

Anderson Vinícius Dantas Marques Maia

**Efeitos Topológicos Devido a uma Deslocação
em Espiral em Sistemas Quânticos
Relativísticos e Não-Relativísticos**

João Pessoa-PB

2022

Anderson Vinícius Dantas Marques Maia

**Efeitos Topológicos Devido a uma Deslocação
em Espiral em Sistemas Quânticos Relativísticos e
Não-Relativísticos**

Tese de Doutorado apresentada ao programa
de Pós-Graduação em Física do Departamen-
to de Física da Universidade Federal da
Paraíba como requisito parcial para obtenção
do grau de Doutor em Física

Universidade Federal da Paraíba – UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física - PRPG
Departamento de Física – DF

Orientador: Dr. Knut Bakke Filho

João Pessoa-PB

2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M217e Maia, Anderson Vinícius Dantas Marques.
Efeitos topológicos devido a uma deslocação em
espiral em sistemas quânticos relativísticos e
não-relativísticos / Anderson Vinícius Dantas Marques
Maia. - João Pessoa, 2022.
90 f. : il.

Orientação: Knut Bakke Filho Bakke.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Deslocação em espiral. 3. Efeito
Aharonov-Bohm. 4. Níveis de Landau. 5. Quantização
Relativística de Landau. 6. Quantum Revivals. 7. Campo
Elétrico não Uniforme. 8. Ponto de Corte. 9. Efeitos de
Rotação. 10. Soluções Analíticas. 11. Equação de
Schrödinger. 12. Equação de Dirac. 13. Defeito
Topológico Linear. I. Bakke, Knut Bakke Filho. II.
Título.

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Anderson Vinícius
Dantas Marques Maia**, candidato ao Título de
Doutor em Física na Área de Física da Matéria
Condensada.

Aos onze dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e dois, às 09:00, reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física da Matéria Condensada, **Anderson Vinícius Dantas Marques Maia**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: Knut Bakke Filho, orientador e presidente da banca examinadora, Cleverson Filgueiras (UFLA), Herondy Francisco Santana Mota (UFPB), Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos (UFCEG), Humberto Belich Junior (UFES). Dando início aos trabalhos, o Prof. Knut Bakke Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "Efeitos Topológicos Devido a uma Deslocação em Espiral em Sistemas Quânticos Relativísticos e Não-Relativísticos". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado"**. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Bethyanne Leite Aragão, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **11 de fevereiro de 2022**.

Prof. Dr. Knut Bakke Filho
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Cleverson Filgueiras
PPGF/UFLA

Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
UFCEG

Prof. Dr. Humberto Belich Junior
UFES

Link da reunião:

<http://meet.google.com/czo-afxh-uoz>.

Bethyanne Leite Aragão

Para meus pais Antonio Marques Maia e Sônia Maria Dantas Marques.

Agradecimentos

Quero agradecer em primeiro lugar ao Prof. Knut Bakke Filho pela excelente orientação ao decorrer do desenvolvimento dos trabalhos durante o Doutorado.

Ao conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

Ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba (DF/UFPB) pelo acolhimento e suporte na realização deste trabalho. Assim como também, Seu Mariano que é responsável pela produtividade do DF com seu ótimo café.

Aos membros da banca por terem aceito participar da avaliação desta Tese de Doutorado.

Aos meus irmãos Leonardo Dantas Marques Maia e Marcos Alexandre Dantas Marques pelo grande apoio durante todos esses anos.

Também agradecer a todos que me deram forças durante esse período: Fernanda Ferreira, Clerisson Ramon, Igor Henrique, Suzana Rabêlo, Erinaldo Ferreira, Claudenice Ferreira, Matheus Alves, Matheus Paganelly, Antônio José, Helena de Albuquerque, Guacira Melo, João Victor Queiroga, Emanuel Wallison, Bugley Ramos, Fabiano Santos, Rafael Brito, Daniela Quirino, Gabriela Coutinho, Thiago Japa, Osmar Francisco, Ricardo (Bar Parangolé), Willdauany Cristina, Adriano Oliveira, amigos do DF e João Pessoa.

*“Onde o mundo deixa de ser palco de nossas esperanças
e desejos pessoais, onde o enfrentamos como seres livres
admirando, perguntando, observando, aí entramos
no reino da arte e da ciência.”
(Albert Einstein)*

Resumo

Neste trabalho, analisamos a influência do defeito topológico de deslocação em espiral em dois diferentes cenários, em primeiro lugar um sistema não-relativístico utilizando as equações de Schrödinger para uma partícula com carga na presença de um potencial do tipo *Hard-Wall*. Além disso, dois sistemas com deslocação em espiral na presença de um campo elétrico radial não uniforme, sendo um deles com um ponto de corte induzido pela topologia que produz autovalores de energia infinitamente degenerados. Assim como também, estudamos os níveis de Landau com e sem efeitos de rotação para uma carga pontual. Dessa forma, nessa primeira parte não-relativística mostramos que há casos em que existem análogos ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados e *quantum revivals*. Em seguida, investigamos a interação de um elétron relativístico com um campo magnético uniforme no espaço-tempo de deslocação em espiral. Bem como, o comportamento do campo de Dirac sujeito a um potencial do tipo *hard-wall*. Mostramos também, que tanto a rotação quanto a topologia do espaço-tempo impõem restrições aos valores da coordenada radial. Como resultados, demonstramos através da aproximação de Foldy-Wouthuysen que o limite não-relativístico dessas situações são consistentes com as soluções obtidas na primeira parte da tese.

Palavras-chave: Deslocação em Espiral. Defeito Topológico Linear. Efeito Aharonov-Bohm. Níveis de Landau. *Quantum Revivals*. Campo Elétrico não uniforme. Ponto de Corte. Efeitos de Rotação. Equação de Schrödinger. Soluções Analíticas. Quantização Relativística de Landau. Equação de Dirac.

Abstract

In this work, we analyse the influence of the topological defects, like a spiral dislocation in two different scenarios, firstly a non-relativistic system using the Schrödinger equation for a charged particle subject to a confining potential. Furthermore, two systems with spiral dislocation in the presence of a nonuniform radial electric field, one of them with a topology-induced cut-off point yields eigenvalues of energy which are infinitely degenerated. Besides, we study Landau levels with and without rotation effects for a point charge. Thus, in this first non-relativistic part we show that there are cases where an analog of the Aharonov-Bohm effect exists for bound states and quantum revivals. Next, we analyse the interaction of a relativistic electron with a uniform magnetic field in spiral dislocation. As well, the behaviour of the Dirac field subject to a hard-wall potential. We also show that both rotation and the topology of the spacetime impose a restriction on the values of the radial coordinate. As results, we demonstrate through the Foldy-Wouthuysen approximation that the non-relativistic limits of these situations are consistent with the solutions obtained in the first part of the thesis.

Keywords: Spiral dislocation. Linear topological defects. Aharonov–Bohm effect. Landau levels. Quantum revivals. Nonuniform electric field. Cut-off point. Rotating effect. Schrödinger equation. Analytical solutions. Relativistic Landau quantization. Dirac equation.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ilustração do processo de corta e cola da desclinação tipo-cunha (a) corte do cilindro em dois planos, (b) rotação da estrutura, (c) adição de material a parte em vazio do objeto (PUNTIGAM; SOLENG, 1997).	21
Figura 2 – As seis distorções de Volterra. Sendo de (a)-(c) tipo deslocações. E (d)-(f) tipo desclinações (PUNTIGAM; SOLENG, 1997).	22
Figura 3 – Ilustração do processo de desclinações positivas e negativas. (a) Um sólido cristalino com forma hexagonal, dividido em regiões de corte pelos planos, (b) o setor destacado é removido com ângulo $\phi/2\pi$, (c) juntando as extremidades, gerando o defeito topológico conhecido como desclinação positiva, (d) um sólido cristalino com forma hexagonal, dividido em regiões de corte pelos planos, (e) o setor destacado possui ângulo de $\phi/2\pi$ e (f) logo após é inserido um novo material na região que estava delimitada pelos planos (BAKKE, 2009).	22
Figura 4 – (a) Corte na secção reta do cilindro; (b) Seção reta do cilindro com deslocação em espiral, sendo C o contorno de integração para o vetor de Burgers $\mathbf{b}$; (c) Deslocação em espiral em três dimensões com vetor de Burgers perpendicular à linha de deslocamento (KATANAEV, 2005).	23
Figura 5 – (a) Arranjo experimental do efeito AB;(b) uma conta carregada em um anel circular por meio do qual passa um longo solenoide (GRIFFITHS, 1994).	79

Lista de abreviaturas e siglas

UFPB	Universidade Federal da Paraíba
PRPG	Programa de Pós-Graduação em Física
DF	Departamento de Física
CCEN	Centro de Ciências Exatas e da Natureza
AB	Aharonov-Bohm
FW	Foldy-Wouthuysen

Lista de símbolos

δ_j^i	A função delta de Kronecker
Δ	O operador de Laplace
ϵ_{ij}	O tensor de deformação no Cap. 2
σ_{ij}	O tensor de tensão no Cap. 2
λ_L	Os coeficientes de Lamé no Cap. 2
μ_S	A constante <i>shear modulus</i>
χ	O parâmetro relacionado ao defeito topológico em hélice
β	O parâmetro relacionado ao defeito topológico de deslocação em espiral
λ	A constante associada a distribuição de carga do campo elétrico não uniforme
$\hbar$	A constante de Planck sobre 2π
c	A velocidade da luz

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	DEFEITOS TOPOLÓGICOS	17
2.1	Introdução aos defeitos topológicos	18
2.2	Classificação de defeitos topológicos pelo processo de Volterra	21
2.3	Métrica do defeito topológico de deslocação em espiral	25
2.4	Introdução à geometria diferencial	27
2.5	Introdução aos referenciais locais	31
3	EFEITOS TOPOLÓGICOS DEVIDO A UMA DESLOCAÇÃO EM ESPIRAL EM SISTEMAS QUÂNTICOS NÃO-RELATIVÍSTICOS	33
3.1	Partícula com carga e sem spin com potencial do tipo <i>hard-wall</i>	35
3.2	Interação com campo elétrico radial não uniforme	39
3.3	Ponto de corte induzido pela topologia de deslocação em espiral	41
3.4	<i>Quantum revivals</i>	44
3.4.1	Efeitos de <i>quantum revivals</i> em sistema com ponto de corte induzido pelo defeito topológico	47
3.5	Quantização não-relativística de Landau	49
3.5.1	Quantização não-relativística de Landau com deslocação em espiral	50
3.5.2	Quantização não-relativística de Landau com deslocação em espiral e efeitos de rotação	53
4	DINÂMICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA EM SISTEMAS COM DEFEITO TOPOLÓGICO DE DESLOCAÇÃO EM ESPIRAL	57
4.1	Defeito topológico de deslocação em espiral na equação de Dirac com potencial do tipo <i>hard-wall</i>	58
4.2	Quantização relativística de Landau	64
4.3	Efeitos de rotação no campo de Dirac na presença de defeito topo- lógico de deslocação em espiral	68
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	72
5.1	Perspectivas	74
5.2	Publicações	75
	APÊNDICE A – O OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI	76

APÊNDICE B – O EFEITO AHARONOV-BOHM	79
APÊNDICE C – A APROXIMAÇÃO DE FOLDY-WOUTHUYSEN	82
APÊNDICE D – A DERIVADA COVARIANTE	84
REFERÊNCIAS	87

1 Introdução

Defeito Topológico é um tema amplamente estudado atualmente na literatura, principalmente nas áreas de matéria condensada e teoria de campos para diversos sistemas. Por exemplo, em cristais na teoria elástica esse aspecto da topologia com deformação está relacionado à presença de curvatura e torção. Além disso, essas estruturas podem modificar propriedades eletrônicas com aparição de efeitos quânticos associados nos sistemas com partícula carregada na presença campo magnético uniforme (FILGUEIRAS et al., 2016), anel quântico (FURTADO; BEZERRA; MORAES, 2001), referencial com rotação (PAGE, 1975) entre outros.

Por volta do ano de 1907, Volterra apresentou à comunidade acadêmica um trabalho sobre deformações elásticas, que são caracterizados através de um processo conhecido como *corta e cola*, originando duas grandes classificações de defeitos topológicos conhecidas como Desclinações e Deslocações (VOLTERRA, 1907). As deslocações são defeitos topológicos lineares associados à simetria de translação da rede cristalina com a existência de algumas características decorrentes do eixo que irá ocorrer a deformação e são denominados como: lateral, hélice e espiral (KLEINERT; HAGEN., 1989). No entanto, as desclinações são representadas pela simetria de rotação originando dois grupos menores, as positivas e as negativas.

Por outro lado, o modelo de Katanaev-Volovich é uma maneira prática de descrever defeitos topológicos lineares em sólidos por meio da geometria (KATANAEV; VOLOVICH, 1992). Desde então, alguns trabalhos têm mostrado como as deslocações e as desclinações modificam as propriedades eletrônicas dos sólidos (DEXTER; SEITZ, 1952). Isto é, um campo elétrico linear aplicado na direção radial tem sido considerado em estudos com partícula carregada, como o elétron em um meio elástico com desclinação, resultando em modificações nos níveis de energia, mais especificamente no número quântico associado ao operador de momento angular (WERNER; COLELLA, 1979). Nesta mesma linha de pesquisa, a quantização de Landau foi obtida para partículas neutras com momento de dipolo magnético permanente e com momento de dipolo elétrico induzido (WEI; WEI, 1995). Esse sistema também foi tratado com coordenadas não comutativas e em referenciais rotativos (SAIDI; SEDRA, 2019). Indo além, fases geométricas na dinâmica quântica foram propostas para partículas neutras com momento de dipolo elétrico induzido e momento de quadrupolo elétrico apresentando resultados claros da contribuição da topologia (CHEN, 1995).

O objetivo deste trabalho é analisar a dinâmica quântica de alguns sistemas na presença de defeito topológico de deslocação em espiral. Assim, investigamos os efeitos da

topologia de deslocação em espiral para um elétron confinado por um potencial do tipo *hard-wall*. Como também, analisamos os efeitos na interação de uma partícula carregada na presença de um campo elétrico radial não uniforme com a quantização de Landau. Não somente, avançamos na busca de efeitos de rotação no mesmo sistema com campo magnético uniforme e para algumas situações analisamos os *quantum revivals*¹.

Nas últimas décadas, alguns materiais descritos pelas equações de Dirac têm ganhado destaque na literatura. Exemplos desses matérias são Grafeno (NOVOSELOV A.K. GEIM, 2005), Fullerenos (GONZALEZ; VOZMEDIANO, 1992) e Isolantes Topológicos (HASAN; KANE, 2010). Utilizando o Grafeno como exemplo, efeitos quânticos como o Hall Quântico, o Aharonov-Bohm (AB) (ZHANG YAN-WEN TAN; KIM, 2005) e o paradoxo de Klein (KATSNELSON; GEIM, 2006) foram investigados recentemente. Particularmente, a interação de um Elétron no Grafeno com um campo magnético uniforme produz os níveis relativísticos de Landau (BUENO; CARVALHO, 2012). Do ponto de vista de alcançar estados ligados relativísticos, o confinamento de Elétrons a um ponto quântico ou um anel quântico em uma camada de Grafeno na presença de um campo magnético uniforme, também foi tratado em (NOVOSELOV A.K. GEIM, 2005). Além disso, foram analisadas algumas características desse material, como a magnetização e principalmente estudos utilizando abordagem de Katanaev-Volovich para descrever um conjunto de desclinações por meio de uma deslocação em espiral no Grafeno foram investigadas (BAKKE, 2019). Neste modelo, defeitos topológicos lineares em sólidos podem ser descritos usando a geometria diferencial. As informações sobre as deformações e tensões produzidas pelo defeito no meio elástico são descritas por grandezas geométricas, como a Métrica e o tensor de Curvatura.

Portanto, inspirados nesses estudos do Grafeno, no quarto capítulo analisamos a influência da topologia de um espaço-tempo com deslocação em espiral no campo de Dirac sujeito a um potencial do tipo *hard-wall*. Como também, estudamos efeitos de rotação no mesmo sistema. E por fim, encontramos soluções analíticas ao sistema com quantização relativística de Landau e que existe um análogo do efeito Aharonov-Bohm (AB) para estados ligados.

O segundo capítulo desta tese contém uma revisão dos conteúdos essenciais para compreensão do desenvolvimento matemático e teórico do trabalho. Dessa forma, fazemos uma breve introdução de defeitos topológicos em um meio elástico, relacionando as propriedades geométricas do espaço pela métrica. Posteriormente, introduzimos a técnica de Volterra para processos de classificação de alguns tipos de defeitos topológicos em meio elástico. Como também, mostramos a construção da métrica para o defeito topológico de deslocação em espiral. Logo depois, revisamos conceitos básicos de geometria diferencial,

¹ Propriedades que alguns sistemas possuem de retornarem as características iniciais de maneira total ou parcial, após um certo tempo. Para mais detalhes seção 3.4

como a derivada covariante de um tensor obedecendo a regra de Leibniz. E na última parte, definiremos uma base local não-coordenada e pelo princípio da Equivalência aplicamos transformação via tetradas para mudanças de bases. Em seguida, apresentamos alguns dos estudos desenvolvidos no capítulo 3, que descrevemos os sistemas não-relativísticos na presença de defeito topológico de deslocação em espiral para uma partícula carregada com potencial do tipo *hard-wall*, interação com campo elétrico radial não uniforme, análise do ponto de corte ² induzido, *quantum revivals* e também, a quantização não-relativística de Landau com e sem rotação. Além disso, no capítulo 4 desenvolvemos estudos relativísticos com deslocação em espiral no espaço-tempo na equação de Dirac com potencial do tipo *hard-wall*, quantização relativística de Landau, efeitos de rotação e aplicação da aproximação de Foldy-Wouthuysen (FW) para obter o limite não-relativístico em cada seção desse capítulo. Enfim, no capítulo 5 apresentamos nossas considerações finais, perspectivas e publicações em periódicos.

² Conhecido na literatura como *cut-off*

2 Defeitos Topológicos

Este capítulo tem o objetivo de preparar o leitor com as ferramentas que serão utilizadas ao longo da tese no estudo de defeitos topológicos em matéria condensada e sua ligação com a gravitação através da geometria diferencial e de conceitos de relatividade geral. Portanto, trata-se de um capítulo de revisão, para introduzir os conceitos básicos de defeitos topológicos, suas classificações dentro do processo de Volterra, a construção das métricas das respectivas topologias, assim como também, conteúdos na área de estudos de sistemas relativísticos, como geometria diferencial em espaço-tempo curvo e os referenciais locais através do processo de mudança de base via tetradas.

Dessa maneira, o capítulo está dividido da seguinte forma: na seção 2.1, introduzimos os conceitos básicos da métrica que compreende as propriedades do espaço, bem como a noção de distância e alteração no tensor métrico devido aos defeitos topológicos; na seção 2.2, apresentamos a técnica de Volterra no processo de classificação dos defeitos topológicos de deslocamentos e desclinações; na seção 2.3, deduzimos o tensor métrico e o elemento de linha do defeito topológico de deslocamento em espiral, que será presente em todos os sistemas no capítulo seguinte; na seção 2.4, revisamos os conceitos básicos de geometria diferencial que são essenciais no estudo da teoria de Maurer-Cartan para a gravitação; na seção 2.5, detalhamos a construção de referenciais locais e mudança de base via as componentes de tetradas no espaço-tempo curvo.

2.1 Introdução aos defeitos topológicos

Nesta seção de revisão tratamos de uma breve introdução à teoria de defeitos topológicos em um meio elástico, mais especificamente em cristais, definindo assim algumas propriedades geométricas do espaço através do conceito da métrica. Supondo o intervalo infinitesimal ds de dois pontos vizinhos do espaço x^i e $x^i + dx^i$ sendo que, para qualquer sistema de coordenadas a distância entre eles permanecerá constante¹, na forma

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j, \quad (2.1)$$

a equação (2.1) é conhecida como elemento de linha e a quantidade $g_{ij}(x)$ que define as propriedades geométricas do espaço, como sendo as componentes do tensor métrico $\mathbf{g}$, que possui simetria para os índices (i, j) , logo: $g_{ij} = g_{ji}$ e não-singular se $g = \det(g_{ij}) \neq 0$, portanto a inversa de g_{ij} é g^{ij} . Como também a relação $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$ é válida, tal que δ_i^k é função delta de Kronecker.

Alguns exemplos de elementos de linha, como $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, representa o sistema de coordenadas cartesiano. Como a métrica é definida para um espaço geométrico geral, sendo ele plano relativístico de Minkowski, curvo no espaço-tempo ou tridimensional para o caso mais usual do plano cartesiano. Essas componentes do tensor métrico são dispostas em uma matriz g_{ij} com sua inversa g^{ij} . Quando tratamos em Física da Matéria Condensada a geometria de alguns materiais é necessário estudar sua estrutura atômica, ou melhor, o arranjo periódico de átomos idênticos presentes em pontos de uma rede cúbica simples a uma distância L um do outro. A expressão para localização dos átomos pode ser dada pelo seguinte,

$$\mathbf{x}_n = L(n_1\hat{\mathbf{a}}_1 + n_2\hat{\mathbf{a}}_2 + n_3\hat{\mathbf{a}}_3), \quad (2.2)$$

tal que $\hat{a}_i$ são componentes de uma base ortonormal e n_i são números inteiros. Que representa a rede sólida através da métrica Euclidiana $\delta_{ij} = \text{diag}(+++)$. Até então, a descrição representa um material ideal, simétrico e com suas características bem representadas pela geometria usual. Porém, se forças externas são aplicadas sobre a rede, isto irá criar uma deformação na estrutura e consequentemente a descrição matemática necessitará de uma mudança. A nova posição dos átomos do ponto $\mathbf{x}_n$

$$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}'_n = \mathbf{x}_n + \mathbf{u}_n(x). \quad (2.3)$$

Na descrição da teoria elástica de uma rede cristalina, os átomos estão localizados em cada ponto da rede cúbica com L representando cada aresta que separa os átomos da

¹ Adotando a *convenção de Einstein*, os índices que se repetem nas equações representam uma soma sobre os mesmos.

estrutura. Logo, podemos considerar os limites em que $L \rightarrow 0$, obtendo uma representação do contínuo, a definição do campo vetorial de deslocamento, $u_i(x)$, como:

$$x'_i = x_i + u_i(x). \quad (2.4)$$

A representação da distância infinitesimal entre dois pontos vizinhos da rede, pode ser expressa da forma, $dx'_i = dx_i + du_i$, e substituindo $du_i = \partial_j u_i dx_j$ para chegar na relação²

$$dx'_i = dx_i + \partial_j u_i dx_j. \quad (2.5)$$

O comprimento entre os dois pontos pode ser representado por,

$$dL' = \left(dL^2 + 2\epsilon_{ij} dx_i dx_j \right)^{1/2}, \quad (2.6)$$

com o tensor de deformação que é dado pela expressão,

$$\epsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad (2.7)$$

para uma aproximação linear o termo $\partial_j u_i$ tende a zero. No caso em questão, as forças de curto alcance atuando sobre pontos vizinhos da distribuição periódica da rede cria uma alteração no meio. Portanto, pode-se definir a energia elástica através da variação da estrutura criada pelas forças resultantes. Assim, a densidade de energia elástica pode ser representada pela aproximação de ordens mais baixas,

$$e(x) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}, \quad (2.8)$$

sendo c_{ijkl} o tensor de elasticidade, que possui índices simétricos para permutações $i \longleftrightarrow j$, $k \longleftrightarrow l$ e $ij \longleftrightarrow kl$. Porém, se o tensor de deformação ϵ_{ij} for modificado por termos como $\delta\epsilon_{ij}$, então a densidade de energia será alterada. Assim, pode-se definir o tensor de tensão como (KLEINERT; HAGEN., 1989):

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{\delta e}{\delta \epsilon_{ij}} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (2.9)$$

podemos escrever σ_{ij} para um meio isotrópico na forma $\sigma_{ij} = 2\mu_S \epsilon_{ij} + \lambda_L \delta_{ij} \epsilon_{kl}$, onde μ_S e λ_L são as constantes conhecidas como *shear modulus* e constante de Lamé respectivamente.

² Observe que a convenção de Einstein propriamente dita, leva em consideração a soma por índices contravariantes com covariantes. Neste caso onde os termos são covariantes é permitido soma, pois, a métrica é unitária e diagonal (métrica euclidiana). Consequentemente, utilizando a álgebra de levantamento e abaixamento de índices pelo tensor métrica, não irá causar qualquer alteração na expressão.

Agora, levando em consideração $f_i(\mathbf{x})$ como sendo uma densidade de forças produzidas por uma fonte externa que atua sobre um sólido. Para calcular o trabalho realizado sobre um elemento de volume, podemos representar $\omega(\mathbf{x}) = -f_i(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x})$. O termo negativo vem da resistência do material ao deslocamento $u_i(\mathbf{x})$. Assim, podemos calcular a força total que atua sobre o sistema levando em consideração a densidade de energia elástica da distribuição periódica,

$$F_T = \int [e(\mathbf{x}) + \omega(\mathbf{x})] d^3x, \quad (2.10)$$

quando a energia total é minimizada em relação a variação $\delta u(\mathbf{x})$ obtém-se o estado de equilíbrio, levando em consideração uma distorção na rede cristalina, isto é,

$$\int [\partial_i(\delta u_j)\sigma_{ij} - f_i\delta u_j] d^3x = 0, \quad (2.11)$$

o primeiro termo da equação pode ser escrito como:

$$\int [\partial_i(\delta u_j)\sigma_{ij} - f_i\delta u_j\partial_i\sigma_{ij}] d^3x - \int f_i\delta u_j d^3x = 0. \quad (2.12)$$

Além disso, aplicando o teorema de Gauss obtemos a seguinte expressão,

$$\int \sigma_{ij}\delta u_i dS_i - \int (\partial_i\sigma_{ij} + f_i)\delta u_j d^3x = 0. \quad (2.13)$$

Em resumo, encontramos as equações de Euler-Lagrange para a elasticidade linear, já que $\delta u_i \rightarrow 0$ no infinito, podendo ser descartada a integral de superfície. Assim, para um ponto fixo do sólido $\mathbf{x}$ que $\partial_i\sigma_{ij}(\mathbf{x}) + f_i(\mathbf{x}) = 0$, que carrega o sentido físico para as componentes: σ_{i1} , σ_{i2} e σ_{i3} . Sendo σ_{ij} elementos de força por unidade de área, que é aplicada em elementos de superfícies dS_i . O ponto de encontro da geometria riemanniana com a teoria da elasticidade ocorre quando considerações de transformações infinitesimais que leva um ponto $x^{\mu'}$ para x^μ no espaço-tempo,

$$x^{\mu'} = x^\mu - \xi^\mu(x), \quad (2.14)$$

tal que, a o tensor métrico $g_{ij}(x)$ pode ser escrita como:

$$g_{ij}(x) = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \delta_{kl} \approx \delta_{ij} - \partial_i u_j - \partial_j u_i = \delta_{ij} - 2\epsilon_{ij}. \quad (2.15)$$

Dessa forma a descrição de deformações em redes cristalinas através do tensor métrico provindo da geometria diferencial é possível. Desenvolvida por Katanaev e Volovich, essa aproximação linear pode simular defeitos correspondendo a uma curvatura singular, torção ou com a ocorrência de ambos (KATANAEV; VOLOVICH, 1992).

2.2 Classificação de defeitos topológicos pelo processo de Volterra

Esta seção de revisão faz uma breve introdução da técnica de Volterra sobre o processo de classificação de alguns tipos específicos de defeitos topológicos e abordaremos a descrição das deslocamentos espirais em meios elásticos. Em primeiro lugar, estes métodos desenvolvidos por ele foram para o contexto da teoria da elasticidade e posteriormente surgiram inúmeros estudos em diversas estruturas, como sólidos e cristais. Assim, por volta do ano de 1907, Volterra (1860-1940) publicou um trabalho sobre deformações elásticas de múltiplas conexões em objetos sólidos tridimensionais, que são caracterizados conceitualmente através de um processo conhecido como *Corta e Cola* (VOLTERRA, 1907).

Um cilindro oco por exemplo, na teoria elástica pode ser cortado por dois planos paralelos, neste caso, o ângulo inicial entre eles é zero $\phi = 0$ e levando em consideração que as coordenadas utilizadas são as cilíndricas (r, φ, z) , podemos separar os planos criando um ângulo diferente de zero. Logo após, um material é adicionado na região da abertura entre os planos, originando uma nova geometria. Por fim, o processo de corta e cola que para esta situação é caracterizado como uma desclinação Fig. 1.

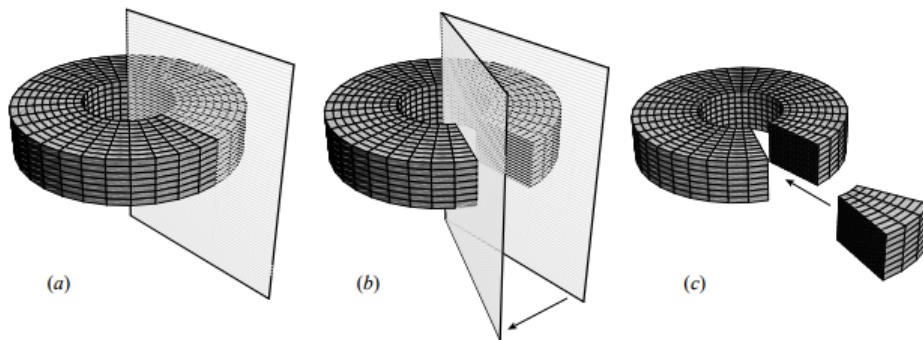


Figura 1 – Ilustração do processo de corta e cola da desclinação tipo-cunha (a) corte do cilindro em dois planos, (b) rotação da estrutura, (c) adição de material a parte em vazio do objeto (PUNTIGAM; SOLENG, 1997).

As deslocamentos são defeitos topológicos lineares associados à simetria de translação de rede cristalina. Em cristais por exemplo, devem satisfazer a invariância translacional, assim, os átomos da rede nas duas superfícies do corte podem ser enfileirados apenas se o deslocamento for uma operação que satisfaça a simetria translacional na rede. E para esse grupo, de acordo com a Fig. 2, estão classificados pelos tipos: Fig. 2a Borda/Espiral; Fig. 2b Borda; Fig. 2c Hélice. Assim, os defeitos de translações perpendiculares a um eixo ao longo das superfícies de corte, são conhecidos como deslocamento tipo-lateral Fig. 3b, e chamados de deslocamento tipo-hélices quando os defeitos de translações são paralelas ao eixo definido pelas superfícies de cortes Fig. 2c.

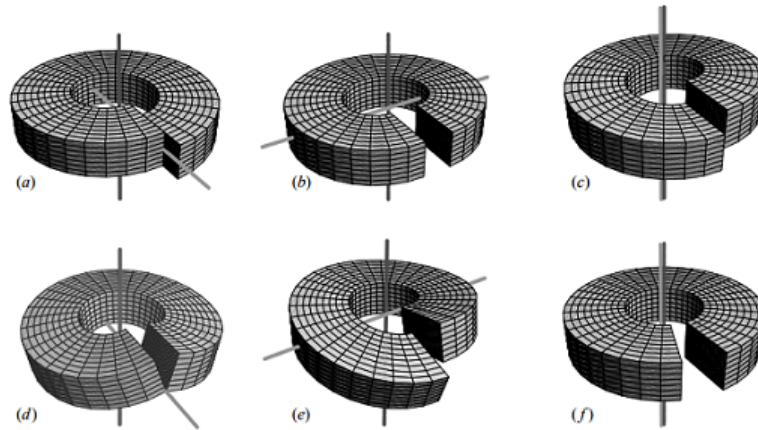


Figura 2 – As seis distorções de Volterra. Sendo de (a)-(c) tipo deslocações. E (d)-(f) tipo desclinações (PUNTIGAM; SOLENG, 1997).

Por outro lado, as desclinações são defeitos topológicos associados à simetria de rotação na rede cristalina e existe atualmente dois grupos de classificações. O grupo das desclinações positivas: Quando efetuado o *Corte* de um certo material e em seguida retira-se uma região e cola as regiões delimitadas pelos planos iniciais. E a região do ângulo no espaço criado onde havia o pedaço retirado é chamado de ângulo de déficit, veja na Fig. 3 que descreve esse processo nos itens Fig. 3a, Fig. 3b e Fig. 3c. Analogamente, as desclinações negativas representa o outro grupo que são caracterizados quando o espaço criado pelo processo de corta é introduzido um outro material, como podemos ver na Fig. 3 nos itens Fig. 3d, Fig. 3e e Fig. 3f.

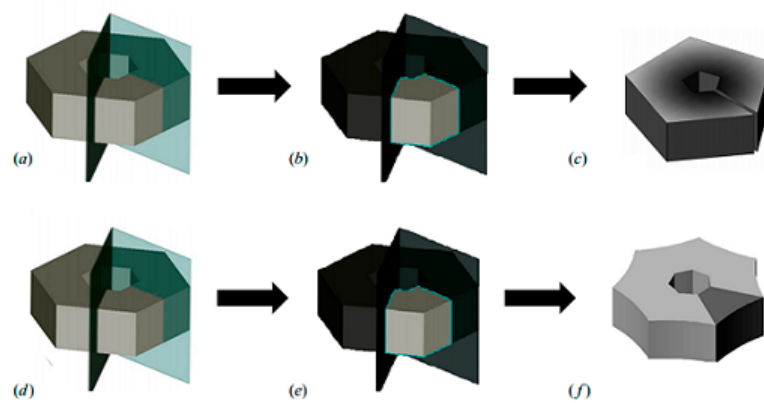


Figura 3 – Ilustração do processo de desclinações positivas e negativas. (a) Um sólido cristalino com forma hexagonal, dividido em regiões de corte pelos planos, (b) o setor destacado é removido com ângulo $\phi/2\pi$, (c) juntando as extremidades, gerando o defeito topológico conhecido como desclinação positiva, (d) um sólido cristalino com forma hexagonal, dividido em regiões de corte pelos planos, (e) o setor destacado possui ângulo de $\phi/2\pi$ e (f) logo após é inserido um novo material na região que estava delimitada pelos planos (BAKKE, 2009).

A princípio, vamos supor a seção reta de um cilindro de raio R para representação do defeito topológico de deslocação em espiral. Assim, utilizando os conceitos de deslocação que são descritos pelo processo de corta e cola de Volterra, uma parte é retirada do plano desde a origem até a borda do eixo x^2 , no ponto $(x^1 = 0, x^2 = R, x^3 = 0)$ e também na região superior $(x^2 > 0, x^1 > 0)$ como é mostrado na Fig. 4a. Em seguida é necessário colar as partes separadas Fig. 4b.

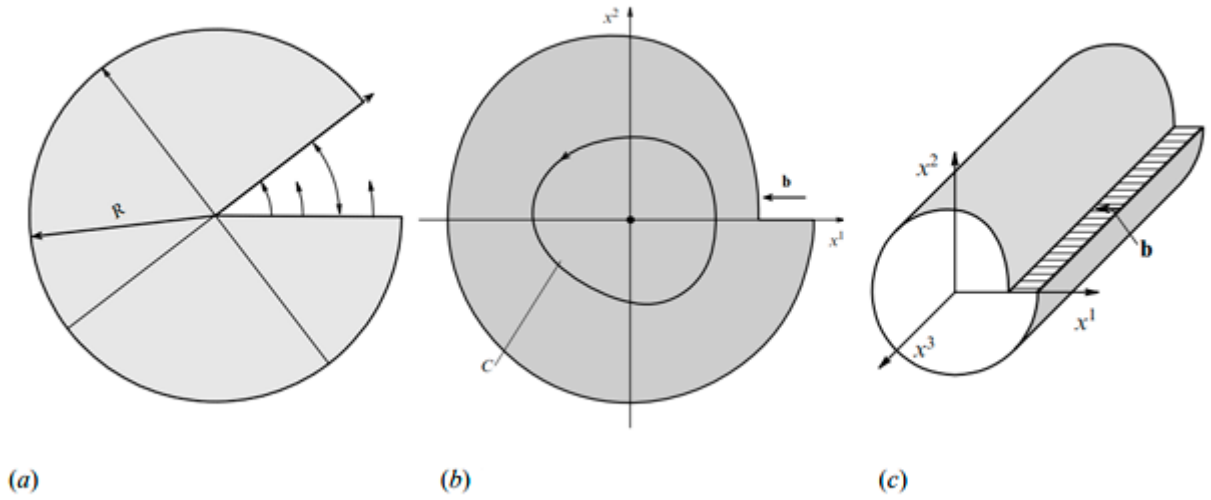


Figura 4 – (a) Corte na secção reta do cilindro; (b) Seção reta do cilindro com deslocação em espiral, sendo C o contorno de integração para o vetor de Burgers $\mathbf{b}$; (c) Deslocação em espiral em três dimensões com vetor de Burgers perpendicular à linha de deslocamento (KATANAEV, 2005).

Nas deformações dessa natureza em cristais, o meio considerado é contínuo e com a propriedade que em uma região circular em qualquer contorno fechado C que circula a linha de deslocamento x^3 , o vetor de deformação elástico $\mathbf{u}$ recebe um aumento definido pelo vetor de Burgers $\mathbf{b}$, igual a um dos períodos da rede. Essa propriedade é representada pela equação:

$$\oint_C dx^k \partial_k u^i(x) = - \oint_C dx^k \partial_k y^i(x) = -b^i, \quad (2.16)$$

sendo C um contorno fechado que envolve o eixo x^3 , como é mostrado na Fig. 4b.

Não apenas, a Fig. 4c representa a Deslocação linear de borda em outra perspectiva, com um cilindro representado em três dimensões e podemos visualizar como seria a geometria nesse caso. Levando em consideração a propriedade da Eq. (2.16), a presença desse defeito topológico o vetor de Burgers pode não ser constante no corte. Para a

deslocação de borda, ele varia de zero a algum valor constante b conforme ele se move na direção radial.

Uma outra deslocação pode ser feita sem precisar colar, apenas girando $\pi/2$ em torno do eixo x^3 . Este exemplo mostra que uma deslocação é caracterizada não pela superfície de corte, mas pela linha de deslocamento e o vetor de Burgers. Do ponto de vista topológico, um meio que contém várias deslocações ou mesmo um número infinito delas é o espaço euclidiano. Em contraste com o caso das deformações elásticas, o vetor deslocamento na região de deslocação não é mais uma função suave devido à presença da superfície de corte. Ao mesmo tempo assumimos que as derivadas parciais do vetor $\partial_j u^i$ são funções suaves na superfície de corte.

Essa suposição é justificada fisicamente porque essas derivadas definem o tensor de deformação ϵ_{ij} . Por sua vez, as derivadas parciais do tensor de deformação devem existir e ser funções suaves no equilíbrio, exceto possivelmente no eixo de deslocação, porque caso contrário as equações de equilíbrio não são satisfeitas.

$$\begin{aligned}\partial_j \sigma^{ji} + f^i &= 0, \\ \sigma^{ij} &= \lambda \delta^{ij} \epsilon_k^k + 2\mu \epsilon^{ij}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Assumindo que a métrica e as tetradas são funções suaves em todo o espaço, exceto aos eixos de deslocação, já que o tensor de deformação define a métrica induzida. Portanto, vimos o processo de corta e cola de Volterra e os tipos de defeitos topológicos de deslocações, assim como também, de desclinações que serão fundamentais para compreensão dos cálculos e resultados dos próximos capítulos.

2.3 Métrica do defeito topológico de deslocação em espiral

Esta seção de revisão faz uma breve introdução da construção da métrica do defeito topológico de deslocação em espiral. Em primeiro lugar, o defeito topológico naturalmente muda a geometria intrínseca de um corpo. Como as deslocações levam a uma alteração na métrica do material, começamos por introduzir o campo de deformação local assim como descrito no trabalho *Material metric, connectivity and dislocations* (VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005), como $e_j^i(x^j)$, que é dito ser um campo de deslocamento se $\nabla \times \mathbf{e}^i \neq 0$. Neste caso, sendo $\mathbf{e}^i$ o campo de deformação local com as componentes e_j^i . Tal que, x^i representa as coordenadas na posição inicial e x'^i para posições posteriores em um tempo qualquer. Para ds sendo o comprimento do elemento dx'^i na presença de um campo de deslocamento, isto é, a distância ds^2 entre dois pontos próximos no espaço deslocado é

$$ds^2 = dx'^k dx'^k = e_i^k e_j^k dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.18)$$

sendo g_{ij} as componentes do tensor métrico do domínio material na presença de $\mathbf{e}^k$. Consequentemente a métrica do corpo, em termos de seus componentes covariantes g_{ij} na presença do campo de deslocamento é

$$g_{ij} = e_i^k e_j^k = \begin{pmatrix} 1 + e_1^2 e_1^2 & e_1^2 e_1^1 & 0 \\ e_1^2 e_1^1 & 1 + e_2^1 e_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

As deslocações em forma de espiral são retratadas com simplicidade em sistemas de coordenadas cilíndricas com uma métrica $\mathbf{g}$, onde

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Juntando o deslocamento de borda de um círculo formando uma espiral, pode ser representado nas duas bases pela expressão:

$$\begin{pmatrix} dr' \\ d\varphi' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \\ dz \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

sendo β o parâmetro relacionado ao vetor de Burgers que representa o defeito topológico de deslocação em espiral. Logo após, examinamos a distorção de uma curva circular $r = \text{constante}$, então $dr = 0$, no plano $z = \text{constante}$. Com isso, a equação (2.21)

$$dr' = \beta d\varphi, \quad d\varphi' = d\varphi, \quad dz' = dz = 0, \quad (2.22)$$

que resulta em,

$$\varphi' = \varphi, \quad z' = z, \quad r'(\varphi) = \int_0^\varphi \beta(\varphi, r_0) d\varphi + r_0. \quad (2.23)$$

A equação (2.23) mostra que a curva circular é deformada em uma espiral pelo campo de deslocamento. Tal que, a forma precisa da espiral é dependente da forma da função $\beta(r, \varphi)$. Em resumo, a métrica do campo de deslocamento agora tem a forma:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 \\ \beta & \beta^2 + r^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Neste caso, o elemento de linha correspondente é dado por:

$$ds^2 = dr^2 + 2\beta dr d\varphi + (\beta^2 + r^2) d\varphi^2 + dz^2. \quad (2.25)$$

Descrevendo um meio elástico que contém uma deslocação em espiral, que corresponde à distorção de um círculo em uma espiral. Esses defeitos topológicos são descritos pelo elemento de linha acima.

2.4 Introdução à geometria diferencial

Assim como nas outras seções desse capítulo de revisão, vamos fazer uma breve introdução dos conceitos básicos de geometria diferencial para aplicação na teoria de Maurer-Cartan que serão utilizados para resolver sistemas no espaço-tempo curvo levando em consideração as equações de Dirac no Cap. 4. Dessa forma, como já vimos em seções anteriores, para um espaço descrito pelo elemento de linha $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$, a derivada covariante³ de um tensor (k, l) para outro tensor $(k, l + 1)$ obedecendo a regra de Leibniz

$$\nabla(T \otimes V) = \nabla T \otimes V + T \otimes \nabla V, \quad (2.26)$$

assim, o produto vetorial de dois tensores T e V devem ser independentes do sistema de coordenadas. Dessa forma, o operador ∇ deve ser escrito como a soma das derivadas parciais ∂_μ somado a termos de correções correspondentes as transformações lineares do sistema de coordenadas, conhecido como *conexão afim* e dado por um conjunto de matrizes $n \times n$, sendo n a dimensão do espaço-tempo. A derivada covariante pode ser escrita como um vetor $\tilde{V} = V^\nu \hat{e}_\nu$, assim,

$$\nabla_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} V^\alpha, \quad (2.27)$$

o termo $\Gamma^\nu_{\mu\alpha}$ é a conexão afim. Podemos obter os termos da *conexão afim* considerando a métrica constante, $\nabla_\alpha g_{\mu\nu}(x) = 0$, que resulta na equação,

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\beta_{\lambda\mu} g_{\beta\nu} - \Gamma^\beta_{\lambda\nu} g_{\mu\beta} = 0. \quad (2.28)$$

Portanto, se a equação (2.28) for válida, a conexão afim é uma conexão compatível com a métrica, que permite permutações cíclicas nos índices da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma^\beta_{\mu\nu} g_{\beta\lambda} - \Gamma^\beta_{\mu\lambda} g_{\nu\beta} &= 0, \\ \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma^\beta_{\nu\lambda} g_{\beta\mu} - \Gamma^\beta_{\nu\mu} g_{\lambda\beta} &= 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

combinando a equação (2.28) e a Eq. (2.29),

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \left(\Gamma^\beta_{\mu\nu} + \Gamma^\beta_{\nu\mu}\right) g_{\beta\lambda} + \left(\Gamma^\beta_{\lambda\mu} - \Gamma^\beta_{\mu\lambda}\right) g_{\beta\nu} + \left(\Gamma^\beta_{\lambda\nu} - \Gamma^\beta_{\nu\lambda}\right) g_{\beta\mu} = 0. \quad (2.30)$$

Podemos definir agora,

³ Visto que nessas condições o espaço usual deixa de ser euclidiano, nesta seção vamos respeitar os índices covariantes e contravariantes na soma de Einstein.

$$T^\beta_{\lambda\mu} \equiv 2\Gamma^\beta_{[\lambda\mu]} = \Gamma^\beta_{\lambda\mu} - \Gamma^\beta_{\mu\lambda}; \quad \Gamma^\beta_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (\Gamma^\beta_{\mu\nu} + \Gamma^\beta_{\nu\mu}), \quad (2.31)$$

assim, a conexão compatível com a métrica pode ser escrita em termos das componentes simétricas e antissimétricas,

$$\Gamma^\beta_{\mu\nu} = \Gamma^\beta_{(\mu\nu)} + \Gamma^\beta_{[\mu\nu]} = \left\{ \begin{smallmatrix} \beta \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} + K^\beta_{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

o termo $\left\{ \begin{smallmatrix} \beta \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$ são os símbolos de Christoffel e definidos como,

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \beta \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \quad (2.33)$$

o segundo termo $K^\beta_{\mu\nu}$ é o tensor de contorção:

$$K^\beta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T^\beta_{\mu\nu} - T^\beta_{\nu\mu} - T^\beta_{\mu\nu}). \quad (2.34)$$

O tensor de torção $T^\beta_{\mu\nu}$ é antissimétrico nos dois últimos índices, enquanto o tensor de contorção é antissimétrico nos dois primeiros. Dessa forma, a derivada covariante de um vetor no espaço-tempo curvo e na presença de torção fica,

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \mu\alpha \end{smallmatrix} \right\} V^\alpha + K^\nu_{\mu\alpha} V^\alpha. \quad (2.35)$$

Porém, o tensor de torção pode ser escrito em termos de três componentes irredutíveis. O primeiro é o vetor de traço $T_\mu = T^\beta_{\mu\beta}$ e o segundo é o vetor azial $S^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta\nu\mu} T_{\beta\nu\mu}$ e o terceiro é o tensor $q_{\beta\nu\mu}$ (satisfaz a condição $q^\beta_{\mu\beta} = 0$ e $\epsilon^{\alpha\beta\nu\mu} q_{\beta\nu\mu} = 0$). Devido os termos anteriores podemos escrever o tensor de torção como:

$$T_{\beta\nu\mu} = \frac{1}{3} (T_\nu g_{\beta\mu} - T_\mu g_{\beta\nu}) - \frac{1}{6} \epsilon_{\beta\nu\mu\gamma} S^\gamma + q_{\beta\nu\mu}. \quad (2.36)$$

A decomposição do tensor de torção em suas componentes irredutíveis não será tão útil para nosso trabalho, porém serve como extensão dos estudos para análise das fases geométricas no espaço-tempo curvo e com torção. A princípio, o transporte paralelo de um vetor $\bar{V} = V^\nu \hat{e}_\nu$ ao longo de uma curva $x^\mu(\gamma)$ pode ser definido caso a derivada covariante deste vetor ao longo desta curva seja nula,

$$\partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} V^\alpha = 0. \quad (2.37)$$

Uma das características do transporte paralelo é quando dois vetores $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ transportados ao longo de uma curva γ o produto interno entre esses dois vetores permanece constante ao longo da curva, ou seja,

$$\frac{d}{d\gamma}(g_{\mu\nu}X^\mu Y^\nu) = \left(\frac{d}{d\gamma}g_{\mu\nu}\right)X^\mu Y^\nu + g_{\mu\nu}\left(\frac{d}{d\gamma}X^\mu\right)Y^\nu + g_{\mu\nu}X^\mu\left(\frac{d}{d\gamma}Y^\nu\right) = 0, \quad (2.38)$$

usando a regra de Leibniz e considerando $\frac{d}{d\gamma} = \frac{dx^\alpha}{d\gamma}\partial_\alpha$.

Vamos observar o transporte paralelo do vetor $\bar{V} = V^\mu \hat{e}_\mu$ ao longo da direção de $\bar{A} = A^\mu \hat{e}_\mu$, em seguida na direção $\bar{B} = B^\mu \hat{e}_\mu$ e retornando ao longo das direções $\bar{A} = A^\mu \hat{e}_\mu$ e $\bar{B} = B^\mu \hat{e}_\mu$ ao ponto inicial, com o objetivo de encontrar o tensor de Riemann.

Assim, o vetor $\bar{V}$ varia em relação a sua configuração dada por $\delta V^\mu = R^\mu_{\nu\alpha\beta} V^\nu A^\alpha B^\beta$, onde $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$ é o tensor de Riemann ou tensor de curvatura e é antissimétrico em seus dois últimos índices $R^\mu_{\nu\alpha\beta} = -R^\mu_{\nu\beta\alpha}$. É necessário observar a forma como o vetor varia em relação a configuração inicial pela derivada covariante. Assim, a diferença entre o transporte paralelo nas direções de $\bar{A}$ e $\bar{B}$ e o retorno é a definição do operador comutador de duas derivadas covariantes, logo:

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \\ [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho &= \left(\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\beta} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\beta} \right) V^\beta - 2\Gamma^\lambda_{[\mu\lambda]} \nabla_\lambda V^\rho, \end{aligned} \quad (2.39)$$

podemos expressar o tensor de Riemann e o tensor de torção na forma,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho_{\lambda\mu\nu} V^\lambda - T^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\rho. \quad (2.40)$$

E comparando as expressões das equações (2.39) e $A^\mu_\nu(\gamma) = \{\frac{\mu}{\nu\alpha}\} dx^\alpha/d\gamma$, o tensor de Riemann pode ser escrito em relação as conexões afim⁴,

$$R^\rho_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\beta} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\beta}. \quad (2.41)$$

Nesse sentido, podemos fazer uma correlação entre defeitos topológicos e a geometria diferencial. Devido a aproximação linear, Katanaev e Volovich desenvolveram um método com o intuito de descrever os defeitos topológicos no limite do contínuo através da geometria diferencial (KATANAEV; VOLOVICH, 1992). Eles definiram que os defeitos topológicos são produzidos por dois tipos de fontes, os defeitos gerados pela curvatura do espaço-tempo têm como fonte o tensor energia-momento e são chamadas de *desclinações* enquanto que os gerados pela presença de torção no espaço-tempo têm o momento angular de spin como fonte e conhecidos como *deslocações*.

Os estudos apresentados nesta tese foram feitos com defeitos topológicos do tipo deslocação, em específico a deslocação em espiral. Portanto, Katanaev e Volovich elaboraram quatro hipóteses resolvendo as equações de Einstein para encontrar o tensor métrico

⁴ O desenvolvimento matemático presente nesta seção foi aplicado de forma resumida, para mais detalhes de como cada termo é amplamente descrito buscar na referência (CARROL, 2003)

correspondente a uma deslocação ou desclinação ([KATANAEV; VOLOVICH, 1992](#)). Como nosso trabalho tem como objetivo analisar diversos sistemas na presença de deslocação, a solução que descreve esse tipo de defeito topológico é quando $R^\rho_{\lambda\mu\nu} = 0$ e $T^\rho_{\mu\nu} \neq 0$. Dessa maneira, através da ação de Einstein-Hilbert podemos usar o princípio da mínima ação,

$$\mathcal{L} = -k \int (T^{\mu\nu}_{disloc} + T^{\mu\nu}_{discl}) g_{\mu\nu} dx^3, \quad (2.42)$$

sendo $T^{\mu\nu}_{disloc}$ e $T^{\mu\nu}_{discl}$ os termos geradores das deslocações e desclinações respectivamente ([CARROL, 2003](#)). Agora podemos definir parte do nosso sistema levando em consideração o defeito topológico de deslocação em espiral nas equações de Dirac.

2.5 Introdução aos referenciais locais

Enfim, nesta última seção de revisão vamos fazer uma breve introdução aos referenciais locais e as mudanças de bases via as componentes do campo de tetradas no espaço-tempo curvo através do princípio da equivalência. Lembrando que para esta parte em diante os índices latinos a, b, c vão representar as bases locais $(0, 1, 2, 3)$ no espaço de Minkowski, enquanto os gregos μ, ν, α os índices do espaço-tempo (t, r, φ, z) .

Normalmente definimos o estado de vácuo no espaço-tempo de Minkowski, devido ao fato de ser invariante dentro do grupo de Poincaré e com seus observadores localizados em referenciais inerciais. Assim, uma base coordenada é aquela para a qual os vetores de base são dados por $e_a = \partial/\partial x^a$. Com exceção das coordenadas cartesianas, uma base de coordenadas não é ortonormal. Para construir uma base ortonormal ou *nonholonomic* podemos usar transformações usando a métrica.

Nesta seção vamos mostrar como desenvolver um novo conjunto de equações que podem ser usadas através do Princípio da Equivalência para representar no espaço-tempo curvo em uma região plana de Minkowski. Assim, os referenciais locais são construídos a partir dos elementos de uma base ortonormal não-coordenada,

$$\hat{\theta}^a = e^a_{\mu}(x) dx^{\mu}, \quad (2.43)$$

sendo os termos $e^a_{\mu}(x)$ conhecidos como tetradas que definem os referenciais locais quando satisfazem a relação da métrica do espaço-tempo com a de Minkowski $g_{\mu\nu}(x) = e^a_{\mu}(x)e^b_{\nu}(x)\eta_{ab}$. As seguintes relações são satisfeitas para o conjunto de tetradas e suas inversas,

$$\begin{aligned} e^{\mu}_a(x) e^a_{\nu}(x) &= \delta^{\mu}_{\nu}; \\ e^a_{\mu}(x) e^{\mu}_b(x) &= \delta^a_b. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Portanto, qualquer vetor ou tensor pode ser escrito em termos dos elementos da base não-coordenada $\hat{\theta}^a$. Dessa forma, vamos aplicar uma mudança de base nos seguintes tensores,

$$T^{\mu}_{\nu} = e^{\mu}_a e^a_{\nu} T^a_b; \quad T^a_b = e^a_{\mu} e^{\mu}_b T^{\mu}_{\nu}. \quad (2.45)$$

Com a Eq. (2.43) os referenciais locais transformam-se como vetores. Então, a mudança de base ocorre na forma $\hat{\theta}^a \rightarrow \hat{\theta}^{a'} = \Lambda^{a'}_a(x) \hat{\theta}^a$, sendo a matriz de *transformação local de Lorentz* $\Lambda^{a'}_a(x)$ que dependente das transformações em cada ponto do espaço-tempo, ou seja, das matrizes de *Transformações de Coordenadas no Espaço-Tempo* que deixam a forma canônica da métrica inalterada,

$$\nabla^{a'b'} \Lambda_a^{a'}(x) \Lambda_b^{b'}(x) = \eta_{ab}, \quad (2.46)$$

podemos exemplificar as transformações de Lorentz locais como:

$$T^{a'\mu'}_{b'\nu'} = \Lambda^{a'}_b \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \Lambda^{b'}_{b'} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} T^{a\mu}_{b\nu}. \quad (2.47)$$

Agora é possível definir as derivadas covariante dos referenciais locais. Para uma base não-coordenada $\hat{\theta}^a$, as componentes da conexão um-forma é dado por $\omega^a_b = \omega_\mu^a{}_b dx^\mu$ e podem ser definidas como:

$$\nabla_\mu \hat{\theta}^b = \omega_\mu^a{}_b \hat{\theta}^a. \quad (2.48)$$

Como o DT de deslocação em espiral são representados por torção, podemos calcular as conexões um-forma ω^a_b e as componentes do tensor de torção pelas equações de Maurer-Cartan,

$$T^a = d\hat{\theta}^a + \omega^a_b \wedge \hat{\theta}^b, \quad (2.49)$$

sendo o símbolo $\wedge$ é o produto *wedge* e o termo $T^a = T^a_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, a torção duas-forma e $\omega^a_b = \omega_\mu^a{}_b dx^\mu$ a conexão um-forma. Como também o termo $\omega_\mu^a{}_b$ é conhecido como conexão de spin ou conexão um-forma (MISNER; WHEELER, 1973). Podemos relacionar o tensor de torção e o tensor de contorção com base nos referenciais locais pela expressão, $T^a = K^a_b \wedge \hat{\theta}^b$, dessa forma escrevemos $K^a_b = K_\mu^a{}_b dx^\mu$. Nesse sentido, a conexão um-forma e o tensor de contorção da Eq. (2.34)⁵ podem ser escritos como,

$$K_{\mu ab} = K_{\beta\nu\mu} \left[e^\nu_a(x) e^\beta_b(x) - e^\nu_b(x) e^\beta_a(x) \right]. \quad (2.50)$$

Portanto, conseguimos através do princípio da equivalência e as equações de Maurer-Cartan definir referenciais locais na presença de torção no espaço-tempo curvo (SYNGE, 1960), (MISNER; WHEELER, 1973), (WEINBERG, 1972) e (WALD, 1988).

⁵ Lembrando que o correto é nomear como componente do tensor de contorção. Como também no caso das componentes $T^\beta_{\mu\nu}$ do tensor de tensão.

3 Efeitos Topológicos Devido a uma Deslocação em Espiral em Sistemas Quânticos Não-Relativísticos

Neste capítulo vamos estudar a dinâmica de uma partícula com carga na presença de defeito topológico de deslocação em espiral. Soma-se a isto, investigar a dinâmica quântica quando o sistema é confinado por um potencial do tipo *hard-wall* e em seguida, analisar a influência da topologia na interação da partícula com um campo elétrico radial não uniforme e também na presença de um campo magnético axial uniforme, conhecido como os níveis de Landau ou Quantização de Landau. Conclui-se que, o espectro de energia pode ser obtido em todos os casos de forma analítica, mostrando que há casos em que um análogo do efeito Aharonov-Bohm (AB) para estados ligados é produzido devido a presença da deformação em espiral.

Indo além, a presença da defeito topológico e o confinamento do tipo *hard-wall* gera uma discussão a respeito do termo β do defeito topológico e suas dimensões sobre a validade de considera-lo "muito pequeno". Portanto, também analisamos a interação do elétron com o mesmo campo elétrico não uniforme, mas sobre a influência de um ponto de corte induzido pela topologia de deslocação em espiral. Em resumo, os autovalores de energia são influenciados pelo β e dá origem a um *revival time* não nulo associado ao número quântico radial.

Os estudos apresentados neste capítulo foram publicados nas seguintes revistas: *International Journal of Modern Physics A*; *Annals of Physics*; *Physica B: Physics of Condensed Matter*¹. Além disso, a ordem de publicação dos artigos difere da apresentada nesta tese.

A estrutura deste capítulo é a seguinte. Na seção 3.1, analisamos uma partícula com carga e sem spin confinada por um potencial do tipo *hard-wall* em um meio elástico que possui uma deslocação em espiral; em seguida, na seção 3.2, iremos considerar um campo elétrico produzido por uma distribuição uniforme de cargas elétricas ao longo de um cilindro; na seção 3.3, analisar o problema do defeito topológico de deslocação em espiral no mesmo sistema da seção anterior (3.2) levando em consideração o termo do defeito β^2 que induz um ponto de corte; em seguida na seção 3.4, uma breve revisão do conceito de *quantum revivals*; na seção 3.4.1, vamos analisar os *quantum revivals* do sistema com ponto de corte induzido pelo defeito topológico; na seção 3.5, tem como objetivo fazer uma breve revisão da quantização de Landau; na seção 3.5.1, investigar a interação de

¹ Todos os artigos publicados durante o desenvolvimento da tese na seção 5.1.

uma partícula com carga e sem spin em um campo magnético uniforme; na seção 3.5.2, avançamos na busca de efeitos de rotação na quantização de Landau em um meio elástico com defeito topológico de deslocação em espiral.

3.1 Partícula com carga e sem spin com potencial do tipo *hard-wall*

Nesta seção, analisamos uma partícula com carga e sem spin em um meio elástico que possui uma deslocação em espiral. Este defeito topológico linear como mencionado no capítulo anterior corresponde à distorção de um círculo em uma espiral. Essa geometria é descrita por meio do elemento de linha²

$$ds^2 = dr^2 + 2\beta dr d\varphi + (\beta^2 + r^2) d\varphi^2 + dz^2, \quad (3.1)$$

o parâmetro β está relacionado a deslocação do defeito através do vetor de Burger $\mathbf{b}$ ($\beta = |\mathbf{b}|/2\pi$). Além disso, o valor do parâmetro β em um sólido é da ordem do deslocamento interatômico.

Portanto, como o sistema trata-se de uma partícula carregada sem spin vamos descrever esse sistema pela simetria cilíndrica com a equação de Schrödinger independente do tempo para um elétron na presença de uma deslocação em espiral. Como nossa deslocação de borda modifica um círculo em uma espiral, as propriedades geométricas do espaço e tais características são descritas pelo elemento de linha do tensor métrico. Para este caso, utilizamos o operador de Laplace-Beltrami para levar as informações a respeito da métrica para as equações de Schrödinger e definir a operação de diferenciação no novo sistema. Assim, pela relação:

$$g^{ij}g_{ij} = \mathbf{1}_{3 \times 3}, \quad (3.2)$$

podemos calcular a inversa da métrica covariante pela relação da Eq. (3.2) para aplicar no operador de Laplace. Então,

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\beta^2}{r^2} & -\frac{\beta}{r^2} & 0 \\ -\frac{\beta}{r^2} & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

sendo g definido como $g = \det(g_{ij})$, dessa forma $g = r^2$. Agora, introduzimos o elemento de linha na equação via operador de Laplace-Beltrami, então:

$$\varepsilon\psi = -\frac{1}{2m} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j) \right] \psi, \quad (3.4)$$

sendo g_{ij} o tensor métrico, g^{ij} o tensor inverso e $g = \det|g_{ij}|$. Lembrando que (i, j) são os índices das coordenadas espaciais. O operador de Laplace-Beltrami com os termos do tensor métrico não nulo é dado pela expressão,

² Para mais detalhes do desenvolvimento dessa seção ([KATANAIEV; VOLOVICH, 1992](#)), ([AHARONOV; CASHIER, 1984](#)), ([NETTO; FURTADO, 2008](#)) e ([ROBINETT, 2000](#))

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_r(g^{rr}\sqrt{g}\partial_r) + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_r(g^{r\phi}\sqrt{g}\partial_\phi) + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\phi(g^{\phi r}\sqrt{g}\partial_r) + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\phi(g^{\phi\phi}\sqrt{g}\partial_\phi) + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_z(g^{zz}\sqrt{g}\partial_z), \quad (3.5)$$

aplicando os termos da matriz g^{ij} ,

$$\Delta = \left(1 + \frac{\beta^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3}\right)\frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\beta}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}\right) + \frac{\beta}{r^3}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3.6)$$

obtemos a expressão do operador de Laplace para o nosso sistema. Logo, a equação (3.4) toma forma na equação a seguir:

$$\varepsilon\psi = -\frac{1}{2m}\left(1 + \frac{\beta^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\beta}{mr^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\phi} + \frac{1}{2mr^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} - \frac{1}{2m}\frac{\beta}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} - \frac{1}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \quad (3.7)$$

A solução da equação (3.7) pode ser escrita em relação aos autovalores do operador de momento linear referente a componente z , onde nossa partícula possui comportamento de partícula livre, já que o defeito está presente na direção radial e nenhuma variável z está presente na expressão, dessa forma, o operador hamiltoniano comuta com o operador $\hat{P}_z$ compartilhando o mesmo conjunto de autofunções. Podemos também introduzir os autovalores referente ao operador momento angular $\hat{L}_\phi$ levando em consideração o mesmo raciocínio feito para componente z , devido ao fato da Eq. (3.7) não ter termos explícitos de φ ³. Assim, escrevemos uma solução na forma:

$$\psi(r, \varphi, z) = e^{il\varphi + ikz}u(r), \quad (3.8)$$

sendo k a constante do momento linear na direção z e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \dots$ os autovalores referente ao operador do momento angular na direção z e $u(r)$ representa uma função desconhecida de r . Calculando as derivadas de $\psi(r, \varphi, z)$ e substituindo na equação (3.7) obtemos uma equação radial.

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{r^2}\right)\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3} - i\frac{2\beta l}{r^2}\right)\frac{du}{dr} - \frac{l^2}{r^2}u + i\frac{\beta l}{r^3}u + (2m\varepsilon - k^2)u = 0. \quad (3.9)$$

Podemos escrever uma solução radial para equação (3.9) da seguinte forma⁴

³ Também podemos obter as soluções pelo método de separação de variáveis.

⁴ Obtemos essa solução utilizando o software *Maple*, o método manual por *ansatz* seria muito trabalhoso para encontrar relações como a $\tan^{-1}$.

$$u(r) = \exp \left[il \tan^{-1} \left(\frac{r}{\beta} \right) \right] \times f(r), \quad (3.10)$$

onde a função $f(r)$ é desconhecida. Derivando a Eq. (3.10) e substituindo na Eq. (3.9), obtemos uma nova equação diferencial,

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{r^2} \right) \frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3} \right) \frac{df}{dr} - \frac{l^2}{(r^2 + \beta^2)} f + \tau f = 0, \quad (3.11)$$

onde o termo τ é uma constante e dada por $\tau = 2m\varepsilon - k^2$ para simplificar nossa equação⁵. Agora, para uma análise bidimensional do sistema, o termo de partícula livre no eixo z será igual a zero $k = 0$ e $\varepsilon > 0$. Indo além, para tornar nossa equação adimensional substituiremos nossa variável por $x = 2\sqrt{\tau(r^2 + \beta^2)}$ na Eq. (3.11) para obter a expressão:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} - \frac{l^2}{x^2} f + \frac{1}{4} f = 0. \quad (3.12)$$

A Eq. (3.12) corresponde a equação de Bessel que possui solução na forma assintótica dada por (ARONSTEIN; STROUD, 1997),

$$f(x) = AJ_{|l|}(x) + BN_{|l|}(x), \quad (3.13)$$

dado que $J_{|l|}(x)$ e $N_{|l|}(x)$ são funções de Bessel de primeiro e segundo tipo respectivamente. Analisando o comportamento da solução na origem, devemos ter $B = 0$ porque a função Neumann diverge na origem. Logo, nossa solução da equação diferencial torna-se $f(x) = AJ_{|l|}(x)$.

Agora, vamos dar continuidade a análise do sistema na presença de um potencial do tipo *hard-wall*. Esta situação é possível para determinados valores fixos para que a função de onda se anule quando $x \rightarrow x_0 = 2\sqrt{\tau(r_0^2 + \beta^2)}$, onde x_0 é este valor $f(x_0) = 0$. Como o objetivo é observar a influência do defeito topológico de deslocação em espiral, vamos admitir que $x_0 \gg 1$. Então, podemos escrever:

$$J_{|l|}(x_0) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x_0}} \cos \left(x_0 - \frac{|l|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.14)$$

Obtemos a seguinte condição,

$$x_0 - \frac{|l|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (3.15)$$

com n ($n = 0, 1, 2, \dots$) sendo o número quântico relacionado aos modos radiais. Em seguida, ajustamos os termos para obter os níveis de energia do elétron sujeito a uma parede de potencial na presença de defeito topológico de deslocação em espiral,

⁵ As letras para representar algumas constantes irão variar de capítulo para capítulo. Assim como também as funções das equações diferenciais.

$$\varepsilon_{n,l} = \frac{\pi^2}{8m(r_0^2 + \beta^2)} \left(n + \frac{|l|}{2} + \frac{3}{4} \right)^2, \quad (3.16)$$

sendo n sendo o número quântico relacionado aos modos radiais que possui valores inteiros e positivos ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Por fim, a Eq. (3.16) corresponde aos níveis de energia de um elétron sujeito a um potencial do tipo *hard-wall* em um meio com deslocação em espiral (MAIA; BAKKE, 2019a). A influência do defeito topológico no sistema pode ser vista no termo de raio efetivo $\sqrt{r_0^2 + \beta^2}$. É interessante observar que o número quântico l não possui contribuições devido a deslocação em espiral, como é presente em outros trabalhos produzindo um momento angular efetivo (BLUHM; TUDOSE, 1996). Esse resultado serve de base para o sistema estudado na seção 4.1, quando aplicamos o defeito topológico de deslocação em espiral na equação de Dirac e pela aproximação não-relativística dos níveis de energia, obtemos naturalmente o mesmo resultado da equação (3.16).

3.2 Interação com campo elétrico radial não uniforme

Nesta seção iremos considerar um campo elétrico produzido por uma distribuição uniforme de cargas elétricas ao longo de um cilindro com defeito topológico de deslocação em espiral. O campo elétrico no interior do cilindro é dado por $\vec{E} = \frac{\lambda}{2} r \hat{r}$, onde $\lambda > 0$ é uma constante associada com a distribuição uniforme das cargas elétricas. A expressão do potencial para uma partícula com carga elétrica como um elétron, mas sem levar em consideração o spin interagindo com esse campo é dado por,

$$V(r) = -q \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -q \int E dr = \frac{|q|\lambda}{4} r^2, \quad (3.17)$$

onde $q = -|q|$ é a carga elétrica. Introduzindo o potencial na Eq. (3.17) e desenvolvendo analogamente como foi feito até a expressão da Eq. (3.9), temos:

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{r^2}\right) \frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3}\right) \frac{df}{dr} - \frac{l^2}{(r^2 + \beta^2)} f - \frac{m|q|\lambda}{2} r^2 f + (2m\varepsilon - k^2) f = 0. \quad (3.18)$$

Vamos definir um parâmetro $\alpha^2 = \frac{m|q|\lambda}{2}$ e assim como foi feito no caso anterior, a análise será bidimensional e aplicando uma mudança de variável dada pela relação $\zeta = \alpha(r^2 + \beta^2)$. Então, nossa equação diferencial será:

$$\zeta \frac{d^2 f}{d\zeta^2} + \frac{df}{d\zeta} - \frac{l^2}{4\zeta} f - \frac{\zeta}{4} f + \mu f = 0, \quad (3.19)$$

onde $\mu = \frac{1}{4\alpha} (2m\varepsilon + \alpha^2 \beta^2)$. Note que quando $r \rightarrow \infty$, então, $\zeta \rightarrow \infty$. Agora, analisando o comportamento da função quando $r \rightarrow 0$, nós obtemos $\zeta = \alpha\beta^2$ e vamos considerar em primeiro momento que β^2 é "muito pequeno". Assim, quando $r \rightarrow 0$ podemos considerar que $\zeta \rightarrow 0$, sem perder generalidade. Dessa forma, podemos analisar o comportamento da Eq. (3.19) para ambas situações. Nossa solução é dada da forma (NETTO; FURTADO, 2008):

$$f(\zeta) = e^{-\frac{\zeta}{2}} \zeta^{\frac{|l|}{2}} {}_1F_1\left(\frac{|l|}{2} + \frac{1}{2} - \mu, |l| + 1; \zeta\right), \quad (3.20)$$

onde ${}_1F_1\left(\frac{|l|}{2} + \frac{1}{2} - \mu, |l| + 1; \zeta\right)$ é uma função hipergeométrica confluyente. Observe que o comportamento assintótico dessa função é dada por (ABRAMOWITZ; STEGUM, 1965):

$${}_1F_1(a, b; \zeta) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{\zeta} \zeta^{a-b} [1 + \mathcal{O}(|\zeta|^{-1})], \quad (3.21)$$

portanto, diverge para $\zeta \rightarrow \infty$. Para soluções de estados ligados, precisamos impor a condição para que $a = -n$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) e com as devidas considerações, obtemos os níveis de energia,

$$\varepsilon_{n,l} = \sqrt{\frac{2|q|\lambda}{m}} \left(n + \frac{|l|}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{|q|\lambda\beta^2}{4}. \quad (3.22)$$

Portanto, a Eq. (3.22) corresponde aos níveis de energia da interação de um elétron com um campo elétrico radial produzido por uma distribuição uniforme de cargas elétricas na presença de uma deslocação em espiral (MAIA; BAKKE, 2019a). Analisando os níveis de energia, observamos um termo de contribuição devido ao defeito topológico dado por β^2 . Observe também, que para $\lambda = 0$ os níveis de energia serão zero, isso acontece devido ao fato que o campo mantém a partícula no sistema, caso contrário ela estará livre.

Agora, vamos impor uma barreira de potencial no sistema para analisar suas contribuições assim como feito em casos anteriores. Fixando um r_0 , nós obtemos $\zeta_0 = \alpha(r_0^2 + \beta^2)$ na presença da deslocação em espiral. Nesse caso, a função de onda se anula levando em consideração os limites assintóticos,

$$f(\zeta_0) = 0. \quad (3.23)$$

Seguindo, vamos considerar um parâmetro fixo $b = |l| + 1$. Assim, podemos escrever a nova função hipergeométrica confluyente como forma (ABRAMOWITZ; STEGUM, 1965):

$${}_1F_1(a, b; \zeta_0) \propto \cos \left(\sqrt{2b\zeta_0 - 4a\zeta_0} - b\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.24)$$

Eventualmente, a influência do potencial do tipo *hard-wall* na interação do elétron com o campo elétrico radial na presença de uma deslocação em espiral produz o espectro de energia dado por,

$$\varepsilon_n = \frac{\pi^2}{2m(r_0^2 + \beta^2)} \left(n + \frac{|l|}{2} + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{|q|\lambda\beta^2}{4}. \quad (3.25)$$

Em síntese, há duas contribuições do defeito topológico de deslocação em espiral (MAIA; BAKKE, 2019a). Uma mudança presente no raio efetivo $\sqrt{r_0^2 + \beta^2}$ análogo ao caso anterior, e a outra, representada no último termo da Eq. (3.25). Em ambas as situações não houve efeitos do tipo Aharonov-Bohm (AB) e nem alteração no momento angular criando um momento angular efetivo (BLUHM; TUDOSE, 1996) e (STYER, 2001).

Note que anteriormente consideramos β^2 como "muito pequeno", sendo assim, podemos afirmar que a influência da topologia nesse caso é insignificante, mas devido a uma análise mais aprofundada iremos estender essa discussão para seção seguinte e tentar compreender melhor a contribuição do defeito topológico no sistema.

3.3 Ponto de corte induzido pela topologia de deslocação em espiral

Nesta seção vamos analisar o problema do defeito topológico de deslocação em espiral no mesmo sistema da seção anterior (3.2) levando em consideração o termo do defeito β^2 como "muito pequeno", mas não nulo. Dessa forma, assumindo essa nova perspectiva, precisamos analisar o comportamento assintótico da função de onda radial da seção anterior.

Primeiramente precisamos encontrar uma nova solução para equação Eq. (3.19) quando $r \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow 0$. Na análise feita anteriormente, as variáveis assumiam os respectivos valores $\zeta \rightarrow \infty$ e $\zeta \rightarrow 0$ assumindo β^2 como "muito pequeno". Porém, quando $r \rightarrow 0$ observamos que o valor de ζ tende a um valor dependente do defeito topológico $\zeta \rightarrow \alpha\beta^2$. Assim, temos uma nova perspectiva dos estados ligados que podem surgir da interação de um elétron com o campo elétrico $\vec{E} = \frac{\lambda}{2}r\hat{r}$ e um possível ponto de corte induzido pelo defeito topológico. Agora, obtemos uma solução conhecida quando $r \rightarrow \infty$ e consequentemente $\zeta \rightarrow \infty$ (MAIA; BAKKE, 2019a) e (MAIA; BAKKE, 2021b):

$$g(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} W_{\mu, \frac{|l|}{2}}(\zeta), \quad (3.26)$$

onde $W_{\mu, \frac{|l|}{2}}(\zeta)$ é conhecida como função de *Whittaker* regular para valores de $\zeta \rightarrow \infty$. Seguindo os passos feitos na seção anterior, escrevemos a função com os termos da função Hipergeométrica Confluyente. Assim, nossa $g(\zeta)$ pode ser escrita como:

$$g(\zeta) = e^{-\frac{\zeta}{2}} \zeta^{\frac{|l|}{2}} U\left(\frac{|l|}{2} + \frac{1}{2} - \mu, |l| + 1; \zeta\right). \quad (3.27)$$

Agora, assumindo um novo limite assintótico induzido pelo DT com o termo $\zeta \rightarrow \alpha\beta^2$ quando $r \rightarrow 0$. Nesta nova perspectiva, um ponto de corte ⁶ $r_0 = \beta$ será estabelecido naturalmente, assim como é feito nos estudos com potencial do inverso do quadrado (LANDAU, 1977). Em outras palavras, o defeito topológico de deslocação em espiral impõe um limite inferior para $\zeta_0 = \alpha r_0^2 = \alpha\beta^2$. Logo, a função de onda deve ser normalizada no intervalo induzido pela deslocação:

$$\zeta_0 \leq \zeta < \infty, \quad (3.28)$$

consequentemente, nossa função de onda ζ segue para condição:

$$g(\zeta_0 = \alpha\beta^2) = 0. \quad (3.29)$$

⁶ Ponto de corte conhecido como (*cut-off*)

Em seguida, consideramos a partícula para $\mu \gg 1$, permitindo obter explicitamente os níveis de energia. Para o caso em que $\mu \ll 1$ o parâmetro a da função pode divergir. Além disso, para ζ_0 e $b = |l| + 1$ fixos, a função $U(a, b; \zeta_0)$ pode ser escrita na forma:

$$U(a, b; \zeta_0) \propto \cos \left(\sqrt{2b\zeta_0 - 4a\zeta_0} - \frac{b\pi}{2} + a\pi + \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.30)$$

Logo, substituindo a Eq. (3.27) e a Eq. (3.30) na condição de contorno dada pela Eq. (3.29), obtemos:

$$g(\zeta_0) = 0 \Rightarrow \cos \left(\sqrt{2b\zeta_0 - 4a\zeta_0} - \frac{b\pi}{2} + a\pi + \frac{\pi}{4} \right) = 0, \quad (3.31)$$

em suma, pela Eq. (3.31) encontramos os níveis de energia:

$$\varepsilon_n = -\sqrt{\frac{2|q|\lambda}{m}} \left(n + \frac{1}{4} + \frac{m\beta^2}{8} \sqrt{\frac{2|q|\lambda}{m}} \right) + \frac{2|q|\lambda\beta^2}{\pi^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \sqrt{\frac{m}{2|q|\lambda}} \times \frac{\pi^2(4n+1)}{2m\beta^2}} \right], \quad (3.32)$$

onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ são os números quânticos radiais e $\sqrt{\frac{2|q|\lambda}{m}}$ desempenha o papel da frequência angular.

Ou seja, as energias permitidas da Eq. (3.32) derivam da interação de um elétron com campo elétrico $\vec{E} = \frac{\lambda}{2} r \hat{r}$ na influência do ponto de corte induzido pela topologia de deslocação em espiral (MAIA; BAKKE, 2021a). Apesar de ser um sistema bidimensional, os níveis de energia são determinados apenas pelo número quântico radial n . Em outras palavras, não dependem do número quântico do momento angular l . O significado da ausência do número quântico do momento angular é que os níveis de energia são infinitamente degenerados, uma vez que todos os valores de l são válidos para cada nível de energia. Este aspecto de ter uma degeneração infinita é análogo aos níveis de Landau.

Não só, termos proporcionais a β^2 , o que significa que a topologia de deslocação em espiral influencia a dinâmica quântica do sistema. No entanto, não há análogo do efeito Aharonov-Bohm (AB) para estados ligados. De acordo com a (NETTO; FURTADO, 2008). Efeitos dessa natureza normalmente são caracterizados por uma mudança no número quântico do momento angular dado por $l' = l - q\Phi/2\pi$, onde Φ é o fluxo magnético dentro de um solenoide longo.

No contexto dos estudos de defeitos topológicos lineares, uma desclinação produz um deslocamento no número quântico do momento angular $l' = \frac{l}{\bar{\alpha}}$, onde $\bar{\alpha}$ é o parâmetro relacionado ao déficit angular que caracteriza a desclinação. Além disso, a topologia da deslocação tipo-hélice (Distorção de uma curva circular em uma espiral vertical) modifica o número quântico do momento angular como $l' = l - \bar{\beta}k$, sendo $\bar{\beta}$ o parâmetro relacionado ao vetor de Burgers para este defeito (BEZERRA, 1997).

Portanto, as topologias de desclinação e deslocação tipo-hélice produzem efeitos tipo Aharonov-Bohm (AB) para estados ligados. Porém, no caso presente com deslocação em espiral não produz qualquer mudança no número quântico do momento angular, concluindo que não há efeitos dessa natureza. Por outro lado, a topologia determina um limite superior dos modos radiais dados por:

$$n < \frac{m\beta^2}{2\pi^2} \sqrt{\frac{2|q|\lambda}{m}} - \frac{1}{4}, \quad (3.33)$$

caso contrário, teríamos um termo imaginário no espectro de energia.

3.4 Quantum revivals

Nesta seção vamos revisar o conceito de *quantum revivals* para aplicar no sistema anterior, com ponto de corte induzido pelo defeito topológico de deslocação em espiral. A análise teórica e a verificação experimental do fenômeno de *quantum revivals* tem sido amplamente explorado na última década pela comunidade em geral, tanto de Física, Química quanto em Biologia nos estudos de ionização observável nos experimentos do tipo *pump-probe* (ALBER; ZOLLER, 1986). Resumidamente são situações caracterizadas por estados quânticos inicialmente localizados que possui uma evolução temporal, que podem se espalhar significativamente e logo após, a propagação se reverte e o pacote de onda é realocado e a periodicidade é evidente. Neste contexto, Gutschick e Nieto notou que:

"...se alguém esperar por muito tempo, qualquer estado que tenha uma sobreposição significativa com um número finito de estados acabará por retornar a "quase" sua forma original." (GUTSCHICK; NIETO, 1980).

A realocação do pacote de onda inicial também pode acontecer de forma fracionada, dando origem ao que chamamos de *fractional revivals*. Esse comportamento é uma realização fundamental dos fenômenos de interferência dependente do tempo para estados ligados com energias quantizadas. Por exemplo, com base nas equações de Schrödinger, Mandelstam e Tamm (MANDELSTAM; TAMM, 1991) no desenvolvimento de sistemas quânticos isolados no tempo, levou à desigualdade

$$|\langle \psi_t | \psi_0 \rangle|^2 \geq \cos^2 \left(\frac{\Delta H t}{\hbar} \right) \text{ para } 0 \leq t \leq \frac{\pi \hbar}{2\Delta H}, \quad (3.34)$$

sendo $\Delta H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$ é a incerteza na energia das partículas livres do pacote de onda, ($|\psi_t\rangle$) o estado quântico dependente do tempo e ($|\psi_0\rangle$) o estado inicial. Essas ideias foram usadas para analisar as relações de incerteza energia-tempo. Assim, esta sobreposição é utilizada pela função de autocorrelação e pode ser avaliada em qualquer posição ou momento,

$$A(t) \equiv \langle \psi_t | \psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(p, t) \phi(p, t) dp, \quad (3.35)$$

para $|A(t)|$ ser um valor alto, a função de onda em momentos posteriores deve ter uma sobreposição significativa com o estado inicial no espaço. Para sistemas em uma dimensão onde o pacote de onda é expandido em termos das autofunções de energia $u_n(x)$, com autovalores de energia quantizados E_n , na forma

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (3.36)$$

com a_n dado por,

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} [u_n(X)]^* \psi(x, 0) dx. \quad (3.37)$$

Dessa forma, podemos escrever a função de autocorrelação como,

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 e^{+iE_n t/\hbar}. \quad (3.38)$$

No entanto, em muitas realizações experimentais, um pacote de onda localizado é excitado com um espectro de energia que está fortemente espalhado em torno de um valor central do número quântico n_0 , de modo que $n_0 \gg \Delta n \gg 1$. Nesse caso, é apropriado expandir individualmente os autovalores de energia, $E(n) \equiv E_n$, sobre esse valor,

$$E(n) \approx E(n_0) + E'(n_0)(n - n_0) + \frac{E''(n_0)}{2}(n - n_0)^2 + \frac{E'''(n_0)}{6}(n - n_0)^3 + \dots \quad (3.39)$$

Isso resulta na dependência do tempo de cada autoestado quântico individual por meio dos termos:

$$\begin{aligned} e^{-E_n t/\hbar} &= \exp \left(-i/\hbar \left[E(n_0)t + (n - n_0)E'(n_0)t + \frac{1}{2}(n - n_0)^2 E''(n_0)t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{6}(n - n_0)^3 E'''(n_0)t + \dots \right] \right) \\ &\equiv \exp(-i\omega_0 t - 2\pi i(n - n_0)t/T_{cl} - 2\pi i(n - n_0)^2 t/T_{rev} - 2\pi i(n - n_0)^3 t/T_{super} + \dots), \end{aligned} \quad (3.40)$$

com cada termo na expansão logo após o primeiro, define uma escala de tempo característica, dada por:

$$T_{cl} = \frac{2\pi\hbar}{|E'(n_0)|}, \quad T_{rev} = \frac{2\pi\hbar}{|E''(n_0)|/2} \quad e \quad T_{super} = \frac{2\pi\hbar}{|E'''(n_0)|/6}. \quad (3.41)$$

O primeiro termo da exponencial ($\omega_0 = E(n_0)/\hbar$) é uma fase geral independente de n , comum a todos os termos na expansão, portanto, não induz nenhuma interferência entre eles, é semelhante à fase para uma única solução estacionária e não tem efeito observável em $|\psi(x, t)|^2$. Por outro lado, o segundo é usando argumento semi-clássico e a condição de quantização WKB,

$$T_{cl} = \frac{2\pi\hbar}{|E'(n_0)|}. \quad (3.42)$$

é associado também ao período clássico de movimento no estado ligado. O próximo termo T_{rev} é dado por,

$$T_{rev} = \frac{2\pi\hbar}{|E''(n_0)|/2}, \quad (3.43)$$

e relacionado com a escala de tempo do *revival time*. Essa escala de tempo determina relações com a dispersão do pacote de onda ($t \gg T_{cl}$). Nesse sentido, para o último termo T_{super} não entrarei em detalhes, devido ao fato que sistemas com dependência de energia puramente quadrática em um único número quântico, como será o nosso caso, não existem escalas de tempo independentes mais longas do que *revival time* e *fractional revival*. Para situações de ordem superior na expansão, o T_{super} torna-se relevante (ROBINETT, 2004).

3.4.1 Efeitos de *quantum revivals* em sistema com ponto de corte induzido pelo defeito topológico

Nesta seção, vamos analisar os *quantum revivals* do sistema, que em resumo é quando a função de onda recupera sua forma inicial em determinadas condições. O *Revival Time* foi investigado por exemplo, no poço quadrado infinito (BLUHM; PORTER, 1996), pêndulo quântico (DONCHESKI; ROBINETT, 2003), sistemas de massa dependentes de posição (SCHMIDT; GUSSO, 2008), átomos de Rydberg e Grafeno (BLUHM; KOSTELECKÝ, 1995). Quando um sistema quântico tem um número quântico $\bar{\nu}$ e os autovalores de energia podem ser expandidos sobre um valor central $\bar{\nu}_1$ desse número, a energia pode ser expandida na Série de Taylor como vimos na seção anterior, dessa forma:

$$\varepsilon_{\bar{\nu}} \approx \varepsilon_{\bar{\nu}_1} + \left(\frac{d\varepsilon}{d\bar{\nu}} \right)_{\bar{\nu}=\bar{\nu}_1} (\bar{\nu} - \bar{\nu}_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\varepsilon}{d\bar{\nu}^2} \right)_{\bar{\nu}=\bar{\nu}_1} (\bar{\nu} - \bar{\nu}_1)^2 + \dots \quad (3.44)$$

Portanto, as escalas de tempo são distintas e podemos definir o período clássico por:

$$T_{cl} = \frac{2\pi\hbar}{\left| \left(\frac{d\varepsilon}{d\bar{\nu}} \right)_{\bar{\nu}=\bar{\nu}_1} \right|}, \quad (3.45)$$

enquanto o *revival time* é definido como,

$$t_{rev} = \frac{4\pi\hbar}{\left| \left(\frac{d^2\varepsilon}{d\bar{\nu}^2} \right)_{\bar{\nu}=\bar{\nu}_1} \right|}. \quad (3.46)$$

Vamos analisar o surgimento desses efeitos no sistema com uma partícula com carga e sem spin na presença de campo elétrico e com DT de deslocação em espiral descrito na seção 3.3. Assim, os níveis de energias permitidos da Eq. (3.32), pode ser expandido sobre o valor de n ,

$$\varepsilon_n = -\sqrt{\frac{2|q|\lambda}{m}} \left(n + \frac{1}{4} + \frac{m\beta^2}{8} \sqrt{\frac{2|q|\lambda}{m}} \right) + \frac{2|q|\lambda\beta^2}{\pi^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \sqrt{\frac{m}{2|q|\lambda}} \times \frac{\pi^2(4n+1)}{2m\beta^2}} \right], \quad (3.47)$$

a Eq. (3.32) deriva da interação de um elétron com campo elétrico $\vec{E} = \frac{\lambda}{2} r \hat{r}$ na influência do ponto de corte induzido pela topologia de deslocação em espiral que são determinadas pelo número quântico radial n (MAIA; BAKKE, 2021a). Logo, o período clássico da Eq. (3.45) e o *revival time* da Eq. (3.46) são definidos em termos do n . Para um determinado valor dos modos radiais, os períodos clássicos são dados por,

$$T_{cl} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2|q|\lambda}} \times \frac{\sqrt{1 - \sqrt{\frac{m}{2|q|\lambda}} \times \frac{\pi^2(4n+1)}{2m\beta^2}}}{|\sqrt{1 - \sqrt{\frac{m}{2|q|\lambda}} \times \frac{\pi^2(4n+1)}{2m\beta^2}} \pm 1|}. \quad (3.48)$$

Como os períodos clássico dados na Eq. (3.48) dependem do parâmetro β , os mesmos são influenciados pela Topologia de deslocação em espiral. Além disso, o *revival time* dado pela relação da Eq. (3.46) para um determinado valor de n , temos

$$t_{rev} = \frac{4\pi}{\left|\frac{d^2\varepsilon}{dn^2}\right|} = \frac{4m\beta^2}{\pi} \times \left[1 - \sqrt{\frac{m}{2|q|\lambda}} \times \frac{\pi^2(4n+1)}{2m\beta^2}\right]^{3/2}. \quad (3.49)$$

Na seção 3.1, assumimos que β^2 era "muito pequeno" e portanto, os níveis de energia eram proporcionais aos números quânticos n e $|l|$ de forma análoga ao oscilador harmônico bidimensional. Conforme mostrado na referência (ROBINETT, 2004), nenhum *revival time* existe no sistema do oscilador harmônico em coordenadas cartesianas. Na simetria cilíndrica, por sua vez, não há *revival time* associado ao número quântico radial n , mas esperaríamos que fosse não nulo referente ao termo proporcional a $|l|$.

Em contraste, no caso presente da Eq. (3.32) não consideramos β^2 "muito pequeno" e encontramos os níveis de energia para os limites assintóticos do ponto de corte induzido pela topologia. Assim, obtivemos *revival time* não nulo dado pela Eq. (3.49) relacionado ao número quântico radial n da interação do elétron com o campo elétrico não uniforme. No entanto, também não há *revival time* para o número quântico do momento angular. Isso ocorre devido à influência do ponto de corte induzido pela topologia de deslocação em espiral correspondente ao β . Desse modo, embora os dois períodos clássicos associados às Energias permitidas da Eq. (3.32), o *revival time* dado pela relação da Eq. (3.49) tem a mesma expressão para ambas as energias permitidas.

3.5 Quantização não-relativística de Landau

Esta seção tem como objetivo fazer uma breve revisão da quantização de Landau. Inicialmente discutido por Jackiw e Balatsky ([JACKIW, 1984](#)), para um sistema análogo de fluxo magnético através de um plano; outros Físicos também estudaram o tema, sendo mais específico a quantização relativística de Landau por Haldane ([HALDANE, 1988](#)) sobre o efeito Hall quântico. Assim, o que ocorre quando uma partícula carregada interage com um intenso campo magnético uniforme. Dessa forma, para uma partícula com massa m , carga q presente em um plano de movimento xy e sujeita a um campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, podemos escrever o Hamiltoniano que descreve essa dinâmica como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p} - q\vec{A})^2, \quad (3.50)$$

sendo $\vec{A}$ o vetor potencial eletromagnético e utilizando o sistema de unidades naturais. Portanto, resolvendo a equação de Schrödinger encontramos os níveis de Landau,

$$\varepsilon_{n,l} = \omega \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|l| + l}{2} \right) + \frac{k^2}{2m}, \quad (3.51)$$

com $\omega = qB_0/m$ conhecida como frequência de ciclotron. Como também, $n = 0, 1, 2, \dots$ são os modos radiais e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ os números quânticos relacionados ao operador de momento angular. Em suma, o conjunto ε_n com valores de n é conhecido como níveis de Landau, com a característica de ter cada nível é infinitamente degenerado. Nosso interesse é estudar o surgimento de resultados análogos aos apresentados para diversos sistemas com defeito topológico de deslocação em espiral.

3.5.1 Quantização não-relativística de Landau com deslocação em espiral

Nesta seção, vamos analisar a interação de um elétron sem spin com um campo magnético uniforme. É conhecido na literatura que a interação de um elétron com um campo magnético axial uniforme produz um espectro discreto de energia, onde cada nível de energia possui uma degenerescência infinita. Esse espectro discreto é chamado de níveis de Landau. Em um meio elástico com uma desclinação e/ou deslocação tipo-hélice, os Efeitos desses defeitos topológicos nos níveis de Landau foram investigados em (NETTO; FURTADO, 2008).

Assim, nosso foco será os efeitos devido ao defeito topológico de deslocação em espiral nos níveis de Landau. E pela equação de Schrödinger independente do tempo, temos:

$$\varepsilon\psi = -\frac{1}{2m} \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_k - iqA_k) \left[\sqrt{g} g^{hj} (\partial_j - iqA_j) \right] \psi, \quad (3.52)$$

onde A_k é a componente covariante do quadrivetor do potencial eletromagnético $A_\mu = (A_0, A_k)$.

Vamos considerar um campo magnético externo uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, onde B_0 é constante. De acordo com (MUNIZ; CUNHA, 2014), este campo axial pode ser introduzido na Eq. Schrödinger (3.52) por meio da componente covariante não nula do potencial de quadrivetor, que é dado na forma: $A_\varphi = \frac{B_0 r^2}{2}$. Assim, a Eq. (3.52) torna-se,

$$\begin{aligned} \varepsilon\psi = & -\frac{1}{2m} \left(1 + \frac{\beta^2}{r^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3} + iqB_0\beta \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} + \\ & + \frac{\beta}{mr^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{2mr^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{2m} \left(\frac{\beta}{r^3} - iqB_0 \right) \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \\ & -i \frac{qB_0\beta}{4mr} \psi + \frac{q^2 B_0^2 r^2}{8m} \psi - \frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Como feito em seções anteriores, a solução da Eq. (3.53) é dada pela função $\psi(r, \varphi, z) = e^{il\varphi + ikz} u(r)$. Sabendo que nesse caso a função radial $u(r)$ é desconhecida, obtemos nossa equação radial,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\beta^2}{r^2} \right) \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3} - i \frac{2\beta l}{r^2} + im\omega\beta \right) \frac{du}{dr} - \frac{l^2}{r^2} u + i \frac{\beta l}{r^3} u + i \frac{m\omega\beta}{2r} u + \\ - \frac{m^2 \omega^2 r^2}{4} u + (2m\varepsilon - k^2 + m\omega l) u = 0, \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde $\omega = qB_0/m$ é a frequência de ciclotron. Agora, a função de onda solução da Eq. (3.54) tem a forma:

$$u(r) = \exp \left[i \left(l + \frac{m\omega\beta^2}{2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{r}{\beta} \right) \right] \times \exp \left(-i \frac{m\omega\beta r}{2} \right) \times h(r), \quad (3.55)$$

como na função anterior, $h(r)$ é também desconhecida. Substituindo a solução na equação radial obtemos uma nova equação radial,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\beta^2}{r^2} \right) \frac{d^2 h}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3} \right) \frac{dh}{dr} - \frac{(l^2 + m\omega l \beta^2)}{(r^2 + \beta^2)} h - \frac{m^2 \omega^2 r^4}{4(r^2 + \beta^2)} h + \\ + (2m\varepsilon - k^2 + m\omega l) h = 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Agora, considerando uma análise bidimensional quando $k = 0$ e aplicando a mudança de variável dada por $y = \frac{m\omega}{2} (r^2 + \beta^2)$ na Eq. (3.56),

$$y \frac{d^2 h}{dy^2} + \frac{dh}{dy} - \frac{\gamma^2}{4y} h - \frac{y}{4} h + \tau h = 0, \quad (3.57)$$

e definindo os parâmetros como:

$$\gamma = l + \frac{1}{2} m\omega\beta^2, \quad \tau = \frac{1}{2m\omega} \left(2m\varepsilon + m\omega l + \frac{1}{2} m^2 \omega^2 \beta^2 \right). \quad (3.58)$$

Agora, analisando o comportamento assintótico da função de onda quando $y \rightarrow 0$, nós obtemos que $y = m\omega\beta^2/2$ e sabendo que β^2 é considerado "muito pequeno". Então, quando $y \rightarrow 0$ podemos considerar que $y \rightarrow 0$, sem perder generalidade. Permitindo escrever a solução da Eq. (3.57) como,

$$h(y) = e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{|\gamma|}{2}} {}_1F_1 \left(\frac{|\gamma|}{2} + \frac{1}{2} - \tau, |\gamma| + 1; y \right), \quad (3.59)$$

onde ${}_1F_1 \left(\frac{|\gamma|}{2} + \frac{1}{2} - \tau, |\gamma| + 1; y \right)$ é a função hipergeométrica confluyente. Seguindo os passos anteriores, obtemos os níveis de energia dados por:

$$\varepsilon_{n,l} = \omega \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|\gamma|}{2} - \frac{\gamma}{2} \right). \quad (3.60)$$

Portanto, a Eq. (3.60) corresponde aos níveis de Landau na presença do defeito topológico de deslocação em espiral (MAIA; BAKKE, 2019a). Note que os efeitos da topologia modificam os níveis de energia, produzindo um parâmetro γ associado ao número quântico do momento angular. Neste caso, temos uma contribuição tornando γ um momento angular efetivo. Nesse sentido, há um análogo do efeito Aharonov-Bohm (AB) para estados ligados. Além disso, há quebra da degeneração dos níveis de energia de Landau devido ao termo de deslocação em espiral. Além disso, caso $\beta = 0$ recuperamos os níveis de Landau na ausência de defeito topológico (LANDAU, 1977).

Conforme indicado em (JUAN; VOZMEDIANO, 2010) uma deslocação de borda pode ser visto no Grafeno por meio de um par de desclinações do tipo pentágono-heptágono. Assim como mostrando em (BAKKE; FURTADO, 2013) que os efeitos associados às fases geométricas devido à presença de desclinações em Grafeno poderiam ser descritos considerando o defeito topológico de deslocação em espiral na camada do Grafeno.

Portanto, essa discussão sobre os níveis de Landau na presença de deslocação em espiral pode ser estendida aos estudos em sistemas relativísticos para uma possível comparação com os resultados obtidos no Grafeno na presença de um campo magnético uniforme para altas energias e aplicando o limite não-relativístico para uma comparação. Tendo em vista que a quantização de Landau é o sistema mais simples para lidar com o efeito Hall quântico, a presente situação também levanta a possibilidade de estudar o efeito Hall quântico no grafeno na presença de deslocação em espiral.

3.5.2 Quantização não-relativística de Landau com deslocação em espiral e efeitos de rotação

Nesta seção, avançamos na busca de efeitos de rotação na quantização de Landau em um meio elástico com defeito topológico de deslocação em espiral. Sistemas nessas condições têm chamado atenção na literatura devido ao surgimento das fases quânticas pela rotação, associados ao surgimento do efeito Sagnac e Mashhoon (SAGNAC, 1913) e (MASHHOON, 1988). Situações como o acoplamento entre o momento angular e a velocidade angular no referencial também foram estudados por (PAGE, 1975) e (FIGIELSKI, 2002). Além disso, efeitos de corrente persistente na topologia de deslocação em espiral com rotação e campo magnético foram explorados recentemente no trabalho (SILVA; BAKKE, 2021), e para sistemas com *Anel Quântico*⁷ no artigo (DANTAS; FURTADO; Silva Netto, 2015).

Portanto, nesta seção consideramos um referencial em rotação com velocidade angular constante e mostramos que há soluções analíticas para as equações de Schrödinger com efeitos de rotação e modificações nos estados ligados devido ao defeito topológico de deslocação em espiral. Inicialmente, vamos considerar uma carga pontual (*electron ou hole*) em um meio elástico na presença de um campo magnético uniforme. Logo, o operador Hamiltoniano que descreve a interação do elétron, sem spin, com o campo na presença de deslocação em espiral é escrito como (NETTO; FURTADO, 2008):

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m} \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_k - iqA_k) \left[\sqrt{g} g^{kj} (\partial_j - iqA_j) \right], \quad (3.61)$$

onde g_{ij} é o tensor métrico, g^{ij} o tensor inverso e $g = \det |g_{ij}|$ o determinante, o termo q corresponde a carga elétrica e A_k a componente covariante do quadri vetor do potencial eletromagnético $A_\mu = (A_0, A_k)$. Os efeitos da rotação em sistemas quânticos não-relativísticos foram tratados com a equação de Schrödinger independente do tempo dado na forma (FONSECA, 2016):

$$\hat{H}_0 \Psi - \vec{\Omega} \cdot \hat{L} \Psi = \varepsilon \Psi, \quad (3.62)$$

sendo $\hat{H}_0$ o operador Hamiltoniano da partícula com o sistema sem rotação, dado pela Eq. (3.61). Podemos representar o termo como $\hat{L} = \vec{r} \times (\hat{p} - q\vec{A}) = \hat{L} - q\vec{r} \times \vec{A}$, sendo $\hat{L}$ é o operador de momento angular. Como o sistema estará em rotação, vamos supor um referencial giratório com velocidade angular constante dada por: $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$. Não apenas, devido à simetria cilíndrica do defeito topológico de deslocação em espiral $\vec{r} = r\hat{r}$ e a componente não nula do potencial eletromagnético dada por: $A_\varphi = \frac{B_0 r^2}{2}$.

Desse modo, operador Hamiltoniano pode ser escrito levando em consideração o termo de rotação e o potencial eletromagnético, então:

⁷ Tradução literal do termo *Quantum Ring*.

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 = & -\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2m} \frac{\beta}{r^3} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{2m} im\omega \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\beta}{2r} \right) + \frac{m^2 \omega^2 r^2}{8m} - \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

sendo $\omega = qB_0/m$ a frequência de ciclotron. Um ponto interessante é a influência da torção na componente z do momento angular $\hat{L}_z$. É mostrado que a topologia de deslocação em hélice transforma o operador $\hat{L}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$ em um operador efetivo dado por $\hat{L}_z^{eff} = -i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \chi \frac{\partial}{\partial z} \right)$, onde χ é o parâmetro que caracteriza o defeito topológico. Esta característica também foi apontada em (VIGNALE; MASHHOON, 1995) com relação a deslocação em espiral. Ao analisar a Eq. (3.63), somos induzidos a definir o operador efetivo:

$$\hat{L}_z^{eff} = -i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (3.64)$$

No entanto, o operador da Eq. (3.64) não comuta com o operador $\hat{H}_0$ dado pela Eq. (3.63), $[\hat{H}_0, \hat{L}_z^{eff}] \neq 0$. Então, $\hat{H}_0$ e $\hat{L}_z^{eff}$ são observáveis incompatíveis impossibilitando utilizar o momento angular efetivo. A expressão para o momento angular deve ser dada em termos de $\hat{L}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$, então:

$$\hat{L}'_z = \hat{L}_z - q \left(\vec{r} \times \vec{A} \right)_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{m\omega}{2} r^2. \quad (3.65)$$

Assim, podemos escrever a equação de Schrödinger independente do tempo da mesma forma como foi feito nas seções anteriores, aplicando o operador de Laplace-Beltrami para introduzir as informações do DT mais o termo de rotação no hamiltoniano,

$$\begin{aligned} \varepsilon \Psi = & -\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Psi - \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \Psi - \frac{1}{2m} \frac{\beta}{r^3} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial r} \right) \Psi + \\ & + \frac{im\omega}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\beta}{2r} \right) \Psi + \frac{m^2 \omega^2 r^2}{8m} \Psi - \frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \\ & + i\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \frac{m\omega\Omega}{2} r^2 \Psi. \end{aligned} \quad (3.66)$$

A solução da equação (3.66) pode ser escrita em relação aos autovalores do operador de momento linear referente a componente z e do operador de momento angular, assim como foi feito para os casos anteriores no momento de obter uma primeira solução. Devido a simetria cilíndrica do sistema, a solução da Eq. (3.66) é dada na forma: $\Psi(r, \varphi, z) = e^{il\varphi + ikz} u(r)$, com $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ são os autovalores de $\hat{L}_z$ e $-\infty < k < \infty$ são os

autovalores de $\hat{P}_z$. Derivando e substituindo na equação diferencial, obtemos a equação radial:

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{r^2}\right) \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3} - i\frac{2\beta l}{r^2} + im\omega\beta\right) \frac{du}{dr} - \frac{l^2}{r^2}u + i\frac{\beta l}{r^3}u + i\frac{m\omega\beta}{2r}u - \frac{m^2(\omega^2 + 4\omega\Omega)r^2}{4}u + \left[2m(\varepsilon + \Omega l) - k^2 + m\omega l\right]u = 0, \quad (3.67)$$

em busca das soluções para a equação radial (3.67), vamos escrever a função $u(r)$ na forma:

$$u(r) = \exp\left[i\left(l + \frac{m\omega\beta^2}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{r}{\beta}\right)\right] \times \exp\left(-i\frac{m\omega\beta r}{2}\right) \times h(r), \quad (3.68)$$

portanto, substituindo a Eq. (3.68) na Eq. (3.67), obtemos a seguinte expressão para a função $h(r)$:

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{r^2}\right) \frac{d^2 h}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3}\right) \frac{dh}{dr} - \frac{(l^2 + m\omega l\beta^2)}{(r^2 + \beta^2)}h - \frac{m^2\delta^2 r^4}{4(r^2 + \beta^2)}h - \frac{m^2\beta^2(\delta^2 - \omega^2)r^2}{4(r^2 + \beta^2)}h + \left(2m[\varepsilon + \Omega l] - k^2 + m\omega l\right)h = 0, \quad (3.69)$$

o novo parâmetro δ é definido como:

$$\delta = \sqrt{\omega^2 + 4\omega\Omega}, \quad (3.70)$$

aplicando uma mudança de variável $y = \frac{m\delta}{2}(r^2 + \beta^2)$ com objetivo de deixar a equação radial adimensional,

$$y \frac{d^2 h}{dy^2} + \frac{dh}{dy} - \frac{\gamma^2}{4y}h - \frac{y}{4}h + \tau h = 0, \quad (3.71)$$

onde as constantes são definidas,

$$\begin{aligned} \gamma &= l + \frac{1}{2}m\omega\beta^2, \\ \tau &= \frac{1}{2m\delta} \left[2m(\varepsilon + \Omega l) - k^2 + m\omega l + \frac{1}{4}m^2(\delta^2 + \omega^2)\beta^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Assim, vamos supor que $h(y) \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow \infty$ e $y \rightarrow 0$. Para β^2 como "muito pequeno", e quando $r \rightarrow 0$ consideramos $y \rightarrow 0$ sem perda de generalidade (MAIA; BAKKE, 2019a). Então, a solução da Eq. (3.71),

$$h(y) = e^{-\frac{y}{2}} y^{|\gamma|/2} {}_1F_1\left(\frac{|\gamma|}{2} + \frac{1}{2} - \tau, |\gamma| + 1; y\right), \quad (3.73)$$

como visto anteriormente a função ${}_1F_1(a, b; y)$ $\left(\frac{|\gamma|}{2} + \frac{1}{2} - \tau, |\gamma| + 1; y\right)$ é a hipergeométrica confluyente (ARFKEN; WEBER, 2005). Assumindo o comportamento da função,

$${}_1F_1(a, b; y) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^y y^{a-b} [1 + \mathcal{O}(|y|^{-1})]. \quad (3.74)$$

Como a função diverge para valores $y \rightarrow \infty$, impomos a condição $a = -n$. Logo $a = \frac{|\gamma|}{2} + \frac{1}{2} - \tau$, obtemos os níveis de energia do sistema:

$$\varepsilon_{n,l} = -\Omega l + \sqrt{\omega^2 + 4\omega\Omega} \left(n + \frac{|\gamma|}{2} + \frac{1}{2}\right) - \omega \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} m \omega \Omega \beta^2 + \frac{k^2}{2m}. \quad (3.75)$$

Assim, a Eq. (3.75) corresponde aos níveis de Landau na presença do defeito topológico de deslocação em espiral em um referencial com rotação (MAIA; BAKKE, 2020). Podemos observar a quebra de degenerescência dos níveis devido aos efeitos de rotação e da topologia. Um aspecto a ser observado é o momento angular γ que decorre dos efeitos da deslocação e também do meio. Sob o mesmo ponto de vista da seção anterior, uma vez que não há interação do elétron com o defeito topológico, por se tratar de um delta, a influência da deslocação em espiral nos níveis de energia por meio do momento angular efetivo γ que dá origem a um análogo do efeito AB⁸ para os estados ligados (MARQUES CLAUDIO FURTADO¹; MORAES, 2001).

Outro aspecto é a influência da rotação sobre os níveis de energia. A primeira contribuição é o acoplamento entre o momento angular e a velocidade angular Ω dado no primeiro termo do lado direito da Eq. (3.75) chamado de *Page-Werner* (WERNER; COLELLA, 1979). A segunda contribuição é dada pela frequência angular $\delta = \sqrt{\omega^2 + 4\omega\Omega}$. Comparando com a frequência de ciclotron dos níveis de Landau $\omega = qb_0/m$, temos que a rotação modifica a frequência angular do sistema, produzindo um novo termo efetivo δ .

Finalmente, há contribuições para os níveis de energia que surgem tanto dos efeitos de rotação, quanto do defeito topológico de deslocação em espiral. Caso o termo de rotação $\Omega = 0$,

$$\varepsilon_{n,l} = \omega \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|\gamma|}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{k^2}{2m}, \quad (3.76)$$

recuperamos os níveis de Landau obtidos na seção anterior (3.60) (MAIA; BAKKE, 2020).

⁸ Efeito do tipo Aharonov-Bohm (AB), para mais detalhes no apêndice B

4 Dinâmica Quântica Relativística em Sistemas com Defeito Topológico de Deslocação em Espiral

Neste capítulo, vamos considerar o espaço-tempo com deslocação em espiral e primeiramente analisar a dinâmica quântica do campo de Dirac sujeito a um potencial de *hard-wall*. Buscando soluções para estados ligados e discutindo a influência da topologia do espaço-tempo sobre os níveis de energia e analisamos os efeitos de rotação no campo de Dirac na presença do defeito topológico de deslocação em espiral no espaço-tempo.

Mostramos assim como no caso não-relativístico, que tanto a rotação quanto a topologia do espaço-tempo submetem uma restrição aos valores da coordenada radial. Além disso, analisamos a interação relativística de um elétron com um campo magnético uniforme com deslocação em espiral no espaço-tempo. Mostrando que há soluções analíticas para a equação de Dirac, onde o espectro de energia correspondente aos níveis relativísticos de Landau com influência da topologia dando origem a efeitos análogos ao AB.

Os estudos presentes neste capítulo foram publicados nas seguintes revistas: *The European Physical Journal C*; *Communications in Theoretical Physics*.

A estrutura deste capítulo é a seguinte: na seção 4.1, apresentamos o elemento de linha do espaço-tempo de deslocamento em espiral. Em seguida, confinamos a partícula de Dirac por um potencial do tipo *hard-wall* e analisamos os efeitos da topologia do espaço-tempo sobre os níveis de energia relativístico; na seção 4.2, mostramos que há soluções analíticas para equação de Dirac podem ser obtidas e com termos que descrevem efeitos análogos ao Aharonov-Bohm; na seção 4.3, colocamos o sistema em rotação ainda na presença da deslocação em espiral na equação de Dirac e confinamos também pelo potencial do tipo *hard-wall* em busca dos estados ligados.

4.1 Defeito topológico de deslocação em espiral na equação de Dirac com potencial do tipo *hard-wall*

Nesta seção vamos analisar uma partícula da natureza do elétron, ou seja, com carga elétrica e spin 1/2 no espaço-tempo com defeito topológico de deslocação em espiral representado pela geometria do espaço através do tensor métrico, relações de Maurer-Carta¹ na equação de Dirac e confinada a uma parede de potencial. Logo, o elemento de linha que descreve a topologia é dado pela expressão:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + 2\beta dr d\varphi + (\beta^2 + r^2) d\varphi^2 + dz^2, \quad (4.1)$$

a constante β é um parâmetro relacionado a deslocação no próprio defeito topológico. Tal termo é obtido através do vetor de *Burgers* $\vec{b}$, dado por, $\beta = |\vec{b}|/2\pi$. O referencial local descrito pela base não-coordenada é dado por $\hat{\theta}^a = e^a{}_{\mu}(x) dx^{\mu}$ e as componentes $e^a{}_{\mu}(x)$ são as tetradas para aplicar as mudanças de bases obedecendo ao princípio da equivalência que satisfazem a relação (WEINBERG, 1972):

$$g_{\mu\nu}(x) = e^a{}_{\mu}(x) e^b{}_{\nu}(x) \eta_{ab}. \quad (4.2)$$

Note que $\eta_{ab} = \text{diag}(-+++)$ é o tensor de Minkowski e as componentes das bases não-coordenadas $e^a{}_{\mu}(x)$ formam o quadro de referência local que precisamos para resolver o nosso sistema (BAKKE; FURTADO, 2013). Assim, um conjunto de tetradas que satisfaça as condições da Eq. (4.2) para comparar os termos da base com o elemento de linha do defeito topológico de deslocação em espiral,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} dx^{\nu} = e^a{}_{\mu}(x) e^b{}_{\nu}(x) \eta_{ab} dx^{\mu} dx^{\nu} = \hat{\theta}^a \hat{\theta}^b \eta_{ab}, \quad (4.3)$$

sendo $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico. Dessa forma podemos expandir os termos $\hat{\theta}^a = e^a{}_{\mu} dx^{\mu}$ e substituir na equação (4.3),

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^0 &= e^0{}_t dt + e^0{}_r dr + e^0{}_{\varphi} d\varphi + e^0{}_z dz = dt, \\ \hat{\theta}^1 &= e^1{}_t dt + e^1{}_r dr + e^1{}_{\varphi} d\varphi + e^1{}_z dz = dr + \beta d\varphi, \\ \hat{\theta}^2 &= e^2{}_t dt + e^2{}_r dr + e^2{}_{\varphi} d\varphi + e^2{}_z dz = r d\varphi, \\ \hat{\theta}^3 &= e^3{}_t dt + e^3{}_r dr + e^3{}_{\varphi} d\varphi + e^3{}_z dz = dz. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Com as relações anteriores substituímos na Eq. (4.3) e comparamos cada termo com ds^2 para encontrar nosso conjunto de tetradas $e^a{}_{\mu}(x)$. A matriz inversa podemos

¹ Também conhecido na literatura como Einstein-Cartan

encontrar com a relação $e^a_\mu(x)e^\mu_b(x) = \delta^a_b$. Dessa forma, nosso conjunto de tetradas mais a métrica é definida por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \beta^2 + r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$e^a_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad e^\mu_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\beta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Assim, ao resolver as equações da estrutura de Maurer-Cartan $T^a = d\hat{\theta}^a + \omega^a_b \wedge \hat{\theta}^b$ e consequentemente obter as componentes não nulas da conexão um-forma² $\omega^a_b = \omega^a_{\mu b}(x) dx^\mu$, e a torção duas-forma³ $T^a = T^a_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ conseguimos levar as informações da torção para o sistema. Portanto, os componentes não nulos da torção duas-forma e da conexão um-forma são:

$$T^1 = 2\pi\beta\delta(r)\delta(\varphi) dr \wedge d\varphi; \quad \omega_\varphi^2_1 = -\omega_\varphi^1_2 = 1, \quad (4.7)$$

temos um espaço-tempo na presença de torção. As informações sobre a torção do espaço-tempo podem ser introduzidas na equação de Dirac através dos componentes irreduzíveis do tensor de torção. Então, com o tensor duas-forma dado pela Eq. (4.7), temos:

$$T_\varphi = T^r_{\varphi r} = -T^r_{r\varphi} = -2\pi\beta\delta(r)\delta(\varphi), \quad (4.8)$$

o traço do quadrivetor T_μ que é introduzido na equação de Dirac através de um acoplamento não mínimo dado por (SHAPIRO, 2002):

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \rightarrow i\gamma^\mu \nabla_\mu + \nu \gamma^\mu T_\mu, \quad (4.9)$$

sendo ν um parâmetro (sem dimensão) arbitrário do acoplamento não mínimo e $\nabla_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{4}\omega_{\mu ab}(x)\Sigma^{ab}$. No pano de fundo do espaço-tempo curvo com presença de torção, a equação de Dirac é escrita em termos das derivadas covariantes, que por sua vez, se definem como,

$$\tilde{\nabla}_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{4}\omega_{\mu ab}(x)\Sigma^{ab} + \frac{i}{4}K_{\mu ab}(x)\Sigma^{ab}. \quad (4.10)$$

² Conhecido na literatura como *one-form*

³ Conhecido na literatura como *two-form*

Os termos de $\Gamma_\mu = \frac{i}{4}\omega_{\mu ab}(x)\Sigma^{ab}$ representam a conexão espinorial e a expressão $K_{\mu ab}$ as conexões um-forma da derivada covariante na presença de torção. As matrizes γ^a são definidas em um referencial local e correspondem as matrizes de Dirac no espaço-tempo de Minkowski (GREINER, 2000),

$$\gamma^0 = \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (4.11)$$

$$\gamma^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}; \Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Observe que $\vec{\Sigma}$ é um vetor de spin e as matrizes σ^i são as matrizes de Pauli, que por sua vez, satisfazem as relações $(\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i) = 2\eta^{ij}$. Podemos escrever a equação de Dirac na forma:

$$i\gamma^\mu \tilde{\nabla}_\mu \psi - m\psi = 0, \quad (4.13)$$

aplicando a conexão espinorial e mudando os índices de $\gamma^\mu = e^\mu_a \gamma^a$ para representação local das matrizes de Dirac, a equação torna-se:

$$i\gamma^a e^\mu_a \partial_\mu \psi - \frac{\gamma^c}{4} e^\mu_c \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab} \psi - m\psi = 0, \quad (4.14)$$

usando o campo de tetradas da Eq. (4.6) mais a conexão espinorial da Eq. (4.10) na equação de Dirac, podemos escrever as expressões em relação a base local. Lembrando que os termos dados por T_μ são nulos quando aplicados na equação de Dirac, devido ao termo delta da Eq. (4.8) que precisa desaparecer para $r \neq 0$ e a função de onda ser zero na origem.

$$m\psi = i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right) \psi + i\frac{\gamma^2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial r} - i\nu T_\varphi \right) \psi + i\gamma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (4.15)$$

a equação (4.15) escrita sem o termo de T_μ e para as matrizes α^i ,

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = m\hat{\beta}\psi - i\hat{\alpha}^1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right) \psi - i\frac{\hat{\alpha}^2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi - i\hat{\alpha}^3 \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (4.16)$$

Uma solução da equação (4.16) de Dirac pode ser dada na forma de combinação de duas soluções que consistem de vetores coluna de quatro componentes agrupadas em dois bi-espinores, cada função representa dois estados para uma energia:

$$\psi = e^{-i\epsilon t} \begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

sendo $\phi = \phi(r, \varphi, z)$ e $\xi = \xi(r, \varphi, z)$ duas funções espinoriais com duas componentes, conhecidas como *two-spinors*. Substituindo a solução estática da Eq. (4.17) na equação de Dirac (4.16), obtemos duas equações acopladas ϕ e ξ . O primeiro acoplamento é

$$(\varepsilon - m)\phi = \left(-i\sigma^1 \frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\sigma^1}{2r} + i\frac{\beta\sigma^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\sigma^2}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - i\sigma^3 \frac{\partial}{\partial z}\right)\xi, \quad (4.18)$$

a segunda equação acoplada é dada por

$$(\varepsilon + m)\xi = \left(-i\sigma^1 \frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\sigma^1}{2r} + i\frac{\beta\sigma^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\sigma^2}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - i\sigma^3 \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi, \quad (4.19)$$

eliminando ξ na Eq. (4.19) e substituir na equação Eq. (4.18), desta forma obtemos a equação diferencial:

$$\begin{aligned} (\varepsilon^2 - m^2)\phi = & -\left(1 + \frac{\beta^2}{r^2}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3}\right) \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + i\frac{\sigma^3}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{4r^2} \phi + \\ & -i\frac{\beta\sigma^3}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + i\frac{\beta\sigma^3}{2r^3} \phi - \frac{\beta}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \frac{2\beta}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi \partial r} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

A solução da Eq. (4.20) pode ser escrita em termos dos autovalores da componente-z do momento angular total e do operador de momento linear: $\phi(r, \varphi, z) = e^{i(l+\frac{1}{2})\varphi + ikz} u(r)$, onde k é uma constante e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$. Além disso, temos que $\sigma^3 \phi = \pm \phi = s\phi$. Acrescenta-se também que $k = 0$ para uma análise no plano. Neste caso, a substituição da solução na Eq. (4.20), obtemos a equação radial:

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{r^2}\right) \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3} - i\frac{2\beta\zeta}{r^2}\right) \frac{du}{dr} - \frac{\zeta^2}{r^2} u + i\frac{\beta\zeta}{r^3} u + \tau^2 u = 0, \quad (4.21)$$

os novos parâmetros foram definidos da seguinte forma:

$$\zeta = l + \frac{1}{2}(1 - s); \quad \tau^2 = \varepsilon^2 - m^2. \quad (4.22)$$

Em busca de uma solução para equação radial dada pela expressão da Eq. (4.21), escrevemos a solução seguinte na forma de *anzats*⁴ para eliminar os termos imaginários da equação (4.21) (VITORIA; BAKKE, 2018):

$$u(r) = \exp\left[i\zeta \tan^{-1}\left(\frac{r}{\beta}\right)\right] \times f(r), \quad (4.23)$$

onde $f(r)$ é uma função desconhecida. Logo, substituindo a função de onda radial (4.23) na Eq. (4.21), temos

⁴ Para ser mais preciso, essa solução é obtida pelo Software *Maple*

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{r^2}\right) \frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3}\right) \frac{df}{dr} - \frac{\zeta^2}{(r^2 + \beta^2)} f + \tau^2 f = 0. \quad (4.24)$$

Além disso, definimos $x = \tau\sqrt{r^2 + \beta^2}$ e, portanto, podemos reescrever a Eq. (4.24) na forma:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} - \frac{\zeta^2}{x^2} f + \frac{1}{4} f = 0. \quad (4.25)$$

Deste modo, a Eq. (4.25) corresponde à equação de Bessel (4.15) e Eq. (4.20). Com solução geral dada por

$$f(x) = AJ_{|\zeta|}(x) + BN_{|\zeta|}(x), \quad (4.26)$$

onde $J_{|\zeta|}(x)$ e $N_{|\zeta|}(x)$ são as soluções de Besse de primeiro e segundo tipos respectivamente (ARFKEN; WEBER, 2005). Uma solução regular na origem é obtida tomando $B = 0$ na Eq. (4.26), porque a função $N_{|\zeta|}(x)$ diverge na origem. Então, a solução para a Eq. (4.24) torna-se

$$f(x) = AJ_{|\zeta|}(x), \quad (4.27)$$

com A representando uma constante. A seguir, consideremos a partícula de Dirac confinada a um potencial do tipo *hard-wall*. Esta barreira impõe que a função de onda desapareça em um valor fixo da coordenada radial r_0 . Portanto, a função $f(x)$ deve ser zero $x \rightarrow x_0 = \tau\sqrt{r_0^2 + \beta^2}$:

$$f(x_0) = 0, \quad (4.28)$$

assumimos que $x_0 \gg 1$. Desta maneira, temos:

$$J_{|\zeta|}(x_0) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x_0}} \cos\left(x_0 - \frac{|\zeta|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (4.29)$$

Obtemos a seguinte condição para as soluções assintóticas de Bessel,

$$x_0 - \frac{|\zeta|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (4.30)$$

com n ($n = 0, 1, 2, \dots$) sendo o número quântico relacionado aos modos radiais. Em seguida, ajustamos os termos para obter

$$\varepsilon_{n,l,s} \approx \pm \sqrt{m^2 + \frac{\pi^2}{(r_0^2 + \beta^2)} \left(n + \frac{|\zeta|}{2} + \frac{3}{4}\right)^2}. \quad (4.31)$$

Concluimos que os níveis de energia relativístico dados na Eq. (4.31) quando uma partícula de Dirac é confinada por um potencial do tipo *hard-wall* no espaço-tempo com defeito topológico tipo deslocação em espiral (MAIA; BAKKE, 2019b). Os efeitos decorrentes da topologia são dados pela presença do raio efetivo $\rho_0 = \sqrt{r_0^2 + \beta^2}$. Além disso, não há análogo do efeito Aharonov-Bohm para os estados ligados (PESHKIN; TONOMURA, 1989).

Agora vamos obter o limite não-relativístico dos níveis de energia, para isso vamos utilizar a aproximação de Foldy-Wouthuysen⁵ (FW). Dessa forma, os níveis de energia não-relativísticos são:

$$\varepsilon_{n,l,s} \approx m + \frac{\pi^2}{2m(r_0^2 + \beta^2)} \left(n + \frac{|\zeta|}{2} + \frac{3}{4} \right)^2. \quad (4.32)$$

Portanto, a Eq. (4.32) representa o espectro de energia não-relativístico de uma partícula de Dirac confinada a uma barreira de potencial do tipo *hard-wall* na presença do defeito topológico de deslocação em espiral (MAIA; BAKKE, 2019b). Mesmo no limite não-relativístico, há contribuições decorrentes da topologia dada pelo raio efetivo $\rho_0 = \sqrt{r_0^2 + \beta^2}$. Do mesmo modo que no caso relativístico, não apresenta efeitos tipo Aharonov-Bohm para estados ligados.

Por fim, os níveis de energia obtidos pela aproximação de Foldy-Wouthuysen são os mesmo encontrados no Capítulo 3 para uma partícula confinada por potencial do tipo *hard-wall* na presença de defeito topológico de deslocação em espiral para o caso não-relativístico Eq. (3.16), confirmando que o método utilizado nessa seção é consistente para modelos teóricos, devido ao fato que retornamos para um resultado anterior.

⁵ O limite não-relativístico também pode ser obtido por expansão do termo de massa de repouso. Para mais detalhes da aproximação de Foldy-Wouthuysen (FW) Apêndice C

4.2 Quantização relativística de Landau

Um ponto levantado por (JUAN; VOZMEDIANO, 2010) é a possibilidade de descrever uma deslocação de borda no grafeno como um par de desclinações. Em particular, essa configuração no grafeno pode ser descrita com boa aproximação considerando o defeito topológico de deslocação em espiral. Portanto, nesta seção vamos analisar um elétron que interage com um campo magnético uniforme na presença de uma deslocação em espiral. No contexto da gravitação, essa interação pode ser vista como a quantização relativística de Landau no espaço-tempo. Mostramos que soluções analíticas para equação de Dirac podem ser obtidas e com termos que descrevem efeitos análogos ao AB. Na primeira parte analisamos a interação de um elétron relativístico com um campo magnético, buscando soluções de estados ligados para equação de Dirac e depois apresentamos nossos resultados.

Como a diferença desse sistema para o descrito na seção anterior é a presença com campo magnético uniforme, o elemento de linha será o mesmo utilizado, assim como também, o conjunto de tetradas. Dessa forma, podemos escrever o potencial eletromagnético do quadrivetor no referencial local como $A_2 = B_0 r/2$. De mesmo modo, a equação covariante de Dirac é,

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi + \mu \gamma^\mu T_\mu \psi - q\gamma^\mu A_\mu \psi = m\psi, \quad (4.33)$$

levando em consideração o sistema de coordenadas cilíndrico e as unidades naturais. Na região para $r \neq 0$, a contribuição associada a T_μ pode ser desprezada. Portanto, ao usar o campo de tetradas da Eq. (4.6), a equação de Dirac (BAKKE; FURTADO, 2013):

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \psi}{\partial t} = m\gamma^0 \psi - i\hat{\alpha}^1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right) \psi - i\frac{\hat{\alpha}^2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi \\ - i\hat{\alpha}^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{qB_0 r}{2} \hat{\alpha}^2 \psi, \end{aligned} \quad (4.34)$$

com solução da Eq. (4.34) dada pela relação,

$$\psi = e^{-i\epsilon t} \begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

onde $\phi = \phi(r, \varphi, z)$ e $\xi = \xi(r, \varphi, z)$ são dois bi-espinores. Então, substituindo Eq. (4.35) na equação de Dirac (4.34), obtemos um sistema de equações acopladas. A primeira equação acoplada é,

$$(\epsilon - m) \phi = \left(-i\sigma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i\sigma^1}{2r} + i\frac{\beta\sigma^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\sigma^2}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - i\sigma^3 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{qB_0 r}{2} \sigma^2 \right) \xi, \quad (4.36)$$

a segunda equação acoplada,

$$(\varepsilon + m) \xi = \left(-i\sigma^1 \frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\sigma^1}{2r} + i\frac{\beta\sigma^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\sigma^2}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - i\sigma^3 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{qB_0 r}{2} \sigma^2 \right) \phi. \quad (4.37)$$

Resolvendo o sistema de equações acopladas, obtemos a seguinte expressão diferencial de segunda ordem:

$$\begin{aligned} (\varepsilon - m^2) \phi = & - \left(1 + \frac{\beta^2}{r^2} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3} + \frac{i\beta\sigma^3}{r^2} - iqB_0\beta \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{i\sigma^3}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{1}{4r^2} \phi + \frac{i\beta\sigma^3}{2r^3} \phi - \frac{\beta}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \frac{2\beta}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi \partial r} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{qB_0\sigma^3}{2} \phi - iqB_0 \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{iqB_0}{2} \frac{\beta}{r} \phi + \frac{q^2 B_0^2 r^2}{4}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Levando em consideração que ϕ é autofunções de σ^3 , então $\sigma^3 \phi = \pm \phi = s\phi$ com $(s = \pm 1)$. Basicamente, a solução da equação (4.38) pode ser escrita em termos dos autovalores da componente z do momento angular total e do operador momento linear como,

$$\phi(r, \varphi, z) = e^{i(l+\frac{1}{2})\varphi + ikz} u(r), \quad (4.39)$$

sendo $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ e k é uma constante. Porém, como nossa análise é feita para o caso bidimensional, o termo $k = 0$. Assim, substituindo a solução da Eq. (4.39) na Eq. (4.38), obtemos a equação radial,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\beta^2}{r^2} \right) \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3} - i\frac{2\beta\nu}{r^2} - im\omega\beta \right) \frac{du}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} u + i\frac{\beta\nu}{r^3} u - \frac{im\omega\beta}{2r} u + \\ - \frac{m^2\omega^2 r^2}{4} u + \tau u = 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

com os parâmetros definidos como:

$$\begin{aligned} \nu &= l + \frac{1}{2} (1 - s); \\ \omega &= \frac{qB_0}{m}; \\ \tau &= \varepsilon^2 - m^2 - m\omega\nu - sm\omega. \end{aligned} \quad (4.41)$$

A solução para equação radial (4.40) é dada por:

$$u(r) = \exp \left[i \left(\nu - \frac{m\omega\beta^2}{2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{r}{\beta} \right) \right] \times e^{im\omega\beta r/2} \times f(r), \quad (4.42)$$

onde $f(r)$ é uma função desconhecida. Derivando a solução da Eq. (4.42) e substituindo as equações na equação radial (4.40), para encontrar a próxima expressão,

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{r^2}\right) \frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3}\right) \frac{df}{dr} - \frac{(\nu^2 - m\omega\nu\beta^2)}{r^2 + \beta^2} f - \frac{m^2\omega^2 r^4}{4(r^2 + \beta^2)} f + \tau f = 0. \quad (4.43)$$

Assim como no caso da seção anterior, definimos uma nova variável $x = \frac{m\omega}{2}(r^2 + \beta^2)$. Reescrevendo a equação anterior,

$$xf'' + f' - \frac{\zeta^2}{4x}f - \frac{x}{4}f + \bar{\tau}f = 0, \quad (4.44)$$

onde,

$$\begin{aligned} \zeta &= \nu - \frac{m\omega\beta^2}{2}; \\ \bar{\tau} &= \frac{1}{2m\omega} \left(\tau + \frac{m^2\omega^2\beta^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Observe que quando $r \rightarrow \infty$ a variável x tende a $x \rightarrow \infty$. Além disso, quando $r = 0$, a variável x torna-se $x = \frac{m\omega}{2}\beta^2$. Para o caso do capítulo anterior, o valor do parâmetro β em um sólido é da ordem do deslocamento interatômico, assim β é considerado "muito pequeno" na situação deste capítulo. Continuando a análise assintótica da função de onda, quando $r \rightarrow 0$ vamos considerar que a função $r \rightarrow 0$ como discutido anteriormente. Com o objetivo de ter a função de onda radial normalizada dentro do intervalo de $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$, podemos escrever a solução da Eq. (4.44) na forma:

$$f(x) = x^{|\zeta|/2} e^{-x/2} {}_1F_1\left(\frac{|\zeta|}{2} + \frac{1}{2} - \bar{\tau}, |\zeta| + 1; x\right), \quad (4.46)$$

onde ${}_1F_1\left(\frac{|\zeta|}{2} + \frac{1}{2} - \bar{\tau}, |\zeta| + 1; x\right)$ é a função hipergeométrica confluyente com o termo dado pela relação,

$${}_1F_1(a, b; x) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-b} [1 + \mathcal{O}(|x|^{-1})], \quad (4.47)$$

portanto, diverge quando $x \rightarrow \infty$. A solução para estados ligados da equação de Dirac pode ser obtida se $a = -n$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$). Com essa condição, a função torna-se regular quando $x \rightarrow \infty$. Com $a = \frac{|\zeta|}{2} + \frac{1}{2} - \bar{\tau}$, chegamos aos níveis de energia do sistema,

$$\varepsilon_{n,l} = \pm \sqrt{m^2 + 2m\omega \left[n + \frac{|\zeta|}{2} + \frac{\zeta}{2} + \frac{1}{2}(1-s) \right]}. \quad (4.48)$$

O espectro de energia da Eq. (4.48) decorre da interação de um elétron relativístico com um campo magnético uniforme (MAIA; BAKKE, 2021b). Logo, corresponde aos

níveis relativísticos de Landau no espaço-tempo com deslocação em espiral. Os efeitos de torção desse espaço-tempo produzem um momento angular efetivo ζ na Eq. (4.48), embora não exista interação entre o elétron e o defeito topológico. Essa contribuição é análogo ao descrito por Peshkin e Tonomura ([PESHKIN; TONOMURA, 1989](#)).

Peshkin e Tonomura ao considerar uma carga pontual que se move em um anel de raio R na presença de um longo solenoide de raio $r_0 < R$, concêntrico ao anel, eles mostraram que o número quântico do momento angular é modificado por $l_{eff} = l - e\Phi/2\pi$ (onde Φ é o fluxo magnético do solenoide e e a carga elétrica). Por outro lado, também demonstraram que os autovalores de energia são determinados por l_{eff} , embora não exista interação entre a carga e o campo magnético dentro do solenoide. Este efeito quântico caracterizado pela influência do fluxo magnético nos autovalores de energia é conhecido como efeito Aharonov-Bohm para estados ligados.

No presente trabalho, o momento angular efetivo ζ mostra uma alteração no número quântico do momento angular análogo ao obtido por Peshkin e Tonomura. Consequentemente, a influência do defeito topológico do espaço-tempo nos níveis relativísticos de Landau caracteriza um efeito de mesma natureza. Não só, os níveis de energia da Eq. (4.48) modificam a degenerescência dos níveis relativísticos de Landau. Enfim, o termo m^2 é a contribuição decorrente da massa de repouso e os sinais $\pm$ caracterizam as soluções positivas e negativas da Equação de Dirac ([GREINER, 2000](#)). Por consequência, se $\beta = 0$ os níveis relativísticos de Landau tornam-se os descritos no espaço-tempo de Minkowski ([BUENO; CARVALHO, 2012](#)).

A seguir, aplicamos a aproximação de FW⁶ para obter o limite não-relativístico nos níveis de energia ([GREINER, 2000](#)). Dessa forma, a equação (4.48) torna-se,

$$\varepsilon_{n,l} \approx m + \omega \left[n + \frac{|\zeta|}{2} + \frac{\zeta}{2} + \frac{1}{2}(1 - s) \right], \quad (4.49)$$

o primeiro termo é a contribuição que decorre da massa de repouso da partícula ([MAIA; BAKKE, 2021b](#)). O segundo, corresponde aos níveis de Landau na presença de uma deslocação em espiral, análogo ao obtido na Eq. (3.60). Portanto, fica claro no limite não-relativístico que a degenerescência dos níveis de Landau dado pela Eq. (4.49) é alterada pelos efeitos do defeito topológico. Em síntese, uma vez que não há interação entre o elétron e o defeito, existe um análogo do efeito AB para os estados ligados ([NETTO; FURTADO, 2008](#)).

⁶ Para mais detalhes no Apêndice C

4.3 Efeitos de rotação no campo de Dirac na presença de defeito topológico de deslocação em espiral

Nesta seção, mostramos que um sistema com rotação depende do parâmetro relacionado à torção do defeito topológico de deslocação em espiral e usa a singularidade da coordenada para impor onde a função de onda deve desaparecer, o que nos permite obter estados ligados.

Em suma, Landau e Lifshitz mostraram que o espaço-tempo de Minkowski tem um comportamento singular em grandes distâncias em referenciais com rotação uniforme. Isso pode ser visualizado realizando uma transformação de coordenadas ($\varphi \rightarrow \varphi + \omega t$), onde ω é a velocidade angular constante do referencial. Dessa forma, uma vez que o elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski em coordenadas cilíndricas é dado por $ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$, com a coordenada $\varphi \rightarrow \varphi + \omega t$ obtemos o elemento de linha:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \right) dt^2 + 2\omega r^2 d\varphi dt + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (4.50)$$

Podemos ver pelo elemento de linha acima que a coordenada radial fica restrita aos valores $0 < r < c/\omega$, o significado desta restrição é que se $r \geq c/\omega$ o elemento de linha torna-se positivo. Desse modo, a partícula teria velocidade maior que a velocidade da luz (LANDAU; LIFSHITZ, 1980). Assim, aplicamos uma transformação de coordenadas devido a rotação, dada por ($\varphi \rightarrow \varphi + \omega t$) no elemento de linha da equação (4.1) que representa a geometria do defeito topológico de deslocação em espiral. Consequentemente, o elemento de linha torna-se:

$$ds^2 = - \left(1 - \omega^2 \beta^2 - \omega^2 r^2 \right) dt^2 + 2\beta\omega dr dt + 2\omega \left(\beta^2 + r^2 \right) d\varphi dt + dr^2 + 2\beta dr d\varphi + \left(\beta^2 + r^2 \right) d\varphi^2 + dz^2. \quad (4.51)$$

Conforme mostrado que no espaço-tempo de Minkowski com sistema em rotação uniforme, o elemento de linha possui uma limitação na coordenada r devido a estrutura do cone de luz. Nesse caso, o elemento de linha da Eq. (4.51) nos mostra o mesmo comportamento. A coordenada radial é restrita pelo intervalo:

$$0 \leq r < \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \omega}{\omega}. \quad (4.52)$$

Assim, a coordenada radial é limitada pela velocidade angular e o parâmetro associado à torção no espaço-tempo.

Da mesma forma como feito no início do capítulo para encontrar o conjunto de tetradas, vamos aplicar o elemento de linha com rotação. Ao expandir os termos $\hat{\theta}^a = e^a_\mu(x)dx^\mu$ e substituir na equação (4.3),

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^0 &= e^0_t dt + e^0_r dr + e^0_\varphi d\varphi + e^0_z dz = dt, \\ \hat{\theta}^1 &= e^1_t dt + e^1_r dr + e^1_\varphi d\varphi + e^1_z dz = \beta\omega dt + dr + \beta d\varphi, \\ \hat{\theta}^2 &= e^2_t dt + e^2_r dr + e^2_\varphi d\varphi + e^2_z dz = r\omega dt + rd\varphi, \\ \hat{\theta}^3 &= e^3_t dt + e^3_r dr + e^3_\varphi d\varphi + e^3_z dz = dz.\end{aligned}\quad (4.53)$$

Analisar efeitos de rotação na partícula de Dirac no espaço-tempo de deslocação em espiral, precisamos definir o conjunto de tetradas e sua inversa, que são dadas da seguinte forma:

$$e^a_\mu(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega\beta & 1 & \beta & 0 \\ \omega r & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad e^\mu_a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\beta}{r} & 0 \\ -\omega & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Ao resolver as equações de Maurer-Cartan $T^a = d\hat{\theta}^a + \omega^a_b \wedge \hat{\theta}^b$ e consequentemente obter as componentes não nulas da conexão um-forma $\omega^a_b = \omega^a_\mu{}^b(x)dx^\mu$ e a torção duas-forma $T^a = T^a_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ (NAKAHARA, 2003). Logo,

$$\begin{aligned}T^1 &= 2\pi\beta\delta(r)\delta(\varphi)dr \wedge d\varphi; \\ \omega^2_\varphi{}^1(x) &= -\omega^1_\varphi{}^2(x) = 1; \\ \omega^2_t{}^1(x) &= -\omega^1_t{}^2(x) = \omega,\end{aligned}\quad (4.55)$$

no pano de fundo do espaço-tempo curvo com presença de torção, a equação de Dirac é escrita em termos das derivadas covariantes, que por sua vez, se define como,

$$\bar{\nabla}_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{4}\omega_{\mu ab}(x)\Sigma^{ab} + \frac{i}{4}K_{\mu ab}(x)\Sigma^{ab}. \quad (4.56)$$

A equação de Dirac na forma covariante é dada por,

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - m\Psi = 0, \quad (4.57)$$

substituindo a Eq. (4.56) na equação de Dirac na forma covariante obtemos,

$$i\gamma^a e^\mu_a \partial_\mu - \frac{1}{4}\gamma^c e^\mu_c \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab} \Psi - m\Psi = 0, \quad (4.58)$$

ao usar a Eq. (4.54) e a Eq. (4.55) na equação de Dirac, obtemos o seguinte:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = m\hat{\beta}\Psi + i\omega\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} - i\hat{\alpha}^1\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r}\right)\Psi - i\frac{\hat{\alpha}^2}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \beta\frac{\partial}{\partial r}\right)\Psi - i\hat{\alpha}^3\frac{\partial\Psi}{\partial z}. \quad (4.59)$$

Seguindo os passos da seção anterior, uma solução descrita por $u(r)$ para obter a primeira equação radial,

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{r^2}\right)\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2}{r^3} - i\frac{2\beta\zeta}{r^2}\right)\frac{du}{dr} - \frac{\zeta^2}{r^2}u + i\frac{\beta\zeta}{r^3}u + \theta^2u = 0, \quad (4.60)$$

com o parâmetro θ ,

$$\theta^2 = [\varepsilon + \omega(l + 1/2)]^2 - m^2. \quad (4.61)$$

Analogamente, aplicamos uma mudança de variável dada por $y = \theta\sqrt{r^2 + \beta^2}$. Uma vez que a coordenada radial é restrita aos valores definidos na Eq. (4.52), a função de onda é normalizada dentro da região Física do espaço-tempo permitida. Consequentemente, a função de onda precisa tender a zero quando $r \rightarrow \frac{\sqrt{1-\omega^2\beta^2}}{\omega}$. Nessa perspectiva, definimos $r_0 = \frac{\sqrt{1-\omega^2\beta^2}}{\omega}$, assim como também, $y_0 = \theta\sqrt{r_0^2 + \beta^2} = \frac{\theta}{\omega}$. Dada as devidas condições, a função de onda:

$$f(y \rightarrow y_0 = \theta/\omega) = 0. \quad (4.62)$$

Considerando que $y_0 \gg 1$, usamos a relação Eq. (4.29) e seguimos analogamente como foi feito na seção anterior para encontrar os níveis de energia⁷.

$$\varepsilon_{n,l,s} \approx -\omega(l + 1/2) \pm \sqrt{m^2 + \pi^2\omega^2\left(n + \frac{|\zeta|}{2} + \frac{3}{4}\right)^2}, \quad (4.63)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$ é o número quântico associados aos modos radiais.

Portanto, o espectro de energia da Eq. (4.63) são os níveis de energia relativísticos para uma partícula de Dirac confinada a um potencial do tipo *hard-wall* no espaço-tempo de deslocação em espiral sob efeitos de rotação (MAIA; BAKKE, 2019b).

Nesse caso, uma vez que a região Física do espaço-tempo é definida no intervalo $0 \leq r < \frac{\sqrt{1-\omega^2\beta^2}}{\omega}$, o espaço geométrico desempenhou o papel de potencial do tipo *hard-wall*. Observe que não existe influência da topologia do espaço-tempo de deslocação em espiral sobre o espectro de energia relativístico. Além disso, devido a rotação, há uma

⁷ Procedimento é análogo ao feito nas seções anteriores para os sistemas relativísticos, mas com parâmetros diferentes

contribuição que corresponde ao acoplamento entre a velocidade angular ω e o momento angular l dado no primeiro termo, que corresponde a um efeito tipo Sagnac (HEHL; NI, 1990). Comparando com os níveis de energia relativísticos obtidos na ausência de rotação, podemos notar que o momento angular total $\zeta = l + \frac{1}{2}(1 - s)$ permanece inalterado em relação a rotação e a topologia de deslocação em espiral. Consequentemente, não há efeito do tipo AB.

A seguir, encontramos o limite não-relativístico nos níveis de energia da Eq. (4.63) pelo método de aproximação de FW⁸,

$$\varepsilon_{n,l,s} \approx \frac{\pi^2 \omega^2}{2m} \left(n + \frac{|\zeta|}{2} + \frac{3}{4} \right)^2 - \omega (l + 1/2). \quad (4.64)$$

Então, o espectro de energia (4.64) origina-se do confinamento de uma partícula de Dirac não-relativística a um potencial do tipo *hard-wall* no espaço-tempo de deslocação em espiral sob efeitos de rotação (MAIA; BAKKE, 2019b). Também podemos observar no caso não-relativístico que não existe influência da topologia nos níveis de energia. Bem como, o espectro de energia na ausência de defeito obtido em (BAKKE, 2013). Os efeitos da rotação também produzem o acoplamento entre a velocidade angular ω e o momento angular l dado no último termo. Esse acoplamento é conhecido como Page-Werner (HEHL; NI, 1990). Além disso, em contraste com os níveis de energia não-relativístico sem rotação, temos que o momento angular total $\zeta = l + \frac{1}{2}(1 - s)$ não é modificado pela rotação e nem pela topologia.

⁸ Para mais detalhes no Apêndice C

5 Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi estudar as possíveis modificações nas propriedades eletrônicas de determinados sistemas na presença de defeito topológico de deslocação em espiral. Os trabalhos foram apresentados em duas partes, uma relativística e outra não-relativística que se complementam. Em primeiro lugar, nós investigamos os efeitos da topologia em uma partícula com carga confinada a um potencial do tipo *hard-wall*. Obtivemos o espectro de energia Eq. (3.16), onde os efeitos decorrentes da deformação deram origem a um raio efeito $\sqrt{r_0^2 + \beta^2}$, devido a deformação no meio, assim como também, uma contribuição da deslocação por um termo proporcional ao parâmetro topológico β . Porém, em sistemas análogos, mas para desclinações, efeitos do tipo AB apareceram no espectro de energia (HEHL; NI, 1990), mas nenhuma contribuição similar surge para nossa configuração com deslocação.

Além disso, adicionamos ao sistema anterior um campo elétrico $\vec{E} = \frac{\lambda}{2} r \hat{r}$ produzido por uma distribuição não uniforme de cargas ao longo de um cilindro não condutor e conseguimos encontrar os níveis de energia desse sistema de forma analítica na Eq. (3.22). Um raio efetivo presente no espectro e há um termo proporcional não só ao defeito topológico, como no caso anterior, mais também dependente da distribuição linear de carga.

Eventualmente, aplicamos a condição do parâmetro do defeito de deslocação em espiral β^2 ser considerado "muito pequeno" em determinadas situações. Com propósito de analisar melhor os limites dessa aplicação no sistema com campo elétrico não uniforme, passamos a considerar o termo β^2 e encontramos um ponto de corte induzido pela topologia da Eq. (3.28) e um limite superior para os modos radiais, dados pela Eq. (3.33) no espectro de energia da Eq. (3.32). Apesar da análise ser feita para duas dimensões, os níveis de energia não dependem do número quântico do momento angular l , resultando assim em níveis degenerados de energia, semelhante aos níveis de Landau. Não penas, mostramos que o ponto de corte induzido pela topologia de deslocação em espiral produz o Período Clássico na Eq. (3.48) e o *revival time* pela Eq. (3.49) em termos de n no contexto dos *quantum revivals*.

Em seguida, pesquisamos a interação de uma partícula com carga e sem spin na presença de um campo magnético uniforme conhecido como quantização de Landau com defeito topológico de deslocação em espiral. Encontramos uma modificação nos níveis de energia representando uma quebra na degenerescência dos níveis de Landau devido a topologia. Além disso, um momento angular efetivo dado por γ no espectro de energia da Eq. (3.60). Esses resultados são promissores para um possível estudo de efeito Hall

quântico no Grafeno, como será abordado nos resultados dos estudos na equação de Dirac.

Com a finalidade de explorar mais a situação anterior, consideramos um referencial em rotação com velocidade angular constante. Mostramos que há soluções analíticas quando aplicamos um referencial com rotação e observamos pelo espectro de energia Eq. (3.75), uma vez que o defeito topológico é representado como um delta, a influência da deslocação em espiral por meio do momento angular efetivo γ dando origem a um efeito análogo ao AB para os estados ligados. Por outro lado, o termo $-l\Omega$ é uma contribuição direta do acoplamento entre momento angular e a velocidade angular. Do mesmo modo, uma contribuição na frequência angular do sistema é produzida através de um novo termo δ representando uma nova frequência angular. Certamente, caso o termo $\Omega = 0$, recuperamos o espectro dado pela Eq. (3.60).

Para sistemas relativísticos, encontramos diversas contribuições na aplicação da topologia do espaço-tempo com deslocação em espiral na equação de Dirac. Primeiramente, investigamos os efeitos topológicos em uma partícula de Dirac confinada a um potencial do tipo *hard-wall*. Obtivemos um espectro discreto de Energia, com um raio efetivo na Eq. (4.31) que decorre dos efeitos da deformação do espaço-tempo. No entanto, nenhuma contribuição para o número quântico do momento angular surge, nesse sentido não há análogo ao Aharonov-Bohm para estados ligados. E quando aplicamos o limite não relativístico, encontramos os níveis de Energia da situação semelhante nas equações de Schrödinger, reforçando que a aplicação relativística é consistente.

Por fim, analisamos um elétron que interage com um campo magnético uniforme e obtemos os níveis relativísticos de Landau no espaço-tempo com deslocação em espiral. Os efeitos de torção desse espaço-tempo produzem um momento angular efetivo ζ na Eq. (4.48), com alteração no número quântico do momento angular com efeito análogo ao Aharonov-Bohm. Como também, aplicamos uma transformação de coordenadas devido aplicação de rotação no sistema e confinamos a partícula de Dirac por potencial do tipo *hard-wall*, encontrando um raio definido dentro de um intervalo fixo na Eq. (4.52) e um efeito tipo Sagnac por contribuições no termo do momento angular nos níveis de energia da Eq. (4.63).

5.1 Perspectivas

Nesta seção vamos apresentar algumas perspectivas para o desenvolvimento e continuação do que foi apresentado nessa tese para elaboração de novos trabalhos.

Em primeiro lugar, na lista de publicações na seção seguinte são apresentados dois trabalhos que estão submetidos à periódicos. O primeiro trata-se da influência do ponto de corte no oscilador harmônico e conseqüentemente gerando *quantum revivals* não nulos. Além disso, também discutimos *quantum revivals* para uma partícula confinada a um anel quântico unidimensional e bidimensional. Os resultados são promissores e podemos estender a discussão para as equações de Dirac na presença de deslocação em espiral no espaço-tempo, principalmente pelo fato de ter resultados no limite não-relativístico.

Bem como, no segundo trabalho submetido, estudamos a interação da uma carga pontual com campo magnético uniforme sob a influência de um ponto de corte decorrente da topologia de deslocação em espiral. Assim como no caso anterior, podemos representar o sistema através das equações de Dirac com potencial eletromagnético¹ levando em consideração se há o ponto de corte devido a topologia. Dessa forma, através da aproximação não-relativística, podemos analisar se os resultados são semelhantes.

Além disso, podemos estender alguns sistemas com campo elétrico não uniforme e efeitos de rotação na presença de defeito topológico de deslocação em espiral para estudar efeitos de corrente persistente, assim como foi feito no trabalho (SILVA; BAKKE, 2021). Também existe a possibilidade de discussão para sistemas relativísticos levando em consideração o ponto de corte devido a topologia.

Em síntese, estamos analisando a possibilidade da aplicação de cálculo numérico, análise termodinâmica através da função de partição (BOWICK; NELSON; TRAVESSET, 2000) e construção dos gráficos dos níveis de energia para ter um novo ponto de vista dos resultados já obtidos.

¹ Análogo ao sistema da seção 4.2.

5.2 Publicações

Os artigos publicados durante o desenvolvimento da tese são:

1. MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. On an electron in an elastic medium with a spiral dislocation. *International Journal of Modern Physics A*, v. 34, p. 1950153, 2019. (MAIA; BAKKE, 2019a)
2. MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. Topological and rotating effects on the Dirac field in the spiral dislocation spacetime. *European Physical Journal C*, v. 79, p. 551, 2019. (MAIA; BAKKE, 2019b)
3. MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. Effects of rotation on the Landau levels in an elastic medium with a spiral dislocation. *Annals of Physics*, v. 419, p. 168229, 2020. (MAIA; BAKKE, 2020)
4. MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. On the interaction of an electron with a nonuniform electric field under the influence of a cut-off point induced by the spiral dislocation topology. *Physica B: Physics of Condensed Matter*, v. 623, n. 413337, 2021. (MAIA; BAKKE, 2021a)
5. MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. Relativistic Landau quantization in the spiral dislocation spacetime. *Communications in Theoretical Physics*, v. 73, p. 025103, 2021. (MAIA; BAKKE, 2021b)
- 6². MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. Topological Effects of a Spiral Dislocation on Quantum Revivals. *Universe*, v. 8, p. 168, 2022. (MAIA; BAKKE, 2022)

Artigo em análise para publicação:

1. MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. Influence of a cut-off point induced by the spiral dislocation topology on a point charge in a uniform magnetic field and the revival time.

² Este artigo não foi detalhado na tese porque sua aprovação ocorreu após a defesa e no momento das correções da tese

APÊNDICE A – O operador de Laplace-Beltrami

Neste apêndice de revisão vamos apresentar com mais detalhes o operador de Laplace-Beltrami utilizado durante a tese para levar a informação do defeito topológico para a equação de Schrödinger. Primeiramente, o operador de Laplace é definida no espaço euclidiano usual em coordenadas cartesianas como o divergente do gradiente $\nabla \cdot \nabla \varphi$ aplicado a uma função escalar pontual $\varphi(x, y, z)$ da seguinte maneira

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (\text{A.1})$$

e pode ser representado como ∇^2 ou Δ (ARFKEN; WEBER, 2005). Para o Laplace-Beltrami, que é uma extensão das funções laplacianas, formulado em uma variedade também representado de tal forma ∇^2 ou Δ o operador de Laplace. Possui definição semelhante, já que o gradiente de uma função f e o divergente de um campo vetorial $\mathbf{X}$ feito no domínio de uma variedade riemanniana. O gradiente, divergente e o Laplace-Beltrami estão descritos abaixo respectivamente

$$(\nabla f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{|g|} X^j), \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{|g|} g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i}), \quad (\text{A.4})$$

as componentes representadas pelo g^{ij} são de segunda ordem contravariante associado ao tensor métrico. $\sqrt{|g|}$ é a raiz quadrada do determinante de g_{ij} .

O desenvolvimento a seguir foi retirado do livro *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences* (FLANDERS, 1963). Uma base ortonormal¹ (dx, dy, dz) para geometria Euclidiana usual e em cada ponto $\vec{P}$ no $\mathbf{R}^3$ anexa um quadro de referência local, com os vetores da base unitários e simultaneamente ortogonais representados por $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$. O ponto $\mathbf{P}$ na base usual

$$d\vec{P} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}, \quad (\text{A.5})$$

também pode ser escrito na base local, como

¹ Cujo os vetores são unitários e possuem ângulos retos.

$$d\vec{P} = \eta_1 \hat{e}_1 + \eta_2 \hat{e}_2 + \eta_3 \hat{e}_3, \quad (\text{A.6})$$

para uma função f do $\mathbf{R}^3$ a representação pode ser,

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz. \quad (\text{A.7})$$

Ao aplicar o operador adjunto da derivada d , conhecido como *hodge star* ou em tradução livre "estrela de hodge" à função df ,

$$*df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dydz + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dzdx + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)dxdy. \quad (\text{A.8})$$

O objeto $*$ é um operador linear que estabelece um mapeamento um-para-um do espaço de vetores k para o espaço de $(n - k)$ -vetores. Sendo k um número inteiro tal que $0 \leq k \leq n$. Diferenciando a relação $*df$,

$$d(*df) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dxdydz = (\Delta f)dxdydz. \quad (\text{A.9})$$

Se o três-forma é conhecido $\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3 = dxdydz$, logo o laplaciano passa a ser também, já que a expressão acima tornou o operador de Laplace multiplicado pelo elemento de volume. Podendo expressar em relação aos termos de η_i ,

$$df = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3, \quad (\text{A.10})$$

então

$$*df = c_1 \eta_2 \eta_3 + c_2 \eta_3 \eta_1 + c_3 \eta_1 \eta_2, \quad (\text{A.11})$$

analogamente ao descrito na representação (dx, dy, dz) , diferenciação torna-se

$$d(*df) = (\Delta f) \eta_1 \eta_2 \eta_3. \quad (\text{A.12})$$

Basta supor o seguinte para encontrar a relação do laplaciano: para x, y e z no domínio de $\mathbf{R}^3$, é chamado de sistema de coordenadas ortogonais se os vetores

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial y}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial z}, \quad (\text{A.13})$$

são mutuamente perpendiculares. Para funções adequadas α, β e γ os vetores

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \vec{P}}{\partial x}, \hat{e}_2 = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \vec{P}}{\partial y}, \hat{e}_3 = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \vec{P}}{\partial z}, \quad (\text{A.14})$$

então,

$$d\hat{P} = \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial z}\right)dz, \quad (\text{A.15})$$

e na base $\hat{e}_i$, representa da seguinte forma

$$d\vec{P} = (\alpha dx)\hat{e}_1 + (\beta dy)\hat{e}_2 + (\gamma dz)\hat{e}_3, \quad (\text{A.16})$$

a conexão é feita pelos termos $\eta_1 = \alpha dx$, $\eta_2 = \beta dy$ e $\eta_3 = \gamma dz$.

Reescrevendo a função df da equação (A.12) na base descrita acima,

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\eta_1}{\alpha} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\eta_2}{\beta} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\eta_3}{\gamma}, \quad (\text{A.17})$$

comparando com

$$d(*df) = (\Delta f)\eta_1\eta_2\eta_3 = \alpha\beta\gamma(\Delta f)dxdydz, \quad (\text{A.18})$$

para obter Δf

$$\Delta f = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta\gamma}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha\gamma}{\beta} \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right]. \quad (\text{A.19})$$

A equação (A.19) é a forma geral para o laplaciano no espaço euclidiano. Assim, é preciso definir essas considerações ao caso riemanniano. Seja M uma variedade riemanniano de dimensão d , com componentes do tensor métrico g_{ij} em coordenadas locais $(x^1, x^2, \dots, x^d)$. Para $f : M \rightarrow R$ ser uma função em M , e $\mathbf{X}$ um campo vetorial. O gradiente é definido como na equação (A.3). Num campo vetorial $\mathbf{Z} = Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ o divergente é dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{Z} := \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} Z^j), \quad (\text{A.20})$$

o laplaciano-beltrami é definido (JOST, 2011).

APÊNDICE B – O efeito Aharonov-Bohm

Este apêndice é referente a uma seção do livro *Introduction to Quantum Mechanics* (GRIFFITHS, 1994). Em princípio, Yakir Aharonov e David Joseph Bohm apresentaram uma descrição quântica para uma partícula próxima a um potencial eletromagnético, mas localizada em uma região com campo magnético nulo. Pensar nessa situação classicamente nos leva afirmar que o campo não iria interagir com partícula, mas o potencial vetor eletromagnético no cenário quântico passa a ser um campo real e muda a dinâmica do sistema. Esse efeito ficou conhecido como Aharonov-Bohm. Um experimento mostra um efeito físico do potencial eletromagnético sobre elétrons emitidos como arranjo da Fig. 5a.

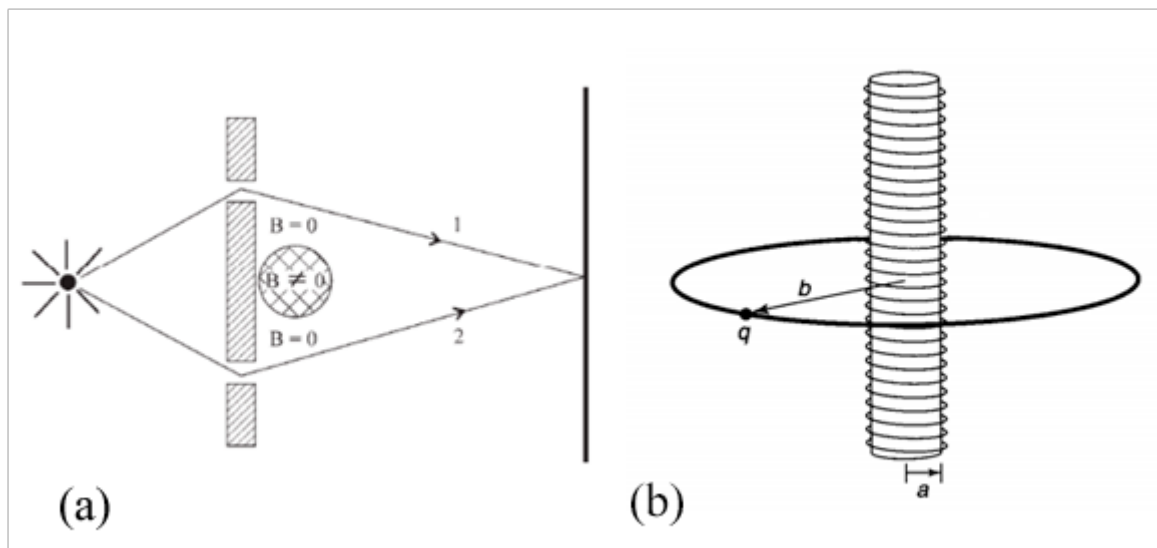


Figura 5 – (a) Arranjo experimental do efeito AB; (b) uma conta carregada em um anel circular por meio do qual passa um longo solenoide (GRIFFITHS, 1994).

Na eletrodinâmica clássica, o potencial escalar φ e o potencial vetor $\mathbf{A}$ não são diretamente mensuráveis; as quantidades físicas são os campos elétrico e magnético:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{B.1})$$

Para aplicação de transformação de calibre nos potenciais, as expressões tornam-se,

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \quad (\text{B.2})$$

em que Λ é uma função desconhecida de posição e tempo. Na mecânica quântica, o hamiltoniano depende de φ e $\mathbf{A}$, não de $\mathbf{E}$ (campo elétrico) e $\mathbf{B}$ (campo magnético):

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\varphi. \quad (\text{B.3})$$

A teoria ainda é invariante sob as transformações de calibre. Porém, no ano de 1956, Aharonov e Bohm demonstraram que o potencial vetor pode alterar o comportamento quântico de uma partícula carregada até mesmo quando ela está passando por uma região em que o campo é nulo.

Por exemplo, uma partícula restrita a percorrer um círculo de raio b . Ao longo do eixo, corre um solenoide de raio $a < b$, que possui corrente elétrica constante I (veja a Fig. 5b).

Se o solenoide for muito longo, o campo magnético interno será uniforme e o campo externo será nulo. Porém o potencial vetor na região fora não é zero; observe que, quando adotando a condição de calibre $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, temos:

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad (r > a), \quad (\text{B.4})$$

em que $\Phi = \pi a^2 B$ caracteriza o **fluxo magnético** através do solenoide. Mas, o solenoide está sem carga e, portanto, $\varphi = 0$. Nesse caso, o hamiltoniano tem a forma:

$$H = \frac{1}{2m} [-\hbar^2 \nabla^2 + q^2 A^2 + 2i\hbar q(\mathbf{A} \cdot \nabla)]. \quad (\text{B.5})$$

A função de onda possui dependência somente do ângulo azimutal ϕ ($\theta = \pi/2$ e $r = b$), então, $\nabla \rightarrow (\hat{\phi}/b)(d/d\phi)$, e a equação de Schrödinger torna-se,

$$\frac{1}{2m} \left[-\frac{\hbar^2}{b^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{q\Phi}{2\pi b} \right)^2 + i\frac{\hbar q\Phi}{\pi b^2} \frac{d}{d\phi} \right] \psi(\phi) = E\psi(\phi). \quad (\text{B.6})$$

Organizando os termos,

$$\frac{d^2\psi}{d\phi^2} - 2i\beta \frac{d\psi}{d\phi} + \epsilon\psi = 0, \quad (\text{B.7})$$

onde, os parâmetros são $\beta \equiv q\Phi/2\pi\hbar$ e $\epsilon \equiv \frac{2mb^2E}{\hbar^2} - \beta^2$. Com a solução dada por,

$$\psi = Ae^{i\lambda\phi}, \quad (\text{B.8})$$

as constantes definidas como:

$$\lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon} = \beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE}, \quad (\text{B.9})$$

analisando a continuidade de $\psi(\phi)$, em $\phi = 2\pi$, exige que λ seja um número inteiro:

$$\beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE} = n, \quad (\text{B.10})$$

obtendo os níveis de energia dado por:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \left(n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (\text{B.11})$$

Observe que as energias permitidas dependem claramente do fluxo magnético dentro do solenoide, **mesmo que o campo na região da partícula seja zero.**

APÊNDICE C – A Aproximação de Foldy-Wouthuysen

Este apêndice de revisão tem o objetivo de detalhar o método utilizado na tese para obter o limite não-relativístico dos níveis de energia do Capítulo 4. Primeiramente, a representação de Foldy-Wouthuysen foi desenvolvido em 1950 e consiste em dividir por meio de transformações unitárias do Hamiltoniano na equação de Dirac.

A transformação de Foldy-Wouthuysen, como uma aproximação da solução exata é portanto aplicável apenas a campos fracos, onde sistematicamente melhora a abordagem. Pela equação de Dirac no espaço-tempo curvo $i\partial\psi/\partial t = \hat{H}\psi$, escrevemos uma combinação de termos, que são conhecidos por uma parte par e outra ímpar, da seguinte forma:

$$\hat{H} = \hat{\beta}m + \hat{O} + \hat{\epsilon}, \quad (\text{C.1})$$

onde $\hat{\beta}$ corresponde à parte par de $\hat{H}$, ($\epsilon \leftrightarrow$ par) e $\hat{O}$ à parte ímpar ($\hat{O} \leftrightarrow$ ímpar). A representação nessas duas partes é definida de acordo com os termos do hamiltoniano $\hat{H}$ que satisfaçam as relações,

$$\begin{aligned} \hat{O}\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{O} &= 0, \\ \hat{\epsilon}\hat{\beta} - \hat{\beta}\hat{\epsilon} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Caso o sistema possua um campo eletromagnético externo, podemos representar os termos como,

$$\hat{O} = \hat{\alpha}(\hat{p} - q\mathbf{A}) \quad e \quad \hat{\epsilon} = qV(r), \quad (\text{C.3})$$

onde $V(r)$ é o potencial de Coulomb. Mas vamos seguir a representação sem levar em consideração uma aplicação explícita, apenas de maneira geral. Assim, precisamos aplicar uma transformação unitária sobre o hamiltoniano $\hat{H}' = e^{i\hat{S}}\hat{H}e^{-i\hat{S}}$ para minimizar a quantidade de termos ímpares e eliminar os termos pares. O operador $\hat{S}$ escrito como,

$$\hat{S} = \frac{i}{2m}\hat{\beta}\hat{O}, \quad (\text{C.4})$$

observe que $\hat{S}$ não possui uma dependência temporal, isso acontece pelo fato do hamiltoniano ser representado como estacionário para esse caso. Como o objetivo é a representação de H no limite não-relativístico H' , para obter a seguinte expressão,

$$\begin{aligned}
\hat{H}' &= \left(1 + i\hat{S} + \frac{(i\hat{S})^2}{2!} + \dots \right) \hat{H} \left(1 - i\hat{S} + \frac{(i\hat{S})^2}{2!} + \dots \right) \\
&= \hat{H} + i[\hat{S}, \hat{H}] + \frac{i^2}{2!} [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]] + \dots + \frac{i^n}{n!} [\hat{S}, [\hat{S}, \dots, [\hat{S}, \hat{H}] \dots]] + \dots \\
&= \hat{H} + i[\hat{S}, \hat{H}] - \frac{i}{6} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]]] + \dots
\end{aligned} \tag{C.5}$$

lembrando que $\hat{\beta}\hat{O} = -\hat{O}\hat{\beta}$ e $\hat{\beta}\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}\hat{\beta}$. Portanto, nosso termo de $\hat{H}'$ é representando como,

$$\hat{H}' = m\hat{\beta} + \hat{O}' + \hat{\epsilon}'. \tag{C.6}$$

Nessa etapa, vamos omitir todos os termos ímpares de H' , ou seja, o último termo da equação acima com as potências ímpares de $\hat{O}$. Então, vamos aplicar mais uma transformação unitária,

$$\hat{S}' = \frac{i}{2m}\hat{\beta}\hat{O}' = -\frac{i}{2m}\hat{\beta} \left(\frac{i}{2m}\hat{\beta} [\hat{O}, \hat{\epsilon}] - \frac{1}{3m^2}\hat{O}^3 \right), \tag{C.7}$$

dessa forma, obtemos um novo hamiltoniano $\hat{H}''$,

$$\hat{H}'' = e^{i\hat{S}'} \hat{H}' e^{-i\hat{S}'} = m\hat{\beta} + \hat{\epsilon}' + \frac{1}{2m}\hat{\beta} [\hat{O}', \hat{\epsilon}'] - \frac{1}{3m^2}\hat{O}'^3. \tag{C.8}$$

Como os termos proporcionais a $\hat{O}'^3$ e $\hat{O}'' = \frac{\hat{\beta}}{[\hat{O}', \hat{\epsilon}']}$ tem potência maior que m^{-1} , podemos desprezar. Em seguida, aplicamos uma terceira transformação unitária ao hamiltoniano para encontrar o $\hat{H}'''$,

$$\hat{H}''' = e^{i\hat{S}''} \hat{H}'' e^{-i\hat{S}''}, \tag{C.9}$$

agora o operador $\hat{S}''$ é dado como função de $\hat{O}''$ e podemos escrever como $\hat{S}'' = -\frac{i}{2m}\hat{\beta}\hat{O}''$. Aproximadamente, nossa expressão para $\hat{H}'''$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\hat{H}''' &= m\hat{\beta} + \hat{\epsilon}' \\
&= m\hat{\beta} + \frac{1}{2m}\hat{\beta}\hat{O}^2 - \frac{1}{3m^3}\hat{\beta}\hat{O}^4 + \hat{\epsilon} - \frac{1}{8m^2} [\hat{O}, [\hat{O}, \hat{\epsilon}]].
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Assim, aplicamos a aproximação de Foldy-Wouthuysen na expressão do hamiltoniano para obter aproximadamente o limite não-relativístico. Esse procedimento foi utilizado nas equações dos níveis de energia para estudar a influência do defeito topológico de deslocação em espiral no espaço-tempo representado na equação de Dirac no limite não-relativístico e comparar com resultados anteriores do capítulo 3 ([GREINER, 2000](#)).

APÊNDICE D – A derivada covariante

Nesta seção faremos uma breve revisão sobre a derivada covariante de espinores. Os espinores de Dirac no espaço-tempo curvo são definidos como objetos de 4 componentes, sendo duas delas (*spin up* e *spin down*) relativas as energias positivas e as outras duas (*spin up* e *spin down*) para energias negativas (BJORKEN; DRELL, 1964) (GREINER, 2000). Assim, obedece ao grupo das transformações de Lorentz, dado da seguinte forma:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(\Lambda(x)) \psi(x), \quad (\text{D.1})$$

sendo $S(\Lambda(x))$ uma matriz 4×4 a representação das transformações de Lorentz $\Lambda_b^a(x)$ e com determinante unitário $\det S = 1$. Podemos escrever seu hermitiano conjugado como,

$$\psi^\dagger(x) \rightarrow (\psi')^\dagger(x) = \psi^\dagger(x) S^\dagger(\Lambda(x)). \quad (\text{D.2})$$

Dessa forma, podemos escrever em termos das componentes espinoriais,

$$\begin{aligned} \psi^A(x) &\rightarrow \psi'^A(x) = S^A_B(x) \psi^B(x), \\ \psi_A(x) &\rightarrow \psi'_A = \psi_B(x) \left(S^{-1}(x) \right)^B_A. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Lembrando que as transformações de coordenadas no espaço-tempo, os espinores se transformam como escalares, ou seja $\psi'(x') = \psi(x)$. Através do princípio da Equivalência as matrizes de Dirac devem ser definidas em relação ao referencial local dos observadores, no nosso caso usamos o espaço-tempo de Minkowski. Logo, levando em consideração as matrizes de Dirac $\gamma^a = \gamma^a_{A'}{}^{B'}$ ou $\gamma^a_{A'}{}^{B'}$, com os índices $A', B', C', \dots$ indicando o hermitiano conjugado. As matrizes reduzidas satisfazem a relação de anticomutação, pela álgebra de Clifford associada ao espaço-tempo de Minkowski,

$$\gamma^a_{A'}{}^{B'} \gamma^b_{B'}{}^T + \gamma^b_{A'}{}^{B'} \gamma^a_{B'}{}^T = 2\eta^{ab} \delta_A^T. \quad (\text{D.4})$$

É comum escrever a relação de comutação acima como a subtração de alguns índices, dessa forma:

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = -2\eta^{ab}. \quad (\text{D.5})$$

No espaço-tempo curvo, as matrizes de Dirac deverão ser definidas em cada ponto do espaço-tempo, assim como mencionado durante a tese. Portanto, utilizamos os conjuntos

de bases e suas transformações pelo conjunto de tetradas para obter as representações em termos dos referenciais locais, ou seja, $\gamma^\mu(x) = e^\mu_a(x)\gamma^a$. E podemos definir como:

$$\gamma^\mu(x)\gamma^\nu(x) + \gamma^\nu(x)\gamma^\mu(x) = -2g^{\mu\nu}(x), \quad (\text{D.6})$$

com os índices espinoriais omitidos. Agora, podemos definir o grupo de transformações das matrizes de Dirac,

$$(\gamma')^\mu{}_{A'}(x) = S^{A'}_{B'}(S^{-1})^B{}_A \gamma^\mu{}_{B'} = [S\gamma^\mu(x)S^{-1}]^{A'}_A, \quad (\text{D.7})$$

como também, transformam-se como um 4-vetor contravariante $(\gamma')^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \gamma^\alpha(x)$. Agora podemos definir a derivada covariante de um espinor no espaço-tempo curvo, que leva em consideração termos de correção para o transporte paralelo,

$$\tilde{\nabla}_\mu \psi^A(x) = \nabla_\mu \psi^A(x) + \psi^B(x) \Gamma_\mu{}^A{}_B, \quad (\text{D.8})$$

sendo ∇_μ a derivada covariante usual. Mas, a derivada covariante de um espinor transforma-se em cada ponto do espaço-tempo, logo

$$\tilde{\nabla}_\mu (\psi')^A(x) = S^A_B(x) \tilde{\nabla}_\mu \psi^B(x), \quad (\text{D.9})$$

que sujeita ao objeto $\Gamma_\mu{}^A{}_B = \Gamma_\mu$ que não se transforma como um espinor e é conhecido como *conexão espinorial*, a ter sua relação dada da seguinte forma,

$$(\Gamma')^\mu{}_{A'} = S^A_C \Gamma_\mu{}^C{}_D (S^{-1})^D_{B'} + (\partial_\mu S^A_C) (S^{-1})^D_{B'}, \quad (\text{D.10})$$

logo, podemos definir uma expressão geral para derivada covariante como:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \Psi^{\nu AA'}_{BB'} &= \Psi^{\nu AA'}_{BB'} + \left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} \Psi^{\nu AA'}_{BB'} + \Psi^{\nu DA'}_{BB'} \Gamma_\mu{}^A{}_D \\ &= \Psi^{\nu AA'}_{DB'} \Gamma_\mu{}^D{}_B + (\Gamma^\dagger)^\mu{}_{A'} \Psi^{\nu AD'}_{BB'} - (\Gamma^\dagger)^\mu{}_{B'} \Psi^{\nu AA'}_{BD'}. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Pela condição $\nabla_\alpha g_{\mu\nu}(x) = 0$ e a relação de anticomutação, obtemos $\tilde{\nabla}_\mu (\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha) = 0$. Assim, dada a condição anterior podemos escrever,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\mu \gamma^\alpha &= \tilde{\nabla}_\mu \gamma^{\alpha'}{}_{A'}{}^B = \nabla_\mu \gamma^{\alpha'}{}_{A'}{}^B + \gamma^{\alpha'}{}_{A'}{}^D \Gamma_\mu{}^B{}_D - (\Gamma^\dagger)^\mu{}_{A'} \gamma^{\alpha'}{}_{D'}{}^B = 0 \\ &= \nabla_\mu \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \Gamma_\mu - \Gamma^\dagger_\mu \gamma^\alpha, \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

dessa forma, por alguns procedimentos matemáticos de manipulação de índices, a expressão para conexão espinorial é dada por:

$$\Gamma_\mu = \frac{i}{4}\omega_{\mu ab}(x)\Sigma^{ab} = -\frac{i}{4}[e^\nu{}_b(x)\nabla_\mu e^c{}_\nu(x)\eta_{cb}]\Sigma^{ab}, \quad (\text{D.13})$$

com a conexão de spin $\omega_{\mu ab}(x)$ e Σ^{ab} definido como $\Sigma^{ab} = \frac{i}{2}(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a)$.

Nesse sentido, como aplicações a derivada covariante na presença de torção, a conexão afim inclui os símbolos de Christoffel e o tensor de contorção. Com algumas modificações e incluindo a conexão um-forma $K_{\mu ab}(x)$ na conexão espinorial, chegamos na relação principal que utilizamos no Capítulo 3 dessa tese,

$$\Gamma_\mu = \frac{i}{4}[\omega_{\mu ab}(x) + K_{\mu ab}(x)]\Sigma^{ab}. \quad (\text{D.14})$$

Dessa forma, através da expressão anterior conseguimos analisar a influência do defeito topológico de deslocação em espiral em alguns sistemas relativísticos usando a equação de Dirac.

Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUM, I. A. *Handbook of mathematical functions*. 1th. ed. New York: Dover Publications Inc., 1965. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- AHARONOV, Y.; CASHER, A. Topological quantum effects for neutral particles. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, v. 53, n. 319, 1984. Citado na página 35.
- ALBER, H. R. G.; ZOLLER, P. Generation and detection of rydberg wave packets by short laser pulses. *Physical Review A*, v. 34, n. 2, p. 1058, 1986. Citado na página 44.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. 6th. ed. New York: Elsevier Academic Press, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 56, 62 e 76.
- ARONSTEIN, D. L.; STROUD, C. R. Fractional wave-function revivals in the infinite square well. *PHYSICAL REVIEW A*, v. 55, n. 4526, 1997. Citado na página 37.
- BAKKE, K. *Fases Geométricas, Quantização de Landau e Computação Quântica Holonômica para Partículas Neutras na Presença de Defeitos Topológicos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Paraíba, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 22.
- BAKKE, K. Confinement of a dirac particle to a hard-wall confining potential induced by noninertial effects. *Modern Physics Letters B*, v. 27, n. 1350018, 2013. Citado na página 71.
- BAKKE, K. Effects of rotation in the spacetime with the distortion of a vertical line into a vertical spiral. *The European Physical Journal Plus*, v. 134, n. 546, 2019. Citado na página 15.
- BAKKE, K.; FURTADO, C. Abelian geometric phase due to the presence of an edge dislocation. *Physical Review A*, v. 87, n. 1, p. 012130, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 52, 58 e 64.
- BEZERRA, V. B. Global effects due to a chiral cone. *Journal of Mathematical Physics*, v. 38, n. 5, p. 2553, 1997. Citado na página 42.
- BJORKEN, J. M.; DRELL, S. D. *Relativistic Quantum Mechanics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1964. Citado na página 84.
- BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. Long-term evolution and revival structure of rydberg wave packets. *Physics Letters A*, v. 200, n. 308, 1995. Citado na página 47.
- BLUHM, V. A. K. R.; PORTER, J. The evolution and revival structure of localized quantum wave packets. *American Journal of Physics*, v. 64, n. 944, 1996. Citado na página 47.
- BLUHM, V. A. K. R.; TUDOSE, B. Wave-packet revivals for quantum systems with nondegenerate energies. *Physics Letters A*, v. 222, n. 4, p. 220–226, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 40.

- BOWICK, M. J.; NELSON, D. R.; TRAVESSET, A. Interacting topological defects on frozen topographies. *Physical Review B*, v. 62, n. 13, p. 8738–8751, 2000. Citado na página 74.
- BUENO, C. F. M.; CARVALHO, M. Landau levels in graphene layers with topological defects. *The European Physical Journal B*, v. 85, n. 2, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 67.
- CARROL, S. M. *Spacetime and Geometry, an Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Addison Wesley, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- CHEN, C.-C. Topological quantum phase and multipole moment of neutral particles. *Physical Review A*, v. 51, n. 3, p. 2611, 1995. Citado na página 14.
- DANTAS, L.; FURTADO, C.; Silva Netto, A. Quantum ring in a rotating frame in the presence of a topological defect. *Physics Letters A*, v. 379, n. 1, p. 11–15, 2015. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960114010342>>. Citado na página 53.
- DEXTER, D. L.; SEITZ, F. Effects of dislocations on mobilities in semiconductors. *Physical Review*, v. 86, n. 6, p. 964, 1952. Citado na página 14.
- DONCHESKI, M.; ROBINETT, R. Wave packet revivals and the energy eigenvalue spectrum of the quantum pendulum. *Annals of Physics*, v. 308, n. 578, 2003. Citado na página 47.
- FIGIELSKI, T. Dislocations as electrically active centres in semiconductors-half a century from the discovery. *Journal of Physics: Condensed Matter*, v. 14, p. 12665, 2002. Citado na página 53.
- FILGUEIRAS, C. et al. Landau quantization, aharonov-bohm effect and two-dimensional pseudoharmonic quantum dot around a screw dislocation. *Physics Letters A*, v. 380, n. 45, p. 3847–3853, 2016. Citado na página 14.
- FLANDERS, H. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. 1th. ed. New York: Academic Press, 1963. Citado na página 76.
- FONSECA, K. B. I. Rotating effects on the landau quantization for an atom with a magnetic quadrupole moment. *The Journal of chemical physics*, v. 144, n. 014308, 2016. Citado na página 53.
- FURTADO, C.; BEZERRA, V. B.; MORAES, F. Quantum scattering by a magnetic flux screw dislocation. *Physics Letters A*, v. 289, n. 3, p. 160–166, 2001. Citado na página 14.
- GONZALEZ, F. G. J.; VOZMEDIANO, M. A. H. Continuum approximation to fullerene molecules. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, v. 69, n. 172, 1992. Citado na página 15.
- GREINER, W. *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*. 3th. ed. Berlin: Springer, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 60, 67, 83 e 84.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics*. 1th. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 79.

- GUTSCHICK, V.; NIETO, M. Coherent states for general potentials. v. time evolution. *Physical Review D*, v. 22, n. 2, p. 403, 1980. Citado na página 44.
- HALDANE, F. Model for a quantum hall effect without landau levels: Condensed-matter realization of the "parity anomaly". *Physical review letters*, v. 61, n. 2015, 1988. Citado na página 49.
- HASAN, M. Z.; KANE, C. L. Colloquium: Topological insulators. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 82, p. 3045–3067, Nov 2010. Citado na página 15.
- HEHL, F.; NI, W. Inertial effects of a dirac particle. *Physical Review D*, v. 42, n. 2045, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 72.
- JACKIW, R. Fractional charge and zero modes for planar systems in a magnetic field. *Physical Review D*, v. 29, n. 2375, 1984. Citado na página 49.
- JOST, J. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. 6th. ed. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. Citado na página 78.
- JUAN, A. C. F. de; VOZMEDIANO, M. Dislocations and torsion in graphene and related systems. *Nuclear physics B*, v. 828, n. 2010, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 64.
- KATANAIEV, M. O. Geometric theory of defects. *Physics Uspekhi*, v. 48, n. 7, p. 675–701, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 23.
- KATANAIEV, M. O.; VOLOVICH, I. V. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity. *Annals of Physics*, v. 216, n. 1, p. 1–28, 1992. Citado 5 vezes nas páginas 14, 20, 29, 30 e 35.
- KATSNELSON, K. S. N. M. I.; GEIM, A. K. Chiral tunnelling and the klein paradox in graphene. *Nature Physics*, v. 2, p. 620–625, 2006. Citado na página 15.
- KLEINERT; HAGEN. *Gauge Fields In condensed Matter*. 1th. ed. Singapore: World Scientific, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 19.
- LANDAU, E. L. L. *Quantum mechanics: non-relativistic theory*. 3th. ed. Oxford: Pergamon, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 51.
- LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. *The Classical Theory of Fields, Course of Theoretical Physics*. 4th. ed. Oxford: Elsevier, 1980. Citado na página 68.
- MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. On an electron in an elastic medium with a spiral dislocation. *International Journal of Modern Physics A*, v. 34, n. 1950153, p. 27, 2019. Citado 6 vezes nas páginas 38, 40, 41, 51, 55 e 75.
- MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. Topological and rotating effects on the dirac field in the spiral dislocation spacetime. *The European Physical Journal C*, v. 79, n. 7, p. 1–7, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 63, 70, 71 e 75.
- MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. Effects of rotation on the landau levels in an elastic medium with a spiral dislocation. *Annals of Physics*, v. 419, n. 168229, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 75.

- MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. On the interaction of an electron with a nonuniform electric field under the influence of a cut-off point induced by the spiral dislocation topology. *Physica B: Physics of Condensed Matter*, v. 623, n. 413337, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 42, 47 e 75.
- MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. Relativistic landau quantization in the spiral dislocation spacetime. *Communications in Theoretical Physics*, v. 73, n. 2, p. 025103, 2021. Citado 4 vezes nas páginas 41, 66, 67 e 75.
- MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. Topological effects of a spiral dislocation on quantum revivals. *Universe*, v. 8, n. 3, p. 168, 2022. Citado na página 75.
- MANDELSTAM, L.; TAMM, I. G. *The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics*. 1. ed. Berlin: Springer, 1991. Citado na página 44.
- MARQUES CLAUDIO FURTADO¹, V. B. B. Geusa de A.; MORAES, F. Landau levels in the presence of topological defects. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 34, n. 5945, 2001. Citado na página 56.
- MASHHOON, B. Neutron interferometry in a rotating frame of reference. *Physical review letters*, v. 61, n. 2639, 1988. Citado na página 53.
- MISNER, K. S. T. C. W.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. [S.l.]: W. H. Freeman, 1973. Citado na página 32.
- MUNIZ, V. B. C.; CUNHA, M. Landau quantization in the spinning cosmic string spacetime. *Annals of Physics*, v. 350, n. 2014, 2014. Citado na página 50.
- NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. Bristol: Institute of Physics Publishing, 2003. Citado na página 69.
- NETTO, C. C. A. S.; FURTADO, C. Influence of topology in a quantum ring. *Physics Letters A*, v. 372, n. 3894, 2008. Citado 6 vezes nas páginas 35, 39, 42, 50, 53 e 67.
- NOVOSELOV A.K. GEIM, S. M. e. a. K. Two-dimensional gas of massless dirac fermions in graphene. *Nature*, v. 438, p. 197–200, 2005. Citado na página 15.
- PAGE, L. A. Effect of earth's rotation in neutron interferometry. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, v. 35, n. 543, p. 1472, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 53.
- PESHKIN, M.; TONOMURA, A. *The Aharonov-Bohm Effect*. 1th. ed. Berlin: Springer-Verlag, in: Lecture Notes in Physics, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 67.
- PUNTIGAM, R. A.; SOLENG, H. H. Volterra distortions, spinning strings, and cosmic defects. *Classical and Quantum Gravity*, v. 14, n. 5, p. 1129–1150, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 9, 21 e 22.
- ROBINETT, R. Quantum wave packet revivals. *Physics reports*, v. 392, n. 1, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 48.
- ROBINETT, R. W. Wave packet revivals and quasirevivals in one-dimensional power law potentials. *Journal of Mathematical Physics*, v. 41, n. 1801, 2000. Citado na página 35.
- SAGNAC, M. G. Sur la preuve de la réalité de l'éther lumineux par l'expérience de l'interférographe tournant. *CR Acad. Sci.*, v. 157, n. 708, 1913. Citado na página 53.

- SAIDI, A.; SEDRA, M. B. Noncommutative space effects on the landau system for a neutral particle with induced electric dipole moment under a linear confining potential. *International Journal of Modern Physics A*, v. 34, n. 1950115, p. 21, 2019. Citado na página 14.
- SCHMIDT, A. A. A.; GUSSO, A. Quantum wave packet revival in two-dimensional circular quantum wells with position-dependent mass. *Physics Letters A*, v. 372, n. 2774, 2008. Citado na página 47.
- SHAPIRO, I. L. Physical aspects of the space-time torsion. *Physics Reports*, v. 357, n. 2, p. 113–213, 2002. Citado na página 59.
- SILVA, W. C. F. da; BAKKE, K. On the effects of rotation and spiral dislocation topology on the persistent currents and quantum revivals in a cylindrical wire. *The European Physical Journal Plus*, v. 136, n. 920, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 74.
- STYER, D. Quantum revivals versus classical periodicity in the infinite square well. *American Journal of Physics*, v. 69, n. 56, 2001. Citado na página 40.
- SYNGE, J. L. *Relativity the general theory*. [S.l.]: Amsterdam, 1960. Citado na página 32.
- VALANIS, K. C.; PANOSKALTSIS, V. P. Material metric, connectivity and dislocations in continua. *Acta Mechanica*, v. 175, n. 1–4, p. 77–103, 2005. Citado na página 25.
- VIGNALE, G.; MASHHOON, B. Persistent current in a rotating mesoscopic ring. *Physical Review A*, v. 197, n. 5-6, p. 444–448, 1995. Citado na página 54.
- VITORIA, R.; BAKKE, K. Rotating effects on the scalar field in the cosmic string spacetime, in the spacetime with space-like dislocation and in the spacetime with a spiral dislocation. *The European Physical Journal C*, v. 78, n. 175, 2018. Citado na página 61.
- VOLTERRA, V. Sur l'équilibre des corps élastiques multiplément connexes. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, v. 24, p. 401–517, 1907. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 21.
- WALD, R. M. *General Relativity*. [S.l.]: University of Chicago Press, 1988. Citado na página 32.
- WEI, R. H. H.; WEI, X. Quantum phase of induced dipoles moving in a magnetic field. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, v. 75, n. 2071, p. 11, 1995. Citado na página 14.
- WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*. [S.l.]: IE-Wiley, New York, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 58.
- WERNER, J. L. S. S. A.; COLELLA, R. Effect of earth's rotation on the quantum mechanical phase of the neutron. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, v. 42, n. 1103, p. 17, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 56.
- ZHANG YAN-WEN TAN, H. L. S. Y.; KIM, P. Experimental observation of the quantum hall effect and berry's phase in graphene. *Nature*, v. 438, p. 201–204, 2005. Citado na página 15.