751
	1.5	0.02728	0.00862	0.03761
	2.0	0.02006	0.00634	0.02766
	2.5	0.01573	0.00497	0.02168

Quadro 4 – Comparação entre a temperatura crítica na Teoria da Relatividade Geral com a Gravity's Rainbow. Consideramos $\omega = -2/3$ e $Q = 1$, e diferentes valores para o parâmetro da quintessência α .

Rel. Geral Clássica			Gravity's Rainbow	
T_c	α	$\eta = 0$	$\eta = 0.9$	$\eta = -0.9$
	0.27	0.00034	0.00010	0.00047
	0.10	0.02740	0.00866	0.03776
	0.01	0.04172	0.01319	0.05751

A equação de estado passa a ser dada por

$$P_{n=1} = \frac{Q^2}{8\pi r_h^4} + \frac{\sqrt{2}T}{2\sqrt{\eta^2 - \eta\sqrt{\eta^2 + 4r_h^2} + 2r_h^2}} + \frac{\alpha}{4\pi r_h} - \frac{1}{8\pi r_h^2} \quad (5.12)$$

Note que as funções rainbow estão no setor da temperatura, como já diferentemente havíamos comentado. No entanto, elas surgem como função do raio do horizonte, do resultado obtido em (5.10). Para a equação (5.12), não é possível obter o volume crítico em forma algébrica. Faz-se necessário, então, recorrer a métodos numéricos para encontrar os valores do volume crítico que satisfaçam a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & -384Q^2\eta^5 - 544Q^2\eta^3v_c^2 - 176Q^2\eta v_c^4 - 12\eta^5\alpha v_c^3 + \\ & 32\eta^5v_c^2 - 13\eta^3\alpha v_c^5 + 40\eta^3v_c^4 - 2\eta cv_c^7 + 10\eta v_c^6 + \\ & \sqrt{\eta^2 + v_c^2}(384Q^2\eta^4 + 352Q^2\eta^2v_c^2 + \\ & 48Q^2v_c^4 + 12\eta^4\alpha v_c^3 - 32\eta^4v_c^2 + 7\eta^2\alpha v_c^5 - 24\eta^2v_c^4 - 2v_c^6) = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

A temperatura crítica dada em termos do volume crítico possui a seguinte forma:

$$T_c = \frac{\sqrt{\eta^2 + v_c^2} \left(8Q^2 + \frac{\alpha v_c^3}{2} - v_c^2 \right) \left(2\eta^2 - 2\eta\sqrt{\eta^2 + v_c^2} + v_c^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{\pi v_c^6 \left(\eta - \sqrt{\eta^2 + v_c^2} \right)}, \quad (5.14)$$

enquanto a pressão crítica é dada por

$$P_c = \frac{\left(-32Q^2\eta^2 + 4\eta(\eta^2 - 7Q^2)v_c^2 - 2\alpha\eta^3v_c^3 + 3\alpha\eta v_c^4 - \alpha\eta v_c^5 + \right.}{2\pi v_c^6 \left(\eta - \sqrt{\eta^2 + v_c^2} \right)} \sqrt{\eta^2 + v_c^2} \left(32Q^2\eta^2 - 4(\eta^2 - 3Q^2)v_c^2 + 2\alpha\eta^2v_c^3 - v_c^4 \right) \quad (5.15)$$

É possível verificar os valores das grandezas críticas para diferentes valores da carga e da intensidade da quintessência α , com η podendo ser negativo ou positivo. Note que, para $n = 1$, temos mudanças nos valores críticos, tanto para pressão, quanto para o volume específico e a temperatura.

Quadro 5 – Grandezas termodinâmicas críticas para $n = 1$ e diferentes valores para a carga, Q . Consideramos $\omega = -2/3$ e $\alpha = 0.01$.

	Q	T_c	v_c	P_c	$\frac{P_c T_c}{v_c}$
$\eta = 0.9$	0.5	0.04681	0.77323	0.00578	$3.502 \cdot 10^{-5}$
	1.0	0.02997	1.37805	0.00213	$4.651 \cdot 10^{-5}$
	1.5	0.02171	1.98498	0.00109	$1.201 \cdot 10^{-5}$
	2.0	0.01685	2.59301	0.00066	$4.329 \cdot 10^{-6}$
	2.5	0.01366	3.20159	0.00044	$1.905 \cdot 10^{-6}$
$\eta = -0.9$	0.5	0.14757	0.50220	-0.00302	-0.00088
	1.0	0.05743	1.09601	0.00036	$1.89 \cdot 10^{-5}$
	1.5	0.03413	1.70470	0.00047	$9.581 \cdot 10^{-6}$
	2.0	0.02383	2.31686	0.00038	$3.952 \cdot 10^{-6}$
	2.5	0.01809	2.93030	0.00029	$1.830 \cdot 10^{-6}$

Quadro 6 – Grandezas termodinâmicas críticas para $n = 1$ e diferentes valores para a intensidade da quintessência α . Consideramos $\omega = -2/3$ e $Q = 1$.

	α	T_c	v_c	P_c	$\frac{P_c T_c}{v_c}$
$\eta = 0.9$	0.27	0.00024	1.22581	0.00330	$6.557 \cdot 10^{-7}$
	0.10	0.01956	1.31932	0.00251	$3.727 \cdot 10^{-5}$
	0.01	0.02997	1.37805	0.00213	$4.651 \cdot 10^{-5}$
$\eta = -0.9$	0.27	0.00050	1.22346	0.00333	$1.375 \cdot 10^{-6}$
	0.10	0.04079	1.13507	0.00466	0.00016
	0.01	0.06260	1.09601	0.00545	0.00031

Por fim, podemos construir os diagramas pressão $\times$ volume e analisar as distinções entre a TRG e a G'sR. Como vimos, para $n = 0$, não temos mudanças no diagrama. Entretanto, para $n = 1$, é possível obter alterações. Nas figuras (23) e (24) são expostos os resultados. Observe que, na figura (23), consideramos o caso usual ($\eta = 0$) para efeito de comparação com as correções de ordem $n = 2$. Já na figura, (24) olhamos para os valores que são maiores e ou menores que a temperatura crítica ao considerar η negativo ou positivo. O último ponto que iremos abordar é a energia livre de Gibbs. No capítulo (4), vimos que a energia livre de Gibbs é dada por (4.64), em que a entalpia é identificada como a massa do buraco negro, que não é modificada na G'sR. Contudo, a temperatura Hawking possui modificações devido às funções rainbow, assim como a entropia não é mais obtida por meio do cálculo da área - relação de Bekenstein (4.19), devendo ser calculada pela primeira lei da termodinâmica (4.13). Diante dessas considerações, vamos analisar as

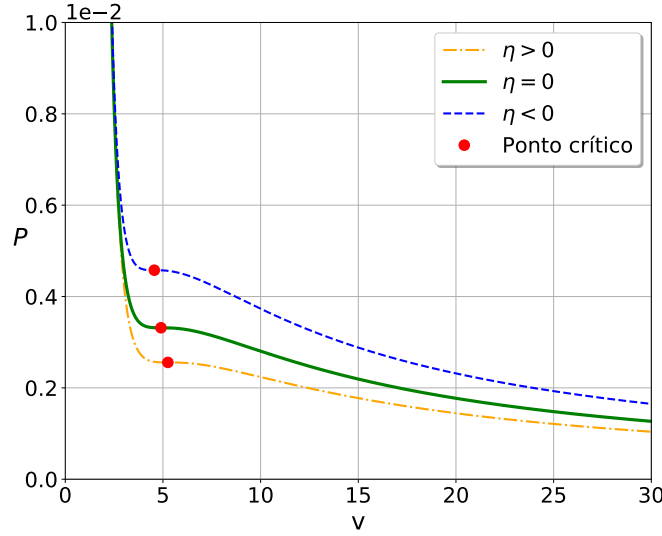


Figura 23 – Curvas críticas no diagrama de fase $P \times v$ para o buraco negro imerso em quintessência, $\omega = -2/3$, com $\alpha = 0.11$ e $Q = 1$ na Gravity's Rainbow.

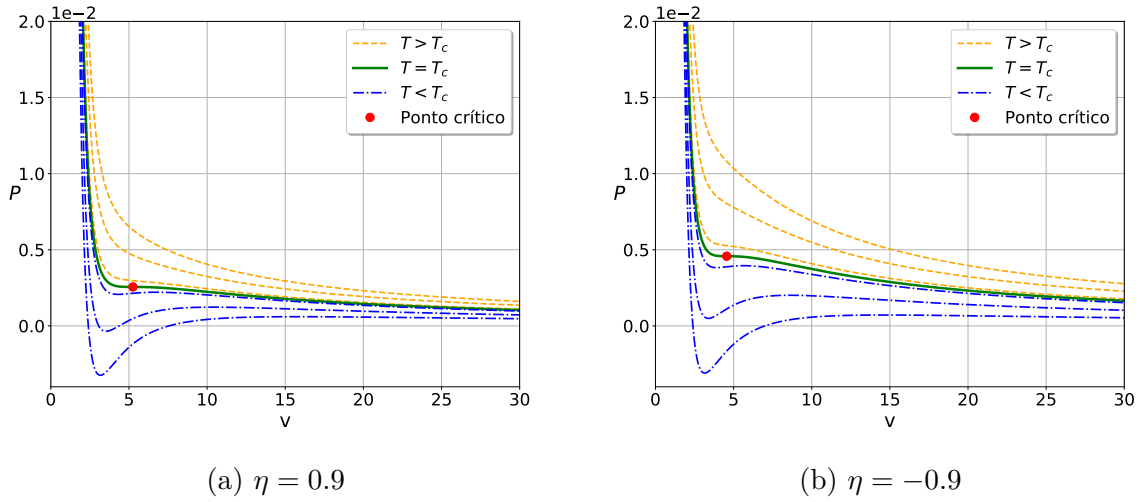


Figura 24 – Diagrama de fase $P \times v$ para o buraco negro imerso em quintessência, $\omega = -2/3$, com $\alpha = 0.11$, $Q = 1$ e $\eta = |0.9|$ na Gravity's Rainbow.

implicações vindas das funções rainbow. Portanto, a energia livre de Gibbs é dada por

$$\tilde{G}(\tilde{T}, Q, \tilde{P}) = M - \tilde{T}\tilde{S} \quad (5.16)$$

$$\tilde{G} = \frac{4\pi\tilde{P}r_h^3}{3} + \frac{Q^2}{2r_h} - \frac{\alpha r_h^{-3\omega}}{2} + \frac{r_h}{2} - \frac{g_E}{f_E} \frac{\tilde{S}}{4\pi} \left(8\pi\tilde{P}r_h - \frac{Q^2}{r_h^3} + \frac{3\alpha\omega}{r_h^{2-3\omega}} + \frac{1}{r_h^4} \right). \quad (5.17)$$

O símbolo tilde é para evidenciar que a pressão e a entropia dependem da energia dos observadores. Para estudarmos a equação (5.17), vamos considerar $n = 1$ nas funções rainbow. Calculando a entropia por métodos numéricos e implementando os resultados na equação da energia livre de Gibbs, obtemos os resultados expostos nas figuras (25) e

(26). A partir dos resultados, podemos concluir que em um espaço-tempo dependente da energia ou do observador, modifica a energia livre de Gibbs e as variáveis termodinâmicas críticas sofrem alterações.

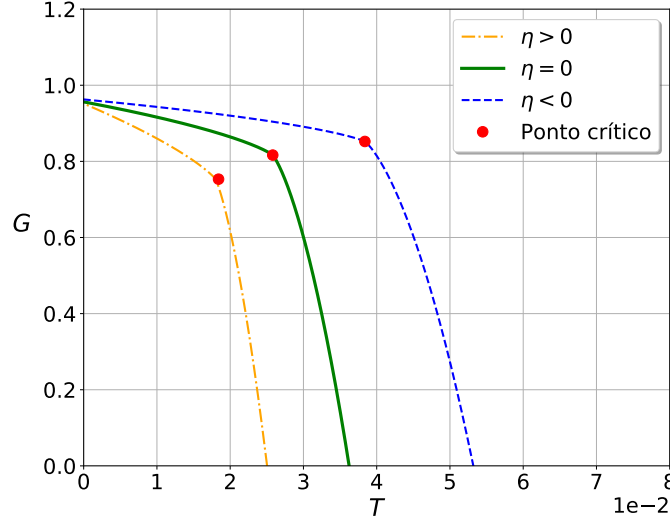


Figura 25 – Curvas críticas da energia livre de Gibbs para o buraco negro imerso em quintessência, $\omega = -2/3$, com $\alpha = 0.11$ e $Q = 1$ na Gravity's Rainbow.

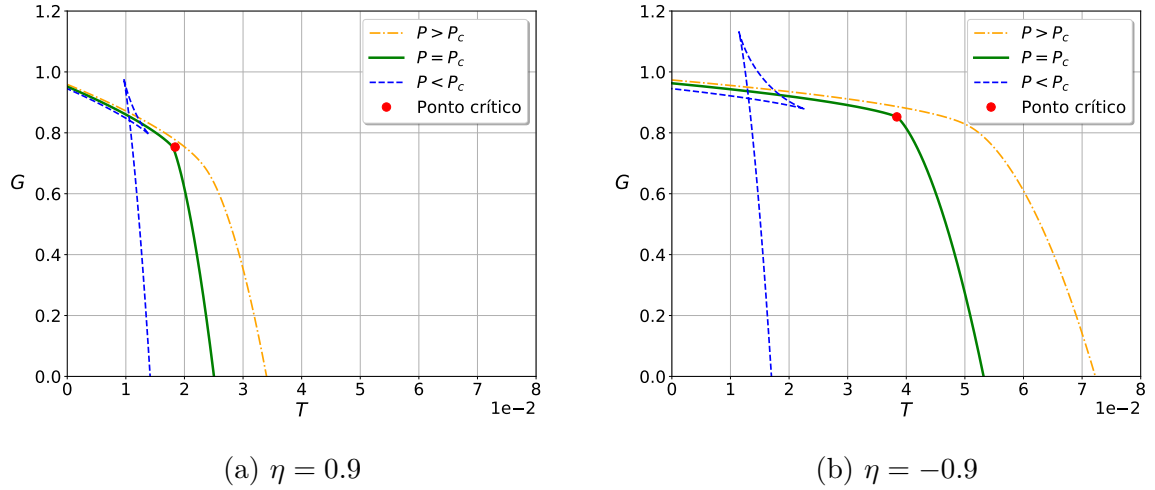


Figura 26 – Energia livre de Gibbs para o buraco negro imerso em quintessência, $\omega = -2/3$, com $\alpha = 0.11$, $Q = 1$ e $\eta = |0.9|$ na Gravity's Rainbow.

Nesta última seção, estudamos o espaço-tempo carregado com a presença da quintessência exercendo papel de fluido cósmico e da constante cosmológica que também atua como um fluido cósmico, no contexto da G'sR. Verificamos que a massa do buraco negro não sofre influência de um espaço-tempo que depende da energia do observador. Entretanto, o número de horizontes possíveis depende dos parâmetros associados a carga,

a quintessência e da constante cosmológica. Ao estudarmos as grandezas termodinâmicas como a temperatura Hawking, a entropia e a capacidade térmica, no cenário da G'sR, são observadas correções nos seus valores. Contudo, o comportamento de suas curvas é preservado.

A identificação da constante cosmológica atuando como um fluido cósmico e suas quantidades conjugadas como variáveis termodinâmicas associadas à pressão e ao volume, possibilita o estudo da equação de estado $P = P(T, v)$ e seus comportamentos e analisar as variáveis termodinâmicas críticas. Também estudamos o comportamento da energia livre de Gibbs e verificamos transições de fase no espaço-tempo estudado. Diante do contexto da G'sR é verificado que tanto a energia livre de Gibbs, como a equação de estado da pressão e as grandezas termodinâmicas críticas possuem correções nos seus valores a depender do valor n adotado. É também possível, no contexto da G'sR realizar estudo da estabilidade termodinâmica em termos da capacidade térmica e da energia livre de Helmholtz e analisar as possíveis correções.

6 Conclusões

Nesta dissertação investigamos a termodinâmica de buracos negros em um contexto onde é introduzida uma nova escala independente do observador, a escala de Planck. A sua inclusão é realizada de acordo com a Relatividade Duplamente Especial e posteriormente é estendida para considerar os efeitos de curvatura resultando no que é conhecido hoje como Gravity's Rainbow. Neste novo cenário a G'sR nos revela que a métrica do espaço-tempo é, na verdade, uma família de métricas de único parâmetro, dada pela relação entre a energia da partícula teste e energia de Planck.

Um dos resultados da G'sR é que partículas com energias diferentes e próximas da energia de Planck “enxergam” métricas diferentes, possibilitando fenômenos como: partículas sem massa podendo acessar velocidades maiores que a da luz (superluminal) ou velocidades menores que a da luz (subluminal). Este resultado foi apresentado no espaço-tempo de Schwarzschild na G'sR. Também é observado que partículas sem massa em queda livre em direção ao buraco negro podem ter o tempo próprio dilatado ou encurtado. Estes resultados dependem da energia da partícula em comparação com a energia de Planck. Também obtivemos a métrica de Kiselev, um espaço-tempo contendo um fluido cosmológico, no contexto da G'sR. Observamos que a métrica também depende da energia das partículas, assim como a densidade de energia, que passa a possuir uma dependência energética por meio das funções rainbow.

Nesta dissertação também realizamos uma breve revisão da termodinâmica de buracos negros na TRG, em que os conceitos de gravidade da superfície e as quatro leis da termodinâmica de buracos negros foram abordados. Com base nessa revisão, estudamos a termodinâmica do buraco negro imerso em quintessência, e obtivemos as quantidades termodinâmicas. Verificamos que, para esse buraco negro, temos um limite superior para o raio do horizonte de eventos que está associado ao buraco negro de Nariai [72], em que os raios do horizonte de eventos e do cosmológico coincidem. Notamos que este limite superior muda conforme alteramos os parâmetros (ω, α) . Posteriormente, é considerado o buraco negro de Reissner-Nordström AdS imerso em quintessência, no qual a introdução da carga possibilitou o surgimento de transições de fase e a introdução da constante cosmológica, atuando também como fluido cósmico, cujo papel é exercer uma força repulsiva. Neste último cenário, a introdução da constante cosmológica atuando como pressão negativa possibilita novos estudos de transições de fase e uma analogia com fenômenos tipo líquido-gás que podem ser modelados pela equação de estado de Van Der Waals. E estudamos, portanto, a equação de estado do buraco negro de Reissner-Nordström AdS imerso em quintessência, bem como as grandezas termodinâmicas críticas e, por fim, a energia livre de Gibbs.

Realizada a revisão da termodinâmica de buracos negros na TRG e suas propriedades termodinâmicas, demos continuidade ao estudo da G'sR. No seu contexto, estudamos a termodinâmica de buracos negros rodeados por diferentes fluidos. Os primeiros resultados surgem na definição da gravidade superficial e, por consequência, na temperatura Hawking, que passa a depender da energia das partículas que são emitidas pela radiação Hawking. Para o caso do buraco negro imerso em quintessência, o espaço-tempo dependente da energia proporciona correções nos valores da temperatura Hawking e possibilita uma temperatura finita quando o raio do horizonte de horizonte tende a zero, ao consideramos os casos $n > 1$ e $\eta > 0$. Este resultado possibilita evitar o problema do comportamento catastrófico presente na TRG, na qual a temperatura do buraco negro, quando este irradia, cresce indefinidamente enquanto o raio tende a zero. Notamos também que a existência de um espaço-tempo dependente da energia não interfere na massa do buraco negro e, no caso do buraco negro imerso em quintessência, também não altera o limite superior para o raio do horizonte de eventos. Para a G'sR a entropia deve ser obtida por meio da primeira lei da termodinâmica, em que os seus valores passam a ser corrigidos pelas funções rainbow, bem como a capacidade térmica.

Ao considerarmos o buraco negro de Reissner-Nordström AdS imerso em quintessência, é observado que a massa do buraco negro e seus horizontes não são influenciados por um espaço-tempo dependente da energia do observador. Contudo, como já havíamos observado, a temperatura Hawking é modificada, passando a ter correções nos seus valores. No entanto o comportamento da curva não é alterado. É verificado que neste buraco negro a capacidade térmica apresenta duas descontinuidades, sugerindo a possibilidade de termos duas transições de fase. A dependência da energia não altera o número de descontinuidades, apenas corrige os seus valores, seja para valores menores quando é considerado $\eta < 0$, ou valores maiores quando optamos por $\eta > 0$.

A introdução da constante cosmológica negativa, Anti de Sitter, interpretada como um fluido cósmico, possibilita o estudo das grandezas termodinâmicas críticas e mais detalhe sobre as transições de fase. No contexto da G'sR, a equação de estado $P = P(v, T)$ nos revela que a dependência da energia está associada com a temperatura Hawking: para valores de $n = 0$, apenas apresenta correções nos valores da temperatura crítica, porém, para $n > 1$, são observados correções tanto para a temperatura crítica, quanto para o volume específico crítico quanto para a pressão. A energia livre de Gibbs também é afetada por um espaço dependente da energia das partículas, de tal forma que o ponto crítico que determina o término da linha de coexistência e corresponde ao estado em que as duas fases se tornam idênticas é alterado, podendo ser maior para $\eta < 0$ ou menor para $\eta > 0$ em comparação com a TRG.

Concluimos que a modificação da TRG acrescentando uma nova escala de energia, a energia de Planck, juntamente com a escala das velocidades, a velocidade da luz no

limite do infravermelho, promove novos fenômenos não observados na TRG e correções nas quantidades termodinâmicas. Sendo assim, os possíveis desdobramentos são muitos: desde a generalização para outras estruturas de buracos negros, como o estudo da Radiação Hawking em busca de confirmar os resultados, holografia de buracos negros, paradoxo da informação e uma possível indicação de um roteiro para a construção de uma Teoria Quântica da Gravitação. Por fim, espera-se que o surgimento das partículas mensageiras, advinda do cosmo e que podem chegar a nós com energia tão altas comparadas com a energia de Planck, assim como as distâncias cósmicas que atuam como amplificadores, nos forneçam elementos que possam trazer novas e interessantes conhecimentos sobre a natureza, e nos revelem caminhos para uma física nova que combine gravitação e física quântica.

Referências

- 1 ABBOTT, B. P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 116, n. 6, p. 061102, feb 2016. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.116.061102><http://arxiv.org/abs/1602.03837><http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102><https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 40.

- 2 ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 119, n. 16, p. 161101, oct 2017. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.119.161101><https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.161101>>. Citado na página 21.

- 3 BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical Review*, American Physical Society, v. 124, n. 3, p. 925–935, nov 1961. ISSN 0031899X. Disponível em: <<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.124.925><https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.925>>. Citado na página 22.

- 4 LOVELOCK, D. The Einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of PhysicsAIP, v. 12, n. 3, p. 498–501, mar 1971. ISSN 00222488. Disponível em: <<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1665613><http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1665613>>. Citado na página 22.

- 5 RASTALL, P. Generalization of the Einstein theory. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 6, n. 12, p. 3357–3359, dec 1972. ISSN 05562821. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.6.3357><https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.6.3357>>. Citado na página 22.

- 6 MAGUEIJO, J.; SMOLIN, L. Gravity's rainbow. *Classical and Quantum Gravity*, v. 21, n. 7, p. 1725–1736, apr 2004. ISSN 0264-9381. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/21/7/001>>. Citado 5 vezes nas páginas 22, 25, 26, 33 e 34.

- 7 AMELINO-CAMELIA, G.; PIRAN, T. Planck-scale deformation of Lorentz symmetry as a solution to the ultrahigh energy cosmic ray and the TeV-photon paradoxes. *Physical Review D*, v. 64, n. 3, p. 036005, jul 2001. ISSN 0556-2821. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.036005>>. Citado 4 vezes nas páginas 22, 32, 35 e 77.

- 8 MAARTENS, R. Brane-World Gravity Living Reviews in Relativity Article Amendments. *Living Rev. Relativity*, v. 7, p. 1–99, 2004. Citado na página 25.

- 9 CARLIP, S. Quantum Gravity: a Progress Report. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 64, n. 8, p. 885–942, aug 2001. ISSN 00344885. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/64/8/301>>. Citado na página 25.

- 10 BACHAS, C. P. Lectures on D-branes. nov 1998. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/9611050><http://arxiv.org/abs/hep-th/9806199>>. Citado na página 25.
- 11 AMBJORN, J.; LOLL, R. Non-perturbative Lorentzian Quantum Gravity, Causality and Topology Change. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 536, n. 1-2, p. 407–434, may 1998. ISSN 05503213. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/9805108>[http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213\(98\)00692-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00692-0)>. Citado na página 25.
- 12 GUBITOSI, G.; MERCATI, F. Relative locality in κ -Poincaré. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 30, n. 14, p. 145002, jul 2013. ISSN 02649381. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/30/14/145002><https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/30/14/145002/meta>>. Citado na página 25.
- 13 BORN, M. A suggestion for unifying quantum theory and relativity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 165, n. 921, p. 291–303, apr 1938. ISSN 0080-4630. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1938.0060><https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1938.0060>>. Citado na página 25.
- 14 GAMBINI, R.; PULLIN, J. Nonstandard optics from quantum spacetime. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 59, n. 12, p. 124021, sep 1998. ISSN 0556-2821. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.59.124021><https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.59.124021><http://arxiv.org/abs/gr-qc/9809038><http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.59.124021>>. Citado na página 25.
- 15 AMBJORN, J. et al. Nonperturbative Quantum Gravity. *Physics Reports*, North-Holland, v. 519, n. 4-5, p. 127–210, mar 2012. ISSN 03701573. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1203.3591><http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2012.03.007>>. Citado na página 25.
- 16 KIRITSIS, E.; KOFINAS, G. Hořava-Lifshitz cosmology. *Nuclear Physics B*, North-Holland, v. 821, n. 3, p. 467–480, apr 2009. ISSN 05503213. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0550321309002703><http://arxiv.org/abs/0904.1334><http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2009.05.005>>. Citado na página 25.
- 17 HOŘAVA, P. Quantum gravity at a Lifshitz point. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, American Physical Society, v. 79, n. 8, p. 084008, jan 2009. ISSN 15507998. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.79.084008><http://arxiv.org/abs/0901.3775><http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.084008>>. Citado na página 25.
- 18 LOBO, I. P. *Geometrical approach to Planck-scale deformations of phase spaces*. 121 p. Tese (Doutorado) — Università di Roma “La Sapienza”, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 30.
- 19 VINET, L.; ZHEDANOV, A. A ‘missing’ family of classical orthogonal polynomials. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 44, n. 8, p. 7250–7, nov 2011. ISSN 17518113. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/44/8/085201>>. Citado na página 26.

- 20 MAGUELJO, J. New varying speed of light theories. *Reports on Progress in Physics*, v. 66, n. 11, p. 2025–2068, may 2003. ISSN 0034-4885. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/66/11/R04>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 77.
- 21 TAKEDA, M. et al. Extension of the Cosmic-Ray Energy Spectrum beyond the Predicted Greisen-Zatsepin-Kuz'min Cutoff. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 6, p. 1163–1166, aug 1998. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.1163>>. Citado na página 26.
- 22 FINKBEINER, D. P.; DAVIS, M.; SCHLEGEL, D. J. Detection of a Far-Infrared Excess with DIRBE at 60 and 100 Microns. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 544, n. 1, p. 81–97, nov 2000. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1086/317177https://iopscience.iop.org/article/10.1086/317177/meta>>. Citado na página 26.
- 23 AMELINO-CAMELIA, G. et al. Tests of quantum gravity from observations of γ -ray bursts. *Nature*, v. 393, n. 6687, p. 763–765, jun 1998. ISSN 0028-0836. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/9712103%0Ahttp://dx.doi.org/10.1038/31647http://www.nature.com/articles/31647>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 35.
- 24 JACOBSON, T.; LIBERATI, S.; MATTINGLY, D. A strong astrophysical constraint on the violation of special relativity by quantum gravity. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 424, n. 6952, p. 1019–1021, aug 2003. ISSN 00280836. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/nature01882http://www.nature.com/articles/nature01882>>. Citado na página 26.
- 25 GOUR, G. Extensive entropy bounds. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, American Physical Society, v. 67, n. 12, p. 127501, jun 2003. ISSN 15502368. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.67.127501https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.127501>>. Citado na página 26.
- 26 MERSINI, L.; BASTERO-GIL, M.; KANTI, P. Relic dark energy from the trans-Planckian regime. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, American Physical Society, v. 64, n. 4, p. 9, jul 2001. ISSN 15502368. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.64.043508https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.043508>>. Citado na página 26.
- 27 AMELINO-CAMELIA, G. Doubly-Special Relativity: Facts, Myths and Some Key Open Issues. *Symmetry*, v. 2, n. 1, p. 230–271, mar 2010. ISSN 2073-8994. Disponível em: <<http://www.mdpi.com/2073-8994/2/1/230/http://www.mdpi.com/2073-8994/2/1/230>>. Citado na página 26.
- 28 Zatsepin, G. T.; Kuz'min, V. A. Upper Limit of the Spectrum of Cosmic Rays. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, v. 4, p. 78, ago. 1966. Citado na página 28.
- 29 AMELINO-CAMELIA, G. *Testable scenario for Relativity with minimum-length*. [S.l.], 2000. Citado 4 vezes nas páginas 29, 30, 32 e 77.
- 30 AMELINO-CAMELIA, G. *Doubly Special Relativity*. [S.l.], 2002. v. 418, 34–35 p. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 77.

- 31 AMELINO-CAMELIA, G. Quantum-spacetime phenomenology. *Living Reviews in Relativity*, v. 16, 2013. ISSN 14338351. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 35.
- 32 MAGUEIJO, J.; SMOLIN, L. Lorentz Invariance with an Invariant Energy Scale. *Physical Review Letters*, v. 88, n. 19, p. 4, 2002. ISSN 10797114. Citado na página 31.
- 33 SMOLIN, L. Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 67, n. 4, p. 1–12, 2003. ISSN 15502368. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 77.
- 34 AMELINO-CAMELIA, G. et al. Distance Measurement and Wave Dispersion in a Liouville-String Approach to Quantum Gravity. *International Journal of Modern Physics A*, v. 12, n. 03, p. 607–623, jan 1997. ISSN 0217-751X. Disponível em: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217751X97000566>. Citado na página 32.
- 35 DASZKIEWICZ, M.; IMILKOWSKA, K.; KOWALSKI-GLIKMAN, J. Velocity of particles in Doubly Special Relativity. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, North-Holland, v. 323, n. 5-6, p. 345–350, mar 2004. ISSN 03759601. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0375960104002543>. Citado na página 33.
- 36 CHUNG, W. S.; GAVRILIK, A. M.; NAZARENKO, A. V. Photon gas at the Planck scale within the doubly special relativity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 533, p. 121928, nov 2019. ISSN 03784371. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1808.01243v1><http://arxiv.org/abs/1808.01243><http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2019.121928><https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378437119311306>. Citado na página 33.
- 37 KIFUNE, T. Invariance Violation Extends the Cosmic-Ray Horizon? *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 518, n. 1, p. L21–L24, jun 1999. ISSN 0004637X. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/312057><https://iopscience.iop.org/article/10.1086/312057/meta>. Citado na página 35.
- 38 PROTHEROE, R.; MEYER, H. An infrared background-TeV gamma-ray crisis? *Physics Letters B*, North-Holland, v. 493, n. 1-2, p. 1–6, nov 2000. ISSN 03702693. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0370269300011138>. Citado na página 35.
- 39 ALOISIO, R. et al. Probing the structure of space-time with cosmic rays. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 62, n. 5, p. 053010, jul 2000. ISSN 0556-2821. Disponível em: <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.62.053010><https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.053010>. Citado na página 35.
- 40 MYERS, R. C.; POSPELOV, M. Ultraviolet Modifications of Dispersion Relations in Effective Field Theory. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 90, n. 21, p. 211601, may 2003. ISSN 0031-9007. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.90.211601><https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.211601>. Citado na página 35.
- 41 Farag Ali, A. Black hole remnant from gravity's rainbow. *Physical Review D*, v. 89, n. 10, p. 104040, may 2014. ISSN 1550-7998. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.104040>. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 79.

- 42 GIM, Y.; KIM, W. Thermodynamic phase transition in the rainbow Schwarzschild black hole. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2014, n. 10, p. 003–003, oct 2014. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1475-7516/2014/10/003>>. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 79.
- 43 OPPENHEIMER, J. R.; SNYDER, H. On Continued Gravitational Contraction. *Physical Review*, American Physical Society, v. 56, n. 5, p. 455–459, sep 1939. ISSN 0031-899X. Disponível em: <<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.56.455><https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.56.455>>. Citado na página 39.
- 44 OHANIAN, H. C.; RUFFINI, R. *Gravitation and spacetime, third edition*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 1–528 p. ISBN 9781139003391. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/books/gravitation-and-spacetime/241957A2AD43A3C319336B28833CB3E9><http://ebooks.cambridge.org/ref/id/CBO9781139003391>>. Citado na página 39.
- 45 SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*. Wiley, 1983. ISBN 9780471873167. Disponível em: <<http://dnb.ddb.dehttps://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9783527617661>>. Citado na página 39.
- 46 HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 43, n. 3, p. 199–220, aug 1975. ISSN 14320916. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/BF02345020><http://link.springer.com/10.1007/BF02345020>>. Citado 3 vezes nas páginas 39, 57 e 60.
- 47 BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W. *The Four Laws of Black Hole Mechanics*. [S.l.], 1973. v. 31, n. 2, 161–170 p. Disponível em: <<https://projecteuclid.org/journals/communications-in-mathematical-physics/volume-31/issue-2/The-four-laws-of-black-hole-mechanics/cmp/1103858973.full>>. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 57.
- 48 BEKENSTEIN, J. D. Black holes and the second law. *Lettere Al Nuovo Cimento Series 2*, Società Italiana di Fisica, v. 4, n. 15, p. 737–740, aug 1972. ISSN 1827-613X. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/BF02757029><http://link.springer.com/10.1007/BF02757029>>. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 57.
- 49 BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 7, n. 8, p. 2333–2346, apr 1973. ISSN 05562821. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.7.2333><https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.2333>>. Citado 4 vezes nas páginas 39, 40, 57 e 60.
- 50 HAWKING, S. W. Black holes and thermodynamics. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 13, n. 2, p. 191–197, jan 1976. ISSN 05562821. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.13.191>>. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 57.
- 51 PENROSE, R. Gravitational collapse and space-time singularities. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 14, n. 3, p. 57–59, jan 1965. ISSN 00319007. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.14.57><https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.14.57>>. Citado na página 40.

- 52 HAWKING SW; PENROSE R. SINGULARITIES OF GRAVITATIONAL COLLAPSE AND COSMOLOGY. In: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. The Royal Society London, 1970. v. 314, n. 1519, p. 529–548. ISSN 0080-4630. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1970.0021>><https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1970.0021>>. Citado na página 40.
- 53 AKIYAMA, K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal*, arXiv, v. 875, n. 1, p. L1, apr 2019. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7>><https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/ab0ec7>>. Citado na página 40.
- 54 AKIYAMA, K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. II. Array and Instrumentation. *The Astrophysical Journal*, arXiv, v. 875, n. 1, p. L2, apr 2019. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0c96>><https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/ab0c96>>. Citado na página 40.
- 55 AKIYAMA, K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. III. Data Processing and Calibration. *The Astrophysical Journal*, arXiv, v. 875, n. 1, p. L3, apr 2019. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0c57>><https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/ab0c57>>. Citado na página 40.
- 56 AKIYAMA, K. et al. *First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole*. arXiv, 2019. L4 p. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0e85>>. Citado na página 40.
- 57 AKIYAMA, K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 875, n. 1, p. L5, apr 2019. ISSN 2041-8205. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0f43>>. Citado na página 40.
- 58 AKIYAMA, K. et al. *First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole*. arXiv, 2019. L6 p. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab1141>>. Citado na página 40.
- 59 AKIYAMA, K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. VII. Polarization of the Ring. *The Astrophysical Journal Letters*, American Astronomical Society, v. 910, n. 1, p. L12, mar 2021. ISSN 2041-8205. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2041-8213/abe71d>>. Citado na página 40.
- 60 AKIYAMA, K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. VIII. Magnetic Field Structure near The Event Horizon. *The Astrophysical Journal Letters*, American Astronomical Society, v. 910, n. 1, p. L13, mar 2021. ISSN 2041-8205. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2041-8213/abe4de>>. Citado na página 40.
- 61 HAWKING, S.; PENROSE, R.; PRESKILL, J. *The Nature of Space and Time*. [s.n.], 1996. v. 49. 60–61 p. ISSN 0031-9228. Disponível em: <<https://press.princeton.edu/books/paperback/9780691168449/the-nature-of-space-and-time>><http://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/1.2807691>>. Citado na página 40.
- 62 GENZEL, R. et al. On the nature of the dark mass in the centre of the Milky Way. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Blackwell

- Publishing Ltd, v. 291, n. 1, p. 219–234, oct 1997. ISSN 00358711. Disponível em: <https://academic.oup.com/mnras/article/291/1/219/1252320https://academic.oup.com/mnras/article-lookup/doi/10.1093/mnras/291.1.219>. Citado na página 40.
- 63 GHEZ, A. M. et al. High Proper-Motion Stars in the Vicinity of Sagittarius A*: Evidence for a Supermassive Black Hole at the Center of Our Galaxy. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 509, n. 2, p. 678–686, dec 1998. ISSN 0004-637X. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/306528https://iopscience.iop.org/article/10.1086/306528/meta>. Citado na página 40.
- 64 GHEZ, A. M. et al. Measuring Distance and Properties of the Milky Way's Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 689, n. 2, p. 1044–1062, dec 2008. ISSN 0004-637X. Disponível em: <http://www2.keck.hawaii.eduhttps://iopscience.iop.org/article/10.1086/592738>. Citado na página 40.
- 65 GOTTLÖBER, S. S. Chandrasekhar: The Mathematical Theory of Black Holes. International Series of Monographs on Physics 69. Clarendon Press Oxford, 1983. 646 Seiten, Preis-2 55,-. ISBN 3-540-11947-7. *Astronomische Nachrichten: A Journal on all Fields of Astronomy*, Wiley, v. 306, n. 3, p. 128–128, jan 1985. ISSN 00046337. Disponível em: <http://doi.wiley.com/10.1002/asna.2113060308>. Citado na página 44.
- 66 D'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's relativity*. [S.l.]: Clarendon Press, 1992. Citado na página 49.
- 67 RIESS, A. G. et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *The Astronomical Journal*, American Astronomical Society, v. 116, n. 3, p. 1009–1038, sep 1998. ISSN 00046256. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/300499https://iopscience.iop.org/article/10.1086/300499/meta>. Citado na página 50.
- 68 PERLMUTTER, S. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 517, n. 2, p. 565–586, jun 1999. ISSN 0004-637X. Disponível em: www.astro.lsa.umich.edu/btc/user.html. Citado na página 50.
- 69 CALDWELL, R. R. An introduction to quintessence. *Brazilian Journal of Physics*, Sociedade Brasileira de Física, v. 30, n. 2, p. 215–229, jun 2000. ISSN 01039733. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-97332000000200002&lng=en&nrm=iso&tlng=en. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 63.
- 70 COPELAND, E. J.; SAMI, M.; TSUJIKAWA, S. *Dynamics of dark energy*. [S.l.], 2006. Citado na página 51.
- 71 KISELEV, V. V. Quintessence and black holes. *Classical and Quantum Gravity*, v. 20, n. 6, p. 1187–1197, 2003. ISSN 02649381. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 53.
- 72 FERNANDO, S. Nariai black holes with quintessence. *Modern Physics Letters A*, World Scientific Publishing Company, v. 28, n. 40, dec 2013. ISSN 02177323. Citado 4 vezes nas páginas 54, 64, 69 e 91.

- 73 BEKENSTEIN, J. D. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 9, n. 12, p. 3292–3300, jun 1974. ISSN 05562821. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.9.3292><https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.3292>>. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 60.
- 74 HAWKING, S. W. Black hole explosions? *Nature*, Nature Publishing Group, v. 248, n. 5443, p. 30–31, mar 1974. ISSN 00280836. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/248030a0><http://www.nature.com/articles/248030a0>>. Citado na página 57.
- 75 HAWKING, S. W.; PAGE, D. N. Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space. *Communications in Mathematical Physics*, Springer-Verlag, v. 87, n. 4, p. 577–588, dec 1983. ISSN 00103616. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/BF01208266><http://link.springer.com/10.1007/BF01208266>>. Citado na página 57.
- 76 GIBBONS, G. W.; HAWKING, S. W. Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 15, n. 10, p. 2738–2751, may 1977. ISSN 05562821. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.15.2738><https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.2738>>. Citado na página 57.
- 77 WALD, R. M. The Thermodynamics of Black Holes. *Living Reviews in Relativity*, Albert Einstein Institut, v. 4, n. 1, p. 6, dec 2001. ISSN 2367-3613. Disponível em: <<http://physics.uchicago.edu/trel.html#Wald>www.livingreviews.org/Articles/Volume4/2001-6wald<http://www.livingreviews.org/Articles/Volume4/2001-6wald><http://link.springer.com/10.12942/lrr-2001-6>>. Citado na página 57.
- 78 PAGE, D. N. *Hawking radiation and black hole thermodynamics*. IOP Publishing, 2005. 203–203 p. Disponível em: <<http://www.njp.org><https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/7/1/203>>. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 59.
- 79 GRØN, Ø. *Introduction to Einstein's Theory of Relativity*. Cham: Springer International Publishing, 2020. (Undergraduate Texts in Physics). ISBN 978-3-030-43861-6. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-43862-3>>. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 59.
- 80 WALD, R. M. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984. v. 207. ISSN 02624079. ISBN 9780226870335. Disponível em: <<http://www.bibliovault.org/BV.landing.epl?ISBN=9780226870335>>. Citado na página 58.
- 81 CARLIP, S. Black hole thermodynamics. *International Journal of Modern Physics D*, v. 23, n. 11, p. 1430023, oct 2014. ISSN 0218-2718. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218271814300237>>. Citado na página 59.
- 82 SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. ISBN 9780511984181. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/books/first-course-in-general-relativity/3805425203DD91A7436EF6E5F2082263><http://ebooks.cambridge.org/ref/id/CBO9780511984181>>. Citado na página 61.

- 83 LYNDEN-BELL, D.; WOOD, R.; ROYAL, A. The Gravo-Thermal Catastrophe in Isothermal Spheres and the Onset of Red-Giant Structure for Stellar Systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 138, n. 4, p. 495–525, feb 1968. ISSN 0035-8711. Disponível em: <https://academic.oup.com/mnras/article/138/4/495/2604346https://academic.oup.com/mnras/article-lookup/doi/10.1093/mnras/138.4.495>. Citado na página 66.
- 84 CHAMBLIN, A. et al. Charged AdS black holes and catastrophic holography. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, American Physical Society, v. 60, n. 6, p. 064018, aug 1999. ISSN 15502368. Disponível em: <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.60.064018https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.064018>. Citado na página 67.
- 85 MYERS, R. C. Holography, thermodynamics, and fluctuations of charged AdS black holes. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, American Physical Society, v. 60, n. 10, p. 104026, oct 1999. ISSN 15502368. Disponível em: <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.60.104026https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.104026>. Citado na página 67.
- 86 DOLAN, B. P. The cosmological constant and black-hole thermodynamic potentials. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 28, n. 12, p. 125020, jun 2011. ISSN 02649381. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/28/12/125020https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/28/12/125020/meta>. Citado na página 70.
- 87 KUBIZŃÁK, D.; MANN, R. B. P - V criticality of charged AdS black holes. *Journal of High Energy Physics*, v. 2012, n. 7, p. 33, jul 2012. ISSN 10298479. Disponível em: [http://link.springer.com/10.1007/JHEP07\(2012\)033](http://link.springer.com/10.1007/JHEP07(2012)033). Citado 2 vezes nas páginas 72 e 74.
- 88 AMELINO-CAMELIA, G.; PIRAN, T. Cosmic rays and TeV photons as probes of quantum properties of space-time. *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, North-Holland, v. 497, n. 3-4, p. 265–270, jan 2001. ISSN 03702693. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S037026930001337X>. Citado na página 77.
- 89 GIDDINGS, S. B. Black holes and massive remnants. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 46, n. 4, p. 1347–1352, aug 1992. ISSN 05562821. Disponível em: <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.46.1347https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.46.1347>. Citado na página 78.
- 90 CHEN, P.; ADLER, R. J. Black hole remnants and dark matter. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, Elsevier, v. 124, p. 103–106, jul 2003. ISSN 09205632. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0920563203020887>. Citado na página 78.
- 91 CHEN, P.; ONG, Y. C.; YEOM, D. h. *Black hole remnants and the information loss paradox*. Elsevier, 2015. 1–45 p. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0370157315004391>. Citado na página 78.
- 92 LING, Y.; LI, X.; ZHANG, H. Thermodynamics of modified black holes from gravity's rainbow. *Modern Physics Letters A*, World Scientific Publishing

Company, v. 22, n. 36, p. 2749–2756, nov 2007. ISSN 02177323. Disponível em: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217732307022931>. Citado na página 81.

93 MORAIS, P. H. et al. Thermodynamics and remnants of Kiselev black holes in Rainbow gravity. jun 2021. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/2106.03672>. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 82.

94 KASTOR, D.; RAY, S.; TRASCHEN, J. Enthalpy and the mechanics of AdS black holes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 26, n. 19, p. 195011, oct 2009. ISSN 0264-9381. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/26/19/195011><https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/26/19/195011/meta>. Citado na página 84.