

Voos de Lévy de fótons em vapores atômicos

Antonio Saldanio Matos Macedo

Orientador: Thierry Marcelino Passerat de Silans (DF - UFPB)

João Pessoa - PB
Março de 2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Voos de Lévy de fótons em vapores atômicos

Antonio Saldanio Matos Macedo

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Paraíba - UFPB, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Thierry M. Passerat de Silans (DF - UFPB)

João Pessoa - PB
Março de 2022



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado**
do aluno **Antônio Saldanio Matos Macêdo**, candidato
ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração
Física Atômica e Molecular.

1 Aos quatro dias do mês de maio do ano de dois mil e vinte e dois, às nove horas,
2 reuniram-se, na [Sala Virtual do Google Meet](#), os membros da Banca Examinadora
3 constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física
4 Atômica e Molecular, **Antônio Saldanio Matos Macêdo**. A comissão examinadora foi
5 composta pelos professores doutores: *Thierry Marcelino Passerat de Silans* (UFPB) -
6 orientador e presidente da banca examinadora, *Alexandre da Silva Rosas* (UFPB), *Jorge*
7 *Gabriel Gomes de Souza Ramos* (UFPB), *Madras Viswanathan Gandhi Mohan* (UFRN),
8 *Raul Celistrino Teixeira* (UFSCAR). Dando início aos trabalhos, o Professor Thierry
9 Marcelino Passerat de Silans comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir,
10 passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese
11 intitulado “*Voos de Lévy de fótons em vapores atômicos*”. Concluída a exposição, o
12 candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer:
13 “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo
14 diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Maria do Socorro de
15 Oliveira Souza, Assistente em Administração, lavrei a presente ata que será assinada por
16 mim e pelos membros da Banca Examinadora.

Thierry Marcelino

Prof. Dr. Thierry Marcelino Passerat de
Silans *Orientador - PPGF/UFPB*

Alexandre da Silva Rosas

Prof. Dr. Alexandre da Silva Rosas -
PPGF/UFPB

Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos

Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza
Ramos - PPGF/UFPB

M.V. Gandhi

Prof. Dr. Madras Viswanathan Gandhi
Mohan - UFRN

Raul Celistrino Teixeira

Prof. Dr. Raul Celistrino Teixeira -
UFSCAR

gov.br
Documento assinado digitalmente
MARIA DO SOCORRO DE OLIVEIRA SOUZA
Data: 12/05/2022 09:09:28-0300
Verifique em: <https://verificador.jf.br>

Maria do Socorro de Oliveira Souza
Assistente em Administração

17

ATA DE DEFESA Nº 10/2022

João Pessoa/PB, 04 de maio de 2022

Dois importantes factos, nesta vida, saltam aos olhos; primeiro, que cada um de nós sofre inevitavelmente derrotas temporárias, de formas diferentes, nas ocasiões mais diversas. Segundo, que cada adversidade traz consigo a semente de um benefício equivalente. Ainda não encontrei homem algum bem-sucedido na vida que não houvesse antes sofrido derrotas temporárias. Sempre que um homem supera os reveses, torna-se mental e espiritualmente mais forte... É assim que aprendemos o que devemos à grande lição da adversidade.

Andrew Carnegie

Agradecimentos

Aos meus pais: Francisco Arcanjo de Matos (Sr. Tito) e Luiza Pinto de Macedo (Dona Luizinha), (meus amigos incondicionais), pelo amor e exemplo, agradeço por terem sempre atendido meus projetos e por estarem me ajudando a levá-los adiante.

Ao Professor Thierry, pela orientação, dedicação e principalmente pelo bom convívio neste tempo de trabalho.

Aos professores: Jesus Lopez, pelo apoio em momentos decisivos.

Aos meus colegas do doutorado pela ajuda dada.

Agradeço à agência CAPES pela bolsa, que possibilitou a realização deste trabalho.

Resumo

Quando a variância do deslocamento de uma partícula aumenta linearmente no tempo, o Teorema Central do Limite (TCL) é obedecido, e a distribuição de probabilidades da posição da partícula será gaussiana. Em alguns sistemas, no entanto, a probabilidade da partícula realizar um grande passo durante a caminhada aleatória, não é desprezível, e a variância do deslocamento cresce mais rápido do que linearmente no tempo. Um mecanismo particular para tal passeio aleatório superdifusivo são os voos de Lévy, que possui a distribuição de probabilidade do tamanho dos passos decaindo assintoticamente como $|x|^{-1-\alpha}$, com $0 < \alpha < 2$ um parâmetro típico do sistema que fornece a inclinação das "asas" dessa distribuição. Quando uma radiação (laser) incide num vapor atômico ressonante, os fótons da radiação incidente realizam uma caminhada aleatória dentro do vapor, através de sucessivos eventos de reabsorção e reemissão espontânea chamada de aprisionamento de radiação. Essa caminhada aleatória é uma superdifusão do tipo voos de Lévy, onde o valor do parâmetro α depende do perfil espectral de absorção da amostra, e pode ser medido a partir da modificação da lei de Ohm, através da relação entre a transmissão difusiva, relacionada ao aprisionamento de radiação, com a opacidade da amostra, uma grandeza adimensional relacionada ao tamanho dos passos. Para um perfil Doppler, o valor $\alpha = 1.0$ foi obtido teoricamente, e o valor $\alpha = 1.47$ foi medido experimentalmente, enquanto para um perfil Lorentz, o valor $\alpha = 0.5$ foi obtido teoricamente e confirmado experimentalmente. Nesse último caso, a caminhada aleatória é quase-balística, com tamanho médio dos passos indeterminado. Por sua vez, para perfil Voigt, o parâmetro α foi obtido teoricamente em concordância com o perfil Lorentz. Entretanto, a confirmação experimental não foi verificada. Portanto, neste trabalho, medimos o parâmetro α de Lévy para o perfil de absorção do vapor alcalino quente, que é um perfil Voigt, isto é, gaussiano em torno do centro da linha e lorentziano nas "asas" (grande dessintonização). O valor do parâmetro α depende da porção do perfil espectral acessível para o fóton que realiza a caminhada aleatória. Por exemplo, para vapor de baixa opacidade (ou baixa densidade atômica), o tamanho dos passos nas asas lorentzianas é muito maior do que o comprimento da amostra, e apenas fótons emitidos na porção gaussiana central executa um passeio aleatório na célula, resultando num parâmetro $\alpha = 1.2 \pm 0.2$. Para densidades mais altas, fótons emitidos nas asas lorentzianas são reabsorvidos e realizam caminhada aleatória, resultando num parâmetro $\alpha = 0.5 \pm 0.04$. Em particular, observamos para a transmissão da luz difusa T_D

em função da opacidade r , um crossover em $r_c = 10^3$ do transporte fotônico, que divide a caminhada aleatória em dois regimes: abaixo de $r_c = 10^3$, onde apenas fótons emitidos no núcleo Doppler são espalhados pelo vapor, enquanto os fótons emitidos nas asas lorentzianas não são; e acima de $r_c = 10^3$, onde os fótons emitidos nas asas lorentzianas são espalhados pelo vapor, resultando em grandes passos que dominam o transporte. Nossos resultados confirmam que o aprisionamento de radiação é caracterizado por uma superdifusão do tipo voos de Lévy. Além disso, tendo em vista o tamanho finito do sistema, as características do transporte fotônico para o perfil de absorção Voigt são determinadas por uma truncagem no sistema.

Palavras-chave: Voos de Lévy, Aprisionamento de radiação, Espectroscopia Laser, Vapor alcalino.

Abstract

When the variance of a particle's displacement increases linearly in time, the Central Limit Theorem (TCL) is obeyed, and the distribution of probabilities of the particle's position will be Gaussian. On some systems, nonetheless, the probability of the particle performing a large step during the random walk, is not negligible, and the variance of the displacement grows faster than linearly in time. A particular mechanism for such superdiffusive random walk are the Lévy flights, which has the step length probability distribution decaying asymptotically as $|x|^{-1-\alpha}$, with $0 < \alpha < 2$ a typical parameter of the system, which gives the slope of the "wings" of this distribution. When radiation (laser) focuses on one resonant atomic vapor, the incident radiation photons perform a walk random inside the vapor, through successive reabsorption and spontaneous remissions events called radiation trapping. This random walk is a superdiffusion of the Lévy flight type, where the α parameter value depends on the absorption spectral profile of sample, and can be measured from modification of Ohm's law, through the relationship between the diffusive transmission, related to radiation trapping, with the opacity of the sample, a dimensionless quantity related to step size. For a Doppler profile, the value $\alpha = 1.0$ was theoretically obtained, and the value $\alpha = 1.47$ was measured experimentally, while for a Lorentz profile, the value $\alpha = 0.5$ was theoretically obtained and confirmed experimentally. In the latter case, the random walk is quasi-ballistic, with an indeterminate average step size. In turn, for Voigt profile, the α parameter was theoretically obtained in agreement with the Lorentz profile. However, the experimental confirmation has not been verified. Therefore, in this work, we measured Lévy's α parameter for the hot alkaline vapor absorption profile, what is a Voigt profile, that is, Gaussian around the line center and Lorentzian in the "wings"(in great detuning). The value of α parameter depends on the portion of the spectral profile accessible for the photon that performs the random walk. For instance, for low opacity vapor (or low atomic density), the steps size in the Lorentzian wings are much longer than the sample length, and only photons emitted in the central gaussian portion perform a random walk in the cell, resulting in a parameter $\alpha = 1.2 \pm 0.2$. For higher densities, photons emitted in the lorentzian wings are reabsorbed and perform random walk resulting in a parameter $\alpha = 0.5 \pm 0.04$. In particular, we observed for diffuse light transmission T_D as a function of the opacity r , a crossover in $r_c = 10^3$ of the photonic transport, which divides the random walk in two regimes: bellow $r_c = 10^3$, where

only photons emitted in the Doppler nucleus are scattered by the vapour, while photons emitted in the lorentzian wings are not; and above $r_c = 10^3$, where the photons emitted in the lorentzian wings are scattered by the vapour, resulting in large step that dominate the transport. Our results confirm that radiation trapping is characterized by an superdiffusion of the Lévy flights type. Furthermore, given the finite size of the system, the characteristics of photonic transport for the Voigt absorption profile are determined by a truncation in the system.

Keywords: Lévy flights, Radiation Trapping, Laser Spectroscopy, Alkaline vapour.

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M141v Macedo, Antonio Saldanio Matos.
Voos de Lévy de fótons em vapores atômicos / Antonio
Saldanio Matos Macedo. - João Pessoa, 2022.
189 f. : il.

Orientação: Thierry Marcelino Passerat de Silans.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Voos de Lévy. 3. Aprisionamento de
radiação. 4. Espectroscopia laser. 5. Vapor alcalino.
I. Silans, Thierry Marcelino Passerat de. II. Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)

Conteúdo

Introdução	3
1 Interação Radiação-Matéria	9
1.1 Átomo de Dois Níveis	11
1.1.1 Interação Átomo-Campo	13
1.1.2 Formalismo Matriz Densidade	14
1.1.3 Equações de Bloch	15
1.1.4 Equações de Bloch com Emissão Espontânea	17
1.2 Perfis Espectrais de Emissão	18
1.2.1 Suscetibilidade e Coeficiente de Absorção	19
1.2.2 Perfil Doppler	23
1.2.3 Perfil Voigt	25
1.2.4 Redistribuição Completa e Parcial de Frequência	27
2 Teoria de distribuições de probabilidades estáveis de Lévy	31
2.1 Teorema Central do Limite (TCL)	32
2.2 Distribuição Normal	32
2.3 Distribuições Estáveis de Lévy Generalizadas	35
2.3.1 Densidade Probabilidade do Tamanho de Passos	41
2.4 Características da Difusão Normal	45
2.4.1 Movimento Browniano e Caminhadas Aleatórias	45
2.5 Características da Superdifusão: Caminhadas e voos de Lévy	48
2.5.1 Descrição Estatística dos Voos de Lévy	50
2.6 Grandezas Mensuráveis	52
2.6.1 Tempo de Primeira Passagem para Voos de Lévy	52
2.6.2 Transmissão Difusa para Voos de Lévy	53
3 Aprisionamento de Radiação	56
3.1 Contexto Histórico	56
3.1.1 Descrição do Fenômeno	57
3.2 Distribuição de Probabilidade do Tamanho dos Passos	59

3.2.1	Tratamento de Holstein	62
3.3	Superdifusão com Redistribuição de Frequência	64
3.3.1	Cenários R_I e R_{II}	65
3.3.2	Cenário R_{III}	67
3.4	Resultados Teóricos das Formas Espectrais	68
3.4.1	Forma de Linha de Doppler	69
3.4.2	Forma de Linha de Lorentz	70
3.4.3	Forma de Linha de Voigt	71
3.5	Resultados Experimentais das Formas Espectrais	72
3.5.1	Valor Experimental de α para o Perfil Doppler	72
3.5.2	Valor Experimental de α para o Perfil Lorentz	75
3.5.3	Efeito de Truncagem no Voo de Lévy de Fótons	77
3.6	Objetivo do Trabalho	80
4	Arranjo Experimental	86
4.1	Estrutura atômica do Césio	87
4.1.1	Linha D2 do Césio	89
4.2	Componentes do Arranjo Experimental	90
4.2.1	Laser Semicondutor	90
4.2.2	Isolador Ótico	93
4.2.3	Cavidade Fabry-Pérot	94
4.2.4	Absorção Saturada	97
4.2.5	Lâmina de Meia-Onda e Polarizador	101
4.2.6	Célula com Vapor Atômico	104
4.3	Detalhes do Arranjo Experimental	106
5	Resultados Experimentais	108
5.1	Descrição do Processo de Medidas	108
5.1.1	Fabry-Pérot	111
5.1.2	Absorção Saturada	112
5.1.3	Transmissão do Feixe Laser	112
5.1.4	Transmissão da Luz Difusa	114
5.2	Tratamento da Transmissão Difusa	116
5.3	Resultados das Medidas	119
5.3.1	Curvas de Transmissão do Laser para $\Theta = 15^\circ$	119
5.3.2	Curvas de Transmissão do Laser para $\Theta = 25^\circ$	120
5.3.3	Curvas de Transmissão Difusa para $\Theta = 15^\circ$	122
5.3.4	Curvas de Transmissão Difusa para $\Theta = 25^\circ$	125
5.4	Resultados Experimentais para a Transmissão Difusa em Função da Opacidade	127
5.4.1	Resultados experimentais para $\Theta = 15^\circ$ e $\Theta = 25^\circ$	128

5.5	Medidas para célula menor $L = 1.0mm$	131
6	Conclusão	134
A	Solução das Equações de Bloch sem Amortecimento Devido à Emissão Espontânea	139
A.1	Descrição da Função de Onda	139
A.1.1	Bases	139
A.1.2	Elementos da Matriz Dipolo	140
A.1.3	Oscilações de Rabi	141
A.1.4	Solução das Equações de Bloch sem Amortecimento Devido à Emissão Espontânea	142
B	Distribuição de Velocidades de Maxwell-Boltzmann	145
B.1	Gás Clássico	145
B.1.1	Gás Ideal Clássico	147
B.1.2	Distribuição de Maxwell-Boltzmann	148
C	Equação de Difusão Clássica	151
D	Cálculo Teórico do Coeficiente de Absorção	155
	Referências Bibliográficas	159

Lista de Figuras

1.1	Esquema do átomo de dois níveis, sendo ω é a frequência de oscilação do campo, Γ_0 é a taxa de decaimento espontâneo do nível excitado para o nível fundamental, τ é o tempo de vida dos átomo no estado excitado e δ a dessintonização do campo em relação à frequência ressonante do átomo ω_0	12
1.2	Gráficos sobrepostos mostrando como a absorção e dispersão variam em função da dessintonização δ para diferentes valores da razão I/I_s	21
1.3	Distribuição Gaussiana obtida da Eq. 1.59.	25
1.4	O perfil Voigt (curva azul) formado pela convolução do perfil Doppler (curva preta) e perfil Lorentz (curva vermelha). O perfil Voigt se encontra entre os perfis Doppler e Lorentz. A relação entre os três perfis é dada pelo parâmetro de Voigt $a = \Gamma/\Gamma_D$, onde quanto maior o parâmetro de Voigt mais o perfil Voigt se aproxima do perfil Lorentz.	27
1.5	Função densidade de probabilidade para a frequência emitida no referencial do laboratório, após o primeiro evento de espalhamento δ_1 . As setas na figura indica a frequência de excitação (δ_I) para cada curva [64].	29
1.6	Função de densidade de probabilidade da frequência emitida para um número j eventos de espalhamento (j denotado pelo números na figura). A excitação inicial é $\delta_i = -\Gamma_D$ [64].	30
2.1	Comparação das parametrizações S (à esquerda) e S_0 (à direita): (PDFs) estáveis de Lévy para $\beta = 0,5$ e $\alpha = 0,5$ (linha sólida preta), $\beta = 0,5$ e $\alpha = 0,75$ (linha pontilhada vermelha), $\beta = 0,5$ e $\alpha = 1$ (linha azul tracejada curta), $\beta = 0,5$ e $\alpha = 1,25$ (linha tracejada verde) e $\beta = 0,5$ e $\alpha = 1,5$ (linha tracejada longa ciano). Na parametrização S temos as diferentes curvas para diferentes valores de σ e Δ . Na parametrização S_0 , $\Delta = 0$ [81]	38

2.2	Painel esquerdo: estáveis para $\alpha = 1, 2$ e $\beta = 0$ (linha sólida preta), 0,5 (linha pontilhada vermelha), 0,8 (linha tracejada azul) e 1 (linha tracejada verde). Painel direito: formas fechadas para densidades são conhecidas apenas para três distribuições - Gaussiana ($\alpha = 2$; linha sólida preta), Cauchy ($\alpha = 1$, linha pontilhada vermelha) e Lévy ($\alpha = 0, 5$, $\beta = 1$; linha azul tracejada). A última é uma distribuição totalmente distorcida, ou seja, seu suporte é $\mathbb{R}^+$. Em geral, para $\alpha < 1$ e $\beta = 1(-1)$, a distribuição está totalmente inclinada para a direita (esquerda) [81].	39
2.3	Painel esquerdo: Gráfico em escala semilog de funções estáveis de Lévy simétricas ($\beta = \mu = 0$) de densidades de probabilidade (pdfs) para $\alpha = 2$ (linha sólida preta), 1,8 (linha pontilhada vermelha), 1,5 (linha tracejada azul) e 1 (linha tracejada verde). Para $\alpha = 2$ densidade forma uma gaussiana e é apenas uma densidade α - estável com caudas exponenciais. Painel direito: Gráfico em escala log-log, temos caudas de funções estáveis de Lévy de distribuição cumulativa simétricas (cdfs) para $\alpha = 2$ (linha sólida preta), 1,95 (linha pontilhada vermelha), 1,8 (linha tracejada azul) e 1,5 (linha tracejada verde) em escala log-log. Para $\alpha < 2$, as caudas formam retas com inclinação $-\alpha$ [81].	40
2.4	Representação da caminhada aleatória unidimensional. Passos de comprimento l igualmente prováveis para direita ou para esquerda.	46
2.5	Classificação da Difusão Anômala através do parâmetro γ . Superdifusão para $\gamma > 1$, Difusão Normal para $\gamma = 1$ e Subdifusão para $\gamma < 1$	51
3.1	Representação do aprisionamento de radiação. Um feixe laser de prova incide numa célula com vapor atômico ressonante. Os fótons da radiação incidente são absorvidos e, posteriormente, reemitidos aleatoriamente, podendo ocorrer sucessivos processos de absorção e reemissão espontânea até alcançar os limites da célula e deixar o vapor. Esse efeito é conhecido como <i>Radiation Trapping</i>	58
3.2	Esboço de meio espaço $x > 0$ preenchido com meio espalhador, para determinar a fração de partículas incidentes em x e transmitido através de uma fina fatia de espessura dx	60
3.3	Um feixe de laser é incidente na célula fonte com vapor de Rb. A luz espalhada se propaga numa direção ortogonal e é selecionada com dois diafragmas, iluminando uma segunda célula de observação. A luz espalhada nesta segunda célula é coletada em uma câmera CCD resfriada. Este sinal de fluorescência é proporcional à função de distribuição de um único passo. Figura fonte [44].	73

- 3.4 Para um feixe de laser monocromático incidente de frequência ω , foi mostrado que $P(x)$ tem diminuição exponencial, conforme mostrado pela linha e ajuste verde. Para uma situação com alargamento Doppler, $P(x)$ tem uma diminuição da lei de potência, bem ajustada por $P(x) \sim 1/|x|^\alpha$ com $\alpha = 1,41 \pm 0,12$ (linha tracejada vermelha), característica dos voos da Lévy. Figura fonte [44]. 74
- 3.5 Um feixe laser de Ti:Sa com $2.0\mu W$ de potência e ressonante, excita a célula em forma de disco, cheia com vapor de Rb e 50 torr de gás He. Um fotodiodo (PD) grava a transmissão coerente e uma câmera CCD coleta a luz espalhada. Figura fonte [41]. 75
- 3.6 Transmissão difusa T_{diff} em função da opacidade. Os dados em azul são resultados experimentais da transmissão difusa; os dados em vermelho tracejado são ajustes teóricos da Eq. 3.32; os pontos em azul correspondem a um expoente de Lévy $\alpha = 0,5$ e os pontos pretos a um expoente 1.0 correspondente ao caso Doppler. Figura fonte [41]. 77
- 3.7 Simulação numerica da probabilidade de retorno $P(z = 0)$, onde z é a soma dos VLT de parâmetro $\alpha = 1.2$. Três diferentes valores de comprimento $l = 10, l = 100, l = 1000$ são mostrados. O regime para pequenos valores de n é mostrado como uma linha sólida, enquanto o regime assintótico para grandes valores de n é mostrado como uma linha pontilhada, um para cada valor de l . Os valores de desvio padrão dos VLT $\sigma_0(\alpha, l)$, usados para plotar as linhas pontilhadas, foram calculados numericamente. O crossover n_c entre os dois regimes assintóticos aumenta muito quando l cresce. Para o caso $l = 1000$, o comportamento muito perto do previsto para um voo Levy é observado para $n = 1000$. Figura fonte [17] 79
- 3.8 O perfil de Voigt com parametro de Voigt $a > 1$ (curva vermelha) formado pela convolução do perfil Doppler (curva azul) e perfil de Lorentz (curva preta) 80
- 3.9 (a) Distribuição de probabilidade de tamanho do passo $P(r)$ calculada da Eq. 3.22 para perfis de absorção Voigt com os parâmetros $a = 10^{-2}$ (linha azul) e $a = 10^{-1}$ (linha vermelha). O $P(r)$ também é mostrado para perfis de absorção Doppler e Lorentz como linhas tracejadas. (b) Cálculo da $\frac{d \log_{10}[P(r)]}{d \log_{10}(r)}$ para $P(r)$ para perfis de absorção Voigt com os parâmetros $a = 10^{-2}$ (linha azul) e $a = 10^{-1}$ (linha vermelha). Figura fonte [148]. 82

3.10	Comprimento médio de absorção para um fóton emitido com dessintonia δ para um perfil de Voigt, com parametro de Voigt a variando de 10^{-2} (curva azul) para $a = 10^{-1}$ (curva vermelha). O comprimento da célula é representado pela linha preta pontilhada em $L = 3 \times 10^{-2}m$	84
4.1	Montagem experimental desenvolvida para medidas da transmissão difusa da luz, após a excitação do vapor atômico de césio pelo laser com frequência correspondente a transição da linha D_2 ($6S_{1/2}(F = 4) \rightarrow 6P_{3/2}(F' = 3, 4, 5)$ do ^{133}Cs)	86
4.2	Linhas D_1 e D_2 do césio com a estrutura hiperfina para os níveis fundamentais e excitados, correspondendo, respectivamente aos comprimentos de onda 894 nm e 852 nm.	88
4.3	Representação gráfica do limiar de corrente do laser I_L . Para o laser utilizado em no arranjo experimental $I_L = 45$ mA	91
4.4	Esquema de uma laser semiconductor em heteroestrutura. Uma corrente I é utilizada como sistema de bombeamento; p indica que o material possui buracos como portadores majoritários e n indica que o material possui elétrons como portadores majoritários	91
4.5	Diodo Laser utilizado como fonte de luz.	92
4.6	Isolador ótico utilizado no arranjo experimental.	93
4.7	Múltiplas reflexões e transmissões T_m de um feixe de luz entre dois espelhos. É indicado o campo transmitido e refletido em cada interface: os feixes refletidos são indicados por R_m e os feixes transmitidos são indicados por T_m , onde $m = 1, 2, 3, \dots$, n é o índice de refração, Θ o ângulo de incidência do feixe de luz e l é a distância entre os espelhos.	95
4.8	Espectro de transmissão do feixe laser após a cavidade Fabry-Pérot. Esse sinal mostra que o laser está monomodo e é utilizado para calibrar em frequência a varredura horizontal do osciloscópio.	97
4.9	O feixe de laser viajando para a direita é chamado de feixe de prova (sonda). O segundo feixe do laser sobreposto e propagando-se na direção oposta é chamado de feixe de bombeio. Como ambos os feixes são do mesmo laser, têm a mesma frequência, mesmo quando essa frequência é varrida através da ressonância.	99
4.10	Espectro de absorção saturada do césio, visto em um osciloscópio. Os picos correspondem às transições $F = 4 \rightarrow F' = 3, 4, 5$ e aos crossovers $F' = 3/4$, $F' = 3/5$ e $F' = 4/5$	101
4.11	Lâmina de meia-onda utilizada com o objetivo de controlar a intensidade do feixe laser no arranjo experimental.	102

4.12	Esquema ilustrativo de uma frente de onda plana linearmente polarizada incidindo em um meio bi-refringente com ângulo Θ em relação ao eixo óptico do meio (na direção y), onde as componentes extraordinária (E) e ordinária (O) estão indicadas.	103
4.13	Cubo polarizador utilizado para transmitir a luz numa determinada polarização.	104
4.14	Célula utilizada para medir o processo de aprisionamento radiativo ressonante e sua relação com a difusão anômala dos fótons oriundos do feixe laser.	105
5.1	Montagem experimental desenvolvida para a detecção de fótons espalhados após a excitação do vapor atômico de césio pelo laser com frequência correspondente a transição da linha D_2 do Cs 133	109
5.2	Ajuste teórico da transmissão do feixe laser para o cálculo da densidade do vapor. Curva teórica (preto) sobreposta à curva experimental (vermelho) é uma medida precisa da densidade do vapor. . .	114
5.3	Esquema do processo de absorção e emissão espontânea de fótons por átomos ressonantes num vapor atômico.	115
5.4	Exemplo de conjunto de sinais detectados no osciloscópio. Absorção Saturada (curva magenta), Transmissão Difusa (Curva azul), Transmissão do laser (Curva vermelha) e Fabry-Pérot(Verde). . . .	116
5.5	Curva de transmissão difusa aparente com A_{mim} afetada por luz externa em roxo A_0	117
5.6	Diferentes curvas obtidas do tratamento da transmissão difusa. T_{ap} é Transmissão difusa aparente (curva preta), L_s é a luz espalhada (curva vermelha) e T_r , a transmissão difusa real utilizadas nas medidas do parâmetro α	119
5.7	Curvas de transmissão do feixe laser em função da frequência para as temperaturas $T = 45^\circ C$, $T = 80^\circ C$, $T = 95^\circ C$, $T = 105^\circ C$. O aumento da temperatura do reservatório, aumenta o número de átomos na amostra, alargando a transmissão, devido a ter um maior número de átomos absorvendo a radiação.	121
5.8	Curvas de transmissão do feixe laser em função da frequência para as temperaturas $T = 45^\circ C$, $T = 80^\circ C$, $T = 95^\circ C$, $T = 105^\circ C$. Um comportamento similar a ocorre para as medidas com o ângulo menor.	122
5.9	Curvas de transmissão difusa do vapor atômico em função da frequência para medidas com o ângulo menor ($\Theta = 15^\circ$).	123
5.10	Curvas de fluorescência do feixe laser em função da dessintonização para medidas com o ângulo maior ($\Theta = 25^\circ$).	126

5.11	Evolução das curvas de transmissão difusa em função da dessintonização para medidas com o ângulo menor ($\Theta = 15^\circ$). A amplitude mínima de transmissão difusa diminui segundo a lei de Ohm modificada para diferentes valores de opacidade.	128
5.12	Transmissão difusa em função da opacidade para ($\Theta = 15^\circ$). Regime Doppler (reta preta) com $\alpha = 1, 2 \pm 0.2$ e Regime Lorentziano (reta azul) com $\alpha = 0, 50 \pm 0.04$	129
5.13	Transmissão difusa em função da opacidade para ($\Theta = 25^\circ$). Regime Doppler (reta preta) com $\alpha = 1, 2 \pm 0.2$ e Regime Lorentziano (reta azul) com $\alpha = 0, 50 \pm 0.04$	129
5.14	Transmissão difusa em função da opacidade para uma célula de comprimento $L = 1, 0$ mm. Regime Doppler (reta preta) com $\alpha = 0.98 \pm 0.01$ em concordância com $\alpha = 1.0$ no limite assintótico. . . .	132
6.1	Resultados experimentais do parâmetro α obtidos para os diferentes perfis: Doppler, Lorentz e Voigt.	137
B.1	Representação do potencial de Lennard-Jones V_{LJ} em função r entre as distância entre duas partículas. A escala de comprimento $\sigma = 0.2$ representa a distância na qual o potencial intermolecular entre dois átomos é zero . A medida de quão fortemente dois átomos de atraem é dada por $\varepsilon = 0.12$, e representa o valor mínimo do potencial. . .	146

Lista de Símbolos

Símbolo	Nome do símbolo
ω_L	frequência do laser
T	temperatura
E	energia
t	tempo
ω_0	frequência de ressonância do átomo
δ	dessintonia
ω	frequência de oscilação do campo
Γ_0	taxa de decaimento espontâneo
$\mathbf{E}$	vetor campo elétrico
$\hat{\mu}$	operador momento de dipolo elétrico
τ	tempo de vida do estado excitado
K	coeficiente de absorção
$\mathbf{P}$	vetor polarização elétrica
χ	susceptibilidade elétrica
ε_0	permissividade elétrica no vácuo
N	densidade atômica
I	intensidade do campo elétrico (laser)
I_s	intensidade de saturação da transição atômica
Ω	frequência de Rabi
E_0	amplitude do campo elétrico
x	tamanho do passo
z	somatório dos passos
n	número de passos
$\mathbf{k}$	vetor de onda
α	parâmetro de estabilidade de Lévy
β	parâmetro de assimetria de Lévy
σ	parâmetro de escala de Lévy (desvio padrão)

Lista de Símbolos

Símbolo	Nome do símbolo
Δ	parâmetro de localização de Lévy
Σ	seção de choque
L	tamanho da célula
r	opacidade do vapor
$P(x)$	distribuição do tamanho dos passos
$\Phi(\nu)$	perfil espectral normalizado
$\Theta(\nu)$	espectro de frequência emitida (perfil de emissão)

Introdução

O estudo da radiação é um tema de fundamental importância numa vasta gama de situações devido por todo universo existir radiação, desde emissão de radiação pelas estrelas até a emissão de radiação por uma lâmpada. Por exemplo, é a energia radiativa que assegura a vida na Terra, devido aos incessantes processos de fotossíntese vegetal.

Nesse trabalho, a radiação é estudada através do processo chamado aprisionamento de radiação, que é o nome dado ao fenômeno de espalhamento múltiplo de fótons em vapores atômicos, moleculares ou plasma. Esse tema é bastante relevante, uma vez que, o transporte de radiação é um tema de importância vital e que tem sido alvo de muitos estudos em áreas tão diversas como as atmosferas estelares [1], a luminescência de plasmas e vapores atômicos [2, 3], a luminescência molecular [4, 5], a óptica da atmosfera e dos oceanos terrestres [6], a transferência de radiação na região do infravermelho, em aplicações de engenharia [7, 8] e átomos frios [9].

Desde o início da década de 1920, o fenômeno do aprisionamento de radiação vem sendo estudado, quando Compton e Milne [10, 11, 12] descreveram, de forma teórica, a difusão da radiação em um meio absorvedor, assumindo que a difusão da radiação podia ser tratada do mesmo modo que a difusão de partículas, através da equação de difusão. Entretanto, não obtiveram sucesso devido à excitação na amostra decair mais rapidamente que o tempo de vida intrínseco da espécie excitada. Em 1926, Milne fez modificações na equação de difusão para ultrapassar essa dificuldade, mas não obteve êxito, devido a ter negligenciado o efeito da forma do perfil de emissão espectral da substância em causa. Depois de Compton e Milne houve muitas tentativas de descrição do aprisionamento de radiação e uma revisão do contexto histórico é descrita no capítulo 3. A primeira descrição bem sucedida do aprisionamento de radiação veio anos mais tarde, em 1947, quando Holstein [13] propôs uma equação íntegro-diferencial para a descrição deste fenômeno em meios atômicos.

O aprisionamento de radiação em vapores atômicos acontece, por exemplo, quando incidimos um feixe laser com frequência ω próximo da transição atômica ω_0 no vapor atômico ressonante. Os átomos no vapor, ao receberem a radiação

apropriada para provocar suas excitações, sofrem processos de absorção e os átomos passam para um estado de maior energia, o estado excitado. No entanto, estes átomos excitados decaem para um estado de menor energia liberando um fóton. O aprisionamento de radiação ocorre quando a energia do fóton incidente sofre vários processos de reabsorção e reemissão espontânea antes de, eventualmente, escapar do recipiente que contém o vapor atômico.

Os múltiplos espalhamentos dos fótons no interior de um célula com vapor atômico, resultam numa evolução do perfil espectral da radiação no vapor. Embora esse espalhamento seja elástico no referencial atômico (o fóton espalhado e o incidente têm mesma frequência), no referencial do laboratório, o perfil espectral dos fótons espalhados pode ser diferente do perfil dos fótons incidentes, devido ao movimento dos átomos no vapor. O efeito Doppler redistribui as frequências. A evolução do perfil espectral da luz é então determinado por mecanismos de redistribuição em frequência. Esta redistribuição é consequência do perfil espectral ser inhomogêneo.

Portanto, a radiação (os fótons) aprisionada no interior do vapor atômico, realiza uma caminhada aleatória antes de deixar o vapor, devido aos múltiplos processos de reabsorção e reemissão espontânea. Nesse sentido, o movimento dos fótons no interior do vapor atômico é descrito através do conceito de difusão usualmente aplicado a partículas materiais. Neste âmbito, surge um tema bastante interessante, caracterizado como difusão de fótons em vapores atômicos, que é um transporte aleatório típico em que a partícula tem uma probabilidade não desprezível de realizar um passo com grande comprimento num vapor atômico ressonante. Esses longos passos, embora raros, regem as características do transporte, por exemplo, com o deslocamento quadrático médio do tamanho do passo crescendo mais rápido do que linearmente no tempo [14, 15, 16, 17, 18].

A possibilidade de longos passos pode ser mapeada em uma distribuição de tamanho dos passos decaindo assintoticamente como $P(x) \sim |x|^{-1-\alpha}$. Para $\alpha > 2$, a probabilidade de longos passos é muito rara e a caminhada aleatória é uma difusão normal descrita pelo Teorema Central do Limite (TCL) [14]. Entretanto, para $0 < \alpha < 2$ a variância da distribuição do tamanho do passo diverge e, portanto, o TCL não é mais válido, sendo a caminhada aleatória chamada de voos de Lévy (superdifusão) [19]. Para $0 < \alpha < 1$ o comprimento médio do passo $\langle x \rangle$ sempre diverge e o transporte é conhecido como quase-balístico [20].

Os voos de Lévy são encontrados em uma grande variedade de sistemas tais como turbulência [21], luz solar transmitida por céus nublados [22], transporte de partículas carregadas em ventos solares [20], economia [23, 24], deslocamento de células [25] e animais [26, 27, 28], viagens humanas [29, 30, 31] e disseminação de doenças [32, 33, 34, 35].

O caráter superdifusivo do aprisionamento de radiação em vapores atômicos

foi primeiramente mostrado por Pereira [36] para os casos em que o vapor possui perfil Doppler, perfil Lorentz ou os dois simultaneamente, resultando no perfil espectral Voigt. Para as três situações, devido à presença de passos de dimensão muito elevada no vapor atômico, foi mostrado que o espalhamento dos fótons é do tipo voos de Lévy. Esse espalhamento tem passos de dimensão bastante acima do livre percurso médio que se poderia definir caso o movimento fosse browniano. Nesse transporte (voos de Lévy), a probabilidade de eventos de grande magnitude (longos passos) é substancialmente maior do que em uma distribuição normal. Estes grandes passos ocorrem em pequeno número comparado ao número total de passos, mas são eles que regem a estatística do sistema.

As informações do mecanismo de caminhada aleatória podem ser obtidas a partir de parâmetros mensuráveis, como a transmissão dos fótons pela amostra, deslocamento quadrático médio dos passos, tempo de primeira passagem e tempo de sobrevivência dos fótons na amostra, onde o tamanho finito das amostras reais pressupõe e introduz uma truncagem nos longos passos [17]. Essa truncagem resulta em parâmetros medidos que dependem do tamanho do sistema laboratorial e que caracterizam a superdifusão [14, 37]. Um sistema laboratorial controlável para investigar os efeitos de truncagem na superdifusão possibilita o estudo do sistema. Os dispositivos ópticos permitem a repetibilidade, grande estatísticas de fótons e controle de parâmetros, por exemplo, efeitos de desordem estática [38, 39] e desordem dinâmica [40, 41], dimensão fractal do passeio aleatório [42] e tamanho finito de sistema [42] foram estudados para voos de Lévy de fótons em meios projetados conhecidos como vidros de Lévy [15, 43] e em vapor atômico [40, 41, 44, 45].

Esse trabalho centra-se na descrição estatística do aprisionamento de radiação ressonante em vapores atômicos. Em particular, vamos estudar o transporte fotônico para o vapor atômico de ^{133}Cs , com perfil espectral de absorção Voigt. O estudo desse transporte fotônico foi possível devido ao trabalho de *Pereira et al* [36], que mostrou o caráter superdifusivo dos fótons em vapores atômicos infinitos. Para um vapor com perfil espectral Doppler, foi mostrado em [36], que a difusão dos fótons é do tipo voos de Lévy, com parâmetro $\alpha = 1.0$. Esse resultado foi confirmado em [44], que obteve $\alpha = 1.41 \pm 0.12$, um valor experimental que será discutido nesse trabalho. Para um vapor com perfil Lorentz, em [36], foi obtido o parâmetro de Lévy $\alpha = 0.5$, que foi confirmado experimentalmente em [41]. Por sua vez, para o perfil espectral de absorção Voigt, foi obtido em [36], um parâmetro $\alpha = 0.5$ em concordância com o perfil Lorentz. Um resultado que está associado aos longos passos dados pelos fótons no vapor atômico que dominam o transporte.

Nesse trabalho, vamos medir o parâmetro α de Lévy para o perfil de absorção do vapor em questão (um perfil Voigt), um resultado ainda não verificado na literatura. Em outras palavras, como o perfil Voigt é a convolução do perfil Doppler

com o perfil Lorentz, esperamos medir dois valores para α ; um com $\alpha \geq 1$ relacionado ao regime Doppler; e outro com $\alpha \simeq 0.5$ que está relacionado ao regime Lorentz. Desse modo, devido o tamanho finito do sistema, que corresponde ao vapor atômico em questão confinado numa célula de comprimento $L = 3.0$ cm, pretende-se mostrar a dependência do parâmetro α com o tamanho da amostra, que é representada pela opacidade do meio, e caracterizada pelo perfil de absorção Voigt. Um experimento foi montado para verificar a dependência de α com o tamanho do sistema (amostra), ou seja, com a opacidade do meio, que é obtida em função da densidade atômica. As densidades do vapor atômico são obtidas variando a temperatura desse sistema e são suficientemente altas para se considerar a existência de redistribuição completa em frequências (RCF) dos fótons no vapor atômico.

O tamanho finito do sistema (célula de comprimento $L = 3.0$ cm) provoca uma truncagem no tamanho dos passos. Essa truncagem na amostra determina um voo de Lévy truncado (VLT) [17]. Assim, a célula de comprimento $L = 3.0$ cm determina o tamanho máximo do passo dado pelo fóton no vapor atômico, que está restrito a uma porção espectral do vapor. Para nosso vapor, uma opacidade (densidade) crítica determina dois regimes diferentes: Doppler e Lorentz, que são caracterizados pelo parâmetro $\alpha \in [0, 2]$. Para esses regimes (Doppler e Lorentz), o valor de α foi obtido em concordância com resultados experimentais anteriores em [44] e [41], respectivamente. Além disso, o valor do parâmetro α obtido no regime Lorentz é equivalente ao parâmetro α do perfil de absorção do vapor (perfil Voigt). Isso está relacionado aos longos passos dados pelos fótons no vapor atômico, que acontecem quando o fóton é emitido em grande dessintonização nas "asas" lorentzianas, dominando o transporte. Assim, como o perfil Voigt e o perfil Lorentz compartilham das mesmas "asas", ou seja, têm o mesmo comportamento em grande dessintonização, seus parâmetros de Lévy são iguais com $\alpha = 0.5$.

Esse trabalho foi dividido em cinco capítulos. No capítulo 1, discutimos os mecanismos de interação entre a matéria e a radiação (laser). Em particular, são apresentados os efeitos de absorção e emissão da radiação ressonante. Além disso, explicamos os principais perfis espectrais de absorção de um vapor atômico, com distribuição de velocidades térmicas, quando excitado pela radiação monocromática (laser). Mostramos no processo de absorção e posterior emissão de radiação por um átomo, que a radiação sofre redistribuição de frequência e, dependendo das condições físicas existentes, esta redistribuição de frequência pode ser completa ou parcial.

No capítulo 2, descrevemos os processos de difusão para uma partícula em movimento. Nesse contexto, o movimento fotônico no vapor atômico é encarado como uma caminhada aleatória, que, a princípio, obedece o TCL. Contudo, devido aos longos passos dados pelos fótons no vapor atômico, o deslocamento quadrático

médio da partícula cresce mais rápido que linearmente no tempo, passando a ser descrito pela estatística de Lévy. Nesse contexto, apresentamos as distribuições de Lévy e, através do segundo momento do deslocamento médio das distribuições classificamos os processos de difusão anômala. Além disso, apresentamos algumas grandezas que são medidas no transporte fotônico.

No capítulo 3, fizemos uma descrição estatística do aprisionamento de radiação em vapores atômicos, onde começamos com uma breve revisão do contexto histórico. Essa descrição estatística é baseada na representação da difusão múltipla dos fótons redistribuídos pelo vapor. Nesse contexto, a distribuição do tamanho dos passos dados pelos fótons no vapor atômico é dada pela lei de Beer-Lambert ponderada pelo perfil espectral de absorção do vapor em questão (um perfil Voigt no regime de RCF). Além disso, assintoticamente, a distribuição do tamanho dos passos é dada por uma lei de potência do tipo $|x|^{1+\alpha}$, com $0 < \alpha < 2$. Os cenários para redistribuição de frequência são apresentados e, em particular, é considerada a RCF dos fótons no vapor atômico. A partir disso, apresentamos os resultados teóricos obtidos em [36], que evidenciam o caráter superdifusivo dos fótons no vapor atômico, para cada perfil espectral apresentado (Doppler, Lorentz e Voigt). Para tais perfis, apresentamos o que já foi medido experimentalmente e o que esperamos medir considerando esses resultados experimentais já obtidos. O fato do tamanho da amostra ser finito é levado em consideração através da truncagem dos voos de Lévy no vapor atômico (VLT). Assim, fizemos nossas previsões teóricas baseadas nesse "corte" no sistema, as quais nos fornecem uma medida do parâmetro α em função do tamanho deste.

No capítulo 4, descrevemos o arranjo experimental desenvolvido para o estudo da superdifusão dos fótons no vapor atômico de ^{133}Cs , com perfil de absorção Voigt. Nesse arranjo experimental, os principais componentes são descritos separadamente. A parte principal consiste, basicamente, numa célula com vapor atômico de césio aquecido, onde um feixe laser de baixa potência ($\sim 30\mu\text{W}$ e 1.25 mm de diâmetro) com comprimento de onda $\lambda = 852.34$ nm, correspondente à transição da linha D_2 do césio, incide na amostra (vapor atômico de ^{133}Cs). A transmissão do feixe laser e a transmissão difusa são coletadas por dois detectores D1 e D2, respectivamente, separados por um ângulo Θ , e os resultados obtidos são utilizados na determinação do parâmetro α de Lévy através da lei de Ohm modificada. A princípio, um conjunto completo de medidas foi realizado em função da temperatura do reservatório da célula (onze medidas) para $\Theta = 15^\circ$, e para mostrar o que o ajuste da lei de Ohm modificada não depende desse ângulo, fizemos outro conjunto completo de medidas para $\Theta = 25^\circ$ (onze medidas também).

No capítulo 5, realizamos o tratamento de dados das medidas feitas para a transmissão do laser e transmissão difusa. A partir da transmissão do laser, inferimos a densidade atômica por meio da lei de Beer-Lambert e, conseqüentemente,

a opacidade do meio, que é uma grandeza adimensional obtida em função da densidade. A transmissão difusa é misturada com luz espalhada na janela da célula, resultando numa transmissão difusa aparente. Essa luz espalhada é eliminada no tratamento de dados. Para inferirmos o parâmetro α de Lévy, foi utilizada a lei de Ohm modificada, a qual permitiu relacionarmos a amplitude de transmissão difusa com a opacidade e, por meio de um fit teórico, obtermos α . A partir desse trabalho, vamos entender como ocorre o espalhamento dos fótons num vapor atômico com RCF, caracterizado pelo perfil espectral Voigt em função da opacidade do vapor. Por fim, no capítulo 6 apresentamos nossas conclusões.

Capítulo 1

Interação Radiação-Matéria

Neste capítulo, descrevemos a interação entre a radiação e a matéria, através dos principais fenômenos que ocorrem quando a radiação interage com um meio atômico. Nesta abordagem, de caráter semi-clássico, o átomo é tratado tendo por base o modelo do átomo de dois níveis e a radiação é encarada como uma onda electromagnética clássica.

Dessa forma, explicaremos os principais perfis espectrais de absorção de um vapor atômico, com distribuição de velocidades térmicas, quando excitado por uma radiação monocromática (laser). De modo que, quando um fóton laser de frequência ω_L próxima da frequência de transição atômica incide numa célula com vapor atômico, os átomos irão absorvê-lo e reemitir-lo em seguida.

Os perfis espectrais de linha do átomo resultam do conjunto de níveis energéticos que todo átomo possui, variando de átomo para átomo. Portanto, quando os átomos são excitados pela radiação ressonante (laser), devido ao conjunto de níveis energéticos do átomo, a radiação absorvida pelos átomos é emitida numa variedade de frequências.

Numa situação ideal, com os átomos parados ($T = 0K$), sem interação uns com os outros e isolados, os átomos emitem a radiação na mesma frequência que foi absorvida, e são representadas por linhas finas concentradas na energia E_n do nível atômico excitado.

Entretando, o átomo geralmente está fora dessa situação ideal e, no processo de emissão do fóton previamente absorvido, ocorre um alargamento da linha do nível atômico excitado, que está relacionado aos mecanismos alargadores das linhas atômicas.

Existem vários mecanismos alargadores das linhas atômicas, onde os mais conhecidos são:

1. ***Alargamento Natural***: Ocorre porque os átomos excitados, mesmo parados, "isolados", em temperatura absoluta $T = 0K$, também emitem ra-

dição; o efeito é chamado emissão "natural", espontânea, e é atribuído a interação do átomo com os modos do vácuo. A largura da transição está associada à taxa de emissão espontânea.

2. ***Alargamento Doppler***: Ocorre devido ao efeito Doppler associado à velocidade dos átomos ou moléculas numa amostra em relação ao observador no referencial do laboratório. O efeito disso consiste no aumento da largura das linhas espectrais, que seguem uma distribuição de Maxwell-Boltzmann. Esse efeito depende da temperatura e tem a forma da linha dada por uma gaussiana.
3. ***Alargamento Colisional***: Ocorre devido às colisões entre átomos, que reduzem o tempo de vida do estado excitado, Δt , aumentando a incerteza ΔE . Esse efeito depende da densidade (isto é, pressão de um gás) e da temperatura, que afeta a taxa de colisões. O efeito de alargamento é descrito por um perfil Lorentziano na maioria dos casos.

Portanto, uma vez o fóton absorvido, quando emitido, origina um espectro de emissão contínuo e determinado por uma faixa de frequência. A largura desse espectro de emissão pode depender da distribuição velocidade dos átomos que está emitindo radiação, da temperatura do gás de átomos, da pressão do gás e de outras influências externas sobre o átomo, que estão relacionados aos diversos mecanismos que alargam as linhas atômicas, transformando cada linha fina do espectro atômico em uma faixa de frequências emitidas.

Os mecanismos alargadores de linha atômica geram os chamados perfis espectrais de linha, onde os principais são: perfil Doppler, Lorentz e Voigt, que serão descritos doravante.

Portanto, damos particular atenção ao caso em que, durante um processo de absorção e posterior emissão de radiação por um átomo, a radiação sofre redistribuição de frequência e, dependendo das condições físicas existentes, esta redistribuição de frequência pode ser completa ou parcial. Particularmente, voltaremos nossa atenção para o caso em que a radiação sofre uma redistribuição completa de frequência *RCF*.

No processo de emissão com RCF, a frequência do fóton emitido é totalmente independente da frequência do fóton previamente absorvido, sendo determinada pela forma espectral da transição, seja, gaussiana, lorentziana ou de Voigt. Portanto, começamos revisando o átomo de dois níveis, desenvolvendo a abordagem semi-quântica da interação de um sistema atômico de dois níveis com a radiação (laser) oscilatória correlacionada.

Em seguida, apresentamos o formalismo matriz densidade e as equações ópticas de Bloch, através das quais, calculamos a polarização e a susceptibilidade elétrica

do meio, que pode ser separada em duas partes, uma parte real e outra imaginária. A parte real da susceptibilidade está relacionada à dispersão da luz no meio atômico e a parte imaginária está ligada à absorção neste meio atômico, que para átomos parados é caracterizado por um perfil Lorentz. Entretanto, sabemos que de fato os átomos de um vapor não estão parados, tampouco isolados no espaço. Portanto, uma vez levado em conta o movimento térmico dos átomos, o perfil espectral não é mais um perfil Lorentz.

Assim, a temperatura de qualquer sistema físico $T \neq 0K$ é o resultado do movimento dos átomos ou moléculas que compõem o sistema. Esses átomos ou moléculas possuem velocidades diferentes, e a velocidade de cada partícula varia constantemente devido a colisões umas com as outras. O resultado disso é uma distribuição relativa às velocidades, que varia em função da temperatura do sistema, e é dada pela distribuição de probabilidade de velocidades de Maxwell-Boltzmann, que é representada por uma curva de Gauss. Portanto, se levarmos em conta fatores como o efeito Doppler ou as colisões entre os átomos do vapor, veremos que a largura das linhas espectrais é ainda maior.

Como vimos temos dois tipos de perfis espectrais: Lorentz (espectro homogêneo), onde consideramos os átomos parados e Doppler (não-homogêneo), onde levaremos em conta o movimento térmico dos átomos. A combinação desses dois efeitos nos leva ao chamado perfil de Voigt, que é uma convolução entre o perfil Doppler e Lorentz. Além disso, como veremos mais adiante, estes espectros de absorção servirão para calcular a distribuição de probabilidade de passos dos fótons em um vapor atômico.

1.1 Átomo de Dois Níveis

Nesta seção, apresentamos o desenvolvimento da abordagem quântica da interação de um sistema atômico de dois níveis com um campo oscilante clássico. Devido ao alto número de graus de liberdade e muitos processos de emissão ocorrendo simultaneamente, uma série de aproximações são necessárias para tratar o sistema em condições específicas.

Mesmo átomos reais tendo múltiplos níveis de energia, podemos tratar o sistema como um átomo de dois níveis, uma vez que vamos considerar as interações quase ressonantes, ou seja, as transições para outros níveis são insignificantes, pois a frequência da luz incidente no meio atômico está próxima da ressonância e a interação entre os átomos com a radiação eletromagnética (laser) ocorre através de momentos de dipolos.

Assim, para um átomo de dois níveis, rotulamos o estado fundamental e o primeiro estado excitado como $|f\rangle$ e $|e\rangle$, respectivamente, e denotamos a frequência ressonante por ω_0 , ou seja, a diferença de energia entre o par de estados é $\hbar\omega_0$, e

ainda, definimos $\delta = \omega - \omega_0$ como a dessintonização da ressonância atômica, onde ω é a frequência de oscilação do campo [46]. A Fig.1.1 ilustra o modelo do átomo de dois níveis.

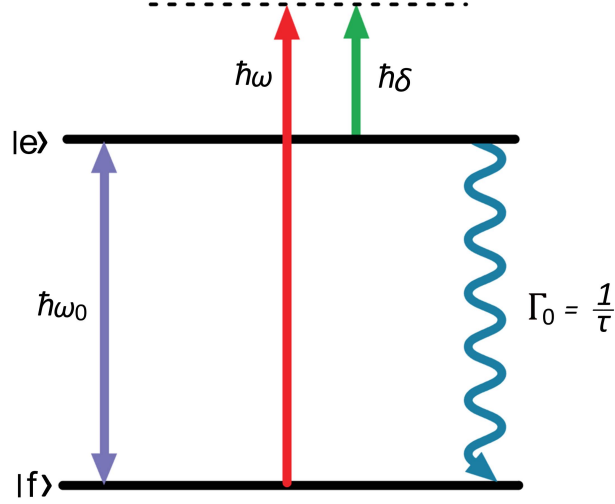


Figura 1.1: Esquema do átomo de dois níveis, sendo ω é a frequência de oscilação do campo, Γ_0 é a taxa de decaimento espontâneo do nível excitado para o nível fundamental, τ é o tempo de vida dos átomo no estado excitado e δ a dessintonização do campo em relação à frequência ressonante do átomo ω_0 .

Na interação de um sistema atômico de dois níveis com a perturbação oscilatória que acopla os níveis, processos estimulados, decorrentes da interação átomo-luz, como a absorção de uma onda monocromática, são, suficientemente, descritos pela equação de Schrödinger. Porém, surge um problema quando queremos descrever processos de relaxamento ao mesmo tempo que processos de excitação.

A emissão espontânea Γ_0 (e qualquer outro processo dissipativo) deve, portanto, ser incluída na descrição física da evolução temporal de nosso sistema de átomo-luz [47]. Assim, nosso sistema não está mais restrito a único modo do campo de luz, pois a emissão espontânea Γ_0 abrange uma distribuição estatística de estados do campo de luz.

A situação não pode ser descrita por uma função de onda, mas apenas por uma distribuição de funções de onda, e podemos apenas calcular a probabilidade de encontrar o sistema dentro dessa distribuição. A equação de Schrödinger, portanto, não se aplica mais, e precisamos mapear a evolução no tempo de um sistema

caracterizado por um operador de densidade que descreve uma mistura estatística de estados quânticos [48].

As equações que descrevem a evolução temporal dos elementos da matriz desse operador densidade são as equações ópticas de Bloch, e devemos utilizá-las em vez da equação de Schrödinger.

1.1.1 Interação Átomo-Campo

O hamiltoniano total de interação átomo-campo é dado pela soma do hamiltoniano atômico livre $\hat{H}_0$ e o hamiltoniano de interação átomo-campo $\hat{H}_{int}$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \quad (1.1)$$

onde $\hat{H}_0 = \sum_n E_n |u_n\rangle\langle u_n|$, sendo $|u_n\rangle$ e E_n , o n-ésimo estado quântico e a energia do n-ésimo estado quântico, respectivamente, com $\hat{H}_0 |u_n\rangle = E_n |u_n\rangle$. Por sua vez, $\hat{H}_{int}$ é a interação do momento de dipolo elétrico da transição com o campo elétrico oscilante, tal que

$$\hat{H}_{int} = -\hat{\mu} \cdot \mathbf{E}, \quad (1.2)$$

sendo $\hat{\mu}$ é o operador momento de dipolo elétrico, dado por

$$\hat{\mu} = \mu_{12} |1\rangle\langle 2| + \mu_{21} |2\rangle\langle 1|, \quad (1.3)$$

onde $\mu_{12} = \mu_{21}^*$ são os termos de coerência da matriz dipolo, $|1\rangle$ e $|2\rangle$ o estado fundamental e o primeiro estado excitado, respectivamente e $\mathbf{E}$ o campo elétrico monocromático com frequência angular ω [46] dado por

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{2} (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t} + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}) \hat{r}. \quad (1.4)$$

A dependência espacial do campo é ignorada, através duma aproximação dipolar [46], onde assumimos que o comprimento de onda do campo é muito maior do que o tamanho do átomo, de modo que, desprezamos quaisquer variações do campo ao longo da extensão do átomo. Isso consiste em desprezar o termo $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, pois, $\mathbf{k} \propto \frac{1}{\lambda}$, e $\mathbf{r}$ é da ordem de grandeza do raio de Bohr, temos $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$. Então, a expressão para o campo fica

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \hat{r}. \quad (1.5)$$

1.1.2 Formalismo Matriz Densidade

O acoplamento de um modo do campo óptico para um átomo de dois níveis pode ser descrito pela equação de Schrödinger, pois descreve a evolução temporal do estado quântico do sistema, que, por sua vez, é representado por função de onda (estado puro) [48].

Todavia, com a inclusão da emissão espontânea, o sistema pode ser descrito apenas por uma distribuição de probabilidade de estados finais, tornando indispensável a descrição pelo formalismo de matriz densidade [47], devido não levar em consideração o fato de que o estado é acoplado a todos os modos do campo óptico.

Assim, como os estados de um sistema com muitas partículas ou muitos graus de liberdade são descritos com precisão através da descrição estatística, o formalismo de matriz densidade é dado pelo operador densidade $\hat{\rho}$ [48], que descreve um conjunto de todos os estados possíveis no sistema. Assim, para um estado puro $|\psi\rangle$, o operador densidade é definido como

$$\hat{\rho} \equiv |\Psi\rangle\langle\Psi|. \quad (1.6)$$

Para um estado misto $|\Psi_n\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$, temos

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|, \quad (1.7)$$

o qual tomamos a soma ponderada com as respectivas probabilidades, onde a soma de probabilidades dada por $\text{Tr}[\rho] = \sum_n p_n = 1$, e $p_n = |C_n|^2$ expressa a probabilidade de encontrar a população no estado n no instante t .

A representação matricial para a evolução temporal do operador densidade, através da expansão do vetor de estado ψ_n numa base orthonormal completa é dado pela representação de Heisenberg [47], tal que

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \frac{i}{\hbar}[\hat{\rho}, \hat{H}] \quad (1.8)$$

com $[\hat{A}, \hat{B}] = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$, o comutador entre os operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e o valor esperado de qualquer operador é

$$\langle\hat{A}\rangle = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}). \quad (1.9)$$

Para um estado puro de um único átomo de dois níveis na representação de energia $|\Psi\rangle = c_f|f\rangle + c_e|e\rangle$, a matriz densidade

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{ff} & \hat{\rho}_{fe} \\ \hat{\rho}_{ef} & \hat{\rho}_{ee} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |c_f|^2 & c_f c_e^* \\ c_e c_f^* & |c_e|^2 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

tem uma interpretação física para cada termo. A diagonal principal tem as populações do estado excitado $|e\rangle$ e fundamental $|g\rangle$, enquanto os termos fora da diagonal principal são os termos de coerência.

1.1.3 Equações de Bloch

As equações de Bloch são equações diferenciais acopladas referentes à evolução temporal dos elementos de matriz do operador densidade, que na representação de Heisenberg é dada pela Eq. 1.8 [49]. Assim, substituindo a Eq. 1.1 na Eq. 1.8, temos

$$\langle m | \frac{d}{dt} \hat{\rho} | n \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle m | [\hat{\rho}, \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}] | n \rangle, \quad (1.11)$$

assim

$$\langle m | \frac{d}{dt} \hat{\rho} | n \rangle = \frac{i}{\hbar} (E_n - E_m) \langle m | \hat{\rho} | n \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle m | [\hat{\rho}, \hat{H}_{int}] | n \rangle, \quad (1.12)$$

onde $|m\rangle$ e $|n\rangle$ são membros de um conjunto completo de vetores de base $\{|k\rangle\}$ que também são autovetores de $\hat{H}_0$ e abrangem o espaço de $\hat{H}$. Da Eq. 1.12, temos que o primeiro termo após a igualdade é diferente de zero se $m \neq n$, pois caso $m = n$ a diferença das energias se anula.

Aplicando a relação de completeza $\sum_k |k\rangle\langle k| = \mathbf{1}$ [50], temos o comutador dos elementos de matriz

$$\langle m | [\hat{\rho}, \hat{H}_{int}] | n \rangle = \sum_k \langle m | \hat{\rho} | k \rangle \langle k | \hat{H}_{int} | n \rangle - \langle m | \hat{H}_{int} | k \rangle \langle k | \hat{\rho} | n \rangle. \quad (1.13)$$

O átomo de dois níveis tem um conjunto completo constituído por dois estado $|1(t)\rangle = |1\rangle$ e $|2(t)\rangle = e^{-i\omega_0 t} |2\rangle$. Além disso, os elementos da matriz do operador de acoplamento de dipolo elétrico $\hat{H}_{int}$ são os elementos da diagonal secundária, onde

$$V = \langle 1 | \hat{H}_{int} | 2 \rangle = \langle 2 | \hat{H}_{int} | 1 \rangle. \quad (1.14)$$

Assim, as Eq. 1.13 adotam a forma

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{11} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}_{12} V - \hat{\rho}_{21} V] \quad (1.15)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{22} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}_{21} V - \hat{\rho}_{12} V] = -\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{11} \quad (1.16)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{12} = i\omega_0\hat{\rho}_{12} + \frac{i}{\hbar}[V(\hat{\rho}_{11} - \hat{\rho}_{22})] \quad (1.17)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{21} = -i\omega_0\hat{\rho}_{21} + \frac{i}{\hbar}[V(\hat{\rho}_{22} - \hat{\rho}_{11})] = \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{12}^* \quad (1.18)$$

Essas equações matricialmente tomam a forma

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{11} \\ \hat{\rho}_{12} \\ \hat{\rho}_{21} \\ \hat{\rho}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & V & -V & 0 \\ V & \hbar\omega_0 & 0 & -V \\ -V & 0 & -\hbar\omega_0 & V \\ 0 & -V & V & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{11} \\ \hat{\rho}_{12} \\ \hat{\rho}_{21} \\ \hat{\rho}_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

O conjunto de equações 1.15, 1.16, 1.17 e 1.18 constitui as equações ópticas de Bloch na representação Heisenberg [47]. Elas não incluem termos de perda por emissão espontânea. A solução das equações ópticas de Bloch sem amortecimento por emissão encontra-se no Apêndice A. A soma dos termos da diagonal principal, chamados de populações, deve ser unitária, e os termos da diagonal secundária, chamados de coerências, são complexos. A relação entre os elementos da matriz do operador densidade podem ser escritos de forma sucinta como

$$\frac{d}{dt}\rho_{11} = -\frac{d}{dt}\rho_{22} \quad (1.20)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{12}^* = \frac{d}{dt}\rho_{21} \quad (1.21)$$

Nosso sistema (átomo de dois níveis) tem uma interação dipolar com os modos eletromagnéticos do vácuo levando a um processo chamado de emissão espontânea, caracterizado por Γ_0 [49]. Assim, devemos acrescentar fenomenologicamente nas equações de Bloch esse termo de relaxação, onde $\Gamma_0 = 1/\tau$ é a taxa de decaimento espontâneo do nível excitado para o nível fundamental, sendo τ o tempo de vida dos átomo no estado excitado.

Portanto, as populações mudam devido à emissão induzida e espontânea [51]. Além disso, atribuindo $\bar{T}$ ao tempo de relaxação da coerência, é possível mostrar que na ausência de colisões interatômicas $\bar{T} = 2\tau$, ou seja, os termos de população decaem com uma taxa Γ_0 , enquanto os termos de coerência decaem com um fator $\Gamma_0/2$ [51].

Acrescentando esses termos, as equações 1.15, 1.16, 1.17 e 1.18 tomam a forma:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{11} = \frac{i}{\hbar}[\hat{\rho}_{12}V - \hat{\rho}_{21}V] + \Gamma_0\hat{\rho}_{22} \quad (1.22)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{22} = \frac{i}{\hbar}[\hat{\rho}_{21}V - \hat{\rho}_{12}V] - \Gamma_0\hat{\rho}_{22} \quad (1.23)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{12} = i\omega_0\hat{\rho}_{12} + \frac{i}{\hbar}[V(\hat{\rho}_{11} - \hat{\rho}_{22})] - \frac{\Gamma_0}{2}\hat{\rho}_{12} \quad (1.24)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{21} = -i\omega_0\hat{\rho}_{21} + \frac{i}{\hbar}[V(\hat{\rho}_{22} - \hat{\rho}_{11})] - \frac{\Gamma_0}{2}\hat{\rho}_{21} \quad (1.25)$$

1.1.4 Equações de Bloch com Emissão Espontânea

Uma vez acrescentado, fenomenologicamente, o termo de relaxação Γ_0 nas equações de Bloch, levamos em conta o acoplamento do meio com os modos do vácuo, que é também responsável pelo decaimento da coerência. Dessa forma, podemos compactar essas equações, através das equações 1.20 e 1.21, e assim, simplificar o problema em duas equações das quatro obtidas, tal que

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{22} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{\rho}_{12}V - \hat{\rho}_{21}V] - \Gamma_0\hat{\rho}_{22} \quad (1.26)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{21} = -\hat{\rho}_{21}(i\omega_0 + \frac{\Gamma_0}{2}) + \frac{i}{\hbar}[V(\hat{\rho}_{22} - \hat{\rho}_{11})] \quad (1.27)$$

A evolução das populações para um átomo de dois níveis com emissão espontânea é um resultado conhecido na literatura, que a partir desse ponto pode ser obtido pelo hamiltoniano de interação Eq. 1.2. Assim, a evolução das populações para átomo de dois níveis são de forma compacta dadas por

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{22} = \frac{i\mu_{21}E_0^*}{2\hbar}[\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)]\hat{\rho}_{12} + c.c. - \frac{\hat{\rho}_{22}}{\Gamma_0}, \quad (1.28)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{12} = (i\omega_0 - \frac{2}{\Gamma_0})\hat{\rho}_{12} - \frac{i\mu_{12}E_0}{2\hbar}[\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)](1 - 2\hat{\rho}_{22}). \quad (1.29)$$

Vemos dessas equações que, quando o campo estiver próximo da ressonância, $\hat{\rho}_{12}$ oscilará na frequência do próprio campo, de modo que podemos escrever a coerência como

$$\rho_{21} = e^{-i\omega t}\sigma_{21}, \quad (1.30)$$

onde σ_{12} é uma função “lenta”, quando comparada com $e^{i\omega t}$.

Os termos não-ressonantes $\omega + \omega_0$ são bem maiores que a frequência de ressonância atômica, portanto são desprezados, uma vez que, as exponenciais e $e^{\pm i(\omega + \omega_0)t}$

oscilam mais rápido quando comparado com os termos $e^{\pm i(\omega - \omega_0)t}$ que oscilam lentamente. Quando desprezamos esses termos que estão longe da ressonância, estamos fazendo a aproximação dita de ondas girantes [52] (Rotating Wave Approximation - R.W.A.).

Fazendo $\Omega_0 \hbar = \mu_{21} E_0 = \mu_{12}^* E_0$, onde Ω_0 , é chamado de frequência de Rabi do campo [46] e determina o quão forte é a absorção e emissão estimulada de luz pelos átomos, e considerando que $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$ e $\sigma_{12}^* = \sigma_{21}$, temos que

$$\frac{d}{dt}\rho_{22} = \frac{i}{2}(\Omega_0\sigma_{12} - \Omega_0^*\sigma_{12}^*) - \Gamma_0\rho_{22}, \quad (1.31)$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_{12}^* = (i\delta - \frac{\Gamma_0}{2})\sigma_{12}^* - \frac{i\Omega_0}{2}(2\rho_{22} - 1), \quad (1.32)$$

onde $\delta = \omega - \omega_0$ é a dessintonização. No regime estacionário [51], temos que

$$\frac{d}{dt}\rho_{22} = \frac{d}{dt}\sigma_{12}^* = 0 \quad (1.33)$$

assim as equações 1.31 e 1.32 fornecem analiticamente a solução para ρ_{22} e σ_{12} , tal que:

$$\rho_{22} = \frac{\frac{\Omega_0^2}{\Gamma_0^2}}{1 + \frac{4\delta^2}{\Gamma_0^2} + \frac{2\Omega_0^2}{\Gamma_0^2}} \quad (1.34)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\Gamma_0}{\Omega_0} \frac{(\frac{2\delta}{\Gamma_0} - i)}{(1 + \frac{4\delta^2}{\Gamma_0^2} + \frac{2\Omega_0^2}{\Gamma_0^2})} \quad (1.35)$$

As equações 1.34 e 1.35 [51] nos fornece todos os elementos da matriz densidade.

1.2 Perfis Espectrais de Emissão

Nesta seção discutiremos os mais conhecidos tipos de mecanismos alargadores de linha atômica: alargamento natural, alargamento Doppler e alargamento colisional. Esses mecanismos alargadores de linha atômica geram os chamados perfis espectrais de linha, onde os principais são: perfil Lorentz, Doppler e Voigt, que serão descritos doravante.

1.2.1 Suscetibilidade e Coeficiente de Absorção

Com a inclusão da emissão espontânea, vamos calcular o coeficiente de absorção K , através da relação entre polarização e susceptibilidade [53], tal que

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.36)$$

onde, a susceptibilidade χ é a constante de proporcionalidade entre a polarização $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ e o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ dado pela Eq. 1.4 e ε_0 é a permissividade do vácuo.

Estamos interessados em estudar a modificação na amplitude do campo elétrico contínuo ao se propagar numa direção qualquer para um sistema atômico de dois níveis isotrópicos, portanto, podemos desprezar o caráter vetorial do campo.

A polarização é definida como a densidade de momento de dipolo elétrico [47] e pode ser expressa por

$$\langle P \rangle = N \langle \mu \rangle \quad (1.37)$$

onde N é a densidade atômica, e $\langle \mu \rangle$ é o valor esperado do vetor momento de dipolo elétrico. A média (valor esperado) de um operador num ensemble de átomos é dado pela Eq. 1.9. O elemento de matriz do operador momento de dipolo elétrico é dado por

$$\mu_{mn} = -e \int \langle \psi_n | \mathbf{r} | \psi_m \rangle d\mathbf{r}, \quad (1.38)$$

dessa forma, $\mu_{11} = \mu_{22} = 0$ devido a integral em todo o espaço ter função ímpar no integrando [47], portanto

$$\langle \mu_{mn} \rangle = \rho_{12} \mu_{21} + \rho_{21} \mu_{12}. \quad (1.39)$$

Substituindo a equação 1.30 na expressão da polarização dada por 1.37, temos

$$P(t) = N [\mu_{12} \sigma_{21} e^{i\omega t} + \mu_{21} \sigma_{12} e^{-i\omega t}] \quad (1.40)$$

e substituindo na equação 1.36, a equação 1.5, obtemos

$$P(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0 [\chi(\omega) e^{i\omega t} + \chi(-\omega) e^{-i\omega t}] \quad (1.41)$$

Relacionando as equações 1.40 e 1.41, obtemos a susceptibilidade em termos das propriedades atômicas e da frequência ω , tal que

$$\chi = -\frac{2}{\Gamma_0} \frac{N |\mu_{12}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{(\frac{2\delta}{\Gamma} - i)}{[1 + \frac{4\delta^2}{\Gamma_0^2} + \frac{2\Omega^2}{\Gamma_0^2}]} \quad (1.42)$$

Identificando a parte real e imaginária, temos que $\chi(\omega) = \chi' + i\chi''$, assim reescrevendo a equação 1.42 separando a parte real da imaginária, obtemos as seguintes equações [47]

$$Re\chi = -\frac{4}{\Gamma_0^2} \frac{N|\mu_{12}|^2}{\varepsilon_0\hbar} \frac{\delta}{[1 + \frac{4\delta^2}{\Gamma_0^2} + \frac{I}{I_s}]} \quad (1.43)$$

$$Im\chi = -\frac{2}{\Gamma_0} \frac{N|\mu_{12}|^2}{\varepsilon_0\hbar} \frac{1}{[1 + \frac{4\delta^2}{\Gamma_0^2} + \frac{I}{I_s}]} \quad (1.44)$$

onde a intensidade de saturação I_s é definida através da relação [51]

$$\frac{I}{I_s} = \frac{2\Omega^2}{\Gamma_0^2} = \frac{2}{\Gamma_0^2} \frac{|\mu_{12}|^2 |E_0|^2}{\hbar^2} \quad (1.45)$$

A parte real da suscetibilidade Eq. 1.42 contribui para adicionar termos à fase do campo, de modo diferente para cada frequência e, portanto, esta relacionada com a dispersão da luz no meio atômico, enquanto a parte imaginária descreve os efeitos de absorção e amplificação do campo. Assim, ambas dependem da razão entre a intensidade da luz incidente no meio e a intensidade de saturação do vapor atômico [51].

A Fig 1.2 mostra as partes real e imaginária da susceptibilidade em função da dessintonização δ para três valores diferentes da razão I/I_s .

A parte real da susceptibilidade, assim como, a parte imaginária mostram que o aumento da razão I/I_s diminui os coeficientes de absorção e o índice de refração. Isso é devido à saturação da transição de átomos para o estado excitado causando o alargamento da linha transição atômica.

Mesmo quando usamos fontes espectrais puras, como um laser sintonizado no pico de uma ressonância, a linha de transição sempre exibe uma largura intrínseca associada à interrupção da evolução de fase do estado excitado. Interrupções de fase como emissão espontânea ou estimulada e colisões são exemplos comuns de linhas mecanismos de alargamento.

Para os átomos excitados, mesmo parados, "isolados", em temperatura absoluta $T = 0$, também emitem radiação; o efeito é chamado emissão "natural", espontânea. Esse efeito é atribuído ao princípio de incerteza de W. Heisenberg ($\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$), e é uma das causas do alargamento de linha atômica, onde a incerteza da energia está relacionada à largura de linha da transição atômica e a incerteza no tempo ao tempo de vida do estado excitado. Da Eq. 1.44, podemos determinar o coeficiente de absorção do campo $K(\omega)$ por unidade de comprimento, onde $K(\omega) = (\omega/c)Im\chi$,

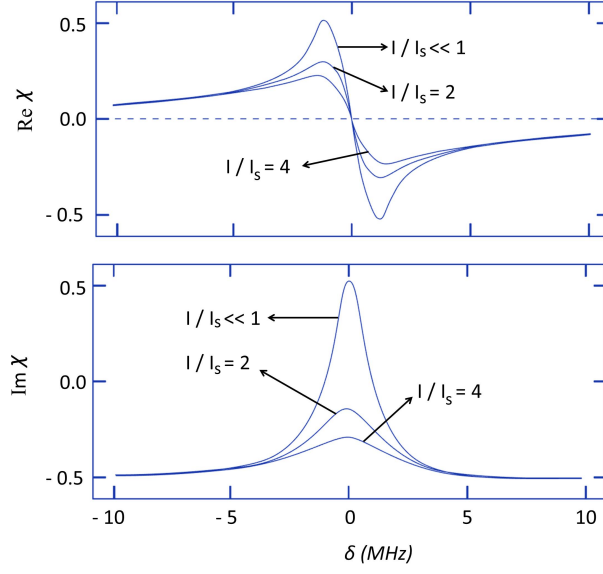


Figura 1.2: Gráficos sobrepostos mostrando como a absorção e dispersão variam em função da dessintonização δ para diferentes valores da razão I/I_s .

$$K(\omega) = -\frac{2N|\mu_{12}|^2\omega}{\Gamma_0\epsilon_0 c\hbar} \frac{1}{[1 + \frac{4\delta^2}{\Gamma_0^2} + \frac{2\Omega^2}{\Gamma_0^2}]}, \quad (1.46)$$

ou

$$K(\omega) = N\Sigma(\omega) = N\Sigma_0\Phi(\nu) \quad (1.47)$$

onde

$$\Sigma(\omega) = \frac{\pi e^2 |\langle r_{12} \rangle|^2 \omega_0}{3\epsilon_0 c \hbar} \frac{\Gamma_0/2\pi}{[\delta^2 + \frac{\Gamma_0^2}{4} + \frac{\Omega^2}{2}]}, \quad (1.48)$$

é a secção de choque de absorção dos átomos parados. De um modo geral, o coeficiente de absorção é dado pela Eq.1.47, onde a expressão para $K(\omega)$ depende a forma espectral, sendo Σ_0 a seção de choque no centro da linha e $\Phi(\nu)$ o perfil de absorção do vapor.

Assim, para os átomos parados, o gráfico de $\Sigma(\omega) = \Sigma_0\Phi(\nu)$ em função de $\delta = \omega - \omega_0$ e é representado por uma lorentziana, onde a largura total a meia altura (*Full Width at Half-Maximum* - *FWHM*), do perfil Lorentziano (coeficiente de absorção) é dado por, $K(\omega) = \frac{1}{2}K(\omega_0)$, tal que

$$\frac{2}{\Gamma_0} \frac{N|\mu_{12}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{1}{[1 + \frac{4\delta^2}{\Gamma_0^2} + \frac{I}{I_s}]} = \frac{1}{\Gamma_0} \frac{N|\mu_{12}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{1}{[1 + \frac{I}{I_s}]}, \quad (1.49)$$

dessa igualdade obtemos que

$$\delta_{1/2} = \frac{\Gamma_0}{2} \sqrt{(1 + \frac{I}{I_s})}, \quad (1.50)$$

assim, o aumento da intensidade da radiação incidente no vapor atômico causa a ampliação da largura espectral, de modo que, a largura média a meia altura é $\Gamma = 2\delta_{1/2}$. Portanto, encontramos que *FWHM* é dado por

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{(1 + \frac{I}{I_s})}, \quad (1.51)$$

e da Eq. 1.45 podemos escrever Γ através da taxa de emissão espontânea Γ_0 , onde

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{(1 + \frac{2\Omega^2}{\Gamma_0^2})}. \quad (1.52)$$

Quando o laser é sintonizado para ressonância, o parâmetro de saturação é basicamente uma medida da razão entre a taxa de transferência de população estimulada Ω e a taxa de decaimento espontâneo Γ_0 . Assim, para $2\Omega^2/\Gamma_0^2 \ll 1$, a largura de linha é aproximadamente igual a Γ_0 .

Para $2\Omega^2/\Gamma_0^2 \geq 1$, há um notável aumento da largura de linha, sendo denominado alargamento por potência (do campo elétrico). Desse modo, definiremos a frequência de Rabi de saturação quando $2\Omega^2/\Gamma_0^2 = 1$, o que implica que

$$\Omega_{sat} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_0. \quad (1.53)$$

O coeficiente de absorção $K(\omega)$ (proporcional à parte imaginária da susceptibilidade) apresentado na Eq. 1.48 é conhecido como perfil de Lorentz, e a intensidade de saturação I_s é a intensidade que a radiação incidente deve possuir para que uma quantidade considerável de átomos encontrados no nível fundamental vá para o nível excitado, onde a quantidade máxima de átomos no nível excitado $n_2 = \frac{n}{2}$, sendo $n = n_1 + n_2$ o número total de átomos, n_1 o número de átomos no estado fundamental e n_2 o número de átomos no estado excitado[53].

A intensidade de saturação para um átomo com o dipolo de transição μ_{12} , pode ser obtida através da relação da intensidade com a amplitude do campo elétrico, onde

$$\bar{I}_{sat} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2. \quad (1.54)$$

Portanto, da relação da frequência de Rabi com a intensidade (Eq. 1.45), calculamos a intensidade de saturação das transições das populações atômicas, tal que

$$\bar{I}_{sat} = \frac{g_1}{g_2} \frac{2\pi^2 c \hbar}{3\lambda_0^3} \Gamma_0, \quad (1.55)$$

onde g_1 e g_2 são as degenerescências dos estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ respectivamente.

1.2.2 Perfil Doppler

Existem dois tipos fundamentais de alargamento, o alargamento homogêneo que afeta todos os átomos da mesma forma, independentemente de suas posições ou velocidades, (geralmente origina perfis de linha lorentziano e pode ser incluído nas Equações de Bloch) e o alargamento não homogêneo, dado por um deslocamento dos níveis atômicos que pode ser diferente para cada átomo.

Assim, na espectroscopia a laser convencional, a estrutura hiperfina atômica é muitas vezes escondida por alargamento Doppler não homogêneo. Na verdade, quando os átomos em uma célula de vapor são irradiados por um feixe de laser na frequência ω_L no sistema de referência do laboratório, eles experimentam em seu próprio referencial, um deslocamento Doppler na frequência do laser ω , relacionado à velocidade do átomo ao longo da direção da radiação incidente $\hat{\mathbf{z}}$ [54].

Portanto, para átomos com velocidade $\mathbf{v}$ e considerando a radiação incidente se propagando na direção $\hat{\mathbf{z}}$, no referencial do átomo a frequência é deslocada para

$$\omega = \omega_L (1 - k\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}}). \quad (1.56)$$

Essa relação é válida numa aproximação não relativística, quando $v \ll c$, onde ω a frequência do laser no referencial do átomo, ω_L a frequência da laser no referencial do laboratório e $|k| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$.

Devido ao produto escalar $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, somente a componente de velocidade ao longo de $\mathbf{k}$ é importante para o efeito Doppler [55] e, portanto, a contribuição de cada átomo para o perfil de absorção parece dessintonizada pelo desvio Doppler devido sua velocidade.

Como resultado, ao varrer a frequência do laser ω_L em torno da frequência de transição atômica ω_0 , a classe de átomos com velocidade v_z absorve luz quando a condição

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{(1 - k\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}})}, \quad (1.57)$$

é realizada. Para átomos numa célula com vapor atômico, a distribuição de probabilidade das velocidades $p(v_z)$ segue uma distribuição Maxwell-Boltzmann (ver Apêndice B), tal que em uma dimensão, na direção $\hat{\mathbf{z}}$, temos

$$P(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2k_B T}\right), \quad (1.58)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, T é a temperatura absoluta do vapor e m é a massa do átomo. Portanto, substituindo a Eq. 1.57 na Eq. 1.58, o número relativo de átomos $D(\omega_L - \omega_0)$ que são ressonantes com o laser na frequência ω_L , é dado pela função gaussiana

$$D(\omega_L - \omega_0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left[-\frac{mc^2}{2k_B T} \left(\frac{\omega_0 - \omega_L}{\omega_L}\right)^2\right], \quad (1.59)$$

Esta distribuição é traduzida diretamente em uma forma gaussiana do perfil de absorção do meio atômico, centrado na frequência ressonante ω_0 e com largura total a meia altura (*FWHM*) Γ_D , dado por

$$\Gamma_D = \frac{2\omega_0}{c} \sqrt{\left(\frac{2k_B T \ln(2)}{m}\right)}. \quad (1.60)$$

Uma medida da largura também é o desvio padrão σ da gaussiana, onde

$$2\sigma = \frac{2\omega_0}{c} \sqrt{\frac{k_B T}{m}} = \frac{\Gamma_D}{1.177}. \quad (1.61)$$

Logo, considerado o movimento térmico dos átomos, a equação 1.59, descreve o perfil de absorção do meio atômico como uma distribuição gaussiana com desintonia $\delta = \omega_L - \omega_0$.

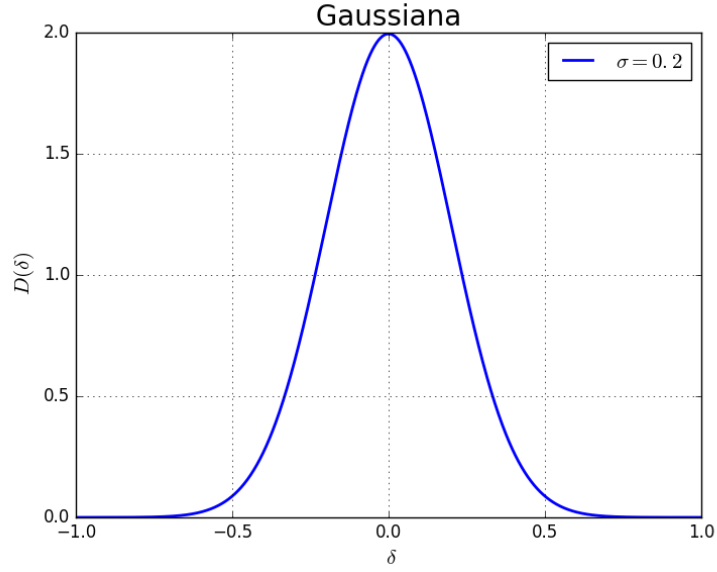


Figura 1.3: Distribuição Gaussiana obtida da Eq. 1.59.

1.2.3 Perfil Voigt

Como vimos, temos dois tipos principais de perfis espectrais; o perfil Lorentz (espectro homogêneo), onde consideramos os átomos parados e o perfil Doppler (não-homogêneo), onde levamos em conta o movimento térmico dos átomos.

Contudo, a linha espectral atômica observada, mesmo sob a resolução mais alta, não corresponde a uma linha de absorção monocromática, mas pode ser considerada como uma distribuição de probabilidade por frequência com uma probabilidade máxima na frequência central caindo para intensidade zero em algum intervalo de cada lado [56].

Dessa forma, existem vários fatores que determinam o alargamento das linhas espectrais incluindo [57, 58, 59, 60, 61] a largura natural da linha, alargamento Doppler, alargamento de pressão, Stark e Efeitos Zeeman.

Para um vapor atômico à temperatura ambiente, o alargamento da linha será definido principalmente por contribuições dos efeitos Doppler (gaussiano) e do alargamento natural (decaimento espontâneo) e de pressão (lorentziano).

O perfil de linha espectral será uma convolução desses perfis, gaussiano e lorentziano da linha, sendo descrito por um perfil Voigt [62] como a convolução do perfil lorentziano com a distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann [36, 63], tal que

$$\Phi_V(\delta) = \frac{a}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-v^2)}{a^2 + (\delta - v^2)} dv \quad (1.62)$$

é chamado perfil Voigt. O perfil de absorção do vapor $\Phi_V(\delta)$ é normalizado tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_V(\delta) d\delta = 1$, onde δ é uma dessintonização normalizada pela largura Doppler Γ_N e $a = \frac{\Gamma}{\Gamma_D}$ é o parâmetro de Voigt, com Γ e Γ_D as larguras homogênea e Doppler, respectivamente. A quantidade $v = v_{//}/u$ é adimensional, onde $v_{//}$ é a componente de velocidade do átomo paralela ao fóton e u a velocidade mais provável, dada por

$$u = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}, \quad (1.63)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, T é a temperatura do vapor e m a massa do átomo.

A integral na equação 1.62 não possui solução analítica, sendo resolvida apenas numericamente. A Fig. 1.4 ilustra o perfil Voigt como uma convolução dos perfis Doppler e Lorentz.

O perfil Voigt (Fig. 1.4) é a convolução do perfil Doppler, uma curva gaussiana em torno do centro da linha $\delta = 0$ (curva preta) com o perfil Lorentz (curva vermelha), que é caracterizada por longas asas em grande dessintonização.

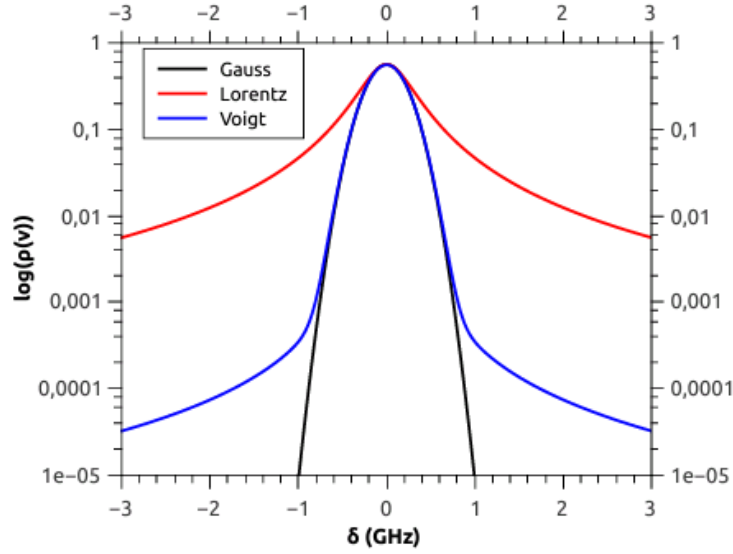


Figura 1.4: O perfil Voigt (curva azul) formado pela convolução do perfil Doppler (curva preta) e perfil Lorentz (curva vermelha). O perfil Voigt se encontra entre os perfis Doppler e Lorentz. A relação entre os três perfis é dada pelo parâmetro de Voigt $a = \Gamma/\Gamma_D$, onde quanto maior o parâmetro de Voigt mais o perfil Voigt se aproxima do perfil Lorentz.

1.2.4 Redistribuição Completa e Parcial de Frequência

A relação entre os espectros de absorção e de emissão de um vapor ressonante é o elemento chave do regime de difusão dos fótons pelo vapor. Assim, quando uma radiação laser cruza um vapor atômico ressonante, os fótons dessa radiação são absorvidos e, posteriormente, emitidos numa variedade de frequências. Esse espectro de emissão depende das características do vapor.

O fóton emitido pode ser reabsorvido por um outro átomo do vapor e, portanto, sofrer vários ciclos de reabsorção e reemissão espontânea pelos átomos antes de, eventualmente, deixar o vapor [64]. Esse fenômeno é conhecido como aprisionamento de radiação.

Em geral, a distribuição espectral da emissão depende da frequência incidente, que no processo de espalhamento múltiplo altera a distribuição espacial de excitação num vapor ressonante, assim como, o espectro da luz emitida, devido aos fótons emitidos sofrerem um deslocamento de frequência a cada evento de espalhamento, o qual é regido pelos mecanismos de redistribuição em frequência.

Em átomos frios, nem colisões atômicas, tampouco movimento atômico residual

(alargamento Doppler menor que alargamento natural) são suficientes para alterar significativamente a frequência dos fótons espalhados antes de escaparem do vapor. Portanto, não temos redistribuição de frequência local e o espectro de frequência permanece inalterado [18].

Entretanto, quando as temperaturas do vapor atômico ressonante aumentam, de modo que passamos a ter alargamento Doppler maior que alargamento Natural, ou mesmo colisões atômicas, os fótons espalhados sofrem uma redistribuição de frequência antes de deixar o vapor.

Assim, a redistribuição de frequência tem sua origem no movimento térmico dos átomos, onde, para altas temperaturas do vapor, o processo de espalhamento ressonante redistribui com muita eficiência frequências dos fótons.

Existem dois tipos de redistribuição em frequências, a Redistribuição Parcial em Frequência (RPF) e a Redistribuição Completa em Frequência (RCF). Quando existe correlação parcial entre a frequência de emissão e da absorção, dizemos que ocorreu uma RPF. Caso contrário, quando não há quaisquer correlações entre as frequências absorvidas e emitidas, dizemos que ocorreu uma RCF.

A Fig. 1.5 ilustra processos de RPF no referencial do laboratório. Os diferentes perfis de emissão formados estão associados a cada frequência incidente. Observamos que para pequenas dessintonizações de excitação, a reemissão ocorre em torno do centro linha, enquanto para excitação longe da ressonância a emissão é centrada na frequência incidente.

Isso acontece porque para pequenas dessintonizações de excitação δ_I , em torno de $\delta_I = 0$, a probabilidade de Maxwell-Boltzmann de encontrar um átomo com velocidade paralela $v_{//} = \lambda\delta_I$ ao fóton de entrada é alta, como mostrado para $\delta_I = 0$, onde $\delta_{A,I} \approx 0$. A reemissão também ocorre em $\delta_{A,I} \approx 0$, ou seja, no referencial do átomo temos um espalhamento elástico. Contudo, no referencial do laboratório, resulta numa redistribuição da frequência emitida com deslocamento Doppler em $\delta_I = 0$.

Para $\delta_I = \Gamma_D/2$ e $\delta_I = \Gamma_D$, após o primeiro evento de espalhamento, a frequência é parcialmente redistribuída. Entretanto, depois de $\delta_I > \delta_{lim} = 1.7\Gamma_D$, que corresponde às demais dessintonizações, a probabilidade de encontrar um átomo com componente de velocidade $\delta_{A,I} \approx 0$ paralela ao fóton de entrada diminui bastante, e o resultado é uma redistribuição de frequência em torno da frequência incidente (de entrada) δ_I .

Em contrapartida, depois de alguns ciclos de reabsorção e reemissão espontânea ocorre uma RCF. Isso acontece porque geralmente ocorrem colisões atômicas que são muito frequentes e destroem as correlações entre fótons incidentes e dispersos [65]. Como resultado da RCF, o perfil espectral de emissão fica igual ao perfil espectral de absorção.

A Fig. 1.6 ilustra este último caso e mostra que para uma determinada frequên-

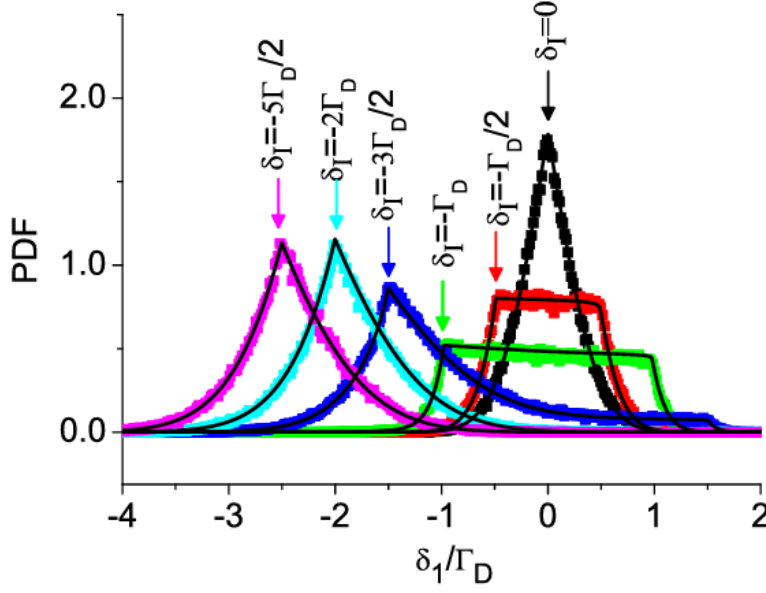


Figura 1.5: Função densidade de probabilidade para a frequência emitida no referencial do laboratório, após o primeiro evento de espalhamento δ_1 . As setas na figura indica a frequência de excitação (δ_I) para cada curva [64].

cia incidente $\delta_i = -\Gamma_D$, podemos observar como a distribuição de frequência emitida está relacionada com o número de espalhamentos, de modo que, para um primeiro espalhamento, a memória da frequência incidente é parcialmente mantida, caracterizando uma RPF. Contudo, os eventos de espalhamento seguintes estão muito próximos do perfil de absorção do vapor e, depois de cinco eventos de espalhamento, o perfil de absorção é atingido convergindo para uma situação para uma RCF [64].

A importância da redistribuição de frequência para luz difundida em vapores ressonantes já era reconhecida na década de 1930, adicionalmente o aprisionamento de radiação e a redistribuição de frequência foram tópicos longamente estudados na astrofísica, por exemplo, na análise da radiação emitida por nebulosas [65, 66, 67, 68].

Por meio desses estudos, verificou-se que o alargamento das linhas espectrais da radiação emitida favorece o surgimento de longos passos para fótons em um vapor ressonante [69], de tal forma que a luz escapa do volume do vapor mais rápido do que esperado em uma descrição difusiva [70, 71].

Estes ocasionais longos passos dos fótons, resultam na impossibilidade de definir um deslocamento quadrático médio que, para o modelo difusivo em um meio infinito, resulta num coeficiente de difusão infinito. Assim a difusão normal não é

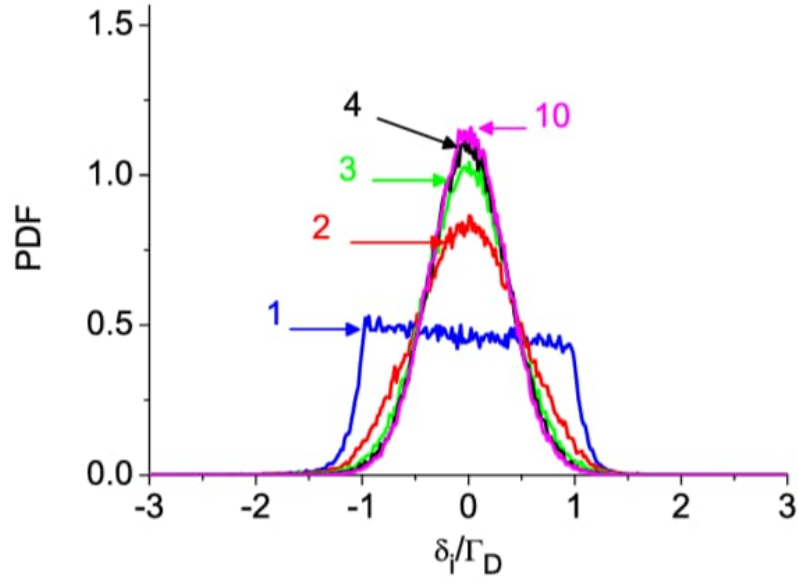


Figura 1.6: Função de densidade de probabilidade da frequência emitida para um número j eventos de espalhamento (j denotado pelo números na figura). A excitação inicial é $\delta_i = -\Gamma_D$ [64].

apropriada para tratar o problema do aprisionamento radiativo.

Assim, doravante, vamos estudar o problema do espalhamento dos fótons no vapor atômico ressonante, por meio de uma fonte laser que incide pelo vapor. Desse modo, vamos levar em conta a emissão dos fótons em grande dessintonia, que origina os longos passos dos fótons, responsáveis pela impossibilidade de definir um deslocamento quadrático médio do passo e, portanto, descritos por um espalhamento denominado superdifusão.

No capítulo seguinte, estudaremos o processo aleatório chamado voos de Lévy, através do qual, podemos descrever estatisticamente os longos passos dados pelos fótons num vapor atômico ressonante não representados pela difusão normal.

Capítulo 2

Teoria de distribuições de probabilidades estáveis de Lévy

O processo difusivo de fótons num meio atômico ressonante é caracterizado por sucessivos processos de absorção e emissão espontânea, conhecido como aprisionamento de radiação, cuja principal característica é a presença de longos saltos dados pelos fótons antes de, eventualmente, escapar do vapor.

O teorema central do limite (TCL) garante que a distribuição da posição final dos passos numa caminhada aleatória é descrita por uma distribuição gaussiana. Entretanto, o processo difusivo dos fótons no vapor atômico não segue o TCL, pois não é uma difusão normal do tipo movimento browniano, mas sim uma superdifusão do tipo voos de Lévy. Isso acontece devido a esses longos passos dados pelos fótons, que impossibilitam a definição de um deslocamento quadrático médio dentro do vapor e, sobretudo, dominam o transporte.

Uma alternativa para esse problema reside na descrição do fenômeno difusivo, por meio das distribuições de probabilidade estáveis de Levy, que abrangem um segundo momento infinito na distribuição do tamanho dos passos e são caracterizadas, principalmente, por um parâmetro α de estabilidade da função, tal que $\alpha \in (0, 2]$.

Esse parâmetro α , foi medido, experimentalmente, para o aprisionamento de radiação em vapores com perfis Doppler [44] e Lorentz [41], com $\alpha \approx 1.0$ e $\alpha = 0,5$, respectivamente. Para o perfil de Voigt $\alpha = 0,5$, foi obtido teoricamente em [36].

No intuito de medir o valor de α para um vapor atômico ressonante com um perfil de absorção Voigt originado da RCF dos fótons, nessa seção, vamos estudar as distribuições estáveis de Levy, através da generalização do TCL e suas características, começando por uma revisão da difusão normal embasada no TCL.

2.1 Teorema Central do Limite (TCL)

O TCL explica porque uma distribuição qualquer de probabilidade com variância finita, no regime assintótico de grande número de eventos, tende gradualmente para uma distribuição estável gaussiana.

Assim, considere uma amostra aleatória simples $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (tamanho de passos, por exemplo), de tamanho n , ou seja, uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, que são extraídas de uma distribuição com valor esperado dado por $\langle x \rangle$ e variância finita dada por σ^2 .

A média amostral dessas variáveis aleatórias é dada por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (2.1)$$

à medida que o valor de n cresce, a média da distribuição amostral converge quase certamente para o valor esperado $\langle x \rangle$.

Mais precisamente, o TCL afirma que à medida que $n \rightarrow \infty$, a distribuição da diferença entre a média da amostra $\bar{x}$ e seu valor esperado $\langle x \rangle$, quando multiplicada pelo fator $\sqrt{n}$, (isto é $\sqrt{n}(\bar{x} - \langle x \rangle)$), aproxima-se de uma distribuição normal (gaussiana) com média $\langle x \rangle = 0$ e variância σ^2 .

Assim, o TCL clássico descreve o tamanho e a forma de distribuição das flutuações aleatórias em torno do valor esperado $\langle x \rangle$ à medida que $n \rightarrow \infty$.

Essas condições mostram que o TCL é válido para somas de variáveis aleatórias independentes quando normalmente distribuídas assintoticamente [73], independentemente da origem da variável, desde que o tamanho da amostra seja suficientemente grande (geralmente $n > 30$).

2.2 Distribuição Normal

A distribuição normal aparece em diversos fenômenos, especialmente, em processos relacionados à difusão normal ou browniana. A razão da presença praticamente universal da distribuição gaussiana é consequência do TCL, que aparece naturalmente em processos aleatórios; onde a soma de variáveis aleatórias independentes com segundo momento finito é descrita pela distribuição normal [74].

Portanto, considere a soma z de n variáveis aleatórias e independentes (x_i) (tamanho de um passo, por exemplo) e identicamente distribuídas de acordo com a função de distribuição de probabilidade $w(x_i)$, assim

$$z = \sum_i^n x_i. \quad (2.2)$$

A distribuição gaussiana é caracterizada por dois parâmetros: o valor esperado $\langle x \rangle$, onde

$$\langle x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z}{n}, \quad (2.3)$$

e a variância σ^2 , tal que

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2, \quad (2.4)$$

onde $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2 = \sigma^2$ e, portanto temos o desvio-padrão dado por

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \quad (2.5)$$

O processo difusivo dos fótons num vapor atômico pode ser entendido como uma caminhada aleatória. Dessa forma, considerando a linha de ação do feixe laser no processo de excitação da amostra, esse processo difusivo pode ser entendido, grosseiramente, considerando os fótons num passeio aleatório unidimensional, onde a probabilidade $P(z)dz$ de encontrar o valor de z num intervalo compreendido nos limites entre z e $z + dz$, é tal que x_i é o i -ésimo passo da caminhada e z a posição final após n passos da caminhada [74].

Uma vez que, a probabilidade dos passos é estatisticamente independentes, a probabilidade de uma sequência de passos em um intervalo entre z e $z + dz$ será o produto da probabilidade individual de cada passo, assim

$$P(z)dz = \delta(z - \sum_{i=1}^n x_i), \quad (2.6)$$

portanto, somando estas probabilidades sobre todos os tamanhos de passos possíveis, obtemos $P(z)$ como

$$P(z) = \int \cdots \int w(x_1)w(x_2)\dots w(x_i)dx_1dx_2\dots dx_i, \quad (2.7)$$

onde $z < \sum_i^n x_i < z + dz$.

A equação em 2.7, apresenta uma restrição para os valores de x_i . Portanto, resolvemos o problema através da função delta de Dirac δ , onde

$$\delta(z - \sum_i^n x_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(\sum_i^n x_i - z)}, \quad (2.8)$$

assim, somando sobre todos os x_i possíveis, obtemos a integral sobre todo o espaço, tal que

$$\begin{aligned}
P(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_1) \dots w(x_i) [\delta(z - \sum_{i=1}^n x_i)] dx_1 \dots dx_i, \\
P(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_1) \dots w(x_i) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(x_1 + \dots + x_i - z)} \right] dx_1 \dots dx_i, \quad (2.9) \\
P(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz} dk \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_1) e^{ikx_1} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_i) e^{ikx_i} dx_i.
\end{aligned}$$

Assim, temos uma função característica ($f(k)$) associada à distribuição $w(x)$ dada por uma transformada de Fourier de $w(x)$ [75]

$$f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) e^{ikx} dx. \quad (2.10)$$

As integrais em dx na equação 2.9 são todas iguais, portanto, reescrevendo a distribuição $P(z)$ em função de $f(k)$ temos

$$P(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz} [f(k)]^n dk. \quad (2.11)$$

A função característica $f(k)$ possui uma parte oscilatória em seu integrando e^{ikx} , que oscila dependentemente do valor de $|k|$. A potência n em $f(k)$ faz sua contribuição na integral desprezível para valores grandes de k . Desta forma, podemos calcular $P(z)$ com pequenos valores de k , fazendo uma expansão em série de Taylor do termo oscilatório da função característica, temos que

$$f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) \left(1 + ikx - \frac{1}{2} k^2 x^2 \right) dx, \quad (2.12)$$

assim a equação 2.12 fica

$$f(k) = 1 + ik\langle x \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle x^2 \rangle, \quad (2.13)$$

onde $\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n w(x) dx$. A integral da Eq. 2.11 pode ser resolvida por meio do teorema da convolução, pois essa aproximação em série de Taylor somente é válida até segunda ordem, o que suficiente para obtermos a expressão distribuição de probabilidade com variância finita. Assim, usando a propriedade logarítmica $[f(k)]^n = e^{n \ln[f(k)]}$ e a expansão $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$, temos

$$[f(k)]^n = e^{n[ik\langle x \rangle - \frac{1}{2}k^2(\langle x^2 \rangle - x^2) + O(k^3)]}, \quad (2.14)$$

desprezando os termos de ordem superior a k^2 , e inserindo a equação 2.14 na equação 2.11, temos a integral

$$P(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{[-ikz + ink\langle x \rangle - \frac{1}{2}nk^2\langle x \rangle^2]}, \quad (2.15)$$

Completando quadrados no argumento da exponencial, obtemos a expressão para $P(z)$ [74], onde

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(z-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.16)$$

onde $\bar{x} = n\langle x \rangle$ e $\sigma^2 = n(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)$, sendo $\langle x \rangle$ valor esperado da variável x e σ^2 a variância da variável x .

A equação 2.16 é a distribuição de probabilidade para a soma da variável x_i quando $n \rightarrow \infty$, chamada de distribuição normal ou gaussiana. Essa distribuição de probabilidade da soma da variável associada à x_i é uma distribuição normal com um máximo em torno da média $\bar{x}$, independentemente da distribuição atribuída para $w(x_i)$, desde que sejam independentes e para n suficientemente grande. Este resultado é chamado de Teorema do Limite Central [74].

2.3 Distribuições Estáveis de Lévy Generalizadas

As distribuições estáveis de Lévy foram introduzidas pelo matemático francês Paul Pierry Lévy (1886 – 1971) [72], durante sua investigação sobre o comportamento da soma de variáveis aleatórias independentes.

A inspiração para Lévy foi o desejo de generalizar o TCL, segundo o qual qualquer distribuição de probabilidade com variância finita no regime assintótico de grande número de eventos, tende para uma distribuição gaussiana. Dessa forma, a generalização do Teorema Central do Limite, abrange uma variância infinita, que é descrita pelas distribuições estáveis de Lévy e generalizam a distribuição normal.

As distribuições estáveis de Lévy têm algumas propriedades importantes e necessita de quatro parâmetros para descrever: um parâmetro de estabilidade da distribuição (índice de cauda) $\alpha \in (0, 2]$, um parâmetro de assimetria da distribuição $\beta \in [-1, 1]$, um parâmetro de escala da distribuição $\sigma > 0$ e um parâmetro de localização do pico da distribuição $\delta \in \mathbb{R}$.

Essas propriedades e parâmetros serão mostrados doravante nessa secção, assim como, a importância do parâmetro α , dado que determina a forma (taxa de variação) da cauda da distribuição.

Considerando a caminhada aleatória unidimensional anteriormente estudada, vimos que para uma distribuição de probabilidades com variância finita, o TCL mostra que a soma de variáveis aleatórias e independentes (tamanho de passos, por exemplo), tende gradualmente para uma distribuição estável gaussiana.

Portanto, nessa secção, considerando o tamanho dos passos x nossas variáveis aleatórias e independentes, vamos considerar, também, variâncias infinitas na distribuição de probabilidades do tamanho dos passos, por um TCL generalizado [72].

Esse teorema afirma existir novas soluções para a soma de variáveis que envolvem distribuição de probabilidade cujos momentos não são finitos [76], através de distribuições estáveis que podem acomodar as caudas longas e assimétrias, dando, muitas vezes, um ajuste muito bom aos dados empíricos. Em particular, elas são valiosos modelos para conjuntos de dados que abrangem eventos extremos, como, por exemplo, a superdifusão do tipo voos de Lévy.

Uma distribuição estável de Lévy é caracterizada pelos parâmetros: α , β , σ e Δ . A assimetria da distribuição é caracterizada pelo parâmetro $\beta \in [-1, 1]$, assim, quando o parâmetro de assimetria β é positivo, a distribuição será assimétrica para a direita, e para a esquerda caso contrário.

Entretanto, quando $\beta = 0$, a distribuição é simétrica relativamente a Δ . O parâmetro $\Delta \in \mathbb{R}$, por sua vez, é o parâmetro de localização do pico da distribuição e o parâmetro $\sigma > 0$ é um parâmetro de escala da distribuição.

O parâmetro de estabilidade da distribuição (índice de cauda) $\alpha \in (0, 2]$ é o parâmetro mais importante, dado que determina a forma (taxa de variação) da cauda da distribuição, assim, para o caso particular de $\alpha = 2$ obtém-se a distribuição de Gauss e quando $\alpha < 2$ a variância é infinita. Quando $\alpha > 1$ a média da distribuição existe e será igual a Δ [77]. Em geral, o momento de ordem p de uma distribuição estável de Levy é finito se $p < \alpha$.

Devido à ausência de fórmulas fechadas das funções de densidade de probabilidade, as distribuições estáveis de Lévy são mais, convenientemente, descritas através da sua função característica $\tilde{L}_\alpha(k, \beta, \sigma, \Delta)$, que representa a inversa da transformada de Fourier da função de densidade de probabilidade [19].

Contudo, existem muitas parametrizações para as funções estáveis de Lévy e muita confusão tem sido causada pelas diferentes representações. A variedade de formulas é causada pela combinação da evolução histórica e os numerosos problemas que tem sido analisados usando as formas especializadas das distribuições estáveis. Por conseguinte, a função densidade de probabilidade de Lévy mais genérica apresenta a seguinte transformada de Fourier

$$\tilde{L}_\alpha(k, \beta, \sigma, \Delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_\alpha(x) \exp(ikx) dx. \quad (2.17)$$

As soluções de $\tilde{L}_\alpha(k, \beta, \sigma, \Delta)$ são chamadas distribuições de Lévy no espaço de Fourier [76], e têm a seguinte forma

$$\tilde{L}_\alpha(k, \beta, \sigma, \Delta) = \exp(i\Delta k - \sigma|k|^\alpha [1 - i\beta\omega(k, \alpha)\text{sgn}(k)]). \quad (2.18)$$

A função $\omega(k, \alpha)$, para valores de $\alpha \neq 1$, é dada por $\omega(k, \alpha) = \tan(\alpha \frac{\pi}{2})$ e, para $\alpha = 1$, temos $\omega(k, \alpha) = -\frac{\pi}{2} \log(|k|)$. A função $sgn(k)$ representa apenas o sinal do valor k , ou seja, $sgn(k) = 1$, se $k > 0$, $sgn(k) = -1$, se $k < 0$ e $sgn(k) = 0$ se $k = 0$.

Dependência da função característica $S_\alpha(\beta, \sigma, \Delta)$ e $S_\alpha^0(\beta, \sigma, \Delta_0)$

Para ilustrar uma distribuição com a presença dos quatro parâmetros $\alpha, \beta, \sigma, \Delta$, a parametrização da função característica $S_\alpha(\beta, \sigma, \Delta)$ é a mais popular e descrita em [78, 79], onde S é uma parametrização do tipo dado na Eq.2.18 dada por:

$$S_\alpha = \ln \phi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha [1 - i\beta \text{sign}(t) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})] + i\Delta t, & \alpha \neq 1 \\ -\sigma |t| [1 + i\beta \text{sign}(t) \frac{2}{\pi} \ln |t|] + i\Delta t, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.19)$$

Para proposito numérico, é frequentemente aconselhavel utilizar a parametrização de Nolan $S_\alpha^0(\beta, \sigma, \Delta_0)$ [80] dada por:

$$S_\alpha^0 = \ln \phi_0(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha [1 + i\beta \text{sign}(t) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})[(\sigma|t|)^{1-\alpha} - 1]] + i\Delta_0 t, & \alpha \neq 1 \\ -\sigma |t| [1 + i\beta \text{sign}(t) \frac{2}{\pi} \ln(\sigma|t|)] + i\Delta_0 t, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

Essa é uma parametrização variante, com a função característica e, portanto, a densidade e a função de distribuição conjuntamente contínua em todos os quatro parâmetros Fig. 2.1. Em particular, percentis e convergência para a cauda da lei de potência varia de maneira contínua conforme variam α e β .

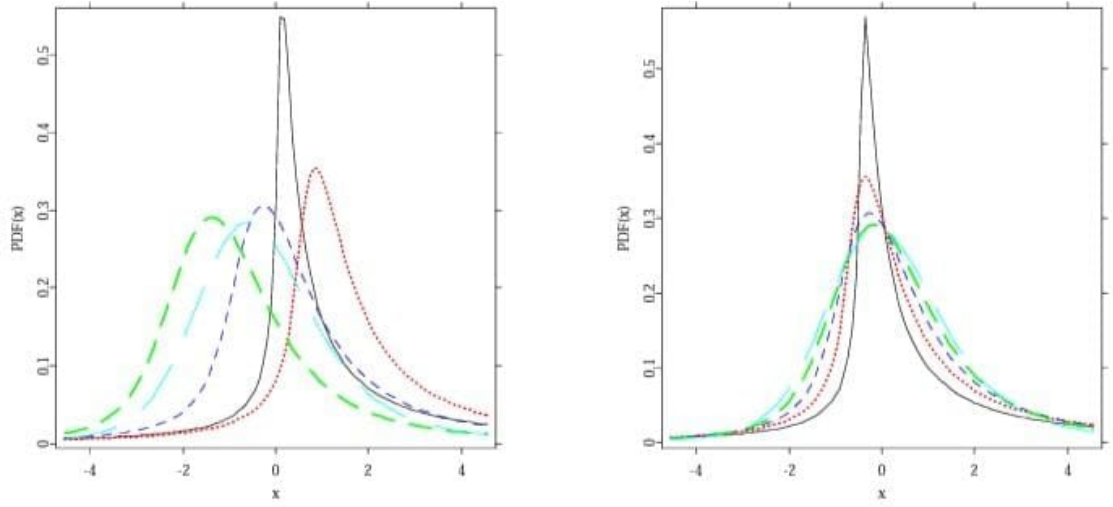


Figura 2.1: Comparação das parametrizações S (à esquerda) e S_0 (à direita): (PDFs) estáveis de Lévy para $\beta = 0,5$ e $\alpha = 0,5$ (linha sólida preta), $\beta = 0,5$ e $\alpha = 0,75$ (linha pontilhada vermelha), $\beta = 0,5$ e $\alpha = 1$ (linha azul tracejada curta), $\beta = 0,5$ e $\alpha = 1,25$ (linha tracejada verde) e $\beta = 0,5$ e $\alpha = 1,5$ (linha tracejada longa ciano). Na parametrização S temos as diferentes curvas para diferentes valores de σ e Δ . Na parametrização S_0 , $\Delta = 0$ [81]

Dependência do parâmetro β

Quando o parâmetro de assimetria β é positivo, a distribuição é oblíqua para a direita, isto é, a cauda da direita mais grossa. Contudo, quando β é negativo, ela é inclinada para a esquerda e quando $\beta = 0$, a distribuição é simétrica em torno de Δ (painel esquerdo da Fig. 2.2).

A medida que α se aproxima de 2, β perde seu efeito e a distribuição se aproxima da distribuição gaussiana normal clássica, independentemente do valor de β . Os dois últimos parâmetros, σ e Δ , são os parâmetros usuais de escala e localização e, dessa forma, σ determina a largura e Δ o deslocamento do modo (o pico) da distribuição. Para $\sigma = 1$ e $\Delta = 0$, a distribuição é chamada de estável padrão.

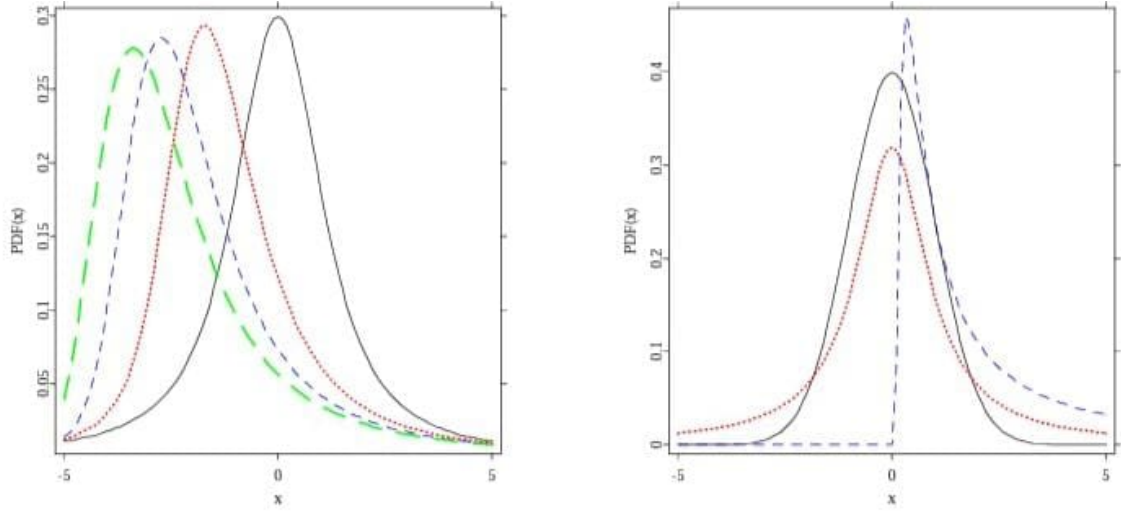


Figura 2.2: Painel esquerdo: estáveis para $\alpha = 1, 2$ e $\beta = 0$ (linha sólida preta), 0,5 (linha pontilhada vermelha), 0,8 (linha tracejada azul) e 1 (linha tracejada verde). Painel direito: formas fechadas para densidades são conhecidas apenas para três distribuições - Gaussiana ($\alpha = 2$; linha sólida preta), Cauchy ($\alpha = 1$, linha pontilhada vermelha) e Lévy ($\alpha = 0,5$, $\beta = 1$; linha azul tracejada). A última é uma distribuição totalmente distorcida, ou seja, seu suporte é $\mathbb{R}^+$. Em geral, para $\alpha < 1$ e $\beta = 1(-1)$, a distribuição está totalmente inclinada para a direita (esquerda) [81].

Dependência do parâmetro α

O parâmetro de estabilidade α determina a taxa na qual as caudas da distribuição diminuem. Quando $\alpha \geq 2$, resulta na distribuição gaussiana. Contudo, $\alpha < 2$, a variância é infinita e as caudas exibem um comportamento de lei de potência assintoticamente equivalentes a uma lei estável de Lévy.

Mais precisamente, usando um TCL pode-se mostrar em [78, 82], que a convergência para uma cauda de lei de potência varia para diferentes valores de α e, como pode ser visto no painel direito da Fig. 2.3, é mais lento para valores maiores do índice de cauda.

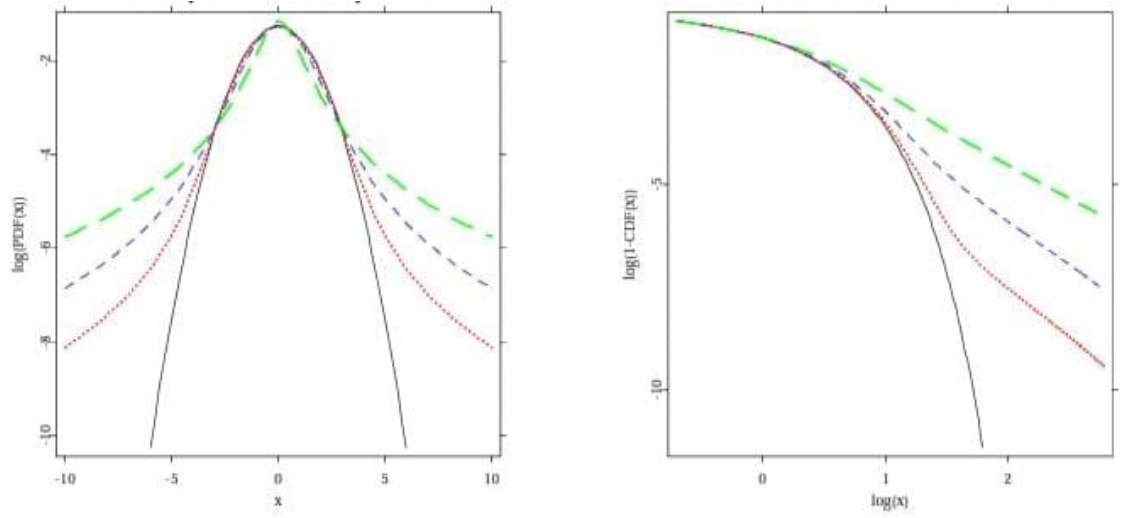


Figura 2.3: Paineis esquerdo: Gráfico em escala semilog de funções estáveis de Lévy simétricas ($\beta = \mu = 0$) de densidades de probabilidade (pdfs) para $\alpha = 2$ (linha sólida preta), 1,8 (linha pontilhada vermelha), 1,5 (linha tracejada azul) e 1 (linha tracejada verde). Para $\alpha = 2$ densidade forma uma gaussiana e é apenas uma densidade α -estável com caudas exponenciais. Paineis direito: Gráfico em escala log-log, temos caudas de funções estáveis de Lévy de distribuição cumulativa simétricas (cdfs) para $\alpha = 2$ (linha sólida preta), 1,95 (linha pontilhada vermelha), 1,8 (linha tracejada azul) e 1,5 (linha tracejada verde) em escala log-log. Para $\alpha < 2$, as caudas formam retas com inclinação $-\alpha$ [81].

Na Fig. 2.3, quando $\alpha > 1$, a média da distribuição existe e está centrada em Δ . Em geral, o p -ésimo momento de uma variável aleatória estável é finito se, e somente se, $p < \alpha$.

As distribuições estáveis de Lévy têm duas formas fechadas interessantes; a distribuição de Gauss e a distribuição de Lorentz; vistas anteriormente, que podem ser obtidas da sua função característica (Eq. 2.18) no espaço de Fourier, através dos parâmetros de Levy. Assim, para $\beta = 0$ (sem assimetria) e $\Delta = 0$ (centrada na origem) na Eq. 2.18, temos $\tilde{L}_\alpha(k, 0, \sigma, 0) = f(k)$, dado por

$$f(k) = e^{-\sigma|k|^\alpha}, \quad (2.21)$$

onde para $\alpha = 2$ e $\sigma = \sigma^2/2$ temos a distribuição gaussianana no espaço k de Fourier. Portanto, calculando sua forma no espaço x com uma transformada inversa de Fourier, através da Eq. 2.17, retornamos a distribuição gaussiana no espaço das configurações, tal que

$$L_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\frac{\sigma^2}{2}|k|^2 + ikx)} dk, \quad (2.22)$$

$$L_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{(-\frac{x^2}{2\sigma^2})}, \quad (2.23)$$

que resulta no comportamento de passeio aleatório característico do movimento browniano. Contudo, para $\alpha = \sigma = 1$, temos a distribuição Cauchy-Lorentz (Lévy), onde

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-|k| + ikx)} dk, \\ L_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{(-|k| + ikx)} dk + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{(-|k| + ikx)} dk \\ L_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1 + ix} - \frac{1}{-1 + ix} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 + x^2)}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

ou

$$L_1(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 + x^2)}. \quad (2.25)$$

Portanto, a recorrência à descrição das distribuições de probabilidade por meio dos parâmetros de Lévy abrangem distribuições de probabilidade com momentos finitos e infinitos nas distribuições [83], em contraste com o momento de distribuições normais, que são finitos e regidos pelo TCL.

Dessa forma, conhecidas como TCL Generalizado, as distribuições de Levy generalizam o TCL, através distribuições com um suporte muito mais amplo, chamadas de distribuições de "cauda longa" fornecidas por meio dos parâmetros de Lévy.

2.3.1 Densidade Probabilidade do Tamanho de Passos

Nessa secção, vamos considerar o caso particular da distribuição do tamanho dos passos para uma caminhada aleatória do tipo voos de Lévy (processo superdifusivo).

Considerando x como o tamanho do passo, que é variável aleatória e independente, a distribuição de probabilidade do tamanho dos passos é caracterizada por uma variância infinita [72]. Assim, esse processo superdifusivo é determinado pela existência da probabilidade não desprezível dos passos serem muito maiores que a média dos passos ($x \gg \langle x \rangle$).

Para esses grandes passos realizados (voos de Lévy), o segundo momento da soma de todos passos (média do quadrado da posição) cresce mais rápido que linearmente, e quando $\alpha < 1$ a média (primeiro momento) da soma dos passos não mais bem definida.

Por apresentarem uma distribuição do tamanho dos passos caracterizada por longas caudas, uma distribuição com a presença dos chamados voos de Lévy, pode ser determinada pelo parâmetro de estabilidade α , associado a forma (taxa de variação) da cauda da distribuição.

Nessa secção, apresentaremos uma forma generalizada para a densidade de probabilidade do tamanho dos passos, onde x é o tamanho do passo, associado a uma distribuição do tipo voos de Lévy. Assim, vamos mostrar que o regime assintótico da distribuição do tamanho do passo pode ser aproximado por uma lei de potência. Dessa forma, substituindo a equação 2.21 na equação 2.17, temos

$$\begin{aligned} L_\alpha(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\sigma|k|^\alpha + ikx)} dk, \\ L_\alpha(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos(kx) + i \sin(kx)] e^{-\sigma|k|^\alpha} dk, \end{aligned} \quad (2.26)$$

A equação 2.26 possui uma parte imaginária $\sin(kx)$ nula, devido termos uma função ímpar num intervalo simétrico, assim

$$L_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(kx) e^{-\sigma|k|^\alpha} dk, \quad (2.27)$$

Em contrapartida, a parte real é oscilante, e oscila dependendo do valor k , desse modo, a potência α faz a contribuição da função oscilante $\cos(kx)$ desprezível para valores grandes de k . Assim, como a parte real é uma função par considerada num intervalo simétrico, por simetria, podemos calcular os valores positivos de $L_\alpha(x)$, tal que

$$L_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(kx) e^{-\sigma|k|^\alpha} dk, \quad (2.28)$$

de acordo com [84], podemos escrever para $\sigma = 1$ e $k > 0$,

$$e^{k^\alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-yk} F'_\alpha(k) dy, \quad (2.29)$$

onde

$$F'_\alpha(k) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \sin(\pi\alpha j) \frac{\Gamma(\alpha j + 1)}{y^{\alpha j + 1}}, \quad (2.30)$$

substituindo as Eq.2.30 na Eq. 2.29, e por sua vez na Eq. 2.28, temos

$$L_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \sin(\pi\alpha j) \frac{\Gamma(\alpha j + 1)}{y^{\alpha j + 1}} e^{-ky} dy \right] \cos(kx) dk, \quad (2.31)$$

dessa forma, temos a transformada de Laplace do $\cos(kx)$, dada por

$$\int_0^{+\infty} e^{-ky} \cos(kx) dk = \frac{y}{y^2 + x^2}, \quad (2.32)$$

e substituindo em 2.31, temos

$$L_\alpha(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \sin(\pi\alpha j) \Gamma(\alpha j + 1) \left[\int_0^{+\infty} \frac{y^{-\alpha j}}{y^2 + x^2} dy \right], \quad (2.33)$$

a integral da equação 2.33, tem a seguinte solução

$$\int_0^{+\infty} \frac{y^{-\alpha j}}{y^2 + x^2} dy = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}(\alpha j + 1)} \sec\left(\frac{\pi\alpha j}{2}\right), \quad (2.34)$$

Encontramos,

$$L_\alpha(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{2 \sin\left(\frac{\pi\alpha j}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi\alpha j}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi\alpha j}{2}\right)} \Gamma(\alpha j + 1) \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}(\alpha j + 1)} \right], \quad (2.35)$$

fazendo as devidas simplificações, podemos calcular $L_\alpha(x)$, através da subdivisão da soma $\sum_{j=1}^{\infty} (...) = \sum_{j=1}^n (...) + O(x^{-\alpha(n+1)-1})$, ou seja, guardando o primeiro termo na soma para pequenos valores de k , tal que, no regime assintótico quando $x \rightarrow \infty$, a equação 2.35 tem a seguinte forma

$$L_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha + 1) \sin(\pi\alpha/2)}{\pi x^{\alpha+1}} \sim x^{-(\alpha+1)}, \quad (2.36)$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L_\alpha(x) = \frac{1}{x^\mu}, \quad (2.37)$$

onde $\mu = \alpha + 1$ e $x \neq 0$.

Este comportamento assintótico é verificado para x no intervalo $]-\infty, +\infty[$ [85] e a distribuição depende de $|x|$ e não de x .

Reescrevendo a equação 2.37, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^\mu} \quad (2.38)$$

Esta lei de potência implica a existência de alguns passos espaciais muito longos, o que significa uma difusão mais rápida que a normal. Assim, os pontos espaciais visitados na trajetória dos passos a efetuar um voo de Lévy têm os primeiro e segundo momentos da distribuição espacial divergentes, ou não, condicionados pelo valor do parâmetro α .

Assim, calculando o primeiro $\langle x \rangle$ e segundo momento $\langle x^2 \rangle$ do tamanho dos passos, através da equação 2.38, temos

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x x^{-1-\alpha} dx, \\ \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{x_0} x^{-\alpha} dx + \int_{x_0}^{\infty} x^{-\alpha} dx, \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde para evitar divergência na integração, integramos em torno de $x_0 \approx 0$. Dessa forma, a equação 2.39 fornece valores para o primeiro momento dependendo do valor de α , tal que: para $\alpha < 1$, temos $\langle x \rangle$ é indeterminada, e para $\alpha \geq 1$, temos $\langle |x| \rangle = 0$

Entretanto, para o segundo momento, temos

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 x^{-1-\alpha} dx \\ \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{x_0} x^{-\alpha+1} dx + \int_{x_0}^{\infty} x^{-\alpha+1} dx \end{aligned} \quad (2.40)$$

Similarmente, a equação 2.40, fornece valores diferentes para o segundo momento que depende do valor de α , tal que: para $\alpha < 2$, temos $\langle x^2 \rangle \rightarrow \infty$, e para $\alpha \geq 2$, temos $\langle x^2 \rangle = \text{constante}$

Dessa forma, se $\alpha \geq 2$ o primeiro e o segundo momento da distribuição do tamanho dos passos, $\langle |x| \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$, são finitos e a distribuição obedece o TCL. Contudo, se o decaimento assintótico da distribuição do tamanho dos passos é menor que $1/x^3$, isto é, quando $0 < \alpha < 2$, então $\langle x^2 \rangle$ não é mais finita e o TLC não se aplica mais [18].

Além disso, quando $0 < \alpha < 1$, o primeiro momento $\langle |x| \rangle$ sempre diverge, significando que essas distribuições exibem um comportamento atípico, uma vez que, a probabilidade de valores muito grandes de x (distante nas asas da distribuição de probabilidade) é muito maior que o normal.

Essas distribuições, entretanto, obedecem um padrão generalizado do TLC, segundo o qual, se o comportamento assintótico da distribuição do tamanho dos passos segue a equação 2.38, com $0 < \alpha < 2$, então a densidade de probabilidade normalizada da soma dos tamanho dos passos x e, conseqüentemente, de seu valor médio $\langle x \rangle$ seguem uma lei estável de Lévy. Dessa forma, voos de Lévy são uma caminhada aleatória, que, diferentemente, do movimento browniano, onde o comprimento dos passos são comparáveis em magnitude ao seu valor médio $\langle x \rangle$, voos de Lévy são determinados por longos saltos, que ocorrem, ocasionalmente, e em pequeno número comparado ao total de passos, mas são eles que regem a estatística do sistema.

2.4 Características da Difusão Normal

Nessa seção, com o intuito de melhor entender os voos de Lévy num vapor atômico ressonante, apresentaremos as características da difusão normal, através da descrição do movimento browniano.

O movimento browniano (MB) ou difusão normal clássica foi pela primeira vez descrita pelo físico holandês Jan Ingenhousz em 1765, seguido por Robert Brown, em 1828 [86], que estudou a natureza aleatória das partículas, através do movimento errático de grão de pólen. Por sua vez, Einstein, em sua tese de doutorado (1905) [87], formulou uma teoria sólida capaz de explicar esse movimento e o nomeou de movimento de browniano, em honra de Robert Brown.

Nessa teoria, o MB caracteriza-se por um movimento estocástico, em que os tamanhos dos passos são variáveis aleatórias e independentes umas das outras e, assim, descrito através da formalização do modelo de caminhada aleatória derivado da equação de difusão clássica. As explicações de Einstein, para o MB, desencadearam uma série de novos trabalhos sobre fenômenos de natureza estocástica, como: Langevin [88], Fokker [89], Burger [90], Ornstein [91], Planck [92], Kac [93] e muitos outros.

2.4.1 Movimento Browniano e Caminhadas Aleatórias

O movimento browniano é interpretado como uma caminhada aleatória clássica. Dessa forma, vamos considerar uma caminhada aleatória unidimensional como na Fig. 2.4.

Assim, assumindo que a caminhada tem passos x_i discretos, aleatórios e igualmente prováveis para qualquer lado, esquerdo ou direito, e de comprimento constante l , então, a posição final z , depois de n passos, num instante t , corresponde à soma dos seus n deslocamentos individuais e independentes [94] e é dada pela Eq. 2.2, onde

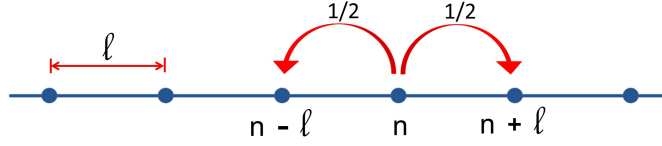


Figura 2.4: Representação da caminhada aleatória unidimensional. Passos de comprimento l igualmente prováveis para direita ou para esquerda.

$$z = \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.41)$$

tal que, z é soma dos seus n deslocamentos individuais e independentes.

Assim, como os passos tem comprimento constante l e são equiprováveis para direita ou esquerda, o valor esperado da soma dos passos (média da posição final) $\langle z \rangle = 0$. O quadrado da soma dos passos (quadrado da posição final) fica

$$z^2 = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j = n l^2 + \sum_{i,j=1; i \neq j}^n x_i x_j, \quad (2.42)$$

Depois um grande número de passos, a média do quadrado da soma dos passos (média do quadrado da posição final) fica

$$\langle z^2 \rangle = n l^2 + \left\langle \sum_{i,j=1; i \neq j}^n x_i x_j \right\rangle, \quad (2.43)$$

Cada passo da caminhada é igualmente provável para a esquerda ou para a direita, assim os deslocamentos x_i são variáveis aleatórias com média zero. Os produtos $x_i x_j$ também são variáveis aleatórias e, uma vez que assumimos x_i e x_j independentes entre si, o valor médio dos produtos é zero. Portanto, o valor esperado do termo misto na Eq. 2.43 é zero. Dessa forma, temos

$$\langle z^2 \rangle = nl^2, \quad (2.44)$$

O deslocamento quadrático médio (variância) da soma dos passos (variância da posição final)

$$\sigma^2 = \langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2 = nl^2, \quad (2.45)$$

Portanto, a raiz do deslocamento quadrático médio (desvio padrão), após n passos de comprimento constante l (livre caminho médio) é

$$\sqrt{\langle z^2 \rangle} = l\sqrt{n}. \quad (2.46)$$

Entretanto, numa difusão normal a caminhada aleatória tem passos independentes e de tamanho x_i , que podem ser fixos ou variáveis. Dessa forma, a descrição da difusão da normal é perfeitamente alcançada com uma equação de difusão clássica (Ver apêndice C) em 2.47.

$$\frac{\partial P(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(z, t)}{\partial z^2}. \quad (2.47)$$

Portanto, para uma distribuição do tamanho dos passos $P(z)$, se os primeiro e o segundo momentos da distribuição forem finitos, a variância da distribuição do tamanho dos passos depende linearmente do tempo, tal que

$$\sigma^2 = \langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2 = 2Dt, \quad (2.48)$$

ou, como $\langle z \rangle = 0$, temos

$$\sigma^2 = \langle z^2 \rangle = 2Dt, \quad (2.49)$$

onde, D é o coeficiente de difusão.

De um modo geral, sendo possível a definição concreta de um coeficiente de difusão D , a densidade de probabilidade de uma partícula difusiva estar numa posição genérica $\vec{r}$, num meio tridimensional em num instante t , após um número suficientemente elevado de passos e tendo iniciado o movimento na posição $\vec{r} = 0$, é dada pelo propagador $W(\vec{r}, t)$ [95]. O propagador $W(\vec{r}, t)$ é obtido através da solução da equação de difusão clássica generalizada dada por

$$\frac{\partial W(\vec{r}, t)}{\partial t} = D \vec{\nabla}^2 W(\vec{r}, t), \quad (2.50)$$

Assim, no limite assintótico de um número suficientemente elevado de passos, ou seja, um tempo suficientemente longo, a solução da equação 2.50, com condição inicial $W(\vec{r}, 0) = \delta(\vec{r})$, que resulta da multiplicação das soluções das equações de

difusão para cada uma das dimensões consideradas [96], tem uma forma gaussiana dada por

$$W(\vec{r}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{4Dt}\right), \quad (2.51)$$

em que d representa o número de dimensões a que o movimento ocorre.

Em sistemas muito complexos, do ponto de vista físico, surgem frequentemente desvios à estatística gaussiana e, assim, a dependência temporal do segundo momento da distribuição do tamanho dos passos deixa de ser linear, ou seja, a relação $\langle \vec{r}^2(t) \rangle = 2dDt$ ($d = 3$ para movimentos tridimensionais) deixa de ser válida [97].

Assim, o valor médio do quadrado da posição (segundo momento da soma dos passos) passa a assumir a seguinte forma empírica [98]

$$\langle \vec{r}^2(t) \rangle \propto t^H, \quad (2.52)$$

sendo $H \neq 1$. Nestas circunstâncias, a difusão é dita anômala.

Portanto, uma característica importante da difusão normal é que o segundo momento associado a distribuição de probabilidade do tamanho do passo é proporcional a Dt , onde D representa o coeficiente constante de difusão, conforme visto na Eq. 2.49. Em outras palavras, a raiz quadrada média (rms) do desvio é proporcional à raiz quadrada do tempo, $\sigma \propto t^{1/2}$. No entanto, também existem outros tipos de processos de difusão que se comportam de forma diferente. Portanto, agora descreveremos os processo de difusão anômala, dentre os quais os voos de Lévy estão presentes.

2.5 Características da Superdifusão: Caminhadas e voos de Lévy

Os voos de Lévy são uma caminhada aleatória, que diferentemente do movimento browniano, existe uma probabilidade não desprezível de ocorrerem longos passos, que são em pequeno número comparado ao total de passos, mas são eles que regem a estatística do sistema. Por sua vez, numa caminhada de Lévy os longos passos também acontecem em pequeno número comparado ao total de passos, entretanto os passos não são instantâneos. Em vez disso, possuem velocidade constante, tornando o tamanho do passo proporcional ao tempo.

A diferença básica entre caminhadas e voos de Lévy é a natureza do tempo operacional. Se o interesse do estudo está como uma função do tempo real t , deve-se utilizar a expressão caminhada de Lévy. Entretanto, se o foco é expressar a escala em termo do número de passos n da caminhada aleatória, é apropriado

utilizar o termo voo de Lévy porque n é proporcional ao tempo de ação para um voo de Lévy [99].

Dessa forma, caminhadas de Lévy tornam-se semelhantes a voos de Lévy apenas para um período de tempo grande. Embora caminhadas e voos de Lévy tenham muitas características em comum, algumas características singulares não devem ser negligenciadas. Uma característica dos voos de Lévy é possuir velocidades infinitas, o que é fisicamente impossível, portanto, a priori, não se pode descrever voos de Lévy no espaço físico geométrico. Apesar disso, isso possível. Por exemplo, um fóton dentro duma célula com vapor atômico ressonante pode dar grandes saltos, e numa velocidade muito grande dentro dessa célula, que são instantâneos comparados com o tempo de vida do estado excitado, embora a distância euclidiana possa ser pequena [100].

Por outro lado, caminhadas de Lévy não violam as leis físicas. A rigor, nenhuma quantidade física mensurável diverge no tempo para uma caminhada de Lévy. Isso acontece porque a variância infinita do processo de Lévy torna-se uma questão de tempo infinito. Assim, como numa caminhada de Lévy a velocidade é constante, a distância máxima percorrida é dada vt e num tempo finito. Logo, todos os momentos do propagador permanecem finitos no tempo, diferente dos voos de Lévy, que possuem momentos divergentes.

Uma das característica imediatas dos Voos de Lévy é o fato das trajetórias a diferentes escalas serem auto-semelhantes, ou seja, de apresentarem o mesmo aspecto genérico. A característica de auto-similaridade é típica dos fractais. Da aplicação da definição de dimensão fractal à Eq. 2.38, conclui-se que a caminhada aleatória voos de Lévy pode ser considerado um fractal de dimensão α [101].

Dessa maneira, para os voos de Lévy pode-se definir largura, como uma largura a meia altura, e mostrar que

$$\langle |\vec{r}(t)|^q \rangle \propto t^H, \quad (2.53)$$

onde $H = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\mu-1}$ é chamado de expoente de Hurst [102], e caracteriza o comportamento do voos de Lévy.

Neste caso, a descrição desse processo superdifuso é perfeitamente alcançada com uma equação de difusão de uma forma um pouco diferente, levando em consideração as correlações de longo alcance próprias das distribuições estáveis de Lévy, através da solução de uma equação geral, dada por

$$\frac{\partial W(\vec{r}, t)}{\partial t} = D_\alpha \frac{\partial^\alpha W(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}^\alpha}. \quad (2.54)$$

Assim, para um processo superdifusivo, o propagador $W(\vec{r}, t)$, num regime assintótico do tamanho dos passos, é agora dado por uma lei estável de Lévy, onde

$$W(\vec{r}, t) \propto \frac{1}{t^{1/\alpha}} L_\alpha\left(\frac{\vec{r}}{t^{1/\alpha}}\right), \quad (2.55)$$

L_α é uma distribuição estável de Lévy de índice α e $D_\alpha \equiv \sigma^2/\tau^\alpha$ é o coeficiente de difusão generalizado, que como aparece em [103], é a razão de escala σ e tempo de espera do processo τ para $0 < \alpha < 2$ [94, 104]. Assim, a Eq. 2.55 implica que a distribuição de tamanhos dos passos tem uma dependência assintótica dada pela Eq. 2.38.

2.5.1 Descrição Estatística dos Voos de Lévy

Como vimos, a diferença entre caminhada e voos de Lévy diz respeito à velocidade. Os saltos de voos de Lévy são instantâneos em pequeno tempo, enquanto caminhadas de Lévy têm velocidade constante. Especificamente, os voos de Lévy podem ser descritos por uma equação mestre (Eq.2.54) que consideram taxas de transição de longo alcance no espaço. Por outro lado, numa caminhada de Lévy, o tamanho do passo é proporcional ao tempo, devido sua velocidade finita v .

Assim, sabendo que a estabilidade das distribuições de probabilidade do tamanho dos passos numa função estável de Levy é determinada pelo parâmetro de estabilidade α , podemos fazer a descrição estatística dos voos de Lévy, através do parâmetro $0 < \alpha < 2$.

Nesta situação, o escalamento da posição da partícula depende do parâmetro α da distribuição, onde o valor esperado do módulo da posição após vários passos é dado por

$$\langle |\vec{r}(t)| \rangle \propto t^{1/\alpha}, \quad (2.56)$$

Da Eq. 2.56, para $\alpha < 1$, o valor esperado da distribuição do tamanho dos passo diverge, ou seja, $\langle |\vec{r}(t)| \rangle \rightarrow \infty$ e, para $\alpha \geq 1$, temos que $\langle |\vec{r}(t)| \rangle$ converge. De um modo geral, podemos escrever

$$\langle |\vec{r}(t)|^p \rangle \propto t^{q/\alpha} \quad (2.57)$$

que converge para $p < \alpha$.

Entretanto, o valor esperado do quadrado da posição $\langle \vec{r}^2(t) \rangle$ sempre diverge para valores de $0 < \alpha < 2$ tal que

$$\langle \vec{r}^2(t) \rangle \propto t^\gamma \quad (2.58)$$

onde $\gamma = 2/\alpha$ e superior a 1, predominando um processo superdifusivo, cuja a caminhada aleatória envolvida é do tipo voos de Lévy. Dessa maneira, para $0 < \alpha < 2$, o processo de transporte acontece mais rapidamente do que no caso

da difusão normal, com $\alpha = 2$, e é por isso que essa dinâmica é chamada de superdifusiva.

Por sua vez, os processos aleatórios podem ser classificados por meio da Eq. 2.58, onde o valor esperado do quadrado da posição dos passos é descrito empiricamente em relação ao tempo por meio do coeficiente γ [105],

Dessa forma, como observamos na Fig. 2.5, para $\gamma < 1$, o movimento é dito subdifusivo ou dispersivo e o espalhamento das partículas faz-se mais lentamente que no movimento de difusão clássica. Para $\gamma = 1$, temos processo difusivo normal, onde o segundo momento da distribuição é linear no tempo. Em contrapartida, para $\gamma > 1$, esse espalhamento é mais rápido que no movimento browniano e denominado superdifusivo. Nesse contexto, por exemplo, a difusão anômala dos fótons no interior de um vapor atômico com *RCF* ocorre com $\gamma > 1$ e obedece a estatística de Lévy passando a ser chamada de superdifusão ou voos de Lévy.

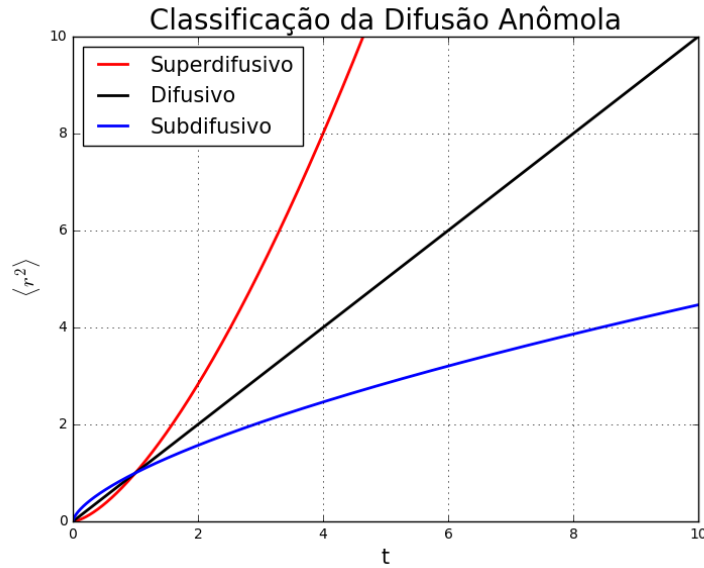


Figura 2.5: Classificação da Difusão Anômala através do parâmetro γ . Superdifusão para $\gamma > 1$, Difusão Normal para $\gamma = 1$ e Subdifusão para $\gamma < 1$.

2.6 Grandezas Mensuráveis

Uma vez definido o que é um processo superdifusivo, podemos medir alguns parâmetros importantes na descrição desse fenômeno. Dentre eles, temos o tempo de primeira passagem, que acontece, por exemplo, quando um fóton cruza um ponto $x = L$, a uma determinada distância do ponto inicial $x = x_0$ dentro de um vapor atômico ressonante, pela primeira vez [106]; assim como, a transmissão difusa dos fótons pelo caminho total L [36, 107].

2.6.1 Tempo de Primeira Passagem para Voos de Lévy

A análise física do problema do tempo de primeira passagem tem uma longa história, que pode ser entendida em [108, 109].

Como vimos, os processos de difusão anômala são caracterizados em relação ao tempo pela média do quadrado da posição. Para os voos de Lévy dos fótons num vapor atômico, a distribuição do tamanho dos passos $P(x)$ é assintoticamente dada por uma lei de potência, que representa distribuições de cauda longa e variância divergente, caracterizada por $1 < \gamma < 2$ [106].

A partir disso, podemos caracterizar o tempo de primeira passagem, de forma que, considerando o movimento unidimensional dos fótons no vapor atômico, estamos interessados no evento quando um fóton cruza o vapor atômico num ponto $x = L$, que pode ser o próprio tamanho da amostra, pela primeira vez, depois de iniciar seu movimento num ponto $x = x_0$.

Assim, como tempo de primeira passagem dos voos de Lévy em um vapor atômico está relacionado ao seu caráter aleatório no vapor; a distribuição simétrica no tempo da função de distribuição de probabilidade do tamanho dos passos no vapor $P(t)$ é, necessariamente, caracterizada pela escala de Sparre Andersen [111, 112] no limite de tempo longo. Assim, a expressão analítica para essa distribuição do tempo de primeira passagem $P(t)$, no limite de tempo longo fica,

$$P(t) \sim \frac{x_0^{\alpha/2}}{\alpha \sqrt{\pi D_\alpha \Gamma(\alpha/2)}} t^{-3/2}, \quad (2.59)$$

onde x_0 é a da posição inicial do fóton, D_α é o coeficiente de difusão generalizado e α o parâmetro estabilidade da distribuição [113].

Portanto, tendo em vista um vapor atômico ressonante, quando um pulso laser incide no vapor, considerando uma escala de tempo longo, pode-se medir o tempo de primeira passagem do fóton pela amostra, através da detecção da distribuição temporal da transmissão difusa, que é equivalente $P(t)$.

Uma vez que sabemos o ponto x_0 , onde ocorre o primeiro espalhamento dos fótons do pulso laser, podemos com os resultados obtidos experimentalmente para

$P(t)$ gerar um gráfico desses valores em função do tempo e, através de um fit teórico desse gráfico obter a constante de proporcionalidade da distribuição em função do tempo, e, consequentemente, inferir o valor do parâmetro α de Lévy, que caracteriza a distribuição do tamanho dos passos dados pelos fótons no vapor atômico.

2.6.2 Transmissão Difusa para Voos de Lévy

Dado o movimento superdifusivo dos fótons num vapor atômico ressonante, outra grandeza importante que podemos medir é a transmissão difusa dos fótons pelo vapor. Essa grandeza está relacionada à caminhada aleatória que os fótons realizam dentro do vapor devido aprisionamento de radiação, ou seja, a transmissão difusa é o resultado da detecção dos fótons que realizaram a caminhada aleatória através da recipiente de comprimento L que contém o vapor, por meio de sucessivos processos de reabsorção e reemissão espontânea.

Dessa forma, considerando uma caminhada aleatória do tipo voos de Lévy de fótons num vapor atômico, que inicia seu movimento em um ponto $x = x_0$ sobre um intervalo $[0, L]$ correspondente ao tamanho do vapor (célula que contém o vapor), uma expressão fechada para tempo médio gasto pelos voos de Lévy nesse intervalo, considerando a presença de limites absorvedores é dada em [107, 114].

Essa situação com limite absorvedor, coincide, por exemplo, a uma partícula que some do processo quando chega no final da amostra de comprimento L , ou seja, hipoteticamente, foi absorvida e não participa mais da caminhada aleatória. Essa situação vai em oposição a uma partícula presa em um recipiente, pois nesse caso, quando a partícula chega nos limites é refletida para dentro da amostra.

A transmissão difusa dos fótons pelo vapor, corresponde a situação apresentada com limite absorvedor, pois no processo de difusão dos fótons no vapor atômico, quando os fótons atingem os limites da célula, eles deixam o vapor e, portanto, não participam mais da caminhada aleatória.

Em geral, para modelo de difusão anômala dos voos de Lévy, na ausência de limites para a absorção dos fótons, a generalização do TCL [78, 80] garante que a a densidade de probabilidade do deslocamento z dos voos de Lévy converge após muitos passos para a distribuição estável de Lévy de ordem α , tal que

$$L_\alpha(z, n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-nl_0^\alpha k^\alpha) \cos(kz) dk \quad (2.60)$$

onde l_0 é o comprimento mínimo de um único passo e n é um número de passos.

Esta é distribuição estável de Lévy dada na Eq. 2.28, com dependência do tamanho mínimo do passo l_0 . Essa é uma generalização do TCL, que é caracterizada em [80] para deslocamentos assintoticamente grandes pelo decaimento da distribuição através da lei de potência

$$L_\alpha(x, n) = nl_0^\alpha \gamma_1 x^{-(\alpha+1)}, \quad (2.61)$$

onde $\gamma_1 = \frac{1}{\pi} \Gamma(\alpha + 1) \sin(\pi\alpha/2)$. Dessa forma, podemos tratar os voos de Lévy dos fótons no vapor atômico com a ajuda das equações diferenciais fracionais [80, 104, 115].

Entretanto, na presença de limites para a absorção dos fótons, esse tratamento não é bem claro, mas existem muitas aplicações práticas, na qual é importante encontrar o tempo de primeira passagem, o comprimento médio da trajetória e outras quantidades de interesse.

Portanto, considerando voos de Lévy de fótons num vapor atômico que começa em um ponto x_0 no intervalo $[0, L]$, na presença de limites para a absorção dos fótons, o fóton realiza subsequentes e independentes passos de tamanho l , com igual probabilidade para ambos os lados, esquerdo ou direito, onde o tamanho de cada passo é obtido da distribuição de lei de potência, tal que

$$P(|l| > x) = \frac{l_0^\alpha}{x^\alpha} \quad (2.62)$$

onde $0 < \alpha < 2$ é o parâmetro de Lévy e l_0 é o comprimento mínimo do passo. A densidade de probabilidade do tamanho do passo (voo) é dada por

$$P(l) = \frac{\alpha l_0^\alpha}{2} \frac{\Theta(|l| - l_0)}{|l|^{\alpha+1}} \quad (2.63)$$

onde $\alpha l_0^\alpha/2$ é a constante de normalização [107] e

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x > 0 \\ 0, & \text{para } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

é a função step.

A transmissão difusa dos fótons pelo vapor atômico depende do tamanho da amostra e do perfil de absorção do vapor. Portanto, para medir a transmissão difusa adequadamente, utilizamos a opacidade da amostra (vapor) r , que em [63] é definido como

$$r = \frac{L}{l_0} \frac{1}{\Phi(0)}, \quad (2.65)$$

onde r é um parâmetro adimensional dado pela razão entre o tamanho máximo do passo (que corresponde ao tamanho do sistema, o recipiente de comprimento L que contém o vapor) e o tamanho mínimo do passo l_0 , que é multiplicada pelo inverso do perfil de absorção quando o fóton é absorvido no centro da linha $1/\Phi(0)$.

O tamanho mínimo do passo feito pelo fóton dentro do vapor $l_0 = 1/K(0)$, ou seja, é o inverso do coeficiente de absorção no centro da linha, em $\delta = 0$. Na

prática, o tamanho mínimo do passo l_0 é a distância média percorrida pelo fóton antes de ser absorvido, quando emitido no centro da linha.

A relação entre a transmissão difusa T e a opacidade é dada pela lei de Ohm Modificada [41, 116] dada por

$$T_\alpha \propto r^{-\alpha/2} \quad (2.66)$$

Por exemplo, em nosso experimento, a opacidade é obtida por meio da densidade atômica do vapor N que, a partir da Eq. 2.65 pode ser escrita como:

$$r = \frac{1}{\Phi(0)} N \Sigma_0 L \quad (2.67)$$

Σ_0 é a secção de choque no centro da linha e L o tamanho da célula que contém o vapor.

De acordo com a Eq. 2.67, podemos mudar a opacidade do meio (vapor atômico) r simplesmente variando a densidade atômica. Isso é feito através do aquecimento do vapor, que aumenta o coeficiente de absorção e, consequentemente, diminui o livre caminho médio dos fótons no centro da linha.

O resultado da relação da transmissão difusa com a opacidade Eq. 2.66, conhecido como lei de Ohm modificada [107, 114], é utilizada para obtermos informações sobre a difusão dos fótons no vapor atômico. De um modo geral, essa é a relação fundamental, que vamos utilizar nesse trabalho.

Capítulo 3

Aprisionamento de Radiação

3.1 Contexto Histórico

A difusão da radiação num vapor atômico ressonante foi, primeiramente, estudada por Compton no início do século 20 [11, 12], sugerindo que a radiação podia ser tratada como difusão de partículas, através da equação da difusão clássica. Esse tratamento originou alguns resultados estranhos, visto que, pelos cálculos, a excitação na amostra decairia mais rapidamente que o tempo de vida intrínseco da espécie excitada.

Depois, em 1926, Milne modificou a equação da difusão no intuito de modificar esse resultado, porém o efeito da forma do perfil de emissão espectral foi ignorado [10] e sua importância confirmada por M. Zemansky [70, 71], assumindo a existência de um coeficiente de absorção equivalente, por ele não definido.

No avanço do estudo do processo difusivo de fótons no vapor atômico, em 1932, Samson [117] acrescentou a importância dos fótons emitidos distantes do centro da linha, que existem em pequeno número, porém, sua contribuição é impressindível na descrição do processo difusivo e, dessa forma, Kenty, no mesmo ano [69] concluiu que, para um meio infinito, o coeficiente de difusão seria infinito, provando que o formalismo da equação de difusão não era apropriado para tratar o problema do aprisionamento de radiação.

Assim, em 1947, Holstein e Bibermann, separadamente, através do estudo do aprisionamento de radiação, obtiveram tempos de vida de aprisionamento radiativo baseados numa soma de decaimentos monoexponenciais e dependentes da distribuição espectral, concluindo que a migração radiativa nos meios atômicos não pode ser descrita por uma equação de difusão, tampouco fazendo uso de correções e alterações na equação de difusão clássica. Dessa forma, propuseram uma equação integro-diferencial para descrever o aprisionamento da radiação nos meios atômicos [118, 119] baseada na densidade de átomos no estado excitado.

Contudo, no final dos anos 90, em 1985, surgiu um novo e importante avanço, P. Wiorkowski e W. Hartmann [120] sugeriram uma maneira diferente de representar o problema do aprisionamento da radiação, que descreve temporalmente a radiação emitida após um número desconhecido de eventos de reabsorção e reemissão espontânea, definindo, portanto, alguns coeficientes importantes, tais como os fatores de escape e aprisionamento.

Denominada de Difusão Múltipla, essa representação do aprisionamento de radiação é equivalente à abordagem de Holstein [121, 122] e, posteriormente, confirmado por Lai [123, 124] e Berberan-Santos [125]

Dessa forma, a propagação da luz em um meio espalhador (vapor atômico) pode ser descrita como um passeio aleatório de fótons dentro do meio, de modo que, um fóton incidente no meio (um fóton de laser, por exemplo) é repetidamente absorvido e reemitido no meio.

Esse múltiplo processo de espalhamento agora é equivalente a uma caminhada aleatória com o comprimento dos passos dependente da frequência, de tal maneira, que a distribuição espectral dos fótons, influenciada pelo processo de redistribuição de frequência, é determinante na caracterização do regime de difusão.

Portanto, como mencionado anteriormente, a suposição de um livre caminho médio para os fótons não é preenchida em vapores ressonantes [69], e uma descrição do tipo difusão de aprisionamento de radiação é inadequada [118]. Assim, o aprisionamento de radiação e sua relação com a distribuição de cauda longa podem ser estudados por meio da teoria de distribuições estáveis de Lévy [19], em virtude de abranger distribuições de tamanho dos passos com segundo momento infinito.

Dessa forma, a classificação teórica do aprisionamento de radiação incoerente como mais um sistema exibindo comportamento superdifusivo, foi feita por Pereira et al. [36] e posteriormente estudado [126] no início dos anos 2000. Seguida de confirmação experimental alguns anos depois [18].

3.1.1 Descrição do Fenômeno

Quando uma célula com vapor atômico ressonante é cruzada por uma radiação laser, pode-se observar uma luz difusa em regiões do volume do vapor não iluminadas pelo laser. Esse fenômeno acontece devido aos fótons que foram absorvidos pelos átomos serem re-emitidos e, posteriormente, re-absorvidos por outros átomos no vapor.

Portanto, sob tais condições, quando um fóton no vapor atômico ressonante é emitido por um átomo, não é de forma alguma garantido um desimpedido trânsito para as paredes do recinto. Pelo contrário, depois de percorrer uma curta distância, é mais provavelmente absorvido por outro átomo, sofrendo vários eventos de reabsorção e reemissão espontânea antes de, eventualmente, escapar para o exterior da célula [36].

O resultado desse processo aleatório de emissão e reabsorção dos fótons pelos átomos é conhecido como *radiation trapping* ou aprisionamento de radiação, sendo a transferência de energia de excitação de átomo a átomo, onde a eventual fuga da radiação para o limite do recinto pode exigir um grande número de tais transferências, como representado na figura 3.1

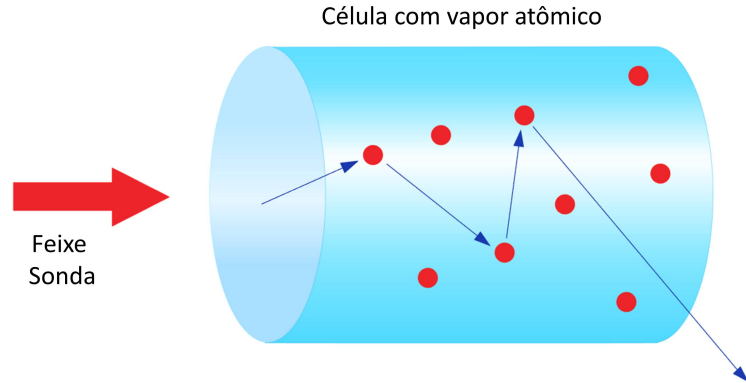


Figura 3.1: Representação do aprisionamento de radiação. Um feixe laser de prova incide numa célula com vapor atômico ressonante. Os fótons da radiação incidente são absorvidos e, posteriormente, reemitidos aleatoriamente, podendo ocorrer sucessivos processos de absorção e reemissão espontânea até alcançar os limites da célula e deixar o vapor. Esse efeito é conhecido como *Radiation Trapping*.

Esse fenômeno é importante numa diversidade de processos; como a emissão da radiação por estrelas [131], desenvolvimento tecnológico de lâmpadas incandescentes [132, 133], gases [134], líquidos [135], estado sólido [136, 137, 138] meio laser, filtro de linha atômico [139], aprisionamento de átomos frios [140, 141], colisões [142, 143], perda de coerência [144, 145] em processos no vapor atômicos e bombeamento ótico de vapores de metais alcalinos [146].

Para uma *RCF*, a frequência do fóton emitido é completamente independente da frequência do fóton previamente absorvido, sendo exclusivamente determinada pela forma espectral da transição, seja gaussiano, lorentziano ou Voigt. Nessas condições, o decaimento assintótico na distribuição do tamanho dos passos dados pelos fótons num vapor atômico é, como descrito na seção 2.3.1, mais suave que

$1/x^3$, ou seja, quando $0 < \alpha < 2$, então a $\langle x^2 \rangle$ não é mais finita invalidando o *TLC*.

Além disso, quando $0 < \alpha < 1$, o primeiro momento $\langle x \rangle$ diverge, significando que essas distribuições exibem um comportamento atípico, uma vez que a probabilidade de valores muito grandes de x (distante nas asas da distribuição de probabilidade) é muito maior que o normal e resulta numa distribuição de passos do tipo "cauda longa".

Isso foi mostrado em [36], onde o aprisionamento da radiação ressonante em vapores atômicos é tratado como um caso de difusão anômala, em particular de superdifusão, caracterizado por um espalhamento da excitação mais rápido que o previsto pela difusão browniana padrão, em resultado de uma distribuição de tamanho de passos dos fótons com momentos infinitos, conhecidos como voos de Levy.

3.2 Distribuição de Probabilidade do Tamanho dos Passos

A descrição da distribuição assintótica do tamanho dos passos para os voos de Lévy é feita na seção 2.3.1. Entretanto, como essa descrição é válida apenas no limite assintótico quando $x \rightarrow \infty$, para um vapor atômico ressonante, podemos obter a distribuição do tamanho dos passos de maneira geral. Isso é feito, a princípio, por meio da lei de Beer Lambert, a qual descreve a transmissão de um fóton de frequência ν pelo do vapor.

A caracterização desse transporte fotônico pode ser entendida mediante a probabilidade $T_\nu(x)$, de um fóton de frequência ν atravessar uma camada de vapor de espessura x (transmissão através da distância x), sem ser absorvido, como ilustrado na Fig. 3.2. $T_\nu(x)$ tem os valores limite (i) $T_\nu(0) = 1$ e (ii) $T_\nu(\infty) = 0$.

Por outro lado, $K(\nu)$ é a probabilidade por unidade comprimento, de que o fóton seja absorvido (coeficiente de absorção). Para determinar a relação entre $K(\nu)$ e $T_\nu(x)$, escrevemos a transmissão do fóton diferencialmente, através do tamanho do passo x mais um deslocamento dx de x como mostra a Fig. 3.2. Assim

$$T_\nu(x + dx) = T_\nu(x)[1 - K(\nu)dx], \quad (3.1)$$

o que significa que o número de fótons absorvidos em dx é proporcional ao número de fótons que chegam em x . Por definição, temos

$$T_\nu(x + dx) - T_\nu(x) = \frac{\partial T_\nu}{\partial x} dx \quad (3.2)$$

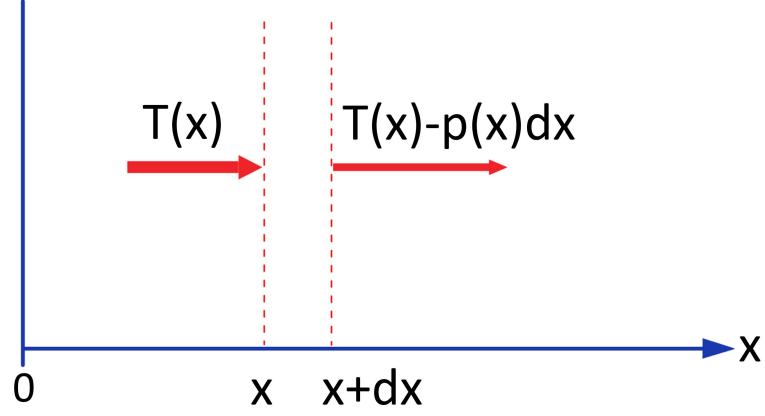


Figura 3.2: Esboço de meio espaço $x > 0$ preenchido com meio espalhador, para determinar a fração de partículas incidentes em x e transmitido através de uma fina fatia de espessura dx .

então

$$T_\nu(x) = e^{-K(\nu)x} \quad (3.3)$$

Essa relação (Eq. 3.3) é a chamada de lei Beer-Lambert [147], a qual satisfaz a exigências (i) e (ii) acima, e descreve a transmissão dos fótons de frequência ν pelo vapor.

A partir da lei de Beer-Lambert, podemos encontrar a probabilidade $p_\nu(x)$ de um fóton de frequência ν dar um passo de tamanho do x . Isso é feito considerando a probabilidade de um fóton de frequência ν dar um passo de tamanho $x + dx$, que como mostra a Fig. 3.2, é a transmissão dos fótons de frequência ν que chegaram na posição x sem serem absorvidos, e não atingiram um deslocamento adicional infinitesimal dx , ou seja,

$$T_\nu(x + dx) = T_\nu(x) - p_\nu(x)dx, \quad (3.4)$$

$$p_\nu(x) = -\frac{\partial T_\nu}{\partial x} = K(\nu)e^{-K(\nu)x}. \quad (3.5)$$

Esta expressão descreve a probabilidade de um fótons de frequência ν dar um passo de tamanho x ao se propagar em um meio espalhador (vapor), ou seja,

essa probabilidade decai exponencialmente ponderada pelo coeficiente de absorção $K(\nu)$.

Diante disso, podemos determinar a dependência do livre caminho médio com a frequência $\bar{l}(\nu)$ para os fótons no vapor, tal que

$$\bar{l}(\nu) = \int_0^\infty x p_\nu(x) dx = \int_0^\infty x K(\nu) e^{-K(\nu)x} dx = \frac{1}{K(\nu)} \quad (3.6)$$

A equação 3.6 nos diz que podemos sintonizar o livre caminho médio de um feixe monocromático de fótons numa frequência ν , simplesmente variando o coeficiente de absorção $K(\nu)$ nesta frequência. Uma vez que, $K(\nu)$ é proporcional a densidade atômica, a sintonia de $\bar{l}(\nu)$ pode ser alcançada através do controle da densidade N [18].

A Eq. 3.5 somente é válida quando temos apenas uma frequência, ou seja, o fóton é emitido na mesma frequência que foi absorvido. Contudo, no vapor atômico, o aprisionamento de radiação é caracterizado por uma RPF, de modo que um fóton absorvido numa determinada frequência é redistribuído num espectro de frequências $\Theta(\nu)$. Isso acontece devido aos mecanismos alargadores de frequência, que redistribui as frequências no referencial do laboratório.

Portanto, agora temos uma distribuição de probabilidade do tamanho dos passos $P(x)$, que é a probabilidade de um fótons de frequência ν dar um passo de tamanho x ponderada pelo espectro de emissão $\Theta(\nu)$, tal que

$$P(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\nu) p_\nu(x) d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\nu) K(\nu) e^{-K(\nu)x} d\nu \quad (3.7)$$

onde o intervalo de integração considera a probabilidade de absorção para todas as frequências emitidas possíveis.

Entretanto, depois de alguns ciclos de reabsorção e reemissão espontânea, é atingido o regime de RCF. Nesse caso, os espectros de absorção e emissão das frequências dos fótons são proporcionais, ou seja, $\Theta(\nu) = cK(\nu)$, e a equação 3.7 se reduz a

$$P(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} cK^2(\nu) e^{-K(\nu)x} d\nu \quad (3.8)$$

Além disso, nesse regime, o espectro de emissão $\Theta(\nu)$ é equivalente ao perfil de absorção do vapor, o qual é um perfil de Voigt.

De um modo geral, os momentos da distribuição do tamanho dos passos são dados por $\langle x^n \rangle$, tal que

$$\begin{aligned}
\langle x^n \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\nu) K(\nu) d\nu \int_0^\infty x^n e^{-K(\nu)x} dx \\
\langle x^n \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\nu) K(\nu) d\nu \frac{\Gamma(n+1)}{K^{n+1}(\nu)} \\
\langle x^n \rangle &= n! \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Theta(\nu)}{K^n(\nu)} d\nu
\end{aligned} \tag{3.9}$$

os quais divergem para todas as formas de linhas espectrais; lorentziana, Doppler e Voigt para $n \geq 2$. Isso significa que a caminhada aleatório dos fótons num vapor atômico, para fótons com qualquer uma dessas distribuições espectrais, não podem ser caracterizados por um coeficiente de difusão e, em alguns casos, nem mesmo por um livre caminho médio, qualificando, assim, a propagação de fótons em um vapor ressonante como difusão anômala do tipo voos de Lévy.

3.2.1 Tratamento de Holstein

Numa célula com vapor atômico ressonante, os fótons são altamente absorvidos pelos átomos; portanto, sob condições adequadas de densidade do vapor, um eventual escape desses fótons do invólucro do vapor pode exigir um grande número de absorções e emissões repetidas.

Assim, considerando o movimento unidimensional dos fótons, este transporte da energia de excitação é determinado, essencialmente, pela probabilidade $T(x)$, de um fóton atravessar uma camada do vapor de espessura x sem ser absorvido.

A dependência de $T(x)$ no perfil espectral da ressonância é investigada para os casos do perfil Natural, Doppler e Voigt [118]. Holstein propôs uma descrição por meio de uma equação integro-diferencial, que ainda constitui o ponto de partida da maioria das descrições formais de aprisionamento de radiação.

Uma vez que $T(x)$ é conhecido, podemos prontamente configurar equações que descrevem a transferência de excitação entre os átomos do volume fechado.

A base do tratamento de Compton [11], por exemplo, é a suposição de um coeficiente de absorção uniforme $1/\lambda$, de modo que,

$$T(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}}. \tag{3.10}$$

No entanto, o coeficiente de absorção do meio, $K(\nu)$, é uma função sensível da frequência da radiação, tal que

$$T(x, \nu) = e^{-K(\nu)x}. \tag{3.11}$$

Portanto, devemos calcular a média da transmissão monocromática ponderado pelo espectro de frequência $\Theta(\nu)$ da radiação emitida no espaço de frequência, isto é,

$$T(x) = \int \Theta(\nu) e^{-K(\nu)x} d\nu. \quad (3.12)$$

A Eq. 3.12 é a relação crucial no tratamento de Holstein, onde o coeficiente de absorção $K(\nu)$ é uma característica do vapor e é tratado extensivamente em textos padrão [127]. As formas que os perfis de absorção podem assumir são as seguintes:

- 1) perfil natural
- 2) perfil com alargamento Doppler
- 3) perfil alargado por pressão
- 4) perfil Voigt

Contudo, a determinação do perfil de emissão $\Theta(\nu)$ não é tão simples como a do coeficiente de absorção $K(\nu)$, uma vez que, o perfil de emissão depende da frequência incidente, do número de espalhamentos no vapor e da presença ou não de colisões entre átomos.

Assim se o sistema está em equilíbrio térmico [13], os princípios da termodinâmica nos fornece

$$K(\nu) = c\Theta(\nu), \quad (3.13)$$

onde a constante de proporcionalidade $c = \frac{\lambda_0^2}{8\pi} \frac{g_2}{g_1} \frac{N}{\tau}$, sendo λ_0 o comprimento de onda da transição, $\frac{g_2}{g_1}$ a razão dos fatores de degenerescência, N a densidade atômica e τ o tempo de vida do estado excitado.

O caminho livre médio $\langle x \rangle$ é definido como

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty x p(x) dx, \quad (3.14)$$

com

$$p(x)dx = T(x) - T(x+dx) = -\frac{\partial T}{\partial x} dx, \quad (3.15)$$

a probabilidade de que o fóton seja absorvido após percorrer uma distância entre x e $x+dx$ de seu ponto de emissão, tal que

$$\langle x \rangle = - \int_0^\infty x \frac{\partial T}{\partial x} dx. \quad (3.16)$$

Pode-se mostrar facilmente que esta conclusão vale para uma distribuição espectral arbitrária $\Theta(\nu)$ que está relacionado ao coeficiente de absorção $K(\nu) = c\Theta(\nu)$ do meio, onde c é uma constante. Assim de 3.16 e 3.12, temos

$$\langle x \rangle = - \int \int_0^\infty x \Theta(\nu) \frac{\partial(e^{-xc\Theta(\nu)})}{\partial x} d\nu dx = \int \frac{d\nu}{c}, \quad (3.17)$$

a qual diverge.

A contribuição de Holstein, reside numa equação que explica o transporte radiativo de excitação, chamada equação de Biberman-Holstein[118, 119, 128], nas linhas espectrais de átomos e íons em gases e plasmas, onde descreve a evolução espaço-temporal da densidade de átomos / íons excitados $f(\mathbf{r}, t)$. Esta equação é derivada de um sistema de equações para densidade espaciais de átomos excitados, $f(\mathbf{r}, t)$ e intensidade espectral da radiação de ressonância.

Este sistema é reduzido a uma única equação para $f(\mathbf{r}, t)$, que acaba por ser uma equação integro-diferencial que não pode ser reduzido a uma equação diferencial do tipo de difusão:

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \int_V G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) f(\mathbf{r}', t) dV' - \left(\frac{1}{\tau} + \sigma\right) f(\mathbf{r}, t) + q(\mathbf{r}, t), \quad (3.18)$$

onde $x = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, τ é o tempo de vida do estado atômico excitado; σ é a taxa de extinção da excitação por colisão; $q(\mathbf{r}, t)$ é a fonte de átomos excitados. O kernel $G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ está relacionado a emissão de fótons em $\mathbf{r}'$ e absorção em $\mathbf{r}$ e é determinado pela forma da linha espectral de emissão (normalizada) $\Theta(\nu)$ e o coeficiente de absorção $K(\nu)$ (para a teoria de formas das linhas espectrais, veja [129, 130]).

3.3 Superdifusão com Redistribuição de Frequência

O vapor atômico, em condições em que ocorre uma RCF dos fótons é caracterizado por uma superdifusão do tipo voos de Lévy. Contudo, a configuração em que ocorre RCF não é atingida instantaneamente, sendo necessários o mínimo de alguns ciclos de absorção e emissão espontânea para ocorrer uma RCF. A forma em que ocorre RPF e RCF, tem sido estudado teoricamente em [64, 63].

Para definir o perfil espectral de um vapor atômico, devemos considerar os três principais mecanismos alargadores de linha, natural, Doppler e colisional. Assim, sempre que pretendemos fazer medidas do perfil observado, é necessário considerar a convolução da forma intrínseca lorentziana com o perfil Doppler, devido às transformações entre o referencial do átomo em repouso e o referencial do laboratório.

Na ausência de colisões entre os átomos, as frequências de absorção e de emissão coincidem no referencial do átomo em repouso. Nesse caso, a colisão átomo-fóton é elástica e temos a existência de coerência completa entre a frequência absorvida e emitida. A diferença entre a frequência absorvida e a emitida, no referencial do laboratório, será provocada pela alteração da direção de emissão, que é aleatória. Por sua vez, independentemente do referencial adotado, quando essa coerência entre a frequência absorvida e emitida é completamente perdida, temos uma RCF.

Nesse contexto, uma vez que o perfil espectral de emissão do vapor atômico considerado nesse trabalho é caracterizado por uma RCF, por meio dos cenários de redistribuição de frequência, vamos apresentar em que condições podemos ter RCF. Esses cenários estão associados à frequência e a direção dos fótons emitidos.

Esses cenários são diferenciados, a princípio, pelo perfil de emissão intrínseco das espécies excitadas, atendendo apenas à alteração da frequência de emissão relativamente à de absorção, no referencial do átomo em repouso. A seguir, é necessário operar as transformações necessárias para transpor as funções de redistribuição do referencial atômico para o referencial do laboratório. Assim, temos que recorrer à distribuição de velocidade dos átomos, o que causa um desvio Doppler, no referencial do laboratório, entre as frequências de absorção e emissão. Assim, surge uma redistribuição da frequência, adicionalmente à já existente no referencial atômico.

Os cenários para a redistribuição de frequência são de três tipos, R_I , R_{II} e R_{III} .

3.3.1 Cenários R_I e R_{II}

Os cenários para a redistribuição de frequência R_I , R_{II} e R_{III} são definidos por terem uma RPF. Entretanto, para cada um desses cenários, depois de alguns ciclos de reabsorção e reemissão espontânea, temos uma RCF.

O cenário do tipo R_I é caracterizado por apresentar um perfil Doppler puro, que acontece quando a transição eletrônica se dá entre dois níveis infinitamente estreitos, onde ambos os níveis energéticos são estáveis e não têm tendência a decair, apresentado portanto tempos de vida média infinitos. Assim, não há alargamento natural dos níveis. Além disso, não existe alargamento colisional. É uma conjectura puramente teórica, mas útil porque permite isolar o efeito do alargamento de Doppler puro.

O cenário do tipo R_{II} é caracterizado, essencialmente, pela combinação de alargamento natural e Doppler. Nesse tipo de cenário, no referencial atômico, o espalhamento é elástico, ou seja, a frequência emitida é igual a frequência absorvida. Além disso, a função é determinada por dois regimes distintos; próximo do centro da linha $\delta = 0$ e distante do centro da linha, quando $\delta > \delta_{lim} = 1.7\Gamma_D$ [64].

Por exemplo, quando a excitação ocorre próximo do centro da linha, no referencial do átomo, a absorção e a emissão acontecem para $\delta_A = 0$. Contudo, no referencial do laboratório a emissão é redistribuída por efeito Doppler, o que resulta numa emissão no referencial do laboratório com largura Doppler em torno de $\delta = 0$.

Essa característica essencial do cenário do tipo R_{II} é observada para dessintonizações $\delta < \delta_{lim} = 1.7\Gamma_D$, onde o átomo tem uma componente de velocidade bem definida paralela ao fóton de entrada, assim como uma distribuição da componente de velocidade normal ao fóton de entrada centrada em zero [64], e a consequência disso é refletida numa rápida RCF com perfil de emissão Doppler.

Entretanto, quando a excitação ocorre longe da ressonância, para $\delta > \delta_{lim}$ (nas asas lorentzianas), a absorção no referencial atômico ocorre perto da frequência incidente $\delta_A \sim \delta$, pois não encontramos no vapor um átomo com velocidade alta o suficiente para trazer a frequência para $\delta_A = 0$. Portanto, a emissão ocorre fora da ressonância no referencial atômico, e no referencial do laboratório a frequência é alargada por efeito Doppler, porém continua em torno de δ .

Portanto, o cenário R_{II} é caracterizado por um perfil da absorção Voigt, onde o mecanismo de alargamento da linha espectral no referencial do átomo em repouso é apenas o alargamento natural. Contudo, no referencial do laboratório, a emissão é caracterizada por um perfil Doppler em torno de $\delta = 0$ para $\delta \leq \delta_{lim}$ e, com alargamento de Doppler em torno da frequência incidente para $\delta > \delta_{lim}$.

Em relação a distribuição do tamanho dos passos, uma função do tipo R_{II} representa o comportamento superdifusivo apenas na região, em torno de $\delta = 0$, onde o espectro de emissão é Doppler, resultando em voo de Lévy com $\alpha = 1.0$ [148].

Isso acontece porque a emissão nas asas lorentzianas não é bem definida. Pois nessa região, no referencial do átomo, a absorção ocorre perto da frequência incidente $\delta_A \sim \delta$ e é emitida nas mesmas condições (fora da ressonância), existe uma correlação entre a frequência do fóton absorvido e emitido, com redistribuição com alargamento Doppler fora da ressonância, em torno de δ , no referencial do laboratório.

Portanto, uma vez o fóton absorvido distante do centro da linha, será emitido apenas nas mesmas circunstâncias, contemplando apenas fótons emitidos fora da ressonância, o que causa uma espécie de truncagem no tamanho dos passos (que limita a distribuição do tamanho dos passos) [63]

Assim, nesse tipo de função, a distribuição do tamanho dos passo no limite assintótico de $x \rightarrow \infty$, não representa por completo o caráter superdifusivo dos fótons num vapor atômico.

3.3.2 Cenário R_{III}

O cenário R_{III} é caracterizado por apresentar uma combinação do alargamento Natural, Doppler e Colisional. A diferença essencial do cenário do tipo R_{II} com relação ao cenário do tipo R_{III} é que, neste último, no referencial do átomo, a frequência emitida é independente da frequência absorvida (colisão inelástica entre o fóton e o átomo).

No cenário R_{III} , os espalhamentos dos fótons se tornam inelásticos devido presença frequente de colisões entre os átomos, que faz com que a frequência de emissão no referencial do átomo seja distribuída numa lorentziana com $FWHM = \Gamma/(2\pi) = (\Gamma_N + \Gamma_C)/(2\pi)$. Nesse tipo de função há uma RCF com perfil Lorentz no referencial do átomo, que no referencial do laboratório sofre alargamento por efeito Doppler e forma um perfil de emissão Voigt.

Para um único espalhamento o perfil de emissão não é Voigt, pois carrega uma informação da velocidade do átomo que absorveu o fóton (RPF), mas após alguns espalhamentos ocorre RCF. O número de espalhamentos necessários para a RCF depende do parâmetro de Voigt a . Para $a = \Gamma/\Gamma_D > 1$, um espalhamento é suficiente para que ocorra RCF [41].

A RCF ocorre porque colisões afetam os átomos excitados, de modo que haja a quebra abrupta da fase de oscilação dos elétrons e, concomitantemente, perda de correlação entre as frequências dos fótons absorvidos e emitidos. Devido as colisões a RCF é atingida rapidamente, e o perfil de redistribuição das frequências é totalmente independente da frequência de absorção. Portanto, um fóton absorvido numa determinada frequência pode ser emitido numa variedade de frequências, inclusive na mesma frequência que foi absorvido.

Assim, nesse tipo de função, as asas lorentzianas estão acessíveis na emissão, ou seja, o perfil de emissão é Voigt com emissão em torno de $\delta = 0$. De um modo geral, para baixas densidades predomina o cenário R_{II} , e para altas densidades o cenário R_{III} . A passagem do cenário R_{II} para R_{III} não é bem definida, mas podemos, arbitrariamente, considerar que ocorre quando $\Gamma_C \approx \Gamma_N$.

Em relação a distribuição do tamanho dos passos, temos um perfil de emissão do tipo Voigt no referencial do laboratório, que abrange uma distribuição dos passos para todo tamanho de passo possível. Essa distribuição tem um comportamento de caráter dualista, ou seja, em torno de $\delta = 0$, temos uma distribuição dos passos com perfil Doppler, e para frequências em grande dessintonização $\delta > \delta_{lim}$, uma distribuição dos passos dado com perfil Lorentz.

A relação entre o valor da frequência de absorção e a distância x do tamanho do passo não é fechada. Contudo, a transição de regime de Doppler para Lorentz, manifesta-se através do parâmetro de Voigt a , onde quanto maior for o valor de a , mais rápido ocorre a transição do regime Doppler para o regime Lorentz.

Neste sentido, no cenário R_{III} , o caráter superdifusivo do aprisionamento ra-

diativo manifesta-se claramente e com o comportamento assintótico dos passos ($x \rightarrow \infty$) dado pelo perfil Lorentz.

3.4 Resultados Teóricos das Formas Espectrais

Uma vez apresentado os cenários de redistribuição de frequência, nesta seção, vamos apresentar os resultados teóricos que mostram que o aprisionamento de radiação é caracterizado por uma superdifusão do tipo voos de Lévy.

Isso foi mostrado em [36], onde de acordo com *Pereira et al*, a distribuição assintótica do tamanho do passo é agora dada em função da opacidade do vapor atômico r . Essa grandeza adimensional é definida em [63, 36] como uma função do tamanho dos passos x (Eq. 2.65). De acordo com essa definição, a opacidade do vapor é proporcional ao tamanho dos passos.

Para a distribuição do tamanho dos passos no vapor atômico, o tamanho dos passos está associado à região espectral do vapor acessível para a emissão, onde o tamanho do passo é maior quanto maior for a dessintonização.

Em *Pereira et al*, a distribuição assintótica do tamanho dos passos foi calculada considerando o vapor atômico infinito, onde segundo a Eq. 2.65, o limite assintótico quando $x \rightarrow \infty$ corresponde a $r \rightarrow \infty$. Assim, essa distribuição, assintoticamente, é dada segundo a lei de potência na Eq. 2.37, e permite determinar a distribuição do tamanho dos passos para os perfis de absorção Doppler, Lorentz e Voigt, assim como determinar transição de regime Doppler para Lorentz para fótons difundindo em vapor com perfil espectral de absorção Voigt.

Considerando o regime de RCF, vamos apresentar os resultados para o comportamento assintótico da distribuição do tamanho dos passos para os perfis Doppler, Lorentz e Voigt. As formas espectrais associadas com interações átomo-radiação ressonante são dadas por

$$K(\nu) = N\Sigma_0\Phi(\nu), \quad (3.19)$$

onde N é a densidade atômica, Σ_0 é seção de choque para o átomo em repouso no centro da linha e $\Phi(\nu)$ é a forma espectral normalizada, específica do regime de interação átomo-luz. $\Sigma_0 = \frac{\lambda^2}{(2\pi)(g_1/g_2)}$, onde λ é o comprimento de onda e (g_1/g_2) é a razão dos fatores de degenerescência [47].

De acordo com [36], a distribuição de probabilidade do tamanho do passo no regime assintótico quando $x \rightarrow \infty$ é, genericamente, dada por meio da opacidade do vapor atômico r e decai como uma lei de potência, tal que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(r) \sim \frac{1}{r^{1+\alpha}}, \quad (3.20)$$

onde r é a opacidade ou densidade ótica do vapor atômico no centro da linha e $0 < \alpha < 2$, definindo uma ampla distribuição.

De acordo com [36], o valor específico de α para as distribuições espectrais é obtido através da distribuição de tamanho do passo. Assim, devido a RCF, a distribuição de frequência dos fótons emitidos é dada pelo espectro de emissão, tal que, $\Theta(\nu) = cK(\nu)$.

Dessa maneira, a distribuição do tamanho do passo para uma única frequência ν é dado pela lei de Beer-Lambert, que em termos de opacidade do meio fica

$$p_\nu(r) = c\Phi(\nu)e^{-\Phi(\nu)r}. \quad (3.21)$$

onde a opacidade ótica r do vapor é adimensional.

Portanto, considerando o aprisionamento de radiação como um voo aleatório no vapor atômico, a distribuição do tamanho dos passos depende das formas espectrais. Assim, no regime de RCF, a distribuição do tamanho do passo leva em consideração a probabilidade de absorção para todas as frequências emitidas possíveis, que em termos de opacidade fica

$$P(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} c\Phi^2(\nu)e^{-\Phi(\nu)r} d\nu. \quad (3.22)$$

O valor específico do coeficiente α para uma dada distribuição espectral, pode ser obtido em [36] escrevendo

$$P(r) = -\frac{d^2 J(r)}{dr^2} \quad (3.23)$$

onde

$$J(r) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \exp(-\Phi(x)r)) dx \quad (3.24)$$

é uma função que simplifica a resolução da integral relacionada a $P(r)$.

3.4.1 Forma de Linha de Doppler

Para os átomos num vapor atômico ressonante, a forma da linha Doppler, obtida da distribuição de velocidade de Maxwell-Boltzmann é dada segundo a Eq. 1.59. Considerando que $\omega = 2\pi\nu$ temos

$$\Phi_D(\nu) = \frac{\Gamma_N \lambda}{4\sqrt{\pi}u} \exp(-\nu^2) \quad (3.25)$$

com a frequência reduzida $\nu = \frac{\delta}{ku}$, onde k é o número de onda, $u = \sqrt{2k_B T/m}$ é a velocidade mais provável dos átomos de massa m em temperatura T e k_B é

a constante de Boltzmann. A largura total a meia altura ($FWHM$) de $\Phi_D(\nu)$ é $\Gamma_D/2\pi = 2u/\lambda\sqrt{\ln(2)}$.

Para um perfil espectral, a existência dos voos de Lévy dos fótons está relacionada à RCF. Isso acontece porque a RCF leva em consideração a emissão nas asas do perfil de absorção. Embora a absorção nas asas da distribuição espectral seja pouco provável, quando ela acontece está relacionada a um longo passo dentro do vapor atômico.

Em virtude disso, podemos relacionar o comportamento assintótico dos perfis espectrais ao comportamento assintótico da distribuição de tamanhos dos passos. Para um perfil Doppler, de acordo com [36], as aproximações assintóticas da distribuição do tamanho dos passos é dada pela Eq. 3.20, e nos fornece

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} \frac{\ln(\ln(r))}{\ln(r)}. \quad (3.26)$$

onde a distribuição do tamanho dos passos para o perfil de absorção Doppler tem parâmetro de Lévy $\alpha > 1$, devido sua dependência com a opacidade. Isto é importante pois a situação Doppler tem tamanho médio dos passos finito. Entretanto, para $r \rightarrow \infty$, temos $\alpha = 1$, e a distribuição do tamanho dos passos é dada por

$$P_D(r) \sim \frac{1}{r^2(\sqrt{\ln(r)})} \sim \frac{1}{r^2}, \quad (3.27)$$

3.4.2 Forma de Linha de Lorentz

A forma homogênea da linha Lorentz reflete sistemas com alargamento homogêneo, devido, por exemplo, o decaimento radiativo espontâneo (alargamento natural) ou colisões (alargamento colisional). Portanto, o perfil Lorentz, na presença de alargamento colisional, como ilustra a parte imaginária susceptibilidade (Fig. 1.2 inferior) é dado por

$$\Phi_N(\nu) = \frac{\Gamma^2/4}{4\pi^2\delta^2 + \Gamma^2/4}, \quad (3.28)$$

onde $\delta = \nu - \nu_0$ é a dessintonização dos fótons em relação a frequência de transição ν_0 e $\frac{\Gamma}{2\pi} = \frac{\Gamma_N}{2\pi} + \frac{\Gamma_C}{2\pi}$ é a $FWHM$ da forma de linha Lorentz.

O perfil de absorção Lorentz está geralmente associado a uma distribuição do tamanho do passo $P(r)$, que abrange os longos passos dados pelos fótons (voos de Lévy) emitidos em grande dessintonia, em virtude da presença das longas caudas da distribuição.

Para a distribuição lorentziana, de acordo com [36], as aproximações assintóticas da distribuição do tamanho dos passos quando $r \rightarrow \infty$ são dadas pela Eq. 3.20, tal que

$$P_N(r) \sim \frac{1}{r^{3/2}}. \quad (3.29)$$

A relação da Eq. 3.29 com a equação 3.20 nos fornece $1 + \alpha = 3/2 \implies \alpha = 0.5$. Dessa forma, o aprisionamento de radiação em um vapor com perfil Lorentz pode ser descrito pelo parâmetro α , tal que $\alpha = 0.5$ com todos os momentos da distribuição do tamanho passo infinitos.

O comportamento superdifusivo (Voos de Lévy) para a forma espectral de Lorentz ($\alpha = 0.5$) é mais surpreendente do que para a forma espectral Doppler ($\alpha = 1.0$), porque as asas da distribuição lorentziana diminuem mais lentamente do que as asas da distribuição Doppler.

Dessa maneira, a probabilidade que um fóton seja reemitido com uma grande dessintonia e, portanto, viajar uma distância muito longa antes de ser absorvido, é maior na distribuição Lorentzian do que na distribuição Doppler.

3.4.3 Forma de Linha de Voigt

A distribuição espectral Voigt é uma convolução das linhas espectrais Doppler e Lorentz [149] e será o caso de estudo considerado nesse trabalho. Assim, as distribuições Doppler e Lorentz, anteriormente analisadas, demonstram uma característica importante das distribuições de Voigt.

Quando se atende ao comportamento das funções para o centro de linha $\delta = 0$ ou para tamanho dos passos pequenos (baixa opacidade), verifica-se que se manifesta claramente um comportamento do tipo de Doppler. Por outro lado, para frequências nas asas da distribuição ou para tamanhos de passos maiores (altas opacidades), o comportamento apresentado é equivalente ao das distribuições de Lorentz.

Como vimos, a forma da distribuição espectral Voigt é dada pela Eq. 1.62. Essa distribuição caracteriza a interação átomo-Luz de átomos submetidos a processos homogêneos de decaimento lorentziano (emissão espontânea, colisões, ...) e se movendo de acordo com velocidade seguindo uma distribuição de Maxwell-Boltzmann.

Também calculado por *Pereira et al* [36], a distribuição tamanho dos passos é resultado de um perfil Voigt que abrange os voos de Lévy do fóton independentemente do parâmetro de Voigt a .

Esta característica é verificada na topologia das trajetórias dos fótons, como demonstrado por [36]. As trajetórias descritas pelos fótons onde o meio apresenta distribuição espectral Voigt são regidas por comportamentos diferentes, conforme a escala.

Para distâncias pequenas (baixa opacidade), predomina uma distribuição do tipo Doppler, onde a trajetória é constituída por inúmeros passos, mas de reduzida

dimensão. Para uma escala maior (maior opacidade), prevalecem os grandes passos (voos de Lévy), apesar de serem em número muito reduzido, dando origem a uma trajetória superdifusiva com $\alpha = 0.5$ característico do perfil Lorentz.

Assim, a topologia das trajetórias de fótons em meios com perfis espectrais de Voigt é de dois tipos: a uma escala pequena é do tipo Doppler, enquanto que a escalas superiores é o tipo lorentziano que predomina.

Portanto, as distribuições com os perfis espectrais de Voigt, assintoticamente quando $r \rightarrow \infty$, coincidente com a distribuição de Lorentz, com parâmetro $\alpha = 0.5$ para qualquer valor de seu parâmetro a de Voigt.

3.5 Resultados Experimentais das Formas Espectrais

O parâmetro α foi calculado teoricamente para todos os perfis espectrais apresentados; Doppler, Lorentz e Voigt [36]. Entretanto, a confirmação experimental foi obtida apenas para os perfis Doppler [44] e Lorentz [41]. Para o perfil Voigt, essa confirmação experimental ainda não foi obtida, e é um dos propositos desse trabalho.

Nessa secção, vamos apresentar a confirmação experimental dos resultados teóricos obtidos em [36], para os valores de α do perfis espectrais Doppler e Lorentz, assim como o que esperamos medir experimentalmente para o perfil Voigt, levando em conta os resultados experimentais já medidos para os perfis Doppler e Lorentz.

3.5.1 Valor Experimental de α para o Perfil Doppler

O parâmetro α de Lévy foi medido experimentalmente para o perfil Doppler em [44], levando em consideração que possui uma distribuição do tamanho do passo $P(x)$, que assintoticamente quando $x \rightarrow \infty$ é dada por uma lei de potência do tipo $|x|^\mu$, com $\mu = 1 + \alpha$ e os momentos da distribuição dados pela Eq. 3.9.

Os resultados experimentais foram obtidos a partir de uma medida direta da distribuição do tamanho do passo $P(x)$, ou seja, no regime de um único espalhamento, onde um arranjo geométrico específico foi usado para isolar um único passo na sequência de espalhamento múltiplo.

Os espectros de emissão e absorção foram considerados puramente Doppler (negligenciando a linha de absorção natural) [44], então a distribuição do tamanho do passo único, assintoticamente, fica

$$P(x) \sim \frac{1}{x^2 \sqrt{\ln(x/l_0)}} \quad (3.30)$$

onde $l_0^{-1} = N\Sigma_0$, sendo N a densidade do vapor atômico e Σ_0 a secção de choque no centro da linha.

Na Fig. 3.3 é mostrado o arranjo específico utilizado para medir a distribuição de um único passo [44]. Nesse arranjo, a transmissão difusa de vapor de Rb oriunda da primeira célula é selecionada na direção do eixo longitudinal da célula que contém o vapor e, posteriormente, coletada numa segunda célula cilíndrica.

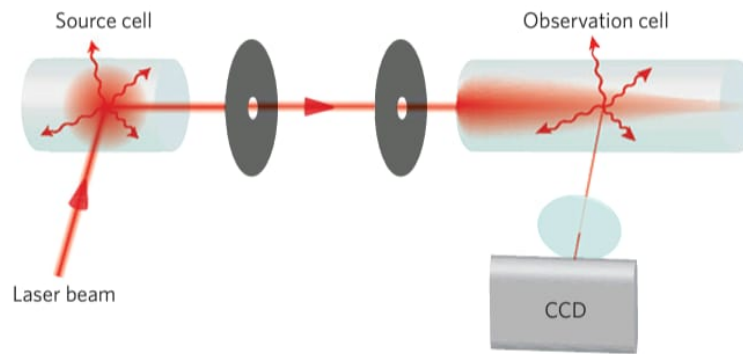


Figura 3.3: Um feixe de laser é incidente na célula fonte com vapor de Rb. A luz espalhada se propaga numa direção ortogonal e é selecionada com dois diafragmas, iluminando uma segunda célula de observação. A luz espalhada nesta segunda célula é coletada em uma câmera CCD resfriada. Este sinal de fluorescência é proporcional à função de distribuição de um único passo. Figura fonte [44].

A segunda célula tem o comprimento muito maior que o raio e a densidade é suficientemente baixa para que ocorra apenas um espalhamento, ou seja, o fóton absorvido quando emitido sai da célula e é transversalmente detectada por uma câmera CCD (câmera de carga acoplada).

Assim, é medido a probabilidade de um fóton ser espalhado após uma distância x ao longo do eixo transversal da célula, isto é, os fótons sofrem um decaimento visto pela intensidade emitida pela célula, onde a intensidade em função da distância x fornece diretamente a distribuição do tamanho do passo $P(x)$.

Assim, sendo o expoente $\mu = \alpha + 1$, a distribuição do tamanho do passo único teve como resultado um expoente $\mu = 2,41 \pm 0,12$. Portanto, num regime superdifusivo, o parametro $\alpha = 1,41$ foi medido experimentalmente para Perfil Doppler, como mostra a Fig. 3.4

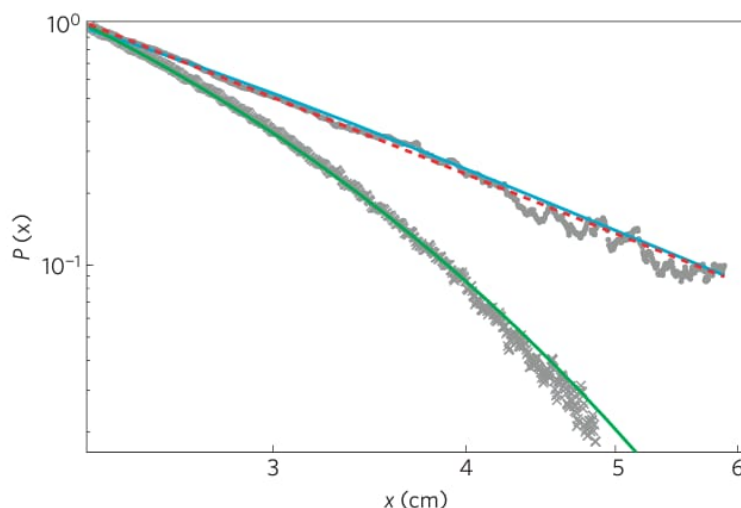


Figura 3.4: Para um feixe de laser monocromático incidente de frequência ω , foi mostrado que $P(x)$ tem diminuição exponencial, conforme mostrado pela linha e ajuste verde. Para uma situação com alargamento Doppler, $P(x)$ tem uma diminuição da lei de potência, bem ajustada por $P(x) \sim 1/|x|^\alpha$ com $\alpha = 1,41 \pm 0,12$ (linha tracejada vermelha), característica dos voos da Lévy. Figura fonte [44].

Portanto, este resultado está de acordo com [36], pois embora o regime Doppler esteja caracterizado uma superdifusão, a situação Doppler tem tamanho médio dos passos finitos. Além disso, esse resultado mostra que o regime assintótico não foi alcançado. Uma situação com medida indireta foi realizada em [40], onde através do processo de múltiplos espalhamentos foi medido distribuição do tamanho do passo, com $\alpha \sim 1$ para um perfil Doppler com superdifusão do tipo voos de Lévy.

3.5.2 Valor Experimental de α para o Perfil Lorentz

O parametro α de Lévy foi medido experimentalmente para perfil Lorentz utilizando vapor de Rb com alargamento colisional dado por 50 torr de gás He em [41]. A presença do alargamento colisional resulta numa distribuição do tamanho do passo dada pelo cenário R_{III} e, portanto, capaz de descrever os voos de Lévy do fóton no vapor atômico.

Nesse experimento, as colisões são muito frequentes, além disso, quando o alargamento colisional domina o alargamento Doppler, uma RCF ocorre para um único evento de espalhamento, dado por um perfil de emissão Voigt com grandes asas Lorentzianas [150].

O experimento que forneceu o resultado da medida do parâmetro α de Lévy para o perfil Lorentz, consistiu de uma célula em forma de disco de raio $R = 5.0$ cm e espessura interna $L = 6.5$ mm, de forma que, foi preenchida com uma mistura de ^{85}Rb , o isótopo ^{87}Rb e 50 torr de gás He , como mostra a Fig. 3.5. Assim, como mencionado, a largura colisional $\Gamma_C/2\pi \approx 1\text{GHz}$ é grande o suficiente para que a análise da linha D_2 do Rb, com $\lambda = 780\text{nm}$, seja aproximada por um perfil de Lorentz.

Para excitar os átomos, um feixe laser de Ti:Sa com $2.0\mu\text{W}$ potência, foi enviado perpendicularmente ao centro da célula aquecida à temperaturas que variam de 106°C a 180°C .

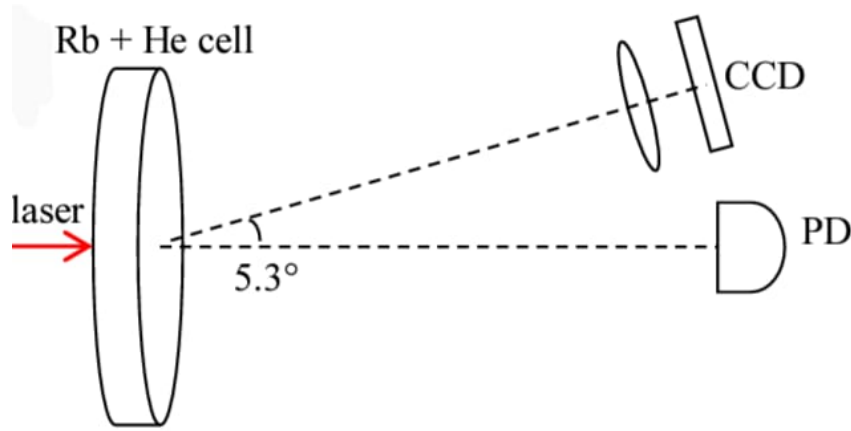


Figura 3.5: Um feixe laser de Ti:Sa com $2.0\mu\text{W}$ de potência e ressonante, excita a célula em forma de disco, cheia com vapor de Rb e 50 torr de gás He. Um fotodiodo (PD) grava a transmissão coerente e uma câmera CCD coleta a luz espalhada. Figura fonte [41].

Nesse experimento temos uma medida indireta, pois ao aquecer o vapor os

fótons sofrem um número muito grande de espalhamentos antes de deixar o vapor. Nesse regime, a RCF é atingida devido a presença de colisões frequentes dos átomos, onde a distribuição do tamanho do passo mesmo depois de múltiplos eventos de espalhamento é equivalente à distribuição para um único evento de espalhamento.

Após a célula, são coletadas a transmissão do feixe laser, que por meio do fit de curvas teóricas sobre as experimentais nos fornece a opacidade do meio, e a imagem da transmissão difusa em uma camera CCD para obter o perfil radial da transmissão, que carrega uma informação sobre a distribuição do tamanho dos passos dados pelos fótons no vapor atômico.

Assim, o perfil radial da transmissão difusa do vapor T guarda uma informação do parâmetro α . Segundo [41], o valor de α é determinado por meio de T na saída da célula, que tem um pequeno ângulo em torno do centro de intensidade máxima e é dado por

$$T \propto R^{-s} \quad (3.31)$$

onde $s = \alpha + 3$ e R é a distância radial ao centro da imagem do feixe, que numa região com R grande ($R = 3\text{cm}$) esta relação foi utilizada para determinar os voos de Lévy do fótons.

Nesse experimento, os fótons são ressonantes com a linha $F = 3$ ou $F = 2$, onde o comprimento da absorção dentro do vapor $l_a = L/r \ll L$, tal que, o primeiro evento de espalhamento ocorre logo na entrada, próximo da janela da célula.

A Fig. 3.6, mostra os resultados experimentais obtidos por meio do perfil radial de transmissão difusa em função da opacidade do meio para o perfil de Voigt.

Consolidado com simulações computacionais, os resultados experimentais do parâmetro α também foram obtidos da derivação da lei de Ohm modificada

$$T \propto r^{-\alpha/2} \quad (3.32)$$

Como resultado, foi extraído um parâmetro $\alpha = 0,5$ em um regime de espalhamento múltiplo do perfil radial da transmissão e da violação da lei de Ohm.

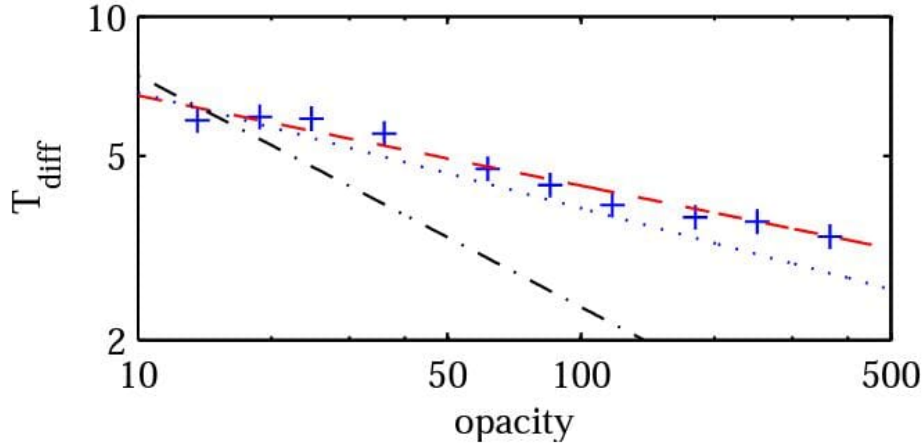


Figura 3.6: Transmissão difusa T_{diff} em função da opacidade. Os dados em azul são resultados experimentais da transmissão difusa; os dados em vermelho tracejado são ajustes teóricos da Eq. 3.32; os pontos em azul correspondem a um expoente de Lévy $\alpha = 0,5$ e os pontos pretos a um expoente 1.0 correspondente ao caso Doppler. Figura fonte [41].

3.5.3 Efeito de Truncagem no Voo de Lévy de Fótons

A superdifusão dos fótons no vapor atômico ressonante caracterizada pelos voos de Lévy, é um sistema que, inevitavelmente, pressupõe a existência de um corte no tamanho dos passos, que está sempre presente devido ao confinamento do vapor em uma célula óptica.

Dessa forma, dado que os voos de Lévy têm; variância infinita e forma analítica conhecida apenas para poucos casos especiais, o paradoxo da variância infinita pode ser resolvido introduzindo uma variante dos voos de Lévy, chamada Voo de Lévy Truncado (VLT), que tem variância finita [17].

O VLT é um processo aleatório, onde z é a soma das variáveis aleatórias (passos, por exemplo) dada pela Eq. 2.2. Assim, um VLT é caracterizado por uma distribuição de probabilidade $T(x)$, de forma que

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x > l \\ C_1 L(x), & -l \leq x \leq l \\ 0, & x < -l \end{cases} \quad (3.33)$$

onde

$$L(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\sigma k^\alpha) \cos(kx) dk, \quad (3.34)$$

é a distribuição estável de Lévy de índice $0 < \alpha \leq 2$ e fator de escala $\sigma > 0$ dada pela Eq. 2.28. C_1 é uma constante de normalização e l é o maior tamanho possível da variável aleatória que, no nosso caso, é o maior tamanho possível do passo $x = l$, expresso através da opacidade r do meio (tamanho da amostra).

Dessa forma, em [17], foi investigado a distribuição de probabilidade $P(z)$ do processo aleatório da Eq. 2.2 quando x é um VLT, isto é, um processo aleatório com distribuição de probabilidade dada pela Eq. 3.33, com interesse particular na probabilidade de retorno $P(z = 0)$, o qual foi estudada como uma função de n , l e α , onde n é o número de passos.

Em [17], o processo aleatório VLT, é caracterizado por uma convergência da soma dos n independentes VLT para uma distribuição gaussiana. Para pequenos valores de n , $P(z = 0)$ é uma distribuição de Lévy, e para grandes valores de n , $P(z = 0)$ converge para uma distribuição gaussiana, ou seja, considerando que agora a variância da distribuição dos passos é finita, após um número muito grande de passos a distribuição converge para uma distribuição gaussiana, com $\sigma_0(\alpha, l)$ o desvio padrão da distribuição dos VLT [17] dado por

$$\sigma_0(\alpha, l) = \left[\frac{2\Gamma(1 + \alpha) \sin(\pi\alpha/2)}{\pi(2 - \alpha)} \right]^{1/2} l^{(2-\alpha)/2}. \quad (3.35)$$

Uma importante informação desse trabalho, trata-se da transição entre os dois regimes, de difusão de Lévy para difusão normal, que é determinada por uma quebra de derivada, um crossover n_c entre os dois regimes, de forma que, para um determinado valor de l , o número de variáveis n necessárias para ver o crossover n_c aumenta com o valor de α [17], tal que

$$n_c = Al^\alpha \quad (3.36)$$

onde

$$A = \left[\frac{\pi\alpha}{2\Gamma(1/\alpha) \sqrt{\Gamma(1 + \alpha) \sin(\pi\alpha/2)/(2 - \alpha)}} \right]^{2\alpha/(\alpha-2)} \quad (3.37)$$

Portanto, como resultado de previsões teóricas e simulações numéricas, foi demonstrado a existência do controle dos parâmetros α e l para o qual a soma dos VLT necessita de um número enorme de variáveis independentes para convergir para um processo normal. A transição de regime do processo de Lévy para um processo gaussiano pode requerer um valor notavelmente grande de n , tipicamente $n = 10^4$, em contraste com um processo de difusão normal, que necessita de valores de $n = 10$ para convergir para uma distribuição gaussiana. Essa transição de regime é determinada pelo crossover n_c e carrega informações sobre os parâmetros relevantes do regime subjacente ao processo aleatório, como podemos observar na Fig. 3.7.

Como uma distribuição de passos com variância finita, os VLT obedecem o TCL, pois o comportamento assintótico distribuição para um número incrivelmente grande de passos resulta numa distribuição gaussiana. Para $n \ll n_c$, uma violação do TCL é observada como podemos observar na Fig. 3.7.

Como resultado importante para nosso trabalho, temos que, através da investigação da probabilidade de retorno $P(z = 0)$ desse processo aleatório de variância finita, o estudo dos VLT mostrou um crossover n_c entre os regimes de difusão de Lévy e difusão Normal, o qual mostra uma distribuição de probabilidade semelhante a uma distribuição de Lévy para um longo, mas finito, número de variáveis independentes n .

Esse estudo se reflete em nosso trabalho, uma vez que, o conhecimento de α e l no sistema físico pode ser útil para caracterizar totalmente os voos de Lévy no vapor atômico.

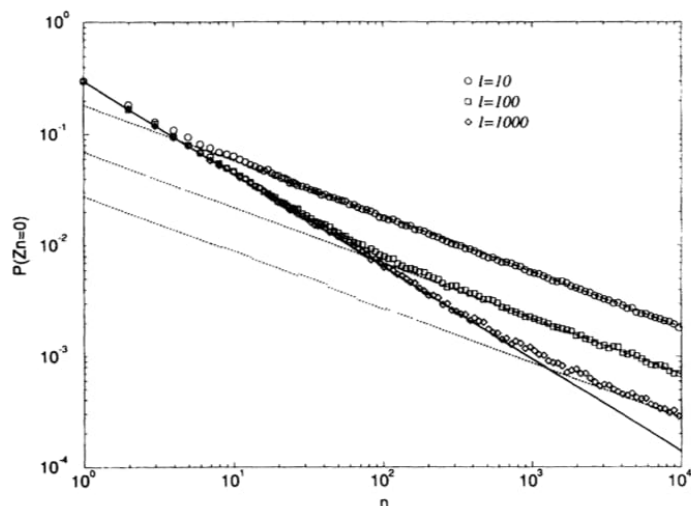


Figura 3.7: Simulação numérica da probabilidade de retorno $P(z = 0)$, onde z é a soma dos VLT de parâmetro $\alpha = 1.2$. Três diferentes valores de comprimento $l = 10, l = 100, l = 1000$ são mostrados. O regime para pequenos valores de n é mostrado como uma linha sólida, enquanto o regime assintótico para grandes valores de n é mostrado como uma linha pontilhada, um para cada valor de l . Os valores de desvio padrão dos VLT $\sigma_0(\alpha, l)$, usados para plotar as linhas pontilhadas, foram calculados numericamente. O crossover n_c entre os dois regimes assintóticos aumenta muito quando l cresce. Para o caso $l = 1000$, o comportamento muito perto do previsto para um voo Lévy é observado para $n = 1000$. Figura fonte [17]

3.6 Objetivo do Trabalho

Doravante, de posse dos resultados anteriormente vistos, podemos apresentar o objetivo desse trabalho, assim como o que esperamos como resultado na caracterização dos voos de Lévy dos fótons no vapor atômico.

Em síntese, o aprisionamento de radiação em vapores atômicos pode ser encarado como um processo de difusão da radiação. Contudo, esse processo de difusão não é uma difusão normal, mas uma superdifusão do tipo voos de Lévy [36].

Na superdifusão, os múltiplos processos de reabsorção e reemissão espontânea são suficientes para a ocorrência de *RCF* dos fótons, assim os espectros atômicos de absorção e emissão do vapor coincidem e são descritos por um perfil de Voigt (Fig. 3.8), entendido como uma convolução dos perfis Doppler e Lorentz.

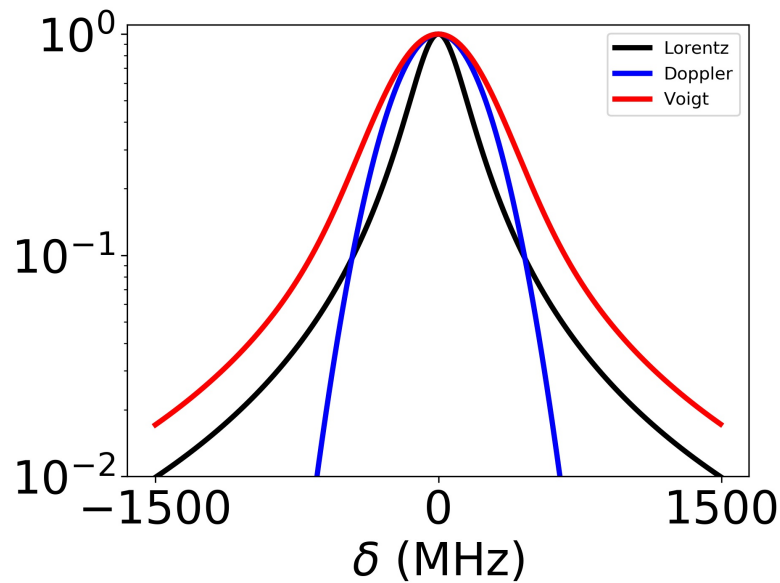


Figura 3.8: O perfil de Voigt com parametro de Voigt $a > 1$ (curva vermelha) formado pela convolução do perfil Doppler (curva azul) e perfil de Lorentz (curva preta)

O perfil Voigt apresenta propriedades de ambas as distribuições e pode ser do tipo Doppler ou do tipo Lorentz, conforme o valor do parâmetro de Voigt. À medida que o parâmetro de Voigt aumenta o perfil assume uma forma Lorentziana, uma vez que a largura natural aumenta, relativamente à de Doppler. Isto verifica-se por observação na Fig. 3.8 onde para um parâmetro de Voigt $a > 1$ as asas da distribuição, tipicamente lorentzianas, passam a ter uma importância superior. Entretanto, quando o parâmetro a diminui, o perfil aproxima-se de uma forma gaussiana.

Portanto, quando o regime de *RCF* é atingido, o perfil de absorção do vapor define a distribuição do tamanho dos passos, que no regime assintótico é dado pela lei de potência da Eq. 3.20.

A distribuição do tamanho dos passos no regime assintótico foi verificada para o perfil Doppler com $\alpha = 1.0$ [36], o que corresponde a uma distribuição com variância infinita e média finita. Para o perfil Lorentz foi obtido $\alpha = 0.5$ [36], o que corresponde a uma variância e uma média infinita, evidenciando a presença de dois regimes na distribuição do tamanho dos passos para um perfil absorção Voigt.

A partir da Eq. 3.22, podemos entender a distribuição do tamanho dos passos para perfil espectral Voigt na Fig. 3.8. Para pequenas dessintonizações, em torno de $\delta = 0$, os fótons emitidos nessa região fazem passos de pequeno tamanho, pois nessa região o coeficiente de absorção maior, quando comparado com a região das asas lorentzianas ($\delta \gg 0$) que diminui bastante. Em virtude da diminuição excessiva do coeficiente de absorção evidenciada pela acentuada diminuição nas asas do perfil de absorção, os fótons que são emitidos nessa região fazem longos passos que dominam o transporte.

Assim todo o perfil espectral Voigt é caracterizado pela presença dos voos de Lévy, que ocorrem em pequeno número comparado ao total de passos, e tem sua origem relacionada a probabilidade do fóton ser emitido em grande dessintonia, nas asas do perfil Lorentz. Embora os voos de Lévy ocorram em pequeno número, eles regem a estatística do sistema e dominam o transporte. O perfil espectral de absorção Voigt por ser dominado pelas asas lorentzianas possui parâmetro $\alpha = 0.5$ [36] em concordância com o perfil Lorentz.

O parâmetro α de Lévy foi obtido no regime assintótico da distribuição do tamanho dos passos em vapores com distribuições espectrais de Doppler, Lorentz e Voigt, considerando os meios como infinitos. Entretanto, na prática, não temos meios infinitos. Por exemplo, nossa amostra de vapor atômico é finita e de comprimento $L = 3.0$ cm. A consequência disso traz consigo uma truncagem no tamanho do passo denominada VLT previsto em [17].

Assim, o tamanho máximo do passo no vapor atômico corresponde ao tamanho da amostra e, portanto, a variância do tamanho dos passos, diferentemente

do apresentado para um sistema infinito, é finita, devido ao limite de integração imposto pelo tamanho da amostra na definição da variância do passo. Portanto, para todo sistema real um voo de Lévy converge para uma difusão normal. Contudo essa convergência é lenta e necessita de um número enorme de passos, que é proporcional ao tempo de vida do estado excitado [17].

Dessa maneira, um VLT é uma truncagem no tamanho da amostra, o que modifica as características do transporte. Para entendermos o efeito de truncagem dos voos de Lévy dos fótons em vapor atômico, cálculos numéricos da distribuição do tamanho dos passos foram implementadas para auxiliar na interpretação dos resultados.

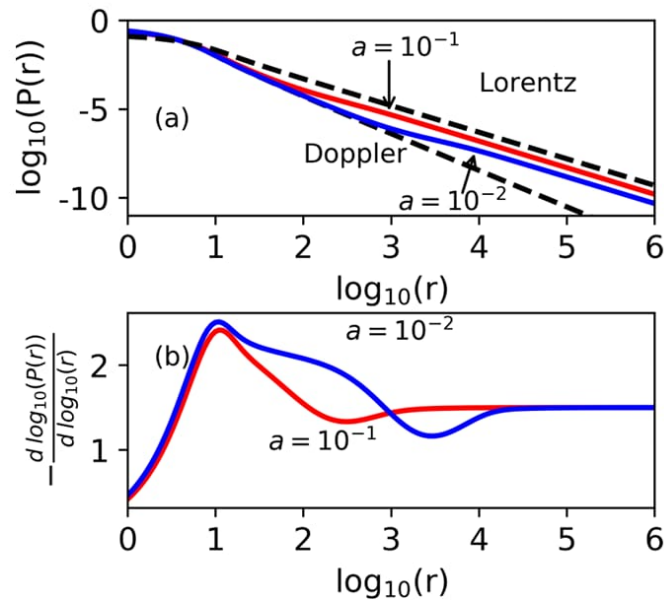


Figura 3.9: (a) Distribuição de probabilidade de tamanho do passo $P(r)$ calculada da Eq. 3.22 para perfis de absorção Voigt com os parâmetros $a = 10^{-2}$ (linha azul) e $a = 10^{-1}$ (linha vermelha). O $P(r)$ também é mostrado para perfis de absorção Doppler e Lorentz como linhas tracejadas. (b) Cálculo da $\frac{d \log_{10}[P(r)]}{d \log_{10}(r)}$ para $P(r)$ para perfis de absorção Voigt com os parâmetros $a = 10^{-2}$ (linha azul) e $a = 10^{-1}$ (linha vermelha). Figura fonte [148].

A Fig. 3.9 mostra as previsões teóricas da distribuição do tamanho dos passos em função da opacidade dada pela Eq. 3.22, onde a opacidade do vapor é obtida a partir da Eq. 2.65. Isso foi feito para dois perfis espectrais de absorção Voigt dados pela equação Eq. 1.62, com parâmetros de Voigt $a = 10^{-2}$ e $a = 10^{-1}$ (curva azul) e (curva vermelha), respectivamente.

Na Fig. 3.9 (a), observamos para os dois perfis Voigt que abaixo 10^1 de opacidade (baixas opacidades), $P(r)$ se aproximaria do resultado esperado para um perfil Doppler. Entretanto, acima de 10^4 de opacidade (altas opacidades), $P(r)$, para os dois perfis Voigt, se aproxima dos resultados esperados para perfil Lorentz. Além disso, a transição do regime Doppler para o regime Lorentz acontece mais rápido quanto maior for o parâmetro de Voigt. Para o perfil Voigt com $a = 10^{-1}$ essa transição acontece em torno de 10^2 de opacidade, e para o perfil Voigt com $a = 10^{-2}$ essa transição acontece em torno de 10^3 . Por sua vez, a Fig. 3.9 (b) mostra a evolução do parâmetro α de Lévy em função da opacidade, onde o valor de α cresce igualmente para os dois perfis Voigt até atingir um máximo em torno de 10^1 de opacidade. Seguidamente, o valor do parâmetro α diminui para os dois perfis Voigt, diminuindo mais rápido para o perfil Voigt com parâmetro $a = 10^{-1}$ do que para o perfil Voigt com parâmetro $a = 10^{-2}$, o qual é caracterizado por um platô. Depois, para ambos os perfis Voigt acontece um mínimo do valor de α , seguido da convergência para $\alpha = 0.5$ acima de 10^4 de opacidade.

Assim, considerando sistemas finitos, embora um vapor atômico seja caracterizado pelo perfil Voigt, as informações sobre a superdifusão dos fótons são dadas pelo parâmetro α de Lévy, o qual depende do tamanho do sistema.

Por exemplo, na Fig. 3.10, temos um esboço teórico do tamanho médio do passo (Eq. 3.6) em função da dessintonização do fóton emitido, o qual é comparado com o tamanho da célula $L = 3.0$ cm para baixas e altas densidades do vapor atômico.

Para o regime de baixas densidades do vapor atômico (curva azul), as asas lorentzianas não estão acessíveis para a emissão e, portanto, predomina o núcleo Doppler, onde somente fótons emitidos em torno de $\delta = 0$ participam da caminhada aleatória (são espalhados pelo vapor).

Entretanto, para altas densidades do vapor atômico (curva vermelha), as asas lorentzianas estão acessíveis para a emissão e, portanto, a distribuição do tamanho dos passos abrange toda a célula de comprimento $L = 3.0$ cm, onde os fótons emitidos com grande dessintonização, nas asas do perfil Lorentz, são espalhados no vapor e dominam o transporte, evidenciando uma correlação entre o tamanho da amostra, a região espectral do fóton emitido e o parâmetro α .

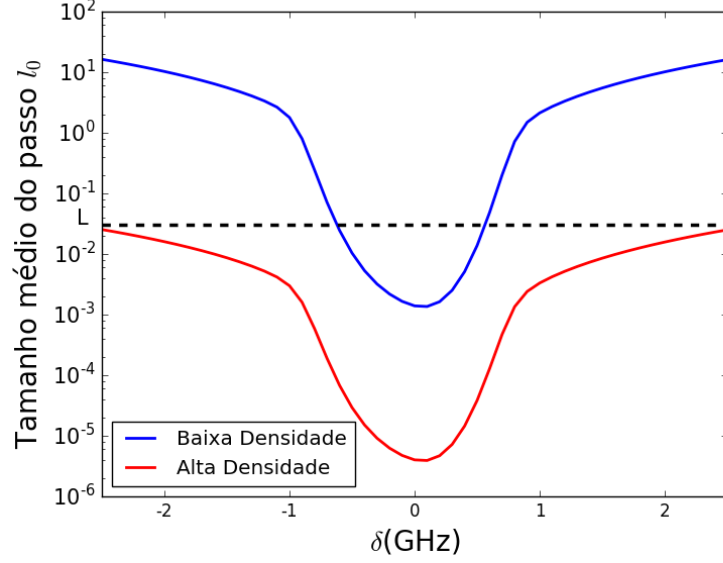


Figura 3.10: Comprimento médio de absorção para um fóton emitido com dessintonia δ para um perfil de Voigt, com parametro de Voigt a variando de 10^{-2} (curva azul) para $a = 10^{-1}$ (curva vermelha). O comprimento da célula é representado pela linha preta pontilhada em $L = 3 \times 10^{-2}m$

Assim, para baixas opacidades (densidades) do vapor, quando comparamos a distribuição do tamanho dos passos com a magnitude do sistema (célula de comprimento L), a distribuição do tamanho dos passos é caracterizada pelo núcleo Doppler, pois nessa região somente os fótons emitidos em torno do centro da linha participam da caminhada aleatória, uma vez que os fótons emitidos em grande dessintonização, nas asas do perfil Lorentz, dão um passo maior que o tamanho do sistema e, portanto, não participam da caminhada aleatória.

Essa situação é evidenciada nas medidas em [44], onde devido as baixas densidades do vapor a distribuição do tamanho do passo foi medida experimentalmente para um perfil de absorção Doppler com $\alpha = 1,41$, um resultado esperado, considerando o fato desse sistema ser caracterizado por um perfil Voigt e o meio ter baixa opacidade, de modo que, somente os fótons emitidos na região Doppler participam da caminhada aleatória.

Para altas opacidades (densidades), os fótons emitidos nas asas lorentzianas agora participam da caminhada aleatória, pois realizam passos da mesma magnitude do tamanho do sistema (célula de comprimento L), e são reabsorvidos pelo vapor, como podemos observar na Fig. 3.10, onde a distribuição do tamanho dos passos no vapor atômico, quando comparada com tamanho da célula, abrange os

passos dados pelos fótons emitidos em grande dessintonização, nas asas lorentzianas.

Dessa forma, para altas densidades, os fótons emitidos em grande dessintonização são reabsorvidos e fazem uma caminhada aleatória com distribuição do tamanho do passo dada pelo perfil Lorentz e, portanto, uma distribuição do tamanho do passo para perfil de perfil Voigt com $\alpha = 0.5$ como previsto por [36].

Portanto o parâmetro α depende da opacidade (tamanho da amostra), uma vez que o tamanho finito de amostras reais introduz um corte nos longos saltos dados pelos fótons [17], o que resulta num parâmetro α que dependente do tamanho do sistema [37, 14]. Assim, nesse trabalho, de posse das informações obtidas na caracterização dos fótons no vapor atômico, esperamos medir o parâmetro α para o perfil Voigt, assim como a variação do parâmetro α em função do tamanho do sistema e, portanto, entender o efeito de truncagem no espalhamento dos fótons no vapor atômico.

Em outras palavras, como o perfil Voigt é a convolução do perfil Doppler e Lorentz, para o perfil Voigt, esperamos obter dois valores de α diferentes; um valor com $\alpha \geq 1$ que está relacionado ao regime Doppler, e outro valor com $\alpha \approx 0.5$ que está relacionado ao regime lorentziano, onde o valor de α vai depender da opacidade do meio.

Capítulo 4

Arranjo Experimental

Nesse capítulo, vamos descrever o arranjo experimental desenvolvido para o estudo da superdifusão dos fótons num vapor atômico com perfil de absorção Voigt. A Fig. 4.1 representa o arranjo experimental que será descrito doravante.

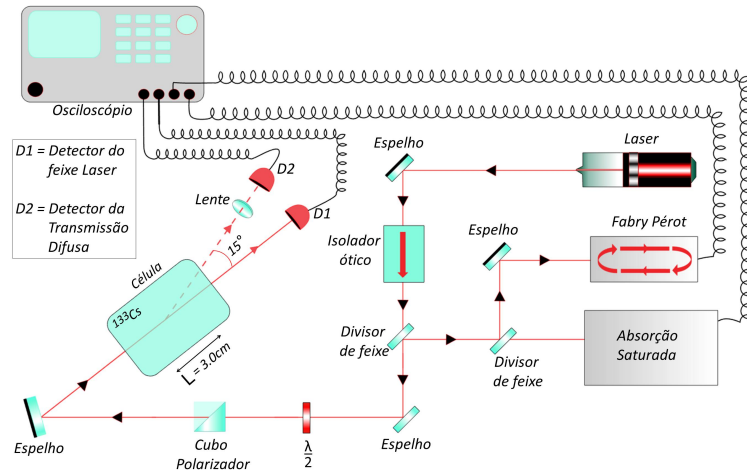


Figura 4.1: Montagem experimental desenvolvida para medidas da transmissão difusa da luz, após a excitação do vapor atômico de césio pelo laser com frequência correspondente a transição da linha D_2 ($6S_{1/2}(F = 4) \rightarrow 6P_{3/2}(F' = 3, 4, 5)$ do ^{133}Cs)

Nosso arranjo experimental consiste, basicamente, numa célula com vapor atômico de césio aquecido, onde um feixe laser de baixa potência ($\sim 30\mu\text{W}$ e 1.25mm

de diâmetro) e comprimento de onda $\lambda = 852.34$ nm, correspondente a transição da linha D_2 do césio, passa pela amostra (vapor atômico de ^{133}Cs). Ao cruzar o vapor atômico, o feixe laser, quando ressonante com a transição da linha D_2 , do césio é atenuado, e ao deixar o vapor é coletado pelo detector $D1$.

Por sua vez, os fótons absorvidos da radiação (laser) realizam uma caminhada aleatória no vapor atômico, por meio de sucessivos eventos de reabsorção e reemissão espontânea (aprisionamento de radiação) até atingirem os limites da célula e deixarem o vapor.

A luz difusa (transmissão difusa) gerada pelos fótons que deixam o vapor passa por uma lente com distância focal de 5.0 cm e é coletada pelo detector $D2$, o qual faz um ângulo $\Theta = 15^\circ$ em relação a transmissão do feixe laser. Esse ângulo relativamente grande é usado para minimizar a detecção da transmissão de luz coerente dispersa. Ângulos maiores foram testados com os mesmos resultados.

Assim, relacionando a lei de Beer-Lambert com a transmissão do feixe laser, medimos a densidade atômica da amostra N e, consequentemente a opacidade r , o qual foi obtida em função de N segundo a Eq. 2.67. A célula que contém o vapor tem comprimento $L = 3.0$ cm. Como o tamanho da amostra é fixo, variamos e opacidade em função da densidade atômica.

Para determinar o parâmetro α de Lévy, medimos a transmissão difusa da luz $T(r)$ em função da opacidade da amostra r . A relação entre a transmissão difusa da luz e a opacidade é dada por meio da lei de Ohm modificada segundo a Eq. 2.66 [41, 107, 40], a qual permite medir o valor de α , experimentalmente, através dos dados obtidos para $T(r)$ e r . Portanto, neste capítulo, farei uma breve explicação dos principais componentes e de como os dados são obtidos.

4.1 Estrutura atômica do Césio

O césio utilizado em nosso experimento, o isótopo ^{133}Cs , é um metal alcalino, líquido em temperatura ambiente, além de muito reativo com a água. Esse átomo de césio possui número atômico $Z = 55$ e, portanto, segundo a distribuição eletrônica dada pela regra de Pauli, contém apenas 1 elétron na camada de valência.

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 6s^1 \quad (4.1)$$

Assim, com apenas 1 elétron na camada de valência, no nível $6s$, o elétron, nesse nível, pode ser excitado para subníveis superiores. Classicamente, o elétron gira em torno do núcleo atômico com momento angular $\vec{L}$. Entretanto, devemos também considerar os momentos angulares de spin do elétron $\vec{S}$ e do núcleo $\vec{I}$ que originam, respectivamente, o acoplamento spin-momento angular orbital e spin-núcleo.

No acoplamento spin-momento angular orbital, no referencial do elétron, o núcleo orbita em torno do elétron e produz um campo magnético que interage com o spin do elétron dando origem a estrutura fina do átomo $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, onde o número quântico correspondente a $\vec{J}$ deve estar no intervalo $|L - S| \leq J \leq L + S$. Por sua vez, no acoplamento spin-núcleo, no referencial do núcleo, o elétron orbita em torno do núcleo e produz um campo magnético que interage com o spin do núcleo dando origem a estrutura hiperfina do átomo $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$.

As propriedades ópticas do Cs estão relacionadas à linha D, a qual corresponde à transição $L = 0 \rightarrow L = 1$. Como a energia de qualquer nível atômico do Cs é deslocada de acordo com o valor de $\vec{J}$, a linha D possui duas componentes; a linha D_1 referente à transição ($6^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{1/2}$) e a linha D_2 referente à transição ($6^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{3/2}$).

Para o estado fundamental do Cs, temos $L = 0$ e $S = 1/2$, que fornece o momento angular total $J = 1/2$. Entretanto, para o primeiro estado excitado, temos $L = 1$ e $S = 1/2$ que nos fornece $J = 1/2$ ou $J = 3/2$, resultando em duas linhas para excitação óptica que definem a estrutura fina do césio. A Fig. 4.2 mostra as linhas D_1 e D_2 , com comprimentos de onda 894 nm e 852 nm, respectivamente.

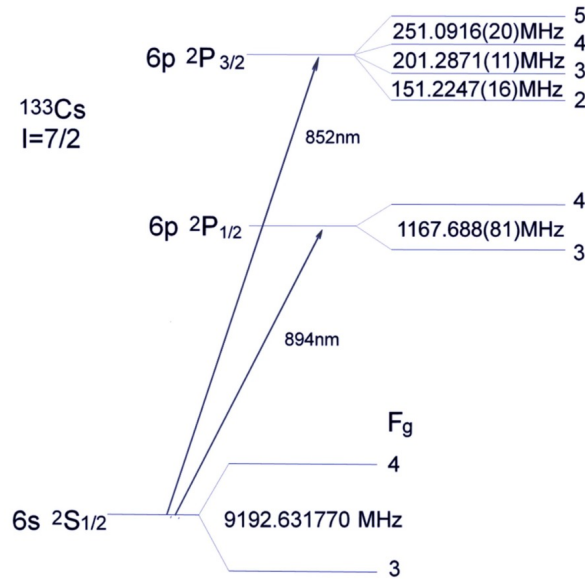


Figura 4.2: Linhas D_1 e D_2 do césio com a estrutura hiperfina para os níveis fundamentais e excitados, correspondendo, respectivamente, aos comprimentos de onda 894 nm e 852 nm.

Destas duas componentes, a transição D_2 é de muito mais relevância para os atuais experimentos de óptica quântica e atômica, porque tem uma transição cí-

clica que é utilizada para esfriar e aprisionar o césio, assim é usada rotineiramente em experimentos para resfriamento a laser, condensação de Bose-Einstein e aprisionamento de radiação.

Dessa forma, por ser um metal alcalino naturalmente abundante e líquido à temperatura ambiente, vapor do isótopo de ^{133}Cs foi utilizado, em nosso experimento, como meio difusor de fótons para o estudo da superdifusão de fótons em vapores atômicos.

4.1.1 Linha D2 do Césio

Considerando agora a interação do spin nuclear I com o momento angular total do elétron J , o acoplamento destes momentos angulares origina um novo deslocamento dos níveis formando o momento angular total do átomo $F = I + J$ com valores $|J - I| \leq F \leq J + I$. Essa estrutura energética resultante é menor que a estrutura fina, pois o núcleo tem massa maior que o elétron. Assim, a estrutura energética resultante é conhecida como estrutura hiperfina (hfs) e é descrita pelo hamiltoniano [151],

$$H_{hfs} = A\mathbf{I} \cdot \mathbf{J} + B_{hfs} \frac{3(\mathbf{I} \cdot \mathbf{J})^2 + 3/2\mathbf{I} \cdot \mathbf{J} - I(I+1)J(J+1)}{2I(2I-1)J(2J-1)}, \quad (4.2)$$

onde o deslocamento dos níveis de energia devido à interação hiperfina pode-se escrever como

$$\Delta E_{hfs} = \frac{1}{2}hAK + hB \frac{3/2K(K+1) - 2I(I+1)J(J+1)}{2I(2I-1)2J(2J-1)} \quad (4.3)$$

sendo $K = F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)$ e A e B são dois parâmetros experimentais. O deslocamento energético entre dois níveis adjacentes fica

$$\Delta E_{hfs}(F) - \Delta E_{hfs}(F-1) = hAF + 3hBF \frac{F^2 - I(I+1) - J(J+1) + 1/2}{2I(2I-1)J(2J-1)} \quad (4.4)$$

de modo que F especifica o valor mais alto do momento angular total, onde cada um destes estados dos metais alcalinos ainda é desdobrado em $(2I+1)(2J+1)$ subníveis Zeeman. A interação da luz com todas as transições existentes entre o estado fundamental e os subníveis excitados é regida por certas regras de seleção que devem ser cumpridas, o que limita o número de transições, em princípio possíveis.

Cada nível hiperfino contém $2F + 1$ subníveis magnéticos, os quais são degenerados na ausência de interação com campos magnéticos. Entretanto, a presença de um campo magnético externo $\mathbf{B}$ causa um desdobramento em cada nível hiperfino quebrando esta degenerescência, onde a interação do átomo com um campo magnético externo é descrita pelo hamiltoniano $H_{ZE} = -\mu \cdot \mathbf{B}$.

A linha $D2$ ($6S_{1/2} \rightarrow 6P_{3/2}$) é dada pela transição $L = 0 \rightarrow L = 1$, de forma que, com spin nuclear $I = 7/2$, o átomo de Cs no estado fundamental tem $L = 0$ e $S = 1/2$ que fornece $J = 1/2$ e $F = 3, 4$ (nível $6S_{1/2}$). Ademais, para o primeiro estado excitado temos $L = 1$, logo $J = 1/2$ e $F = 3, 4$ (nível $6P_{1/2}$) ou $J = 3/2$ e $F = 2, 3, 4, 5$ (nível $6P_{3/2}$),

4.2 Componentes do Arranjo Experimental

O arranjo experimental da Fig 4.1 consiste de alguns elementos principais, que serão descritos doravante, tais como: Laser Semicondutor, Isolador Ótico, Lâmina de Meia-Onda, Cubo Polarizador, Cavidade Fabry-Pérot, Absorção Saturada e célula com vapor atômico. Dessa forma, cada componente mencionada será discutido com sua finalidade voltada para nosso arranjo experimental (Fig 4.1).

4.2.1 Laser Semicondutor

Um laser de semicondutor é um dispositivo constituído por materiais semicondutores, com meio de ganho formado por uma junção do tipo $p - n$. O bombeio ótico ocorre quando essa junção é atravessada por uma corrente elétrica, o qual é responsável pela emissão de luz laser (recombinação direta). Esta corrente elétrica possui um limiar de operação I_L , onde acima deste valor mínimo de corrente elétrica ocorre uma amplificação e maior produção de radiação por emissão estimulada [153]. Isso pode ser observado na Fig. 4.3 que mostra um limiar de corrente $I_L = 45$ mA para o laser semicondutor utilizado em nosso experimento.

A estrutura básica de um laser semicondutor é mostrada na Fig. 4.4. A camada ativa (camada de emissão de luz) entre as camadas revestidas do tipo p e n (dupla heteroestrutura) é formada em um substrato do tipo n , e a voltagem é aplicada através de eletrodos na junção $p - n$.

A luz é gerada pelo fluxo da corrente direta para uma junção $p-n$. Na operação de polarização direta, a camada do tipo p (que contém falta de elétrons, ou excesso de buracos) é conectada ao terminal positivo e a camada do tipo n (que contém excesso de elétrons) é conectada ao terminal negativo. Ambas as bordas da camada ativa têm uma superfície semelhante a um espelho. Quando a voltagem direta é aplicada, os elétrons se combinam com buracos na junção $p - n$ e emitem a luz.

Essa luz emitida ainda não é um laser; pois está confinada na camada ativa devido o índice de refração das camadas revestidas ser menor do que o da camada ativa. Além disso, ambas as extremidades da camada ativa atuam como um espelho refletor, fazendo a luz alternar entre as extremidades altamente reflexivas da camada ativa. Em seguida, quando a corrente atinge seu limiar, a luz é amplificada pelo processo de emissão estimulada e a oscilação do laser é gerada [154]. Assim,

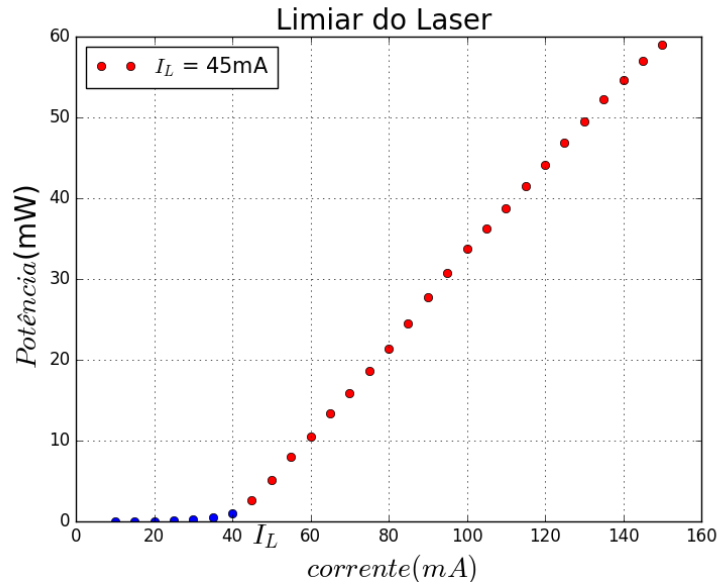


Figura 4.3: Representação gráfica do limiar de corrente do laser I_L . Para o laser utilizado em no arranjo experimental $I_L = 45$ mA

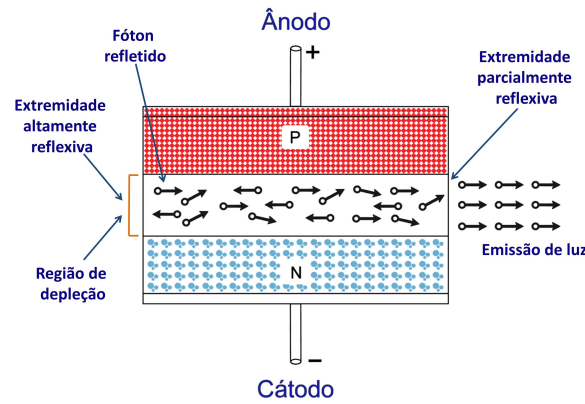


Figura 4.4: Esquema de uma laser semiconductor em heteroestrutura. Uma corrente I é utilizada como sistema de bombeamento; p indica que o material possui buracos como portadores majoritários e n indica que o material possui elétrons como portadores majoritários

o comprimento de onda central de um laser diodo (LD) depende, principalmente,

da energia do gap do semiconductor da camada ativa. No entanto, os detalhes dos espectros do laser são diferentes dependendo dos tipos de LD, pois a energia do intervalo de bandas depende do material semiconductor da camada ativa.

Nosso feixe laser provém de um diodo laser semiconductor (Fig.4.5), com cavidade externa constituída por grade de difração (*Toptica Photonics, DL pro*) operando na configuração Littrow [155]. Tal diodo laser, estabilizado em temperatura, tem um comprimento de onda de funcionamento típico de 852,34 nm, largura de linha da ordem de 1.0 MHz e uma potência máxima de saída de 75 mW. Ajustes preliminares do comprimento de onda de emissão do diodo laser próximo a transição de linha ressonante D_2 do Cs foram realizados alterando manualmente o o ângulo da grade de difração. A variação da frequência do diodo laser é então realizada aplicando uma rampa de voltagem a um transdutor piezoelétrico que altera o ângulo da grade de difração e, portanto, o comprimento de onda de emissão.

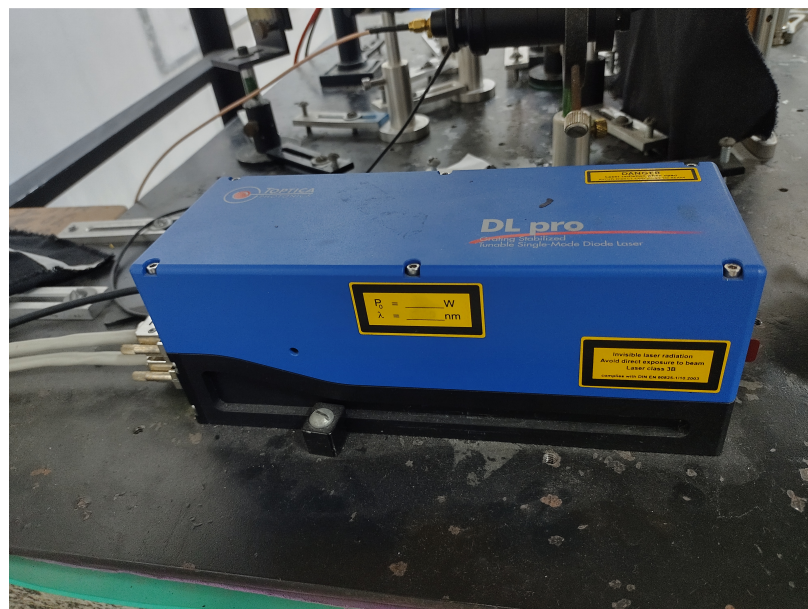


Figura 4.5: Diodo Laser utilizado como fonte de luz.

O diodo laser comercial Toptica pro tem uma sintonia de frequência livre de salto de modo em torno de 6.0 GHz facilmente alcançada. O diodo laser é ainda alimentado por uma fonte de corrente e um sistema com controlador de temperatura. A fonte de corrente fornece uma corrente em torno de 150 mA para emitir 75,0 mW de potência no comprimento de onda de 852,34 nm (comprimento de ressonância da linha D_2 do Cs) em modo contínuo. Já o controlador de temperatura estabiliza a temperatura através de um elemento Peltier integrado ao suporte

comercial do laser, onde uma temperatura $24,8^\circ$ é utilizada em paralelo à corrente de 147 mA para manter o laser ressonante com a linha $D2$ do Cs .

4.2.2 Isolador Ótico

O feixe resultante que se propaga ao sair da cavidade (meio laser) é colimado e, no intuito de evitar que parte do feixe retorne ao meio de ganho após eventuais reflexões no experimento, passa por um isolador ótico, dispositivo ótico cujo funcionamento é baseado no efeito Faraday (ver Fig.4.6).

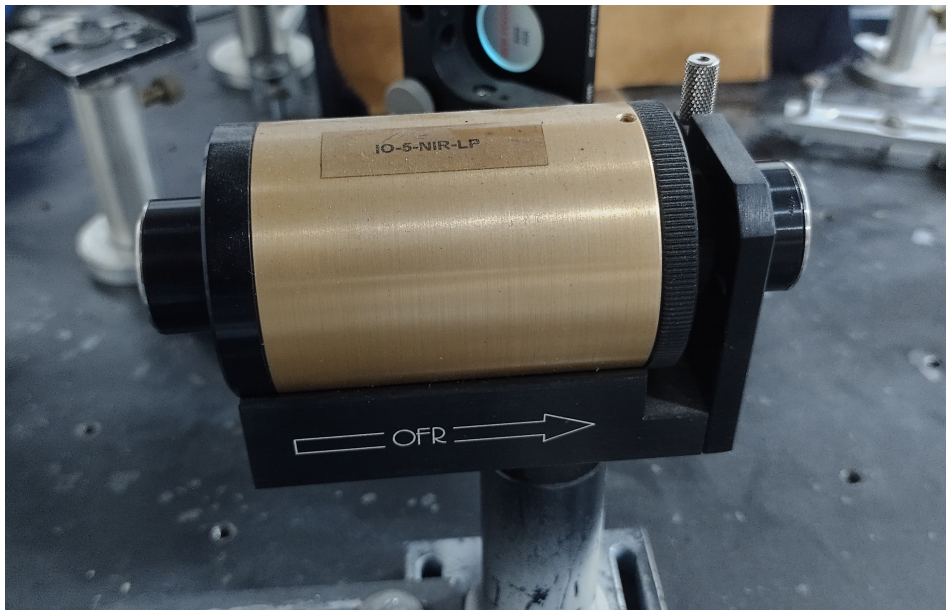


Figura 4.6: Isolador ótico utilizado no arranjo experimental.

O principal componente do isolador ótico é o elemento Faraday, onde um campo magnético $\vec{B}$ aplicado ao elemento tem direção paralela à direção de propagação da luz. Isso faz o campo produzir bi-refringência circular, resultando em dois índices de refração diferentes e, portanto, causando uma rotação no plano de polarização da luz devido ao efeito Faraday.

No isolador ótico do arranjo experimental (Fig.4.6) tem um polarizador $P1$ na entrada e um polarizador $P2$ na saída, onde o comprimento do material é de forma que a luz é girada de 45 graus, após entrar na direção $P1$ do polarizador (filtro que transmite a luz com uma determinada polarização) e sai na direção $P2$ (direção de transmissão do isolador). Dessa forma, no sentido inverso, para qualquer eventual luz que retorne na direção do laser, se sua polarização for ortogonal à transmissão de $P2$ ela é bloqueada, caso contrário, ela é transmitida e girada de 45 graus na direção do feixe laser, e barrada por $P1$ pelo fato da polarização ser perpendicular a este.

4.2.3 Cavidade Fabry-Pérot

Após o isolador ótico, o feixe foi dividido em dois com o auxílio de um divisor de feixes. Um dos feixes alimenta o experimento e o outro feixe é direcionado para duas montagens auxiliares: A Absorção Saturada e a Cavidade Fabry-Pérot, que são utilizadas para fornecer referências em frequência do laser em relação às transições atômicas na linha D_2 do Cs.

O Fabry-Pérot tem o objetivo de calibrar em frequência a varredura horizontal do osciloscópio. Isso permite controlar a dessintonização do laser.

O Fabry-Pérot é um interferômetro ótico que consiste numa cavidade delimitada de dois espelhos esféricos semi-refletores. Quando a luz atravessa essa cavidade acontece fenômeno de interferência de feixes múltiplos [156].

Cada vez que a luz encontra uma das superfícies, uma parte é transmitida, e a parte restante é refletida de volta. O efeito líquido é quebrar um feixe único em feixes múltiplos que interferem uns com os outros (Ver Fig 4.7). Depois de múltiplas reflexões, os feixes transmitidos após os espelhos se somam e originam um padrão de interferência.

Na Fig. 4.7 dois espelhos parciais estão alinhados paralelamente um ao outro a uma distância l , formando uma cavidade reflexiva. Quando irradiado por uma luz monocromática (aqui um laser) de comprimento de onda $\lambda = 852.34$ nm em um ângulo de incidência Θ , múltiplas reflexões ocorrem dentro da cavidade. Parte da luz é transmitida cada vez que a luz atinge a segunda superfície refletora. Todos esses raios de luz transmitidos interferem uns com os outros para dar origem a um máximo (interferência construtiva) ou mínimo (interferência destrutiva), dependendo da diferença de caminho Δ entre eles, dada por

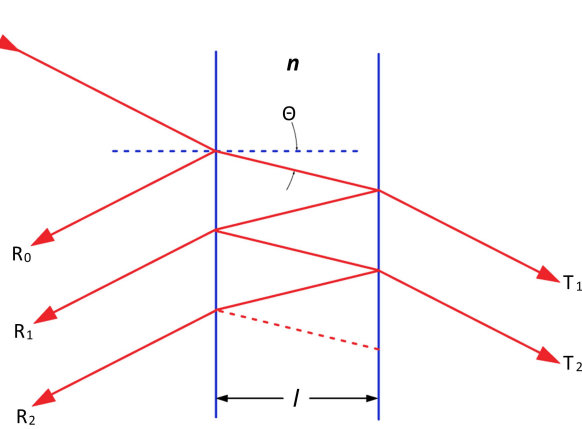


Figura 4.7: Múltiplas reflexões e transmissões T_m de um feixe de luz entre dois espelhos. É indicado o campo transmitido e refletido em cada interface: os feixes refletidos são indicados por R_m e os feixes transmitidos são indicados por T_m , onde $m = 1, 2, 3, \dots$, n é o índice de refração, Θ o ângulo de incidência do feixe de luz e l é a distância entre os espelhos.

$$\Delta = 2nl \cos(\Theta), \quad (4.5)$$

sendo n é o índice de refração do meio na cavidade (neste caso, o ar). A diferença de fase durante o retorno da luz, após a ser refletida é dada por

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta. \quad (4.6)$$

Esses múltiplos raios refletidos têm um incremento constante m no comprimento de onda denominado ordem de interferência, de modo que

$$2l \cos(\Theta) = m\lambda. \quad (4.7)$$

Portanto, se esse comprimento adicional do caminho óptico do feixe refletido m (devido a reflexões múltiplas) é uma parte inteira múltipla do comprimento de onda da luz, então os feixes refletidos irão interferir construtivamente.

A partir da Equação 4.7 encontramos os modos longitudinais

$$\nu_m = \frac{mc}{2nl} \quad (4.8)$$

O espectro de transmissão do Fabry-Pérot tem uma série de picos, onde ocorre interferência construtiva, espaçados pela 'faixa espectral livre' ou FSR (Free Spectral Range) dado por

$$FSR = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2nl} \quad (4.9)$$

Em suma, FSR representa a diferença de frequência entre dois λ para os quais a intensidade transmitida é máxima.

À medida que a refletividade dos espelhos aumenta, os picos tornam-se mais nítidos, e diminuem em largura. Por fim, definiremos também o conceito de Finesse F , a qual é uma medida da nitidez das franjas de interferência.

A largura total a meia altura (FWHM) dos picos é chamada de largura de banda. Assim, a Finesse é a razão entre a distância entre dois picos consecutivos (ou FSR) e a largura de banda (FWHM) do pico $F = FSR/FWHM$.

Assim, a equação 4.8 pode ser utilizada para determinar a variação de frequências do laser, onde ν_m é a frequência do m -ésimo modo longitudinal de uma cavidade de Fabry-Pérot de comprimento l . A Eq. 4.7, mostra que como os valores de m são múltiplos inteiros de λ , a distância entre os picos do Fabry-Pérot é fixa.

Para nosso experimento, a cavidade Fabry-Pérot utilizada é confocal, e tem uma distância em frequência entre os picos de $1,5GHz$. Para uma cavidade confocal, a faixa espectral livre FSR é a metade do FSR de uma cavidade plana, ou seja, modos longitudinais são dados por $\nu_m = \frac{mc}{4nl}$.

Os resultados experimentais das medidas são registrados em escala temporal no osciloscópio. Contudo, as grandezas envolvidas nas medidas são dadas em frequência. Assim, a partir do espectro da Fig. 4.8, podemos calibrar a escala do osciloscópio em frequência por proporcionalidade, de modo que, o intervalo em unidades arbitrárias entre os dois picos corresponde a $1,5GHz$. A frequência emitida pelo laser é obtida variando o ângulo da grade de difração, e durante a varredura do laser os picos aparecem. Assim, utilizamos a distância entre os picos para calibrar a varredura em frequência.

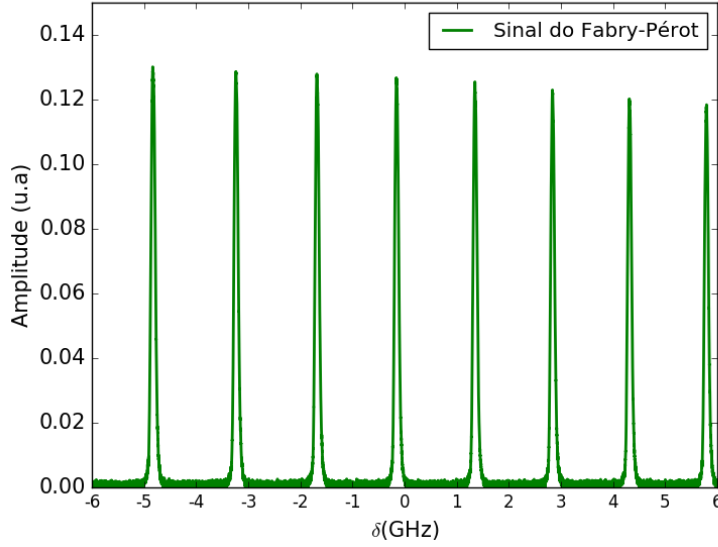


Figura 4.8: Espectro de transmissão do feixe laser após a cavidade Fabry-Pérot. Esse sinal mostra que o laser está monomodo e é utilizado para calibrar em frequência a varredura horizontal do osciloscópio.

4.2.4 Absorção Saturada

A absorção saturada [157] é uma montagem auxiliar cujo objetivo é determinar precisamente a frequência de transição atômica entre dois níveis de um átomo livre de efeito Doppler, permitindo, assim, a resolução da estrutura hiperfina dentro dos níveis de energia do átomo.

No vapor atômico a absorção do fóton ressonante acontece apenas para certas frequências características de cada átomo e dependem da transição de energia específica que está sendo sondada. Estas energias específicas de transição, entretanto, são borradas dentro do espectro de absorção devido a um efeito do alargamento Doppler (secção 1.2).

Portanto, devido o laser ser de baixa potência e não ter saturação, esse espectro com o alargamento Doppler recebe o nome de espectro de absorção linear e é responsável por camuflar a estrutura hiperfina. Isso acontece porque, em nosso experimento, a largura Doppler $\Gamma_D = 300$ MHz é maior que a distância em frequência entre os níveis hiperfinos.

O alargamento Doppler ocorre porque quando um feixe laser de frequência ω_L incide na célula, em virtude dos átomos dentro da célula com frequência de ressonância ω_0 estarem na forma de vapor, no referencial do laboratório, suas

velocidades ao longo da direção do feixe incidente são suficientemente altas para que eles percebam a frequência do laser incidente com deslocamento Doppler em seu próprio referencial dado por

$$\omega = \omega_L(1 - v/c), \quad (4.10)$$

onde a propagação do laser é dada na direção positiva considerada da esquerda para a direita. Se v é negativo (para átomos se aproximando do laser), cada átomo vê o feixe com frequência deslocada para o azul ($\omega > \omega_L$), e se v é positivo (para átomos se afastando do laser), cada átomo vê o feixe com frequência deslocada para o vermelho ($\omega < \omega_L$).

Dessa forma, quando a frequência ω_L do laser é variada em torno de ω_0 , os átomos absorvem a radiação, pois cada um deles possui velocidade v tal que vêm a frequência do laser ressonante, isto é, $\omega = \omega_0$.

Por exemplo, se a frequência de um fóton do laser ω_L é sintonizada abaixo da frequência ressonante ω_0 desejada, ou seja, $\omega_L < \omega_0$, somente os átomos que se movem em direção ao laser observam este na ressonância e são absorvidos. Este mesmo princípio se aplica aos átomos que se afastam do laser, quando a frequência dos fótons (laser) é sintonizada acima da frequência ressonante, ou seja, quando $\omega_L > \omega_0$ (deslocada para o azul) [158, 54].

Arranjo Experimental para a Absorção Saturada

A resolução da estrutura de divisão hiperfina dentro dos níveis de energia do átomo pode ser explorada sem o alargamento Doppler. Isso é feito através da espectroscopia de absorção saturada.

Dessa forma, o sistema de diodo laser é usado para excitar as várias transições de níveis de energia da linha D_2 , onde o fenômeno de alargamento do pico da absorção (alargamento Doppler) pode, então, ser superado através do uso de um feixe forte (bombeio) de contra-propagação e saturação.

Portanto, dado um feixe de laser (sonda) com frequência ω_S que se propaga por uma célula com vapor de césio, para entender a absorção saturada, analisamos o que acontece quando um segundo feixe laser (de bombeio) com frequência ω_B se propaga através da célula na direção oposta e sobreposto ao feixe sonda [159].

Este é o arranjo básico para a espectroscopia de absorção saturada (Fig. 4.9). Desta maneira, quando este segundo feixe é adicionado dentro da configuração experimental, o espectro de absorção fica livre do alargamento Doppler e o aparecimento dos picos hiperfinos dentro dos níveis de energia são determinados (Ver Fig ??).

Uma vez que a largura da curva gaussiana é bem maior que a largura das transições permitidas $F = 4 \rightarrow F' = 3, 4, 5$ na linha D_2 do césio, então, para

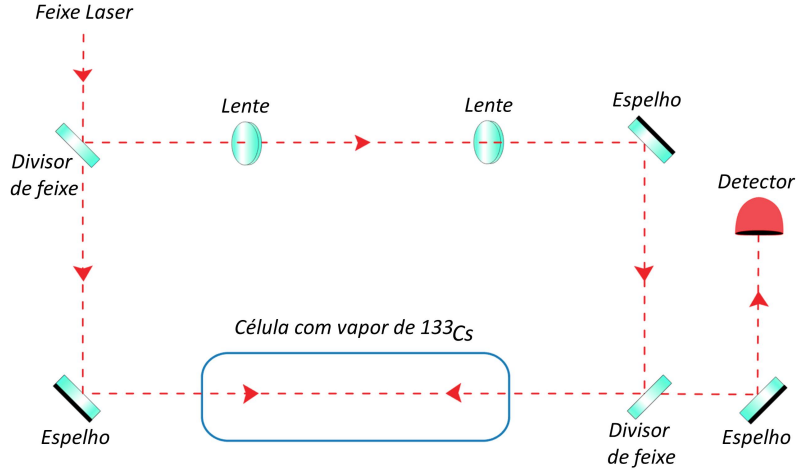


Figura 4.9: O feixe de laser viajando para a direita é chamado de feixe de prova (sonda). O segundo feixe do laser sobreposto e propagando-se na direção oposta é chamado de feixe de bombeio. Como ambos os feixes são do mesmo laser, têm a mesma frequência, mesmo quando essa frequência é varrida através da ressonância.

determinar essas transições, vamos entender o efeito do feixe forte (bombeio) na montagem da absorção saturada. Os feixes fraco (sonda) e forte (bombeio) são oriundos da mesma fonte e, portanto tem a mesma frequência ω_L .

O espectro fica livre de alargamento Doppler, devido as populações de átomos interagirem com os feixes fortes (bombeio) e fraco (sonda) de maneira diferente. Portanto, considerando o sentido dos feixes, cada átomo verá o feixe de bombeio com frequência $\omega_B = \omega_L(1 + v/c)$ e o feixe sonda com frequência $\omega_S = \omega_L(1 - v/c)$.

Nessas circunstâncias, quando ω_L varia em torno de ω_0 , se a frequência é sintonizada abaixo da ressonância $\omega_L < \omega_0$; os átomos que se movem na direção do feixe sonda verão a frequência dos fótons desse feixe maior, e se sua velocidade v é tal que $\omega_S = \omega_0$, a transição ocorre. Esses mesmos átomos se afastam do feixe de bombeio e verão a frequência dos fótons desse feixe menor, mais distante ainda da ressonância $\omega_B < \omega_L < \omega_0$, ou seja, os dois feixes interagem com duas populações diferentes de átomos. Uma situação análoga acontece quando $\omega_L > \omega_0$. Entretanto, quando o feixe está sintonizado para ressonância $\omega_L = \omega_0$, ambos os feixes interagem e excitam os átomos com velocidade $v = 0$. Assim, todos os átomos

com velocidade $v = 0$ vêem os dois feixes com a mesma frequência $\omega_S = \omega_B = \omega_L$ [159].

Portanto, para $\omega_L = \omega_0$, os dois feixes interagem com o mesmo grupo de átomos (átomos com $v = 0$). O feixe de bombeio, devido sua alta intensidade provoca a transição, de no máximo, metade dos átomos com essa classe de velocidade, que vão para o estado excitado e não absorvem o feixe sonda. Logo, o feixe sonda passa através da célula com absorção reduzida, resultando no aparecimento de picos no espectro de absorção linear [160].

Dessa forma, por exemplo, considerando os átomos num vapor atômico interagindo com os dois feixes contrapropagantes, sonda e bombeio de mesma frequência ω_L , no referencial do laboratório, para duas frequências de transição do átomo quaisquer ω_1 e ω_2 , de modo que, para o feixe sonda temos a frequência $\omega_S = \omega_1$ e para o feixe de bombeio a frequência $\omega_B = \omega_2$, com as frequências ω_S e ω_B no referencial do átomo. Se o átomo se aproxima do feixe de bombeio, temos

$$\begin{aligned}\omega_B &= \omega_L(1 + v/c) \\ \omega_S &= \omega_L(1 - v/c),\end{aligned}\tag{4.11}$$

onde ω_L é a frequência do laser. Isolando ω_L obtemos

$$\omega_L = \frac{\omega_S + \omega_B}{2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},\tag{4.12}$$

a mesma relação é obtida para átomos que se movem com velocidade v na direção do feixe sonda. Dos vários picos referentes a cada transição hiperfina nos átomos (ver Fig. 4.10), os picos de cruzamento dos níveis (crossover) são evidenciados pela Eq. 4.12, que surgem devido a possibilidade dos átomos a uma dada velocidade v estarem ressonantes com ambos os feixes em duas transições diferentes. O espectro de absorção saturada para as transições $F = 4 \rightarrow F' = 3, 4, 5$ na linha D_2 do cério ficam com mostrado na Fig. 4.10.

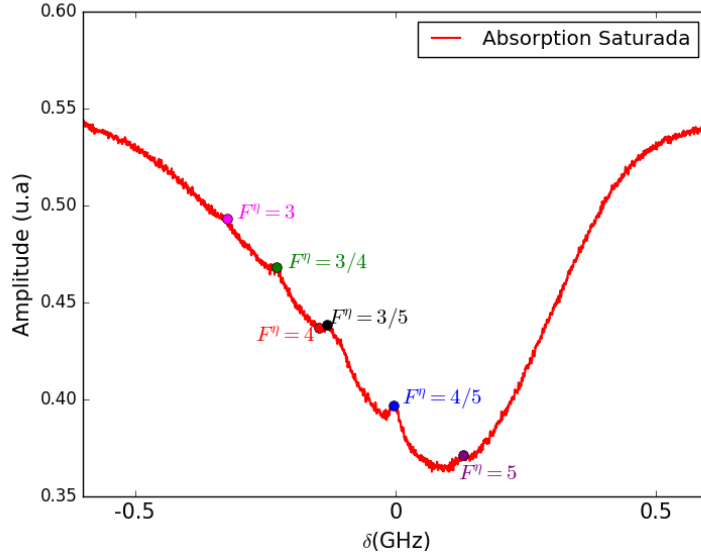


Figura 4.10: Espectro de absorção saturada do césio, visto em um osciloscópio. Os picos correspondem às transições $F = 4 \rightarrow F' = 3, 4, 5$ e aos crossovers $F' = 3/4$, $F' = 3/5$ e $F' = 4/5$.

4.2.5 Lâmina de Meia-Onda e Polarizador

Antes de incidir no experimento, o feixe laser passa por uma lâmina de meia onda e por um polarizador. A lâmina de meia onda e o polarizador, dispostos um após o outro, possuem o objetivo de controlar a intensidade do feixe laser no arranjo experimental.

A lâmina de meia onda é uma placa constituída por um cristal anisotrópico uniaxial, que possui um eixo de simetria fixo denominado eixo ótico, com índice de refração n_x (índice de refração extraordinário) e todos os eixos perpendiculares a esse eixo fixo possuem índice de refração n_y (índice de refração ordinário) [161] (ver Fig 4.11).

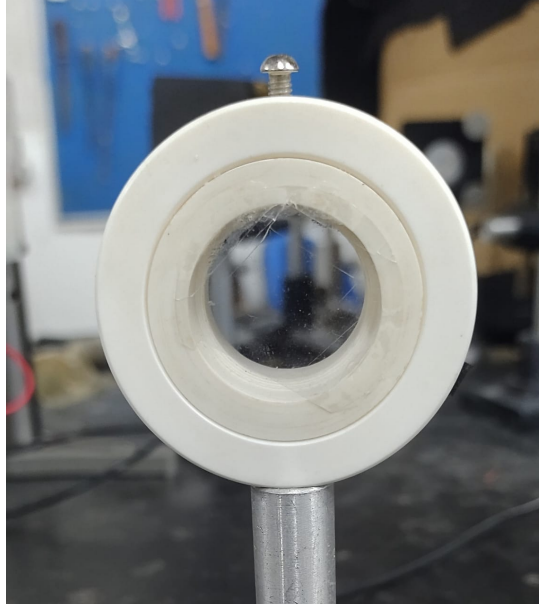


Figura 4.11: Lâmina de meia-onda utilizada com o objetivo de controlar a intensidade do feixe laser no arranjo experimental.

Portanto, quando um feixe de luz linearmente polarizado incide sobre o material, as componentes do campo elétrico paralela e perpendicular ao eixo ótico são refratadas com índices de refração n_x e n_y , respectivamente. Assim, chamamos de bi-refringência da luz o fenômeno na qual a luz ao atravessar um meio anisotrópico orientado adequadamente, sofre o fenômeno da dupla refração (ver Fig. 4.12), ou seja, o raio luz tem o feixes com duas componentes perpendiculares polarizados que se propagam com velocidades inversamente proporcionais aos índices de refração associados àquela secção do meio.

Seja um cristal anisotrópico uniaxial com eixos ordinários e extraordinários, tal que, um feixe de luz incidente com polarização linear forma um ângulo de 45° com o eixo x [156]. As componentes x e y do campo elétrico incidente são dadas por

$$E_{x,y} = E_0 \exp(ik_{x,y}z - \omega t), \quad (4.13)$$

onde $k_x = \frac{2\pi n_x}{\lambda_0}$ e $k_y = \frac{2\pi n_y}{\lambda_0}$ são os números de onda nas direções x e y, com n_x e n_y os índices de refração nessas direções, que podem ser ordinários ou extraordinários. O comprimento da lâmina é l , tal que, na entrada da lâmina temos $z = 0$ e na saída $z = l$.

A diferença de fase δ entre as componentes emergentes é dada por $\delta = (k_x - k_y)d = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_x - n_y)d = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta$ onde Δ é a diferença de caminho ótico, definida por

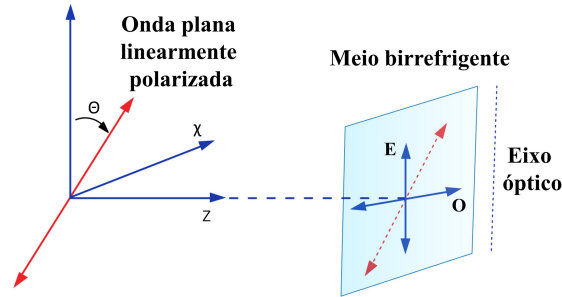


Figura 4.12: Esquema ilustrativo de uma frente de onda plana linearmente polarizada incidindo em um meio bi-refringente com ângulo Θ em relação ao eixo óptico do meio (na direção y), onde as componentes extraordinária (E) e ordinária (O) estão indicadas.

$\Delta = (n_x - n_y)d$ ou bi-refringência. Portanto, para que os raios emergentes tenham polarização linear, a diferença de fase entre eles deve ser π . Portanto, a diferença de caminho ótico Δ deve ser

$$\Delta = \frac{\lambda_0}{2}, \quad (4.14)$$

ou seja, o efeito total é que o campo elétrico incidente é girado de 90 graus ou para o ângulo de incidência de 45 graus. Uma lâmina desse tipo é chamada de lâmina de meia onda, cujo efeito total é girar a polarização linear de um campo elétrico incidente de 2θ , onde θ é o ângulo que a polarização faz com o eixo perpendicular (ou paralelo da lâmina), que em nosso experimento tem o objetivo de controlar a intensidade do feixe laser, girando a polarização da luz.

O polarizador é uma espécie de filtro que transmite a luz com uma determinada polarização Fig. 4.13.

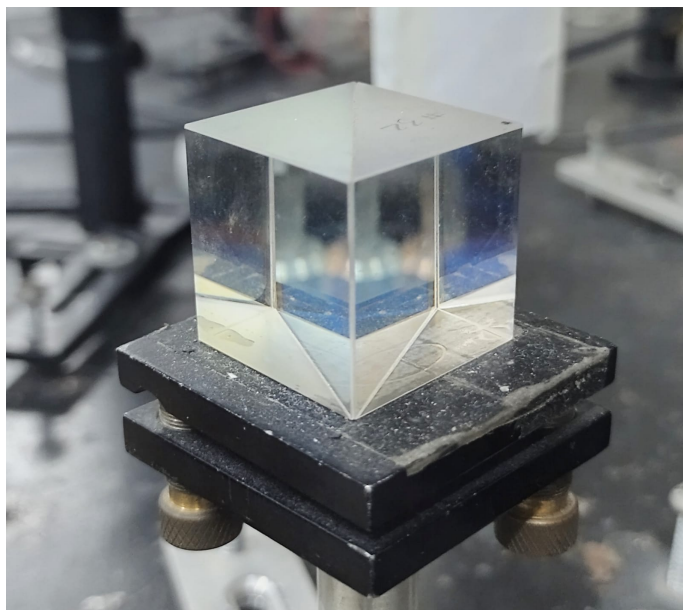


Figura 4.13: Cubo polarizador utilizado para transmitir a luz numa determinada polarização.

Ao colocarmos uma lâmina de meia onda e um polarizador dispostos um após o outro, o efeito total é reduzir a intensidade da luz incidente. A lâmina de meia onda possui a função de girar a polarização da luz, que é linear, uma vez que ela provém do isolador ótico com essa polarização. Ao passar pelo polarizador, apenas a componente do campo elétrico da direção do eixo do polarizador será transmitida. Portanto, girando-se a lâmina de meia onda, estamos girando a polarização linear da luz emergente, e assim modificamos a amplitude da componente paralela ao eixo do polarizador, dessa forma, para uma determinada posição da lâmina de meia onda, nenhuma luz é transmitida pelo polarizador, indicando que o campo elétrico da luz emergente é perpendicular ao eixo do polarizador. Girando-se a lâmina de meia onda de 90° em relação à posição de intensidade mínima, a luz transmitida pelo polarizador possui intensidade máxima, indicando que nesta direção o campo elétrico é paralelo ao eixo do polarizador.

4.2.6 Célula com Vapor Atômico

Nesse experimento a célula da Fig 4.14 foi utilizada para medir o processo de aprisionamento de radiação ressonante e sua relação com a difusão dos fótons oriundos do feixe laser, através do parâmetro α das distribuições estáveis de Lévy.



Figura 4.14: Célula utilizada para medir o processo de aprisionamento radiativo ressonante e sua relação com a difusão anômala dos fótons oriundos do feixe laser.

A célula (recipiente) é o elemento do arranjo experimental responsável pelo armazenamento do vapor atômico estudado, nesse experimento foi utilizada para armazenar de vapor atômico de Cs . Constituída de duas partes, a célula tem um reservatório, onde fica uma quantidade de Cs no estado líquido, que se estende até a região das janelas, onde o vapor é sondado pelo laser. Essa região das janelas é constituída de duas janelas ópticas, que permitem a entrada e saída do laser, que é a parte efetivamente utilizada no experimento.

A temperatura do reservatório determina a densidade do vapor atômico, enquanto a temperatura da região das janelas determina a distribuição de velocidades dos átomos.

Assim, a célula utilizada tem corpo cilíndrico de quartzo de comprimento $L = 3,0$ cm e raio $R = 1.25$ cm, feita para suportar temperaturas que chegam $180^{\circ}C$ no reservatório e temperaturas que chegam a $200^{\circ}C$ na janela.

O aquecimento da célula compreende fornos que aquecem o corpo celular (região das janelas) e o reservatório contendo Cs líquido, separadamente.

O reservatório e as janelas são aquecidos com uma fonte de tensão contínua ligada a uma placa de relé que obedece comandos oriundos duma placa arduino.

A automação do aquecimento da célula é feita em linguagem de programação arduino, o qual é responsável por manter a temperatura do reservatório e janela fixas e com uma diferença de temperatura de 20° entre janela e reservatório. Essa

diferença de temperatura é responsável pela não condensação de vapor de Cs nas paredes da janela.

A determinação da opacidade na amostra é feita a partir do ajuste de transmissão do feixe de laser (descrito no capítulo 5) e é variada através da densidade do vapor alterando a temperatura do reservatório.

4.3 Detalhes do Arranjo Experimental

Uma vez apresentado o arranjo experimental, alguns detalhes são importantes na compreensão da interação do laser com a amostra (célula).

A interação do laser com a amostra é entendida recorrendo a definição de opacidade do meio em [63], no qual a distância adimensional dada por $r = N\Sigma_0 L/\Phi_V(0)$ define uma opacidade ou escala de densidade óptica para o tamanho da amostra (que corresponde ao comprimento da célula L), onde $\Phi_V(0)$ é o perfil de absorção normalizado e no centro da linha, N é a densidade atômica, Σ_0 a secção de choque no centro da linha.

A profundidade de penetração do laser $l_I = 1/K(0) = 1/N\Sigma_0$ (inverso do coeficiente de absorção no centro da linha), pode ser entendida como o comprimento mínimo do passo na caminhada aleatória do fóton dentro do vapor, de forma que, $r = N\Sigma_0 L/\Phi_V(0) = K(0)L/\Phi_V(0)$ e, portanto $r = \frac{L}{l_I} \frac{1}{\Phi_V(0)}$.

Assim, a densidade atômica N é a variável utilizada para mudar a opacidade do meio. Por exemplo, devido a opacidade ser proporcional à densidade atômica, um aumento na densidade atômica aumenta a opacidade do meio. Além disso, através da densidade atômica controlamos penetração laser no vapor, pois por ser inversamente proporcional à densidade do meio, a penetração do laser diminui com o aumento da densidade atômica.

Em relação a opacidade, ela é variada em uma faixa de $r = 8$ a $r = 1.5 \times 10^5$ correspondente à variação de densidade a partir de $N = 3 \times 10^{10} \text{ atomos/cm}^3$ a $N = 6 \times 10^{14} \text{ atomos/cm}^3$.

Para obter esse alcance de densidade, as temperaturas da célula são variadas de $T_R = 35^\circ$ e $T_J = 80^\circ$, com uma correspondente largura Doppler $\Gamma_D \sim 250 \text{ MHz}$ para $r = 8$, a $T_R = 170^\circ$ e $T_J = 200^\circ$, com uma correspondente largura Doppler $\Gamma_D \sim 285 \text{ MHz}$ para $r = 1.5 \times 10^5$, onde T_R e T_J são as temperaturas do reservatório e da janela, respectivamente.

Em relação a penetração do laser na amostra, o feixe laser incidente tem diâmetro de $d = 1.25 \text{ mm}$, o qual é muito menor que o raio da célula R .

Para baixa opacidade ($r \sim 8 - 200$), usamos uma potência incidente do laser $P_0 \sim 30 \mu W$, que corresponde a 1.5 vezes a intensidade de saturação da linha de transição D_2 do ^{133}Cs .

A profundidade de penetração l_I do laser é muito menor do que a espessura da célula ($l_I \sim 10$ mm para $r = 8$ e $l_I = 0.5$ mm para $r = 200$).

Para altas opacidades [$r \sim 430 - (1.5 \times 10^5)$], a potência incidente foi aumentada para $P_I \sim 300 \mu W$ com o intuito de ter boa relação sinal ruído na transmissão difusa, que corresponde a 15 vezes a intensidade de saturação. Nessas condições a profundidade de penetração do laser é de $l_I \sim 0.5$ mm para $r = 430$ a $l_I \sim 2 \mu m$ para 1.5×10^5 , ainda bem menor do que a espessura da célula.

Para opacidades muito elevadas, o livre caminho médio (penetração do laser) se torna menor que o comprimento de onda da transição $\lambda = 852.34$ nm. Além disso, como o coeficiente de absorção é grande no centro da linha, pode ocorrer interação átomo-átomo devido o grande número de átomos excitados. Entretanto, acreditamos que isso não interfira nos voos de Lévy, pois a estatística é regida pela emissão em grande dessintonização, e nessa região o coeficiente de absorção diminui bastante. Isso reduz esse efeito, pois a seção de choque diminui consideravelmente, diminuindo a probabilidade de termos a interação entre átomos excitados.

Capítulo 5

Resultados Experimentais

Nesse capítulo, apresentamos os resultados principais obtidos das medidas experimentais de difusão de fótons em vapor atômico de Cs, onde comparamos os resultados experimentais com modelos teóricos previamente estudados. Essa seção é estruturada da seguinte maneira: Descrevemos o processo de medida; apresentamos as medidas realizadas e a análise dos sinais obtidos; realizamos o tratamento de dados e mostramos os resultados experimentais que estão de acordo com o modelo teórico dentro da barra de erro do experimento.

5.1 Descrição do Processo de Medidas

Uma vez descrito todo aparato Experimental, o procedimento das medidas pode ser entendido considerando a secção de coleta de dados do arranjo experimental na Fig. 5.1. Nessa secção, a fonte laser de comprimento de onda $\lambda = 852$ nm (Fig.4.5), correspondente à transição de linha D_2 do césio, incide na célula de comprimento $L = 3.0$ cm com vapor atômico de ^{133}Cs e, seguidamente, são coletados a transmissão do feixe laser e a transmissão difusa por dois detectores $D1$ e $D2$, respectivamente, e separados por um ângulo $\Theta = 15^\circ$ como descrito no arranjo experimental.

Quando o vapor absorve a radiação, os fótons emitidos são espalhados isotropicamente pelo vapor, pois a absorção da luz independe da direção de propagação e o feixe laser tem um posicionamento fixo e centralizado no eixo longitudinal da célula. Esses fótons espalhados pelo vapor, quando transmitidos pela janela (transmissão difusa), são detectados com um determinado ângulo Θ em relação ao feixe de transmissão do laser.

Para a detecção dessa transmissão difusa, esperamos que a sua dependência com a opacidade não dependa do ângulo Θ , pois o feixe laser tem seu posicionamento numa direção fixa dentro da célula (no eixo longitudinal da célula). Por-

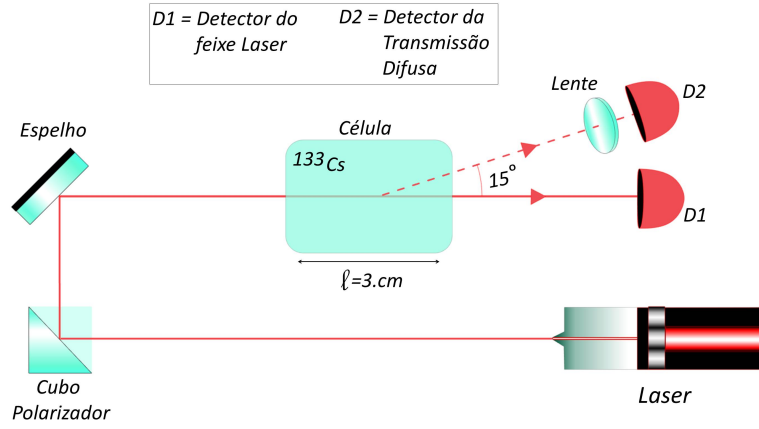


Figura 5.1: Montagem experimental desenvolvida para a detecção de fótons espalhados após a excitação do vapor atômico de césio pelo laser com frequência correspondente a transição da linha D_2 do Cs 133

tanto, como o feixe laser não muda de posição dentro da célula, quando escolhemos o ângulo de detecção Θ para realizar as medidas, que é definido a partir do feixe de transmissão do laser, este permanece inalterado (fixo). Assim, a transmissão difusa é detectada como se fosse uma função do ângulo Θ e da opacidade r do vapor dada por

$$T_{detec}(\theta, r) = S(\theta)T(r) \quad (5.1)$$

onde o fator $S(\theta)$ dá a dependência no ângulo e tem origem na geometria cilíndrica da célula. Por sua vez, $T(r)$ é a parte relacionada ao voo de Lévy propriamente dito, que é uma função da opacidade r do vapor. O sinal, neste sentido, depende do ângulo, mas como o fator $S(\theta)$ é o mesmo para toda opacidade (uma contante multiplicativa), o ajuste da lei de Ohm não depende do ângulo.

Nesse sentido, quando aumentamos o fator $S(\theta)$, o sinal de transmissão difusa detectado aumenta proporcionalmente. Isso é verificado a partir da geometria da célula, que é cilíndrica e com área lateral coberta, fazendo com que a luz difusa seja transmitida apenas pelas janelas ópticas da célula. Assim, essa transmissão difusa tem uma distância limitada pelo formato da célula. Acreditamos que isso acontece pelos resultados obtidos, mas carece de literatura.

Dessa forma, quando a frequência do laser está ressonante com a linha D_2 do Cs podemos realizar as medidas, as quais que são feitas quando a temperatura do reservatório, previamente estabelecida, entra em equilíbrio térmico com a temperatura do forno correspondente. Nessa situação, temos uma densidade fixa para o vapor que nos fornece a opacidade do meio através da Eq. 2.67 para uma determinada medida.

Como a difusão dos fótons no vapor é do tipo voos de Lévy, a transmissão difusa não é inversamente proporcional ao comprimento da amostra como numa difusão normal. Isso acontece devido a existência dos grandes passos do tipo voos de Lévy, que embora aconteçam em pequeno número, em relação ao total de passos, dominam o transporte e, portanto, favorecem um decaimento mais lento na transmissão difusa, que é expresso pela lei de Ohm modificada na Eq. 2.66.

Dessa forma, para constatar que o ajuste da lei de Ohm modificada não depende do ângulo de detecção Θ , fizemos um conjunto completo de medidas para a densidade do vapor, por meio das temperaturas fornecidas para o reservatório e janela. Nessas medidas, variamos a densidade do vapor desde de valores que compreendem uma distribuição do tamanho dos passos caracterizada pelo núcleo Doppler (baixas densidades), até valores de densidade onde a distribuição dos passos, quando comparada com tamanho da célula, abrange os passos dados pelos fótons emitidos em grande dessintonia, nas asas lorentzianas (altas densidades).

Esse conjunto de medidas foi feito para dois ângulos diferentes em relação ao eixo longitudinal da célula, para $\theta = 15^\circ$ (como mostrado na Fig. 5.1) e $\theta = 25^\circ$. Nossas medidas acarretaram em dois principais grupos que foram realizados em função da temperatura do reservatório. Os conjuntos de temperaturas são diferentes devido não termos o controle da temperatura real do sistema, mas apenas da temperatura nominal informada pelo aparelho de medida. Além disso, o que importa é a densidade atômica, a qual medida usando a lei de Beer-Lambert.

1) Medidas com Ângulo $\theta = 15^\circ$ Esse conjunto medidas foi realizado para as seguintes temperaturas do reservatório: $T_{R_1} = 35^\circ$, $T_{R_2} = 45^\circ$, $T_{R_3} = 55^\circ$, $T_{R_4} = 65^\circ$, $T_{R_5} = 80^\circ$, $T_{R_6} = 95^\circ$, $T_{R_7} = 110^\circ$, $T_{R_8} = 125^\circ$, $T_{R_9} = 140^\circ$, $T_{R_{10}} = 155^\circ$ e $T_{R_{11}} = 170^\circ$.

2) Medidas com Ângulo $\theta = 25^\circ$ Similarmente, esse conjunto medidas foi realizado para as seguintes temperaturas do reservatório: $T_{R_1} = 34^\circ$, $T_{R_2} = 42^\circ$, $T_{R_3} = 48^\circ$, $T_{R_4} = 56^\circ$, $T_{R_5} = 75^\circ$, $T_{R_6} = 90^\circ$, $T_{R_7} = 105^\circ$, $T_{R_8} = 120^\circ$, $T_{R_9} = 135^\circ$, $T_{R_{10}} = 150^\circ$ e $T_{R_{11}} = 165^\circ$.

Em ambos os conjuntos de medidas, para cada temperatura foram coletadas 5 medidas com a finalidade de obter uma média de qualquer flutuação do sinal obtido, assim como de estimar o erro na medida. Nessas medidas, são coletados

quatro sinais importantes no osciloscópio: absorção saturada, transmissão difusa, transmissão do feixe laser e o sinal do Fabry-Pérot.

5.1.1 Fabry-Pérot

O sinal do Fabry-Pérot utilizado para calibrar a escala do osciloscópio, tem a função principal de identificar quando o sinal do feixe laser está monomodo, o que significa que as medidas são realizadas com o laser emitindo com comprimento de onda preciso de $\lambda = 852.34$ nm, largura de espectro limitada, potência suficiente e controle da mudança de frequência no tempo.

Entretanto, se o laser não está no seu comprimento de onda específico ($\lambda = 852.34$ nm), devemos ajustar o comprimento de onda variando do ângulo da grade de difração do laser. Além disso, quando o sinal do laser emitido pelo Fabry-Pérot está multimodo, para que o sinal do laser fique monomodo, devemos ajustá-lo no suporte do laser, por exemplo, por meio da corrente ou temperatura que deslocam os picos da cavidade do laser. A frequência é regulada pelos modos da cavidade formada pela grade. Assim a corrente, tampouco a temperatura, alteram a frequência do laser, mas promovem os saltos dos modos.

Assim, levando em conta a varredura do laser em torno do seu comprimento de onda, podemos variar a amplitude de varredura conforme a faixa de frequência sondada pelo laser. Essa amplitude de varredura é alterada manualmente no suporte do laser, onde aplicamos uma tensão em um piezoelétrico, que altera o ângulo da grade de difração e, conseqüentemente, a faixa de frequência emitida pelo laser. Dessa forma, quando o laser está no seu comprimento de onda específico ($\lambda = 852.34$ nm) e monomodo, utilizamos o sinal do Fabry-Pérot (seus picos) para converter o eixo temporal do osciloscópio em frequência.

Portanto, considerando que a distância em tempo entre dois picos quaisquer do Fabry-Pérot é δt , e a cavidade Fabry-Pérot utilizada tem uma distância em frequência entre os picos de 1,5 GHz, uma variação de frequência $\delta\nu$ a ser calculada correspondendo a um tempo t do osciloscópio é obtida proporcionalmente, de forma que

$$\delta\nu = \frac{1,5 \cdot 10^9}{\delta t} t \text{ Hz}, \quad (5.2)$$

onde através dessa relação podemos converter o tempo t no osciloscópio em variação de frequência $\delta\nu$, em outras palavras, queremos obter o espectro da transmissão difusa em frequência. Assim por meio da Eq. 5.2, podemos transformar eixo temporal do osciloscópio em frequência.

5.1.2 Absorção Saturada

Uma vez os dados convertidos em frequência, outro sinal importante é o espectro de absorção saturada anteriormente visto. Esse espectro corresponde a um perfil Doppler largo, com picos estreitos nas frequências que correspondem às transições atômicas, e com os picos correspondentes aos crossovers, os quais são gerados por átomos que se movem a velocidades para as quais o feixe de bombeio se encontra em ressonância com uma transição atômica, e o feixe de sonda com outra.

A implementação do experimento que fornece o sinal de absorção saturada serviu para identificar os picos de transição hiperfina do Cs como mostra a Fig. 4.10. Esses valores são conhecidos na literatura como mostrado na Fig. ??, e servem como referência na análise dos dados, assim como para sintonizar o laser nas frequências corretas.

Quando obtemos um conjunto completo de medidas, para comparar os resultados, as curvas obtidas para a transmissão difusa e transmissão do feixe laser devem estar centralizadas no eixo de frequência obtido através do sinal Fabry-Pérot. Para centralizar as curvas no eixo de frequência, utilizamos o pico do crossover $F' = 4/5$ da curva de absorção saturada na dessintonização $\delta = 0$. Para essa dessintonização temos absorção total do laser.

Assim, para uma determinada medida, deslocamos o crossover $F' = 4/5$ para a dessintonização $\nu = 0$, e os dados em frequência relacionados a esse deslocamento são utilizados para centralizar as demais curvas de transmissão difusa e transmissão do feixe laser. O mesmo processo é feito para todas as medidas, e o resultado final é um conjunto completo de espectros de transmissão difusa e transmissão do feixe laser para diferentes temperaturas em $\nu = 0$.

Através das curvas de absorção saturada podemos, também, detectar qualquer pequeno salto de modo no sinal do laser não detectado pelo Fabry-Pérot que, eventualmente, possa interferir na potência do laser.

5.1.3 Transmissão do Feixe Laser

A transmissão do feixe laser é entendida por meio da lei de Beer-Lambert, a qual nos diz como o feixe laser é atenuado ao atravessar o vapor. À medida que a luz (laser) atravessa um meio contendo uma substância que a absorve, um decréscimo de intensidade da luz ocorre na proporção que a substância é excitada, de forma que, quanto mais longo for o comprimento do caminho óptico, através do qual a luz passa, maior será a atenuação [162].

Isso depende da concentração dos átomos/moléculas absorventes, e está relacionado ao coeficiente de absorção $K(\nu)$. Quantitativamente, a lei de Beer-Lambert é dada pela relação entre a intensidade do feixe laser de entrada da célula I_0 e do feixe de saída I com o tamanho da célula L , tal que

$$I = I_0 \exp(-K(\nu)L), \quad (5.3)$$

através da qual inferimos o valor de densidade atômica N do meio. Isso é possível através do ajuste de curvas teóricas de transmissão do feixe laser sobre as experimentais obtidas para cada temperatura do reservatório (medida).

Portanto, para cada uma curva de transmissão experimental do feixe laser obtida, fez-se necessário um cálculo do coeficiente de absorção $K(\nu)$ em função da frequência, o qual é ajustado em função da densidade N .

Em suma, quando realizamos uma medida, para obtermos o coeficiente de absorção $K(\nu)$ em função da frequência, devemos calcular a seção de choque Σ , que é obtida a partir do perfil de absorção do vapor (perfil de Voigt) relacionado à curva de transmissão experimental obtida para feixe laser.

Portanto, para obtermos a curva de transmissão teórica do feixe laser em frequência, a lei de Beer Lambert na Eq. 5.3 pode ser escrita em termos da seção de choque (perfil de Voigt).

$$I = I_0 \exp\left[-\sum_i \phi_i \Phi_v(\delta - \delta_i)r\right] \quad (5.4)$$

a qual contempla a soma sobre as transições $6S_{1/2}(F = 4) \rightarrow 6P_{3/2}(F = 3, 4, 5)$ centradas em δ_i , com as forças relativas dada por ϕ_i . A opacidade do meio é dada pela Eq. 2.67 e Φ_v é um perfil de Voigt definido na equação 1.62.

Portanto, para obtermos $K(\nu)$ em função da frequência, calculamos a seção de choque Σ pelo programa em linguagem python do apêndice D.

De posse da transmissão experimental podemos plotar uma curva teórica sobre a mesma e, portanto, realizar o fit de uma curva sobre a outra, variando a densidade do vapor no cálculo de $K(\nu)$ até atingir um ajuste perfeito da curva teórica sobre a experimental, nessa situação é inferido o valor da densidade do vapor N .

A Fig.5.2 mostra um sinal de transmissão óptica de uma célula juntamente com o resultado do ajuste teórico. Em relação à precisão das medidas, como o procedimento de medida é baseado no ajuste das curvas atribuindo valores para N , esse procedimento não é muito apurado, pois apresenta um erro experimental em torno de 10%. Contudo, um método de medida mais apurado como o método dos mínimos quadrados, por exemplo, não traz vantagens significativas, pois o ajuste não consideraria as irregularidades particulares apresentadas pelas curvas fora da ressonância. Além disso, os valores de densidade mudam por volta de um fator 3 para cada medida realizada. Isso é muito frente o erro obtido.

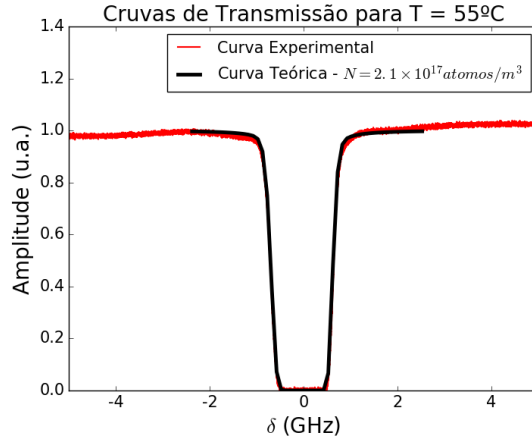


Figura 5.2: Ajuste teórico da transmissão do feixe laser para o cálculo da densidade do vapor. Curva teórica (preto) sobreposta à curva experimental (vermelho) é uma medida precisa da densidade do vapor.

5.1.4 Transmissão da Luz Difusa

A luz difusa surge quando o laser incide no vapor atômico ressonante promovendo os átomos para o estado excitado. Isso acontece porque os átomos absorvem os fótons com energia correspondente à energia de transição. Uma vez nesse estado de maior energia, esses átomos têm um tempo de vida nesse estado excitado e, posteriormente, retornam ao seu estado natural de menor energia por emissão espontânea como ilustrado na Fig 5.3

Os fótons ressonantes são espalhados isotropicamente por meio de sucessivos eventos de reabsorção e reemissão espontânea, chamado de aprisionamento de radiação, antes de, eventualmente, atingirem os limites da célula e deixarem o vapor. A luz gerada por eles é coletada no detector formando um espectro chamado de curva de transmissão difusa.

Esse espectro de transmissão difusa, diferentemente do processo microscópico de espalhamento dos fótons, não é isotrópico. Isso acontece devido a dependência da transmissão difusa com a função angular $S(\Theta)$ como mostra a Eq. 5.1, onde devido a geometria cilíndrica da célula o sinal de transmissão difusa detectado é afetado à medida que variamos o ângulo Θ .

Todos os sinais detectados nas medidas são exemplificados na Fig. 5.4. O Fabry-Pérot tem uma distância entre os picos de 1.5 GHz, indica que o laser está monomodo e é usado para calibrar a variação de frequência do laser. As curvas de transmissão do laser e transmissão difusa estão, naturalmente, aproximadamente simétricas em relação a curva de absorção saturada.

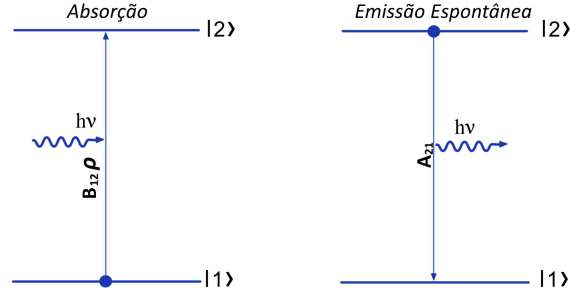


Figura 5.3: Esquema do processo de absorção e emissão espontânea de fótons por átomos ressonantes num vapor atômico.

Fora da ressonância, a transmissão difusa e a transmissão do laser possuem valor máximo em concordância ao apresentado para a absorção saturada. Ao nos aproximarmos da ressonância acontece o processo de absorção do laser com uma diminuição da transmissão do laser, assim como da transmissão difusa. Em torno do centro da linha temos absorção total do laser com um mínimo de transmissão difusa. Seguidamente, ao sair da ressonância, a absorção do laser diminui acompanhada do aumento da transmissão do laser e da transmissão difusa, até atingir um novo máximo fora da ressonância. Essas curvas apresentam uma inclinação fora da ressonância relacionada à variação de potência do laser durante a varredura do laser. Para interpretar os dados conjuntamente, todas as curvas estão centralizadas em relação ao crossover $F' = 4/5$.

Entretanto, o que se espera observar é que fora da ressonância (quando a transmissão do feixe laser é máxima) aconteça um mínimo de transmissão difusa, devido ao laser ainda não estar sintonizado com a frequência da linha de transição D_2 do Cs. Nessas condições, à medida que o laser se aproxima da ressonância ocorreria um decaimento na transmissão do laser e, conseqüentemente, um aumento no sinal de transmissão difusa decorrente da absorção dos fótons ressonantes pelos átomos.

Entretanto, na Fig 5.4 observamos que fora da ressonância a transmissão da luz difusa não é zero. Isso acontece devido à presença de luz do laser espalhada pela janela da célula no sinal. Esse problema é corrigido através do tratamento dos

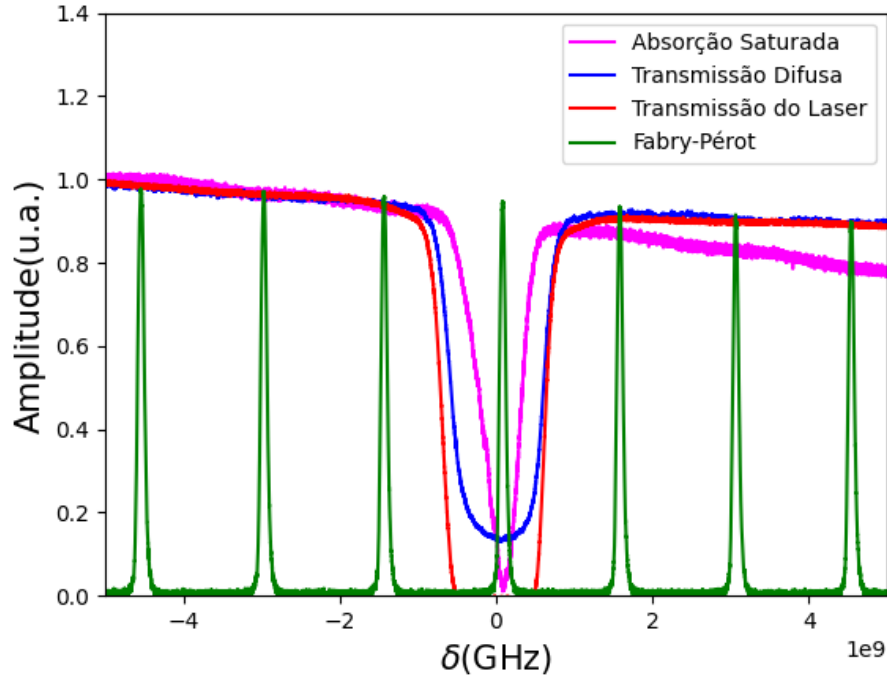


Figura 5.4: Exemplo de conjunto de sinais detectados no osciloscópio. Absorção Saturada (curva magenta), Transmissão Difusa (Curva azul), Transmissão do laser (Curva vermelha) e Fabry-Pérot (Verde).

dados da transmissão da luz difusa que será explicado no decorrer desse capítulo.

5.2 Tratamento da Transmissão Difusa

As medidas realizadas são sensíveis a qualquer fonte externa de luz, portanto, são realizadas na máxima escuridão possível. Contudo, sempre existe alguma fonte externa de luz proveniente do aparato experimental ou do ambiente e, quando a transmissão difusa é detectada, essa luz é captada conjuntamente.

Uma medida chamada de zero da transmissão difusa é realizada com o laser tapado para eliminar parte da luz externa não relacionada ao laser, onde esse sinal é posteriormente subtraído da medida da amplitude mínima de transmissão difusa como mostra a Fig. 5.5.

No processo de medida, a luz do laser é espalhada na janela da célula. Essa luz espalhada é detectada conjuntamente com a luz difusa na detecção da transmissão

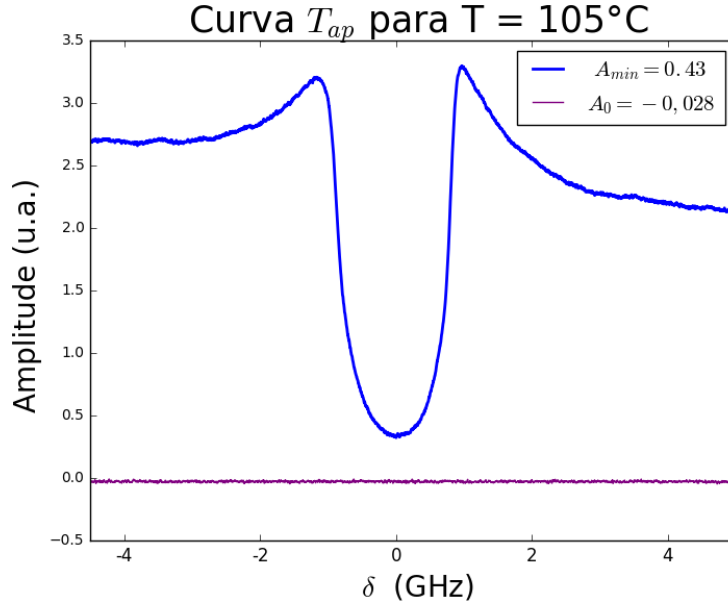


Figura 5.5: Curva de transmissão difusa aparente com A_{min} afetada por luz externa em roxo A_0 .

difusa. Além disso, está relacionada a potência do laser, de forma que, quanto maior for a potência de incidência do laser na célula, maior será a luz espalhada e, conseqüentemente, a luz difusa. O resultado da detecção (luz espalhada mais luz difusa) é um espectro de transmissão difusa aparente, como mostrado na Fig. 5.5.

Para essa curva, chamamos de T_{ap} a transmissão difusa aparente que engloba T_r , a transmissão difusa real proveniente da relaxação dos átomos do estado excitado e L_s , a luz espalhada do laser na janela da célula, de modo que $T_{ap} = L_s + T_r$. A luz espalhada L_s , assim como a transmissão difusa real T_r , são proporcionais a potência do laser P , e aos fatores de detecção γ_0 e γ_1 referentes a eficiência de detecção da luz espalhada e da transmissão difusa real, respectivamente. Assim, temos

$$T_{ap} = L_s + T_r = P(\gamma_0 L_s + \gamma_1 T_r). \quad (5.5)$$

Entretanto, queremos que a transmissão difusa aparente T_{ap} seja equivalente à transmissão difusa real de interesse T_r . Para isso devemos eliminar a luz espalhada L_s .

A luz espalhada é eliminada considerando a dependência da transmissão difusa aparente com a potência do laser na Eq. 5.5, pois observamos na Fig. 5.5 uma inclinação na curva de transmissão difusa aparente fora da ressonância, o qual está

relacionada a variação da potência do laser durante a varredura de sua frequência.

Essa inclinação é obtida por meio de uma reta passando por dois pontos fora da ressonância (um em cada lado da curva). Além disso, fora da ressonância a transmissão difusa real é zero, pois o laser não é absorvido, e de acordo com a Eq. 5.5 o coeficiente angular da reta passa a representar o produto $A = \gamma_0 P$.

Por sua vez, a transmissão difusa aparente se resume à transmissão do laser, o qual é dada pela lei de Beer-Lambert. Portanto, a luz espalhada é $L_s = A \exp(-K(\nu)L)$, onde A é o coeficiente angular da reta e $\exp(-K(\nu)L) = T_{ap}$ é a transmissão coerente medida através do detector $D1$.

Uma vez calculada a luz espalhada, podemos obter a transmissão difusa real T_r . Isso é feito a partir da Eq. 5.5, onde subtraindo a luz espalhada da transmissão difusa aparente.

$$T_r P \gamma_1 = T_{ap} - P \gamma_0 L_s \quad (5.6)$$

Assim, as medidas realizadas foram tratadas segundo a equação 5.6, onde obtemos a transmissão difusa real T_r , subtraindo a luz espalhada L_s da transmissão difusa aparente T_{ap} . O resultado desse tratamento revela uma curva de transmissão difusa que, posteriormente, tem a influência da potência do laser eliminada garantindo a mesma potência do laser no centro da linha para todas as medidas realizadas.

Por sua vez, o coeficiente detecção da luz no detector γ_1 é constante e sobretudo não depende da opacidade. A Fig. 5.6 mostra as curvas obtidas do tratamento.

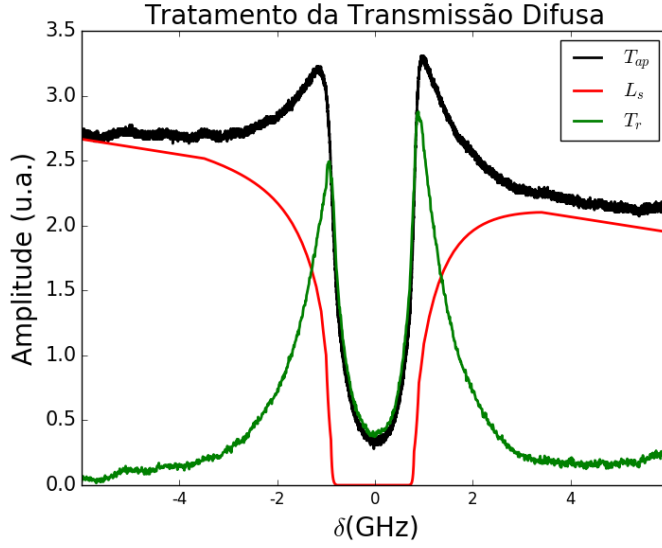


Figura 5.6: Diferentes curvas obtidas do tratamento da transmissão difusa. T_{ap} é Transmissão difusa aparente (curva preta), L_s é a luz espalhada (curva vermelha) e T_r , a transmissão difusa real utilizadas nas medidas do parâmetro α .

Embora não eliminada a influência de γ_1 , seu valor durante as medidas não muda consideravelmente em relação a γ_0 . Isso acontece devido a eficiência de detecção γ_0 variar durante as medidas. A variação de γ_0 está relacionado a luz espalhada do laser na janela de saída da célula que é muito sensível a alinhamento ao longo das medidas realizadas.

Contudo, a eficiência de detecção γ_1 , não está relacionada uma luz espalha num ponto na janela, mas sim à luz difusa do vapor originada do processo de multiplo espalhamento e, portanto, pouco sensível ao alinhamento.

5.3 Resultados das Medidas

Nessa secção, apresentamos os resultados experimentais das curvas de transmissão do feixe laser e transmissão da luz difusa em função da dessintonização para medidas com ângulo menor ($\Theta = 15^\circ$) e ângulo maior ($\Theta = 25^\circ$).

5.3.1 Curvas de Transmissão do Laser para $\Theta = 15^\circ$

Aqui, para algumas medidas, apresentamos os resultados experimentais das curvas de transmissão do feixe laser em função da dessintonização para medidas com

ângulo menor ($\Theta = 15^\circ$).

No ajuste das curvas transmissão do laser, quando a temperatura do reservatório aumenta, aumenta o número de átomos no volume da região sondada pelo laser devido o aumento da pressão, consequentemente, um maior número de átomos absorvem a radiação. Assim, o sinal de transmissão alarga porque a região sondada que para baixa temperatura não tem absorção total, passa a ter absorção total para alta temperatura.

Contudo, o alargamento do espectro de absorção está relacionado distribuição de velocidade de Maxwell-Boltzmann descrita no apêndice B. Esse alargamento ocorre devido o aumento da temperatura da janela, onde para uma determinada temperatura (no equilíbrio), a distribuição de velocidade dos átomos é dada pela Eq. B.18, e valor médio do módulo da velocidade atômica é dado em função da temperatura de equilíbrio pela Eq. B.22.

Desse forma, à medida que aquecemos a janela, aumenta a velocidade atômica média e, portanto, a distribuição gaussiana (transmissão do feixe laser), tem sua largura Doppler aumentada. Esse aumento na largura Doppler, alarga a faixa de frequência das curvas transmissão do feixe laser no vapor atômico, que, na prática, varia pouco, pois a velocidade atômica média aumenta com a raiz quadrada da temperatura. A Fig. 5.7 mostra algumas curvas de transmissão obtidas.

5.3.2 Curvas de Transmissão do Laser para $\Theta = 25^\circ$

A Fig. 5.8 mostra o comportamento das curvas de transmissão para algumas temperaturas do segundo conjunto de medidas com ângulo maior ($\Theta = 25^\circ$).

Similarmente, como nas medidas com o ângulo menor, para algumas medidas apresentamos os resultados obtidos do cálculo da densidade atômica do vapor N . Para cada densidade atômica calculada, a opacidade do vapor é obtida segundo a definição de opacidade da a Eq. 2.67.

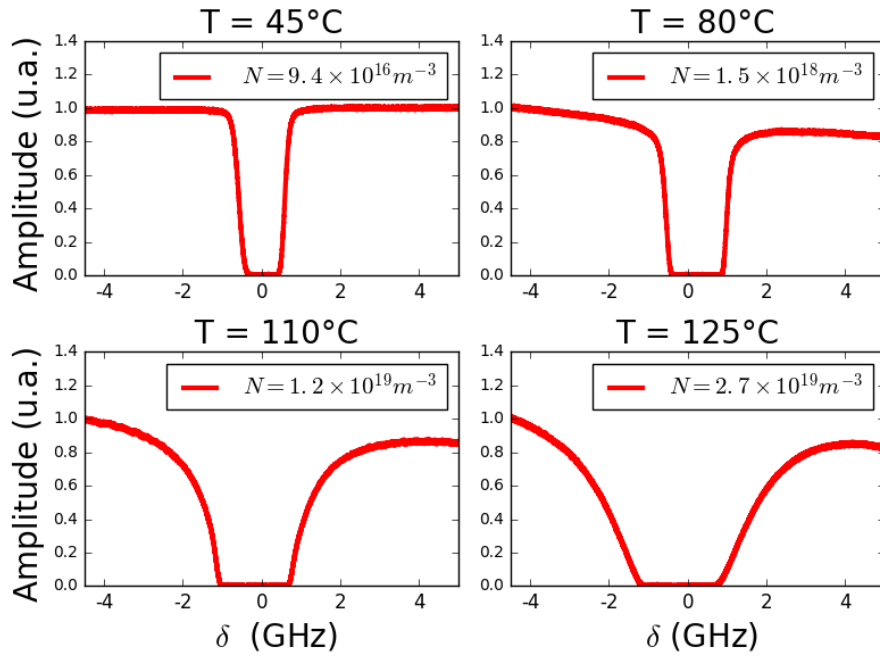


Figura 5.7: Curvas de transmissão do feixe laser em função da frequência para as temperaturas $T = 45^\circ\text{C}$, $T = 80^\circ\text{C}$, $T = 95^\circ\text{C}$, $T = 105^\circ\text{C}$. O aumento da temperatura do reservatório, aumenta o número de átomos na amostra, alargando a transmissão, devido a ter um maior número de átomos absorvendo a radiação.

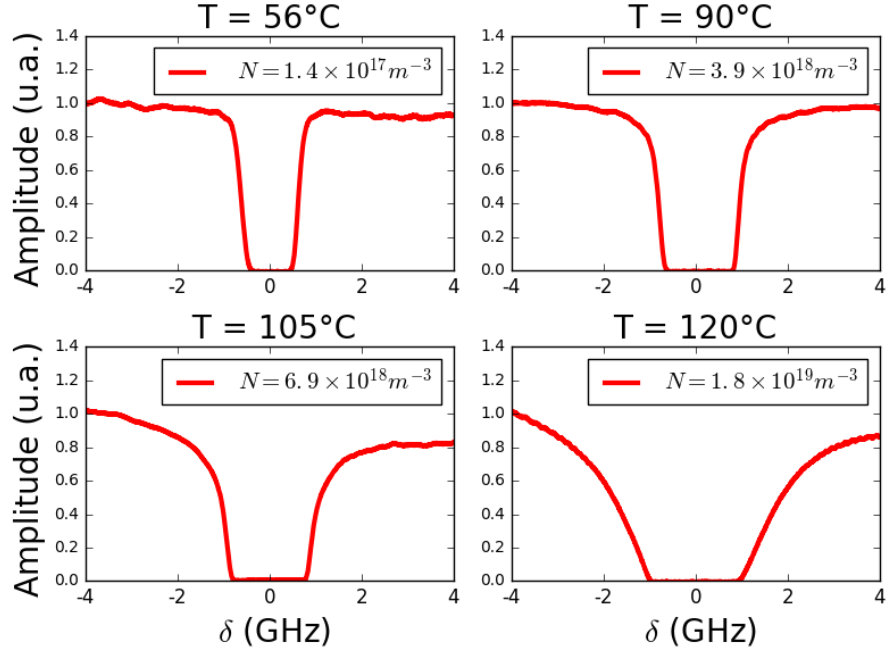


Figura 5.8: Curvas de transmissão do feixe laser em função da frequência para as temperaturas $T = 45^\circ\text{C}$, $T = 80^\circ\text{C}$, $T = 95^\circ\text{C}$, $T = 105^\circ\text{C}$. Um comportamento similar a ocorre para as medidas com o ângulo menor.

5.3.3 Curvas de Transmissão Difusa para $\Theta = 15^\circ$

De um modo geral, uma vez feito o tratamento de dados, apresentamos os resultados experimentais das curvas de transmissão difusa em função da dessintonização para medidas com ângulo menor ($\Theta = 15^\circ$).

Em princípio, as curvas de transmissão difusa resultante do tratamento de dados apresentado, são, genericamente, determinadas por um zero fora da ressonância, onde a transmissão do feixe laser é máxima.

Quando o laser se aproxima da ressonância ocorre uma queda na transmissão do feixe laser e, como podemos observar, acontece um máximo de transmissão difusa. Esse máximo está relacionado à penetração do laser na amostra. Acreditamos que ele ocorra quando o produto $K(\nu)L = 1$, ou seja, quando o laser penetra o comprimento da amostra. Contudo, uma análise mais aprofundada é necessária para verificar isto.

Essa hipótese está relacionada ao fato do coeficiente de absorção $K(\nu)$ ser pequeno em grande dessintonização, pois como o comprimento da célula é fixo ($L = 3.0 \text{ cm}$), quando o laser penetra o comprimento da célula, o produto $K(\nu)L = 1$.

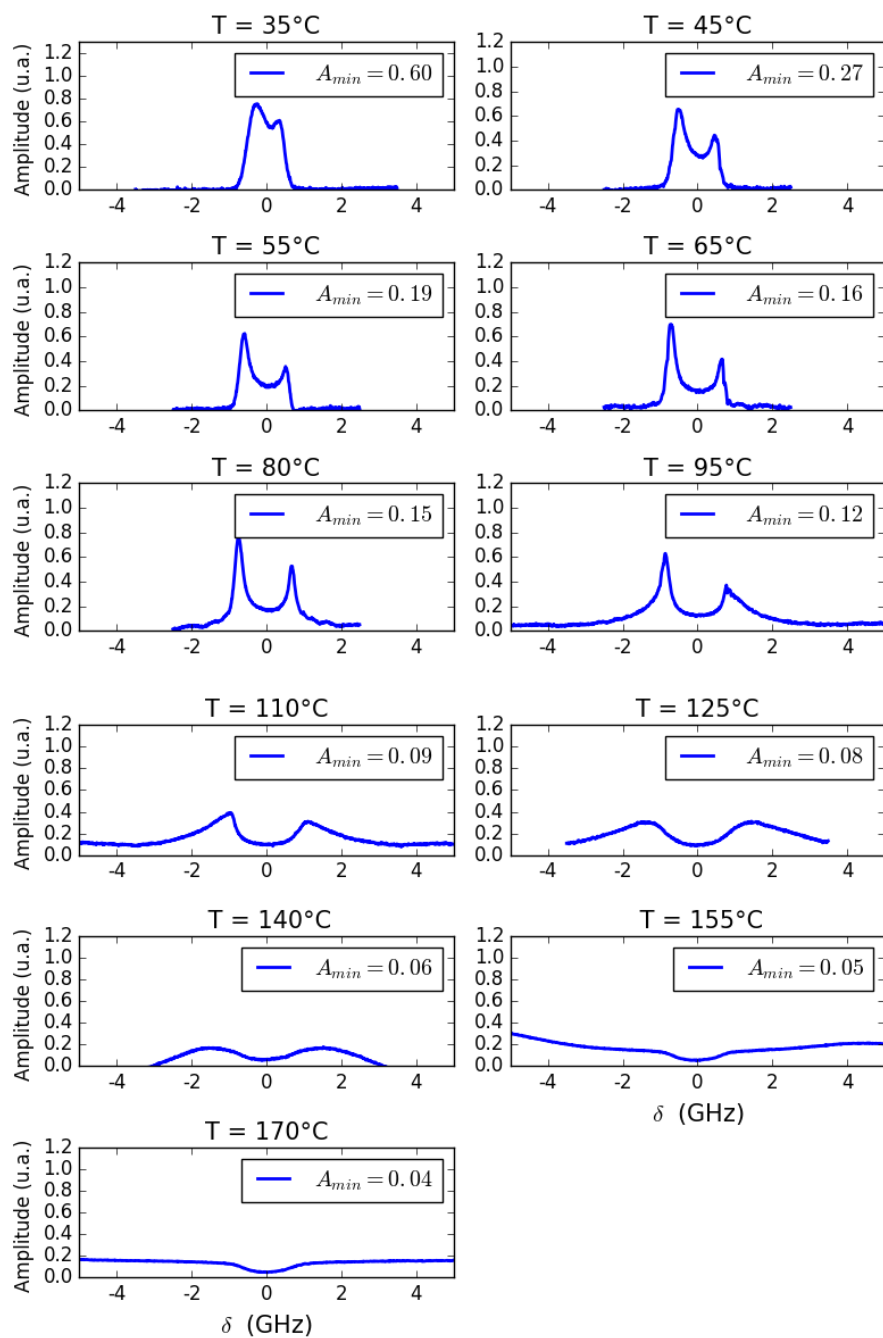


Figura 5.9: Curvas de transmissão difusa do vapor atômico em função da frequência para medidas com o ângulo menor ($\Theta = 15^\circ$).

Dessa forma, à medida que nos aproximamos da ressonância, o coeficiente de absorção aumenta e, portanto, o produto $K(\nu)L$ aumenta até atingir um valor máximo em dessintonização $\delta = 0$.

A partir desse ponto, quando o laser se afasta da ressonância, novamente o coeficiente de absorção $K(\nu)$ diminui, seguido da diminuição do produto $K(\nu)L$ até atingir um novo máximo da transmissão difusa quando o laser novamente penetra o comprimento da célula. Seguidamente, o feixe laser passa a ter transmissão máxima fora da ressonância e a transmissão difusa vai a zero.

A princípio, esse é o comportamento da curva. Contudo, em relação aos máximos, não medimos a posição onde ocorrem, tampouco temos uma explicação teórica completa. Esses máximos são mais assimétricos e mais próximos do centro da linha quanto menor a densidade. Entretanto, à medida que a densidade aumenta eles se afastam do centro da linha e a curva torna-se mais simétrica. Acreditamos esses os máximos são assimétricos devido à assimetria do perfil de absorção.

Para garantir um maior número de fótons participem da caminhada aleatória, a transmissão da luz difusa será analisada na região de absorção total do laser, mais precisamente para $\delta = 0$. Nesse ponto, o nível de transmissão difusa tem uma amplitude mínima A_{mim} , que diminui com o aumento da densidade do vapor atômico.

A Fig. 5.9 mostra as curvas de transmissão difusa em função da dessintonização do laser. Como podemos observar, nessas curvas ocorre uma diminuição da amplitude mínima da transmissão difusa em função do aumento da temperatura do reservatório (densidade atômica). Além disso, para todas as temperaturas do reservatório, na ressonância as densidades atômicas obtidas são altas o suficiente para que o feixe laser seja totalmente absorvido na célula, ou seja, para todos os espectro de transmissão difusa temos absorção total do feixe laser em $\delta = 0$.

À medida que aumentamos a densidade atômica, o sinal perto da ressonância diminui. Para temperaturas abaixo de $T = 80^\circ C$, a potência do laser $P = 100\mu W$ é suficiente para que o sinal perto da ressonância não seja muito próximo de zero. Entretanto, a partir de $T = 80^\circ C$, fez-se necessário o aumento da potência do laser, devido o sinal perto da ressonância ficar muito pequeno.

O aumento da potência do laser implica aumentarmos a transmissão coerente (saturação) e difusa. Assim, para garantir um bom sinal no centro da linha para todas as demais temperaturas foi suficiente multiplicarmos a potência do laser por um fator 3, de forma que, todas as temperaturas a partir de $T = 80^\circ$ passaram a ser sondadas com a potência do laser $P = 300\mu W$.

Dessa forma, as curvas de transmissão difusa de Fig. 5.9, a partir da medida para a temperatura $T = 80^\circ$, foram normalizadas dividindo a amplitude da transmissão difusa por fator 3, que corresponde ao aumento dado na potência do laser

de $P = 100\mu W$ para $P = 300\mu W$. Isso é possível devido a resposta linear da transmissão difusa com a variação da potência do laser.

5.3.4 Curvas de Transmissão Difusa para $\Theta = 25^\circ$

Similarmente, como nas medidas com o ângulo menor, medimos a amplitude mínima A_{min} para as curvas de transmissão difusa em função do aumento da densidade atômica, o qual é caracterizada pelo aumento da temperatura do reservatório.

Nesse conjunto de medidas para $\Theta = 25^\circ$, na Fig. 5.10 observamos em $\delta = 0$ o mesmo comportamento das curvas transmissão difusa mostrado na Fig. 5.9 quando aumentamos a temperatura do reservatório (densidade), evidenciando, assim, que a transmissão difusa é isotrópica e independe do ângulo que coleta os dados obtidos na medida.

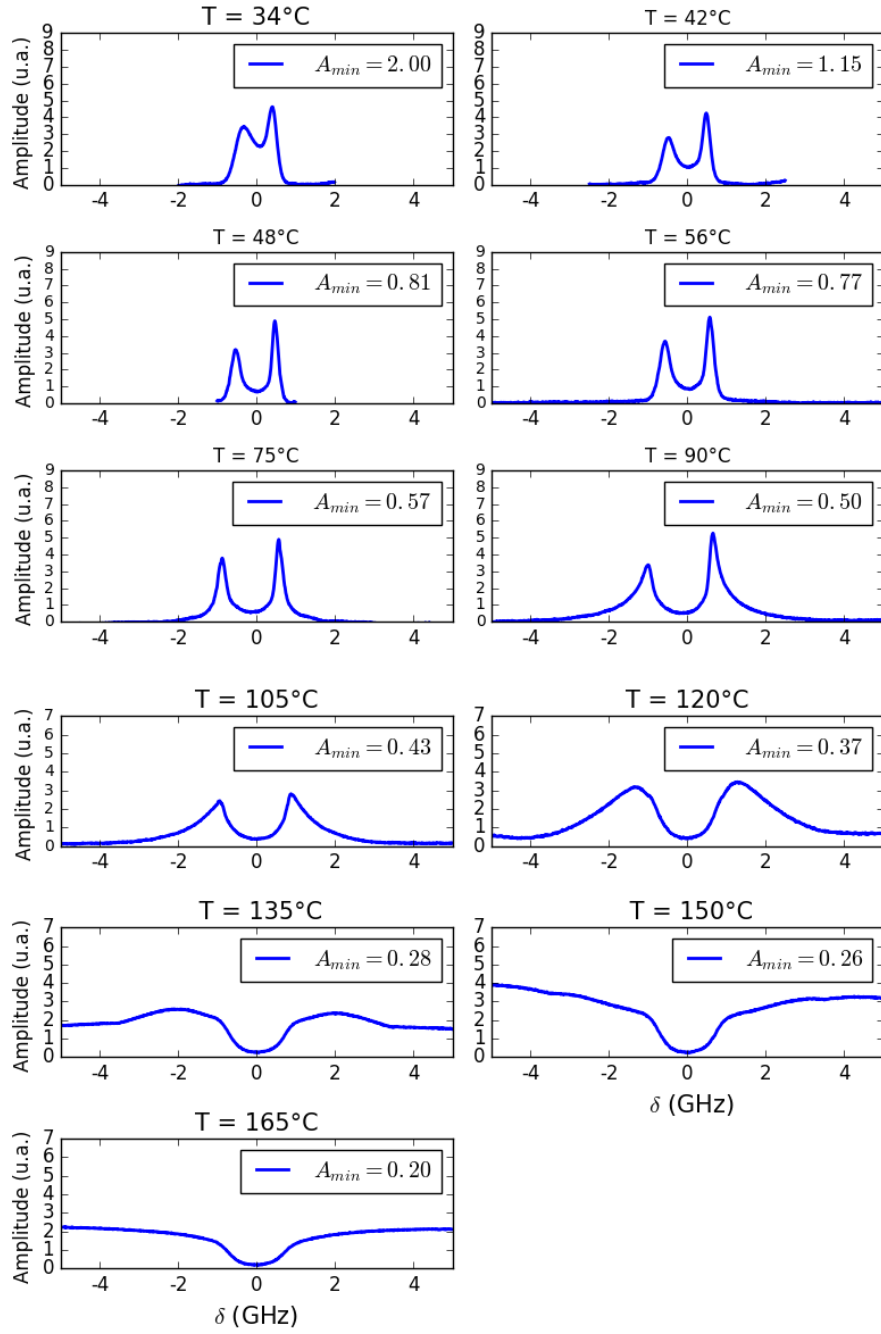


Figura 5.10: Curvas de fluorescência do feixe laser em função da dessintonização para medidas com o ângulo maior ($\Theta = 25^\circ$).

5.4 Resultados Experimentais para a Transmissão Difusa em Função da Opacidade

Nesta secção, são apresentados os resultados experimentais que evidenciam o carácter superdifusivo do movimento fotônico no vapor atômico, para densidade do vapor atômico com RCF, o qual é caracterizado pelo perfil espectral Voigt.

O parâmetro de Lévy α foi medido através da lei de Ohm modificada (Eq. 2.66). Para essa equação, os valores de T estão relacionados a amplitude mínima de transmissão difusa, ou seja, os valores que originam o eixo da ordenada T são os resultados obtidos experimentalmente na Fig. 5.9 para as medidas com o ângulo $\Theta = 15^\circ$, e na Fig. 5.10 para as medidas com o ângulo $\Theta = 25^\circ$.

Por sua vez, os valores de opacidade r que originam o eixo das abscissas foram obtidos da Eq. 2.67, através dos diferentes valores de densidades determinados a partir das curvas de transmissão do feixe laser, como mostra as Fig. 5.7 para as medidas com o ângulo $\Theta = 15^\circ$, e Fig. 5.8 para as medidas com o ângulo $\Theta = 25^\circ$.

A Fig. 5.11, mostra a evolução das curvas de transmissão da luz difusa em função da dessintonização δ do laser para diferentes valores de opacidade do vapor atômico. Para determinar o parâmetro α de Lévy, usamos amplitude de transmissão difusa para $\delta = 0$ (amplitude mínima). Nessa situação, além de garantir que um maior número de fótons participem da caminhada aleatória, esse valor escolhido tem objetivo de simplificar o problema, pois a frequência da luz incidente no meio atômico está próxima da ressonância. Portanto, por estar numa região com absorção total do laser, garantimos nesta dessintonização que a penetração do laser l_I é bem menor que o tamanho da célula L .

A escolha dessa dessintonização ($\delta = 0$) não poderia ser diferente, pois quando o laser se aproxima da ressonância, o máximo de transmissão difusa associado à penetração do laser sugere que o processo de absorção e emissão dos fótons (espalhamento) se inicie logo no final da célula. Esse máximo está associado à pequena distância que os fótons percorrem antes de deixarem o vapor e serem detectados. Portanto, a dessintonização que fornece esse máximo é a pior escolha.

Entretanto, quando a dessintonização $\delta \rightarrow 0$, o coeficiente de absorção aumenta e ocorre a diminuição da amplitude de transmissão difusa. Isso sugere que o ponto onde inicia o espalhamento agora se aproxima da entrada da célula, pois mais átomos são excitados prevalecendo os átomos que estão logo no início célula e, portanto, aumentando a distância percorrida dentro da célula até à detecção. Qualquer dessintonização nesse intervalo até $\delta = 0$ não serve, pois não contempla o espalhamento por todo o comprimento da célula. Isso impossibilita o cálculo da opacidade por meio da Eq. 2.67.

A profundidade de penetração máxima do laser $l_I \sim 10$ mm para $r = 8$ é muito menor do que o comprimento da célula. Essa situação é escolhida para

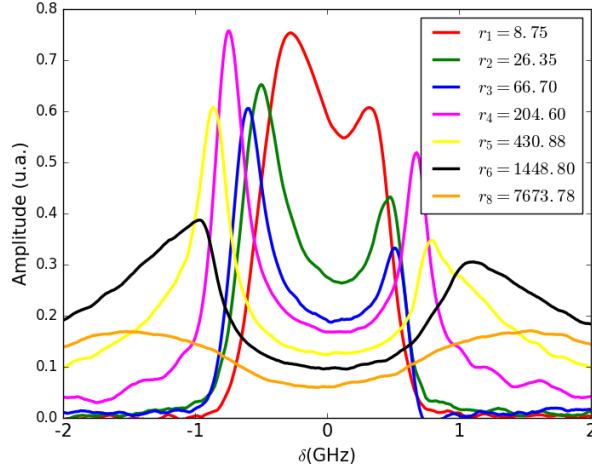


Figura 5.11: Evolução das curvas de transmissão difusa em função da dessintonização para medidas com o ângulo menor ($\Theta = 15^\circ$). A amplitude mínima de transmissão difusa diminui segundo a lei de Ohm modificada para diferentes valores de opacidade.

termos um mínimo de transmissão difusa, a qual assegura que os fótons tenham que percorrer o comprimento da célula antes de serem detectados. Além disso, essa dessintonização garante que o tamanho máximo do passo seja equivalente ao tamanho da célula.

Portanto, com os resultados obtidos para a transmissão difusa em $\delta = 0$ em diferentes valores de opacidade ao longo do perfil de absorção, através da Eq. 2.66 plotamos um gráfico de amplitude mínima de luz difusa em função da opacidade, onde por meio de um fit teórico dos resultados experimentais inferimos o valor de α .

5.4.1 Resultados experimentais para $\Theta = 15^\circ$ e $\Theta = 25^\circ$

Nesta seção, apresentamos os resultados do valor medido para parâmetro α de Lévy no vapor atômico de ^{133}Cs com perfil de absorção Voigt. Para obtermos o valor de α experimentalmente, plotamos o gráfico da amplitude da luz difusa em função da opacidade para os dois conjuntos de medidas ($\Theta = 15^\circ$ e $\Theta = 25^\circ$), e através de um fit teórico inferimos o valor experimental do parâmetro α de Lévy para o perfil Voigt em função do tamanho do sistema (Opacidade) como mostra as Fig. 5.12 e 5.13.

Como vimos, o parâmetro $\alpha = 0.5$ foi obtido teoricamente em [36] para meios

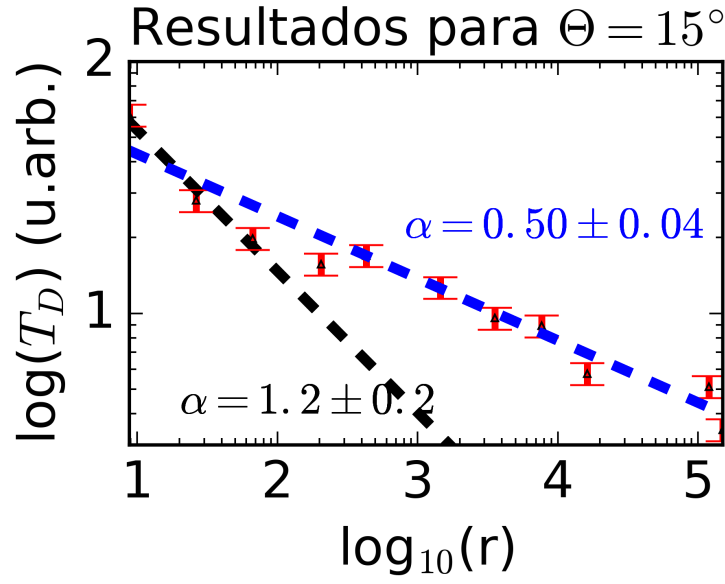


Figura 5.12: Transmissão difusa em função da opacidade para ($\Theta = 15^\circ$). Regime Doppler (reta preta) com $\alpha = 1,2 \pm 0,2$ e Regime Lorentziano (reta azul) com $\alpha = 0,50 \pm 0,04$

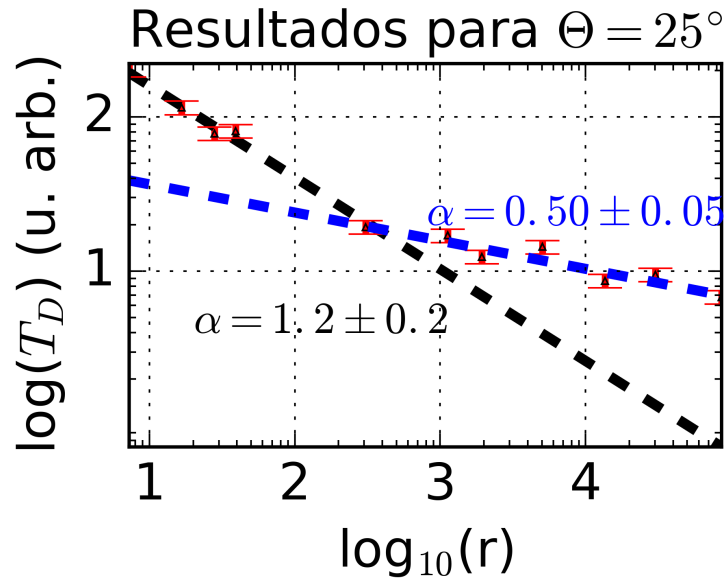


Figura 5.13: Transmissão difusa em função da opacidade para ($\Theta = 25^\circ$). Regime Doppler (reta preta) com $\alpha = 1,2 \pm 0,2$ e Regime Lorentziano (reta azul) com $\alpha = 0,50 \pm 0,04$

infinitos. Na prática, não temos um meio infinito, mas os resultados experimentais contemplam os VLT em [17], que em nosso trabalho permitiu medirmos a variação no parâmetro α em função do tamanho do sistema e, dessa forma, entender o efeito de truncagem no espalhamentos dos fótons no vapor atômico em questão.

Nossos resultados experimentais mostram para transmissão difusa em função da opacidade, que o perfil de Voigt do vapor atômico é determinado por dois regimes diferentes; o regime Doppler (curvas preta) e o regime Lorentz (curva azul).

A presença desses dois regimes diferentes; Doppler e Lorentz é verificada em função do tamanho do sistema (opacidade do vapor), ou seja, a difusão dos fótons é caracterizada segundo uma truncagem no tamanho do sistema (amostra), que é representado pela opacidade do meio. Essa truncagem no tamanho da amostra é um VLT, que modifica as características do transporte.

Essas características do transporte são dadas pela distribuição do tamanho dos passos no vapor, que é representada pelo parâmetro α de Lévy e, por sua vez, depende do tamanho do sistema. A dependência do parâmetro α com o tamanho do sistema acontece porque uma truncagem no sistema (VLT) limita o tamanho do passo e, portanto, os passos maiores que o tamanho do sistema truncado não realizam uma caminhada aleatória no vapor, isto é, o tamanho máximo do passo no vapor atômico corresponde ao tamanho da amostra representada pela opacidade do meio.

Nossos resultados, mostram que a distribuição do tamanho dos passos está relacionada com a opacidade do meio (densidade do vapor), onde para baixas opacidade observamos uma característica Doppler da distribuição dos passos, e para altas opacidades do meio uma distribuição dos passos que corresponde ao regime Lorentziano. Além disso, para $r_c = 10^3$, temos uma opacidade crítica que corresponde ao crossover de transição do regime Doppler para o regime Lorentziano.

Para baixas opacidades (densidades), mesmo a distribuição do tamanho dos passos sendo caracterizada pelos voos de Lévy em toda a amostra, essa distribuição abrange apenas passos de pequeno tamanho quando comparados com o tamanho do sistema, que estão determinados em torno do centro da linha, ou seja, somente os fótons emitidos na região em torno de $\delta = 0$, no núcleo Doppler, participam da caminhada aleatória. Isso acontece porque fótons que são emitidos em grande dessintonização, nas asas lorentzianas, dão passos maior que o tamanho do sistema (célula de tamanho $L = 3.0$ cm) e, portanto, não participam da caminhada aleatória.

Entretanto, para altas opacidades (densidades), à medida que me afasto da ressonância, a distribuição do tamanho dos passos aumenta, passando a abranger passos cada vez maiores que são emitidos em grande dessintonização, e com o tamanho máximo determinado pelo tamanho do sistema (célula de tamanho $L = 3.0$ cm). Assim, em grande dessintonização, nas asas do perfil Lorentz, os fótons

emitidos nessa região realizam passos da mesma magnitude do sistema (célula de tamanho $L = 3.0$ cm), os quais são reabsorvidos pelo vapor e agora participam da caminhada aleatória dominando o transporte, com uma distribuição do tamanho dos passos caracterizada pelo perfil Lorentz.

Embora nosso vapor não seja infinito como em [36], a distribuição do tamanho dos passos para altas opacidades do vapor nos forneceu um parâmetro $\alpha = 0.5$ para o perfil Voigt em grande dessintonização, em concordância com o perfil Lorentz.

Nossas previsões teóricas (Fig. 3.9) explicam, por exemplo, porque para baixa opacidade medimos $\alpha = 1.2$ e não $\alpha = 1.0$, como previsto por *Pereira et al* [36]. Isso acontece devido termos um perfil de Voigt, que é a convolução do perfil Doppler e Lorentz, ou seja, não estamos medindo um parâmetro α para um perfil puramente Doppler no regime assintótico.

Além disso, em relação à transição de regime Doppler para Lorentz, essa é determinada a partir do parâmetro de Voigt. Para nosso vapor, com um parâmetro de Voigt $a = 10^{-2}$, essa transição acontece para a opacidade crítica $r_c = 10^3$, em concordância com as previsões teóricas (Fig. 3.9).

Assim, como podemos observar na Fig. 3.9, a transição do regime Doppler para o regime Lorentz acontece mais rápido quanto maior for o parâmetro de Voigt. Por exemplo, para $a = 10^{-1}$, essa transição acontece em torno de $r_c = 10^2$ e passa a ser bem definida a partir de $r = 10^3$. Para nosso caso, $a = 10^{-2}$, a transição do regime Doppler para o regime Lorentz acontece em torno de $r_c = 10^3$ e passa a ser bem definida a partir de $r = 10^4$.

5.5 Medidas para célula menor $L = 1.0mm$

As medidas realizadas nesse trabalho foram feitas considerando uma célula com comprimento $L = 3.0$ cm. Dessa forma, com o intento de evidenciar o mesmo resultado para a dependência de α com a opacidade do meio r na superdifusão dos fótons no vapor atômico, fizemos medidas para uma célula de tamanho menor com comprimento $L = 1.0$ mm.

A Fig. 5.14 mostra os resultados experimentais do parâmetro α em função da opacidade r relacionados à célula menor de comprimento $L = 1.0mm$. Para esta célula, como mostram os resultados experimentais, obtemos um parâmetro $\alpha = 0.98 \pm 0.01$, que está em concordância com o regime Doppler no limite assintótico como mostrado por [36].

Assim, devido sua pequena espessura e tamanho em relação à célula de comprimento $L = 3.0$ cm, para altas temperaturas do reservatório ($T > 130^\circ C$ na janela) surge o risco de comprometimento da mesma. Logo, devido o limite da temperatura imposto pelo sistema, não foi possível atingir valores de opacidade muito acima da opacidade crítica $r_c = 10^3$ obtida para célula maior de comprimento

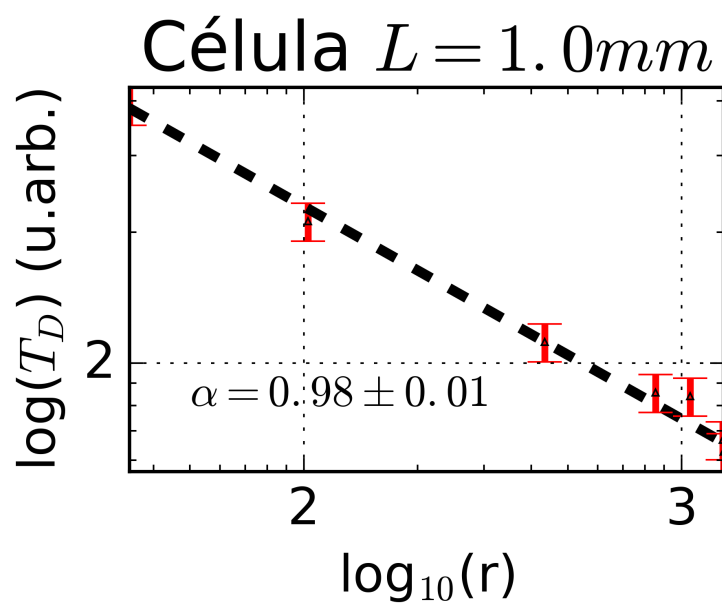


Figura 5.14: Transmissão difusa em função da opacidade para uma célula de comprimento $L = 1,0 \text{ mm}$. Regime Doppler (reta preta) com $\alpha = 0.98 \pm 0.01$ em concordância com $\alpha = 1.0$ no limite assintótico.

$L = 3.0$ cm.

A célula em questão é 30 vezes menor que a célula de comprimento $L = 3.0$ cm. Portanto, em razão de terem comprimentos diferentes, um determinado valor de densidade resulta em opacidades diferentes em ambas as células. Entretanto, não temos o mesmo intervalo de densidade para as células. Além disso, ao aquecemos a célula não temos um bom controle da densidade envolvida, pois simplesmente aquecemos, e quando a temperatura do reservatório estabiliza em conjunto com a temperatura da janela medimos a densidade por meio da lei de Beer-Lambert. Portanto, como não foi possível obter o mesmo intervalo de densidade para ambas as células, devemos entender a transição de regime Doppler para Lorentz por meio do parâmetro de Voigt.

Nossas previsões teóricas mostram como a transição do regime Doppler para o regime Lorentz acontece em função do parâmetro de Voigt $a = \frac{\Gamma}{\Gamma_D}$. Essa transição acontece mais rápido quanto maior for esse parâmetro, o qual cresce com o valor da densidade.

Para esta célula, em razão das densidades envolvidas serem bem maiores que na célula de comprimento $L = 3.0$ cm, o parâmetro de Voigt aumenta consideravelmente e, portanto, esperamos que a transição Doppler para Lorentz aconteça para valores de opacidade inferiores $r_c = 10^3$ obtido para a célula maior. Contudo, isso não acontece.

Com o intuito de verificar onde ocorre essa transição, fizemos medidas para o parâmetro de Voigt ao longo do vapor, o qual varia de $a = 1.8 \times 10^{-2}$ até $a = 5.9 \times 10^{-2}$, se aproximando de $a = 10^{-1}$ para as mais altas densidades do vapor, que ocorre em torno de $r = 10^3$. Na célula maior, o parâmetro de Voigt também aumenta com o aumento da densidade, mas o valor mais próximo de $a = 10^{-1}$ passa a ocorrer para densidades bem acima do valor da transição $r_c = 10^3$.

Um possível explicação para isso é dada por nossas previsões teóricas. Por exemplo, a Fig. 3.9(b), mostra que para $a = 10^{-1}$ não existe um platô bem definido para $\alpha = 1$ igualmente como temos para o parâmetro de Voigt $a = 10^{-2}$. Esse resultado leva a crê que não existe uma transição de regime Doppler para Lorentz tão bem definida para $a = 10^{-1}$, igualmente temos para $a = 10^{-2}$. Esse é um questionamento que analisado sistematicamente pode vir a ser uma possível explicação para a transição de regime. Nesse sentido, não temos uma transição tão bem definida o quanto foi verificado para a célula maior.

Portanto, o regime de transição Doppler para Lorentz, embora diferente para ambas as células, apresentam evidências em relação à sua explicação, que, a princípio, é dada pelo parâmetro de Voigt a . Contudo, essas evidências não foram confirmadas, e para entendermos como ocorre essa transição de regime, devemos fazer novos estudos de maneira mais sistemática.

Capítulo 6

Conclusão

Os perfis de absorção de vapor alcalino são perfis de Voigt, a convolução de perfis Doppler e Lorentz [47, 163]. Para um vapor infinito com perfil de absorção Voigt foi mostrado teoricamente em [36] que o espalhamento dos fótons é do tipo voo de Lévy e tem parâmetro $\alpha = 0.5$, o qual está associado a grandes passos dados pelos fótons em grande dessintonia, nas asas do perfil Lorentz, dominando o transporte.

Em nosso experimento, em virtude das altas temperaturas envolvidas para vapor atômico de ^{133}Cs , quando a radiação incidente no vapor (laser) está ressonante com a linha D_2 do Cs, os fótons no vapor atômico ressonante sofrem múltiplos processos de espalhamentos (aprisionamento de radiação incoerente) antes de, eventualmente, escapar para o exterior da célula.

Esses múltiplos eventos de reabsorção e reemissão espontânea são caracterizados por longos passos dados pelos fótons antes de deixar o vapor, e suficientes para a ocorrência da RCF dos fótons da radiação incidente (quando a frequência do fóton emitido independe da frequência do fóton previamente absorvido), o que torna a amostra do vapor atômico de ^{133}Cs utilizada caracterizada por um perfil de emissão Voigt.

Esse perfil de emissão do vapor é determinado por dois cenários diferente, o cenário R_{II} (ausência de colisões entre os átomos), e o cenário R_{III} (presença de colisões entre os átomos). Esses cenários, caracterizados por uma RPF, têm uma RCF atingida depois de alguns eventos de espalhamento [64, 63], e explicam o comportamento dos fótons emitidos em regiões distintas do nosso vapor.

Para o cenário R_{II} , no referencial do átomo, existe uma correlação entre a frequência absorvida e emitida. Contudo, no referencial do laboratório, a emissão dos fótons é caracterizada por um perfil Doppler em torno de $\delta = 0$. Quando as densidades envolvidas fornecem $\Gamma_C \approx \Gamma_N$, devido a presença de colisões frequentes entre os átomos ($\tau_C \approx \tau$), no referencial do átomo, a correlação entre as frequências absorvidas e emitidas é perdida e, portanto, ocorre uma transição para o cenário R_{III} com a frequência de emissão sendo redistribuída em um perfil Lorentz e, no

referencial do laboratório, redistribuída por alargamento Doppler. Essa quebra de correlação entre a frequência do fóton absorvido e emitido fora da ressonância, nas asas lorentzianas, é caracterizada por uma RCF atingida rapidamente, e o nosso perfil de redistribuição das frequências é totalmente independente da frequência de absorção.

Por exemplo, para um alargamento colisional maior que a largura Doppler ($\Gamma_C > \Gamma_D$), temos RCF em cada evento de espalhamento, e para um alargamento colisional maior que a largura natural ($\Gamma_C > \Gamma_N$), atingimos o cenário R_{III} com RCF atribuída às colisões frequentes entre os átomos. Em nosso experimento, por exemplo, com uma largura lorentziana $\Gamma = 5$ MHz e um alargamento Doppler $\Gamma_D = 300$ MHz atingimos o regime de RCF para múltiplos eventos de espalhamento com perfil de emissão Voigt.

Como vimos em [36], o perfil espectral de absorção Voigt para um vapor infinito tem uma distribuição assintótica do tamanho dos passos dominada pelas asas lorentzianas, com parâmetro $\alpha = 0.5$ em concordância com o perfil Lorentz. Entretanto, na prática, uma amostra não é infinita como podemos supor teoricamente.

Assim, nesse trabalho, medimos a dependência do parâmetro α de Lévy em função do tamanho do sistema (célula de comprimento $L = 3.0$ cm) para os fótons espalhados pelo vapor atômico ressonante de ^{133}Cs , com RCF e caracterizado pelo perfil de absorção Voigt.

Por sua vez, a distribuição do tamanho dos passos para o perfil de absorção do vapor (perfil Voigt) está relacionada ao coeficiente de absorção. Por exemplo, os fótons emitidos na região caracterizada pelo núcleo Doppler têm uma probabilidade pequena de fazerem passos de grande tamanho (comparáveis com o tamanho da célula $L = 3.0$ cm), pois essa região tem um coeficiente da absorção maior quando comparado com fótons emitidos em grande dessintonização, nas asas lorentzianas, que diminui bastante, favorecendo passos maiores.

Os resultados experimentais para nosso sistema finito sugerem uma truncagem na distribuição do tamanho dos passos no vapor atômico, um VLT [17]. A truncagem, por sua vez, seleciona a região espectral do perfil de emissão Voigt que contribui para processo de difusão.

Os resultados da (Fig.5.12 e 5.13) mostram, para efeitos de truncagem no tamanho do sistema, uma mudança no parâmetro α de Lévy para o vapor com perfil Voigt em função do tamanho de sistema, em particular, observamos para a transmissão da luz difusa T_D em função da opacidade r um crossover em $r_c = 10^3$ do transporte fotônico, que divide o perfil de absorção do Vapor (perfil Voigt) em dois regimes distintos.

O regime do núcleo do perfil, caracterizado pelo perfil Doppler com $\alpha = 1.2 \pm 0.2$ para $r < r_c$, e o regime em grande dessintonia (nas asas do perfil) regido pelo perfil Lorentz com $\alpha = 0.5 \pm 0.04$ para $r > r_c$. A observação do crossover

entre os regimes Doppler e Lorentz foi possível devido a diferentes parâmetros experimentais relativos a trabalhos anteriores semelhantes em voos de Lévy em vapor atômico [17].

Os perfis espectrais Voigt encontram-se localizados entre os perfis Doppler e Lorentz, e a transição entre esses dois regimes é determinada pelo parâmetro de Voigt a . Essa transição de caráter Doppler para Lorentz acontece mais rápido quanto maior for o parâmetro de Voigt a . Mesmo para o parâmetro $a = 10^{-3}$, para o qual a distribuição do tamanho dos passos dados pelos fótons no centro de linha é muito semelhante ao perfil Doppler, os fótons das asas manifestam um comportamento tipicamente lorentziano, revelando um peso significativo na distribuição.

A Fig. 3.9, mostra que essa transição de caráter Doppler para Lorentz se faz gradualmente. Em nosso vapor, com um parâmetro de Voigt $a = 10^{-2}$, essa transição acontece em $r_c = 10^3$, que mostra a distribuição do tamanho dos passos dos fótons no vapor atômico, transitando entre um comportamento muito semelhante ao da função com distribuição espectral Doppler para um regime assintoticamente lorentziano.

Assim, o efeito de truncagem no tamanho do sistema mostra como a dessintonia dos fótons influencia na caminhada aleatória (são espalhados). Para valores de opacidade abaixo de $r_c = 10^3$, existem os longos saltos dados pelos fótons, mas somente participam da caminhada, os fótons emitidos em pequena dessintonia (no núcleo Doppler), pois em grande dessintonia, nas asas do perfil Lorentz, os fótons dão longos saltos que são maiores que o comprimento da amostra.

Entretanto, para uma amostra de opacidade maior que $r_c = 10^3$, os fótons emitidos em grande dessintonia (nas asas lorentzianas) participam da caminhada aleatória (são espalhados pelo vapor), pois seus passos são menores ou da mesma magnitude do tamanho do sistema e dominam o transporte.

Em nossos resultados (ver Fig.5.12 e 5.13), temos o regime Doppler para baixas opacidades do vapor. Nessa região Γ_C é pequeno e praticamente não temos colisões interatômicas. Além disso, o tempo de colisão τ_C é maior que o tempo de vida do estado excitado τ , o que caracteriza um espalhamento elástico dos fótons no referencial do átomo dado pelo cenário R_{II} [63, 164]. Em contrapartida, nossos resultados mostram que para $r > r_c$, temos o regime lorentziano. Em torno da opacidade crítica, as densidades ainda são caracterizadas $\Gamma_C < \Gamma$ e, portanto, não atingimos o cenário R_{III} onde as colisões são frequentes com RCF atingida uma rapidamente.

Entretanto, embora não atingido o cenário R_{III} , as poucas colisões existentes levam a frequência emitida para as asas da lorentziana. Portanto, nosso perfil é caracterizado pelo cenário R_{II} (que embora descreva os voos de Lévy assintoticamente, não representa por completo o caráter superdifusivo dos fótons num vapor

Parâmetro (α)	Valor medido	Valor Esperado
Perfil Doppler	1.2 ± 0.2	1.0
Perfil Lorentz	0.50 ± 0.04	0.5
Perfil Voigt	0.50 ± 0.04	0.5

Figura 6.1: Resultados experimentais do parâmetro α obtidos para os diferentes perfis: Doppler, Lorentz e Voigt.

atômico), mas em virtude do alargamento colisional ser menor que o alargamento natural, não chega a ser representado pelo cenário R_{III} , nas asas lorentzinas.

Esse trabalho mostra, essencialmente, que o perfil de absorção de vapor é um perfil Voigt, e como mostrado em [36], apresenta uma distribuição do tamanho dos passos dados pelos fótons no vapor atômico do tipo voos de Lévy, onde medimos o parâmetro $\alpha = 0.50 \pm 0.04$, no regime de RCF, em concordância com a distribuição do tamanho dos passos para o perfil Lorentz.

O mesmo valor $\alpha = 0.5 \pm 0.04$ para os perfis Voigt e Lorentz está associado a grandes passos dados pelos fótons em grande dessintonia, nas asas do perfil Lorentz, que dominam o transporte. Em outras palavras, como o perfil Lorentz e Voigt compartilham das mesmas asas, (tem o mesmo comportamento em grande dessintonia), apesar dos longos saltos emitidos em grande dessintonia serem em pequeno número comparado ao total de passo, são eles que regem a estatística do sistema e dominam o transporte, evidenciando, portanto, o mesmo resultado para o parâmetro α .

A tabela 6.1 mostra os resultados experimentais do parâmetro α em concordância com os valores esperados teoricamente e, dentro da faixa de erro do experimento, caracterizando, assim, a difusão de fótons aprisionados radiativamente num vapor atômico ressonante como sendo um processo superdifusivo dependente do tamanho da amostra.

Esses resultados caracterizam o espalhamentos dos fótons do tipo voos de Lévy em um vapor atômico de ^{133}Cs , onde parâmetro α foi medido experimentalmente para o perfil Voigt em função do tamanho do sistema (opacidade do vapor). Esses resultados estão em concordância com o resultado teórico em [36] dentro da faixa de erro do experimento, e acreditamos que esse trabalho possa contribuir para a compreensão dos efeitos dos tamanho de sistemas em superdifusão dos fótons em vapor atômicos.

Apêndice A

Solução das Equações de Bloch sem Amortecimento Devido à Emissão Espontânea

A.1 Descrição da Função de Onda

A.1.1 Bases

Equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$i\hbar \frac{d\Psi(r,t)}{dt} = \hat{H}\Psi(r,t) \quad (\text{A.1})$$

solução estacionária

$$\hat{H}_{atom}\Phi_n(r) = E_n\Phi_n(r) \quad (\text{A.2})$$

com

$$\Psi(r,t) = e^{\frac{-iE_n}{\hbar}t} \Phi_n(r) \quad (\text{A.3})$$

considerando um sistema de 2 níveis $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$ com seus respectivos autovaleores de energia E_1 e E_2 . A diferença de energia é então relacionada à frequência de transição $\omega_0/2\pi$

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega_0 \quad (\text{A.4})$$

O átomo interage com um campo eletromagnético externo, sendo H_{int} o Hamiltoniano de interação. O Hamiltoniano total é então:

$$\hat{H} = H_{atom} + H_{int} \quad (\text{A.5})$$

A solução da equação de Shrödinger A.1 pode ser escrita como a combinação linear dos autovetores da base $\{|\Psi_n\rangle\}$

$$\Psi(r, t) = C_1(t)\Psi_1(r, t) + C_2(t)\Psi_2(r, t) \quad (\text{A.6})$$

com $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$. Inserindo a equação A.1 na A.6 obtemos as seguintes equações para os coeficientes C_1 e C_2

$$i\frac{dC_1(t)}{dt} = C_1(t)M_{11} + C_2(t)M_{12}e^{-i\omega_0 t} \quad (\text{A.7})$$

$$i\frac{dC_2(t)}{dt} = C_1(t)M_{21}e^{i\omega_0 t} + C_2(t)M_{22} \quad (\text{A.8})$$

onde M_{mn} são os elementos de transição da matriz

A.1.2 Elementos da Matriz Dipolo

Os elementos de transição da matriz M_{mn} são dados por

$$\hbar M_{mn} = \int \Phi_m^* \hat{H}_{int} \Phi_n dV = \langle \Phi_m | \hat{H}_{int} | \Phi_n \rangle, \quad (\text{A.9})$$

na aproximação de dipolo-elétrico.

$$\hat{H}_{int} = -\hat{\mu} \cdot \mathbf{E} = \mu E_0 \cos(\omega t) \quad (\text{A.10})$$

onde $\hat{\mu}$ é o vetor momento de dipolo elétrico total. Por simetria, temos

$$M_{11} = M_{22} = 0 \quad (\text{A.11})$$

e

$$M_{12} = M_{12}^* = \frac{1}{\hbar} e E_0 r_{12} \cos(\omega t) \quad (\text{A.12})$$

onde

$$r_{12} = \int \Phi_1^* \mathbf{r} \Phi_2 dV = \langle \Phi_1 | \mathbf{r} | \Phi_2 \rangle \quad (\text{A.13})$$

é o elemento da matriz dipolo. Assim, definiremos a frequência de Rabi ω_{Rabi} como

$$\omega_{Rabi} = \frac{1}{\hbar} e E_0 r_{12} \quad (\text{A.14})$$

A.1.3 Oscilações de Rabi

Usando esses elementos da matriz, as equações acima A.7 e A.8 agora podem ser escritas como [52]:

$$i \frac{dC_1(t)}{dt} = C_2(t) \omega_{Rabi} \cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} \quad (\text{A.15})$$

$$i \frac{dC_2(t)}{dt} = C_1(t) \omega_{Rabi}^* \cos(\omega t) e^{i\omega_0 t} \quad (\text{A.16})$$

os termos dependentes do tempo $\cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t}$ podem ser reescritos usando $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ como

$$\cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} = \frac{1}{2} (e^{-i(\omega+\omega_0)t} + e^{-i(\omega-\omega_0)t}) \quad (\text{A.17})$$

onde $|\omega - \omega_0| \ll \omega$. Dessa forma, podemos desprezar os termos de oscilação rápida $\omega + \omega_0$. A evolução será regido pelos termos de oscilação lenta. Esta aproximação é chamada de Onda Giratória [52] *Rotating Wave Approximation (RWA)*.

$$i \frac{dC_1(t)}{dt} = C_2(t) \omega_{Rabi} \frac{1}{2} e^{-i(\omega-\omega_0)t} \quad (\text{A.18})$$

$$i \frac{dC_2(t)}{dt} = C_1(t) \omega_{Rabi}^* e^{i(\omega-\omega_0)t} \quad (\text{A.19})$$

para a dessintonização zero, onde $\omega = \omega_0$ encontra-se então as bem conhecidas oscilações de Rabi entre o estado fundamental e excitado do sistema de dois níveis acionado. Com as condições iniciais $|C_1|^2 = 1$ e $|C_2|^2 = 0$, temos

$$|C_1|^2 = \cos^2\left(\frac{\omega_{Rabi}}{2}t\right) \quad (\text{A.20})$$

$$|C_2|^2 = \sin^2\left(\frac{\omega_{Rabi}}{2}t\right) \quad (\text{A.21})$$

As equações A.7 e A.8 fornecem uma descrição exata do estado de um átomo de dois níveis (sem decaimento espontâneo) interagindo com um campo elétrico oscilante. Portanto, para solução geral, são interessante não os coeficientes simples C_i , mas as probabilidades $|C_i^2|$.

A.1.4 Solução das Equações de Bloch sem Amortecimento Devido à Emissão Espontânea

Uma vez conhecidas as oscilações de Rabi, as equações de movimento para a matriz de densidade são obtidas através das equações de movimento dos coeficientes da equação C_1 e C_2 (Eqs. A.20 e A.21), onde $\rho_{11} = |C_1|^2$, $\rho_{22} = |C_2|^2$, $\rho_{12} = C_1 C_2^*$ e $\rho_{21} = C_2 C_1^*$

Assim, com o produto desses coeficientes C_1 e C_2 , podemos formar equações para a matriz de densidade do átomo, que tomam a forma das Eqs. 1.15 e 1.16. Essas equações estão relacionadas segundo as Eqs. 1.20 e 1.21, onde os elementos de matriz obtidos pela Eq. 1.14, sendo $V = M_{mn}$.

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = -\frac{d\rho_{11}}{dt} = -i \cos(\omega t) [\Omega_{Rabi}^* e^{i\omega_0 t} \rho_{12} - \Omega_{Rabi} e^{-i\omega_0 t} \rho_{21}] \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = \frac{d\rho_{21}^*}{dt} = i\omega_{Rabi} \cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} (\rho_{11} - \rho_{22}) \quad (\text{A.23})$$

aplicando a aproximação de onda rotativa: ($|\delta| = |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$)

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = -\frac{d\rho_{11}}{dt} = -\frac{1}{2}i\Omega_{Rabi}^* e^{i(\omega_0 - \omega)t} \rho_{12} + \frac{1}{2}i\Omega_{Rabi} e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \rho_{21} \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = \frac{d\rho_{21}^*}{dt} = \frac{1}{2}i\omega_{Rabi} e^{-i(\omega_0 - \omega)t} (\rho_{11} - \rho_{22}) \quad (\text{A.25})$$

Resolvemos o sistema de equações através da substituição

$$\rho_{11}(t) = \sigma_{11}e^{\lambda t} \quad (\text{A.26})$$

$$\rho_{22}(t) = \sigma_{22}e^{\lambda t} \quad (\text{A.27})$$

$$\rho_{12}(t) = \sigma_{12}e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \quad (\text{A.28})$$

$$\rho_{21}(t) = \sigma_{21}e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \quad (\text{A.29})$$

o que leva à seguinte equação:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \frac{1}{2}i\omega_{Rabi}^* & -\frac{1}{2}i\omega_{Rabi} \\ 0 & -\lambda & -\frac{1}{2}i\omega_{Rabi}^* & \frac{1}{2}i\omega_{Rabi} \\ \frac{1}{2}i\omega_{Rabi} & -\frac{1}{2}i\omega_{Rabi} & i(\omega_0 - \omega) - \lambda & 0 \\ -\frac{1}{2}i\omega_{Rabi}^* & \frac{1}{2}i\omega_{Rabi}^* & 0 & -i(\omega_0 - \omega) - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.30})$$

e a seguinte equação de autovalores

$$\lambda^2[\lambda^2 + (\omega_0 - \omega)^2 + |\Omega_{Rabi}|^2] = 0 \quad (\text{A.31})$$

resolvendo a equação temos as seguintes soluções para λ

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (\text{A.32})$$

$$\lambda_3 = i\Omega \quad (\text{A.33})$$

$$\lambda_4 = -i\Omega \quad (\text{A.34})$$

Dessa forma , temos Ω dado por

$$\Omega = \sqrt{[(\omega_0 - \omega)^2 + |\Omega_{Rabi}|^2]} \quad (\text{A.35})$$

para $\omega = \omega_0$, temos

$$\Omega = \Omega_{Rabi} \quad (\text{A.36})$$

A solução Geral é então

$$\rho_{ij} = \rho_{ij}^1 + \rho_{ij}^3 e^{i\Omega t} + \rho_{ij}^4 e^{-i\Omega t} \quad (\text{A.37})$$

Para as condições iniciais especiais:

$$\rho_{11}(0) = 1 \quad (\text{A.38})$$

$$\rho_{22} = 0 \quad (\text{A.39})$$

$$\rho_{12} = \rho_{21} = 0 \quad (\text{A.40})$$

obtemos

$$\rho_{22}(t) = \frac{|\Omega_{Rabi}|^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \quad (\text{A.41})$$

$$\rho_{12}(t) = e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \frac{|\Omega_{Rabi}|^2}{\Omega^2} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) [-(\omega_0 - \omega) \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\omega \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right)] \quad (\text{A.42})$$

Assim, na frequência ressonante $\omega = \omega_0$, as soluções simplificam-se para

$$\rho_{22}(t) = \sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega_{Rabi}t\right) \quad (\text{A.43})$$

$$\rho_{12}(t) = \frac{|\Omega_{Rabi}|^2}{\Omega^2} \sin\left(\frac{1}{2}\Omega_{Rabi}t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\Omega_{Rabi}t\right) \quad (\text{A.44})$$

Apêndice B

Distribuição de Velocidades de Maxwell-Boltzmann

O físico escocês James Clerk Maxwell desenvolveu sua teoria cinética dos gases em 1859. Maxwell determinou a distribuição de velocidades entre as moléculas de um gás, que foram posteriormente generalizada em 1871 pelo físico alemão, Ludwig Boltzmann, para expressar a distribuição de energias entre as moléculas.

B.1 Gás Clássico

A descrição da distribuição de velocidade de Maxwell-Boltzmann é feita utilizando o formalismo canônico. Assim, consideremos um gás clássico de N partículas monoatômicas de massa m , definido pelo hamiltoniano

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{P_i^2}{2m} + \sum_{i<j} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (\text{B.1})$$

onde $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ é um potencial entre pares formado por um termo de repulsão de curta distância, ou seja, $V(r) \rightarrow \infty$ para $r \rightarrow 0$, e uma parte atrativa que se anula rapidamente para $r \rightarrow \infty$, e mais rapidamente que r^{-1} uma vez que a origem do potencial é eletrostática e blindada pelos efeitos de interação entre as várias outras cargas presentes. Um exemplo típico é o potencial de Lennard-Jones

$$V_{LJ} = 4\epsilon \left[\frac{\sigma^{12}}{r^{12}} - \frac{\sigma^6}{r^6} \right] \quad (\text{B.2})$$

onde ϵ é o valor mínimo do potencial e $r = 2^{\frac{1}{6}}\sigma$ é a separação entre as partículas para o qual esse mínimo ocorre.

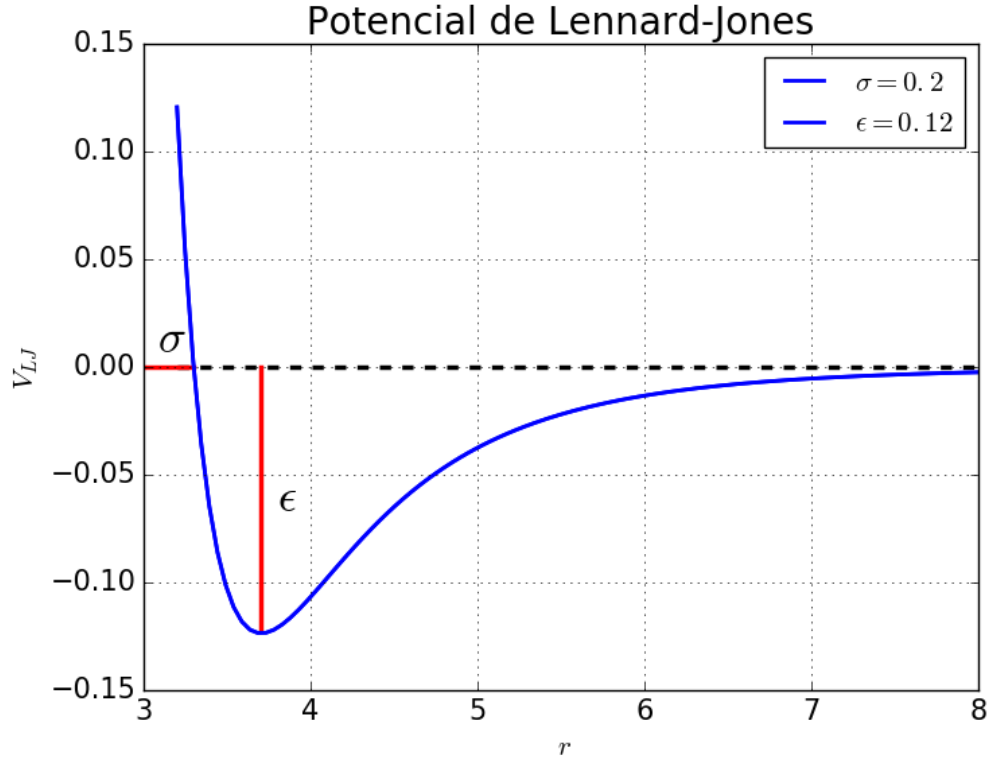


Figura B.1: Representação do potencial de Lennard-Jones V_{LJ} em função r entre as distância entre duas partículas. A escala de comprimento $\sigma = 0.2$ representa a distância na qual o potencial intermolecular entre dois átomos é zero . A medida de quão fortemente dois átomos de atraem é dada por $\varepsilon = 0.12$, e representa o valor mínimo do potencial.

O sistema clássico no formalismo do ensemble canônico é descrito assumindo que um volume V está em contato com um reservatório térmico a uma temperatura T separado por paredes diatérmicas. A função de partição canônica do sistema é dada por

$$Z = \frac{1}{N!h^{3N}} \int \cdots \int d^3r_1 \cdots d^3r_N \int \cdots \int d^3p_1 \cdots d^3p_N e^{-\beta H} \quad (\text{B.3})$$

sendo a integral sobre as coordenadas espaciais está limitada ao volume V . A integração sobre as coordenadas de momento é similar ao gás ideal, e reduz-se a um produto de $3N$ integrais gaussianas já bastante conhecidas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} dp = \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.4})$$

Dessa forma

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{\frac{3N}{2}} Q_N \quad (\text{B.5})$$

onde

$$Q_N = \int_V \dots \int_V d^3r_1 \dots d^3r_N e^{-\beta \sum_{i<j} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)} \quad (\text{B.6})$$

B.1.1 Gás Ideal Clássico

A grande dificuldade no tratamento dos gases reais está justamente no termo Q_N . Portanto, vamos explorar o caso mais simples, o gás clássico ideal, onde não há interação entre as partículas e toda a energia é cinética.

O gás clássico ideal de Maxwell consiste num ensemble de moléculas movendo-se rápido e aleatoriamente, colidindo umas com as outras e nas paredes do contêiner. Maxwell fez quatro suposições para o gás:

O diâmetro das moléculas é muito menor que a distância entre elas.

As colisões entre moléculas conserva a energia.

As posições e velocidades das moléculas são inicialmente aleatórias.

As moléculas se movem entre colisões sem interagirem com uma velocidade constante em linha reta.

Dessa forma o termo $Q_N = V^N$, e a função de partição para o gás clássico ideal no ensemble canônico é

$$Z_{ideal} = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{\frac{3N}{2}} \quad (\text{B.7})$$

Assim, através da aproximação de Stirling $\ln(N) = N \ln(N) - N$, a energia livre de Helmholtz é,

$$F(T, V, N) = -k_B T \ln Z(T, V, N) = -N k_B T [1 + \ln\left\{\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}] \quad (\text{B.8})$$

A partir da energia livre, temos

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = \frac{N k_B T}{V} \Rightarrow pV = N k_B T \quad (\text{B.9})$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = N k_B \left[\frac{5}{2} + \ln\left\{\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}\right] \quad (\text{B.10})$$

$$\mu = -\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = -k_B T \ln\left\{\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} \quad (\text{B.11})$$

Relacionando as equações B.10 e B.8, temos a conhecida energia do gás clássico ideal

$$U = F + TS = \frac{3}{2} N k_B T \quad (\text{B.12})$$

B.1.2 Distribuição de Maxwell-Boltzmann

Consideremos a probabilidade (canônica) de encontrarmos uma partícula do gás ideal com velocidade entre $\vec{v}$ e $\vec{v} + d\vec{v}$ independente de sua posição,

$$p(\vec{v})d^3v = \frac{V}{Z_1} e^{\frac{-\beta P^2}{2m}} d^3p \quad (\text{B.13})$$

onde

$$Z_1 = V \int e^{\frac{-\beta P^2}{2m}} d^3p = V \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{B.14})$$

Dessa forma, temos

$$p(\vec{v})d^3v = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-\beta P^2}{2m}} d^3p \quad (\text{B.15})$$

A distribuição de probabilidade depende apenas do módulo da velocidade. Portanto

$$\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0 \quad (\text{B.16})$$

Como o espaço de velocidades (momentos) é isotrópico, integrando em todas as direções temos

$$p(\vec{v})d^3v \Rightarrow p(v)4\pi v^2 dv = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-\beta P^2}{2m}} 4\pi v^2 dv = f(v)dv \quad (\text{B.17})$$

Assim, a distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann para o gás ideal é

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{\frac{-\beta P^2}{2m}} \quad (\text{B.18})$$

Maximizando $f(v)$, encontramos a velocidade (em módulo) mais provável $\bar{v}$

$$\begin{aligned}
\frac{df(v)}{dv}\bigg|_{\bar{v}} &= 0 \\
\Rightarrow 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}\left[-\frac{m}{k_B T}e^{\frac{-mv^2}{2k_B T}}v^3 + 2ve^{\frac{-mv^2}{2k_B T}}\right] &= 0 \\
-\frac{m}{2k_B T}\bar{v} + \bar{v} &= 0 \\
\bar{v} &= \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Portanto, o valor médio do módulo da velocidade é,

$$\langle v \rangle = \langle |\bar{v}| \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^3 e^{\frac{-mv^2}{2k_B T}} dv \tag{B.20}$$

fazendo $y = \frac{mv^2}{2k_B T}$, temos

$$\begin{aligned}
\langle v \rangle &= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2k_B T}{m}\right)^2 \frac{1}{2} \int_0^\infty y e^{-y} dy \\
\langle v \rangle &= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2k_B T}{m}\right)^2 \frac{1}{2} \Gamma(2)
\end{aligned} \tag{B.21}$$

como $\Gamma(2) = 1$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\left(\frac{8k_B T}{m\pi}\right)} \tag{B.22}$$

A velocidade quadrática média calcula-se da mesma forma, assim

$$\begin{aligned}
\langle v^2 \rangle &= \int_0^\infty v^2 f(v) dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^4 e^{\frac{-mv^2}{2k_B T}} dv \\
\langle v^2 \rangle &= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2k_B T}{m}\right)^2 \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\frac{3}{2}} e^{-y} dy \\
\langle v^2 \rangle &= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2k_B T}{m}\right)^2 \frac{1}{2} \Gamma(5/2)
\end{aligned} \tag{B.23}$$

onde $\Gamma(5/2) = \frac{3}{2}\Gamma(3/2) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(3/2) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$, dessa forma

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m} \tag{B.24}$$

A energia cinética por partícula é,

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m} \quad (\text{B.25})$$

e, da isotropia de distribuição de velocidades $f(\vec{v})$, temos que,

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle = \frac{k_B T}{m} \quad (\text{B.26})$$

Apêndice C

Equação de Difusão Clássica

A dinâmica do processo difusivo da caminhada aleatória de uma partícula é regida pelo TCL, que pode ser descrita pela equação de Fokker-Planck (EFP), uma equação diferencial parcial que determina a evolução temporal da distribuição de probabilidade da partícula. Portanto, apresentaremos a (EFP) e sua dinâmica de difusão normal associada como uma ferramenta na compreensão do movimento superdifusivo dos fótons no vapor atômico.

A (EFP) é a equação de difusão mais geral. Portanto, mais uma vez, podemos partir de uma descrição da difusão em termos de um passeio aleatório, através de duas suposições: (i) Assumimos agora que o valor médio $\langle x \rangle$ dos passos do passeio aleatório pode ser diferente de zero, que corresponde a um movimento sistemático das partículas na direção do sinal do $\langle x \rangle$, e (ii) assumimos que tanto a média quanto a variância pode ser espacialmente dependente, $\langle x \rangle = \langle x \rangle(x)$ e $\langle \sigma^2 \rangle = \langle \sigma^2 \rangle(x)$, o que significa que a distribuição de incrementos depende da localização espacial, ou seja, é da forma $q_{\Delta x, x}(\Delta x, x)$. Essa suposições nos permite escrever a distribuição de probabilidade da partícula como

$$P(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x - \Delta x, t - \Delta t) q_{\Delta x, x}(\Delta x, x - \Delta x) d\Delta x. \quad (\text{C.1})$$

Essa equação é conhecida como equação de Chapman-Kolmogorov [165], onde $q_{\Delta x, x}(\Delta x, x)$ é a densidade de probabilidade de estar na posição x e dar um passo Δx no tempo Δt . Dessa forma, considerando uma caminhada aleatória unidimensional, $x(t) : t > 0$ e a relação de Chapman-Kolmogorov, temos

$$P(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2, \quad (\text{C.2})$$

para $t_1 < t_2 < t_3$ e

$$P(x_2, t_2) = \int P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P(x_1, t_1) dx_1, \quad (\text{C.3})$$

onde a Eq. C.3 mostra que distribuição de probabilidade $P(x_2, t_2)$ é propagada no intervalo de tempo $t_2 - t_1 \geq 0$ por meio da probabilidade condicional $P(x_2, t_2|x_1, t_1)$, chamado de propagador de distribuição $P(x_2, t_2)$.

A Eq. C.2 representa um processo markoviano homogêneo, ou seja, a distribuição de probabilidade do próximo passo depende apenas do estado atual e não da sequência de eventos de precederam, portanto definindo $t_3 = \tau + t$ e $t_2 = t$, temos

$$P_{t+\tau}(x_1|x_3) = \int P_\tau(x_3|x_2)P_t(x_2|x_1)dx_2, \quad (\text{C.4})$$

Expandindo $P_\tau(x_3|x_2)$ em série de Taylor sobre $\tau \approx 0$ e seguindo o procedimento padrão em [166], temos

$$P_\tau(x_3|x_2) = (1 - a_0\tau)\delta(x_3 - x_2) + \tau W(x_3, x_2) + O(\tau^2), \quad (\text{C.5})$$

com

$$a_0 = \int W(x_2, x_3)dx_2, \quad (\text{C.6})$$

Dessa forma, podemos expressar a Eq. C.5, tal como

$$P_{t+\tau}(x_1|x_3) = \int [(1 - a_0\tau)\delta(x_3 - x_2) + \tau W(x_3, x_2)]P_t(x_2|x_1)dx_2, \quad (\text{C.7})$$

$$P_{t+\tau}(x_1|x_3) = \int (1 - a_0(x_3)\tau P(x_3, x_1) + \tau \int W(x_3, x_2)]P_t(x_2|x_1)dx_2, \quad (\text{C.8})$$

onde,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{P_{t+\tau}(x_1|x_3) - P_t(x_3, x_1)}{\tau} = \frac{\partial P_t(x_3, x_1)}{\partial t}, \quad (\text{C.9})$$

Finalmente, temos

$$\frac{\partial P_t(x_3, x_1)}{\partial t} = \int W(x_3|x_2)P_t(x_2|x_1) - W(x_2|x_3)P_t(x_3|x_1)dx_2. \quad (\text{C.10})$$

Assim, a generalização da caminhada aleatória unidimensional, $x(t) : t > 0$, fica

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \int T(x|x')P(x'|t) - T(x'|x)P(x|t)dx'. \quad (\text{C.11})$$

A Eq. C.11 é uma equação mestre na descrição de uma partícula de caminhada aleatória no intervalo unidimensional finito, onde x e x' são variáveis contínuas e

$T(x|x')$ representa a taxa de transição para o caminhante aleatório para realizar um salto da posição x' para x com comprimento $|x - x'|$. Então, redefinindo $T(x|x') = T(x', x_0)$ com $x_0 = x - x'$, reescrevemos a Eq. C.11 como

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \int T(x - x_0; x_0) P(x - x_0, t) dx_0 - P(x, t) \int P(x; -x_0) dx_0. \quad (\text{C.12})$$

onde, consideramos $T(x', x_0) \simeq 0$ para $|x_0| < \delta$ e $T(x' + \Delta x; x_0) \simeq T(x', x_0)$ para $|\Delta x| < \delta$, assim como que $P(x, t)$ varia lentamente, que nos permite expandir o produto no integrando acima da Eq. C.12 na série de Taylor até a segunda ordem, dando origem a

$$\begin{aligned} T(x - x_0; x_0) P(x - x_0, t) &= T(x; x_0) P(x, t) \\ -\frac{\partial}{\partial x} [T(x; x_0) P(x, t)] x_0 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [T(x; x_0) P(x, t)] x_0^2 + O(x_0^3) \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

substituindo este resultado na Eq. C.12, temos

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \int F dx_0 - \int x_0 \frac{\partial}{\partial x} F dx_0 + \frac{1}{2} \int x_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} F dx_0 - P(x, t) \int P(x; -x_0) dx_0, \quad (\text{C.14})$$

onde $F = T(x; x_0) P(x, t)$ e

$$a_i = \int_{-\infty}^{\infty} x_0^i T(x, x_0) dx_0, \quad (\text{C.15})$$

são os momentos da expansão Kramer-Moyal, Eq. C.12. Dessa forma, temos

$$\frac{\partial P_t(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [a_1(x) P(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [a_2(x) P(x, t)]. \quad (\text{C.16})$$

A Eq. C.16 é a chamada (EFP), onde para uma partícula em movimento browniano, temos

$$a_1(x) = \frac{\langle \Delta x \rangle_x}{\Delta t} = 0, \quad (\text{C.17})$$

$$a_2(x) = \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle_x}{\Delta t} = 2D, \quad (\text{C.18})$$

e Eq. C.16 se transforma na chamada equação de difusão clássica.

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t). \quad (\text{C.19})$$

A Eq. C.19 é a EFP para um processo de difusão normal clássico, conhecido como movimento browniano, obtido pela primeira vez pelo físico holandês Jan Ingenhousz em 1827, por Robert Brown, que o estudou através do movimento errático de grão de pólen e, por sua vez, Einstein nomeou esse movimento de browniano, em sua homenagem.

Uma característica importante da difusão normal é que o segundo momento do associado a distribuição de probabilidade é proporcional a Dt , onde D representa o coeficiente de difusão, conforme visto na Eq. C.19. Em outras palavras, a raiz quadrada média (rms) do desvio é proporcional à raiz quadrada do tempo, $\sigma \propto t^{1/2}$.

Apêndice D

Cálculo Teórico do Coeficiente de Absorção

Nesse apêndice, escrevemos o código em linguagem Python que calcula do coeficiente de absorção do vapor atômico $K(\nu)$ em função da frequência.

Código

Iniciando os arrays

```
Ichil = []  
Ir = []  
a = []  
t1 = []  
T = []
```

Espessura da célula

$$LL = 3.e - 2$$

Densidade em m-3.

$N = \dots$ A densidade N assume o valor que ajusta a curva de transmissão teórica do feixe laser sobre a curva experimental obtida para uma determinada medida.

Constantes físicas

$\epsilon_0 = 8.85e - 12$ Permissividade elétrica

$c = 299792458$ Velocidade da luz
 $l = 852e - 9$ Comprimento de onda
 $hbar = 6.63e - 34$ Contante de Planck normalizada

Calculo da velocidade mais provável

$Temp = 273. + 100.$ temperatura em Kelvin
 $u = np.sqrt(2.*1.3806e-23*Temp/(1.66E-27*132.9));$ onde u é a velocidade mais provável.

Definição da distribuição da velocidade de Maxwell-Boltzmann

$def MB(v) :$
 v é velocidade
 $return 1./(np.sqrt(np.pi) * u) * np.exp(-v * v/(u * u))$

Definição da largura homogenea (em Hz)

$G = 5.234e6$

O momento de dipole elétrico $m = \langle J|er|J' \rangle$ fica

$m = 3.8e - 29/np.sqrt(3.)$

onde fator $sqrt(3)$ é pelo fato de usarmos polarização linear.

A largamento Colisional GC é uma função da densidade N , tal que

$GC = 9. * 1e - 8 * 1e - 6 * N$

A largura homogênea GT é soma da largura natural com a largura colisional e fica

$GT = G + GC$
 $print('GC', GC)$ fornece o valor de GC

A força relativa entre as transições hiperfinas é dada a partir da tabela 10 de Daniel Steck em [152].

$C45 = 1.833$
 $C44 = 0.875$
 $C43 = 0.292$

Para o cálculo da seção de choque Σ (função de Voigt), definimos susceptibilidade como:

def *chi1*(*v*, *x*) :

x é frequência no referencial do laboratório

delta é a dessintonia no referencial do átomo com velocidade *v*

Escolhemos a transição $4 \rightarrow 5$ como zero de dessintonização, definida por:

$$\text{delta45} = x - v/l - 126e + 6,$$

delta44 e *delta43* são dessintonizações com relação às transições $4 \rightarrow 4$ e $4 \rightarrow 3$, definidas como:

$$\text{delta44} = x - v/l + 251.09e6 - 126e + 6$$

$$\text{delta43} = x - v/l + 452.38e6 - 126e + 6$$

Para a Ordem 1

$$A = 9./16. * N * 2 * 2. * np.pi/l * 1./(e0 * hbar * GT),$$

o fator 9/16 corresponde a fração dos átomos no estado fundamental $F = 4$

$$a45 = A * C45 * m * m * 1./(1. + 4. * \text{delta45} * \text{delta45}/GT ** 2)$$

$$a44 = A * C44 * m * m * 1./(1. + 4. * \text{delta44} * \text{delta44}/GT ** 2)$$

$$a43 = A * C43 * m * m * 1./(1. + 4. * \text{delta43} * \text{delta43}/GT ** 2)$$

$$\text{return } 1. * (a45 + a44 + a43)$$

Para cada frequência *x* faremos uma integral em velocidade.

t é a lista contendo os pontos de frequência usados para os calculos.

Os valores da lista *t* devem ser adaptados segundo a densidade usada

$$t = np.arange(-2.5e9, 2.5e9, 1e7)$$

vt é a lista contendo os valores de velocidade para integração

$$vt = np.arange(-1000, 1001, 0.1)$$

Integração de velocidade é feita usando o Método do trapézio. A varredura em frequência fica

forjjint :

$$a01 = 0$$

$$r1 = 0$$

```
print(jj)
```

Integração de velocidade

```
forkkint :
```

```
a11 = (MB(kk) * chi1(kk, jj))
```

```
r1 = r1 + (a01 + a11)/2 * 0.1
```

```
a01 = a11
```

Escrita de uma lista de coeficiente de absorção

```
a.append(r1)
```

Esse código gera a lista *a* do coeficiente de absorção, que é utilizada para o cálculo da densidade do vapor. Esse cálculo é feito, através do ajuste de curvas teóricas de transmissão do feixe laser sobre as curvas experimentais geradas para cada temperatura considerada.

Curvas teóricas de absorção do feixe laser

```
T[:] = [1. * np.exp(-k * LL)forkina]
```

Conversão da frequência em MHz

```
tMHz[:] = [k/1e6forkint]
```

```
np.savetxt("Transmissao.dat", np.c_[tMHz, T], delimiter =' ...')    salva os  
dados em formato .dat
```

```
plt.figure(1)    plota uma gráfico
```

```
plt.plot(tMHz, T)    plota o gráfico de transmissão do feixe laser em função  
da frequência.
```

```
plt.show()    mostra o gráfico.
```

Esse curva é plotada no mesmo gráfico da curva experimental obtida, onde o ajustamos a sobreposição das curva até atingir a perfeição, mediante variação da densidade do vapor. Nesse momento é inferida a densidade do vapor.

Bibliografia

- [1] D. Mihalas, *Stellar Atmospheres*, 2 nd Ed., (Freeman, San Francisco 1978).
- [2] A.F. Molisch, B.P. Oehry, *Radiation Trapping in Atomic Vapours* (Oxford, Oxford 1998).
- [3] J. M. Proud, L. H. Luessen (Editores), *Radiative processes in discharge plasmas*, NATO ASI Series, Series B Physics, Plenum Press, New York (1986).
- [4] M.N. Berberan-Santos, E. Pereira, J.M.G. Martinho, *Dynamics of Radiative Transport*, in D.L. Andrews, A.A. Demidov (Eds.), *Resonance Energy Transfer* (John Wiley e Sons, Chichester 1999).
- [5] E. J. N. Pereira, *Transporte radiativo de energia de excitação electrónica*, Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Lisboa (2000).
- [6] G. E. Thomas, K. Stamnes, *Radiative transfer in the atmosphere and ocean*, Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- [7] M. F. Modest, *Radiative heat transfer*, McGraw-Hill, New York (1993).
- [8] R. Siegel, J. R. Howell, *Thermal radiation heat transfer*, 3a Ed., Taylor e Francis, Washington (1992).
- [9] F. Bardou, J.P. Bouchaud, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji, *Lévy Statistics and Laser Cooling* (Cambridge, Cambridge 2002).
- [10] E. A. Milne, *The diffusion of imprisoned radiation through a gas*, J. London Math. Soc. 1, 40-51 (1926).
- [11] K.T. Compton, *Theory of ionization by cumulative action and the low voltage arc*, Phys. Rev. 20 (1922),p. 283.
- [12] K. T. Compton, *Some properties of resonance radiation and excited atoms*, Phil. Mag. 45, 750-760 (1923).

- [13] T. Holstein, Imprisonment of resonance radiation in gases, *Phys. Rev.* 72 (1947), p. 1212.
- [14] A. Miron, Universality in the Onset of Super-Diffusion in Lévy Walks, *Phys. Rev. Lett.* 124, 140601 (2020).
- [15] P. Barthelemy, J. Bertolotti, and D. S. Wiersma, A Lévy flight for light, *Nature* 453, 495 (2008).
- [16] M. Leadbeater, V. I. Falko, and C. J. Lambert, Lévy Flights in Quantum Transport in Quasiballistic Wires, *Phys. Rev. Lett.* 81, 1274 (1998).
- [17] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, Stochastic process with ultraslow convergence to a Gaussian: the truncated Lévy flight, *Phys. Rev. Lett.* 73, 2946 (1994).
- [18] Martine Chevrollier- Radiation trapping and Lévy flights in atomic vapours: an introductory review. *Contemporary Physics* Vol. 53, No. 3, May–June 2012, 227–239.
- [19] Lévy, P. (1925) – “Calcul des probabilités”. Gauthier Villar, Paris.
- [20] Trotta, E. M. and Zimbardo, G., Quasi-ballistic and superdiffusive transport for impulsive solar particle events *A A* 530, A130 (2011).
- [21] M. F. Shlesinger, B. West, and J. Klafter, Lévy dynamics of enhanced diffusion: Application to turbulence, *Phys. Rev. Lett.* 58, 1100 (1987).
- [22] K. Pfeilsticker, F. Erle, O. Funk, H. Veitel, and U. Platt, First geometrical pathlengths probability density function derivation of the skylight from spectroscopically highly resolving oxygen A-band observations: 1. Measurement technique, atmospheric observations and model calculations, *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* 103, 11483 (1998).
- [23] B. Podobnik, A. Valentinčič, D. Horvatić, and H. E., Asymmetric Lévy flight in financial ratios, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 108, 17883 (2011).
- [24] S. C. Lera and D. Sornette, Gross domestic product growth rates as confined Lévy flights: Towards a unifying theory of economic growth rate fluctuations, *Phys. Rev. E* 97, 012150 (2018).
- [25] S. Huda, B. Weigelin, K. Wolf, K. V. Tretiakov, K. Polev, G. Wilk1, M. Iwasa, F. S. Emami, J. W. Narojczyk, M. Banaszak, S. Soh, D. Pilans, A. Vahid,

- M. Makurath, P. Friedl, G. G. Borisy, K. Kandere-Grzybowska, and B. A. Grzybowski, Lévy-like movement patterns of metastatic cancer cells revealed in microfabricated systems and implicated in vivo, *Nature Communications* 9, 4539 (2018).
- [26] B. Rios-Uzeda, E. Brigatti, and M. V. Vieira, Lévy like patterns in the small-scale movements of marsupials in an unfamiliar and risky environment ,*Scientific Reports* 9, 2737 (2019).
- [27] G. M. Viswanathan, V. Afanasyev, S. V. Buldyrev, E. J. Murphyt, P. Princet, and H. E. Stanley, Lévy flight search patterns of wandering albatrosses, *Nature* 381, 413 (1996).
- [28] G. Viswanathan, E. Raposo, and M. da Luz, Lévy flights and superdiffusion in the context of biological encounters and random searches, *Physics of Life Reviews* 5, 133 (2008).
- [29] M. C. González, C. A. Hidalgo, and A.-L. Barabási, Understanding individual human mobility patterns, *Nature* 453, 779 (2008).
- [30] A. Reynolds, E. Ceccon, C. Baldauf, T. K. Medeiros, and O. Miramontes, Lévy foraging patterns of rural humans, *PLOS ONE* 13, e0199099 (2018).
- [31] D. Brockmann, L. Hufnagel, and T. Geisel, The scaling laws of human travel, *Nature* 439, 462 (2006).
- [32] B. Gross, Z. Zheng, S. Liu, X. Chen, A. Sela, J. Li, D. Li, and S. Havlin, Spatio-temporal propagation of COVID-19 pandemics, *EPL (Europhysics Letters)* 131, 58003 (2020).
- [33] T. D. V. Dye, E. Muir, L. Farovitch, S. Siddiqi, and S. Sharma, Conducting an immersive community-based assessment of post-hurricane experience among Puerto Ricans: lived experience of medical ecology in an environmental disaster and migration ,*Infectious Diseases of Poverty* 9 (2020).
- [34] C. J. Tessone, M. Cencini, and A. Torcini, Synchronization of Extended Chaotic Systems with Long-Range Interactions: An Analogy to Lévy-Flight Spreading of Epidemics ,*Phys. Rev. Lett.* 97, 224101 (2006).
- [35] H. Janssen, K. Oerding, F. van Wijland, and H. Hilhorst, Lévy-flight spreading of epidemic processes leading to percolating clusters ,*The European Physical Journal B* 7, 137 (1999).

- [36] Eduardo Pereira, José MG Martinho, and Mário N Berberan-Santos. Photon trajectories in incoherent atomic radiation trapping as lévy flights. *Physical review letters*, 93(12):120201, 2004.
- [37] L. Giuggioli, G. M. Viswanathan, V. M. Kenkre, R. R. Parmenter, and T. L. Yates, European Physical Society, Effects of finite probing windows on the interpretation of the multifractal properties of random walks, *Europhysics Letters (EPL)* 77, 40004 (2007).
- [38] T. Svensson, K. Vynck, E. Adolfsson, A. Farina, A. Pifferi, and D. S. Wiersma, Light diffusion in quenched disorder: Role of step correlations, *Phys. Rev. E* 89, 022141 (2014).
- [39] P. Barthelemy, J. Bertolotti, K. Vynck, S. Lepri, and D. S. Wiersma, Role of quenching on superdiffusive transport in two-dimensional random media, *Phys. Rev. E* 82, 011101 (2010).
- [40] Q. Baudouin, R. Pierrat, A.Eloy, E. Nunes-Pereira, P.A.Cuniasse, N. Mercadier, and R. Kaiser, Signatures of Lévy flights with annealed disorder, *Phys. Rev. E* 90, 052114 (2014).
- [41] M. O. Araújo, T. P. de Silans, and R. Kaiser, Lévy flights of photons with infinite mean free path, *Phys. Rev. E* 103, L010101 (2021).
- [42] R. Savo, M. Burrese, T. Svensson, K. Vynck, and D. S. Wiersma, Walk dimension for light in complex disordered media, *Phys. Rev. A* 90, 023839 (2014).
- [43] J. Bertolotti, K. Vynck, L. Pattelli, P. Barthelemy, S. Lepri, and D. S. Wiersma, Engineering Disorder in Superdiffusive Lévy Glasses, *Adv. Funct. Mater.* 20, 965 (2010).
- [44] N. Mercadier, W. Guérin, M. Chevroliier, and R.Kaiser, Lévy flights of photons in hot atomic vapours, *Nat. Phys.* 5 (2009), p. 602.
- [45] N. Mercadier, M. Chevroliier, and W. G. and R. Kaiser, Microscopic characterization of Lévy flights of light in atomic vapors, *Phys. Rev. A* 87, 063837 (2013).
- [46] Daniel A. Steck, *Quantum and Atom Optics*, available online at <http://steck.us/teaching> (revision 0.8.10, 28 August 2012).
- [47] Weiner, John, 1943. *Light-matter interaction, Volume 1 - Fundamentals and Applications* / John Weiner, Ping-Tong Ho.

- [48] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Laloe. Quantum mechanics, Vol 01. 1977.
- [49] Atomes et Lumière Interaction Matière Rayonnement, Claude FABRE, Laboratoire Kastler Brossel Université Pierre et Marie Curie, case 7475252 Paris cedex 05, France.
- [50] Jun John Sakurai, San-Fu Tuan, and Eugene D Commins. Modern quantum mechanics. American Journal of Physics, 63:93, 1995.
- [51] Robert W Boyd. Nonlinear Optics. Academic press, 2003.
- [52] Rodney Loudon. The Quantum Theory of Light. Oxford university press, 2000.
- [53] Orazio Svelto. Principles of Lasers. Springer, 2010.
- [54] V. Jacques et al 2009, Nonlinear Spectroscopy of Rubidium: An Undergraduate Experiment, Eur. J. Phys. 30 921.
- [55] Christopher Foot. Atomic physics. 2008.
- [56] G.D. Roston, F.S. Obaid, Exact analytical formula for Voigt spectral line profile, Journal of Quantitative Spectroscopy e Radiative Transfer 94 (2005) 255-263.
- [57] Cowan RD. Theory of Atomic Structure and Spectra. Berkeley: University of California Press; 1981.
- [58] Mavrodineau R, Boiteux H. Plasma spectroscopy. New York: Wiley; 1965.
- [59] Thorne AP. Spectrophysics. London: Chapman e Hall; 1974.
- [60] Kuhn HG. Atomic spectra. New York: Academic press; 1962.
- [61] Shrenk WG. Analytical Atomic Spectroscopy. New York: Plenum press; 1975.
- [62] Mitchell AGG, Zemansky MW. Resonance radiation and excited atom. Cambridge: Cambridge University Press; 1971.
- [63] A. R. Alves-Pereira, E. J. Nunes-Pereiraa, J. M. G. Martinho, and M. N. Berberan-Santos, J. Chem. Photonic superdiffusive motion in resonance line radiation trapping Partial frequency redistribution effects, Phys. 126, 154505 (2007).

- [64] João Carlos de A. Carvalho, Marcos Oriá, Martine Chevrollier, Hugo L. D. de Souza Cavalcante and T. Passerat de Silans. Redistribution of light frequency by multiple scattering in a resonant atomic vapor PHYSICAL REVIEW A 91, 053846 (2015).
- [65] H. Frisch, Non-LTE transfer. V-The asymptotics of partial redistribution, Astron. Astrophys. 83, 166 (1980).
- [66] L. Spitzer Jr. Notes on the Theory of Noncoherent Scattering, Astrophys. J. 99, 1 (1944).
- [67] W. Unno, Publ. On the Radiation Pressure in a Planetary Nebulae, II, Astron. Soc. Jpn. 3, 158 (1951).
- [68] H. Zanstra, Non-Coherent Scattering and the Absence of Polarization in Fraunhofer Lines, Mon. Not. R. Astron. Soc. 106, 225 (1946).
- [69] C. Kenty, On radiation diffusion and the rapidity of escape of resonance radiation from a gas, Phys. Rev. 42 (1932), p. 823.
- [70] M. Zemansky, The diffusion of imprisoned resonance radiation in mercury vapor, Phys. Rev. 29, 513-523 (1927).
- [71] M. Zemansky, Note on the equivalent absorption coefficient for diffused resonance radiation, Phys. Rev. 42, 843-847 (1932).
- [72] P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, 2nd Edn, Gauthier-Villars, Paris, 1954. [1st Edn (1937)] [Reprinted in 2003 by Editions Jaques Gabay (Les Grands Classiques Gauthier-Villars)].
- [73] William Feller. The fundamental limit theorems in probability. Bulletin of the American Mathematical Society, 51(11):800–832, 1945.
- [74] Sílvio RA Salinas. Introdução a Física Estatística Vol. 09. Edusp, 1997.
- [75] Linda E Reichl and Ilya Prigogine. A modern course in statistical physics, volume 71. University of Texas press Austin, 1980.
- [76] Joseph Klafter, Michael F Shlesinger, and Gert Zumofen. Beyond brownian motion. Physics Today, 49:33, 1996.
- [77] Meerschaert, M.M. e Scheffler, H.P (2003) “Nonparametric methods for heavy tailed vector data: A survey with applications from finance and hydrology”. Recent advances and trends in nonparametric statistics, Ed. M. G. Akritas and D.N. Politis, Eds., Elsevier Science, pp. 265-279.

- [78] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M. S. (1994). Stable Non-Gaussian Random Processes, Chapman e Hall.
- [79] Weron, R. (2001). Levy-stable distributions revisited: Tail index 2 does not exclude the Levy-stable regime, International Journal of Modern Physics C 12: 209–223.
- [80] V.M. Zolotarev, V.M. Uchaikin, Chance and Stability: Stable Distributions and their Applications, VSPBV, Utrecht, 1999.
- [81] Szymon Borak, Wolfgang Härdle, Rafal Weron-Stable Distributions SFB 649 Discussion Paper 2005-008.
- [82] Janicki, A. and Weron, A. (1994). Simulation and Chaotic Behavior of α -Stable Stochastic Processes, Marcel Dekker.
- [83] Klafter, J., M. F. Shlesinger, G. Zumofen (Feb. 1996). “Beyond Brownian Motion.” Physics Today.
- [84] Bergstrom, H On some expansion of stable distribution funtion. Arkiv for matematics Springer Netherlands, v.2, p. 375-378, 1952. ISSN 00004-2080, 1871-2487.
- [85] B. Hughes, Random Walks and Random Environments. Volume 1: Random walks, Oxford University Press, Oxford (1995).
- [86] Brown, R. Phil. Ma. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies, 4, 161, (1828).
- [87] Einstein, Albert. Investigation on the theory of the Brownian Movement. Dover publications (1970), contém os artigos originâis de Einstein dedicados a esse tema.
- [88] Langevin, Paul. Compt, Rend. Paul Langevin’s 1908 paper “On the Theory of Brownian Motion” [“Sur la théorie du mouvement brownien,” C. R. Acad. Sci. (Paris) 146, 530–533 (1908)] 146, 530,(1908).
- [89] Silva, J.M. and Lima, J.A.S.. Quatro abordagens para o movimento browniano. Re. Bras. Fis [online]. 2007 vol. 29, n.1, p. 25-35.ISSN 1806-1117.
- [90] Burger, H. C. Versl. Acad. Amst. 25, 1482, (1917).
- [91] Ornstein, L. S. Versl. Acad. Amst. 26, 1005, (1917).

- [92] Planck, M. Berl, Ber. p. 324(1927).
- [93] Kac, M. Am. Math. Month. 54, 369, (1947).
- [94] J. P. Bouchaud, A. Georges, Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications, Physics Reports 195 (4 e 5), 127-293 (1990).
- [95] R. Metzler, J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, Phys. Rep. 339, 1-77 (2000).
- [96] J. Crank, The Mathematics of Diffusion 2 a Ed., Oxford Science Publications, Wiltshire (1975).
- [97] R. Metzler, J. Klafter, The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics, J. Phys. A: Math. Gen. 37, R161-R208 (2004).
- [98] J. Klafter, G. Zumofen, Probability distribution for continuos-time random walks with long tails, J. Phys. Chem. 98, 7366-7370 (1994).
- [99] Gandhimohan M. V., Stanley E. H., Raposo E.C., Da Luz M. G. E., The Physics of Foraging, (Cambridge University Press, New York, 2011).
- [100] Lomholt M. A., Ambjornsson T., Metzler R., Optimal Target Search on a Fast- Folding Polymer Chain with Volume Exchange, Physical Review Letters, 95, 260603, (2005).
- [101] B. B. Mandelbrot, The fractal geometry of nature, W. H. Freeman e Co, New York (1982).
- [102] Gandhimohan M. V., Stanley E. H., Raposo E.C., Da Luz M. G. E., The Physics of Foraging, (Cambridge University Press, New York, 2011).
- [103] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Statistische Physik, Akademie, Leipzig, 1989; Statistical Physics, Pergamon, Oxford, 1980.
- [104] R. Metzler, J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, Phys. Rep. 339, 1-77 (2000).
- [105] G.H., W. Aspects and applications of the random walk. NH, 1994. (Random Materials and Processes).
- [106] Vladimir V Palyulin et al 2019, First passage and first hitting times of Lévy flights and Lévy walks, New J. Phys. 21 103028.

- [107] S.V. Buldyrev et al. Properties of Lévy flights on an interval with absorbing boundaries, *Physica A* 302 (2001) 148–161.
- [108] Smoluchowski M. V. 1917, Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloider Lösungen *Z. Phys. Chem.* 92 129.
- [109] Collins F. C. and Kimball G. E. 1949, Diffusion-Controlled Reactions in Liquid Solutions, *J. Colloid Sci.* 4 425
- [110] Bunde A et al (ed) 2018 *Diffusive Spreading in Nature, Technology and Society* (Berlin: Springer).
- [111] Chechkin A V, Metzler R, Gonchar V Y, Klafter J and Tanatarov L V 2003 *J. Phys. A: Math. Gen.* 36 L537.
- [112] Redner S. 2001, *A Guide to First Passage Processes* (Cambridge: Cambridge University Press).
- [113] Koren T, Lomholt M A, Chechkin A V, Klafter J and Metzler R. Leapover Lengths and First Passage Time Statistics for Lévy Flights, 2007 *Phys. Rev. Lett.* 99 16060.2.
- [114] S. V. BULDYREV et al. Average time spent by Lévy flights and walks on an interval with absorbing boundaries *PHYSICAL REVIEW E*, VOLUME 64, 041108.
- [115] B. J. West, V. Seshadri, Linear systems with Lévy fluctuations, *Physica A* 113 (1982) 203.
- [116] C. W. Groth, A. R. Akhmerov, and C. W. J. Beenakker, Transmission probability through a lévy glass and comparison with a lévy walk, *Phys. Rev. E* 85, 021138 (2012).
- [117] E. W. Samson, Effects of temperature and nitrogen pressure on the afterglow of mercury resonance radiation, *Phys. Rev.* 40, 940-963 (1932).
- [118] Holstein, T. Imprisonment of Resonance Radiation in Gases. *Phys. Rev.* 1947, 72, 1212–1233. [CrossRef]
- [119] Biberman, L.M. On the diffusion theory of resonance radiation. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1947, 17, 416.
- [120] P. Wiorkowski, W. Hartmann, Investigation of radiation imprisonment: application to time resolved fluorescence spectroscopy, *Opt. Comm.* 53, 217-220 (1985).

- [121] W. Falecki, W. Hartman, P. Wiorkowski, Time resolved multiple scattering of resonance photons, *Z. Phys. D* 14, 111-117 (1989).
- [122] W. Falecki, W. Hartman, R. Bocksch, New aspects of Holstein's treatment of radiation trapping, *Optics Comm.* 83 (3-4), 215-219 (1991).
- [123] R. Lai, S. Liu, X. Ma, New aspect of the multiple scattering representation of radiation trapping, *Op. Comm.* 99, 316-319 (1993).
- [124] R. Lai, S. Liu, X. Ma, Theoretical treatment of resonance radiation imprisonment: new approach to Holstein's equation, *Z. Phys. D* 27, 223-228 (1993).
- [125] M. N. Berberan-Santos, E. J. N. Pereira, J. M. G. Martinho, Dynamics of Radiative Transport, em *Resonance Energy Transfer*, editado por D. L. Andrews e A. Demidov, John Wiley e Sons, Chichester (1999).
- [126] M.N.Berberan-Santos, E.J. Nunes-Pereira, and J.M.G. Martinho, Photonic superdiffusive motion in resonance radiation trapping, *J. Chem. Phys.* 125 (2006), p. 174308.
- [127] A. C. G. Mitchell and M. W. Zemansky, *Resonance Radiation and Excited Atoms* (The Macmillan Company, New York, 1934), to be referred to hereafter as MZ.
- [128] Biberman, L.M.; Vorob'ev, V.S.; Yakubov, I.T. *Kinetics of Nonequilibrium Low Temperature Plasmas*; Consultants Bureau: New York, NY, USA, 1987; ISBN 978-1-4684-1667-1.
- [129] Sobelman, I.I. *Introduction to the Theory of Atomic Spectra*; Pergamon Press: Oxford, UK, 1972.
- [130] Demura, A.V. Beyond the Linear Stark Effect: A Retrospective. *Atoms* 2018, 6, 33. [CrossRef].
- [131] S. Boldyrev and C.R. Gwinn, Levy Model for interstellar scintillations, *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003), 131101.
- [132] K. Rajaraman and M.J. Kushner, A Monte Carlo simulation of radiation trapping in electrodeless gas discharge lamps, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 37 (2004), p. 1780.
- [133] J.C. Camparo and R. Mackay, Spectral mode changes in an alkali rf discharge, *J. Appl. Phys.* 101 (2007), 053303.

- [134] B.A. Bachurin, Influence of resonance radiation trapping on the frequency characteristic of a Zeeman ring gas laser with arbitrary wave polarization, *Sov. J. Quantum Electron.* 21 (1991), p. 42.
- [135] P.R. Hammond and R. Nelson, Radiation trapping in a laser dye medium, rhodamine 6G in alcohol, *IEEE J. Quantum Electron.* QE-16 (1980), p. 1161.
- [136] D.S. Sumida and T.Y. Fan, Effect of radiation trapping on fluorescence lifetime and emission cross section measurements in solid-state laser media, *Opt. Lett.* 19 (1994), p. 1343.
- [137] M. Eichhorn, Fluorescence reabsorption and its effects on the local effective excitation lifetime, *Appl. Phys. B* 96 (2009), p. 369.
- [138] A. Stoita, T. Vautey, B. Jacquier, and S. Guy, Impact of the radiation trapping on lifetime measurement of Er 3p doped glasses, *J. Luminescence* 130 (2010), p. 1119.
- [139] A.F. Molisch and B.P. Oehry, *Radiation Trapping in Atomic Vapours*, Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [140] G. Hillenbrand, K. Burnett, and C.J. Foot, Effect of scattered radiation on sub-Doppler cooling, *Phys. Rev. A* 52 (1995), p. 4763.
- [141] S. Balik, M.D. Havey, I.M. Sokolov, and D.V. Kupriyanov, Optical pumping dynamics and near-resonance light scattering in an ultracold sample of 87Rb atoms, *Phys. Rev. A* 79 (2009), 033418.
- [142] M. Lintz and M.A. Bouchiat, Dimer destruction in a Cs vapor by a laser close to atomic resonance, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998), p. 2570.
- [143] A.F. Molisch, B.P. Oehry, and G. Magerl, The influence of radiation trapping on the measurements of cross sections for excited-atom-excited-atom collisions, *Phys. Scripta* T86 (2000), p. 55.
- [144] A.B. Matsko, I. Novikova, M.O. Scully, and G.R. Welch, Radiation trapping in coherent media, *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001), 133601.
- [145] A.B. Matsko, I. Novikova, and G.R. Welch, Radiation trapping under conditions of electromagnetically induced transparency, *J. Mod. Opt.* 49 (2002), p. 367.
- [146] M.A. Rosenberry, J.P. Reyes, D. Tupa, and T.J. Gay, Radiation trapping in rubidium optical pumping at low buffer-gas pressures, *Phys. Rev. A* 75 (2007), 023401, and ref. therein.

- [147] G. Grynberg, A. Aspect, and C. Fabre, *Introduction to Quantum Optics: From the Semi-classical Approach to Quantized Light*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [148] A. S. M. Macedo , J. P. Lopez , and T. Passerat de Silans *PHYSICAL REVIEW E* 104, 054143 (2021).
- [149] G.M. Viswanathan, M.G.E. da Luz, E.P. Raposo, and H.E. Stanley, *The Physics of Foraging*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [150] M. V. Romalis, E. Miron, and G. D. Cates, Pressure broadening of $rb\ d\ 1$ and $d\ 2$ lines by $3\ he$, $4\ he$, $n\ 2$, and xe : Line cores and near wings, *Phys. Rev. A* 56, 4569 (1997).
- [151] Harold J. Metcalf and Peter van der Straten., *Laser Cooling and Trapping*. Springer 1999.
- [152] Cesium D Line Data Daniel A. Steck Theoretical Division (T-8), MS B285 Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM 87545 23 January 1998 (revision 1.6, 14 October 2003).
- [153] Samuel Bezerra Alves. Dinâmica em frequência de laser semiconductor sob realimentação ótica ortogonal filtrada. Dissertação de Mestrado, 2012.
- [154] Silfvast, William T. *Laser Fundamentals*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [155] The grating-feedback laser diode system can be built by undergraduates as described in Conroy R S, Carleton A, Carruthers A, Sinclair B D, Rae C F and Dholakia K 2000 A visible extended cavity diode laser for the undergraduate laboratory *Am. J. Phys.* 68 925–31.
- [156] Zílio, Sérgio C. *Óptica Moderna: fundamentos e aplicações*. São Paulo: IFSC-USP, s.d.
- [157] Saturated Absorption Spectroscopy. Ph 76a Advanced Physics Laboratory - Atomic and Optical Physics. Lab 2. [http://pmaweb.caltech.edu /labs /optics /satabs1](http://pmaweb.caltech.edu/labs/optics/satabs1).
- [158] A. M. Akulshin et al 2011, Doppler-free two-photon resonances for atom detection and sum frequency stabilization, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 44 215401.
- [159] University of Florida, Department of Physics. PHY4803L - Advanced Physics Laboratory. [https://www.phys.ufl.edu /satabsorbtion/ SatAbs](https://www.phys.ufl.edu/satabsorbtion/SatAbs).

- [160] Daryl W. Preston, Doppler Free Saturated Absorption - Laser spectroscopy, Am. J. Phys. 64 (11), November 1996.
- [161] Hecht, Eugene. Optics. 4. ed. Addison Wesley, 2002.
- [162] F. C. Strong, Anal. Chem., v. 24, p. 338, 1952.
- [163] P. Siddons, C. S. Adams, and I. G. Hughes, Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics 42, 175004 (2009).
- [164] D. G. Hummer, Mon. Not. R. Astron. Soc. 125, 21 (1962).
- [165] Haag, G. Modelling with the Master eq Solution Methods and Applications in Social and Natural Sciences. Springer, 2017.
- [166] Kampen, N. V. Stochastic Processes in Physics and Chemistry. 3rd ed. ed. Elsevier, 2007.