

**Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática**

# **Convergência incondicional e absoluta de séries em espaços de Banach**

**Anderson de Farias Herminio**

**JOÃO PESSOA – PB  
AGOSTO DE 2022**

**Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática**

# **Convergência incondicional e absoluta de séries em espaços de Banach**

por

**Anderson de Farias Herminio**

sob a orientação do

**Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino**

**João Pessoa – PB  
Agosto de 2022**

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

H554c Herminio, Anderson de Farias.  
Convergência incondicional e absoluta de séries em  
espaços de Banach / Anderson de Farias Herminio. - João  
Pessoa, 2022.  
53 f. : il.

Orientação: Daniel Marinho Pellegrino.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Análise matemática. 2. Teoria das sequências. 3.  
Teorema de Dirichlet. 4. Teorema de Riemann. 5. Espaços  
de Banach. I. Pellegrino, Daniel Marinho. II. Título.

UFPB/BC

CDU 517(043)

# Convergência incondicional e absoluta de séries em espaços de Banach

por

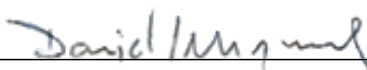
**Anderson de Farias Herminio**<sup>1</sup>

Dissertação apresentada ao corpo docente do programa de pós-graduação em matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

**Área de Concentração: Análise**

**Aprovada em 31 de Agosto de 2022.**

**Banca Examinadora:**



**Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino**

**Orientador**

Universidade Federal da Paraíba



**Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque**

Universidade Federal da Paraíba



**Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior**

Universidade Federal do Maranhão

---

<sup>1</sup>O autor foi bolsista do CNPQ durante a elaboração desta dissertação.

*“Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas”.*

*“A matemática pura é, à sua maneira, a poesia das ideias lógicas”.*

Albert Einstein

# Agradecimentos

- Primeiramente, agradeço à minha família por toda base necessária para estar aqui hoje. Minha mãe, meu pai e irmão, que cuidaram tão bem de mim.
- Agradeço imensamente ao Professor Dr. Daniel Marinho Pellegrino, por toda ajuda nessa orientação e por não ter desistido de mim quando até eu mesmo já tinha desistido. Agradeço também ao professor Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior, pela ajuda ímpar também que foi me dada. Sou extremamente grato a esses dois.
- Agradeço a todos os amigos acadêmicos, que tiveram grande participação para que eu estivesse concluído esse trabalho. Vocês sempre estarão no meu coração.
- Agradeço, também, aos meus amigos pessoais, que fizeram meus dias melhores durante esse período. Em especial, meu amigo e irmão Gabriel Garcia, por sempre estar me motivando e disponibilizando toda ajuda possível.
- Por fim, agradeço ao Dr. Professor Ailton Rodrigues da Silva, que me apresentou a análise funcional e foi um dos responsáveis para que hoje eu estivesse produzindo esse trabalho na área.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos alguns dos principais resultados da teoria das sequências incondicionalmente somáveis. Começamos com os Teoremas de Dirichlet e de Riemann, que estão no contexto dos números reais, e passamos para alguns resultados no contexto de Espaços de Banach, dando destaque aos Teoremas de Macphail e de Dvoretzky e Rogers.

**Palavras-chave:** Sequências, Séries, Convergência Incondicional, Macphail, Dvoretzky-Rogers.

# Abstract

In this work, we study some of the main results of the theory of unconditionally summable sequences. We start with Dirichlet's and Riemann's theorems, which are in the context of real numbers, and move on to some results in the context of Banach spaces, emphasizing Macphail's and the Dvoretzky–Rogers theorems.

**Keywords:** Sequences, Series, Unconditional Convergence, Macphail, Dvoretzky–Rogers.

# Sumário

|                                                                          |           |
|--------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introdução</b>                                                        | <b>2</b>  |
| <b>1 Os Teoremas de Riemann e Dirichlet sobre convergência de séries</b> | <b>4</b>  |
| <b>2 Séries em espaços de Banach</b>                                     | <b>11</b> |
| <b>3 O Teorema de Macphail e o Teorema de Dvoretzky e Rogers</b>         | <b>31</b> |
| 3.1 O Teorema de Macphail . . . . .                                      | 31        |
| 3.2 O Teorema de Dvoretzky-Rogers . . . . .                              | 39        |

# Introdução

Quando estudamos as séries infinitas, num curso introdutório de Análise Real, nosso principal objetivo é saber se a série é convergente ou não, ou seja, se  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$ . Nesse contexto das séries convergentes, estudamos as séries absolutamente convergentes, que são as séries convergentes que também convergem em módulo, ou seja, a soma infinita do valor absoluto de cada termo da sequência também converge  $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\right)$ . O exemplo mais comum de série convergente que não converge absolutamente é a série harmônica alternada  $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\right)$ . Nesse caso, a série é dita condicionalmente convergente. Por fim, os últimos tipos de séries que estudamos são aquelas ditas incondicionalmente ou comutativamente convergentes, que são séries convergentes que, ao permutarmos os termos da sequência, ela continua convergente. Pode até ser um pouco contraintuitivo imaginar que a convergência de uma série pode ser alterada ao permutarmos a ordem de seus termos na soma, mas nem sempre se tem resultados intuitivos quando trabalhamos com o infinito.

Para esse último fato, destaco o trabalho de dois grandes matemáticos do século XIX: J. P. G. L. Dirichlet e G. F. B. Riemann. Dirichlet, em 1829, mostrou que, no ambiente dos números reais, convergência absoluta e incondicional são equivalentes (Teorema 1.8), enquanto que Riemann, em 1853, mostrou que, se uma série é condicionalmente convergente, então pode-se reordená-la para convergir para qualquer valor que queira, bem como para que venha a divergir (Teorema 1.9). Esse resultado de Dirichlet inspirou alguns matemáticos a se questionarem sobre a veracidade ou não dessa mesma equivalência, agora, em espaços mais gerais, os espaços do tipo (B), ou, como conhecemos hoje, os espaços de Banach. S. M. Mazur e W. R. Orlicz propuseram tal problema no Scottish Book ([7], Problema 122) para que assim fosse estudado por S. Banach e outros matemáticos.

Nesse tempo, já eram conhecidos exemplos de espaços de Banach com séries que convergiam incondicionalmente, mas não absolutamente. Por exemplo, a sequência  $(e_n/n)_{n=1}^{\infty}$  era um exemplo de sequência incondicionalmente somável, mas não absolutamente somável, em qualquer espaço  $\ell_p$ , com  $p > 1$ .

---

O problema com o  $\ell_1$  apenas veio ser resolvido em 1947, por M. S. Macphail [6]. No seu trabalho, Macphail conseguiu, de forma construtiva, dar um exemplo em  $\ell_1$  de uma sequência com tal condição. Sua construção inspirou os matemáticos A. Dvoretzky e C. A. Rogers (Teorema 3.13) a finalmente resolver o problema proposto por Orlicz e Mazur, mostrando que todo espaço de Banach de dimensão infinita possui uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável. Apesar de não ter sido resolvido de forma construtiva como o Teorema de Macphail, esse é um grande resultado da Análise Funcional, que motivou desenvolvimentos posteriores, como a teoria de operadores absolutamente somantes.

No presente trabalho apresentamos os resultados centrais sobre séries incondicionalmente e absolutamente somáveis em espaços de Banach. Em particular, apresentamos uma versão mais geral do Teorema de Macphail, seguindo as linhas de [9, 11] e demonstramos também o Teorema de Dvoretzky–Rogers.

# Capítulo 1

## Os Teoremas de Riemann e Dirichlet sobre convergência de séries

Do século XVII ao século XVIII, os matemáticos se intrigavam com algumas “anomalias” que encontravam quando se trabalhava com séries infinitas. Algumas dessas, relacionadas à reordenação dos termos de séries convergentes. Em uma carta para um amigo em 1826, H. Abel chegou a escrever que “Séries divergentes são invenção do diabo”.

Em 1827, Dirichlet, enquanto trabalhava condições que garantiam convergência das séries de Fourier, descobriu que, reorganizando os termos de sequências que hoje conhecemos como *condicionalmente convergentes*, é possível alterar o limite de sua série.

Apesar de não saber como isso era possível, posteriormente, em 1837, ele provou que reordenar os termos de uma série absolutamente convergente não altera o valor da soma.

Posteriormente, em 1853, estudando os trabalhos de Dirichlet sobre convergência da série de Fourier, Riemann, em seu artigo “Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe” [10], que só veio a ser publicado em 1966, após sua morte, conseguiu explicar esse comportamento das séries condicionalmente somáveis quando são reordenadas. Esse resultado hoje é conhecido como o “Teorema de Reordenamento de Riemann” 1.9.

Esses teoremas em  $\mathbb{R}$  preparará o texto para os teoremas do capítulo 3.

**Definição 1.1.** Uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  de números reais é dita *absolutamente somável* quando a série  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$  é convergente. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge, mas  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$  diverge, dizemos que  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é *condicionalmente somável*.

**Definição 1.2.** Dada uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tomemos  $p_n = x_n$  caso

$x_n > 0$  e  $p_n = 0$  caso contrário. tomemos, também,  $q_n = -x_n$  caso  $x_n < 0$ , e  $q_n = 0$  caso contrário.

Chamaremos  $p_n$  e  $q_n$  a parte positiva e negativa, respectivamente, de  $x_n$ .

**Definição 1.3.** Uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  de números reais é dita *incondicionalmente somável* se, para qualquer que seja  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma bijeção, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$  é convergente.

**Lema 1.4.** Seja  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência incondicionalmente somável de números reais. Então, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe um  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que, sempre que  $M$  é um subconjunto finito de  $\mathbb{N}$ , com  $\min M > n_\varepsilon$ , temos  $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$ .

**Prova.** De forma contrapositiva, suponhamos que exista  $\delta_0 > 0$  tal que, para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe um subconjunto finito  $M_n \subset \mathbb{N}$ , com

$$\min M_n > n \quad \text{e} \quad \left\| \sum_{k \in M_n} x_k \right\| \geq \delta_0.$$

Deste modo, podemos construir uma sequência  $(M_n)$  de subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$1 + \max M_n < \min M_{n+1} \quad \text{e} \quad \left\| \sum_{k \in M_n} x_k \right\| \geq \delta_0.$$

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , definamos  $A_n \subset \mathbb{N}$  como sendo

$$A_n = \{k \in \mathbb{N} : k \in [\min M_n, \min M_n + |M_n|)\},$$

onde, aqui,  $|M_n|$  representa a quantidade de elementos de  $M_n$ . Note que  $|A_n| = |M_n|$  e que os  $M_n$  são dois a dois disjuntos e, portanto, os  $A_n$  são dois a dois disjuntos. Consideremos agora uma permutação  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  de modo que  $\sigma(A_n) = M_n$ . Mostraremos agora que a sequência das somas parciais de  $\left(x_{\sigma(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$  não é de Cauchy. Com efeito, suponhamos que fosse. Assim, para o  $\delta_0$  acima, existiria  $n_{\delta_0} \in \mathbb{N}$  tal que

$$r, s \geq n_{\delta_0} \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^r x_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^s x_{\sigma(i)} \right\| < \delta_0.$$

Escolhamos agora  $n$  suficientemente grande de modo que  $\min M_n > n_{\delta_0}$  e façamos

então  $r = \min M_n + |M_n|$  e  $s = \min M_n - 1$ . Assim,  $r, s \geq n_{\delta_0}$  e

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^r x_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^s x_{\sigma(i)} \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\min M_n + |M_n|} x_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^{\min M_n - 1} x_{\sigma(i)} \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=\min M_n}^{\min M_n + |M_n|} x_{\sigma(i)} \right\| \\ &= \left\| \sum_{k \in M_n} x_k \right\| \geq \delta_0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo, a sequência das somas parciais de  $(x_{\sigma(n)})_{n=1}^{\infty}$  não é de Cauchy e  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  não é, portanto, incondicionalmente somável. Segue o resultado por contraposição. ■

**Proposição 1.5.** Se  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência incondicionalmente somável de números reais, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)},$$

para qualquer  $\sigma$  seja a permutação  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

**Prova.** Do lema anterior, sabemos que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que, sempre que  $M \subset \mathbb{N}$  é finito, com  $\min M > n_\varepsilon$ ,

$$\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon.$$

Agora, escolhemos  $L \geq n_\varepsilon$  suficientemente grande, de tal sorte que

$$\{1, \dots, n_\varepsilon\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(L)\}.$$

Assim, se  $N > L$ , fazendo

$$M_1 = \{1, \dots, N\} \setminus \{\sigma(1), \dots, \sigma(N)\}$$

e

$$M_2 = \{\sigma(1), \dots, \sigma(N)\} \setminus \{1, \dots, N\},$$

temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N x_n - \sum_{n=1}^N x_{\sigma(n)} \right\| &= \left\| \sum_{n \in M_1} x_n - \sum_{n \in M_2} x_n \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n \in M_1} x_n \right\| + \left\| \sum_{n \in M_2} x_n \right\| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

pois  $\min M_1, \min M_2 > n_\varepsilon$ . Como

$$\sum_{n=1}^N x_n = \left( \sum_{n=1}^N x_n - \sum_{n=1}^N x_{\sigma(n)} \right) + \sum_{n=1}^N x_{\sigma(n)},$$

fazendo  $N$  tender a infinito, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

■

**Observação 1.6.** Dizer que uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é somável equivale a dizer que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  é convergente. Analogamente para absolutamente e incondicionalmente somável.

**Proposição 1.7.** Sejam  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência absolutamente somável,  $p_n$  e  $q_n$  as partes positiva e negativa, respectivamente, de  $x_n$ . São válidas as sentenças abaixo:

1.  $x_n = p_n - q_n$ ,  $|x_n| = p_n + q_n$ ,  $|x_n| = x_n + 2q_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
2. Dado  $k \in \mathbb{N}$ , temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \geq \sum_{n=1}^k |x_n| = \sum_{n=1}^k p_n + \sum_{n=1}^k q_n.$$

consequentemente,  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$  são convergentes, pois suas parciais são monótonas e limitadas por  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ .

Todavia, pelo item 1, se  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é condicionalmente somável, então  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$  divergem.

A equivalência entre convergência absoluta e incondicional para séries de números reais foi provada em 1839 pelo matemático Johann Dirichlet. Esse resultado é o precursor dos resultados principais que serão abordados no presente trabalho.

Abaixo, ele está enunciado apenas com uma implicação. Nesse texto, a sua recíproca será uma consequência do Teorema de Riemann 1.9, que virá logo em seguida.

**Teorema 1.8. (Dirichlet, 1829)** *Toda sequência absolutamente somável de números reais é também incondicionalmente somável.*

**Prova.** Seja  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência absolutamente somável de números reais e  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma bijeção. Inicialmente, suponhamos  $x_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ .

Mostremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

Com efeito, sejam

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad e \quad t_n = x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)} + \cdots + x_{\sigma(n)}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , chamemos de  $m$  o maior dos números  $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ . Assim,  $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\} \subseteq [1, m]$ .

Logo,

$$t_n = \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)} \leq \sum_{j=1}^m x_j = s_m.$$

Ou seja, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $t_n \leq s_m$ .

Por sua vez,  $\sigma(x_n)$  também é uma sequência de  $\mathbb{R}$  e  $\sigma^{-1}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é uma bijeção. Assim, de forma análoga, para cada  $m' \in \mathbb{N}$ , existe  $n' \in \mathbb{N}$  tal que  $s_{m'} \leq t_{n'}$ .

Portanto,

$$\lim s_n = \lim t_n.$$

Consequentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

Agora, para o caso geral, como  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é absolutamente somável, da Proposição 1.7, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n.$$

Seja  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma bijeção. Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} q_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

■

Duas décadas depois do resultado de Dirichlet, Riemann conseguiu mostrar que, dada uma série condicionalmente somável, além de não ser incondicionalmente

somável, é possível reorganizá-la de modo que convirja para qualquer valor real ou, com alguns ajustes na demonstração abaixo, pode até divergir.

**Teorema 1.9. (Riemann, 1853)** *Seja  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência condicionalmente somável. Dado qualquer número real  $c$ , existe uma reordenação  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  dos termos de  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ , tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = c$ .*

**Prova.** Sejam  $p_n$  e  $q_n$  as partes positiva e negativa, respectivamente, de  $x_n$ . Como  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é condicionalmente somável, temos  $\lim x_n = 0$ , implicando também  $\lim p_n = \lim q_n = 0$ , porém  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \infty$ , conforme o item 2 da Proposição 1.7.

Vamos, agora, reordenar os termos de  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  tomando como primeiros termos  $p_1, p_2, \dots, p_{n_1}$ , onde  $n_1$  é o menor índice tal que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1} > c.$$

Agora, tomemos os termos negativos  $-q_1, -q_2, \dots, -q_{n_2}$ , onde  $n_2$  é o menor índice tal que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \dots - q_{n_2} < c.$$

Esse processo é possível, pois  $\lim p_n = \lim q_n = 0$ , e  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \infty$ . Continuando com o processo, tomemos o menor índice  $n_3$  tal que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \dots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \dots + p_{n_3} > c.$$

Em seguida, o menor índice  $n_4$  tal que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \dots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \dots + p_{n_3} - q_{n_2+1} - \dots - q_{n_4} < c.$$

consideremos as reduzidas

$$T_1 = p_1;$$

$$T_{n_1} = p_1 + \dots + p_{n_1};$$

$$T_{n_2} = p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{n_2};$$

$$\vdots$$

$$T_{n_i} = p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{n_i};$$

$$T_{n_{i+1}} = p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{n_{i+1}}.$$

notemos que, se  $i$  for ímpar, temos

$$T_{n_i+1} < c < T_{n_i}, \quad 0 < T_{n_i} - c \leq p_{n_i} \quad \text{e} \quad 0 < c - T_{n_i+1} < q_{n_i+1}.$$

Como  $\lim p_n = \lim q_n = 0$ , segue que  $\lim T_{n_i} = c$ .

Agora, para  $i$  par,

$$T_{n_i} > c > T_{n_i+1}, \quad 0 < T_{n_i+1} - c \leq p_{n_i+1} \quad \text{e} \quad 0 < c - T_{n_i} < q_{n_i}.$$

Analogamente, segue que  $\lim T_n = c$ .

Em outras palavras, conseguimos uma reordenação de  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  tal que as reduzidas  $(T_n)_{n=1}^{\infty}$  dessa reordenação tende para  $c$ , como queríamos. ■

Como consequência do Teorema de Riemann, obtemos a recíproca do Teorema de Dirichlet, conforme corolário abaixo.

**Corolário 1.10.** Toda sequência incondicionalmente somável de números reais é absolutamente somável.

**Prova.** Sejam  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência de números reais incondicionalmente somável e  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma bijeção qualquer. Pela Proposição 1.5, temos que  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ . Pelo Teorema de Riemann, se  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  fosse condicionalmente somável, seria possível encontrar uma bijeção  $\eta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} x_{\eta(n)}$ , uma contradição. Portanto, segue que  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é, obrigatoriamente, absolutamente somável. ■

**Observação 1.11.** Como convergência em  $\mathbb{R}^n$  depende da convergência de cada coordenada, os Teoremas de Dirichlet e de Riemann também valem em  $\mathbb{R}^n$  por herança de  $\mathbb{R}$ .

## Capítulo 2

### Séries em espaços de Banach

Agora, num contexto mais geral de espaços normados, nos convém, novamente, introduzir algumas definições sobre convergência de séries. Uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  em um espaço normado  $X$  é dita:

- (a) **somável** quando existe  $x \in X$  tal que a sequência de somas parciais  $\left(\sum_{n=1}^m x_n\right)_{m=1}^{\infty}$  converge para  $x$ . Neste caso, escreveremos  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ ;
- (b) **absolutamente somável** quando  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  converge;
- (c) **incondicionalmente somável** quando  $\left(x_{\sigma(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$  é somável qualquer que seja a permutação  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ;
- (d) **fracamente somável** quando a sequência de escalares  $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$  é somável para todo funcional linear contínuo  $\varphi \in X^*$ .

**Observação 2.1.** Uma sequência fracamente somável não será, necessariamente, uma série fracamente convergente, ou seja, a sequência das somas parciais não necessariamente converge na topologia fraca. Para ver isso, consideremos a base canônica unitária  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  de  $c_0$ . Observemos que, dado  $\varphi = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1 = c_0^*$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(e_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

e, portanto,  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  é fracamente somável.

Suponhamos, por absurdo, que  $\left(\sum_{n=1}^m e_n\right)_{m=1}^{\infty}$  seja fracamente convergente. Neste caso, existe uma sequência  $x_0 = (t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$  tal que  $\sum_{n=1}^m e_n \xrightarrow{w} x_0$ . Para todo

$\varphi = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1 = c_0^*$ , temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t_n = \varphi(x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi\left(\sum_{n=1}^m e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

de onde segue que  $t_n = 1$  para todo  $n$ , o que é um absurdo, pois  $x_0 = (t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ .

Com as definições acima, podemos dissertar sobre alguns resultados importantes na teoria dos espaços normados e, em especial, dos espaços de Banach.

**Proposição 2.2** (Critério de Cauchy para séries). Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  uma série num espaço de Banach  $X$ . Tal série converge se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| < \varepsilon, \text{ para quaisquer } n > n_0 \text{ e } p \in \mathbb{N}.$$

**Prova.** Seja  $S_n$  a  $n$ -ésima soma parcial da série dada. notemos que

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n|.$$

Portanto, a série dada satisfaz a desigualdade desejada se, e somente se,  $(S_n)_{n=1}^{\infty}$  é de Cauchy. Como  $X$  é um espaço de Banach, onde toda sequência converge se, e somente se, for de Cauchy, segue o resultado. ■

**Proposição 2.3.** Seja  $X$  um espaço vetorial normado. São equivalentes as seguintes afirmações:

- (i) Toda sequência absolutamente somável em  $X$  é incondicionalmente somável.
- (ii) Toda sequência absolutamente somável em  $X$  é somável.
- (iii)  $X$  é um espaço de Banach.

**Prova.** (i)  $\Rightarrow$  (ii) é evidente, basta tomar a permutação identidade.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Seja  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência de Cauchy em  $X$ . Tomemos uma sequência crescente  $(n_k)_{k=1}^{\infty}$  de números naturais tais que

$$\|x_m - x_n\| < 2^{-k},$$

sempre que  $m, n \geq n_k$ . Em particular,

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k},$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Assim, resulta que  $(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$  é absolutamente somável. Observe que, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{j=1}^k (x_{n_{j+1}} - x_{n_j})$$

e, conseqüentemente,  $(x_{n_k})$  é convergente. Obtivemos, pois, uma subsequência convergente da sequência de Cauchy  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ , o que implica que  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é também uma sequência convergente. Como pegamos uma sequência de Cauchy qualquer de  $X$  e mostramos que essa sequência é convergente, segue que  $X$  é um espaço de Banach.

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência absolutamente somável em  $X$ . Mostremos, pois, que  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é incondicionalmente somável. Com efeito, seja  $\sigma$  uma permutação de  $\mathbb{N}$ . Sendo  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  absolutamente somável, segue que  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  converge. A sequência das normas está nos reais, logo podemos usar o Teorema de Dirichlet para concluir que  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{\sigma(n)}\|$  também converge. Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{n=m_1+1}^{m_2} \|x_{\sigma(n)}\| < \varepsilon,$$

sempre que  $m_2 \geq m_1 \geq n_0$ . Por conseguinte,

$$\left\| \sum_{n=1}^{m_2} x_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{m_1} x_{\sigma(n)} \right\| = \left\| \sum_{n=m_1+1}^{m_2} x_{\sigma(n)} \right\| \leq \sum_{n=m_1+1}^{m_2} \|x_{\sigma(n)}\| < \varepsilon,$$

sempre que  $m_2 \geq m_1 \geq n_0$ , logo  $\sum_{n=1}^m x_{\sigma(n)}$  é uma sequência de Cauchy em  $X$ . Sendo, por hipótese,  $X$  um espaço de Banach, segue que  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$  converge, concludo que  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é incondicionalmente somável. ■

O próximo exemplo mostra que em alguns espaços de dimensão infinita é possível encontrar séries incondicionalmente convergentes que não são absolutamente convergentes.

**Exemplo 2.4.** Consideremos o espaço de Banach  $\ell_2$  e tomemos a sequência  $(\lambda_n e_n)_{n=1}^{\infty}$ , onde  $e_n$  é o  $n$ -ésimo vetor da base canônica e  $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \setminus \ell_1$ .

Seja  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma permutação. Vamos mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$$

Com efeito, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{n=m}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \varepsilon^2,$$

sempre que  $m \geq n_\varepsilon$ . Seja  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\sigma(m) \geq n_\varepsilon$  sempre que  $m \geq N_0$ . Assim, quando  $m \geq N_0$ , temos

$$\left\| \sum_{n=1}^m \lambda_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} - (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \right\|_2^2 \leq \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \varepsilon^2,$$

consequentemente,  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ . Portanto, segue que  $(\lambda_n e_n)$  é incondicionalmente somável. Todavia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda_n e_n\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| = \infty,$$

Ou seja,  $(\lambda_n e_n)_{n=1}^{\infty}$  não é absolutamente somável.

Temos aqui em  $\ell_2$  um exemplo de uma sequência que é incondicionalmente somável, mas não é absolutamente somável. No entanto, esse exemplo não é válido para  $\ell_1$ , por exemplo. Apenas no ano de 1947, ficou conhecida a primeira sequência de  $\ell_1$  que satisfaz essa condição, com o resultado de Macphail.

notemos que, contra a intuição, os termos *condicionalmente somável* e *incondicionalmente somável* não são antônimos no contexto de dimensão infinita. O Exemplo acima nos deu um exemplo de uma sequência que é incondicionalmente somável e condicionalmente somável.

**Proposição 2.5.** Se  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência incondicionalmente somável em um espaço de Banach  $X$ , então

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)},$$

para qualquer que seja a permutação  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

**Prova.** Seja  $\varphi \in X^*$ . Sendo  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$  convergente e da continuidade de  $\varphi$ , temos que  $\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_{\sigma(n)})$  é convergente independente de qual seja a permutação  $\sigma$ . Assim, temos que  $(\varphi(x_{\sigma(n)}))_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência incondicional-

mente convergente de números reais, logo o valor de  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_{\sigma(n)})$  independe de  $\sigma$ . Portanto,

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_{\sigma(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right).$$

Como  $\varphi$  é qualquer em  $X^*$ , do Teorema de Hanh-Banach,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ . ■

**Teorema 2.6.** *Seja  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência no espaço de Banach  $X$ . São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (i)  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência incondicionalmente somável.
- (ii) Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe um  $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  tal que, sempre que  $M$  é um subconjunto finito de  $\mathbb{N}$ , com  $\min M > n_{\varepsilon}$ , temos  $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$ .
- (iii)  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é **subsérie somável**, isto é, para qualquer sequência estritamente crescente  $(k_n)_{n=1}^{\infty}$  de inteiros positivos,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$  converge.
- (iv)  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é **sinal somável**, ou seja, para qualquer escolha de sinais  $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$  converge.

**Prova.**

(i)  $\Rightarrow$  (ii). A demonstração é exatamente análoga ao Lema 1.4.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Seja  $\sigma$  uma permutação dos naturais e consideremos a sequência  $(S_n)_{n=1}^{\infty}$  das somas parciais de  $(x_{\sigma(n)})_{n=1}^{\infty}$ . Fixemos  $\varepsilon > 0$  e escolhamos  $m_{\varepsilon}$  de modo que  $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$  para todo subconjunto finito  $M \subset \mathbb{N}$  e  $\min M_n > m_{\varepsilon}$ . Nessas condições, tomemos  $m_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  suficientemente grande de modo que  $\{1, \dots, n_{\varepsilon}\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(m_{\varepsilon})\}$ . Sejam  $p, q \in \mathbb{N}$  tais que  $p, q > m_{\varepsilon}$ . Façamos

$$V_q = \{\sigma(1), \dots, \sigma(q)\} \setminus \{1, \dots, n_{\varepsilon}\},$$

$$V_p = \{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\} \setminus \{1, \dots, n_{\varepsilon}\}.$$

Assim,

$$S_q = \sum_{i=1}^q x_{\sigma(i)} = \sum_{n \in \{\sigma(1), \dots, \sigma(q)\}} x_n = \sum_{n=1}^{n_{\varepsilon}} x_n + \sum_{n \in V_q} x_n.$$

$$S_p = \sum_{i=1}^p x_{\sigma(i)} = \sum_{n \in \{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\}} x_n = \sum_{n=1}^{n_{\varepsilon}} x_n + \sum_{n \in V_p} x_n.$$

Daí, sempre que  $p, q > m_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned}\|S_q - S_p\| &= \left\| \sum_{n \in V_q} x_n - \sum_{n \in V_p} x_n \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n \in V_q} x_n \right\| + \left\| \sum_{n \in V_p} x_n \right\| < 2\varepsilon\end{aligned}$$

e, portanto,  $(S_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência de Cauchy, ou seja, convergente.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Fixemos  $\varepsilon > 0$  e escolhamos  $m_\varepsilon$  de modo que  $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$  para todo subconjunto finito  $M \subset \mathbb{N}$  tal que  $\min M > m_\varepsilon$ . Agora, se  $(k_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência crescente de números naturais, então  $k_n \geq n$ , para todo  $n$ . Assim, se  $q > p > m_\varepsilon$ , então

$$\left\| \sum_{n=p}^q x_{k_n} \right\| = \left\| \sum_{n \in \{k_p, \dots, k_q\}} x_n \right\| < \varepsilon,$$

pois

$$\min \{k_p, \dots, k_q\} = k_p \geq p > m_\varepsilon,$$

o que nos diz que a sequência das somas parciais de  $(x_{k_n})_{n=1}^\infty$  é de Cauchy e, portanto, convergente.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv). Seja  $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de sinais. Sejam  $S^+ = \{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n = 1\}$  e  $S^- = \{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n = -1\}$  enumerados com a ordem natural. O caso em que  $S^+$  ou  $S^-$  é finito é imediato. Basta considerar o caso em que ambos são infinitos. Obviamente,  $S^+$  e  $S^-$  são subconjuntos disjuntos de  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{N} = S^+ \cup S^-$ . Por hipótese, as séries  $\sum_{n \in S^+} x_n$  e  $\sum_{n \in S^-} x_n$  são convergentes. Fixemos  $\varepsilon > 0$ . Notemos que, se  $p$  e  $q$  são números naturais, com  $p < q$ , fazendo  $M_{pq}^+ = \{n \in S^+ : p \leq n \leq q\}$  e  $M_{pq}^- = \{n \in S^- : p \leq n \leq q\}$ , então

$$\sum_{n=p}^q \varepsilon_n x_n = \sum_{n \in M_{pq}^+} \varepsilon_n x_n + \sum_{n \in M_{pq}^-} \varepsilon_n x_n = \sum_{n \in M_{pq}^+} x_n - \sum_{n \in M_{pq}^-} x_n.$$

Como  $\sum_{n \in S^+} x_n$  e  $\sum_{n \in S^-} x_n$  são convergentes, existe  $n_\varepsilon$  tal que segue, para  $p$  suficientemente grande,

$$q > p > n_\varepsilon \Rightarrow \left\| \sum_{n \in M_{pq}^+} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } \left\| \sum_{n \in M_{pq}^-} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, se  $q > p > n_\varepsilon$ , temos

$$\left\| \sum_{n=p}^q \varepsilon_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n \in M_{pq}^+} x_n \right\| + \left\| \sum_{n \in M_{pq}^-} x_n \right\| < \varepsilon$$

e  $(x_n)$  é sinal somável.

(iv)  $\Rightarrow$  (ii). De forma contrapositiva, vamos supor que existe um  $\delta_0 > 0$  e uma sequência  $(M_k)_{k=1}^\infty$  de subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$  tais que

$$\max M_k < \min M_{k+1} \quad \text{e} \quad \left\| \sum_{n \in M_k} x_n \right\| \geq \delta_0.$$

Tomemos

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in \bigcup_{k=1}^\infty M_k, \\ -1, & \text{se } n \notin \bigcup_{k=1}^\infty M_k. \end{cases}$$

Vamos tomar, agora, a sequência de termo geral  $S_n = \sum_{i=1}^n (1 + \varepsilon_i) x_i$ . Assim,

$$\left\| \sum_{n=\min M_k}^{\max M_k} (1 + \varepsilon_n) x_n \right\| = 2 \left\| \sum_{n \in M_k} x_n \right\| > 2\delta_0.$$

Portanto, temos que  $(x_n)_{n=1}^\infty$  ou  $(\varepsilon_n x_n)_{n=1}^\infty$  não é somável e, portanto, segue que  $(x_n)_{n=1}^\infty$  não é sinal somável. Por contrapositiva, segue o resultado. ■

O diagrama abaixo mostra como a sequência de implicações do teorema acima demonstra a equivalência entre as afirmações:

$$\begin{array}{ccc} (i) & \Longleftrightarrow & (ii) \\ & \nearrow & \Downarrow \\ (iv) & \Longleftarrow & (iii) \end{array}$$

**Corolário 2.7.** Uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  no espaço de Banach  $X$  é incondicionalmente somável se, e somente se, para qualquer que seja a sequência  $(k_n)_{n=1}^\infty$  de números naturais dois a dois distintos,  $(x_{k_n})_{n=1}^\infty$  é somável.

**Prova.** ( $\Rightarrow$ ). Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  no espaço de Banach  $X$  incondicionalmente somável, em particular, subsérie somável. Dada uma sequência  $(k_n)_{n=1}^\infty$  de números naturais, notemos que  $(x_{k_n})_{n=1}^\infty$  não é necessariamente uma subséquence de  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , ape-

nas se  $(k_n)_{n=1}^\infty$  for crescente. Todavia, podemos tomar uma permutação  $\sigma$  tal que  $(x_{k_n})_{n=1}^\infty$  seja subsequência de  $(x_{\sigma(n)})_{n=1}^\infty$ . Sendo  $(x_{\sigma(n)})_{n=1}^\infty$  subsérie somável, segue que  $(x_{k_n})_{n=1}^\infty$  é somável.

( $\Leftarrow$ ). Se, para qualquer que seja  $(k_n)_{n=1}^\infty$ ,  $(x_{k_n})_{n=1}^\infty$  é somável, então, para  $(k_n)_{n=1}^\infty$  crescente  $(x_{k_n})_{n=1}^\infty$  é somável. Logo,  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é subsérie somável. ■

**Teorema 2.8. (Teste dos Multiplicadores Limitados)** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $X$ . Então  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é incondicionalmente somável se, e somente se, a sequência  $(b_n x_n)_{n=1}^\infty$  é somável sempre que  $(b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ .*

**Prova.** ( $\Leftarrow$ ).

Se  $(b_n x_n)_{n=1}^\infty$  é somável sempre que  $(b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ , então, em particular,  $(\varepsilon_n x_n)_{n=1}^\infty$  é somável qualquer que seja a sequência de sinais  $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$ , ou seja,  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é sinal somável e, portanto, do Teorema 2.6,  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é incondicionalmente somável.

( $\Rightarrow$ ). Agora, suponhamos que  $(x_n)_{n=1}^\infty$  seja incondicionalmente somável e fixemos  $(b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ . Sejam  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ , com  $m_1 < m_2$ . Neste caso, do Teorema de Hahn-Banach,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{m_2} b_n x_n - \sum_{n=1}^{m_1} b_n x_n \right\| &= \left\| \sum_{n=m_1+1}^{m_2} b_n x_n \right\| \\ &= \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left| \varphi \left( \sum_{n=m_1+1}^{m_2} b_n x_n \right) \right| \\ &= \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left| \sum_{n=m_1+1}^{m_2} b_n \varphi(x_n) \right| \\ &\leq \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{n=m_1+1}^{m_2} |b_n| |\varphi(x_n)| \\ &\leq \|(b_n)_{n=1}^\infty\|_\infty \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{n=m_1+1}^{m_2} |\varphi(x_n)|. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Do Teorema 2.6, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que, sempre que  $M$  é um subconjunto finito de números naturais com  $\min M \geq m_\varepsilon$ ,

$$\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Fixemos  $\varphi \in B_{X^*}$  e consideremos  $m_2 > m_1 > m_\varepsilon$ . Definindo

$$\begin{aligned} M^+ &= \{m_1 + 1 \leq n \leq m_2 : \operatorname{Re}(\varphi(x_n)) \geq 0\}, \\ M^- &= \{m_1 + 1 \leq n \leq m_2 : \operatorname{Re}(\varphi(x_n)) < 0\}, \end{aligned}$$

observamos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=m_1+1}^{m_2} |\operatorname{Re}(\varphi(x_n))| &= \sum_{n \in M^+} |\operatorname{Re}(\varphi(x_n))| + \sum_{n \in M^-} |\operatorname{Re}(\varphi(x_n))| \\ &= \left| \sum_{n \in M^+} \operatorname{Re}(\varphi(x_n)) \right| + \left| \sum_{n \in M^-} \operatorname{Re}(\varphi(x_n)) \right| \\ &= \left| \operatorname{Re} \left( \varphi \left( \sum_{n \in M^+} x_n \right) \right) \right| + \left| \operatorname{Re} \left( \varphi \left( \sum_{n \in M^-} x_n \right) \right) \right| \\ &\leq \left| \varphi \left( \sum_{n \in M^+} x_n \right) \right| + \left| \varphi \left( \sum_{n \in M^-} x_n \right) \right| \\ &\leq \left\| \sum_{n \in M^+} x_n \right\| + \left\| \sum_{n \in M^-} x_n \right\|. \end{aligned}$$

Como  $\min M^+, \min M^- > m_\varepsilon$ , temos que

$$\sum_{n=m_1+1}^{m_2} |\operatorname{Re}(\varphi(x_n))| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

De modo análogo,

$$\sum_{n=m_1+1}^{m_2} |\operatorname{Im}(\varphi(x_n))| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Assim, sempre que  $m_2 > m_1 > m_\varepsilon$ ,

$$\sum_{n=m_1+1}^{m_2} |\varphi(x_n)| \leq \sum_{n=m_1+1}^{m_2} |\operatorname{Re}(\varphi(x_n))| + \sum_{n=m_1+1}^{m_2} |\operatorname{Im}(\varphi(x_n))| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sendo  $\varphi \in B_{X^*}$  qualquer, obtemos

$$\sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{n=m_1+1}^{m_2} |\varphi(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

De (2.1),

$$\left\| \sum_{n=1}^{m_2} b_n x_n - \sum_{n=1}^{m_1} b_n x_n \right\| < \varepsilon \|(b_n)_{n=1}^\infty\|_\infty$$

sempre que  $m_2 > m_1 > m_\varepsilon$  e, consequentemente,  $(b_n x_n)_{n=1}^\infty$  é somável. ■

**Observação 2.9.**  $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$  representa uma sequência, bem como,  $(x_n)_{n=1}^\infty$ . Como estamos num contexto que trabalho com sequências de sequências, por vezes, convêm

usar a primeira notação.

Num curso introdutório de Análise funcional, vemos que convergência forte implica em convergência fraca, mas a recíproca não é verdadeira em dimensão infinita; o máximo que se tem é que convergência fraca implica que a sequência é limitada, o que já é de grande valia. No entanto, em  $\ell_1$ , Issai Schur provou que essas duas convergências são equivalentes.

**Teorema 2.10. (Schur, 1921)** *Em  $\ell_1$ , uma sequência converge na topologia fraca se, e somente se, converge na topologia da norma.*

**Prova.** Basta mostrar que toda sequência fracamente convergente é também convergente em norma. Claramente, basta mostrarmos que toda sequência que converge fracamente para zero converge em norma para zero. Com efeito, seja  $\left(z^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência em  $\ell_1$  que converge fracamente para zero. Suponhamos que  $\left(z^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$  não convirja para zero em norma. Neste caso, existem  $\varepsilon_0 > 0$  e uma subsequência  $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$  de  $\left(z^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$  tal que

$$\left\|x^{(n)}\right\| \geq 5\varepsilon_0 \quad (2.2)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Escrevamos  $x^{(n)} = \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como essa subsequência converge fracamente para zero, da dualidade  $\ell_1^* = \ell_{\infty}$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{(n)} = 0, \text{ para toda sequência } (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}. \quad (2.3)$$

Em particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^r \left|x_j^{(n)}\right| = 0 \text{ para todo } r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}. \quad (2.4)$$

Indutivamente, definamos duas sequências crescentes  $(m_k)_{k=0}^{\infty}$  e  $(n_k)_{k=0}^{\infty}$  de números naturais da seguinte maneira:  $m_0 = n_0 = 1$  e, no passo seguinte, definimos  $n_1 > n_0$  como sendo o menor inteiro positivo tal que

$$\sum_{j=1}^{m_0} \left|x_j^{(n_1)}\right| < \varepsilon_0 \text{ (a existência de } n_1 \text{ é consequência de (2.4))}$$

e  $m_1 > m_0$  é definido como o menor inteiro positivo tal que

$$\sum_{j=m_1}^{\infty} \left|x_j^{(n_1)}\right| < \varepsilon_0 \text{ (a existência de } m_1 \text{ é consequência de } x^{(n_1)} \in \ell_1).$$

De modo geral, para  $k \geq 1$ , definimos  $n_k$  como sendo o menor inteiro maior que

$n_{k-1}$  tal que

$$\sum_{j=1}^{m_{k-1}} |x_j^{(n_k)}| < \varepsilon_0,$$

e  $m_k$  é o menor inteiro maior do que  $m_{k-1}$  satisfazendo

$$\sum_{j=m_k}^{\infty} |x_j^{(n_k)}| < \varepsilon_0.$$

Definamos uma sequência  $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$  da seguinte maneira: para  $m_{k-1} < j \leq m_k$ , tomemos

$$b_j = \begin{cases} 0, & \text{se } x_j^{(n_k)} = 0, \\ |x_j^{(n_k)}|^{-1} \cdot \overline{x_j^{(n_k)}}, & \text{se } x_j^{(n_k)} \neq 0. \end{cases}$$

De (2.2), temos

$$5\varepsilon_0 - \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{(n_k)} \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n_k)}| - \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{(n_k)} \right| \quad (2.5)$$

e, como  $|b_j| \leq 1$  para todo  $j$ , temos

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n_k)}| - \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{(n_k)} \right| \right| \\ & \leq \left| \sum_{j=1}^{\infty} (|x_j^{(n_k)}| - b_j x_j^{(n_k)}) \right| \\ & = \left| \sum_{j=1}^{m_{k-1}} (|x_j^{(n_k)}| - b_j x_j^{(n_k)}) + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} (|x_j^{(n_k)}| - b_j x_j^{(n_k)}) + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} (|x_j^{(n_k)}| - b_j x_j^{(n_k)}) \right| \\ & = \left| \sum_{j=1}^{m_{k-1}} (|x_j^{(n_k)}| - b_j x_j^{(n_k)}) + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} (|x_j^{(n_k)}| - b_j x_j^{(n_k)}) \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^{m_{k-1}} (|x_j^{(n_k)}| + |b_j x_j^{(n_k)}|) + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} (|x_j^{(n_k)}| + |b_j x_j^{(n_k)}|) \\ & \leq 2\varepsilon_0 + 2\varepsilon_0 = 4\varepsilon_0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

para todo  $k$ . De (2.5) e (2.6), temos

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{(n_k)} \right| \geq \varepsilon_0$$

para todo  $k$ , contradizendo (2.3). ■

Por causa desse teorema, os espaços de Banach no qual toda sequência fraca-

mente convergente é convergente em norma é chamado de **espaço de Schur**, e tal propriedade é chamada de **propriedade de Schur**. Sendo  $\ell_1$  um espaço de Schur, é razoável se perguntar se  $L_1[0, 1]$  também é, o que não é verdade, pois  $L_1[0, 1]$  contém uma cópia de  $\ell_2$ , que, por sua vez, não é de Schur. Em geral, espaços que contém subespaços reflexivos não são de Schur.

**Definição 2.11.** Uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  em um espaço de Banach  $X$  é **fracamente subsérie somável** se, para qualquer sequência estritamente crescente  $(k_n)_{n=1}^{\infty}$  de inteiros positivos,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$  converge na topologia fraca.

Alternativamente, diremos que a série formal  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  é **fracamente subsérie convergente** quando  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é fracamente subsérie somável.

Para a demonstração do próximo teorema, nos convêm relembrar alguns resultados que são vistos num curso introdutório de Análise Funcional:

- A bola unitária fechada  $B_{X^*}$  do dual topológico de um espaço de Banach  $X$  é compacta na topologia fraca-estrela (Teorema de Banach–Alaoglu–Bourbaki).
- Se  $X$  é um espaço de Banach separável, a bola  $B_{X^*}$ , munida com a topologia fraca-estrela, é metrizável.
- Se  $Y$  é subespaço fechado de  $X$ , o Teorema de Hahn-Banach garante que a topologia fraca em  $Y$  é a topologia induzida pela topologia fraca de  $X$ .
- Um operador linear  $T: E \rightarrow F$  entre espaços normados é dito *compacto* se, para toda sequência limitada  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  em  $E$ , a sequência  $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$  possui subsequência convergente em  $F$ .

**Teorema 2.12. (Orlicz-Pettis)** *As seguintes afirmações sobre uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  em um espaço de Banach  $X$  são equivalentes:*

- (i)  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é fracamente subsérie somável em  $X$ .
- (ii) O operador linear

$$T: X^* \rightarrow \ell_1$$

$$\varphi \mapsto (\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$$

*é bem definido e compacto.*

(iii)  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é subsérie somável em  $X$ .

**Prova.** Seja  $Y = \overline{[\{x_n : n \in \mathbb{N}\}]}$ . Como  $Y$  é convexo, sabemos que ele coincide com o fecho de  $[\{x_n : n \in \mathbb{N}\}]$  na topologia fraca. Para o item (i), notemos que não há diferença em trabalhar em  $Y$  ou  $X$ , pois a topologia fraca em  $Y$  é induzida pela topologia fraca em  $X$ . Para o item (iii), como ele nada tem a ver com topologia fraca, concluímos que considerar  $Y = \overline{[\{x_n : n \in \mathbb{N}\}]}$  não causa problemas. Finalmente, para o item (ii) notemos que, se provarmos que

$$\begin{aligned} S: Y^* &\rightarrow \ell_1 \\ \psi &\mapsto (\psi(x_n))_{n=1}^{\infty} \end{aligned}$$

é bem definido e compacto, o mesmo ocorrerá com

$$\begin{aligned} T: X^* &\rightarrow \ell_1 \\ \varphi &\mapsto (\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Iniciemos observando que, se  $\varphi \in X^*$  e  $\psi := \varphi|_Y$ , então  $\psi \in Y^*$  e

$$T(\varphi) = (\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty} = (\psi(x_n))_{n=1}^{\infty} = S(\psi) \in \ell_1.$$

Sejam  $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência limitada em  $X^*$  e  $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$  a respectiva sequência de restrições a  $Y$ , isto é,  $\psi_n := \varphi_n|_Y$ . Se  $S$  é um operador compacto, então existe uma subsequência  $(\psi_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  tal que  $(S(\psi_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$  converge em  $\ell_1$  para, digamos,  $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ . Neste caso

$$\left\| T(\varphi_{n_k}) - (a_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_1 = \left\| S(\psi_{n_k}) - (a_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_1 \rightarrow 0,$$

ou seja,  $(T(\varphi_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$  converge para  $(a_j)_{j=1}^{\infty}$  em  $\ell_1$  e  $T$  é compacto.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Vejamos que  $T$  é um operador linear bem definido. Com efeito, como  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é fracamente subsérie somável, para toda sequência crescente  $(k_j)_{j=1}^{\infty}$  de números naturais, a sequência  $\left( \sum_{j=1}^n x_{k_j} \right)_{n=1}^{\infty}$  converge fracamente. Logo, para todo  $\varphi \in X^*$ , a série  $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(x_j)$  é subsérie convergente e, portanto, do Teorema 2.6,  $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(x_j)$  é incondicionalmente convergente. Como, em  $\mathbb{K}$ , convergência absoluta e incondicional coincidem, temos  $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| < \infty$  para todo  $\varphi \in X^*$ . Isso significa que  $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$  para todo  $\varphi \in X^*$ , ou seja,  $T$  é bem definido. A linearidade de

$T$  é óbvia; vamos mostrar agora que  $T$  é contínuo. Se  $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$  é uma sequência em  $X^*$  tal que  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  e  $T(\varphi_k) \rightarrow (b_n)_{n=1}^{\infty}$ , fazendo  $T(\varphi) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ , observemos que, para todos  $j, k \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned} |a_j - b_j| &\leq |a_j - \varphi_k(x_j)| + |\varphi_k(x_j) - b_j| \\ &= |\varphi(x_j) - \varphi_k(x_j)| + |\varphi_k(x_j) - b_j| \\ &\leq \|\varphi - \varphi_k\| \|x_j\| + \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_k(x_n) - b_n| \\ &= \|\varphi - \varphi_k\| \|x_j\| + \|(\varphi_k(x_n))_{n=1}^{\infty} - (b_n)_{n=1}^{\infty}\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

ou seja,  $a_j = b_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Do Teorema do Gráfico Fechado,  $T$  é contínuo.

Agora, seja  $(\varphi_m)_{m=1}^{\infty}$  uma sequência em  $B_{X^*}$ . Como  $B_{X^*}$  é compacta e metrizável com respeito à topologia fraca-estrela, podemos extrair uma subsequência  $(\varphi_{m_k})_{k=1}^{\infty}$  de  $(\varphi_m)_{m=1}^{\infty}$  que converge na topologia fraca-estrela para, digamos,  $\varphi_0 \in B_{X^*}$ . Se pudermos mostrar que  $T(\varphi_0)$  é o limite na topologia da norma de  $(T(\varphi_{m_k}))_{k=1}^{\infty}$ , teremos comprovado a compacidade de  $T$ . Como  $T$  toma valores em  $\ell_1$ , segue do Teorema de Schur que tudo que precisamos fazer é mostrar  $(T(\varphi_{m_k}))_{k=1}^{\infty} \xrightarrow{w} T(\varphi_0)$ . Para tanto, basta mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(T(\varphi_{m_k})) = \psi(T(\varphi_0))$$

para qualquer  $\psi$  em um subconjunto denso de  $\ell_1^* = \ell_{\infty}$  com respeito à topologia da norma. É fácil mostrar que a coleção das funções simples, isto é, funções da forma

$$\psi = \sum_{j=1}^m \lambda_j 1_{M_j},$$

onde  $\lambda_j \in \mathbb{K}$  e  $M_1, \dots, M_m$  são uma partição de  $\mathbb{N}$ , é um subconjunto denso de  $\ell_{\infty}$ . Podemos, portanto, considerar  $\psi$  como sendo uma função simples. Por linearidade, podemos então nos restringir apenas às funções características  $\psi = 1_M$  de subconjuntos  $M$  de  $\mathbb{N}$ . Consideremos, portanto,  $\psi$  deste modo e  $M = \{r_1 < r_2 < \dots\}$  (o caso em que  $M$  é finito segue facilmente). Como  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é fracamente subsérie somável, seja  $z_0 \in X$  tal que

$$\sum_{j=1}^n x_{r_j} \xrightarrow{w} z_0. \quad (2.7)$$

Lembrando que  $(\varphi_{m_k})_{k=1}^{\infty} \xrightarrow{w^*} \varphi_0$  e que  $\psi = 1_{\{r_1 < r_2 < \dots\}}$ , temos

$$\begin{aligned} \psi(T(\varphi_0)) &= \psi\left((\varphi_0(x_j))_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_0(x_{r_j}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \varphi_0(x_{r_j}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0\left(\sum_{j=1}^n x_{r_j}\right) \\ &\stackrel{(2.7)}{=} \varphi_0(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{m_k}(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{m_k}\left(\sum_{j=1}^n x_{r_j}\right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(T(\varphi_{m_k})) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \psi\left((\varphi_{m_k}(x_j))_{j=1}^{\infty}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{m_k}(x_{r_j}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \varphi_{m_k}(x_{r_j}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{m_k}\left(\sum_{j=1}^n x_{r_j}\right) \end{aligned}$$

e, combinando as igualdades, temos

$$\psi(T(\varphi_0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(T(\varphi_{m_k})).$$

Concluimos, portanto, que  $T$  é compacto.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). notemos que, se  $\bar{K}$  é um subconjunto compacto de  $\ell_1$ , para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  tal que,

$$\sup_{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in K} \sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon$$

sempre que  $m > n_{\varepsilon}$ . Como  $\overline{T(B_{X^*})}$  é compacto em  $\ell_1$ , para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{j=n_{\varepsilon}}^{\infty} |\varphi(x_j)| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{j=n_{\varepsilon}}^{\infty} |(T(\varphi))_j| \leq \varepsilon.$$

Em particular, para qualquer subconjunto finito  $M$  de  $\mathbb{N}$  com  $\min M > n_{\varepsilon}$ . Pelo Teorema de Hahn–Banach, temos

$$\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left| \varphi\left(\sum_{n \in M} x_n\right) \right| \leq \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{n \in M} |\varphi(x_n)| \leq \varepsilon.$$

O Teorema 2.6 garante o resultado.

Como (iii)  $\Rightarrow$  (i) é imediata do Teorema 2.6, a demonstração do teorema está concluída. ■

**Teorema 2.13 (Schauder).** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Então  $T$  é compacto se, e somente se,  $T^*: F^* \rightarrow E^*$  é compacto, onde  $T^*$  é o operador adjunto de  $T$ .*

O leitor poderá encontrar a demonstração do Teorema de Schauder em ([1], Teorema 7.2.7)

Ao olharmos para trás, nesse capítulo 2, observaremos que várias equivalências diretas e indiretas com a convergência incondicional foram demonstradas nesse texto. Com mais algumas que serão introduzidas agora, juntaremos todas as equivalências em um só **teorema geral** sobre somabilidade incondicional.

**Teorema 2.14. (Omnibus Theorema sobre Somabilidade Incondicional)** *Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência no espaço de Banach  $X$ . São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (i)  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência incondicionalmente somável.
- (ii) Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe um  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que, sempre que  $M$  é um subconjunto finito de  $\mathbb{N}$ , com  $\min M > n_\varepsilon$ , temos  $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$ .
- (iii)  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é subsérie somável.
- (iv)  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é sinal somável.
- (v) Para toda sequência  $(k_n)_{n=1}^\infty$  de números naturais dois a dois distintos  $(x_{k_n})_{n=1}^\infty$  é somável.
- (vi) A sequência  $(b_n x_n)_{n=1}^\infty$  é somável sempre que  $(b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ .
- (vii)  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é fracamente subsérie somável.
- (viii)  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é **fracamente sinal somável**, ou seja,  $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n x_n$  converge na topologia fraca em  $X$  para qualquer escolha de sinais  $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ .
- (ix)  $\sum_{n=1}^\infty b_n x_n$  converge na topologia fraca em  $X$  sempre que  $(b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ .
- (x) Para toda sequência  $(k_n)_{n=1}^\infty$  de números naturais dois a dois distintos  $\sum_{n=1}^\infty x_{k_n}$  converge na topologia fraca em  $X$ .
- (xi)  $T: X^* \rightarrow \ell_1$ ;  $T(\varphi) = (\varphi(x_n))_{n=1}^\infty$  é um operador compacto.

(xii)  $S: \ell_\infty \rightarrow X; S((b_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty b_n x_n$  é um operador compacto.

(xiii)  $R: c_0 \rightarrow X; R((b_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty b_n x_n$  é um operador compacto.

(xiv)  $S: \ell_\infty \rightarrow X; S((b_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty b_n x_n$  é um operador limitado.

**Prova.** Já vimos que as afirmações (i) a (vii) e (xi) são equivalentes. (Vide Teoremas 2.6, 2.8, 2.12 e o Corolário 2.7.)

(iv)  $\Rightarrow$  (viii). óbvio.

(viii)  $\Rightarrow$  (vii). Sejam  $(k_j)_{j=1}^\infty$  uma sequência crescente de números naturais e

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in \{k_j : j \in \mathbb{N}\}, \\ -1, & \text{se } n \notin \{k_j : j \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Como  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é fracamente sinal somável, então  $(2^{-1}x_n)_{n=1}^\infty$  e  $(2^{-1}\varepsilon_n x_n)_{n=1}^\infty$  são fracamente somáveis. Como

$$\sum_{j=1}^m x_{k_j} = \sum_{j=1}^m \left( 2^{-1}x_n + 2^{-1}\varepsilon_n x_n \right),$$

concluimos que  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é fracamente subsérie somável.

(vi)  $\Rightarrow$  (ix). óbvio.

(ix)  $\Rightarrow$  (viii). Se  $\sum_{n=1}^\infty b_n x_n$  converge na topologia fraca para toda sequência  $(b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ , então, em particular,  $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n x_n$  converge na topologia fraca para toda sequência de sinais  $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$  e, portanto,  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é fracamente sinal somável.

(v)  $\Rightarrow$  (x). óbvio.

(x)  $\Rightarrow$  (vii). Se  $\sum_{n=1}^\infty x_{k_n}$  converge na topologia fraca em  $X$  para toda sequência  $(k_n)_{n=1}^\infty$  de números naturais dois a dois distintos, então, em particular, converge na topologia fraca se  $(k_n)_{n=1}^\infty$  é crescente. Isso garante que  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é fracamente subsérie somável.

(xi)  $\Rightarrow$  (xii). Sabendo que  $\ell_1^* = \ell_\infty$ , observamos que operador adjunto de  $T$  é

$$\begin{aligned} T^*: \ell_\infty &\rightarrow X^{**} \\ \psi = (b_n)_{n=1}^\infty &\mapsto T^*(\psi): X^* \rightarrow \mathbb{K} \\ \varphi &\mapsto T^*(\psi)(\varphi) = \psi(T(\varphi)) = \sum_{n=1}^\infty b_n \varphi(x_n). \end{aligned}$$

Da equivalência entre (xi) e (vi) concluímos então que

$$T^*(\psi)(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty b_n \varphi(x_n) = \varphi\left(\sum_{n=1}^\infty b_n x_n\right) = J_X\left(\sum_{n=1}^\infty b_n x_n\right)(\varphi),$$

onde  $J_X$  é o mergulho canônico. Assim, para todo  $(b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ ,

$$T^*((b_n)_{n=1}^\infty) = J_X\left(\sum_{n=1}^\infty b_n x_n\right).$$

Obviamente, o operador

$$\begin{aligned} S: \ell_\infty &\rightarrow X \\ (b_n)_{n=1}^\infty &\mapsto \sum_{n=1}^\infty b_n x_n, \end{aligned}$$

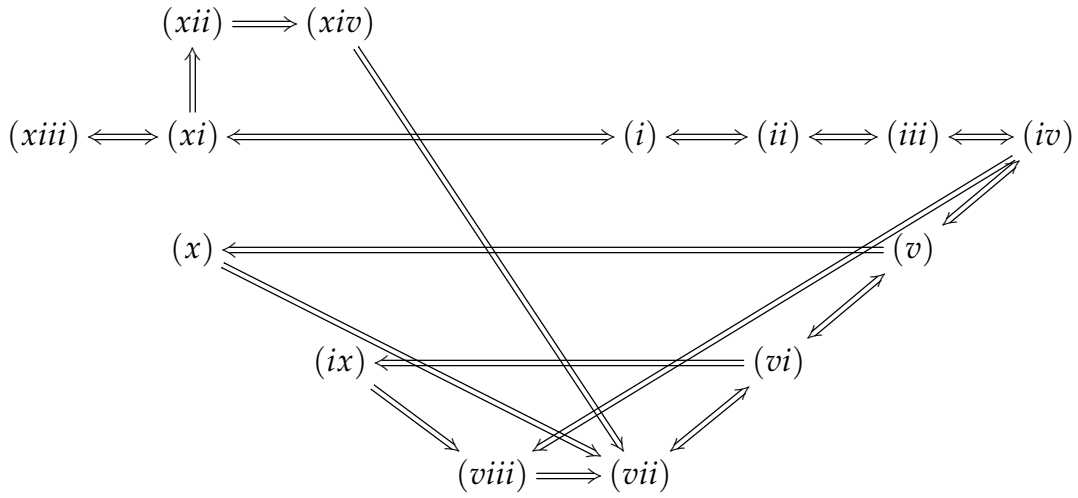
é bem definido e linear. Além disso fica evidenciado que  $T^* = J_X \circ S$ . Como  $J_X$  é uma isometria, é evidente que  $S$  será um operador compacto desde que  $T^*$  o seja. Como  $T$  é compacto, o Teorema de Schauder garante a compacidade de  $T^*$ , e portanto a compacidade de  $S$  está estabelecida.

(xii)  $\Rightarrow$  (xiv)  $\Rightarrow$  (vi). óbvio.

(xi)  $\Leftrightarrow$  (xiii). Basta observar que o operador  $T$  é o adjunto de  $R$  e aplicar o Teorema de Schauder. ■

O diagrama abaixo ajuda o leitor a se convencer de que todas as implicações do

teorema acima foram contempladas:



**Observação 2.15.** Convergência **fracamente incondicional** e convergência incondicional de séries não são conceitos equivalentes.

Com efeito, sejam  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  a sequência de vetores canônicos de  $c_0$  e  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  definida indutivamente por  $x_1 = e_1$  e  $x_{n+1} = e_{n+1} - e_n$ . notemos que, para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=1}^m x_n = e_m$ , assim  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  não é sequer somável. Agora, sejam  $\varphi = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1 = c_0^*$ , e  $\sigma$  uma permutação de  $\mathbb{N}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , sejam  $n_\varepsilon, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tais que

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\{1, \dots, n_\varepsilon\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}$$

sempre que  $m \geq N_\varepsilon$ . Fixado  $m \geq N_\varepsilon$ , seja  $M_m = \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\} - \{1, \dots, n_\varepsilon\}$ .

Daí,

$$\sum_{n=1}^m x_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} x_n + \sum_{n \in M_m} x_n = e_{n_\varepsilon} + \sum_{n \in M_m} e_n - \sum_{n \in M_m} e_{n-1}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \left| \varphi \left( \sum_{n=1}^m x_{\sigma(n)} \right) \right| &= \left| \varphi(e_{n_\varepsilon}) + \sum_{n \in M_m} \varphi(e_n) - \sum_{n \in M_m} \varphi(e_{n-1}) \right| \\ &= \left| a_{n_\varepsilon} + \sum_{n \in M_m} a_n - \sum_{n \in M_m} a_{n-1} \right| \\ &\leq 2 \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} |a_n| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi \left( \sum_{n=1}^m x_{\sigma(n)} \right) = 0$ . Como  $\varphi \in c_0^*$  é qualquer, segue que  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$  converge fracamente para zero.

## Capítulo 3

# O Teorema de Macphail e o Teorema de Dvoretzky e Rogers

### 3.1 O Teorema de Macphail

Em 1947, Macphail não resolveria ainda o problema 122 do Scottish Book, proposto por Orlicz e Mazur, de que todo espaço de Banach de dimensão infinita possui alguma sequência que converge incondicionalmente, mas não absolutamente, mas acabaria com a dúvida de matemáticos da época, se o  $\ell_1$  possuía uma série que convergia incondicionalmente, mas não absolutamente, já que as sequências que respondiam a questão, quando  $p > 1$ , não serviam para o caso  $p = 1$ . Com sua elegância, Macphail não apenas conseguiu mostrar que  $\ell_1$  possui uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável, como ele ainda construiu tal sequência. Nesse trabalho, traremos uma versão mais generalizada do Teorema de Macphail de 1947.

Uma ferramenta que foi muito importante para aquele que dá nome ao teorema e também será para nós, são as matrizes de Hadamard, exposta abaixo.

**Definição 3.1.** Uma matriz quadrada  $\mathbf{H} = [h_{ij}]_{n \times n}$  é dita uma *matriz de Hadamard* se todas as suas entradas pertencem a  $\{-1, 1\}$  e

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^\top = n\mathbf{I}_n.$$

**Exemplo 3.2.** *As matrizes*

$$[1], \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

*são de Hadamard.*

notemos que, sendo  $\mathbf{H}$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $u_1, \dots, u_n$  são seus vetores linha (coluna), temos que  $\mathbf{H}$  é uma matriz de Hadamard se, e somente se

$$\langle u_i, u_j \rangle = n\delta_{ij}$$

para todo  $i$  e todo  $j$ , onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Assim, os vetores linha Hadamard de ordem  $n$  são dois a dois ortogonais e possuem norma  $n^{\frac{1}{2}}$  (o mesmo para vetores coluna). Neste caso,  $|\det(\mathbf{H})|$  é um número inteiro positivo e temos que

$$|\det(\mathbf{H})| = \|u_1\| \cdots \|u_n\| = n^{n/2}.$$

Com isso, para que  $n^{n/2}$  seja inteiro,  $n$  basta ser, necessariamente, um quadrado perfeito ou um número par. Logo, não existem matrizes de Hadamard de todas as ordens. Portanto, se  $n$  é um inteiro positivo para o qual existe uma matriz de Hadamard de ordem  $n$ , então  $n$  será dito um **inteiro de Hadamard** ou uma **ordem de Hadamard**. Mais precisamente, veremos adiante no Teorema 3.3, se  $n$  é uma ordem de Hadamard, então

$$n \in \{1, 2\} \cup \{4k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Das propriedades das matrizes, nós temos que Matrizes de Hadamard continuam sendo de Hadamard após terem suas linhas ou colunas permutadas. Além disso, é claro que, se  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  são sinais e  $\mathbf{H} = [h_{ij}]_{n \times n}$  é uma matriz de Hadamard, então

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 h_{11} & \varepsilon_1 h_{12} & \cdots & \varepsilon_1 h_{1n} \\ \varepsilon_2 h_{21} & \varepsilon_2 h_{22} & \cdots & \varepsilon_2 h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_n h_{n1} & \varepsilon_n h_{n2} & \cdots & \varepsilon_n h_{nn} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{H} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 h_{11} & \varepsilon_2 h_{12} & \cdots & \varepsilon_n h_{1n} \\ \varepsilon_1 h_{21} & \varepsilon_2 h_{22} & \cdots & \varepsilon_n h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1 h_{n1} & \varepsilon_2 h_{n2} & \cdots & \varepsilon_n h_{nn} \end{bmatrix}$$

também o são. Logo, se  $n$  é uma ordem de Hadamard, é sempre possível exibir uma matriz de Hadamard  $\mathbf{H} = [h_{ij}]_{n \times n}$  do tipo

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix}$$

na qual todas as entradas da primeira linha e da primeira coluna são iguais a 1. Quando tivermos uma matriz de Hadamard nestas condições, chamaremos tal matriz como uma matriz de Hadamard **normalizada**.

**Teorema 3.3.** *Se  $n$  é uma ordem de Hadamard, então*

$$n \in \{1, 2\} \cup \{4k : k \in \mathbb{N}\}.$$

**Prova.** Já sabemos, do Exemplo 3.2, que existem matrizes de Hadamard de ordens 1 e 2. Portanto, seja  $n > 2$  uma ordem de Hadamard e  $\mathbf{H} = [h_{ij}]_{n \times n}$  uma matriz de Hadamard normalizada. Seja  $u_i$  o  $i$ -ésimo vetor linha de  $\mathbf{H}$ . Como  $u_1 = (1, 1, \dots, 1)$  e  $u_1$  e  $u_i$  são linearmente independentes sempre que  $i \neq 1$  (pois, se  $i \neq 1$ , então  $u_1 \perp u_i$ ),  $u_i$  deve ter pelo menos uma entrada igual a  $-1$ , pois, caso contrário, deveríamos ter  $u_i = u_1$ , o que seria um absurdo. Assim, para  $i \neq 1$ , sejam  $x_i$  e  $y_i$ , respectivamente, a quantidade de entradas iguais a 1 e a quantidade de entradas iguais a  $-1$  de  $u_i$ . No teu que  $x_i$  nunca vai ser nulo, já que a primeira entrada de  $u_i$  é sempre 1 e  $y_i \neq 0$  pelo que acabamos de ver. Além disso, notemos que

$$\begin{cases} x_i + y_i = n \\ x_i - y_i = \langle u_1, u_i \rangle = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$x_i = y_i = \frac{n}{2},$$

quando  $i \neq 1$ . Portanto,  $n$  é par. Reordenando as colunas de  $\mathbf{H}$ , quando necessário,

podemos, supor que

$$u_2 = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n/2 \text{ entradas}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n/2 \text{ entradas}}).$$

Essa escolha não afeta o  $u_1$ . Observem, agora, que, pelo menos, uma das  $n/2$  primeiras entradas de  $u_3$  deve ser igual a  $-1$  e, pelo menos, umas das últimas  $n/2$  entradas de  $u_3$  deve ser igual a  $1$  pois, caso contrário, como  $u_2$  e  $u_3$  possuem exatamente  $n/2$  entradas iguais a  $1$  e  $n/2$  entradas iguais a  $-1$ , teríamos  $u_2 = u_3$ , contrariando o fato de que  $u_2$  e  $u_3$  são linearmente independentes (dado que  $u_2 \perp u_3$ ). Assim, reordenando separadamente as  $n/2$  primeiras colunas e as  $n/2$  últimas colunas de  $\mathbf{H}$  se necessário (e observando que isso não afeta  $u_1$  e  $u_2$ ), podemos supor

$$u_3 = (\underbrace{1, \dots, 1, -1, \dots, -1}_{n/2 \text{ entradas}}, \underbrace{1, \dots, 1, -1, \dots, -1}_{n/2 \text{ entradas}}).$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que as três primeiras linhas de  $\mathbf{H}$  são dadas por

$$\begin{array}{cccccccccccc} u_1: & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ u_2: & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ u_3: & 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{x \text{ colunas}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{y \text{ colunas}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{z \text{ colunas}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{w \text{ colunas}}$

Daqui, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} n = x + y + z + w \\ 0 = \langle u_1, u_2 \rangle = x + y - z - w \\ 0 = \langle u_1, u_3 \rangle = x - y + z - w \\ 0 = \langle u_2, u_3 \rangle = x - y - z + w \end{cases} ,$$

cuja solução é

$$x = y = z = w = \frac{n}{4}.$$

Isto encerra a demonstração. ■

Ainda não se tem resposta para a recíproca do Teorema 3.3, é um problema em aberto, ou seja, não se sabe se todo múltiplo de 4 é uma ordem de Hadamard.

**Teorema 3.4. (Sylvester, 1867)** *Se  $\mathbf{H}$  é uma matriz de Hadamard de ordem  $n$ , então*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H} & -\mathbf{H} \end{bmatrix}$$

é uma matriz de Hadamard de ordem  $2n$ .

**Prova.** Sejam  $u_1, \dots, u_n$  os vetores linha de  $\mathbf{H}$ . Então,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H} & -\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H} & -\mathbf{H} \end{bmatrix}^\top &= \begin{bmatrix} u_1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & u_n \\ u_1 & -u_1 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & -u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & \cdots & u_n & -u_1 & \cdots & -u_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2\langle u_1, u_1 \rangle & \cdots & 2\langle u_1, u_n \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2\langle u_n, u_1 \rangle & \cdots & 2\langle u_n, u_n \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2\langle u_1, u_1 \rangle & \cdots & 2\langle u_1, u_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2\langle u_n, u_1 \rangle & \cdots & 2\langle u_n, u_n \rangle \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n \end{bmatrix} = 2n\mathbf{I}_{2n}
 \end{aligned}$$

■

**Exemplo 3.5.** Segue do Teorema de Sylvester que, para todo  $t \in \mathbb{N}$ , existe uma matriz de Hadamard de ordem  $2^t$ . Com efeito, basta considerar a sequência definida recursivamente por

$$\mathbf{H}_1 = [1] \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_n & \mathbf{H}_n \\ \mathbf{H}_n & -\mathbf{H}_n \end{bmatrix},$$

cujos quatro primeiros termos são apresentados no Exemplo 3.2.

**Lema 3.6.** Seja  $\mathbf{H} = [h_{ij}]_{n \times n}$  uma matriz de Hadamard. Então, para todo  $p \in [1, 2]$ ,

$$\sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n h_{ij} x_i \right| |y_j| \leq n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}},$$

sempre que  $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$  e  $\|(x_1, \dots, x_n)\|_{p^*}, \|(y_1, \dots, y_n)\|_\infty \leq 1$ .

Em particular,

$$\sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n h_{ij} x_i \right| \leq n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}}$$

para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  com  $\|(x_1, \dots, x_n)\|_{p^*} \leq 1$  e  $p^*$  é tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ .

**Prova.** Sejam  $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$  e tais que

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_{p^*}, \|(y_1, \dots, y_n)\|_{\infty} \leq 1.$$

Para todo  $i = 1, \dots, n$ , seja  $u_i$  o  $i$ -ésimo vetor linha de  $\mathbf{H}$ . Segue, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n h_{ij} x_i \right| |y_j| &\leq \left( \sum_{j=1}^n |y_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n h_{ij} x_i \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq n^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n h_{ij} x_i \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i,k=1}^n h_{ij} h_{kj} x_i \overline{x_k} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= n^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i,k=1}^n x_i \overline{x_k} \sum_{j=1}^n h_{ij} h_{kj} \right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i,k=1}^n x_i \overline{x_k} \langle u_i, u_k \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= n^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i,k=1}^n x_i \overline{x_k} n \delta_{ik} \right)^{\frac{1}{2}} = n \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Agora, da desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left[ \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{p^*} \right)^{\frac{2}{p^*}} \left( \sum_{i=1}^n 1 \right)^{1 - \frac{2}{p^*}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p^*}} \\ &\leq n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p^*}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

De (3.1) e (3.2), segue que

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} x_i y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n h_{ij} x_i \right| |y_j| \leq n \cdot n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p^*}} = n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}}.$$

Para provarmos que

$$\sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n h_{ij} x_i \right| \leq n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}}$$

para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  com  $\|(x_1, \dots, x_n)\|_{p^*} \leq 1$  e  $p^*$  é tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ ,

tomemos  $(y_1, \dots, y_n) = (1, \dots, 1)$ . Daí segue o resultado. ■

**Teorema 3.7. (Macphail, 1947)** *Seja  $p \in [1, 2]$ . Existe uma sequência  $(x^{(j)})_{j=1}^{\infty}$  que é incondicionalmente somável em  $\ell_p$  tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x^{(j)}\|_p^{2-\varepsilon} = \infty,$$

para todo  $\varepsilon > 0$ .

**Prova.** Para cada  $k \in \mathbb{N}$  seja  $\mathbf{H}_k = [h_{rs}^{(k)}]_{2^{k(k-1)} \times 2^{k(k-1)}}$  uma matriz de Hadamard de ordem  $2^{k(k-1)}$  fixada. Definamos a sequência  $(x^{(j)})_{j=1}^{\infty}$  da seguinte maneira: quando

$$j \in \{2^{k(k-1)}, 2^{k(k-1)} + 1, \dots, 2^{k(k-1)+1} - 1\},$$

para algum inteiro positivo  $k$ , consideremos

$$x^{(j)} = 2^{-k(k-1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{k}\right)} \left( \sum_{s=1}^{2^{k(k-1)}} h_{rs}^{(k)} e_{2^{k(k-1)} + s - 1} \right),$$

sendo  $r = j - 2^{k(k-1)} + 1$ .

Caso contrário, tomemos  $x^{(j)} = 0$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $k_n$  o maior inteiro positivo que satisfaça a seguinte desigualdade:

$$2^{k_n(k_n-1)} \leq n.$$

Assim, para todo funcional linear  $\varphi \in \ell_p^* = \ell_{p^*}$ , onde  $\ell_p^*$  denota o dual topológico de  $\ell_p$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{\|\varphi\|_{p^*} \leq 1} \sum_{j=n}^{\infty} |\varphi(x^{(j)})| &\leq \sup_{\|\varphi\|_{p^*} \leq 1} \sum_{j=2^{k_n(k_n-1)}}^{\infty} |\varphi(x^{(j)})| \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{p^*} \leq 1} \sum_{k=k_n}^{\infty} \sum_{j=2^{k(k-1)}}^{2^{k(k-1)+1}-1} |\varphi(x^{(j)})| \\ &\leq \sum_{k=k_n}^{\infty} \left( \sup_{\|\varphi\|_{p^*} \leq 1} \sum_{j=2^{k(k-1)}}^{2^{k(k-1)+1}-1} |\varphi(x^{(j)})| \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pela definição de  $x^{(j)} := \left(x_m^{(j)}\right)_{m=1}^{\infty}$ , quando  $j = 2^{k(k-1)} + r - 1$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=2^{k(k-1)}}^{2^{k(k-1)+1}-1} \left| \varphi \left( x^{(j)} \right) \right| &= \sum_{j=2^{k(k-1)}}^{2^{k(k-1)+1}-1} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m x_m^{(j)} \right| \\
 &= \sum_{r=1}^{2^{k(k-1)}} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m x_m^{(2^{k(k-1)}+r-1)} \right| \\
 &= \sum_{r=1}^{2^{k(k-1)}} \left| 2^{-k(k-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{k}\right)} \sum_{s=1}^{2^{k(k-1)}} h_{rs}^{(k)} \varphi_{2^{k(k-1)}+s-1} \right| \\
 &= 2^{-k(k-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{k}\right)} \sum_{r=1}^{2^{k(k-1)}} \left| \sum_{s=1}^{2^{k(k-1)}} h_{rs}^{(k)} \varphi_{2^{k(k-1)}+s-1} \right|. \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

Logo, por (3.4) e pelo Lema 3.6, dado  $\delta > 0$ , existe um  $n_\delta \in \mathbb{N}$  de modo que

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=k_n}^{\infty} \left( \sup_{\|\varphi\|_{p^*} \leq 1} \sum_{j=2^{k(k-1)}}^{2^{k(k-1)+1}-1} \left| \varphi \left( x^{(j)} \right) \right| \right) \\
 &= \sum_{k=k_n}^{\infty} \left( \sup_{\|\varphi\|_{p^*} \leq 1} 2^{-k(k-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{k}\right)} \sum_{r=1}^{2^{k(k-1)}} \left| \sum_{s=1}^{2^{k(k-1)}} h_{rs}^{(k)} \varphi_{2^{k(k-1)}+s-1} \right| \right) \\
 &= \sum_{k=k_n}^{\infty} \left( 2^{-k(k-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{k}\right)} \sup_{\|\varphi\|_{p^*} \leq 1} \sum_{r=1}^{2^{k(k-1)}} \left| \sum_{s=1}^{2^{k(k-1)}} h_{rs}^{(k)} \varphi_{2^{k(k-1)}+s-1} \right| \right) \\
 &\leq \sum_{k=k_n}^{\infty} 2^{-k(k-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{k}\right)} \cdot 2^{k(k-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\right)} \\
 &= \sum_{k=k_n}^{\infty} 2^{-(k-1)} < \delta, \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

sempre que  $n \geq n_\delta$ .

Agora, de (3.3) e (3.5), temos que

$$\sup_{\|\varphi\|_{p^*} \leq 1} \sum_{j=n}^{\infty} \left| \varphi \left( x^{(j)} \right) \right| < \delta$$

sempre que  $n \geq n_\delta$ .

Portanto, dado algum subconjunto finito  $M \subset \{n_\delta, n_\delta + 1, n_\delta + 2, \dots\}$ ,

$$\left\| \sum_{j \in M} x^{(j)} \right\|_p \leq \sup_{\|\varphi\|_{p^*} \leq 1} \sum_{j \in M} \left| \varphi \left( x^{(j)} \right) \right| \leq \sup_{\|\varphi\|_{p^*} \leq 1} \sum_{j=n_\delta}^{\infty} \left| \varphi \left( x^{(j)} \right) \right| < \delta.$$

Ou seja, temos  $\left(x^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty}$  é incondicionalmente somável conforme condição do Teorema 2.6.

Por outro lado, se  $j \in \{2^{k(k-1)}, \dots, 2^{k(k-1)+1} - 1\}$ , para algum inteiro positivo  $k$ , temos

$$\|x^{(j)}\|_p = \left\| \left(2^{k(k-1)}\right)^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{k}\right)} \left( \sum_{s=1}^{2^{k(k-1)}} h_{rs}^{(k)} e_{2^{k(k-1)}+s-1} \right) \right\|_p = 2^{-k(k-1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right)}$$

e  $\|x^{(j)}\|_p = 0$ , caso contrário. Logo,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x^{(j)}\|_p^r = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(k-1)} \cdot 2^{-k(k-1)\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{k}\right)} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(k-1)\left(1 - \frac{r}{2} - \frac{r}{k}\right)}.$$

Temos, então, que  $\sum_{j=1}^{\infty} \|x^{(j)}\|_p^r$  diverge quando  $r < 2$ , pois, nesse caso,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^{k(k-1)\left(1 - \frac{r}{2} - \frac{r}{k}\right)} \neq 0.$$

■

Quando  $p > 2$ , o resultado acima também é válido. Basta tomarmos a sequência  $\left(\frac{e_j}{j^{1/2}}\right)_{n=1}^{\infty}$  e verificarmos que ela é incondicionalmente convergente em  $\ell_p$ , mas

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \frac{e_j}{j^{1/2}} \right\|_p^{2-\epsilon} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{2-\epsilon}{2}}} = \infty, \forall \epsilon > 0.$$

Logo,  $\left(\frac{e_j}{j^{1/2}}\right)_{n=1}^{\infty}$  é condicionalmente somável.

## 3.2 O Teorema de Dvoretzky-Rogers

O Teorema de Dvoretzky-Rogers é um importante resultado da Análise Funcional que garante a existência, em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita, de uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável, mostrando que o que ocorre no Exemplo 2.4 não é um privilégio de  $\ell_2$ , mas um fato comum a todo espaço de Banach de dimensão infinita. Os próximos três lemas, apesar de fazerem parte do contexto de dimensão finita, são peças fundamentais no que diz respeito a estabelecer o Teorema de Dvoretzky-Rogers.

**Definição 3.8.** Seja  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  de escalares. O *traço* de  $\mathbf{A}$  é o número

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

De forma análoga, se  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita,  $\beta$  uma base de

$V$  e  $T: V \rightarrow V$ , então o *traço* de  $T$  é o número

$$\operatorname{tr}(T) := \operatorname{tr}([T]_\beta).$$

que está bem definido pois  $\operatorname{tr}([T]_\beta)$  não depende da base.

**Exemplo 3.9.** Se  $P_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a projeção ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  sobre um subespaço seu de dimensão  $m \leq n$ , então  $\operatorname{tr}(P_m) = m$ .

Denotaremos por  $\mathbf{I}_n$  a matriz identidade de ordem  $n$ .

Os 3 lemas que virão serão fundamentais para a demonstração do Teorema de Dvoretzky-Rogers.

**Lema 3.10.** Se  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , então, dado  $\varepsilon \in \mathbb{K}$ , existe  $c_n(\varepsilon)$  tal que

$$\det(\mathbf{I}_n + \varepsilon \mathbf{A}) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + c_n(\varepsilon).$$

e  $c_n(\varepsilon)$  satisfaz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|c_n(\varepsilon)|}{|\varepsilon|} = 0.$$

**Prova.** Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Façamos indução em  $n$ . Para  $n = 2$ ,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{I}_2 + \varepsilon \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} \\ \varepsilon a_{21} & 1 + \varepsilon a_{22} \end{vmatrix} \\ &= (1 + \varepsilon a_{11})(1 + \varepsilon a_{22}) - \varepsilon^2 a_{12} a_{21} \\ &= 1 + \varepsilon(a_{11} + a_{22}) + \varepsilon^2(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \\ &= 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + c_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

é fácil ver que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|c_2(\varepsilon)|}{|\varepsilon|} = 0.$$

suponhamos, indutivamente, que o resultado seja válido para qualquer matriz de ordem  $n - 1$ . Dada uma matriz quadrada  $\mathbf{A}$  de ordem  $n > 2$ , usando o Teorema

de Laplace sobre determinantes, temos que

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{I}_n + \varepsilon \mathbf{A}) &= (1 + \varepsilon a_{11}) \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon a_{22} & \varepsilon a_{23} & \cdots & \varepsilon a_{2n} \\ \varepsilon a_{32} & 1 + \varepsilon a_{33} & \cdots & \varepsilon a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon a_{n2} & \varepsilon a_{n3} & \cdots & 1 + \varepsilon a_{nn} \end{vmatrix} + c_0(\varepsilon), \\ &= (1 + \varepsilon a_{11}) \det(\mathbf{I}_{n-1} + \varepsilon \mathbf{B}) + c_0(\varepsilon) \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{B}$  é a matriz quadrada de ordem  $n - 1$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e  $c_0$  satisfaz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|c_0(\varepsilon)|}{|\varepsilon|} = 0.$$

Da hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{I}_n + \varepsilon \mathbf{A}) &= (1 + \varepsilon a_{11}) (1 + \varepsilon \operatorname{tr}(\mathbf{B}) + c_{n-1}(\varepsilon)) + c_0(\varepsilon) \\ &= 1 + \varepsilon (a_{11} + \operatorname{tr}(\mathbf{B})) + \left[ \varepsilon^2 a_{11} \operatorname{tr}(\mathbf{B}) + c_{n-1}(\varepsilon) (1 + \varepsilon a_{11}) + c_0(\varepsilon) \right] \\ &= 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + c_n(\varepsilon). \end{aligned}$$

é evidente que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|c_n(\varepsilon)|}{|\varepsilon|} = 0.$$

Isso conclui a demonstração. ■

Para a demonstração do próximo lema, usaremos uma técnica conhecida como *argumento de perturbação*.

**Lema 3.11.** Seja  $E$  um espaço normado de dimensão  $2n$ . Existe um isomorfismo  $u: (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2) \rightarrow E$  de norma 1 tal que

$$\left| \operatorname{tr}(u^{-1} \circ v) \right| \leq 2n \|v\|,$$

para todo operador linear  $v: (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2) \rightarrow E$ .

**Prova.** Fixemos a base canônica para  $\mathbb{K}^{2n}$  e uma base qualquer para  $E$ . Dado um

operador linear  $v: (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2) \rightarrow E$ , por  $\det(v)$  entendemos o determinante da matriz de  $v$  com relação as bases fixadas. Como a função

$$|\det|: \mathcal{L}((\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2), E) \rightarrow [0, \infty)$$

é contínua e  $\{v \in \mathcal{L}((\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2), E) : \|v\| = 1\}$  é compacto, assim, podemos tomar  $u_0 \in \mathcal{L}((\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2), E)$ , de norma 1, tal que

$$|\det(u_0)| = \max \left\{ |\det(v)| : v \in \mathcal{L}((\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2), E) \text{ e } \|v\| = 1 \right\} > 0.$$

Como  $\det(u_0) \in \mathbb{K}$ , sabemos que, para algum  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ ,  $\det(u_0) = |\det(u_0)| e^{i\theta_0}$ . Definindo

$$\begin{aligned} u: (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2) &\rightarrow E \\ x &\mapsto e^{-i\theta_0/2n} u_0(x), \end{aligned}$$

Assim,  $u \in \mathcal{L}((\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2), E)$ ,  $\|u\| = \|u_0\| = 1$  e

$$\det(u) = \det(e^{-i\theta_0/2n} u_0) = (e^{-i\theta_0/2n})^{2n} \det(u_0) = e^{-i\theta_0} |\det(u_0)| e^{i\theta_0} = |\det(u_0)|.$$

Em particular,  $u$  é invertível e, portanto, um isomorfismo. Sejam  $0 \neq \varepsilon \in \mathbb{K}$  e  $v \in \mathcal{L}((\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2), E)$ . Da definição de  $u$ , se  $u + \varepsilon v \neq 0$ , então

$$\frac{|\det(u + \varepsilon v)|}{\|u + \varepsilon v\|^{2n}} = \left| \det\left(\frac{u + \varepsilon v}{\|u + \varepsilon v\|}\right) \right| \leq \det(u).$$

Daí,

$$\begin{aligned} |\det(u + \varepsilon v)| &\leq \det(u) \|u + \varepsilon v\|^{2n} \\ &\leq \det(u) (\|u\| + |\varepsilon| \|v\|)^{2n} = \det(u) (1 + |\varepsilon| \|v\|)^{2n}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

notemos que (3.6) também vale se  $u + \varepsilon v = 0$ . Seja  $\text{id}: (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2)$  a identidade. Como  $u$  é um isomorfismo, temos

$$\begin{aligned} |\det(u + \varepsilon v)| &= \left| \det\left(u \circ \left(\text{id} + \varepsilon (u^{-1} \circ v)\right)\right) \right| \\ &= \left| \det(u) \det\left(\text{id} + \varepsilon (u^{-1} \circ v)\right) \right| \\ &= \det(u) \left| \det\left(\text{id} + \varepsilon (u^{-1} \circ v)\right) \right|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por outro lado, do Lema 3.10, sabemos que

$$\det \left( \text{id} + \varepsilon \left( u^{-1} \circ v \right) \right) = \left( 1 + \varepsilon \operatorname{tr} \left( u^{-1} \circ v \right) + c_{2n}(\varepsilon) \right), \quad (3.8)$$

com

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|c_{2n}(\varepsilon)|}{|\varepsilon|} = 0.$$

Assim, de (3.6) e (3.7), segue que

$$\left| \det \left( \text{id} + \varepsilon \left( u^{-1} \circ v \right) \right) \right| \leq (1 + |\varepsilon| \|v\|)^{2n} \quad (3.9)$$

e, de (3.8), (3.9) e do Binômio de Newton, temos

$$\left| 1 + \varepsilon \operatorname{tr} \left( u^{-1} \circ v \right) + c_{2n}(\varepsilon) \right| \leq 1 + 2n |\varepsilon| \|v\| + r(\varepsilon),$$

onde

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|r(\varepsilon)|}{|\varepsilon|} = 0.$$

Da desigualdade triangular, temos

$$\left| 1 + \varepsilon \operatorname{tr} \left( u^{-1} \circ v \right) \right| - |c_{2n}(\varepsilon)| \leq 1 + 2n |\varepsilon| \|v\| + r(\varepsilon), \quad (3.10)$$

para todo  $\varepsilon \in \mathbb{K}, \varepsilon \neq 0$ .

Seja  $\theta_v \in [0, 2\pi)$  tal que  $\operatorname{tr} \left( u^{-1} \circ v \right) = |\operatorname{tr} \left( u^{-1} \circ v \right)| e^{i\theta_v}$ . Assim, em particular, se  $\varepsilon$  pertence ao segmento  $(0, e^{i\theta_v})$ , obtemos

$$\varepsilon \operatorname{tr} \left( u^{-1} \circ v \right) = |\varepsilon| e^{-i\theta} |\operatorname{tr} \left( u^{-1} \circ v \right)| e^{i\theta} = |\varepsilon| |\operatorname{tr} \left( u^{-1} \circ v \right)|. \quad (3.11)$$

De (3.10) e (3.11), segue que

$$|\varepsilon| |\operatorname{tr} \left( u^{-1} \circ v \right)| \leq 2n |\varepsilon| \|v\| + o(\varepsilon),$$

onde  $o(\varepsilon) = r(\varepsilon) + |c_{2n}(\varepsilon)|$ . Temos, então, que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(\varepsilon)}{|\varepsilon|} = 0.$$

Portanto,

$$|\operatorname{tr} \left( u^{-1} \circ v \right)| \leq 2n \|v\| + \frac{o(\varepsilon)}{|\varepsilon|}$$

e, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , segue o resultado. ■

**Lema 3.12.** Seja  $E$  um espaço vetorial normado de dimensão  $2n$ . Então, existem  $n$  vetores  $y_1, \dots, y_n$  em  $E$  tais que  $\frac{1}{2} \leq \|y_j\| \leq 1$  para todo  $j = 1, \dots, n$  e

$$\left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j \right\| \leq \left( \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

quaisquer que sejam os escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

**Prova.** consideremos  $u: (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2) \rightarrow E$  o operador obtido no Lema 3.11. Sendo  $P: (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2)$  é a projeção ortogonal de  $(\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2)$  sobre um subespaço de dimensão  $m \leq 2n$ , então, do Exemplo 3.9,

$$m = \text{tr}(P) = \text{tr}(u^{-1} \circ u \circ P) \leq 2n \|u \circ P\|. \quad (3.12)$$

Como  $\|u\| = 1$ , existe  $z_1 \in (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2)$  tal que  $\|z_1\| = 1$  e  $\|u(z_1)\| = 1$ . Seja  $P_1$  a projeção ortogonal de  $(\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2)$  sobre  $[z_1]^\perp$ . Como  $\dim([z_1]^\perp) = 2n - 1$ , de (3.12), temos

$$\|u \circ P_1\| \geq \frac{2n - 1}{2n}.$$

Neste caso, existe  $z_2 \in [z_1]^\perp$  tal que  $\|z_2\| = 1$  e

$$\|u(z_2)\| = \|u(P_1(z_2))\| \geq \frac{2n - 1}{2n}.$$

Denotando por  $P_2$  a projeção ortogonal de  $(\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2)$  sobre  $[z_1, z_2]^\perp$ , uma vez que  $\dim([z_1, z_2]^\perp) = 2n - 2$ , usando mais uma vez (3.12), obtemos

$$\|u \circ P_2\| \geq \frac{2n - 2}{2n}.$$

Neste caso, existe  $z_3 \in [z_1, z_2]^\perp$  tal que  $\|z_3\| = 1$  e

$$\|u(z_3)\| = \|u(P_2(z_3))\| \geq \frac{2n - 2}{2n}.$$

Após  $n$  aplicações sucessivas deste procedimento, obtemos  $n$  vetores ortonormais  $z_1, \dots, z_n \in (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2)$  tais que  $\|u(z_j)\| \geq \frac{2n - j + 1}{2n}$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ . Fazendo  $y_j = u(z_j)$ , observamos que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2n - j + 1}{2n} \leq \|y_j\| = \|u(z_j)\| \leq \|u\| \|z_j\| = 1,$$

para todo  $j = 1, \dots, n$ . Além disso, como  $\|u\| = 1$  e  $\{z_1, \dots, z_n\}$  é um conjunto

ortonormal, do Teorema de Pitágoras, concluímos que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j u(z_j) \right\| = \left\| u \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j \right) \right\| \\ &\leq \|u\| \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j \right\|_2 = \left( \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

para qualquer escolha de escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . ■

**Teorema 3.13. (Dvoretzky-Rogers, 1950)** *Seja  $X$  um espaço de Banach de dimensão infinita. Então, para qualquer sequência  $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$ , existe uma sequência incondicionalmente somável  $(x_n)_{n=1}^\infty$  em  $X$  tal que  $\|x_n\| = |a_n|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Em particular, se  $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2 \setminus \ell_1$ , então  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é incondicionalmente somável, mas não é absolutamente somável.*

**Prova.** Fixada a sequência  $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$ , seja  $(n_k)_{k=1}^\infty$  uma sequência crescente de inteiros positivos tais que

$$\left( \sum_{n \geq n_k} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{-k}, \quad (3.13)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $X$  é um espaço vetorial de dimensão infinita, para cada  $k \in \mathbb{N}$  podemos considerar um subespaço  $X_k$  de  $X$ , com  $\dim(X_k) = 2(n_{k+1} - n_k)$ .

O Lema 3.12 garante a existência de  $n_{k+1} - n_k$  vetores, que serão representados por

$y_{n_k}, y_{n_k+1}, \dots, y_{n_{k+1}-1}$ , todos com norma entre  $\frac{1}{2}$  e 1, tais que

$$\left\| \sum_{n=n_k}^N b_n y_n \right\| \leq \left( \sum_{n=n_k}^N |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

para todo  $N$  natural, com  $n_k \leq N \leq n_{k+1} - 1$ , e qualquer escolha de escalares  $b_{n_k}, \dots, b_N$ . Para  $j \geq n_1$ , façamos

$$x_j = \frac{a_j y_j}{\|y_j\|}.$$

Evidentemente,  $\|x_j\| = |a_j|$  para todo  $j \geq n_1$ . Notemos ainda que, para toda escolha de sinais  $\varepsilon_n = 1$  ou  $\varepsilon_n = -1$ , de (3.13) e (3.14),

$$\left\| \sum_{n=n_k}^N \varepsilon_n x_n \right\| = \left\| \sum_{n=n_k}^N \frac{\varepsilon_n a_n y_n}{\|y_n\|} \right\| \leq \left( \sum_{n=n_k}^N \frac{|\varepsilon_n|^2 |a_n|^2}{\|y_n\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left( \sum_{n=n_k}^N |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{-k+1}$$

para todo  $N$  natural, com  $n_k \leq N \leq n_{k+1} - 1$ . Observemos também que, se  $n_k <$

$n < m < n_{k+1}$ , fazendo  $b_{n_k} = \dots = b_{n-1} = 0$  e  $b_n = \varepsilon_n, \dots, b_m = \varepsilon_m$ , combinando mais uma vez (3.13) e (3.14),

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=n}^m \varepsilon_j x_j \right\| &= \left\| \sum_{j=n_k}^m b_j x_j \right\| = \left\| \sum_{j=n_k}^m \frac{b_j a_j y_j}{\|y_j\|} \right\| \\ &\leq \left( \sum_{j=n_k}^m \frac{|b_j|^2 |a_j|^2}{\|y_j\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left( \sum_{j=n_k}^m |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{-k+1}. \end{aligned}$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $k_0 = k_0(\varepsilon)$  um inteiro positivo tal que  $\sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k+1} < \varepsilon$ . Para  $m > n > n_{k_0}$ , existem um inteiro positivo  $t_1 \geq k_0$  e um inteiro não-negativo  $t_2$  de modo que

$$n_{t_1} \leq n \leq n_{t_1+1} - 1 \quad \text{e} \quad n_{t_1+t_2} \leq m \leq n_{t_1+t_2+1} - 1.$$

Se  $t_2 = 0$ , do que já fizemos,

$$\left\| \sum_{j=n}^m \varepsilon_j x_j \right\| \leq 2^{-t_1+1} < \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k+1} < \varepsilon.$$

Se  $t_2 > 0$ , então

$$\left\| \sum_{j=n}^m \varepsilon_j x_j \right\| \leq \left\| \sum_{j=n}^{n_{t_1+1}-1} \varepsilon_j x_j \right\| + \left\| \sum_{j=n_{t_1+1}}^{n_{t_1+2}-1} \varepsilon_j x_j \right\| + \dots + \left\| \sum_{j=n_{t_1+t_2}}^m \varepsilon_j x_j \right\| < \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k+1} < \varepsilon.$$

Pelo Critério de Cauchy para séries, temos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$  converge e, portanto,  $(x_n)_{n=n_1}^{\infty}$  é sinal somável. Do Teorema 2.6,  $(x_n)_{n=n_1}^{\infty}$  é incondicionalmente somável. Agora, para cada  $j = 1, \dots, n_1 - 1$ , tomando  $x_j \in X$  de modo que  $\|x_j\| = |a_j|$ , a demonstração está completa. ■

# Referências Bibliográficas

- [1] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO, E. TEIXEIRA, **Fundamentos de Análise Funcional**, segunda edição, SBM, Rio de Janeiro, 2015.
- [2] G. BOTELHO, **Séries Incondicionalmente Convergentes: de Dirichlet a Dvoretzky-Rogers**, Matemática Universitária, Junho, (2001) 103-111.
- [3] J. DIESTEL, H. JARCHOW, A. TONGE, **Absolutely Summing Operators**, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 43, 1995.
- [4] S. GALANOR, **Riemann's rearrangement Theorem**, National Council of Teachers of Mathematics, 1987.
- [5] E. LIMA, **Curso de Análise vol. 1**, décima quarta edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2017.d
- [6] M.S. MACPHAIL, **Absolute and unconditional convergence**, Bull. Am. Math. Soc 53 (1947) 121-123.
- [7] D. MAULDIN (ed.), **The Scottish Book**, Birkhauser, Boston, 1981.
- [8] D. PELLEGRINO, A. RAPOSO Jr, **Tópicos em Análise Funcional**, livro em construção.
- [9] D. PELLEGRINO, J. SILVA, **Macphail's Theorem Revisited**, Arch. Math. 117 (2021) 647-656.
- [10] B. RIEMANN, **Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe**, Gesammelte Mathematische Werke, 1867
- [11] K. TEIXEIRA, **Remarks on Hadamard matrices and a theorem of Macphail**. Linear Algebra Appl. 640 (2022), 1–5.