



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

**Soluções Topológicas e
Não-Topológicas em Teoria Clássica
de Campos**

Igor Andrade Souza

Tese de Doutorado

João Pessoa
2022

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Igor Andrade Souza

Soluções Topológicas e Não-Topológicas em Teoria Clássica de Campos

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física na Área de Concentração Física das Partículas Elementares e Campos.

Orientador: *Prof. Dr. Roberto Menezes da Silva*

João Pessoa
2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S729s Souza, Igor Andrade.

Soluções topológicas e não-topológicas em teoria
clássica de campos / Igor Andrade Souza. - João Pessoa,
2022.

169 f. : il.

Orientação: Roberto Menezes da Silva.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Defeitos topológicos. 3. Soluções
topológicas. 4. Soluções não-topológicas. 5. Kinks. 6.
Lumps. 7. Vórtices. I. Silva, Roberto Menezes da. II.
Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Igor Andrade de Souza**,
candidato ao Título de Doutor em Física na Área
de Física das Partículas Elementares e Campos.

Aos vinte e cinco dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e dois, às 14:00, reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física das Partículas Elementares e Campos, **Igor Andrade de Souza**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Roberto Menezes da Silva* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Laércio Losano* (UFPB), *Francisco de Assis Brito* (UFPB), *Marcos Antônio Anacleto* (UFCG) e *Bruno Geraldo Carneiro da Cunha* (UFPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Roberto Menezes da Silva comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado “*Soluções Topológicas e não Topológicas em Teoria Clássica de Campo*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Bethyanne Leite Aragão, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **25 de fevereiro de 2022**.

Prof. Dr. Roberto Menezes da Silva
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Laércio Losano
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Francisco, de Assis Brito
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto.
UFCG

Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha
UFPE

Roberto Menezes da Silva

Laércio Losano

Francisco de Assis Brito

Marcos Antônio Anacleto

Bruno Geraldo Carneiro da Cunha

Link da defesa : <https://meet.google.com/nak-fxmi-mud>



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO
Participação em Banca

Declaro, para os devidos fins que consta dos arquivos desta Secretaria, ter a **Banca Examinadora da Tese de Doutorado** do aluno **Igor Andrade de Souza**, intitulada “*Soluções Topológicas e não Topológicas em Teoria Clássica de Campo*”, defendida no dia 25 de fevereiro de 2022, às 14:00, de forma remota, sido formada pelos seguintes professores:

Nome	Instituição
Roberto Menezes da Silva (orientador)	PPGF/UFPB
Laércio Losano	PPGF/UFPB
Francisco de Assis Brito	PPGF/UFPB
Marcos Antônio Anacleto	UFCG
Bruno Geraldo Carneiro da Cunha	UFPE

João Pessoa, 25 de fevereiro de 2022.

Bethyanne Leite Aragão
Auxiliar em Administração

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à minha família, em especial aos meus pais José Neto e Aurea, como também a minha tia Irene e a minha irmã Evelyn, por sempre acreditarem em mim. Agradeço ao meu orientador Roberto Menezes e aos professores Matheus Marques, Dionísio Bazeia e Laércio Losano que me ajudaram ao longo dessa caminhada. Agradeço também aos meus amigos que sempre pude contar e a todos meus colegas, professores e funcionários que de alguma maneira contribuíram para a realização desse trabalho. Por fim, ao CNPq pelo suporte financeiro.

"A imaginação é mais importante que o conhecimento."
—Albert Einstein

Resumo

O objetivo dessa tese é obter soluções do tipo defeitos em teoria de campos, que são estruturas localizadas de energia finita. Esses defeitos surgem como soluções das equações de movimento, podendo ter caráter topológico ou não-topológico. Iniciaremos nossa discussão com defeitos topológicos em $(1+1)$ dimensões espaço-temporal, que aparecem em modelos com um ou mais campos escalares. Mostraremos que essas soluções podem ser obtidas considerando modelos com dinâmica canônica, como também em modelos generalizados, conhecidos como k -defeitos. Em seguida, estudaremos defeitos topológicos em $(2+1)$ dimensões, chamado de vórtices. Que aparecem em teorias onde os campos de calibre estão acoplados um campo complexo. Em ambos cenários introduziremos novos modelos, que serviram de inspiração para o desenvolvimento dessa tese.

Palavras-chave: defeitos topológicos, soluções topológicas, soluções não-topológicas, kinks, lumps, vórtices.

Abstract

The purpose of this thesis is to obtain defect solutions in field theory, which are localized structures of finite energy. These defects arise as solutions of the equations of motion, and may have a topological or non-topological features. We will start our discussion with topological defects in $(1+1)$ -dimensional space-time, which appear in models with one or more scalar fields. We will show that these solutions can be obtained considering models with canonical dynamics, as well as generalized models, known as k-defects. Next, we will study topological defects in $(2+1)$ -dimensional, called vortices. Which appear in theories where gauge fields are coupled to a complex field. In both scenarios we will introduce new models, which served as inspiration for the development of this thesis.

Keywords: topological defects, topological solutions, non-topological solutions, kinks, lumps, vortices.

Lista de Publicação

- I. Andrade, M.A. Marques & R. Menezes, *Cuscuton kinks and branes*, Nucl. Phys. B **942**, 188 (2019).
- I. Andrade, M.A. Marques & R. Menezes, *Stability of kinklike structures in generalized models*, Nucl. Phys. B **951**, 114883 (2020).
- I. Andrade, M.A. Marques & R. Menezes, *Long range vortex configurations in generalized models with Maxwell or Chern-Simons dynamics*, Phys. Rev. D **102**, 025017 (2020).
- I. Andrade, D. Bazeia, M.A. Marques & R. Menezes, *Vortices in Maxwell-Chern-Simons-Higgs models with nonminimal coupling*, Phys. Rev. D **102**, 045018 (2020).
- I. Andrade, M.A. Marques & R. Menezes, *Vortices in Maxwell-Higgs models with a global factor*, EPL **133**, 31002 (2021).
- I. Andrade, M.A. Marques & R. Menezes, *Ringlike vortex structures in models with anomalous magnetic moment*, EPL **137**, 54001 (2022).

Sumário

1	Introdução	1
2	Formalismo para um Campo Escalar Real	5
2.1	Generalidades	5
2.1.1	Estabilidade linear	9
2.2	Exemplos Canônicos	13
2.2.1	Modelo ϕ^4	16
2.2.2	Modelo ϕ^6	18
2.2.3	Modelo sem massa	21
2.2.4	Modelo ϕ^4 invertido	23
2.3	Exemplos Generalizados	25
2.3.1	Modelo com fator global	25
2.3.2	Modelo com potências da dinâmica	30
2.3.3	Modelos com termo de Cuscuton	34
3	Formalismo para N Campos Escalares	38
3.1	Generalidades	38
3.1.1	Estabilidade linear	41
3.2	Exemplo para Dois Campos	45
3.2.1	Modelo BNRT	49
4	Vórtices de Maxwell-Higgs	57
4.1	Generalidades	57
4.2	Modelo Canônico	67
4.3	Modelos com Permeabilidade	69
4.3.1	Exemplo Analítico	72
4.3.2	Exemplo Numérico	74
4.4	Modelo com Fator Global	77
4.4.1	Exemplo	77
5	Vórtices de Chern-Simons-Higgs	81
5.1	Generalidades	81
5.2	Modelo Canônico	88
5.3	Reconstruindo Modelos	93
5.3.1	Exemplo	94

6	Vórtices de Mawell-Chern-Simons-Higgs	101
6.1	Generalidades	101
6.2	Exemplo	107
7	Vórtices de Mawell-Chern-Simons-Higgs com Acoplamento Não-Mínimo	113
7.1	Generalidades	113
7.2	Caso 1	116
7.2.1	Exemplos	121
7.2.1.1	Exemplo 1.1	123
7.2.1.2	Exemplo 1.2	124
7.3	Caso 2	131
7.3.1	Exemplo	136
8	Conclusões	142
A	Invariância de forma	145
	Referências Bibliográficas	148

CAPÍTULO 1

Introdução

Defeitos topológicos têm sido estudados há anos por físicos teóricos e matemáticos, devido a sua grande aplicabilidade em diversos contextos, como, por exemplo, na física da matéria condensada e na cosmologia [1–8]. Um defeito topológico pode ser entendido como uma "desordem" no espaço de um sistema. Imaginemos que um sistema possua dois estados possíveis de mínima energia, onde cada estado é igualmente provável, porém, correspondem a diferentes configurações. Entre esses estados pode existir uma interface que não representa nenhuma das duas configurações de menor energia, mas sim uma transição contínua entre esses dois estados. Essa estrutura que acabamos de descrever é um exemplo de defeito topológico. Exemplos como esses são muitas vezes chamados de paredes de domínios, onde cada estado constitui um domínio. Esses domínios podem ser encontrados em materiais ferromagnéticos, onde cada domínio terá bilhões de dipolos alinhados. Aparece também no estudo de cristalografia, onde os domínios são chamados de grãos e entre grãos adjacentes existe uma região chamada de contorno de grãos, que separa dois ou mais cristais com orientações cristalográficas diferentes. Veja a figura 1.1 um exemplo de parede entre dois domínios.

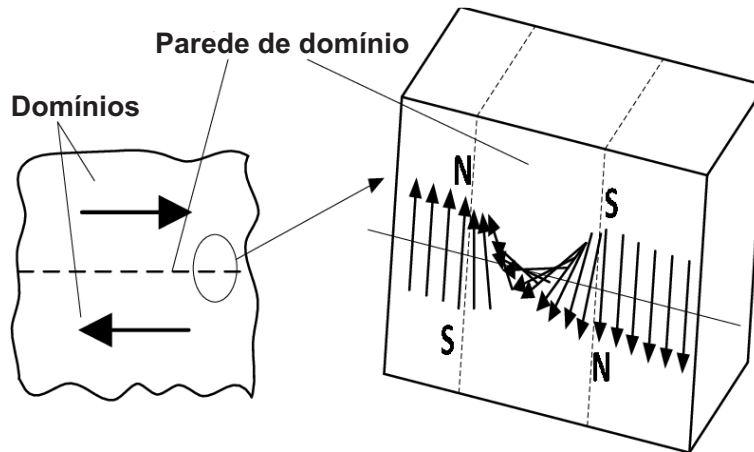


Figura 1.1 Exemplo de dois domínios. Entre os domínios existe uma região de transição, a seta que aponta de sul a norte passa a ter orientação invertida e vice-versa.

Matematicamente, defeitos topológicos surgem como soluções de equações diferenciais parciais. Essas soluções podem ser obtidas usando teoria clássica de campos. Dependendo da dimensão, dos campos e das simetrias envolvidas haverá diversos tipos de defeitos possíveis, podemos citar três bastante conhecidos: *kinks*, vórtices e monopolos. Em geral,

um defeito topológico está associado a uma quebra de simetria do sistema, entretanto, esta não é uma condição necessária para que haja um defeito. Dependendo das condições de contorno do problema, podemos diferenciar dois tipos de soluções distintas: as topológicas e as não-topológicas.

Para estudar soluções do tipo kink precisamos apenas de um campo escalar em (1+1) dimensões espaço-temporal. Os kinks surgem como soluções estáticas das equações de movimento. Em geral, teremos modelos com simetria discreta Z_2 , apesar de existirem modelos sem simetria [9]. Kinks podem ser estudados imersos em dimensões superiores, em três dimensões espaciais estas soluções são chamadas de paredes de domínios. Além disso, campos escalares podem ser usados para modelos de energia escura [10], que é uma maneira de explicar as observações do universo em expansão acelerada [11]. Diferentemente de defeitos (soluções estáticas), em modelos de energia escura considera-se o campo escalar como um fluido isotrópico e homogêneo, ou seja, o campo dependerá apenas do tempo. Um modelo bastante conhecido é o de quintessência, tais modelos possuem um termo quadrático para dinâmica do campo e um potencial, onde este potencial proporcionará a expansão acelerada do universo. Porém, até onde sabemos as interações gravitacionais são atrativas. Uma maneira de se obter essa expansão é modificando a dinâmica do campo escalar (que não necessariamente precisa de um potencial), dando origem a modelos de k-inflação e k-essência [12–20]. Inspirados nesses modelos com dinâmica generalizada, surgiram os k-defeitos [21–23].

Topologicamente, vórtices são estruturas planares, ou seja, consideraremos sistemas em (2+1) dimensões. Para estudar vórtices, pode-se tomar um campo escalar complexo acoplado a um campo de calibre abeliano através de uma simetria $U(1)$. Vórtices são comumente estudados em mecânica dos fluidos, mas também podem ser encontrados no estudo de supercondutores. A partir da teoria macroscópica da supercondutividade de Ginzburg-Landau [24], em 1957 Abrikosov mostrou que essa teoria admite soluções do tipo vórtice [25]. Esses vórtices surgem quando expostos a um campo magnético externo, onde aparecem pequenas regiões não condutoras, nas quais circula uma pequena corrente elétrica que transporta o fluxo magnético através do supercondutor. Dez anos depois, vórtices de Abrikosov foram detectados experimentalmente pela primeira vez em um trabalho reportado em [26]. Tempos depois, Nielsen e Olesen mostraram que usando o modelo de Higgs abeliano [27], é possível fazer uma generalização relativística da teoria de Ginzburg-Landau. Quando imersos em três dimensões espaciais são chamadas de cordas relativísticas e se estiverem presentes em grande escala no universo, são as denominadas cordas cósmicas.

Já para os monopolos devemos considerar um tripleto de campos escalares acoplados a um campo de calibre não abeliano sob uma simetria $SU(2)$ no espaço tridimensional. Modelos bastante conhecidos de monopolos magnéticos são estudados usando teoria de Yang-Mills-Higgs [28, 29], existe também a possibilidade de apresentarem cargas elétrica e magnética simultaneamente [30], que são chamados *dyons*. Entretanto, nessa tese iremos explorar apenas defeitos em uma e duas dimensões espaciais.

Usaremos teoria clássica de campos na formulação lagrangiana para obter as equações diferenciais parciais. Para obter a dinâmica dos campos usaremos o princípio variacional

na ação

$$\mathcal{S} = \int d^{D+1}x \mathcal{L}, \quad (1.1)$$

onde $\mathcal{L}$ é denominada densidade lagrangiana. Geralmente a densidade lagrangiana é uma função dos campos ϕ_i e de suas respectivas derivadas $\partial_\mu \phi_i$, onde ∂_μ é a derivada parcial em relação a x^μ , para $\mu = 0, 1, \dots, D$, com D sendo o número de dimensões espaciais. Fazendo variações nos campos e considerando o princípio da ação mínima obtemos as equações de movimento do sistema

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}. \quad (1.2)$$

Como a densidade lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$, provavelmente teremos equações diferenciais parciais de segunda ordem. Em unidades naturais, consideramos que a constante de Planck reduzida e a velocidade da luz no vácuo sejam iguais a um, ou seja, $\hbar = c = 1$. Nesse caso $[x^\mu] = \epsilon^{-1}$, onde ϵ é a dimensão de energia. Para que a ação seja adimensional temos que $[\mathcal{L}] = \epsilon^{D+1}$, ou seja, a dimensão da densidade lagrangiana dependerá do número de dimensões espaciais.

Como já mencionamos, defeitos topológicos ocorrem de diversas maneiras em teoria de campos, em particular, iremos tratar essas estruturas através de campos escalares reais e campos vetoriais acoplados a campos escalares complexos. Nos capítulos 2 e 3 discutiremos as ferramentas matemáticas necessárias para se obter defeitos em uma dimensão espacial. No capítulo 2 desenvolveremos o formalismo para um campo escalar real, onde a equação de movimento será uma equação diferencial de segunda ordem não linear. Mostraremos que existe uma classe de equações diferenciais de primeira ordem que, além de resolver a equação de movimento, nos permite calcular a energia das soluções sem conhecer sua forma explícita, dependendo apenas de suas condições de contorno. Diferenciaremos soluções topológicas (kinks) e não-topológicas (lumps) a partir da definição de uma corrente topológica. Em seguida estudaremos a estabilidade linear dessas soluções, que nos levará a uma equação de autovalores. Em geral as soluções topológicas são estáveis sob pequenas perturbações, enquanto as não-topológicas são instáveis. Seguiremos nossos estudos de campos escalares no capítulo 3, onde generalizaremos o formalismo para vários campos escalares. As equações serão muito mais complicadas, pois teremos equações diferenciais acopladas, mas ainda assim é possível obter equações diferenciais de primeira ordem, como também fazer uma análise sob pequenas flutuações.

Os próximos capítulos serão voltados ao estudo de vórtices, onde iremos estudar teorias abelianas que suportam tais soluções. Iniciaremos no capítulo 4, onde consideraremos um campo complexo acoplado a um campo de calibre, cuja dinâmica é dada por um termo de Maxwell. Aqui, as equações de movimento também serão equações diferenciais de segunda ordem acopladas. Porém, é possível obter equações diferenciais de primeira ordem que satisfazem as equações de movimento e ainda minimizam a energia do sistema, desde que as funções envolvidas no modelo estejam vinculadas de forma apropriada. No capítulo 5 estudaremos modelos onde a dinâmica para o campo de calibre é dada por um termo de Chern-Simons. Iremos destacar as suas principais características e diferenças do modelo

estudado no capítulo anterior. Os capítulos 6 e 7 serão dedicados a modelos que possuem tanto o termo de Maxwell, como também o de Chern-Simons. No capítulo 6 estudaremos modelos com acoplamento mínimo e mostraremos quais serão as restrições que o modelo deve ter para se obter equações diferenciais de primeira ordem que sejam compatíveis com as equações de movimento. Veremos que nesse caso teremos características bastante distintas dos casos anteriores. Já no capítulo 7 estudaremos modelos com termo de Maxwell e Chern-Simons com acoplamento não mínimo, mostraremos que para estes modelos é possível obter duas classes de equações diferenciais de primeira ordem que minimizam a energia do sistema.

Finalizaremos a tese com algumas conclusões e possíveis perspectivas acerca dos assuntos tratados ao longo dos capítulos. Por fim teremos um apêndice onde complementamos tópicos discutidos ao longo da tese.

Formalismo para um Campo Escalar Real

Começaremos nosso estudo com o formalismo mais simples em teoria clássica de campos, que é o modelo para um campo escalar real. Um campo escalar real é uma função genérica do espaço e do tempo, onde em cada ponto do espaço-tempo terá um determinado valor. Esse campo é geralmente representado por $\phi = \phi(\vec{x}, t)$, que depende do número de dimensões espaciais. Nosso objetivo é usar essa ferramenta matemática para estudar defeitos topológicos que ocorre em diversas dimensões, podemos nos concentrar inicialmente em uma dimensão espacial. Logo, o campo escalar dependerá apenas da coordenada espacial x e do tempo t , ou seja, $\phi = \phi(x, t)$. Apesar da aparente simplicidade do modelo a ser estudado nesse capítulo, a sua aplicação é bastante vasta e será bastante conveniente para apresentar suas propriedades topológicas.

2.1 Generalidades

Usaremos o formalismo de Lagrange para obter equações que admitem soluções do tipo defeitos. Para isso consideraremos espaço plano em $(1+1)$ dimensões com métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$. A ação é dada por

$$\mathcal{S} = \int d^2x \mathcal{L}, \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Lembrando que a densidade lagrangiana deve ser um escalar de Lorentz, definimos

$$X = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (2.2)$$

Logo, é conveniente escrevermos a densidade lagrangiana como função do campo e de X , ou seja, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, X)$. O modelo canônico é dado por $\mathcal{L} = X - V(\phi)$ onde $V(\phi)$ é uma função do campo ϕ e é denominado potencial. Porém, estudaremos generalizações como, por exemplo, $\mathcal{L} = F(X) - V(\phi)$, onde $F(X)$ é em princípio uma função arbitrária de X , ver referência [21]. Para uma densidade lagrangiana geral na forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, X)$, fazendo uma variação com respeito ao campo obtemos a equação de movimento [21–23]

$$\partial_\mu (\mathcal{L}_X \partial^\mu \phi) = \mathcal{L}_\phi, \quad (2.3)$$

onde $\mathcal{L}_\phi = \partial \mathcal{L} / \partial \phi$ e $\mathcal{L}_X = \partial \mathcal{L} / \partial X$. Expandindo a equação acima, temos que

$$2X \mathcal{L}_{XX} + \mathcal{L}_{XX} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi + \mathcal{L}_X \square \phi = \mathcal{L}_\phi, \quad (2.4)$$

com $\square = \partial_\mu \partial^\mu$. Para o modelo canônico teremos $\mathcal{L}_X = 1$ e $\mathcal{L}_\phi = -V_\phi$, logo, a equação acima será simplesmente $\square\phi = -V_\phi$.

O tensor energia-momento pode ser obtido a partir da invariância translacional pelo teorema de Noether [31] e é dado por

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_X \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.5)$$

O tensor energia-momento é simétrico por permutação de índices e é uma quantidade conservada, ou seja, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. A conservação do tensor energia-momento é uma espécie de equação da continuidade. Para o caso $\nu = 0$, temos

$$\partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{10} = 0, \quad (2.6)$$

onde podemos identificar T^{00} como a densidade de energia e T^{10} como o fluxo de energia no espaço. Fazendo agora $\nu = 1$ na conservação do tensor energia-momento, teremos

$$\partial_0 T^{01} + \partial_1 T^{11} = 0, \quad (2.7)$$

onde T^{01} é a densidade de momento e T^{11} será o fluxo de momento ou o estresse. Escrevemos a densidade de energia como

$$\rho = \mathcal{L}_X \dot{\phi}^2 - \mathcal{L}, \quad (2.8)$$

onde o ponto representa uma derivada em relação ao tempo t . Apesar das componentes T^{01} e T^{10} terem significado físico diferentes, elas têm valores iguais, dados por

$$T_{01} = T_{10} = \mathcal{L}_X \dot{\phi} \phi', \quad (2.9)$$

no qual podemos notar que $T^{01} = -T_{01}$. Já o estresse será dado por

$$\tau = \mathcal{L}_X \phi'^2 + \mathcal{L}, \quad (2.10)$$

onde a linha representa uma derivada com respeito ao espaço x . Como estamos trabalhando com modelos generalizados, nos guiaremos pela condição de energia nula (NEC). Essa condição impõe $T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \geq 0$, onde n^μ é um vetor nulo que satisfaz $\eta_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 0$. Restringindo nosso modelo a obedecer o vínculo

$$\mathcal{L}_X \geq 0, \quad (2.11)$$

para um $\phi(x, t)$.

Como estamos procurando defeitos topológicos, nos interessa apenas as soluções estáticas, ou seja, $\phi = \phi(x)$, nesse caso a equação de movimento (2.4) é dada por

$$(\mathcal{L}_X + 2X \mathcal{L}_{XX}) \phi'' = 2X \mathcal{L}_{X\phi} - \mathcal{L}_\phi, \quad (2.12)$$

com $X = -\phi'^2/2$. Como as componentes T^{01} e T^{10} do tensor energia-momento são nulas, teremos apenas a densidade de energia (2.8), dada por

$$\rho = -\mathcal{L}, \quad (2.13)$$

e o estresse (2.10) será

$$\tau = \mathcal{L} - 2X\mathcal{L}_X. \quad (2.14)$$

Pela conservação do tensor energia-momento, equações (2.6) e (2.7), temos que $\dot{\rho} = 0$ e $\tau' = 0$. A primeira condição é clara, já que estamos tratando de soluções estáticas, a segunda a segunda indica que o estresse é uma constante. Podemos verificar a validade da segunda condição derivando a equação acima em relação a x e fazendo igual a zero, resultando em

$$(\mathcal{L}_X \phi'' + 2X\mathcal{L}_{XX} \phi'' - 2X\mathcal{L}_{X\phi} + \mathcal{L}_\phi) \phi' = 0, \quad (2.15)$$

que é satisfeita para as soluções da equação de movimento (2.12). Para soluções da equação de movimento estática temos que o estresse é uma constante, que veremos em breve que será zero. A energia é obtida integrando a densidade de energia da equação (2.13) em todo espaço, ou seja,

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho(x). \quad (2.16)$$

Se fizermos uma integração em (2.14) teremos uma divergência, por isso a necessidade de tomarmos $\tau = 0$. Essa condição surge de maneira mais elegante pelo argumento de Derrick, que discutiremos a seguir.

O teorema de Derrick examina as condições necessárias para estabilidade das soluções por contrações e dilatações [32, 33]. Fazendo uma reescala $x \rightarrow \lambda x$ nas soluções $\phi(x)$, onde λ é um fator de escala. As soluções reescaladas serão $\phi(x) \rightarrow \phi^{(\lambda)} = \phi(\lambda x)$, com $X \rightarrow X^{(\lambda)} = \lambda^2 X(\lambda x)$. A energia reescalada será

$$E^{(\lambda)} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{L}(\phi^{(\lambda)}, X^{(\lambda)}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dy \lambda^{-1} \mathcal{L}(\phi(y), \lambda^2 X(y)), \quad (2.17)$$

onde $y = \lambda x$. Evidentemente $E^{(\lambda)}|_{\lambda=1} = E$, é equivalente a energia não reescalada. Por ora iremos usar a notação em que

$$X \equiv X(y) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dy} \right)^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_X \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X(y)} = \lambda^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{(\lambda)}}. \quad (2.18)$$

Derivando a energia reescalada em relação a λ , teremos

$$\frac{\partial E^{(\lambda)}}{\partial \lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \lambda^{-2} (\mathcal{L} - 2X\mathcal{L}_X). \quad (2.19)$$

A condição para as soluções serem estáveis por contrações e dilatações é que $E^{(\lambda)}$ seja mínimo para $\lambda = 1$, ou seja $\partial E^{(\lambda)} / \partial \lambda|_{\lambda=1} = 0$, logo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \underbrace{(\mathcal{L} - 2X\mathcal{L}_X)}_{=\tau} = 0. \quad (2.20)$$

Pela conservação do tensor energia-momento (2.7), temos que o estresse é uma constante. Pelo teorema de Derrick, essa constante deve ser nula para satisfazer a igualdade acima,

caso contrário, a integral irá divergir. Logo, surge a condição de estresse nulo ($\tau = 0$). Tomando a derivada segunda da energia reescalada, temos que

$$\frac{\partial^2 E^{(\lambda)}}{\partial \lambda^2} = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy \lambda^{-3} (\mathcal{L} - \mathcal{L}_X X + 2\mathcal{L}_{XX} X^2). \quad (2.21)$$

Para que a condição de estresse nulo seja um mínimo, temos que ter $\partial^2 E^{(\lambda)} / \partial \lambda^2|_{\lambda=1} > 0$. Uma maneira de satisfazer essa condição é se o integrando de (2.21) for negativo, que pode ser obtida impondo $\mathcal{L}_X + 2X\mathcal{L}_{XX} > 0$.

A condição de estresse nulo nos leva a

$$\mathcal{L} - 2X\mathcal{L}_X = 0, \quad (2.22)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem, já que a densidade lagrangiana depende apenas do campo e de suas derivadas. Lembrando que para o caso estático $X = -\phi'^2/2$. No modelo canônico essa equação será $\phi'^2 = 2V$. Podemos reescrever a densidade de energia (2.13) como

$$\rho = \mathcal{L}_X \phi'^2, \quad (2.23)$$

pela NEC, equação (2.11), garantimos a positividade da densidade de energia ($\rho \geq 0$). A condição de estresse nulo é muito importante, pois ela garante que as soluções sejam estáveis por contrações/dilatações, reduz a equação de movimento (2.12) de segunda ordem para uma equação diferencial de primeira ordem (2.22) e ainda garante a positividade da densidade de energia juntamente com a NEC.

Podemos fazer um formalismo de primeira ordem introduzindo uma função que dependa apenas do campo escalar $W(\phi)$. Nosso objetivo é obter uma maneira de escrever a energia das soluções dependendo apenas dos seus valores assintóticos na função $W(\phi)$, para isso, reescrevemos a densidade de energia (2.23) como

$$\rho = \pm W_\phi \phi', \quad (2.24)$$

logo,

$$\phi' = \pm \frac{W_\phi}{\mathcal{L}_X}. \quad (2.25)$$

Entretanto, para que essas equações diferenciais de primeira ordem resolvam a equação de movimento (2.12), temos que ter $\pm W_{\phi\phi} \phi' = -\mathcal{L}_\phi$. Integrando a densidade de energia (2.24), teremos

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} = |W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty))| = \Delta W. \quad (2.26)$$

Repare que a energia não depende da forma explícita da solução, mas sim dos valores de W nos extremos. Em suma, temos equações diferenciais de primeira ordem (2.25) que satisfazem as equações diferenciais de segunda ordem (2.12) desde que satisfaçam o vínculo: $\pm W_{\phi\phi} = -\mathcal{L}_\phi$. Para o modelo canônico escrevemos o potencial como $V(\phi) =$

$W_\phi^2/2$, nesse caso, o procedimento acima levará à soluções de menor energia do sistema [34, 35].

Nosso estudo envolve dois tipos de soluções, que dependem das condições de contorno assintóticas. Essas condições de contorno são chamadas de soluções estáticas e uniformes, pois devem satisfazer as equações de movimento (2.12) e terem energia nula, ou seja, $E = 0$. Denominamos soluções topológicas as soluções com valores assintoticamente distintos, ou seja, $\phi(x \rightarrow \pm\infty) = v_\pm$ com $v_+ \neq v_-$. Já para soluções que possuem assintótas iguais, $\phi(x \rightarrow \pm\infty) = v$, chamaremos de soluções não-topológicas. Essas duas soluções podem ser diferenciadas pela definição de uma corrente conservada, $\partial_\mu j_T^\mu = 0$, onde

$$j_T^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (2.27)$$

é chamada de corrente topológica e $\varepsilon^{\mu\nu}$ é o símbolo de Levi-Civita. Fazendo uma integração em todo o espaço da componente não nula da corrente topológica, teremos a carga topológica

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx j_T^0 = \phi(x \rightarrow +\infty) - \phi(x \rightarrow -\infty). \quad (2.28)$$

Para soluções topológicas Q_T será diferente de zero e para soluções não-topológicas a carga topológica será nula. Soluções topológicas com carga topológica positiva, $v_+ > v_-$, são funções monotonicamente crescentes e denominamos kinks. Já para soluções de carga topológica negativa, ou simplesmente anti-kinks, teremos funções que decrescem de v_+ para v_- , que podem ser associada aos kinks pela troca $x \rightarrow -x$. Soluções não-topológicas, também chamadas de lumps, são funções que crescem/decrescem até um valor crítico e depois decrescem/crescem até o seu valor inicial. Observe que nesse caso $\phi(\pm\infty) = v$, a energia dada pela equação (2.26) será igual zero, pois $\Delta W = 0$. Aparentemente não poderemos usar o formalismo de primeira ordem com a função $W(\phi)$ para soluções não-topológicas. Entretanto, existem maneiras de contornar esse problema, veja, por exemplo, a referência [36]. Vale ressaltar que a definição da corrente topológica da equação (2.27) não é única, pode-se trocar o ϕ por uma função suave do campo [37], como, por exemplo, $j_T^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu F(\phi)$. Em particular para soluções *vacuumless* [38–40], essa definição de corrente topológica é conveniente.

2.1.1 Estabilidade linear

Vamos fazer uma análise da estabilidade linear das soluções. Para isso, introduzimos pequenas flutuações dependentes do tempo, $\xi(x, t)$, em torno da solução estática, $\phi(x)$, de forma que tenhamos a solução perturbada dada por

$$\phi(x, t) = \phi(x) + \xi(x, t). \quad (2.29)$$

Considerando até a primeira ordem nas contribuições de ξ , isso modifica os seguintes termos como

$$X \rightarrow X + \partial_\mu \phi \partial^\mu \xi, \quad (2.30a)$$

$$\mathcal{L}_\phi \rightarrow \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{\phi\phi} \xi + \mathcal{L}_{\phi X} \partial_\mu \phi \partial^\mu \xi, \quad (2.30b)$$

$$\mathcal{L}_X \rightarrow \mathcal{L}_X + \mathcal{L}_{X\phi} \xi + \mathcal{L}_{XX} \partial_\mu \phi \partial^\mu \xi, \quad (2.30c)$$

onde os campos ϕ do lado direito das equações acima são para as soluções estáticas $\phi(x)$, assim como as quantidades X , $\mathcal{L}_\phi$, $\mathcal{L}_X$ e as demais. Substituindo a solução perturbada (2.29) na equação do movimento dependente do tempo (2.3) com as considerações acima, obtemos

$$\mathcal{L}_X \ddot{\xi} - \left((\mathcal{L}_X + 2X\mathcal{L}_{XX}) \xi' \right)' = \left(\mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{X\phi}\phi')' \right) \xi \quad (2.31)$$

que é uma EDP de segunda ordem e pode ser classificada em três classes: elíptica, parabólica e hiperbólica [41]. A classificação da EDP será conforme o discriminante $D = -\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X + 2X\mathcal{L}_{XX}) > 0$, $= 0$, ou < 0 . Para garantirmos a hiperbolicidade dessa equação, definimos a quantidade

$$A^2 = \frac{\mathcal{L}_X + 2X\mathcal{L}_{XX}}{\mathcal{L}_X} > 0, \quad (2.32)$$

que por conveniência denominaremos de hiperbolicidade. A equação da estabilidade dependente do tempo (2.31) nos permite separar variáveis de forma que é possível escrever: $\xi(x, t) = \sum_n \xi_n(x) \cos(\omega_n t)$. Logo, obtemos uma equação independente do tempo

$$- \left(A^2 \mathcal{L}_X \xi_n' \right)' = \left[\mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{X\phi}\phi')' + \omega_n^2 \mathcal{L}_X \right] \xi_n. \quad (2.33)$$

A equação acima é uma equação de autovalores do tipo Sturm-Liouville (SL), com função peso $\mathcal{L}_X$, que é uma função não negativa, assegurado pela NEC (2.11). No caso particular em que $\mathcal{L}_X = A^2 = 1$ resultamos numa equação do tipo Schrödinger. A condição de ortonormalidade para os estados é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{L}_X \xi_m(x) \xi_n(x) = \delta_{mn}. \quad (2.34)$$

Um fato importante é que na equação de estabilidade (2.33) sempre vai existir um estado com autovalor zero ($\omega_n = 0$), decorrente da invariância translacional da teoria [42, 43]. Esse estado é denominado de modo zero e não tem custo energético. A existência do modo zero pode ser mostrada derivando a equação de movimento estática (2.12) de ambos os lados, resultando em

$$- \left(A^2 \mathcal{L}_X \phi'' \right)' = \left(\mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{X\phi}\phi')' \right) \phi'. \quad (2.35)$$

Comparando (2.35) com a equação de estabilidade (2.33) para $\omega_n = 0$, verificamos que o modo zero é proporcional à ϕ' . Assim, existe um estado com autovalor zero que denotaremos como $\xi_n^{(0)}$, que é proporcional a derivada primeira da solução estática, ou seja,

$$\xi_n^{(0)} = \mathcal{N} \phi', \quad (2.36)$$

onde $\mathcal{N}$ é uma constante de normalização que pode ser obtida usando (2.34). Observe que esse resultado não depende da forma específica da densidade Lagrangiana. A solução estática $\phi(x)$ é estável se $\omega_n^2 \geq 0, \forall n$. Isso significa que soluções estáveis estabelecem o modo zero como seu estado com o autovalor mais baixo.

Podemos fazer uma análise mais profunda da equação de estabilidade (2.33), que pode ser reorganizado como

$$-\frac{1}{\mathcal{L}_X} \left(\frac{d}{dx} A^2 \mathcal{L}_X \frac{d}{dx} + \left(\mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{X\phi}\phi')' \right) \right) \xi_n = \omega_n^2 \xi_n, \quad (2.37)$$

onde o lado esquerdo da equação acima é um operador diferencial. Reescrevemos essa equação como

$$L \xi_n = \omega_n^2 \xi_n, \quad (2.38)$$

onde L é o operador de Sturm-Liouville, dado por

$$L = -\frac{1}{\mathcal{L}_X} \frac{d}{dx} A^2 \mathcal{L}_X \frac{d}{dx} + U(x), \quad (2.39)$$

com $U(x)$ sendo o potencial de estabilidade, escrito como

$$U(x) = -\frac{1}{\mathcal{L}_X} \left(\mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{X\phi}\phi')' \right). \quad (2.40)$$

Pode-se mostrar que o operador em (2.39) é autoadjunto, ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{L}_X \xi_m(x) L \xi_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{L}_X \left(L^\dagger \xi_m(x) \right)^\dagger \xi_n(x), \quad (2.41)$$

desde que as condições de contorno

$$A^2 \mathcal{L}_X \left[\xi_m(x) \xi_n'(x) - \xi_m'(x) \xi_n(x) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

sejam válidas. As condições de contorno surgem como termo superficial após integrar por partes o lado esquerdo da equação (2.41).

Tentaremos fatorar o operador L da equação (2.39) via operadores supersimétricos [44, 45]. Para isso, introduziremos os operadores S e $S^\dagger$, dados por

$$S = \tilde{A} \left(-\frac{d}{dx} + M(x) \right), \quad (2.42a)$$

$$S^\dagger = \tilde{A} \left(\frac{d}{dx} + M(x) + K(x) \right), \quad (2.42b)$$

onde $K(x) = (\tilde{A} \mathcal{L}_X)' / (\tilde{A} \mathcal{L}_X)$, com as condições de contorno $\tilde{A} \mathcal{L}_X [\xi_m(x) \xi_n(x)] \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$. Os operadores acima levam a

$$L_1 = S^\dagger S = -\frac{1}{\mathcal{L}_X} \frac{d}{dx} \tilde{A}^2 \mathcal{L}_X \frac{d}{dx} + U_1(x), \quad (2.43)$$

onde

$$U_1(x) = \tilde{A}^2 M^2 + \frac{(\tilde{A}^2 \mathcal{L}_X M)'}{\mathcal{L}_X}, \quad (2.44)$$

ou ainda

$$U_1(x) = \tilde{A}^2 M(M + K) + \tilde{A}(\tilde{A}M)'. \quad (2.45)$$

Seguindo a teoria supersimétrica da mecânica quântica [46], o parceiro supersimétrico associado ao operador Sturm-Liouville na equação (2.43) é dado por

$$L_2 = SS^\dagger = -\frac{1}{\mathcal{L}_X} \frac{d}{dx} \tilde{A}^2 \mathcal{L}_X \frac{d}{dx} + U_2(x), \quad (2.46)$$

onde

$$U_2(x) = \tilde{A}M \left(\tilde{A}M + \frac{(\tilde{A}\mathcal{L}_X)'}{\mathcal{L}_X} \right) - \tilde{A} \left(\tilde{A}M + \frac{(\tilde{A}\mathcal{L}_X)'}{\mathcal{L}_X} \right)', \quad (2.47)$$

ou

$$U_2(x) = \tilde{A}^2 M(M + K) - \tilde{A}(\tilde{A}M + \tilde{A}K)'. \quad (2.48)$$

Nesse cenário, os potenciais mencionados $U_1(x)$ e $U_2(x)$ são chamados de potenciais parceiros supersimétricos. Como nosso objetivo é fatorar a equação da estabilidade (2.38), na forma $S^\dagger S \xi_n = \omega_n^2 \xi_n$. Temos que ter $L_1 = L$, que nos leva a $\tilde{A} = A$, e além disso, precisamos encontrar a função $M(x)$ que satisfaça $U_1(x) = U(x)$. Podemos usar a equação do modo zero (2.35) e reescrever o potencial de estabilidade (2.40) como

$$U(x) = \frac{1}{\mathcal{L}_X \phi'} (A^2 \mathcal{L}_X \phi'')', \quad (2.49)$$

comparando a equação acima com o potencial da equação (2.44), obtemos

$$(A^2 \mathcal{L}_X \phi'')' = ((A^2 \mathcal{L}_X M)' + A^2 \mathcal{L}_X M^2) \phi'. \quad (2.50)$$

Essa equação é satisfeita com $M = \phi''/\phi'$, logo, os operadores (2.42) podem ser escritos segundo

$$S = A \left(-\frac{d}{dx} + \frac{\phi''}{\phi'} \right), \quad (2.51a)$$

$$S^\dagger = A \left(\frac{d}{dx} + \frac{\phi''}{\phi'} + \frac{(A\mathcal{L}_X)'}{A\mathcal{L}_X} \right). \quad (2.51b)$$

Portanto, temos agora uma fatoração supersimétrica para o operador Sturm-Liouville em (2.39). Neste caso, os potenciais das equações (2.44) e (2.47) são dados por

$$U_1(x) = A^2 \left(\frac{\phi'''}{\phi'} + \left(\frac{\mathcal{L}'_X}{\mathcal{L}_X} + 2\frac{A'}{A} \right) \frac{\phi''}{\phi'} \right), \quad (2.52a)$$

$$U_2(x) = A^2 \left(\left(\frac{\mathcal{L}'_X}{\mathcal{L}_X} + 2\frac{\phi''}{\phi'} \right) \frac{\phi''}{\phi'} - \frac{\phi'''}{\phi'} - \frac{1}{A} \left(\frac{(A\mathcal{L}_X)'}{\mathcal{L}_X} \right)' \right). \quad (2.52b)$$

Os potenciais parceiros supersimétricos acima estão associados ao estudo da equação de Sturm-Liouville (2.38). Em alguns casos, eles podem engendrar a propriedade chamada de invariância de forma, que investigamos no apêndice A dessa tese.

Podemos transformar a equação da estabilidade (2.33) numa equação do tipo Schrödinger fazendo a mudança de variáveis

$$dx = Adz \quad \text{e} \quad \xi_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{A\mathcal{L}_X}}. \quad (2.53)$$

Assim, a equação da estabilidade (2.33) torna-se

$$-\psi_{nzz} + \mathcal{U}(z)\psi_n(z) = \omega_n^2 \psi_n(z), \quad (2.54)$$

onde o subíndice z representa uma derivada com respeito a z e a função $\mathcal{U}(z)$ será

$$\mathcal{U}(z) = \frac{(\sqrt{A\mathcal{L}_X})_{zz}}{\sqrt{A\mathcal{L}_X}} - \frac{1}{\mathcal{L}_X} \left(\mathcal{L}_{\phi\phi} + \frac{1}{A} \left(\frac{\mathcal{L}_{X\phi}\phi_z}{A} \right)_z \right). \quad (2.55)$$

O interessante é que ainda existirá o modo zero ($\omega_n = 0$) para a equação de Schrödinger (2.54). Utilizando a transformação (2.53) no modo zero (2.36) obtemos

$$\psi^{(0)}(z) = \mathcal{N} \sqrt{\frac{\mathcal{L}_X}{A}} \phi_z. \quad (2.56)$$

Também é possível fazer o estudo para fatorar a equação (2.54) em operadores super-simétricos [46]. Como vimos, é possível transformar uma equação de SL geral numa equação do tipo Schrödinger, que geralmente é mais prática de se trabalhar. Entretanto nem sempre será uma tarefa fácil, já que precisaremos resolver uma integral e além disso tomar a função inversa para determinarmos a nova variável z .

2.2 Exemplos Canônicos

Por ora voltaremos nossa atenção para lagrangiana canônica (que é vastamente estudada), tem forma dada por $\mathcal{L} = X - V(\phi)$. Podemos escrever a ação (2.1) como

$$\mathcal{S} = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right), \quad (2.57)$$

A função $V(\phi)$ depende apenas do campo e é denominado de potencial. Para um potencial que possua a simetria de reflexão $\phi = -\phi$, o modelo apresentará simetria Z_2 . Como estamos em unidades naturais, temos que $[x_\mu] = \epsilon^{-1}$, com $[\mathcal{L}] = \epsilon^2$ para que a ação seja adimensional, logo, as dimensões do campo e do potencial serão respectivamente $[\phi] = \epsilon^0$, $[V(\phi)] = \epsilon^2$. A equação de movimento (2.3) nesse caso será

$$\square \phi = -V_\phi, \quad (2.58)$$

com tensor energia-momento (2.5) dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) \right). \quad (2.59)$$

Note que a NEC da equação (2.11) é sempre satisfeita, uma vez que $\mathcal{L}_X = 1$. A densidade de energia será

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi), \quad (2.60)$$

onde cada termo corresponde respectivamente a densidade de energia cinética, gradiente e potencial.

Para soluções estáticas a equação de movimento (2.12) é dada por

$$\phi'' = V_\phi. \quad (2.61)$$

As soluções estáticas e uniformes serão mínimos do potencial $V(\phi)$, pois devem satisfazer a equação acima e ainda terem energia nula. Para modelos que possuem simetria Z_2 , sempre teremos uma solução espelho dada por $\phi_M(x) = -\phi(x)$. A energia (2.16) para as soluções da equação acima será

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi(x)) \right). \quad (2.62)$$

As condições de contorno para o campo aqui estão relacionadas ao potencial: as soluções topológicas devem conectar dois mínimos adjacentes do potencial, já as soluções não-topológicas vão de um mínimo do potencial até um ponto em que o potencial seja zero mas não um mínimo e volta para o mínimo inicial. Podemos estudar o comportamento assintótico pelo lado direito das soluções, tal que $\phi(x \rightarrow \infty) = v$ e $\phi'(x \rightarrow \infty) = 0$. Fazendo $\phi(x \gg 0) \approx v - \phi_a(x)$, onde consideraremos apenas termos lineares em $\phi_a(x)$. A equação de movimento estática (2.61) será aproximadamente

$$-\phi_a'' = V_\phi|_{\phi=v} + V_{\phi\phi}|_{\phi=v}\phi_a(x). \quad (2.63)$$

Como v é um mínimo do potencial e definindo $V_{\phi\phi}|_{\phi=v} = m^2 > 0$, temos que

$$\phi_a'' = -m^2\phi_a(x), \quad (2.64)$$

logo, $\phi_a(x) \propto e^{-mx}$. Esse estudo pode ser feito para o lado esquerdo das soluções ($x \ll 0$) de maneira análoga. A quantidade m pode ser interpretada como a massa clássica. Em geral as soluções possuem comportamento assintótico exponencial, em alguns casos especiais quando $m^2 = 0$ ou não é finito, teremos outros tipos de comportamento, como por exemplo: comportamentos dependendo de potências de x do tipo $\phi_a(x) \propto x^{-b}$ com b sendo um parâmetro real e positivo com massa clássica nula [37, 47–50]. Para o caso em que $m \rightarrow \infty$, temos o comportamentos duplo exponencial $\phi_a(x) \propto e^{-e^{-x}}$ [51–53], ou ainda as soluções compactas [54–56].

Para garantir a estabilidade sob reescala, também impomos a condição de estresse nulo (2.22), que nos leva a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{1}{2}\phi'^2 = V(\phi). \quad (2.65)$$

Nesse caso, as densidades de energia gradiente e potencial terão mesma contribuição energética. Como já foi dito anteriormente, existe um formalismo de primeira ordem com

a introdução da função auxiliar $W(\phi)$ dada pela equação (2.25), aqui discutiremos este formalismo em mais detalhes. Podemos completar o quadrado na energia (2.62), tal que

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{1}{2} (\phi' \mp W_\phi)^2 + V(\phi) - \frac{1}{2} W_\phi^2 \pm W_\phi \phi' \right). \quad (2.66)$$

A energia acima será mínima se

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2, \quad (2.67a)$$

$$\phi' = \pm W_\phi, \quad (2.67b)$$

com equação de movimento $\phi'' = W_\phi W_{\phi\phi}$ e energia $E = \Delta W$. As equações diferenciais de primeira ordem acima também satisfazem a condição de estresse nulo. Perceba que se o potencial for dado pela fórmula acima será não negativo, já que tem o quadrado de W_ϕ . Para que tenhamos kinks o potencial deve possuir pelo menos dois mínimos adjacentes tal que $V(v_\pm) = 0$. Lembrando que não precisamos da forma explícita das soluções para calcular a energia, temos que $\Delta W = |W(v_+) - W(v_-)|$, onde $v_\pm$ são mínimos adjacentes do potencial (2.67a). Como já foi mencionado anteriormente, esse formalismo não suporta soluções do tipo lump, porém, existe uma maneira de ainda introduzirmos uma função $W(\phi)$ para obter a energia das soluções sem conhecê-las, seguindo os passos da referência [36].

A equação da estabilidade (2.33) resultará numa equação do tipo Schrödinger

$$-\xi_n'' + U(x)\xi_n = \omega_n^2 \xi_n, \quad (2.68)$$

onde $U(x)$ é o potencial de estabilidade dado por $U(x) = V_{\phi\phi}$. Para uma solução $\phi(x)$ com derivada ϕ' que não cruze o zero (função sem nó), a equação de estabilidade acima possuirá todos os autovalores não-negativos, já que o seu modo zero $\xi_0 \propto \phi'$ será o estado fundamental do modelo, garantindo a estabilidade linear dessa solução. Caso contrário, a derivada ϕ' possuir um ou dois nós, por exemplo, trata-se do primeiro e do segundo estado excitado do problema. Dessa forma, o modo zero ($\omega_n = 0$) não será o menor autovalor, com isso, a solução estática será instável por pequenas flutuações. A equação de estabilidade acima pode ser fatorado pelos operadores

$$S = -\frac{d}{dx} + \frac{\phi''}{\phi'} \quad \text{e} \quad S^\dagger = -\frac{d}{dx} + \frac{\phi''}{\phi'}, \quad (2.69)$$

de forma que podemos reescrever (2.68) como $S^\dagger S \xi_n = \omega_n^2 \xi_n$. O estudo do parceiro supersimétrico será análogo ao que foi feito anteriormente pela equação (2.46). Nesse caso, seria como na teoria supersimétrica da mecânica quântica [46], já que a equação de SL se reduz a uma equação do tipo Schrödinger.

Seguiremos nossos estudos com alguns exemplos, primeiramente discutiremos alguns modelos que possuem soluções topológicas e por fim, um exemplo que suporta soluções não-topológicas.

2.2.1 Modelo ϕ^4

Um modelo bastante conhecido na literatura é o $\lambda\phi^4$ [57–61]. Consideraremos o potencial $\lambda\phi^4$ para um campo escalar real com simetria Z_2 , dado por

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} (v^2 - \phi^2)^2, \quad (2.70)$$

com mínimos simétricos em $\phi = \pm v$ e máximo local em $\phi = 0$, com altura $V(0) = \lambda v^4$. A massa clássica será $m^2 = 4\lambda v^2$, segundo a equação (2.64), as soluções terão comportamento assintóticos: $\phi_a(x) \propto e^{-2\sqrt{\lambda}v|x|}$, para $x \rightarrow \pm\infty$. Os parâmetros λ e v são reais e positivo, com v adimensional e $[\lambda] = \epsilon^2$. Podemos fazer uma reescala na ação (2.57) para não termos que ficar nos preocupando com a dimensão dos parâmetros envolvidos, tomando: $\phi \rightarrow v\phi$ e $x_\mu \rightarrow x_\mu/(v\sqrt{\lambda})$. Logo, podemos tomar $\lambda = v = 1$ sem perda de generalidade. Até o fim desse capítulo seguiremos com todas as quantidades envolvidas adimensionais, de forma que é possível fazer uma reescala para recuperar a dimensionalidade delas. O potencial acima será

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2, \quad (2.71)$$

com mínimos em $\phi = \pm 1$ e máximo em $\phi = 0$, ilustrado na figura 2.1. A equação de movimento para soluções estáticas (2.61) será

$$\phi'' = -2\phi(1 - \phi^2), \quad (2.72)$$

com soluções uniformes $\bar{\phi} = \pm 1$.

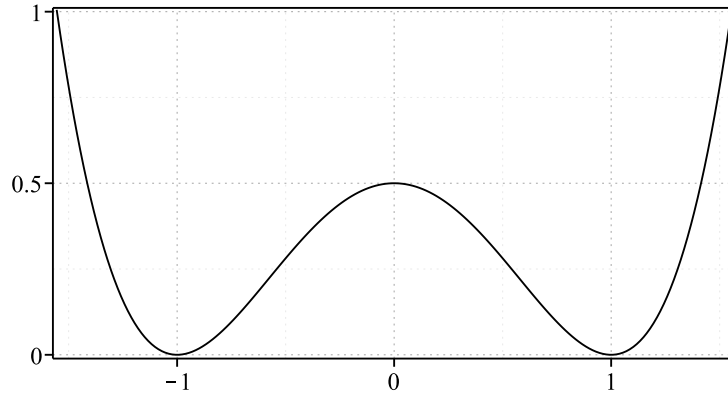


Figura 2.1 Potencial $V(\phi)$ dado pela equação (2.71). Como pode ser visto, possui mínimos em $\phi = \pm 1$ e um máximo local em $\phi = 0$.

O potencial (2.71) é obtido para função auxiliar na forma

$$W(\phi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3, \quad (2.73)$$

como sabemos, podemos calcular a energia das soluções de maneira direta. Vamos considerar, por exemplo, a solução do tipo kink que conecta os mínimos do potencial de $\phi = -1$ a $\phi = 1$, cuja energia é $E = \Delta W = 4/3$. A equação diferencial de primeira ordem (2.67b) para o kink é dada por

$$\phi' = 1 - \phi^2, \quad (2.74)$$

com solução

$$\phi(x) = \tanh(x), \quad (2.75)$$

o anti-kink pode ser obtido pela troca $x \rightarrow -x$, que nesse caso em particular é igual a solução espelho. A densidade de energia para ambas soluções será

$$\rho(x) = \text{sech}^4(x), \quad (2.76)$$

que ao ser integrada em todo espaço resulta em $E = 4/3$. Observe que esse resultado foi obtido também pela função auxiliar (2.73). A solução do tipo kink e sua respectiva densidade de energia podem ser vistas na figura 2.2.

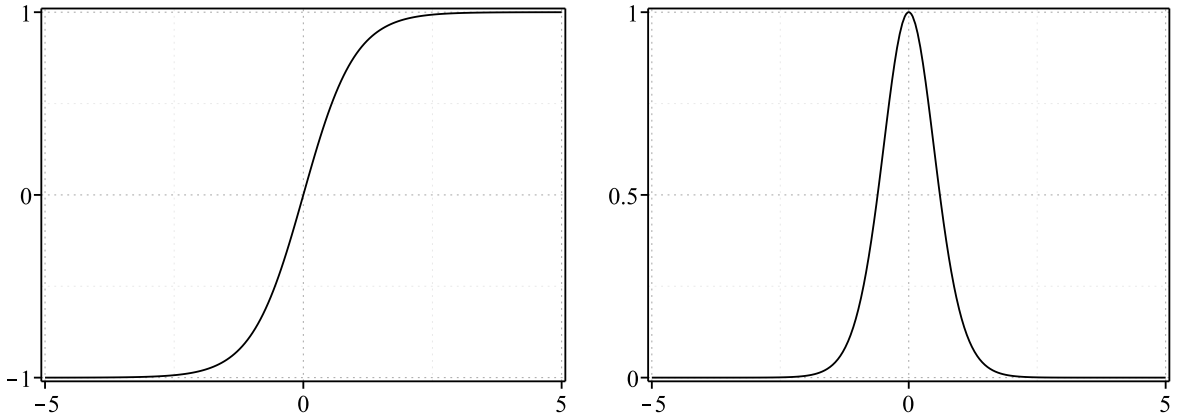


Figura 2.2 Solução do tipo kink $\phi(x)$ referente a equação (2.75) no lado esquerdo e no lado direito a densidade de energia $\rho(x)$ associada a equação (2.76).

Para estudar a estabilidade linear do modelo (2.71) precisamos resolver a equação de Schrödinger (2.68) para o pontencial de estabilidade

$$U(x) = 4 - 6\text{sech}^2(x). \quad (2.77)$$

Esse potencial é conhecido como Pöschl-Teller modificado e é famoso na mecânica quântica por ser um potencial sem reflexão. Ele possui estados ligados entre $-2 \leq \omega^2 < 4$, um estado semi-ligado em $\omega^2 = 4$ e estados de espalhamento para $\omega^2 > 4$. Podemos usar os resultados obtidos no apêndice A para determinar que os autovalores dos estados ligados são $\omega_n^2 = 4n - n^2$. Assim, teremos o modo zero ($\omega_0 = 0$) e um estado excitado ($\omega_1^2 = 3$). Além disso, podemos mostrar que os estados normalizados serão

$$\xi_0(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sech}^2(x) \quad \text{e} \quad \xi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{sech}(x) \tanh(x). \quad (2.78)$$

Como pode ser visto, todos os autovalores serão não-negativos. Concluimos que as soluções estáticas desse modelo são estáveis sob pequenas perturbações. O gráfico do potencial de estabilidade (2.77) e seu modo zero está esboçado na figura 2.3.

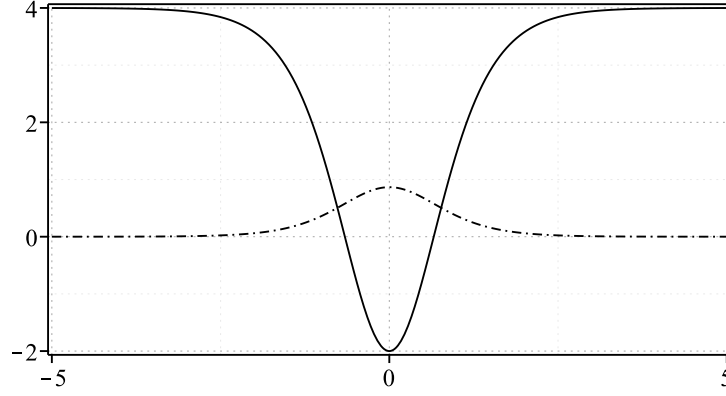


Figura 2.3 Potencial de estabilidade $U(x)$ dado pela equação (2.77) com linha sólida e o modo zero $\xi_0(x)$ da equação (2.78) para a linha com traços e pontos.

2.2.2 Modelo ϕ^6

Outro potencial que é formado como potências de ϕ é o modelo ϕ^6 . Podemos escrevê-lo como

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2)^2, \quad (2.79)$$

com mínimos em $\phi = 0, \pm 1$ e máximos locais em $\phi = \pm 1/\sqrt{3}$, como pode ser visto na figura 2.4. Nesse caso teremos dois setores topológicos, um entre -1 e 0 e outro entre 0 e 1 , que por conveniência chamaremos respectivamente de primeiro e segundo setor. A massa clássica dependerá do mínimo em questão, para $\phi = 0$ temos que $m^2 = 1$, já para $\phi = \pm 1$ teremos $m^2 = 4$. Indicando que as soluções terão comportamento assintóticos distintos quando $x \rightarrow \pm\infty$, por exemplo, para o setor entre -1 e 0 , teremos: $\phi_a(x) \propto e^{2x}$ quando $x \rightarrow -\infty$ e $\phi_a(x) \propto e^{-x}$ para $x \rightarrow \infty$. A equação de movimento (2.61) é dada por

$$\phi'' = -\phi(1 - \phi^2)(1 - 3\phi^2) \quad (2.80)$$

com soluções estáticas e uniformes $\bar{\phi} = 0, \pm 1$.

Obtemos o potencial (2.79) a partir da função auxiliar

$$W(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{4}\phi^4, \quad (2.81)$$

ambos setores terão a mesma energia $E = \Delta W = 1/4$. As equações diferenciais de primeira ordem (2.67b) são

$$\phi' = \pm\phi(1 - \phi^2), \quad (2.82)$$

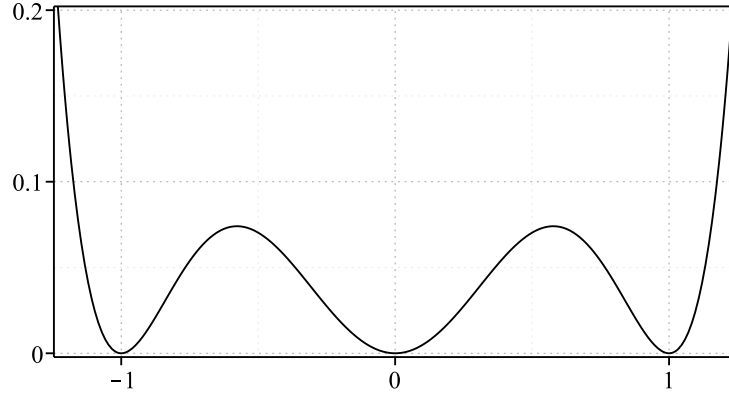


Figura 2.4 Potencial $V(\phi)$ da equação (2.79), com três mínimos localizados em $\phi = 0, \pm 1$ e dois máximos em $\phi = \pm 1/\sqrt{3}$.

com soluções tipo kink

$$\phi(x) = -\sqrt{\frac{1 - \tanh(x)}{2}} \quad \text{e} \quad \phi(x) = \sqrt{\frac{1 + \tanh(x)}{2}}, \quad (2.83)$$

para o primeiro e segundo setor, respectivamente. O anti-kink de cada setor pode ser obtido pela troca de $x \rightarrow -x$ do seu respectivo kink. Diferentemente das soluções estáticas (2.75) do modelo ϕ^4 , aqui as soluções espelho dos kinks não reproduzem os seus respectivos anti-kinks, mas sim o anti-kink do outro setor. A densidade de energia para as soluções será

$$\rho(x) = \frac{1}{8} (1 \pm \tanh(x)) \operatorname{sech}^2(x), \quad (2.84)$$

onde o sinal positivo é para o kink do primeiro setor e o antikink do segundo setor, já o negativo para o antikink do primeiro setor e o kink do segundo setor. Como sabemos, ao integrarmos a densidade de energia acima, teremos energia $E = 1/4$. Na figura 2.5 fazemos os gráficos das soluções do tipo kink (2.83) e suas densidades de energia.

No estudo da estabilidade linear das soluções (2.83), precisamos resolver a equação de Schrödinger (2.68) para o potencial

$$U(x) = \frac{5}{2} \mp \frac{3}{2} \tanh(x) - \frac{15}{4} \operatorname{sech}^2(x), \quad (2.85)$$

com um único estado ligado, o modo zero, cuja forma é

$$\xi_0(x) = \frac{\operatorname{sech}^2(x)}{\sqrt{2 \mp 2 \tanh(x)}}. \quad (2.86)$$

Os potenciais de estabilidade e seus modos zero podem ser vistos na figura 2.6. Note que os potenciais possuem assimetria nos limites $U(x \rightarrow \pm\infty) = m_{\pm}$. Essa assimetria é gerada por conta do comportamento diferente que as soluções apresentam assintoticamente. Por

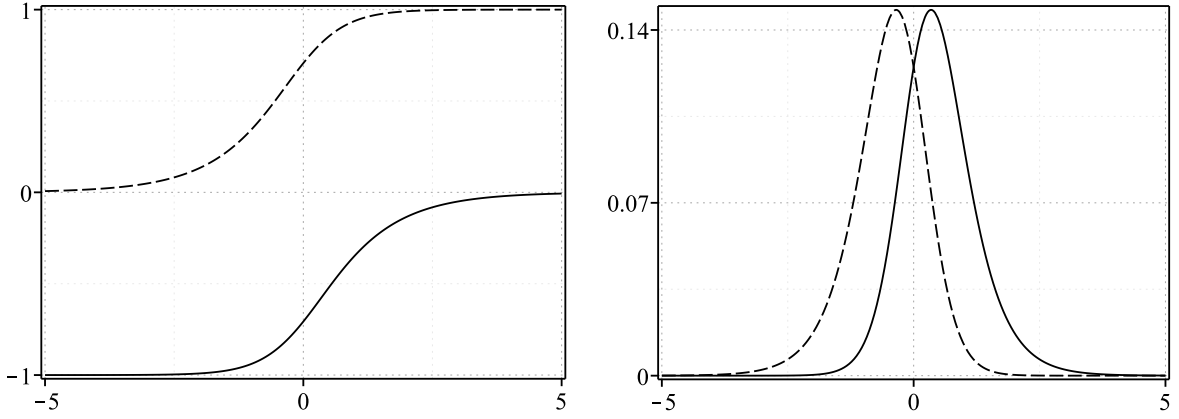


Figura 2.5 No lado esquerdo as soluções $\phi(x)$ dado pela equação (2.83), onde a linha sólida representa o kink do primeiro setor topológico e a tracejada do segundo. No lado direito apresentamos as densidades de energia $\rho(x)$ da equação (2.84).

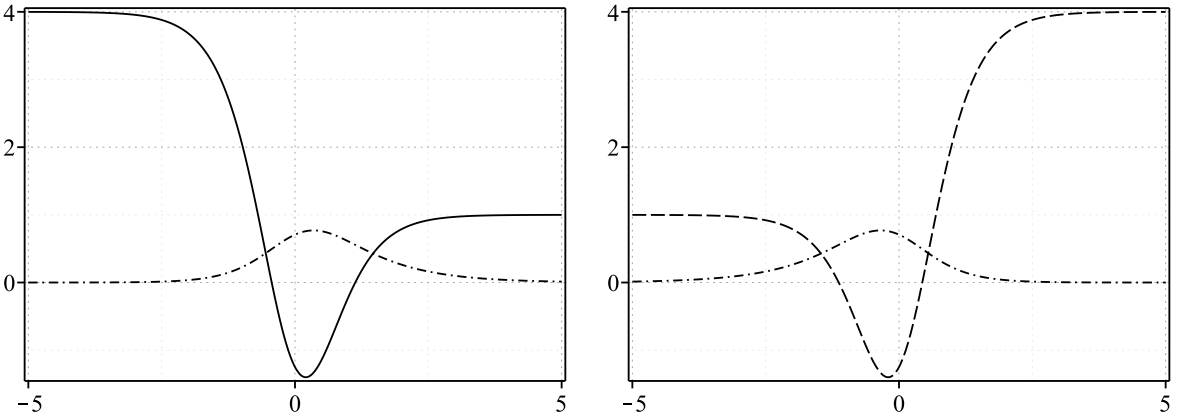


Figura 2.6 Potenciais de estabilidade $U(x)$ dado pela equação (2.85) e seus modos zeros $\xi_0(x)$ da equação (2.86). No lado esquerdo de linha sólida o potencial $U(x)$ para o kink do primeiro setor topológico e o seu modo zero $\xi_0(x)$ com traços e pontos. Já o lado direito é para o kink do segundo setor, o potencial $U(x)$ agora sendo a curva tracejada.

causa disso, os potenciais de estabilidade (2.85) admitem estados de reflexão para ω^2 entre 1 e 4. Para valores com $\omega^2 > 4$ não teremos estados de reflexão.

Os dois modelos anteriores são polinomiais, o modelo ϕ^4 com dois mínimos e o ϕ^6 com três mínimos. Existe uma classe de modelos como potências do campo [62, 63]. Também existem potenciais não polinomiais, um deles é vastamente estudado, o sine-Gordon, não discutiremos sobre ele aqui, mas pode ser facilmente encontrado na literatura, ver referências [64, 65]. O potencial do sine-Gordon é bastante conhecido por apresentar um infinidades de mínimos. Uma variedade desse tipo de potencial é o duplo sine-Gordon [66, 67], onde os autores fizeram uso do método da deformação [9, 68], a fim de obter soluções analíticas.

2.2.3 Modelo sem massa

Mostraremos agora um modelo que tem comportamento de longo alcance, dado pelo potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2} |1 - \phi^2|^3, \quad (2.87)$$

com mínimos em $\phi = \pm 1$ e um máximo local em $\phi = 0$, ver figura 2.7. Esse potencial também possui simetria Z_2 e foi estudado em [47]. A massa clássica para ambos mínimos será nula ($m = 0$), ou seja, não teremos soluções com comportamento assintóticos exponencial. Escrevemos a equação de movimento (2.61) como

$$\phi'' = -3\phi(1 - \phi^2) |1 - \phi^2|, \quad (2.88)$$

teremos $\phi = \pm 1$ como sendo as soluções estáticas e uniformes.

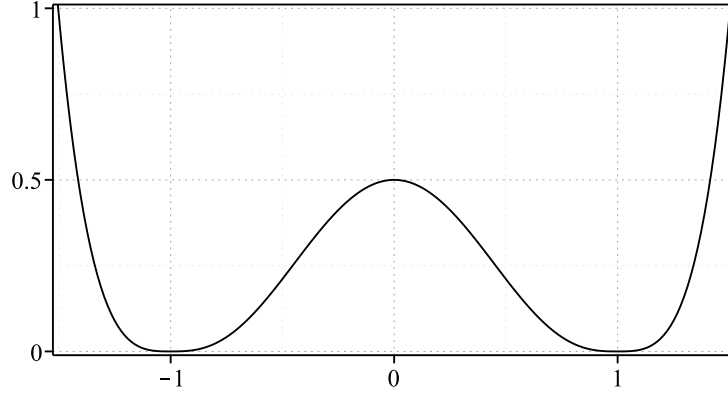


Figura 2.7 Potencial $V(\phi)$ dado pela equação (2.87), com mínimos em $\phi = \pm 1$ e máximo em $\phi = 0$.

Podemos introduzir uma função $W(\phi)$ que recupere o potencial (2.87), entretanto não colocamos sua forma aqui por não ser tão elegante, mas pode ser visto na referência [47]. Teremos a equação diferencial de primeira ordem para o kink dada por

$$\phi' = \left(\sqrt{1 - \phi^2} \right)^3, \quad (2.89)$$

com solução analítica

$$\phi(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}. \quad (2.90)$$

O anti-kink pode ser obtido pela troca $x \rightarrow -x$. Fazendo um estudo assintótico para o lado direito da solução acima, podemos escrever

$$\phi(x \gg 0) \approx 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{8x^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^6}\right). \quad (2.91)$$

Diferentemente dos dois modelos anteriores, o comportamento assintótico da solução (2.90) não será exponencial, mas sim polinomial. Esse mesmo estudo pode ser feito para

o lado esquerdo da solução, o comportamento também será polinomial. A densidade de energia para as soluções é dada por

$$\rho(x) = \frac{1}{(1+x^2)^3}, \quad (2.92)$$

que ao integrarmos em todo espaço, obtemos a energia $E = 3\pi/8$. A densidade de energia também terá comportamento assintóticos polinomial. Fazendo um estudo assintótico, temos que

$$\rho(x \gg 0) \approx \frac{1}{x^6} - \frac{3}{x^8} + \frac{6}{x^{10}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{12}}\right). \quad (2.93)$$

A solução (2.90) e a densidade de energia (2.92) são mostradas na figura 2.8.

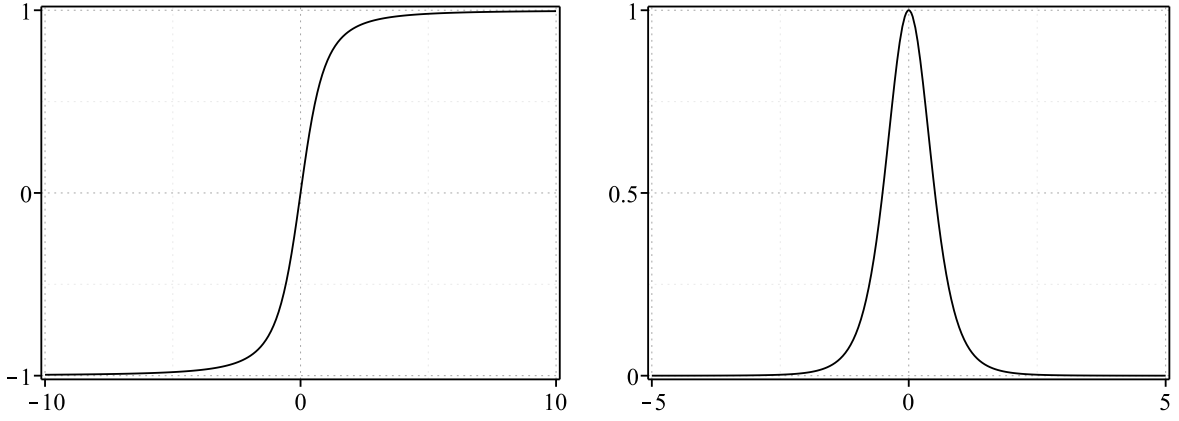


Figura 2.8 No lado esquerdo a solução do tipo kink $\phi(x)$ da equação (2.90) e no lado direito a densidade de energia $\rho(x)$ dado pela equação (2.92).

Potencial de estabilidade é escrito como

$$U(x) = \frac{12x^2 - 3}{(1+x^2)^2}, \quad (2.94)$$

nesse caso teremos apenas um estado ligado, o modo zero

$$\xi_0(x) = \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{\pi}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.95)$$

Como o modo zero é uma função sem nó, sabemos que será o estado fundamental, logo, não teremos estados para $\omega^2 < 0$. Também não teremos mais estados ligados para $\omega^2 > 0$, pois $U(x \rightarrow \pm\infty) = 0$. O potencial de estabilidade (2.94) e seu modo zero (2.95) podem ser vistos na figura 2.9.

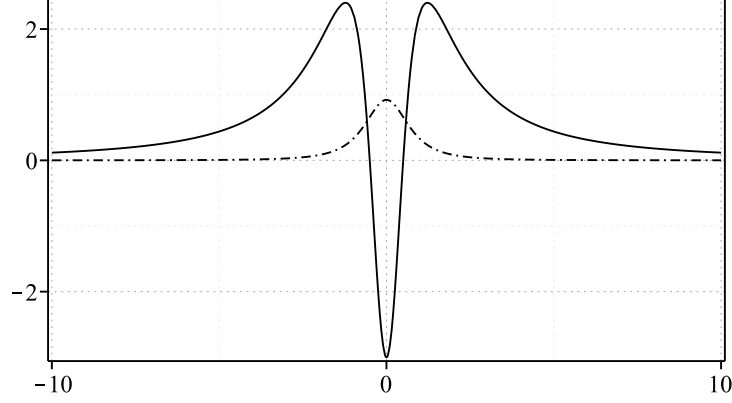


Figura 2.9 Potencial de estabilidade $U(x)$ referente a equação (2.94) e seu respectivo modo zero $\xi_0(x)$.

2.2.4 Modelo ϕ^4 invertido

Vamos agora fazer um estudo para as soluções não-topológicas, consideraremos o potencial dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2). \quad (2.96)$$

Note que é um potencial que possui simetria Z_2 , com um mínimo local em $\phi = 0$ e máximos globais em $\phi = \pm 1/\sqrt{2}$, como pode ser visto na figura 2.10. A massa clássica do mínimo em zero é unitária ($m = 1$). A equação de movimento (2.61) será

$$\phi'' = \phi(1 - 2\phi^2), \quad (2.97)$$

com solução estática e uniforme $\phi = 0$. Nesse caso, as soluções terão apenas uma condição de contorno em $\phi(x \rightarrow \pm\infty) = 0$, logo, serão soluções do tipo lump.

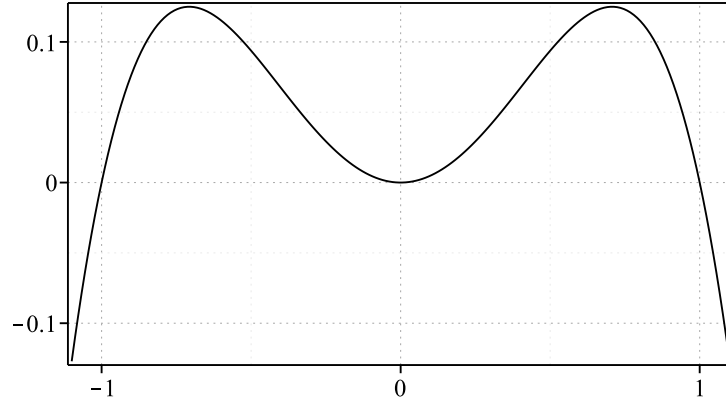


Figura 2.10 Potencial $V(\phi)$ da equação (2.96), possui um mínimo local em $\phi = 0$ e máximos globais em $\phi = \pm 1/\sqrt{2}$.

Como sabemos, é possível obter um formalismo de primeira ordem introduzindo uma função $W(\phi)$, conforme [36]. Entretanto, não precisamos disso para obter equações diferenciais de primeira ordem. Podemos usar a condição de estresse nulo (2.65) e escrever

$$\phi'^2 = \phi^2 (1 - \phi^2), \quad (2.98)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem, que satisfaz a equação de movimento. As soluções serão

$$\phi(x) = \pm \operatorname{sech}(x), \quad (2.99)$$

que podem ser relacionadas uma com a outra por uma troca $\phi \rightarrow -\phi$, devido a simetria Z_2 . Não existe o conceito de anti-lump, como pode ser verificado nas soluções acima, a troca $x \rightarrow -x$ manterá a solução inalterada. A densidade de energia é dada por

$$\rho(x) = \tanh^2(x) \operatorname{sech}^2(x), \quad (2.100)$$

com energia $E = 2/3$. Por conveniência faremos apenas o gráfico da solução positiva da equação (2.99), seu comportamento pode ser visto da figura 2.11. A solução sai de $\phi = 0$, cresce até $\phi = 1$ e depois decresce até zero novamente. Devido a troca de sinal na derivada primeira das soluções em $x = 0$, a densidade de energia (2.100) será zero em $x = 0$, com máximos em $x = \pm \operatorname{arcsech}(1/\sqrt{2})$, veja a figura 2.11.

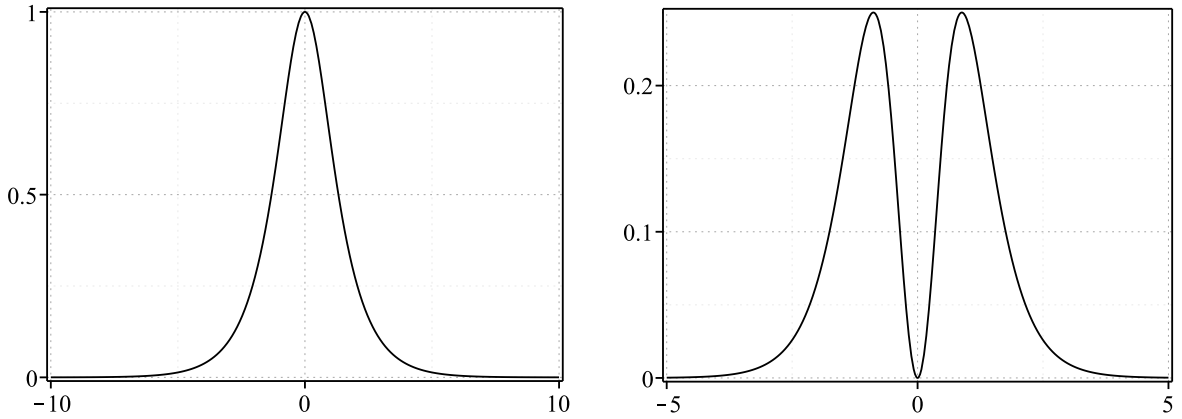


Figura 2.11 No lado esquerdo a solução positiva $\phi(x)$ do tipo lump, dada pelo sinal positivo da equação (2.99) e no lado direito a densidade de energia $\rho(x)$ associada a equação (2.100).

O potencial de estabilidade para as soluções tipo lump (2.99) será

$$U(x) = 1 - 6 \operatorname{sech}^2(x). \quad (2.101)$$

Esse potencial tem a mesma forma do potencial (2.77) do modelo ϕ^4 , porém com uma altura menor em 3. Consequentemente, os autovalores serão deslocado em 3, ou seja, $\omega_n^2 = 4n - n^2 - 3$. Porém os autoestados serão os mesmos do modelo ϕ^4 , que são

$$\xi_0(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sech}^2(x) \quad \text{e} \quad \xi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{sech}(x) \tanh(x). \quad (2.102)$$

Apesar de terem os mesmo autoestados, como foi dito, os autovalores serão outros. O estado fundamental terá autovalor negativo $\omega_0^2 = -3$. Logo, as soluções (lump) do modelo ϕ^4 invertido serão instáveis sob pequenas perturbações. Não precisaríamos ter que resolver a equação de Schrödinger para verificar que essas soluções não são estáveis. Poderíamos ver pelo modo zero, que nesse caso possui um nó, veja na figura 2.12, juntamente com o potencial de estabilidade (2.101).

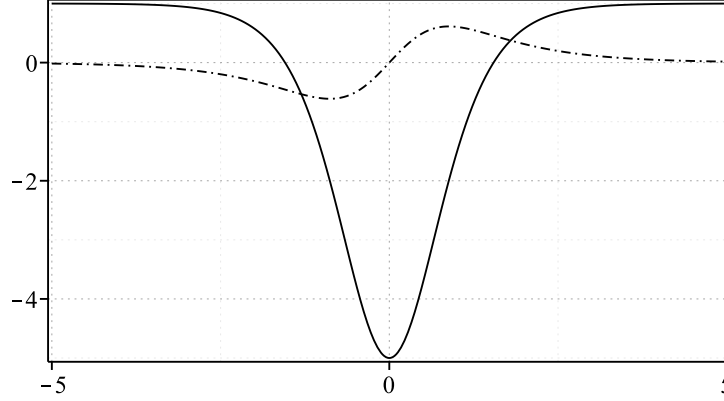


Figura 2.12 Potencial de estabilidade $U(x)$ conforme a equação (2.101) e seu modo zero $\xi_1(x)$.

Existem vários outros modelos com soluções do tipo lump [36, 69–71], tais soluções podem ter comportamentos assintóticos exponencial [36, 69], de longo alcance [36, 69, 70], duplo exponencial [70] e até mesmo lumps compactos [71].

2.3 Exemplos Generalizados

Aqui focaremos em modelos que não sejam os canônicos, como foi feito a partir da equação (2.57). Voltaremos nossa atenção para os modelos generalizados, onde a densidade lagrangiana dependa de forma geral do campo e de suas derivadas na forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, X)$, onde $X = (1/2)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$. Começaremos multiplicando o modelo canônico por um fator global dependente do campo $f(\phi)$, em seguida estudaremos o caso $\mathcal{L} = F(X) - V(\phi)$, com $F(X)$, sendo uma potência de X . Por fim, introduziremos o termo de *cuscuton* e mostraremos como essa contribuição modifica as equações gerais para o estudo de defeitos topológicos.

2.3.1 Modelo com fator global

Consideraremos a densidade lagrangiana estudada em [72], onde foi multiplicado uma função $f(\phi)$ na densidade lagrangiana canônica, ou seja

$$\mathcal{L} = f(\phi) \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right). \quad (2.103)$$

A função $f(\phi)$ deve ser positiva para satisfazer a NEC, conforme a equação (2.11). Fazendo uma redefinição de campo do tipo $\phi = g(\chi)$, teremos

$$\mathcal{L} = f(g(\chi)) \left(\frac{1}{2} g_\chi^2 \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(g(\chi)) \right), \quad (2.104)$$

além disso, consideraremos que

$$g_\chi^2 = \frac{1}{f(g(\chi))} \quad \text{e} \quad \tilde{V}(\chi) = \frac{1}{g_\chi^2} V(g(\chi)), \quad (2.105)$$

com isso, obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \tilde{V}(\chi), \quad (2.106)$$

que é a lagrangiana canônica, ou seja, é possível recuperar o modelo canônico através de uma redefinição de campo em (2.103). Entretanto, para que isso seja possível, precisamos resolver

$$\chi = \int^{g(\chi)} d\phi \sqrt{f(\phi)} = F(g(\chi)), \quad (2.107)$$

ou seja, se quisermos obter as soluções de (2.103) em (2.106), precisamos resolver a integral acima, além disso, tomar a inversa da função $F(g(\chi))$ para obter $g(\chi) = F^{-1}(\chi)$. Isso nem sempre é uma tarefa fácil, por isso o interesse em estudar o modelo com um fator global $f(\phi)$.

Como nosso objetivo é o estudo de defeitos topológicos, é conveniente considerarmos os campos estáticos, ou seja, $\phi = \phi(x)$. A equação de movimento estática (2.12) toma forma

$$\phi'' = V_\phi - \frac{f_\phi}{f(\phi)} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 - V(\phi) \right), \quad (2.108)$$

já as componentes do tensor energia-momento (2.13) e (2.14) serão

$$\rho = f(\phi) \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right), \quad (2.109a)$$

$$\tau = f(\phi) \left(\frac{1}{2} \phi'^2 - V(\phi) \right), \quad (2.109b)$$

onde ρ é a densidade de energia e τ o estresse. Para soluções com estresse nulo temos que

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \phi'^2, \quad (2.110)$$

fazendo com que a equação de movimento (2.108) seja análoga a do modelo canônico (2.61), ou seja

$$\phi'' = V_\phi. \quad (2.111)$$

A equação de movimento acima não depende explicitamente da função $f(\phi)$, ou seja, é possível resolver a equação acima com as mesmas soluções para um dado potencial $V(\phi)$ que satisfaz a equação de movimento do modelo canônico (2.61). Porém, como pode

ser visto pela densidade de energia (2.109a), a energia das soluções dependerá da função $f(\phi)$.

Podemos minimizar a energia das soluções da equação acima, para isso, faremos uso da função auxiliar $W(\phi)$. Fazendo um procedimento parecido com o que foi feito no caso canônico, minimizamos a energia para um potencial na forma

$$V(\phi) = \frac{W_\phi^2}{2f^2(\phi)}, \quad (2.112)$$

desde que as equações diferenciais de primeira ordem (2.25), dadas por

$$\phi' = \pm \frac{W_\phi}{f(\phi)}, \quad (2.113)$$

sejam satisfeitas. Nesse caso, calculamos a energia através da equação (2.26), ou seja $E = \Delta W$. Se tomarmos a função $W(\phi)$ como partida, podemos determinar a energia sem conhecermos as soluções, desde que as condições de contorno para as soluções $\phi(x \rightarrow \infty) = v_\pm$ sejam mínimos do potencial (2.112). Logo, teremos soluções com energia independente de $f(\phi)$, mas as soluções dependerá, já que é necessário resolver as equações diferenciais de primeira ordem (2.113).

Essas discussões podem ser vistas em detalhes na referência [72]. Faremos aqui uma nova abordagem para o problema, definiremos uma nova função $\widetilde{W}(\phi)$, tal que

$$\widetilde{W}(\phi) = \int^\phi dg \frac{W_g}{f(g)}, \quad (2.114)$$

logo $\widetilde{W}_\phi = W_\phi/f$. Dessa forma, a equação diferencial de primeira ordem (2.113) torna-se

$$\phi' = \pm \widetilde{W}_\phi, \quad (2.115)$$

com potencial (2.112) na forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \widetilde{W}_\phi^2. \quad (2.116)$$

A vantagem da definição (2.114) é que podemos partir com uma função $\widetilde{W}(\phi)$, escolhendo ela com uma forma que tenha soluções conhecidas do modelo canônico (2.67b). Resolveríamos as equações diferenciais de primeira ordem (2.115) que não depende do fator global $f(\phi)$. Porém, não seremos capazes de calcular a energia de maneira direta, para isso precisaríamos integrar (2.114), para obter $W(\phi)$ e então usar $E = |\Delta W|$. Como a integração depende do fator global, a energia dependerá da função $f(\phi)$. É possível determinar a energia das soluções da equação (2.115) sem precisar resolver a integral de (2.114), para isso precisamos integrar a densidade de energia

$$\rho(x) = f(\phi(x)) \phi'^2. \quad (2.117)$$

Essa fórmula é interessante, pois podemos gerar novas características na densidade de energia modificando a função f , desde que tenhamos as soluções da equação (2.115).

A equação da estabilidade linear (2.33) para as soluções com estresse nulo será

$$-\frac{1}{f} \left(f \xi_n' \right)' + U(x) \xi_n = \omega^2 \xi_n, \quad (2.118)$$

onde $U(x)$ é o potencial de estabilidade definido em (2.40), que toma forma

$$U(x) = V_{\phi\phi} + \frac{f_{\phi} V_{\phi}}{f}. \quad (2.119)$$

Podemos fatorar a equação de estabilidade (2.118) pelos operadores

$$S = -\frac{d}{dx} + \frac{\phi''}{\phi'} \quad \text{e} \quad S^{\dagger} = \frac{1}{f} \frac{d}{dx} f + \frac{\phi''}{\phi'}, \quad (2.120)$$

com $S^{\dagger} S \xi_n(x) = \omega_n^2 \xi_n(x)$. Fazer a transformação (2.53) para obter uma equação do tipo Schrödinger é fácil para o modelo com fator global (2.103), pois não precisamos fazer a transformação na coordenada x , já que a hiperbolicidade (2.32) é unitária ($A = 1$). Fazendo apenas a transformação nos estados do tipo $\psi(x) = \sqrt{f} \xi(x)$, reescrevemos a equação da estabilidade (2.118) como uma equação do tipo Schrödinger

$$-\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \mathcal{U}(x) \psi(x) = \omega^2 \psi(x), \quad (2.121)$$

com potencial de Schrödinger dado por

$$\mathcal{U}(x) = V_{\phi\phi} + \frac{3}{2} \frac{f_{\phi} V_{\phi}}{f} + \left(\frac{f_{\phi\phi}}{f} - \frac{f_{\phi}^2}{2f^2} \right) V. \quad (2.122)$$

É interessante que ainda continuará existindo o modo zero, como pode ser visto na equação (2.56). Lembrando que aqui não precisamos transformar as coordenadas para obter a equação de Schrödinger, o modo zero será simplesmente

$$\psi^{(0)}(x) = \mathcal{N} \sqrt{f} \phi', \quad (2.123)$$

onde $\mathcal{N}$ é uma constante de normalização.

Vamos fazer um exemplo usando a função $\widetilde{W}(\phi)$, para isso precisamos resolver a equação (2.114). Uma maneira de resolvê-la é fazendo a escolha

$$W(\phi) = \widetilde{W}^{\beta}(\phi) \quad \text{e} \quad f(\phi) = \beta \widetilde{W}^{\beta-1}(\phi), \quad (2.124)$$

onde β é um parâmetro em princípio real. Por essa escolha só precisamos escolher um $\widetilde{W}(\phi)$ que tenha um potencial (2.116) com mínimos adjacentes que podemos calcular a energia das soluções de maneira direta por $E = |\Delta W|$ sem precisar calcular as soluções da equação (2.115). Para as funções da equação acima a energia dependerá do parâmetro β .

Tomaremos um $\widetilde{W}(\phi)$ que as soluções das equações diferenciais de primeira ordem (2.115) sejam as mesmas do modelo ϕ^4 canônico, estudado na subseção 2.2.1. Logo, escolhemos uma função $\widetilde{W}(\phi)$, tal que

$$\widetilde{W}(\phi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 + c. \quad (2.125)$$

Apesar de ser muito parecido com o da equação (2.73), tem uma constante c a mais, com $c \in \mathbb{R}$. Independentemente dessa constante, teremos o potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2, \quad (2.126)$$

que não depende de c . No caso canônico essa constante não interfere em nada, não modifica a solução, nem a energia e nem estabilidade linear. Aqui, como estamos em modelos generalizados, apesar de não modificar as soluções, já que as equações diferenciais de primeira ordem (2.115) serão as mesmas do caso canônico 2.2.1, haverá mudanças na densidade de energia e na estabilidade linear das soluções. Lembrando que a solução do tipo kink é dada por

$$\phi(x) = \tanh(x). \quad (2.127)$$

Nesse caso, a densidade de energia (2.117) dependerá dos parâmetros β e c , de forma que

$$\rho(x) = \beta \operatorname{sech}^4(x) \left(\tanh(x) - \frac{1}{3} \tanh^3(x) + c \right)^{\beta-1}. \quad (2.128)$$

Observe que para $\beta = 1$ recuperamos o modelo canônico e a densidade de energia acima não dependerá de c . Note também que o parâmetro β deve ser positivo com $\beta \in \mathbb{Z}$ e ímpar. Assim como a densidade de energia dependerá dos parâmetros introduzidos a energia também dependerá e é dada por

$$E = \left(c + \frac{2}{3} \right)^\beta - \left(c - \frac{2}{3} \right)^\beta. \quad (2.129)$$

O potencial (2.126) e a solução (2.127) podem ser vistos nas figuras 2.1 e 2.2, respectivamente. O comportamento da densidade de energia dependerá dos parâmetros β e c , veja a figura 2.13. Para $c = 0$ o parâmetro $\beta \neq 1$ cria um zero na densidade de energia, dividindo-a em duas porções. O parâmetro c gera assimetria na densidade de energia, quando $|c| < 2/3$ a densidade de energia terá o zero desde que $\beta \neq 1$, já para $|c| \geq 2/3$ não terá zeros, independentemente do valor de β .

Faremos agora uma análise da estabilidade linear da solução (2.127). Como estamos trabalhando com modelos generalizados a equação de estabilidade é uma equação de Sturm-Liouville, ver equação (2.118). Entretanto, para o a situação que estamos explorando é mais complicado estudar pela equação de Sturm-Liouville. Por essa razão, estudaremos a estabilidade linear a partir da equação de Schrödinger (2.121) com potencial (2.122) dado por

$$\mathcal{U}(x) = \frac{144c^2 + 64 - 24(9c^2 + 4)S^2 - 48(2\beta + 1)S^4 + 8(6\beta + 1) + 48c(4 - 3\beta S^2 - 4S^4)T}{36c^2 + 16 - 12S^4 - 4S^6 + 24c(2 + S^2)T}, \quad (2.130)$$

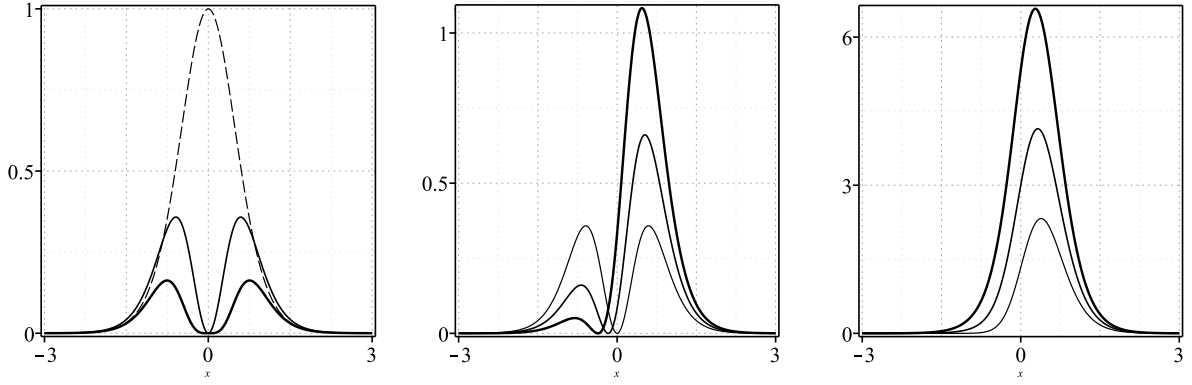


Figura 2.13 Densidade de energia (2.128) para vários valores de β e c . Na primeira figura a linha tracejada é para $\beta = 1$ e qualquer valor de c , as linhas sólidas são para $\beta = 3$ e 5 com $c = 0$, a espessura das linhas aumenta com β . As outras duas figuras são para $\beta = 3$, a do meio é para $c = 0, 1/6$ e $1/3$, já a última é para $c = 2/3, 1$ e $4/3$.

onde $S = \text{sech}(x)$ e $T = \tanh(x)$. Como podemos ver, é um potencial bastante complicado, os seus estados dependerão dos parâmetros β e c . Porém é possível calcular o modo zero conforme a equação (2.56), que será

$$\psi^{(0)}(x) = \mathcal{N} \text{sech}^2(x) \sqrt{\beta \left(\tanh(x) - \frac{1}{3} \tanh^3(x) + c \right)^{\beta-1}}. \quad (2.131)$$

O potencial (2.130) pode ser visto na figura 2.14 com seus respectivos modos zero. Note que independentemente dos valores escolhidos para β e c , o modo zero será uma função sem nó, garantindo assim a estabilidade linear das soluções.

2.3.2 Modelo com potências da dinâmica

Consideraremos agora uma outra generalização do modelo canônico (2.57), dessa vez modificaremos apenas o termo da dinâmica do campo. Tomamos a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{X}{p} |2X|^{p-1} - V(\phi), \quad (2.132)$$

onde $p > 1/2$ é um parâmetro real e $V(\phi)$ é o potencial. Como pode ser visto, assumimos um modelo como potências no termo dinâmico. É fácil ver que para $p = 1$ recuperamos o caso canônico. Evitamos o caso $p = 1/2$, pois esse caso é associado ao termo de cuscuto [73–75], que não contribui para a equação diferencial de primeira ordem, fazendo com que o potencial seja nulo, como veremos na próxima subseção. O caso particular em que $p = 2$ foi estudado em [76, 77], para um potencial do tipo ϕ^4 as soluções serão compactas.

A equação de movimento estática (2.12) torna-se

$$(2p-1)\phi'^{2(p-1)}\phi'' = V_\phi, \quad (2.133)$$

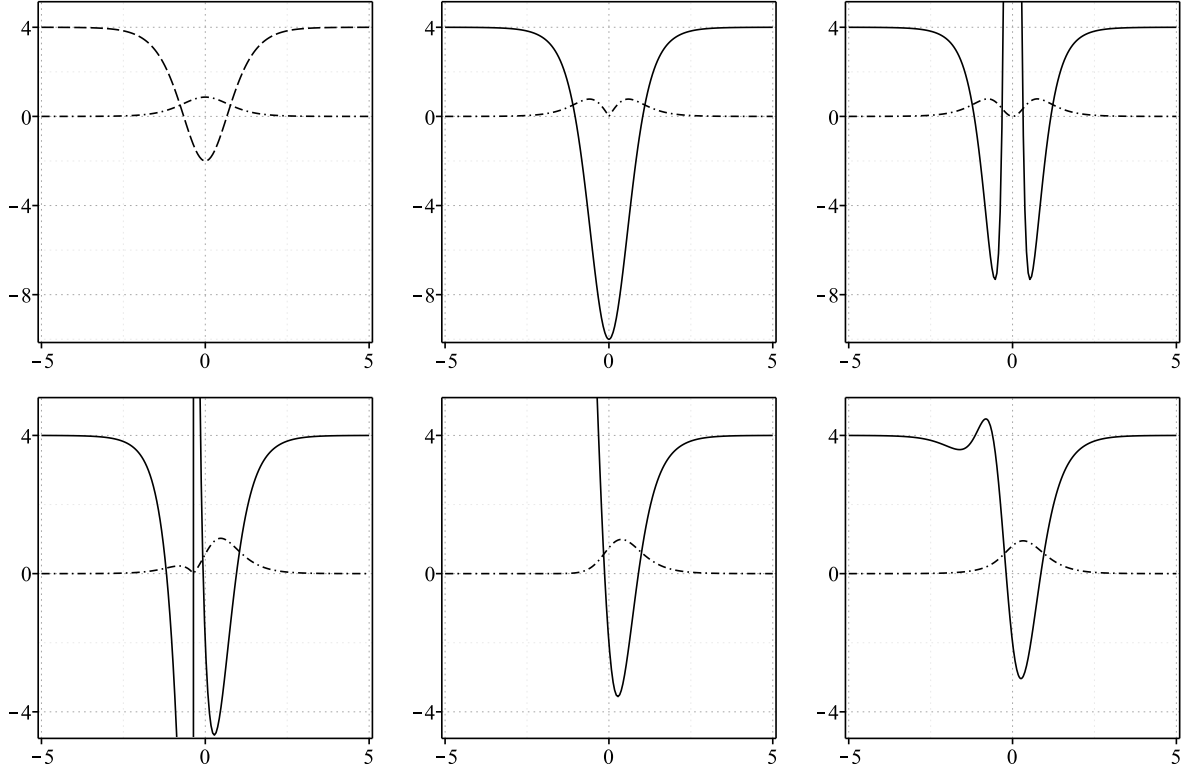


Figura 2.14 Potencial de estabilidade (2.130) para equação de Schrödinger e seus modos zeros com vários valores de β e c . As três figuras de cima são para $\beta = 1, 3$ e 5 da esquerda para direita, com um c qualquer na primeira e $c = 0$ nas outras duas. As outras três é para um valor fixo $\beta = 3$ e $c = 1/3, 2/3$ e 1 .

com densidade de energia (2.13) dada por

$$\rho = \frac{1}{2p} \phi'^{2p} + V(\phi). \quad (2.134)$$

Pela condição de estresse nulo (2.22), temos que

$$\frac{2p-1}{2p} \phi'^{2p} = V(\phi). \quad (2.135)$$

Note que para $p = 1/2$ o potencial será nulo. As soluções dessa equação diferencial de primeira ordem também serão soluções da equação de movimento (2.133). A equação acima relaciona a derivada do campo com o potencial, permitindo reescrevermos a densidade de energia (2.134) como

$$\rho = \phi'^{2p} = \frac{2p}{2p-1} V(\phi). \quad (2.136)$$

Assim como no caso canônico, as soluções conectarão mínimos vizinhos do potencial. Aqui não faremos uso da função auxiliar $W(\phi)$ como foi feito na subseção anterior, mas vale

ressaltar que pode ser usado para determinar as equações diferenciais de primeira ordem e para calcular a energia, como pode ser visto em [23].

Vamos nos focar na estabilidade linear desse modelo, como já sabemos teremos uma equação de Sturm-Liouville dado pela equação (2.33), que nesse caso toma forma

$$-\frac{A^2}{\phi'^{2(p-1)}} \left(\phi'^{2(p-1)} \xi_n' \right)' + U(x) \xi_n = \omega_n^2 \xi_n, \quad (2.137)$$

com potencial de estabilidade $U(x)$ dado por

$$U(x) = \frac{A^2}{2p-1} \frac{V_{\phi\phi}}{\phi'^{2(p-1)}} = A^2 \left(\frac{\phi'''}{\phi'} + 2(p-1) \frac{\phi''^2}{\phi'^2} \right), \quad (2.138)$$

onde A^2 é a hiperbolicidade, definida na equação (2.32),

$$A^2 = 2p - 1, \quad (2.139)$$

que é independente x . Note que apesar da generalização da densidade lagrangiana (2.132), a condição da hiperbolicidade $A^2 > 0$ será sempre válida para $p > 1/2$, que foi tomado como premissa em nosso modelo. Podemos escrever a equação de estabilidade (2.137) na forma dada pela equação (2.39) e fatorar com $L = S^\dagger S$, onde os operadores S e $S^\dagger$ são dados pela equação (2.51). Os operadores supersimétricos serão escritos como

$$S = A \left(-\frac{d}{dx} + \frac{\phi''}{\phi'} \right) \quad \text{e} \quad S^\dagger = A \left(\frac{d}{dx} + (2p-1) \frac{\phi''}{\phi'} \right). \quad (2.140)$$

Como sabemos pela equação 2.52 é possível gerar um potencial de estabilidade parceiro supersimétrico $U_2(x)$. É fácil ver que para $p = 1$ recuperamos o caso canônico, onde as equações de estabilidade serão equações de Schrödinger (2.68). Pode-se também fazer a transformação (2.53) para que a equação de estabilidade (2.137) vire uma equação do tipo Schrödinger. Nesse caso a transformação é bastante simples, já que a hiperbolicidade (2.139) é uma constante, não precisamos resolver uma integral na relação entre as coordenadas x e z , ver referência [23]. Entretanto, vamos abrir mão dessa transformação e trabalharmos com as equações de estabilidade em sua forma de Sturm-Liouville.

Usualmente, soluções do tipo kink tem comportamento assintótico exponencial, isto é, $\phi(x) \mp v_\pm \propto \exp(-|x|)$ para $x \rightarrow \pm\infty$. Logo, podemos estimar como os auto-estados ξ_n se comportam nessa região. Temos que $M = \phi''/\phi'$, para soluções com comportamento assintótico exponencial concluímos que essa função tende para uma constante quando $x \rightarrow \pm\infty$, definidas como $M|_{x \rightarrow \pm\infty} = M_\pm$. Como $A^2 = 2p - 1$ é constante, os operadores in Eq. (2.140) tornam-se uma derivada mais um termo constante, levando a equação de estabilidade (2.137) se tornar

$$-\xi_\pm'' - 2(p-1)M_\pm \xi_\pm' + A^2 M_\pm \xi_\pm = \frac{\omega^2}{A^2} \xi_\pm. \quad (2.141)$$

Sua solução descreve o comportamento assintótico geral das flutuações, que é dado por

$$\xi_\pm = \exp(-(p-1)M_\pm x + ikx), \quad (2.142)$$

onde $k = \sqrt{\omega^2/A^2 - p^2 M_{\pm}^2}$. A expressão acima depende do sinal de $M_{\pm}$, que obedece $\mp M_{\pm} > 0$ para kinks com cauda exponencial. Para $\omega^2 > p^2 A^2 M_{\pm}^2$, temos que k é um valor real, então as oscilações estarão presentes e teremos estados contínuos. Nessa situação, as flutuações desaparecem assintoticamente quando $1/2 < p < 1$, oscilam em todo o espaço para $p = 1$ e explodem quando $p > 1$. Outra possibilidade aparece quando $k = 0$, apesar de não ter o termo oscilatório ainda serão estados contínuos (semi-ligados), as flutuações tendem a desaparecer no infinito por $1/2 < p < 1$, é constante quando $p = 1$ e diverge para $p > 1$. Finalmente, se $\omega^2 < A^2 p^2 M_{\pm}^2$, k é um valor puramente imaginário, de forma que o argumento da exponencial seja real. Nesse caso, teremos estados discretos e as flutuações podem desaparecer, ser constante ou explodir assintoticamente, dependendo do sinal da expressão $-(p-1)M_{\pm} - |k|$.

Faremos um exemplo para o modelo (2.132), consideraremos potencial dado por

$$V(\phi) = \frac{2p-1}{2p}(1-\phi^2)^{2p}, \quad (2.143)$$

com p sendo o mesmo parâmetro que controla a dinâmica do modelo. A solução da equação diferencial de primeira ordem (2.135) é dada por

$$\phi(x) = \tanh(x), \quad (2.144)$$

que é a mesma solução do modelo ϕ^4 com dinâmica canônica. Apesar da modificação que introduzimos com o parâmetro p , teremos a mesma solução. Porém, a densidade de energia (2.136) dependerá de p , onde

$$\rho(x) = \text{sech}^{4p}(x). \quad (2.145)$$

Pode-se integrar a expressão acima em todo o espaço para mostrar que a energia é dada por $E = 2^{4p-1}B(2p, 2p)$, onde $B(z, \tilde{z})$ é a função Beta com argumentos z e $\tilde{z}$.

Vamos agora investigar se a introdução do parâmetro p no modelo modifica a estabilidade linear da solução (2.144). Os operadores S e $S^\dagger$ da equação (2.140) serão dados por

$$S = -A \left(\frac{d}{dx} + 2 \tanh(x) \right) \quad \text{and} \quad S^\dagger = A \left(\frac{d}{dx} - 2(2p-1) \tanh(x) \right). \quad (2.146)$$

Esses operadores são bem definidos em toda a linha real. Isso garante a estabilidade linear do modelo, pois o modo zero será o menor estado do sistema. Porém, podemos ainda fazer um estudo mais profundo sobre a estabilidade da solução, para isso precisamos resolver a equação (2.137). O potencial de estabilidade (2.138) será

$$U(x) = A^2 \left(4(2p-1) - 2(4p-1) \text{sech}^2(x) \right). \quad (2.147)$$

Este potencial pode ser associado à propriedade de invariância da forma. Portanto, podemos usar alguns dos resultados obtidos no apêndice A para as equações (A.11)-(A.13) com $a = 2$, $b = 4(p-1)$ e $\lambda = 1$, os estados discretos serão

$$\xi_n(x) = \text{sech}^{2-n}(x) P_n^{(2p-n, 2p-n)}(\tanh(x)), \quad (2.148)$$

cujos autovalores associados são $\omega_n^2 = nA^2(4p - n)$ para $n = 0, 1, 2, \dots, [2p - 1]$. Usando a equação (2.142) para calcular o comportamento assintótico dos estados do contínuo que surgem quando $\omega^2 \geq 4A^2p^2$. Temos

$$\xi_{\pm} = \exp(\pm 2(p - 1)x + ikx), \quad (2.149)$$

onde $k = \sqrt{\omega^2/A^2 - 4p^2}$. Para o caso particular em que $\omega^2 = 4A^2p^2$ com p inteiro, teremos um estado semi-ligado.

2.3.3 Modelos com termo de Cuscuton

Discutiremos sobre o termo de cuscuton, introduzido nas referências [73, 74], onde estudam as consequências deste termo no contexto cosmológico. Em defeitos, este termo foi estudado em [75], onde adicionamos o termo de cuscuton na dinâmica canônica. Também foi estudado junto com um termo dinâmico generalizado em [45]. Nessa tese mostrarei como a adição do termo de cuscuton modifica um modelo geral, consideraremos a densidade lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}} + \frac{2f(\phi)X}{\sqrt{|2X|}}, \quad (2.150)$$

onde $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}(\phi, X)$ é uma função arbitrária do campo e suas derivadas e $f(\phi)$ é uma função que depende apenas do campo ϕ , que controla o termo de cuscuton. A equação de movimento (2.3) será

$$\partial_{\mu} \left[\left(\tilde{\mathcal{L}}_X + \frac{f(\phi)}{\sqrt{|2X|}} \right) \partial^{\mu} \phi \right] = \tilde{\mathcal{L}}_{\phi} + \frac{2f_{\phi}X}{\sqrt{|2X|}} \quad (2.151)$$

e o tensor energia-momento (2.5) toma forma

$$T_{\mu\nu} = \left(\tilde{\mathcal{L}}_X + \frac{f(\phi)}{\sqrt{|2X|}} \right) \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - \eta_{\mu\nu} \left(\tilde{\mathcal{L}} + \frac{2f(\phi)X}{\sqrt{|2X|}} \right). \quad (2.152)$$

Pela condição de energia nula (NEC) dado pela equação (2.11) temos que

$$\left(\tilde{\mathcal{L}}_X + \frac{f(\phi)}{\sqrt{|2X|}} \right) \geq 0. \quad (2.153)$$

Como pode ser visto pelas três últimas equações, o termo de cuscuton modifica bastante. Entretanto, para soluções estáticas a equação de movimento (2.151) toma uma aparência bastante interessante

$$(\tilde{\mathcal{L}}_X + 2\tilde{\mathcal{L}}_{XX}X)\phi'' = 2\tilde{\mathcal{L}}_{X\phi} - \tilde{\mathcal{L}}_{\phi}. \quad (2.154)$$

O termo de cuscuton não altera a equação de movimento estática se por acaso o modelo (2.150) fosse dado por $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}$, porém a componente do tensor energia-momento (2.152) que representa a densidade de energia

$$\rho = f(\phi)|\phi'| - \tilde{\mathcal{L}}, \quad (2.155)$$

dependerá de $f(\phi)$. A outra componente não nula é o estresse e é dado por

$$\tau = \tilde{\mathcal{L}} + \tilde{\mathcal{L}}_X \phi'^2, \quad (2.156)$$

note que assim como a equação de movimento estática (2.154), o estresse também não depende do termo de cuscuton. Podemos usar a condição de estresse nulo ($\tau = 0$) para obter equações diferenciais de primeira ordem independentes de $f(\phi)$. Assim como na subseção anterior não usaremos o formalismo de primeira ordem via função $W(\phi)$. Como a equação de movimento (2.154) não depende de $f(\phi)$, podemos escolher modelos para $\mathcal{L}$ que tenha soluções já conhecidas. Porém, como já foi dito: apesar de termos as mesmas soluções que o modelo com o termo de cuscuton, a densidade de energia será outra.

Queremos agora ver como o termo de cuscuton modifica a estabilidade linear das soluções, a equação da estabilidade linear (2.33) será

$$-\left(A^2 \left(\tilde{\mathcal{L}}_X + \frac{f(\phi)}{|\phi'|}\right) \xi_n'\right)' = \left(\tilde{\mathcal{L}}_{\phi\phi} + (\tilde{\mathcal{L}}_{X\phi} \phi')' + \omega^2 \left(\tilde{\mathcal{L}}_X + \frac{f(\phi)}{|\phi'|}\right)\right) \xi_n, \quad (2.157)$$

com hiperbolicidade

$$A^2 = (\tilde{\mathcal{L}}_X + 2X \tilde{\mathcal{L}}_{XX}) \left(\tilde{\mathcal{L}}_X + \frac{f(\phi)}{|\phi'|}\right)^{-1}. \quad (2.158)$$

Como pode ser visto será parecido com a equação de estabilidade para um modelo $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}$, com exceção da função peso ($\mathcal{L}_X$) que modifica, dependerá de $f(\phi)$. A fatoração da equação da estabilidade pode ser feita a partir dos operadores supersimétricos (2.51), entretanto não colocaremos sua forma para um modelo geral, só no exemplo que faremos logo mais. A transformação para equação de Schrödinger (2.53) não será trivial, porém conseguimos fazê-la no caso particular em que consideramos $\tilde{\mathcal{L}}$ como o modelo canônico, entretanto não faremos aqui, mas pode ser visto em [75].

Como exemplo vamos tomar a função $\tilde{\mathcal{L}}$ como o do modelo estudado na última subseção (2.132). Escrevemos a lagrangiana (2.150) como

$$\mathcal{L} = \frac{X}{p} |2X|^{p-1} + \frac{2f(\phi)X}{\sqrt{|2X|}} - V(\phi), \quad (2.159)$$

onde p continuará sendo um parâmetro real com $p > 1/2$. Vale ressaltar que a função $f(\phi)$ não pode ser absorvida por meio de uma redefinição de campos como no primeiro modelo generalizado (2.103). Como já foi dito anteriormente, teremos a mesma equação de movimento e condição de estresse nulo que o modelo da subseção anterior, dado pelas equações (2.133) e (2.135). Entretanto, a densidade de energia (2.155) dependerá de $f(\phi)$ e para esse exemplo escrevemos como

$$\rho = \frac{1}{2p} \phi'^{2p} + f(\phi) |\phi'| + V(\phi). \quad (2.160)$$

Para ilustrar, tomamos o potencial (2.143) que depende do parâmetro p do modelo (2.159). Teremos como solução o kink dado pela equação (2.144), o comportamento

dessa solução pode ser visto na figura 2.2. Para sabermos o comportamento da densidade de energia da equação acima precisamos da função $f(\phi)$.

No estudo da estabilidade linear das soluções, teremos a mesma equação de estabilidade (2.137) com potencial de estabilidade (2.138). Porém, a hiperbolicidade aqui não será mais constante como antes, pela equação (2.158) temos que

$$A^2 = \frac{(2p-1)\phi'^{2p-1}}{\phi'^{2p-1} + f(\phi)}. \quad (2.161)$$

Tomando $f(\phi) = 0$ recuperamos a hiperbolicidade constante da equação (2.139). Podemos considerar a mudança de variáveis (2.53) para obter uma equação do tipo Schrödinger, que está relacionado à forma de A . A presença da função $f(\phi)$ complica este processo, já que A deve ser utilizado numa integração em algum momento. Portanto, a investigação da equação de Sturm-Liouville (2.157) é muito importante neste caso. Em seguida, fatoramos a equação de estabilidade com os operadores supersimétricos (2.51). Se esses operadores forem bem definidos, o modelo com a presença do termo cusciton em (2.159) é estável sob pequenas flutuações.

Consideraremos novamente o potencial (2.143) com solução do tipo kink (2.144). Para uma função

$$f(\phi) = \alpha(1 - \phi^2)^q, \quad (2.162)$$

a densidade de energia toma forma

$$\rho(x) = \text{sech}^{4p}(x) + \alpha \text{sech}^{2(q+1)}(x), \quad (2.163)$$

que pode ser integrado em todo o espaço para obtermos a energia $E = 2^{4p-1}B(2p, 2p) + 2^{2q+1}\alpha B(q+1, q+1)$. A função que controla a hiperbolicidade em (2.161) é escrita como

$$A^2 = \frac{2p-1}{1 + \alpha \text{sech}^{2(q+1-2p)}(x)}, \quad (2.164)$$

que não é constante como antes, somente no caso em que $\alpha = 0$. Como já foi dito, a equação de estabilidade é dada pela equação (2.137) com pontecial de estabilidade (2.138) onde A é dado pela equação (2.161). Para nosso exemplo, em particular, $U(x)$ é descrito pela equação (2.147), com a função acima A não constante. Esta equação pode ser fatorada com os operadores supersimétricos in Eq. (2.140). Apesar da hiperbolicidade não ser mais constante, os dois operadores serão regulares em todo o espaço; isso garante a estabilidade do nosso modelo.

Podemos ir além e investigar o comportamento assintótico geral das flutuações $\xi(x)$. Considerado $M|_{x \rightarrow \pm\infty} = M_{\pm}$, $A|_{x \rightarrow \pm\infty} = A_{\pm}$ e $K|_{x \rightarrow \pm\infty} = K_{\pm}$ na equação da estabilidade (2.137) com hiperbolicidade (2.161) para $x \rightarrow \pm\infty$, torna-se

$$-\eta'' - K_{\pm}\eta' + (M_{\pm}^2 + M_{\pm}K_{\pm})\eta = \frac{\omega^2}{A_{\pm}^2}\eta. \quad (2.165)$$

Lembrando que $K(x) = (A\mathcal{L}_X)'/(A\mathcal{L}_X)$, definido abaixo da equação (2.42). A equação acima admite a seguinte solução:

$$\eta_{\pm} = \exp\left(-\frac{K_{\pm}x}{2} + ikx\right), \quad (2.166)$$

com $k = \sqrt{\omega^2/A_{\pm}^2 - (2M_{\pm} + K_{\pm})^2/4}$. Como estamos considerando a solução (2.144) e a função $f(\phi)$ dado pela equação (2.162) para $q > 2p - 1$. Neste caso, temos que $M_{\pm} = \mp 2$ e $A_{\pm} \rightarrow \sqrt{2p-1}$, tal que

$$K(x) = -\tanh(x) \left(4(N-1) + \frac{\alpha(p+1-2N)}{\alpha + \cosh^{2(p+1-2N)}(x)} \right), \quad (2.167)$$

de uma maneira que tende para $K_{\pm} \rightarrow \mp 4(N-1)$, assintoticamente. Temos também que $k = \sqrt{\omega^2/(2N-1) - 4N^2}$, fazendo com que os estados para $\omega^2 > 4N^2(2N-1)$ não possam ser normalizados.

CAPÍTULO 3

Formalismo para N Campos Escalares

Nesse capítulo faremos uma generalização do que foi estudado no anterior. Consideraremos agora mais de um campo escalar real e veremos que fica muito mais complicado, já que teremos que lidar com sistemas de equações diferenciais acopladas. Nas referências [1, 78–81] podemos ver modelos com mais de um campo escalar, onde os autores discutem as dificuldades de se obter as soluções desses sistemas. Assim como no capítulo anterior, desenvolveremos um formalismo de primeira ordem que é compatível com as equações de movimento e em seguida faremos uma análise da estabilidade linear das soluções estáticas.

3.1 Generalidades

A densidade Lagrangiana dependerá dos campos e de suas derivadas, como lidaremos com mais de um campo, rotularemos os campos com um subíndice ϕ_i , com $i = 1, 2, \dots, N$, que depende da quantidade de campos a serem estudados. Definimos um invariante de Lorentz dado por

$$X_{ij} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_j, \quad (3.1)$$

que é o termo em que envolve as derivadas dos campos e temos que $X_{ij} = X_{ji}$. Para darmos continuidade ao nosso estudo de vários campos escalares reais vamos considerar uma ação em dimensões espaço-temporais no espaço plano, com tensor métrico de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$, dado por

$$\mathcal{S} = \int d^2x \mathcal{L}(\phi_i, X_{jk}). \quad (3.2)$$

O estudo para N campos é bastante parecido com o de um campo, porém, aqui teremos uma equação de movimento para cada campo. Logo, temos que resolver um sistema de N equações acopladas. Podemos escrever essas equações de movimento em componentes, ou seja

$$\partial_\mu (\mathcal{L}_{X_{ij}} \partial^\mu \phi_j) = \mathcal{L}_{\phi_i}, \quad (3.3)$$

onde usaremos a notação $\mathcal{L}_{X_{ij}} = \partial \mathcal{L} / \partial X_{ij}$ e $\mathcal{L}_{\phi_i} = \partial \mathcal{L} / \partial \phi_i$ para representar as derivadas adequadas. Para cada subíndice repetido existe uma soma, como na convenção de einstein. Poderíamos imaginar as equações de movimento como uma matriz coluna $1 \times N$, dado pelas componentes da equação acima com $i = 1, 2, \dots, N$. O caso especial de $N = 1$ foi estudado no capítulo anterior. Expandindo a equação de movimento (3.3), temos

$$2X_{jk} \mathcal{L}_{X_{ij} \phi_k} + \mathcal{L}_{X_{ik} X_{jl}} \partial^\mu \phi_k \partial^\nu \phi_l \partial_\mu \partial_\nu \phi_j + \mathcal{L}_{X_{ij}} \square \phi_j = \mathcal{L}_{\phi_i}. \quad (3.4)$$

Também podemos calcular o tensor energia-momento para o modelo (3.2), que nesse caso terá a forma

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{X_{ij}} \partial_\mu \phi_i \partial_\nu \phi_j - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (3.5)$$

Note que apenas os índices gregos (μ, ν) são livres, os índices latinos i e j estão sendo somados. Lembrando que cada componente desse tensor representa uma quantidade física. Temos que a componente T^{00} é a densidade de energia, dada por

$$T_{00} = \rho = \mathcal{L}_{X_{ij}} \dot{\phi}_i \dot{\phi}_j - \mathcal{L}, \quad (3.6)$$

a componente T^{10} é o fluxo de energia no espaço e T^{01} é a densidade de momento de igual valor

$$T_{01} = T_{10} = \mathcal{L}_{X_{ij}} \dot{\phi}_i \phi'_j, \quad (3.7)$$

e por último o estresse

$$T_{11} = \tau = \mathcal{L}_{X_{ij}} \phi'_i \phi'_j + \mathcal{L}, \quad (3.8)$$

onde os pontos representa derivada no tempo e as linhas no espaço. Pela conservação do tensor energia-momento temos que o estresse deve ser constante em todo espaço. Como estamos trabalhando com modelos muito generalizado, faremos uso da condição de energia nula (NEC) como guia. Nessa condição impõe-se que $T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \geq 0$, onde n^μ é um vetor nulo que satisfaz $\eta_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 0$. Restringindo nosso modelo a obdecer

$$\mathcal{L}_{X_{ij}} \partial_\mu \phi_i \partial_\nu \phi_j n^\mu n^\nu \geq 0, \quad (3.9)$$

para os campos $\phi_i(x, t)$ que satisfaçam as equações de movimento (3.3).

Para soluções estáticas $\phi_i = \phi_i(x)$, o termo da equação (3.1) se reduz a $X_{ij} = -\phi'_i \phi'_j / 2$. A equação de movimento de movimento (3.4) pode ser escrito como

$$(\mathcal{L}_{X_{ij}} + 2X_{kl} \mathcal{L}_{X_{ik} X_{jl}}) \phi''_j = 2X_{jk} \mathcal{L}_{X_{ij} \phi_k} - \mathcal{L}_{\phi_i}, \quad (3.10)$$

as componentes não nulas do tensor energia-momento (3.5) serão

$$\rho = -\mathcal{L}, \quad (3.11a)$$

$$\tau = \mathcal{L}_{X_{ij}} \phi'_i \phi'_j + \mathcal{L}, \quad (3.11b)$$

que são respectivamente a densidade de energia e o estresse. Para campos estáticos $\phi_i = \phi_i(x)$ a condição de energia nula (3.9) se reduz a

$$\mathcal{L}_{X_{ij}} \phi'_i \phi'_j \geq 0, \quad (3.12)$$

essa equação é equivalente a escrever $(\rho + \tau) \geq 0$ usando as definições (3.11a) e (3.11b).

Seguiremos os passos do capítulo anterior e repetimos o argumento de Derrick para N campos. Tomando a reescala $x \rightarrow y = \lambda x$ nas soluções, teremos $\phi_i(x) \rightarrow \phi_i^{(\lambda)} = \phi(y)$ e $X_{ij} \rightarrow X_{ij}^{(\lambda)} = \lambda^2 X_{ij}(y)$, a energia reescalada passará a ser

$$E^{(\lambda)} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{L}(\phi_i^{(\lambda)}, X_{ij}^{(\lambda)}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dy \lambda^{-1} \mathcal{L}(\phi_i(y), \lambda^2 X_{ij}(y)), \quad (3.13)$$

com $E = E^{(\lambda)}|_{\lambda=1}$. Minimizamos com $\partial E^{(\lambda)}/\partial \lambda|_{\lambda=1} = 0$, ou seja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \underbrace{(\mathcal{L} - 2\mathcal{L}_{X_{ij}}X_{ij})}_{=\tau} = 0. \quad (3.14)$$

Assim como no formalismo para um campo, temos que ter a condição de estresse nulo ($\tau = 0$). Além disso, temos $\partial^2 E^{(\lambda)}/\partial \lambda^2|_{\lambda=1} > 0$, que nos leva a condição $\phi'_i \phi'_j (\mathcal{L}_{X_{ij}} + 2X_{kl}\mathcal{L}_{X_{ik}X_{jl}}) > 0$. Considerando que as componentes de $\mathcal{L}_{X_{ij}} \geq 0$, para que a NEC seja válida, temos que todas as componentes de $\phi'_i \phi'_j \geq 0$, ver equação (3.12). Levando essas coisas em conta, a última condição para que as soluções sejam estáveis por contrações e dilatações será $\mathcal{L}_{X_{ij}} + 2X_{kl}\mathcal{L}_{X_{ik}X_{jl}} > 0$.

Pela condição de estresse nulo, temos

$$\mathcal{L} - 2\mathcal{L}_{X_{ij}}X_{ij} = 0, \quad (3.15)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem nos campos $\phi_i(x)$. Derivando a equação acima obtemos

$$\left[(\mathcal{L}_{X_{ij}} + 2X_{kl}\mathcal{L}_{X_{ik}X_{jl}})\phi_j'' - 2X_{jk}\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} + \mathcal{L}_{\phi_i} \right] \phi_i' = 0 \quad (3.16)$$

que é satisfeita para soluções da equação de movimento (3.10), ou seja, a equação (3.15) é compatível com as equações de movimento. Entretanto, ela não é suficiente para resolvê-las, já que se trata de apenas uma equação, precisaríamos de mais $N - 1$ equações para resolver o problema completamente. Usando a condição de estresse nulo podemos reescrever a densidade de energia (3.11a) como

$$\rho = \mathcal{L}_{X_{ij}}\phi_i'\phi_j'. \quad (3.17)$$

Pela NEC dada pela equação (3.9), vemos que a densidade de energia deve ser não negativa.

A condição de estresse nulo é importante para o desenvolvimento do formalismo de primeira ordem para N campos. Pela forma da densidade de energia dada pela equação acima, podemos introduzir uma função $W = W(\phi_i)$ que dependa apenas dos campos, desde que

$$W_{\phi_i} = \pm \mathcal{L}_{X_{ij}}\phi_j'. \quad (3.18)$$

Substituindo a expressão acima na da densidade de energia, a energia será

$$E = \Delta W, \quad (3.19)$$

assim como no formalismo para um campo escalar (2.26). Porém, aqui devemos considerar as condições de contorno de todos os N campos. Considerando que podemos calcular as componentes $\mathcal{L}_{X_{ij}}^{-1}$, tal que $\mathcal{L}_{X_{ik}}^{-1}\mathcal{L}_{X_{kj}} = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, é possível escrever as equações diferenciais de primeira ordem como $\phi_i' = \pm \mathcal{L}_{X_{ij}}^{-1} W_{\phi_j}$. Derivando a equação (3.18) em relação a x , obtemos

$$(\mathcal{L}_{X_{ij}} + 2X_{kl}\mathcal{L}_{X_{ik}X_{jl}})\phi_j'' = 2\mathcal{L}_{X_{ik}\phi_j}X_{jk} \pm W_{\phi_i\phi_j}\phi_j'. \quad (3.20)$$

Comparando com a equação de movimento (3.10) identificamos $\pm W_{\phi_i\phi_j}\phi_j' = -\mathcal{L}_{\phi_i}$, ou seja, para que as equações diferenciais de primeira ordem resolva as equações de movimento esses vínculos precisam ser satisfeitos.

3.1.1 Estabilidade linear

Algumas análises das soluções estáticas da equação (3.10) podem ser feitas, como por exemplo, como essas soluções se comportam sob pequenas perturbações. Uma maneira que podemos fazer esse estudo é adicionarmos funções dependentes do tempo e do espaço $\xi_i(x, t)$, em torno da solução $\phi_i(x)$, ou seja, $\phi_i(x, t) = \phi_i(x) + \xi_i(x, t)$ e considerarmos apenas contribuições lineares dessa função adicional. A adição dessa perturbação modificará alguns termos de interesse, como por exemplo

$$X_{ij} \rightarrow X_{ij} + \bar{X}_{ij}, \quad (3.21a)$$

$$\mathcal{L}_{\phi_i} \rightarrow \mathcal{L}_{\phi_i} + \mathcal{L}_{\phi_i \phi_j} \xi_j + \mathcal{L}_{\phi_i X_{jk}} \bar{X}_{jk}, \quad (3.21b)$$

$$\mathcal{L}_{X_{ij}} \rightarrow \mathcal{L}_{X_{ij}} + \mathcal{L}_{X_{ij} \phi_k} \xi_k + \mathcal{L}_{X_{ij} X_{kl}} \bar{X}_{kl}, \quad (3.21c)$$

onde

$$\bar{X}_{ij} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \xi_j + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_i \partial^\mu \phi_j \quad (3.22)$$

usando isso na equação de movimento (3.3) dependente do tempo e considerando soluções estáticas que resolve a equação (3.10), obtemos

$$\mathcal{L}_{X_{ij}} \ddot{\xi}_j - \left[(\mathcal{L}_{X_{ij}} + 2X_{kl} \mathcal{L}_{X_{ik} X_{jl}}) \xi_j' \right]' - (\mathcal{L}_{X_{ik} \phi_j} - \mathcal{L}_{X_{jk} \phi_i}) \phi_k' \xi_j' = \left[\mathcal{L}_{\phi_i \phi_j} + (\mathcal{L}_{X_{ik} \phi_j} \phi_k') \right]' \xi_j. \quad (3.23)$$

Fazendo separação de variáveis, assumimos que $\xi_i(x, t) = \xi_i(x) \cos(\omega t)$, logo

$$- \left[(\mathcal{L}_{X_{ij}} + 2X_{kl} \mathcal{L}_{X_{ik} X_{jl}}) \xi_j' \right]' - (\mathcal{L}_{X_{ik} \phi_j} - \mathcal{L}_{X_{jk} \phi_i}) \phi_k' \xi_j' = \left[\mathcal{L}_{\phi_i \phi_j} + (\mathcal{L}_{X_{ik} \phi_j} \phi_k') \right]' + \omega^2 \mathcal{L}_{X_{ij}} \xi_j \quad (3.24)$$

ou de forma compacta

$$- (a_{ij} \xi_j')' - b_{ij} \xi_j' - c_{ij} \xi_j = \omega^2 \mathcal{L}_{X_{ij}} \xi_j, \quad (3.25)$$

onde

$$a_{ij} = \mathcal{L}_{X_{ij}} + 2X_{kl} \mathcal{L}_{X_{ik} X_{jl}}, \quad (3.26a)$$

$$b_{ij} = (\mathcal{L}_{X_{ik} \phi_j} - \mathcal{L}_{X_{jk} \phi_i}) \phi_k', \quad (3.26b)$$

$$c_{ij} = \mathcal{L}_{\phi_i \phi_j} + (\mathcal{L}_{X_{ik} \phi_j} \phi_k')'. \quad (3.26c)$$

O produto interno de dois estados de (3.25) é definido pela integral

$$\langle \eta | \xi \rangle = \int \eta_i^\dagger \mathcal{L}_{X_{ij}} \xi_j dx, \quad (3.27)$$

onde $\mathcal{L}_{X_{ij}} = \mathcal{L}_{X_{ij}}^\dagger$ é equivalente a uma função peso, onde a condição de ortonormalidade dos estados é dada por $\langle \eta | \xi \rangle = \delta_{\eta\xi}$. Na equação (3.25) existe um estado com autovalor nulo, ou seja $\omega = 0$. Esse estado é conhecido como modo zero, que surge da invariância

translacional das soluções e não tem custo energético [42, 43]. Derivando a equação de movimento (3.10) com respeito a x obtemos

$$(a_{ij}\phi_j'')' = -b_{ij}\phi_k'\phi_j'' - c_{ij}\phi_j', \quad (3.28)$$

podemos identificar o modo zero como $\xi_i^{(0)} \propto \phi_i'$. Reescrevemos a equação de estabilidade (3.25) como $L_{ij}\xi_j = \omega^2\xi_i$, onde o operador L_{ij} é definido por

$$L_{ij} = -\mathcal{L}_{X_{ik}}^{-1} \left(\frac{d}{dx} a_{kj} \frac{d}{dx} + b_{kj} \frac{d}{dx} + c_{kj} \right), \quad (3.29)$$

Impondo que esse operador seja auto-adjunto, temos que calcular $\langle \eta | L \xi \rangle = \langle L^\dagger \eta | \xi \rangle$ e fazer $L^\dagger = L$, onde L é o operador acima na sua forma matricial. Para que isso seja verdade as componentes (3.26) devem obedecer: $a_{ij}^\dagger = a_{ij}$, $b_{ij}^\dagger = -b_{ij}$ e $c_{ij}^\dagger = c_{ij} - b_{ij}'$; desde que a seguinte condição de contorno

$$\left[\eta_i^\dagger a_{ij} \xi_j - \eta_i^\dagger b_{ij} \xi_j - \eta_i^\dagger a_{ij} \xi_j' \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0, \quad (3.30)$$

seja satisfeita. Podemos tentar fatorar o operador (3.29), de forma que seja possível escrever $L_{ij} = S_{ik}^\dagger S_{kj}$. Para isso, introduzimos os operadores

$$S_{ij} = A_{ik} \left(-\frac{d}{dx} \delta_{kj} + M_{kj} \right), \quad (3.31a)$$

$$S_{ij}^\dagger = \mathcal{L}_{X_{ik}}^{-1} \left(\frac{d}{dx} A_{kl}^\dagger \mathcal{L}_{X_{lj}} + M_{kl}^\dagger A_{lm}^\dagger \mathcal{L}_{X_{mj}} \right), \quad (3.31b)$$

com a condição de contorno

$$\eta_i^\dagger \mathcal{L}_{X_{ij}} A_{jk} \xi_k \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad (3.32)$$

Nosso desafio será determinar as componentes M_{ij} . Fazendo $S_{ik}^\dagger S_{kj} \xi_j = \omega^2 \xi_i$, podemos identificar as componentes (3.26) como

$$a_{ij} = A_{ik}^\dagger \mathcal{L}_{X_{kl}} A_{lj}, \quad (3.33a)$$

$$b_{ij} = M_{ik}^\dagger A_{kl}^\dagger \mathcal{L}_{X_{lm}} A_{mj} - A_{ik}^\dagger \mathcal{L}_{X_{kl}} A_{lm}^\dagger M_{mj}, \quad (3.33b)$$

$$c_{ij} = - \left(A_{ik}^\dagger \mathcal{L}_{X_{kl}} A_{lm}^\dagger M_{mj} \right)' - M_{ik}^\dagger a_{kl} M_{lj}, \quad (3.33c)$$

podemos ainda escrever as duas últimas componentes de maneira compacta como

$$b_{ij} = M_{ik}^\dagger a_{kj} - a_{ik} M_{kj}, \quad (3.34a)$$

$$c_{ij} = - \left(a_{ik} M_{kj} \right)' - M_{ik}^\dagger a_{kl} M_{lj}, \quad (3.34b)$$

que satisfaz as exigências impostas acima da equação (3.30). Nosso desafio é determinar a forma de M_{ij} , uma maneira de fazer isso é através da equação do modo zero (3.28), temos que

$$\left(a_{ij}\phi_j''\right)' + \left(M_{ik}^\dagger a_{kj} - a_{ik}M_{kj}\right)\phi_j'' - \left(\left(a_{ik}M_{kj}\right)' + M_{ik}^\dagger a_{kl}M_{lj}\right)\phi_j' = 0, \quad (3.35)$$

podemos escrever a equação acima de forma compacta como $L_{ij}\phi_j' = 0$. Podemos obter a solução para isso fazendo $S_{ij}\phi_j' = 0$, usando a definição (3.31a) obtemos $\phi_i'' = M_{ij}\phi_j'$, que resolve a equação acima. Obtemos agora uma relação entre as derivadas das soluções com as componentes M_{ij} . Usando a equação de movimento (3.10) com a definição (3.26a), obtemos

$$a_{ij}\phi_j'' = 2X_{jk}\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} - \mathcal{L}_{\phi_i} \quad (3.36)$$

Uma maneira de calcular M_{ij} é se for possível escrever $\mathcal{L}_{\phi_i} = F_{ij}\phi_j'$, onde F_{ij} são componentes genéricas que depende dos campos e de suas derivadas espaciais, pois poderíamos escrever

$$a_{ij}\phi_j'' = -\left(\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k}\phi_k' + F_{ij}\right)\phi_j' \quad (3.37)$$

e identificarmos as componentes M_{ij} como

$$M_{ij} = -a_{ik}^{-1}\left(\mathcal{L}_{X_{kj}\phi_l}\phi_l' + F_{kj}\right). \quad (3.38)$$

Entretanto talvez não seja possível ou fácil de escrever a derivada da densidade lagrangiana com respeito aos campos como aquela relação. Porém para o formalismo de primeira ordem (3.18) é necessário escrever um vínculo $W_{\phi_i\phi_j}\phi_j' = -\mathcal{L}_{\phi_i}$, onde omitir o outro sinal por questão de simplicidade. Para as soluções das equações diferenciais de primeira ordem é possível determinar as componentes M_{ij} como

$$M_{ij} = a_{ik}^{-1}\left(W_{\phi_k\phi_j} - \mathcal{L}_{X_{kl}\phi_j}\phi_l'\right), \quad (3.39)$$

e usando (3.26b), teremos

$$M_{ij}^\dagger = \left(W_{\phi_i\phi_k} - \mathcal{L}_{X_{kl}\phi_i}\phi_l'\right)a_{kj}^{-1}. \quad (3.40)$$

Nesse caso, as nossas componentes F_{ij} definida acima da equação (3.37) dependerá apenas dos campos, onde $F_{ij} = -W_{\phi_i\phi_j}$. Derivando a relação $W_{\phi_i\phi_j}\phi_j' = -\mathcal{L}_{\phi_i}$ com respeito x e usando as equações acima, temos que

$$\left(W_{\phi_i\phi_j\phi_k}\phi_k' + \mathcal{L}_{\phi_i\phi_j} + M_{ik}^\dagger a_{kl}M_{lj}\right)\phi_j' = 0, \quad (3.41)$$

essa equação juntamente com (3.39) e (3.40), podem ser usadas para escrever as relações abaixo

$$a_{ik}M_{kj} = W_{\phi_i\phi_j} - \mathcal{L}_{X_{ik}\phi_j}\phi_k', \quad (3.42a)$$

$$M_{ik}^\dagger a_{kj} = W_{\phi_i\phi_j} - \mathcal{L}_{X_{jk}\phi_i}\phi_k', \quad (3.42b)$$

$$\left(a_{ik}M_{kj}\right)' = W_{\phi_i\phi_j\phi_k}\phi_k' - \left(\mathcal{L}_{X_{ik}\phi_j}\phi_k'\right)', \quad (3.42c)$$

$$M_{ik}^\dagger a_{kl}M_{lj} = -W_{\phi_i\phi_j\phi_k}\phi_k' - \mathcal{L}_{\phi_i\phi_j}, \quad (3.42d)$$

que podem ser útil para a resolução dos problemas. Em particular, para relacionar as componentes da (3.33) com (3.26b) e (3.26c).

Um caso particularmente interessante é quando $b_{ij} = 0$, pois temos que $M_{ij}^\dagger = a_{ik} M_{kl} a_{lj}^{-1}$. Os operadores (3.31) tornam-se

$$S_{ij} = A_{ik} \left(-\frac{d}{dx} \delta_{kj} + M_{kj} \right), \quad (3.43a)$$

$$S_{ij}^\dagger = \mathcal{L}_{X_{ik}}^{-1} \left(\frac{d}{dx} a_{km} + a_{kl} M_{lm} \right) A_{mj}^{-1}, \quad (3.43b)$$

com o operador da equação (3.29) na forma

$$L_{ij} = \mathcal{L}_{X_{ik}}^{-1} \left(-\frac{d}{dx} a_{kj} \frac{d}{dx} + (a_{kl} M_{lj})' + a_{kl} M_{lm} M_{mj} \right). \quad (3.44)$$

Para um único campo escalar real essa condição é válida sempre [45], como também para modelos em que as derivadas cruzadas $\mathcal{L}_{\phi_i X_{jk}} = 0$.

Voltando para o caso geral em que $b_{ij} \neq 0$ e sem considerar a fatoração da equação da estabilidade, podemos fazer uma transformação de variável em (3.25) do tipo

$$dx = \frac{dz}{R} \quad \text{e} \quad \xi_i(x) = Q_{ij} u_j(z), \quad (3.45)$$

onde R e Q_{ij} são quantidades a serem determinadas a partir das imposições

$$2R a_{ij} \frac{dQ_{jk}}{dz} + \frac{d(R a_{ij})}{dz} Q_{jk} + b_{ij} Q_{jk} = 0, \quad (3.46a)$$

$$Q_{ij}^{-1} a_{jk}^{-1} \mathcal{L}_{X_{kl}} Q_{lm} = R^2 \delta_{im}. \quad (3.46b)$$

As condições acima precisam ser válidas para que possamos escrever a equação de estabilidade (3.25) como uma equação do tipo Schrödinger acoplada

$$\left(-\delta_{ij} \frac{d^2}{dz^2} + U_{ij}(z) \right) \psi_j(z) = \omega^2 \psi_i(z), \quad (3.47)$$

onde

$$U_{ij}(z) = -\frac{1}{R^2} Q_{ik}^{-1} a_{kl}^{-1} \left(R \frac{d}{dz} \left(R a_{lm} \frac{dQ_{mj}}{dz} \right) + R b_{lm} \frac{dQ_{mj}}{dz} + c_{lm} Q_{mj} \right). \quad (3.48)$$

Essa transformação para N campos é muito mais complicado, pois além de precisar resolver as equações de (3.46), ainda será necessário resolver uma integração para determinar z . Supondo que seja possível fazer essa transformação, podemos escrever os estados

$$\psi_i = Q_{ij}^{-1} \eta_j, \quad (3.49)$$

onde o modo zero é dado por

$$\psi_i^{\omega_0}(z) = R Q_{ij}^{-1} \frac{d\phi_j}{dz}, \quad (3.50)$$

estado com autovalor $\omega = 0$ da equação (3.47).

Como pode ser visto, o estudo da estabilidade linear das soluções é muito mais complexo quando envolve mais de um campo, a equação (3.25) é em princípio um sistema de equações de autovalores acoplada. Mesmo na tentativa de fazer transformar numa equação mais conhecida (3.47) será necessário resolver uns vínculos (3.46). Esse vínculo é facilmente resolvido para apenas um campo escalar, teremos $R = 1/A$ e uma única componente para Q_{ij} , dada por $Q = 1/\sqrt{A\mathcal{L}_X}$.

3.2 Exemplo para Dois Campos

A generalização imediata é para dois campos, a lagrangiana canônica para modelos de dois campos é escrito como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - V(\phi, \chi), \quad (3.51)$$

onde $V(\phi, \chi)$ é o potencial e agora dependerá dos dois campos, além disso mostra como serão os termos de interação entre eles. Note que nesse caso $N = 2$ ou seja $i = 1, 2$ e que consideramos os campos $\phi_1 = \phi$ e $\phi_2 = \chi$. Para o modelo acima teremos duas equações de movimento, uma referente a cada campo, elas podem ser obtidas usando a equação (3.3), ou seja

$$\square\phi = -V_\phi, \quad (3.52a)$$

$$\square\chi = -V_\chi. \quad (3.52b)$$

O tensor energia-momento (3.5) para esse modelo será

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \partial_\mu\chi\partial_\nu\chi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (3.53)$$

em componentes, teremos

$$T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \frac{1}{2}\chi'^2 + V(\phi, \chi), \quad (3.54a)$$

$$T_{01} = \dot{\phi}\phi' + \dot{\chi}\chi', \quad (3.54b)$$

$$T_{11} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \frac{1}{2}\chi'^2 - V(\phi, \chi). \quad (3.54c)$$

Lembrando que a componente $T_{00} = \rho$ é a densidade de energia. A condição de energia nula (3.12) é satisfeita.

Consideraremos agora soluções estáticas $\phi = \phi(x)$ e $\chi = \chi(x)$, as equações de movimento (3.52) tornam-se

$$\phi'' = V_\phi, \quad (3.55a)$$

$$\chi'' = V_\chi. \quad (3.55b)$$

Assim como no modelo canônico para um campo estudado seção 2.2, as soluções estáticas e uniformes serão mínimos do potencial $V(\phi, \chi)$. Note que agora os conjuntos de mínimos não será mais numa linha como no capítulo anterior, mas num plano $\phi\chi$. Apesar das soluções estáticas terem simplificado o problema, ainda assim é bastante complicado, pois precisamos que resolver um sistema de equações diferenciais acopladas. Diante a dificuldade de se resolver esses sistemas de equações, foram desenvolvidos alguns métodos para tentar facilitar a obtenção de soluções. Um desses métodos é chamado de método das órbitas tentativas [1, 80, 82, 83], que busca órbitas no plano $\phi\chi$ que conectam mínimos do potencial. O objetivo da busca por essas órbitas é para desacoplar as equações de movimento. A densidade de energia para as soluções estáticas será

$$\rho = \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}\chi'^2 + V(\phi, \chi), \quad (3.56)$$

com ela podemos calcular a energia do sistema fazendo uma integração em todo o espaço.

Pela condição de pressão nula (3.15) teremos uma equação diferencial de primeira ordem dada por

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}\chi'^2. \quad (3.57)$$

Essa equação vínculo o potencial com a derivada primeira dos campos. Podemos fazer o procedimento de Bogomol'nyi como no modelo canônico de um campo (2.66) e obter as equações diferenciais de primeira ordem

$$\phi' = \pm W_\phi, \quad (3.58a)$$

$$\chi' = \pm W_\chi, \quad (3.58b)$$

que satisfaz as equações de movimento (3.55), desde que o potencial seja escrito como

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 + \frac{1}{2}W_\chi^2. \quad (3.59)$$

Além de termos equações diferenciais de primeira ordem que satisfazem as equações de movimento ainda podemos calcular a energia das soluções conhecendo apenas suas condições de contorno através da função $W(\phi, \chi)$ onde a energia é dada por

$$E = |W(\phi(\infty), \chi(\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty))| = \Delta W, \quad (3.60)$$

conforme demonstrada na equação (3.19). As condições de contorno para as soluções $\phi(x)$ e $\chi(x)$ devem satisfazer: $W_\phi = W_\chi = 0$, para que a derivada das soluções sejam igual a zero nos extremos. Podemos definir esses pontos como $v_i = (\phi_i, \chi_i)$ e eles serão mínimos do potencial (3.59). Também podemos usar o método das órbitas tentativas aqui, desde que essas órbitas obedeçam as condições v_i e que a energia $E = \Delta W$ seja finita não nula. Vale comentar que em geral o número de órbitas que satisfazem as equações diferenciais de primeira ordem (3.58) é menor ou igual que o das equações de movimento (3.55), ou seja, podem existir soluções que resolvem as equações de movimento, mas não satisfazem as equações diferenciais de primeira ordem. Diferenciamos essas duas soluções como:

soluções BPS (que satisfaz as equações diferenciais de primeira ordem) e soluções não-BPS (que satisfaz apenas a equação de movimento). Existem casos em que todas as soluções do sistema são resolvidas pelas equações diferenciais de primeira ordem [84, 85].

Voltaremos nossa atenção novamente ao estudo das equações diferenciais de primeira ordem (3.58). Como foi dito há pouco, podemos usar o método das órbitas tentativas para facilitar na obtenção das soluções. Em particular na referência [83], os autores sinterizam de forma bastante simples o método das órbitas tentativas usando o formalismo de primeira ordem. Usando essas equações podemos eliminar a dependência em x e escrever

$$W_\chi d\phi - W_\phi d\chi = 0. \quad (3.61)$$

A solução dessa equação será o conjunto de órbitas possíveis que são satisfeitas pelas equações diferenciais de primeira ordem (3.58). Quando $W(\phi, \chi)$ é uma função harmônica ($W_{\phi\phi} + W_{\chi\chi} = 0$), a equação acima será uma diferencial exata. Nesse caso, obter a solução é fácil, será uma órbita $F(\phi, \chi) = 0$ no espaço dos campos ϕ e χ , tal que

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = W_\chi \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial \chi} = -W_\phi. \quad (3.62)$$

Quando W é uma função harmônica, todas as soluções são BPS, ver [84, 85]. Entretanto, nem sempre a função $W(\phi, \chi)$ é harmônica, porém podemos multiplicar a equação (3.61) por um fator integrando $I(\phi, \chi)$, para que seja possível obter a órbita $G(\phi, \chi)$ tal que

$$\frac{\partial G}{\partial \phi} = I(\phi, \chi)W_\chi \quad \text{e} \quad \frac{\partial G}{\partial \chi} = -I(\phi, \chi)W_\phi. \quad (3.63)$$

Apesar do fator integrando resolver o problema da órbita, nem sempre é fácil obter uma função $I(\phi, \chi)$ que satisfaça as condições acima.

Para fazer o estudo da estabilidade linear aqui será conveniente usar a representação matricial, utilizando as componentes da equação (3.25), teremos

$$\begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\phi\phi} & V_{\phi\chi} \\ V_{\chi\phi} & -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\chi\chi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_n(x) \\ \eta_n(x) \end{pmatrix} = \omega_n^2 \begin{pmatrix} \xi_n(x) \\ \eta_n(x) \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

que é uma equação do tipo Schrödinger acoplada. Para esse modelo não é necessário fazer a transformação (3.45). Como sabemos, é possível fatorar a equação de estabilidade, mas para isso usaremos o formalismo de primeira ordem (3.58) para escrever os operadores

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} & W_{\phi\chi} \\ W_{\chi\phi} & -\frac{d}{dx} + W_{\chi\chi} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} & W_{\phi\chi} \\ W_{\chi\phi} & \frac{d}{dx} + W_{\chi\chi} \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

A fatoração da estabilidade linear (3.64), para o modelo canônico de dois campos foi estudada em [86].

Antes de seguirmos o estudo de dois campos, iremos fazer um comentário breve sobre simetrias que os campos podem ter. Para um campo escalar real, que foi estudado no capítulo anterior só teremos como ter modelos simetria Z_2 , que é dada pela transformação

discreta $\phi \rightarrow -\phi$. Para dois campos podemos ter outras simetrias, simetrias discretas Z_n , como também simetria contínua $SO(2)$. Consideraremos o modelo da lagrangiana (3.51), onde o potencial dependerá dos campos de forma que

$$V(\phi, \chi) = V(\sqrt{\phi^2 + \chi^2}). \quad (3.66)$$

Nesse caso, a lagrangiana será invariante sob a transformação dos campos

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

onde α é um parâmetro do grupo e pode ser interpretado como um ângulo que é responsável por fazer uma rotação no espaço dos campos (ϕ, χ) . Modelos com esse tipo de simetria podem ser estudados através de campos complexos, definidos a partir de dois campos escalares reais

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi + i\chi) \quad \text{e} \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi - i\chi), \quad (3.68)$$

onde definimos $\bar{z}$ como o complexo conjugado de z . Reescrevemos a lagrangiana (3.51) como

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - V(|\varphi|), \quad (3.69)$$

a transformação para campos complexos que é equivalente a transformação $SO(2)$ para campos reais é a transformação $\varphi \rightarrow \varphi e^{i\alpha}$, dizemos então que o modelo tem simetria $U(1)$ global. Também existem modelos invariantes sob transformações locais, eles aparecem quando acoplamos os campos complexos a campos de calibre A_μ , como faremos nos próximos capítulos, que será voltado ao estudo de vórtices locais. Como o modelo (3.69) é invariante sob transformações contínuas, podemos definir uma corrente de Noether dada por

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \varphi)} \Delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \bar{\varphi})} \Delta \bar{\varphi} \quad (3.70)$$

com $\partial_\mu J^\mu = 0$. Para a transformação $U(1)$ global do tipo $\varphi \rightarrow \varphi e^{i\alpha}$, temos que $\Delta \varphi = i\varphi$ e $\Delta \bar{\varphi} = -i\bar{\varphi}$, reescrevemos a corrente conservada acima como

$$J_\mu = -i(\bar{\varphi} \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \bar{\varphi}). \quad (3.71)$$

Modelos com campo complexo podem ser estudados para descrever outros tipos de defeitos, como por exemplos q balls e vórtices globais [87–91]. Campos complexos também podem ser usados para estudar simetrias discretas, para isso consideraremos a lagrangiana (3.51) onde o potencial assume uma forma mais geral dada por $V(\varphi, \bar{\varphi})$, podemos ter modelos com simetria Z_n , ver [81, 84, 85].

Vamos dar continuidade ao estudo de dois campos com simetria discreta. Consideraremos um modelo bastante rico, onde utilizaremos o método das órbitas para resolver grande parte dos problemas e por fim discutiremos um pouco sobre a estabilidade linear das soluções e suas dificuldades.

3.2.1 Modelo BNRT

Esse modelo foi introduzido em [82] e foi vastamente estudado [92–104]. Partiremos da função $W(\phi, \chi)$ dado por

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2 \quad (3.72)$$

o potencial (3.59) será

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left(1 - \phi^2 - r\chi^2\right)^2 + \frac{1}{2} (2r\phi\chi)^2. \quad (3.73)$$

Os mínimos do potencial dependerá do sinal do parâmetro r , para $r < 0$ teremos apenas dois mínimos localizado em $v_{\pm} = (\pm 1, 0)$ no plano $\phi\chi$ do espaço dos campos. Para $r = 0$ recuperamos o modelo de um campo escalar visto anteriormente na seção 2.2.1 do capítulo anterior. Já para $r > 0$ teremos quatro mínimos

$$v_{h_{\pm}} = (\pm 1, 0) \quad \text{e} \quad v_{v_{\pm}} = \left(0, \pm \sqrt{1/r}\right), \quad (3.74)$$

onde os subíndices h e v representa respectivamente horizontal e vertical. Nesse caso o potencial (3.73) terá simetria $Z_2 \times Z_2$ quando $r \neq 1$ e para $r = 1$ simetria Z_4 . Iremos nos focar nos casos em que o parâmetro r seja positivo, para uma melhor visualização do potencial mostraremos o gráfico de $-V(\phi, \chi)$, como pode ser visto na figura 3.1. Podemos calcular a energia entre os setores através da função (3.72). Primeiramente vamos calcular a energia entre os setores horizontais v_{h_-} e v_{h_+} , temos que $E = \Delta W = 4/3$. Entre os setores verticais v_{v_-} e v_{v_+} teremos energia nula ($\Delta W = 0$), indicando que não se trata de um setor BPS. Para os setores entre v_{h_-} e $v_{v_{\pm}}$, e entre $v_{v_{\pm}}$ e v_{h_+} a energia será $E = 2/3$.

As equações diferenciais de primeira ordem (3.58) são dadas por

$$\phi' = W_{\phi} = \pm (1 - \phi^2 - r\chi^2), \quad (3.75a)$$

$$\chi' = W_{\chi} = \mp (2r\phi\chi). \quad (3.75b)$$

O fator integrante desse modelo foi obtido em [101] e é dado por $I(\chi) = \chi^{-\frac{r+1}{r}}$, que resulta na órbita

$$\phi^2 + \frac{r\chi^2}{1-2r} + c\chi^{\frac{1}{r}} - 1 = 0 \quad (3.76)$$

onde a constante c surge da integração envolvida na solução do problema. Essa nova constante entrará como um parâmetro que determina a forma das órbitas que conectará os mínimos do potencial. Para $c \rightarrow \pm\infty$ teremos a órbita linha reta $\chi = 0$, que conectará os mínimos horizontais v_{h_-} e v_{h_+} . As soluções dessa órbita serão

$$\phi(x) = \pm \tanh(x) \quad \text{e} \quad \chi(x) = 0, \quad (3.77)$$

com densidade de energia (3.56) dada por

$$\rho(x) = \text{sech}^4(x), \quad (3.78)$$

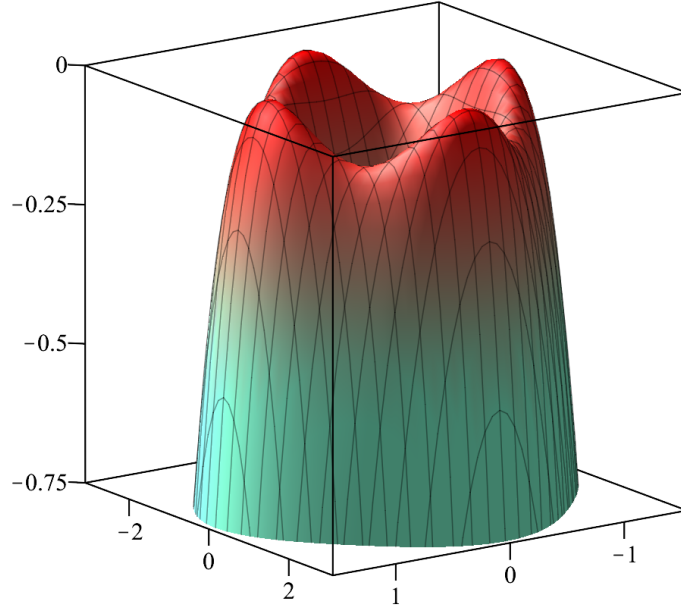


Figura 3.1 Gráfico de $-V(\phi, \chi)$ para o potencial (3.73) com $r = 1/4$.

e energia $E = 4/3$. Aparentemente parece um problema de um campo, porém ainda existe a dependência do parâmetro r , que não aparece de maneira explícita na solução acima. Entretanto, no estudo da estabilidade linear das soluções, além de haver perturbações na solução $\phi(x)$, haverá também em $\chi(x)$, que dependerá de r . Na figura 3.2 temos a órbita reta no plano dos campos (ϕ, χ) , como também as soluções (3.77). Note que escolhemos apenas um par de soluções da equação (3.77), que é o $\phi(x)$ que tem um comportamento do tipo kink. Não mostraremos aqui o comportamento da densidade de energia (3.78), ela pode ser visto na figura 2.2 do capítulo 2.

Uma órbita particularmente interessante é a elipse, que surge quando tomamos $c = 0$. A órbita elíptica conecta os mínimos v_{h-} e v_{h+} , assim como a órbita reta. Nesse caso também obtemos soluções analíticas para as equações (3.75), na forma

$$\phi(x) = \pm \tanh(2rx) \quad \text{e} \quad \chi(x) = \pm \sqrt{\frac{1-2r}{r}} \operatorname{sech}(2rx), \quad (3.79)$$

com $0 < r < 1/2$. A forma da órbita juntamente com um par de soluções possíveis podem ser vista na figura 3.3, para caso particular em que $r = 1/4$. Na figura 3.3 do lado direito temos na verdade duas órbitas, uma que vai de $\phi = -1$ a $\phi = 1$ (órbita acima do eixo ϕ) e outra que vai de $\phi = 1$ a $\phi = +1$ (abaixo do eixo ϕ), os sinais de mais ou menos da equação acima indica quando é uma órbita ou outra. A solução que escolhemos ilustrar nessa figura é da órbita acima do eixo ϕ , que terá uma solução do tipo kink para o $\phi(x)$. A densidade de energia (3.56) será

$$\rho(x) = 4r \left(1 - 2r + (3r - 1) \operatorname{sech}^2(2rx) \right) \operatorname{sech}^2(2rx), \quad (3.80)$$

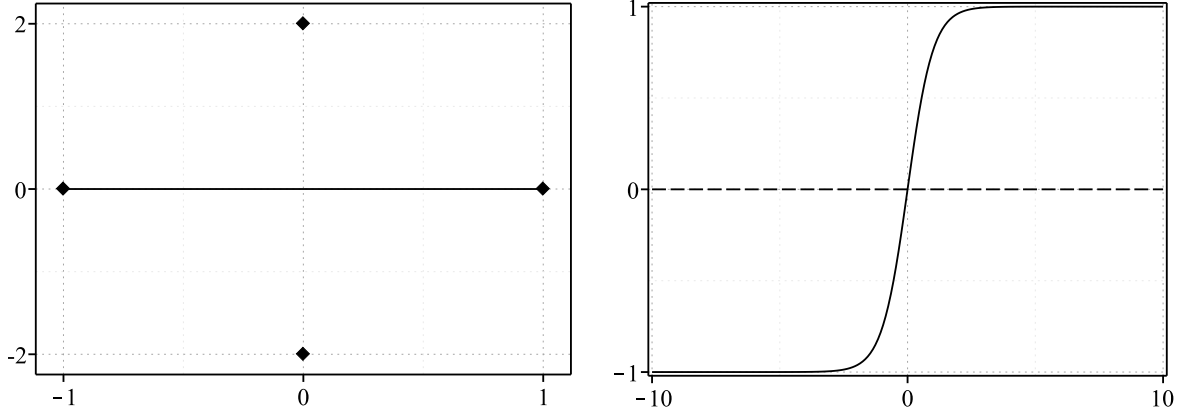


Figura 3.2 A figura do lado esquerdo é a órbita reta no plano $\phi\chi$ e suas soluções (3.77) no lado direito. A linha sólida é para a solução $\phi(x)$ e a tracejada para $\chi(x)$.

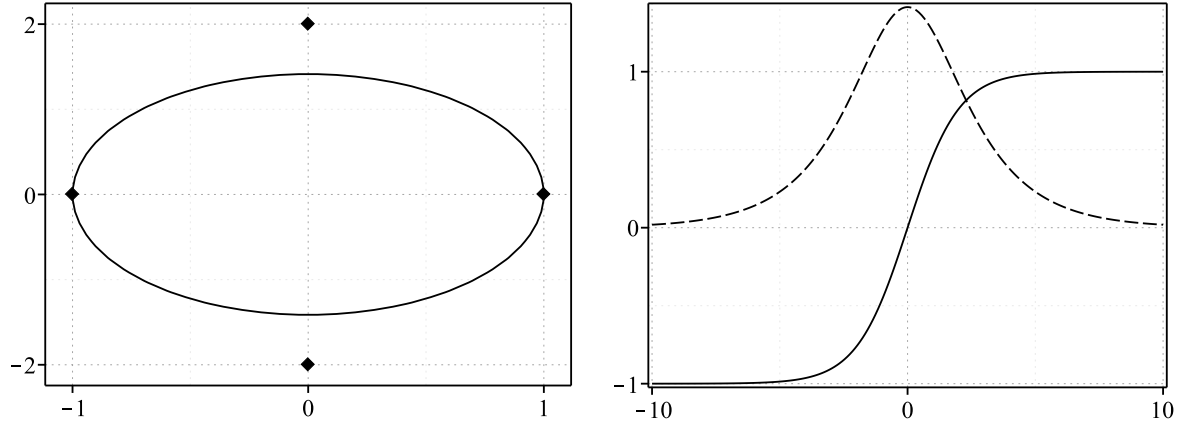


Figura 3.3 Órbita elíptica à esquerda e na direita a suas respectivas soluções (3.79) para $r = 1/4$. A solução tipo kink, esboçada com linha sólida, é referente ao campo $\phi(x)$. Já a solução tracejada é para o campo $\chi(x)$.

que terá energia $E = 4/3$ independentemente do valor de r . A densidade de energia apresenta uma característica interessante quando variamos o parâmetro r : para $r > 1/4$ a densidade de energia apresentará um máximo em $x = 0$, com comportamentos assintóticos simétrico. Quando $r = 1/4$ surge um platô no centro e para $r < 1/4$ se torna um mínimo local. Ilustramos essa característica na figura 3.4 para alguns valores de r .

Existem infinitas órbitas entre a reta e a elipse que conecta os mínimos horizontais v_{h-} e v_{h+} para c positivo ($c = (0, \infty)$). Também teremos órbitas para c negativo que conectam os mínimos horizontais, com $c_m < c < 0$, onde

$$c_m = -\frac{2r^{\frac{2r+1}{2r}}}{1-2r}. \quad (3.81)$$

Vale ressaltar que a energia dessas soluções serão sempre a mesma $E = 4/3$ independente

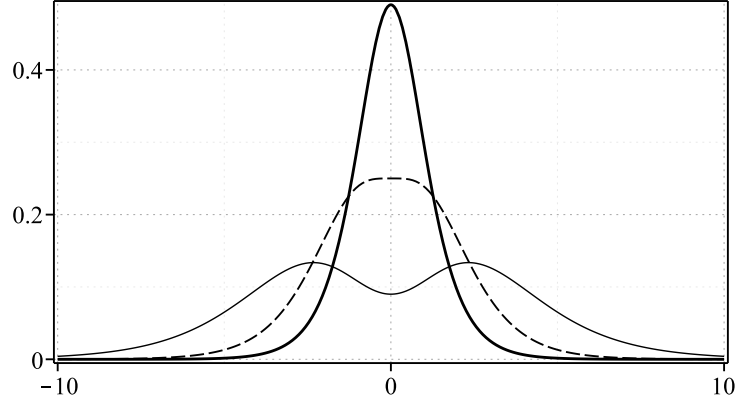


Figura 3.4 Densidade de energia $\rho(x)$ da órbita elíptica (3.80). A espessura das linhas aumenta com r , que tomamos como $r = 0.15, 0.25$ e 0.35 . A linha tracejada é para $r = 1/4$.

do valores de r e c . Quando $c = c_m$ as órbitas conectarão os mínimos horizontais com os verticais e passaremos a ter quatro órbitas, todas as soluções terão energia $E = 2/3$. Nesses casos, em cada quadrante do plano $\phi\chi$ são órbitas separadas. Apesar dessa infinidade de órbitas possíveis, não teremos as soluções analíticas delas, exceto no caso especial em que $r = 1/4$. Nesse caso, para $c_m < c < \infty$, com $c_m = -1/16$, as soluções serão dadas por

$$\phi(x) = \frac{e^{2x} - 1}{1 + 2\beta e^x + e^{2x}} \quad \text{e} \quad \chi(x) = \frac{2\sqrt{2\beta}e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1 + 2\beta e^x + e^{2x}}}, \quad (3.82)$$

onde $\beta = 1/\sqrt{16c+1}$. Essas soluções foram estudadas em [96]. A densidade de energia (3.56) toma forma

$$\rho(x) = \frac{2e^x(\beta + 4\beta^2 e^x + 7\beta e^{2x} + 8e^{3x} + 7\beta e^{4x} + 4\beta^2 e^{5x} + \beta e^{6x})}{(1 + 2\beta e^x + e^{2x})^4}. \quad (3.83)$$

Em particular quando $c = -1/16$, temos uma nova órbita, a parábola, que conecta os mínimos v_{h-} e $v_{v\pm}$, como também $v_{v\pm}$ e v_{h+} . A órbita parabólica é um caso especial de quando $r = 1/4$. As soluções serão

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{2} \left(1 \pm \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \right) \quad \text{e} \quad \chi(x) = \pm \sqrt{2 \left(1 \pm \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \right)}, \quad (3.84)$$

com densidade de energia dada por

$$\rho(x) = \frac{1}{8} \left(1 \pm \tanh\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2}\right) \right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2}\right). \quad (3.85)$$

Na figura 3.5 fazemos as órbitas para $r = 1/4$ e diversos valores positivos de c . Quanto maior o valor de c mais próximo da linha reta as órbitas passam e quando $c \rightarrow 0^+$, as órbitas se aproximam da elipse. Ainda na figura 3.5 fazemos algumas órbitas para valores

negativo de c , com $-1/16 \leq c < 0$, no caso particular em que $c = -1/16$ teremos quatro órbitas, que nesse caso serão umas parábolas. O esboço das soluções para $r = 1/4$ e alguns valores de c pode ser visto na figura 3.6. Para c positivo as soluções terão comportamentos parecidos com as soluções das órbitas elípticas (3.79), o campo $\phi(x)$ será um kink ou um anti-kink e o campo $\chi(x)$ será um morro para cima ou para baixo. Porém, para c negativo aparecerão comportamentos interessantes, para $-3/64 \leq c < 0$ o comportamento das soluções será parecido com o do caso positivo, já para $-1/16 < c < -3/64$ as soluções começam a sentir os mínimos $v_{h\pm} = (0, \pm 2)$. Nesse intervalo a solução $\phi(x)$ passa a ter mais de um ponto de inflexão, que se torna mais evidente quando se aproxima de $c = -1/16$. Na figura 3.7 fizemos os gráficos da densidade de energia (3.83) para os mesmos valores da figura anterior, para os valores positivos de c a densidade de energia é um máximo na origem, já para valores negativo torna-se um mínimo, dividindo a densidade de energia em duas porções, quanto mais próximo de $c = -1/16$ mais separado essas duas porções de ficam. As soluções para $c = -1/16$ serão kinks e/ou anti-kinks, ver equação (3.84), dependendo das condições de contorno. Um par de soluções da órbita parabólica do segundo quadrante do plano $\phi\chi$ pode ser visto na figura 3.8, serão soluções do tipo kink, ainda na figura 3.8 temos sua respectiva densidade de energia.

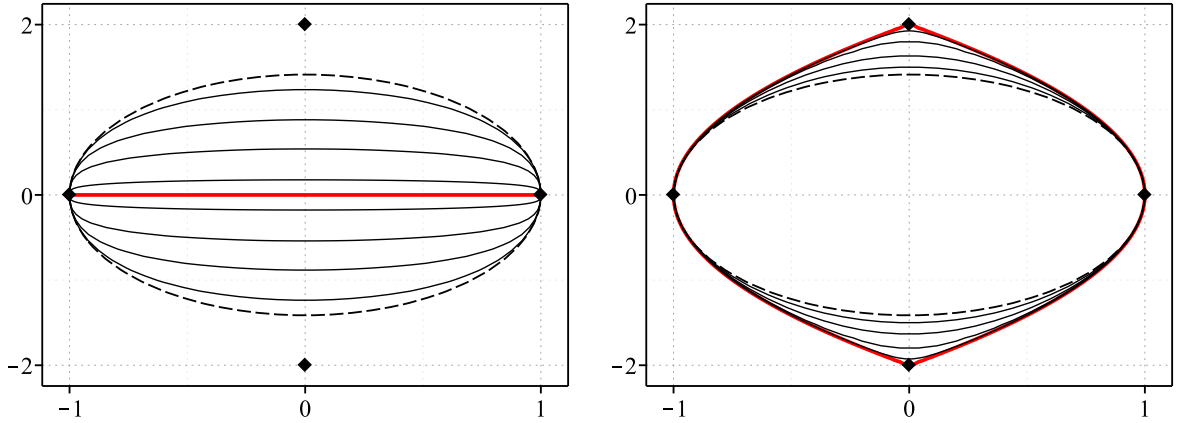


Figura 3.5 Gráfico de diversas órbitas para $r = 1/4$ e variando o parâmetro c . Do lado esquerdo temos a órbita reta de vermelho, algumas órbitas para $c = 0.1, 1, 10$ e 1000 , por fim a órbita elíptica com linha tracejada, quando $c = 0$. Do lado direito temos a elipse de linha tracejada, as órbitas para $c = -1/16.1, -1/17, -3/64$ e $-1/40$, e quando $c = -1/16$ obtemos as parábolas de vermelho.

Existe ainda uma solução conhecida, porém não pertence a classe de soluções BPS, para isso precisamos resolver as equações de segunda ordem (3.55) para o potencial (3.73), teremos

$$\phi'' = -2\phi(1 - \phi^2 - r(1 + 2r)\chi^2), \quad (3.86a)$$

$$\chi'' = -2r\chi(1 - r\chi^2 - (1 + 2r)\phi^2). \quad (3.86b)$$

Considerando a órbita reta $\phi = 0$, resolvemos a equação de movimento de segunda ordem

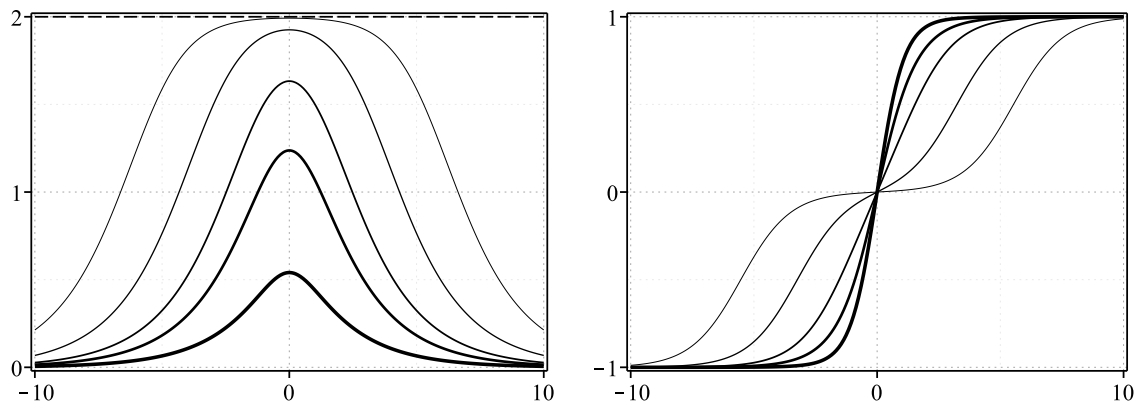


Figura 3.6 Soluções $\phi(x)$ e $\chi(x)$ dadas pela equação (3.82) para $r = 1/4$ e $c = -1/16.001$, $c = -1/16.1$, $-3/64$, 0.1 e 10 . No lado direito temos $\phi(x)$ e no lado esquerdo $\chi(x)$, a espessura das linhas aumenta com c .

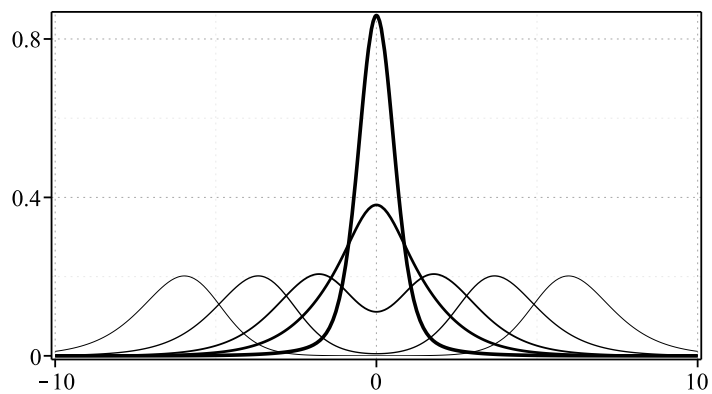


Figura 3.7 Densidade de energia $\rho(x)$ para as soluções ilustrada na figura 3.6.

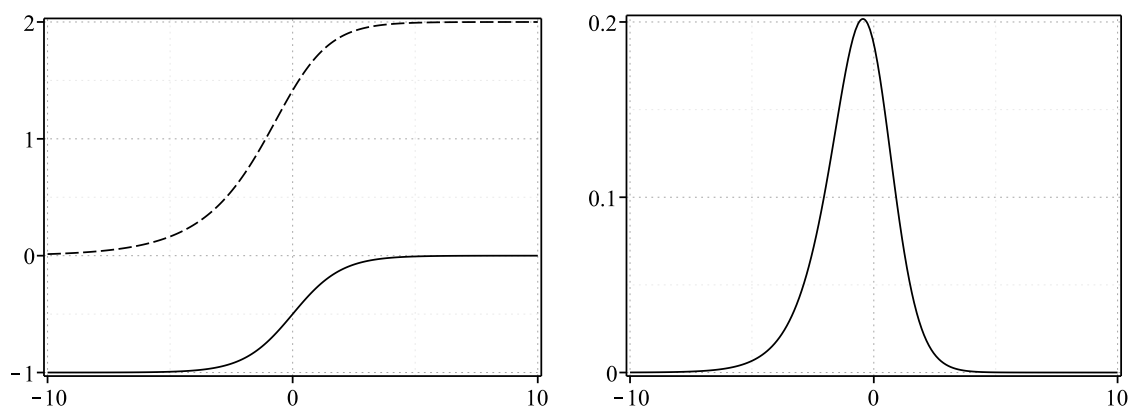


Figura 3.8 Soluções do tipo kink dada pela equação (3.84) e sua densidade de energia (3.85) para a parábola. A linha sólida na figura da direita representa a solução $\phi(x)$ e a tracejada $\chi(x)$.

com

$$\phi(x) = 0 \quad \text{e} \quad \chi(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{r}} \tanh(\sqrt{r}x). \quad (3.87)$$

A densidade de energia (3.56) para a solução acima será

$$\rho(x) = \text{sech}^4(\sqrt{r}x), \quad (3.88)$$

com energia $E = 4/(3\sqrt{r})$. A solução (3.87) não satisfaz as equações diferenciais de primeira ordem (3.75), por essa razão dizemos que são soluções não-BPS. Não colocamos os gráficos dessas soluções nem de sua densidade de energia por não apresentar nenhuma característica nova, o comportamento delas serão bastante parecidos com os das equações (3.77) e (3.78).

Faremos agora um breve estudo sobre a estabilidade linear das soluções. Como agora estamos trabalhando com dois campos, analisar a estabilidade linear das soluções passa a ser uma tarefa muito mais difícil. Nos limitaremos a estudar apenas a estabilidade das órbitas retas, tanto para o caso BPS ($\chi = 0$) como para o não-BPS ($\phi = 0$). Inicialmente começaremos com a estabilidade linear das soluções (3.77), que são soluções BPS. Pela equação da estabilidade (3.64) teremos duas equações desacopladas

$$-\xi_n'' + (4 - 6\text{sech}^2(x))\xi_n = \omega_n^2 \xi_n, \quad (3.89)$$

e

$$-\eta_n'' + (4r^2 - 2r(1 + 2r)\text{sech}^2(x))\eta_n = \tilde{\omega}_n^2 \eta_n. \quad (3.90)$$

Ambas equações correspondem ao potencial Posch-Teller modificado, é um caso particular do problema geral dado pelo apêndice A. Comparando com os resultados obtidos no apêndice citado temos que $A = 1$, $a = 2$, $b = 0$ e $\lambda = 1$ para (3.89), com isso temos que os autovalores serão $\omega_n^2 = 4n - n^2$, os mesmo autovalores do potencial ϕ^4 para modelo de um campo. Já para a equação (3.90) teremos $A = 1$, $a = 2r$, $b = 0$ e $\lambda = 1$, com isso os autovalores serão $\tilde{\omega}_n^2 = 4rn - n^2$, o número de estados ligados dependerá de r e podem ser obtidos usando a equação (A.13). Note que não teremos autovalores negativo, logo essas soluções são estáveis sob pequenas perturbações.

Vamos agora fazer uma análise da estabilidade linear para as soluções não-BPS dado pela equação (3.87). Novamente teremos equações desacopladas para a equação (3.64), dadas por

$$-\xi_n'' + (4r - 2(1 + 2r)\text{sech}^2(\sqrt{r}x))\xi_n = \omega_n^2 \xi_n, \quad (3.91)$$

e

$$-\eta_n'' + (4r - 6r\text{sech}^2(\sqrt{r}x))\eta_n = \tilde{\omega}_n^2 \eta_n. \quad (3.92)$$

O potencial de estabilidade da equação (3.91) também pode ser escrito em termos dos parâmetros usado no apêndice A, entretanto haverá uma diferença em sua altura, mudando os autovalores possíveis, temos que: $A = 1$, $a = (1/2)(\sqrt{17r+8} - \sqrt{r})$, $b = 0$ e $\lambda = \sqrt{r}$ com deslocamento $d = a^2 - 4r$, os autovalores serão $\omega_n^2 = \sqrt{r}n(2a - \sqrt{r}n) - d$. O sinal de d depende de r , para o intervalo $r = (0, 1)$ o deslocamento é positivo, fazendo com que tenhamos autovalores negativo, logo, a solução será instável. A segunda equação (3.92) é

obtida para $A = 1$, $a = 2\sqrt{r}$, $b = 0$ e $\lambda = \sqrt{r}$, com isso os autovalores serão $\tilde{\omega}_n^2 = rn(4 - n)$, nesse caso os autovalores são não negativos. Como vemos, a solução $\chi(x)$ é estável sob pequenas perturbações. Quanto a solução $\phi = 0$, dependerá do valor de r , vale comentar também que, essa solução não possui o modo zero.

É possível fatorar essas equações da estabilidade via operadores supersimétricos (3.65), não somente para as órbitas retas, mas para todas as outras. Entretanto ainda será bastante complicado o estudo da estabilidade linear para as outras órbitas mostradas aqui, pois serão sistemas de equações bastante complicadas. Estudos assintóticos para algumas dessas soluções foram estudados em [103, 104]. Existem diversos outros modelos para dois campos [66, 105–107], na referência [66], por exemplo, estuda-se modelos tipo sine-Gordon. Também podem ser estudados em modelos com dinâmica generalizada, em [108] exploram modelos de dois campos para gerar estruturas interna na densidade de energia. O estudo para três campos será ainda mais complexo, mas ainda pode ser desenvolvido [109–112].

Vórtices de Maxwell-Higgs

Vórtices são defeitos topológicos em duas dimensões espaciais. Estas soluções surgem em teoria de campos quando consideramos campos complexos acoplados a campos de calibre sob uma simetria local $U(1)$. Uma maneira de acoplar estes campos é através do acoplamento mínimo, que será como estudaremos nesse capítulo. O primeiro modelo relativístico que suporta soluções do tipo vórtice foi estudado em 1973 por Nielsen e Olesen [27], onde a dinâmica do campo de calibre é controlado por um termo de Maxwell. Uma característica interessante desse modelo é que estes vórtices serão eletricamente neutros e seu fluxo magnético é quantizado. As equações que descrevem as configurações de vórtices no modelo estudado por Nielsen e Olesen são de segunda ordem. Alguns anos depois, Bogomol'nyi obteve um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, que além de simplificar o problema, ainda minimiza a energia do sistema [34]. Nesse capítulo estudaremos uma generalização deste modelo.

4.1 Generalidades

Para acoplar campos complexos a campos de calibre podemos usar o acoplamento mínimo, que é dado pela troca do termo $\partial_\mu \varphi$ por $D_\mu \varphi$, onde D_μ é também chamada de derivada covariante e é dada por $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. A constante e é definida como a carga elementar, ela serve como um parâmetro de acoplamento entre os campos. Para a transformação de calibre $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$, o produto $\overline{D_\mu \varphi} D^\mu \varphi$ será invariante se o campo complexo se transformar como $\varphi \rightarrow \varphi e^{-ie\alpha(x)}$. Para modelos que sejam invariantes sob essas transformações dizemos que tem simetria $U(1)$ local. Para estudar vórtices consideraremos campos de gauge acoplados a um campo escalar complexo em (2+1) dimensões espaço-temporal, no espaço plano de assinatura $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(+, -, -)$. A ação é a integral

$$\mathcal{S} = \int d^3x \mathcal{L}, \quad (4.1)$$

onde a densidade lagrangiana dependerá dos campos de calibre e dos campos complexos. Consideraremos um modelo estudado em [113], onde a dinâmica do campo de calibre será guiada por um termo de Maxwell, dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu(|\varphi|)} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + M(|\varphi|) \overline{D_\alpha \varphi} D^\alpha \varphi - V(|\varphi|), \quad (4.2)$$

onde $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ é o tensor eletromagnético, que é invariante sob transformações de calibre. Em duas dimensões espaciais o campo elétrico tem duas componentes $\vec{E} =$

$(E^1, E^2) = (E_x, E_y)$, que podem ser obtidas a partir de $E^i = F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i$ e o campo magnético será um escalar, dado por $B = -F^{12} = -\varepsilon^{ij} \partial_i A_j$. A derivada covariante é dada por $D_\alpha = \partial_\alpha + ieA_\alpha$. Em unidades naturais, as dimensões das quantidades envolvidas são $[x_\alpha] = \epsilon^{-1}$, $[\varphi] = [A_\alpha] = [e] = \epsilon^{\frac{1}{2}}$, $[V(|\varphi|)] = \epsilon^3$, onde ϵ é dimensão de energia. As funções $\mu(|\varphi|)$ e $M(|\varphi|)$ são adimensionais. A função $\mu(|\varphi|)$ é chamada de permeabilidade magnética ou de função dielétrica e foi inicialmente considerada em [114] para produzir soluções do tipo vórtices com novas características. A função $M(|\varphi|)$ é uma função que controla o termo dinâmico do campo escalar e foi estudada em [115, 116]. O último termo $V(|\varphi|)$ é o potencial, em geral apresenta um mínimo em $|\varphi| \neq 0$, que leva a uma quebra de simetria. Exigimos que essas funções sejam não-negativas para que tenhamos soluções com energia positiva. Outras generalizações possíveis podem ser feitas para o modelo estudado por Nielsen e Olesen [27], veja, por exemplo, as referências [76, 117–120].

Fazendo variações nos campos φ e A_α , obtemos respectivamente suas equações de movimento. Para o campo escalar $\bar{\varphi}$ teremos

$$D_\alpha (M(|\varphi|) D^\alpha \varphi) = \frac{\varphi}{2|\varphi|} \left(\frac{\mu_{|\varphi|}}{4\mu^2(|\varphi|)} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + M_{|\varphi|} \overline{D_\alpha \varphi} D^\alpha \varphi - V_{|\varphi|} \right), \quad (4.3)$$

onde os subíndices com $|\varphi|$ representa derivada em relação ao módulo do campo escalar, ou seja, $\mu_{|\varphi|} = \partial\mu/\partial|\varphi|$. A equação de movimento para φ consiste em tomar o conjugado da equação acima. Para o campo de calibre teremos um conjunto de três equações que podem ser escritas como

$$\partial_\alpha \left(\frac{F^{\alpha\beta}}{\mu(|\varphi|)} \right) = J^\beta, \quad (4.4)$$

onde a componente temporal ($\beta = 0$) pode ser entendida como a lei de Gauss modificada e as componentes espaciais ($\beta = i$) como a lei de Ampère modificada. O termo do lado direito da equação acima é dada por

$$J_\alpha = ieM(|\varphi|)(\bar{\varphi} D_\alpha \varphi - \varphi \overline{D_\alpha \varphi}), \quad (4.5)$$

que é a 3-corrente, com $J^\alpha = (J_0, \vec{J})$, onde J_0 é a densidade de carga e $\vec{J}$ a densidade de corrente. A 3-corrente é uma quantidade conservada e pode ser obtida pelo teorema de Noether. Podemos calcular a carga fazendo uma integração em todo o espaço da componente temporal dessa corrente, cuja forma é

$$Q = \int d^2x J_0. \quad (4.6)$$

O fluxo magnético pode ser calculado fazendo uma integração em todo espaço do campo magnético

$$\Phi = \int d^2x B = - \int d^2x \varepsilon^{ij} \partial_i A_j = - \oint_{r \rightarrow \infty} dx^i A_i, \quad (4.7)$$

onde na última passagem usamos o teorema de Stokes para um círculo fechado com $r \rightarrow \infty$. Para calcular o fluxo é necessário saber o comportamento de A_i nos extremos. O tensor energia-momento da densidade lagrangiana (4.2), pode ser calculado usando o

teorema de Noether, entretanto não iremos obter um tensor simétrico. Para simetrizar o tensor energia-momento é necessário fazer uso do tensor de Belinfante-Rosenfeld ou então, calcular fazendo uma variação na métrica [121]. O tensor energia-momento é dado por

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu(|\varphi|)} \left(F_{\alpha\gamma} F^{\gamma}_{\beta} + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} F_{\gamma\sigma} F^{\gamma\sigma} \right) + \eta_{\alpha\beta} V(|\varphi|) + M(|\varphi|) \left(\overline{D_{\alpha}\varphi} D_{\beta}\varphi + D_{\alpha}\varphi \overline{D_{\beta}\varphi} - \eta_{\alpha\beta} \overline{D_{\gamma}\varphi} D^{\gamma}\varphi \right), \quad (4.8)$$

que também é uma quantidade conservada, ou seja, $\partial_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0$. Podemos escrever também suas componentes termo a termo:

$$T_{00} = \frac{1}{2\mu(|\varphi|)} (\vec{E}^2 + B^2) + M(|\varphi|) (|D_0\varphi|^2 + |D_1\varphi|^2 + |D_2\varphi|^2) + V(|\varphi|), \quad (4.9a)$$

$$T_{0i} = -\frac{1}{\mu(|\varphi|)} \varepsilon_{ij} E^j B + M(|\varphi|) (\overline{D_0\varphi} D_i\varphi + D_0\varphi \overline{D_i\varphi}), \quad (4.9b)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{\mu(|\varphi|)} \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E}^2 + B^2) - E_i E_j \right) + M(|\varphi|) (\overline{D_i\varphi} D_j\varphi + D_i\varphi \overline{D_j\varphi} + \delta_{ij} (|D_0\varphi|^2 - |D_1\varphi|^2 - |D_2\varphi|^2)) - \delta_{ij} V(|\varphi|). \quad (4.9c)$$

A componente T^{00} é a densidade de energia, T^{i0} é o fluxo de energia na direção i , com valor igual a componente T^{0i} , que representa a densidade de momento da componente i . Por fim T^{ij} , é o fluxo da componente j do momento na direção i , para $i = j$ é também chamada de tensão normal ou pressão, já para $i \neq j$ teremos a tensão de cisalhamento. Com isso, pode-se calcular três grandezas físicas, a energia

$$E = \int d^2x T^{00}, \quad (4.10)$$

a componente i do momento

$$P^i = \int d^2x T^{0i}, \quad (4.11)$$

e o momento angular

$$L = \int d^2x \varepsilon_{ij} x^i T^{0j}. \quad (4.12)$$

Sem perda de generalidade podemos reescrever os campos convenientemente como

$$\varphi = |\varphi| e^{i\Lambda} \quad \text{e} \quad A_{\alpha} = \tilde{A}_{\alpha} - \frac{1}{e} \partial_{\alpha} \Lambda, \quad (4.13)$$

onde Λ é uma fase no espaço dos campos escalares e $\tilde{A}_{\alpha}$ aparece da redefinição do campo de calibre para que possamos escrever a corrente (4.5) de forma compacta como

$$J_{\alpha} = -2e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|) \tilde{A}_{\alpha}. \quad (4.14)$$

A única restrição da fase é por causa do campo φ ser uma função unívoca, ou seja, a fase deve variar apenas em múltiplos inteiros de 2π em ciclos fechados. Em coordenadas polares (r, θ) , podemos escrever essa condição como: $e^{i\Lambda(\theta+2\pi)} = e^{i\Lambda(\theta)}$, que nos

leva a $\Lambda(\theta + 2\pi) = \Lambda(\theta) + 2\pi n$, com n inteiro. Usando a redefinição de campos (4.13), reescrevemos o fluxo (4.7) como

$$\Phi = - \oint_{r \rightarrow \infty} dx^i \tilde{A}_i + \frac{1}{e} \oint_{r \rightarrow \infty} dx^i \partial_i \Lambda = - \oint_{r \rightarrow \infty} dx^i \tilde{A}_i + \frac{2\pi n}{e}. \quad (4.15)$$

O primeiro termo vai depender do comportamento de $\tilde{A}_i$ e o segundo pôde ser calculado devido às condições comentadas acima.

Podemos definir uma corrente topológica dada por

$$j_T^\alpha = i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (\partial_\beta \varphi) (\partial_\gamma \bar{\varphi}), \quad (4.16)$$

onde $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ é o símbolo de Levi-Civita. Podemos ver que essa quantidade é conservada, $\partial_\mu j_T^\mu = 0$. Como nosso foco é estudar defeitos, teremos soluções estáticas, as componentes espaciais dessa corrente topológica serão nulas, ou seja, $j_T^i = 0$. Logo, só teremos a componente temporal, dada por $j_T^0 = i\varepsilon^{ij} (\partial_i \varphi) (\partial_j \bar{\varphi})$. Usando (4.13) na componentes temporal da corrente topológica, teremos

$$j_T^0 = \varepsilon^{ij} \left(\partial_i |\varphi|^2 \right) (\partial_j \Lambda) - i\varepsilon^{ij} \left((\partial_i |\varphi|) (\partial_j |\varphi|) + |\varphi|^2 (\partial_i \Lambda) (\partial_j \Lambda) \right), \quad (4.17)$$

a parte imaginária será nula, restando apenas o primeiro termo. Podemos definir uma carga topológica, fazendo a integração em todo espaço, resultando em

$$\begin{aligned} Q_T &= \int d^2x j_T^0 = \int d^2x \varepsilon^{ij} \left(\partial_i |\varphi|^2 \right) (\partial_j \Lambda) \\ &= \int d^2x \left(\varepsilon^{ij} \partial_i \left(|\varphi|^2 \partial_j \Lambda \right) - |\varphi|^2 \varepsilon^{ij} \partial_i \partial_j \Lambda \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Temos que $\varepsilon^{ij} \partial_i \partial_j \Lambda = 2\pi \sum_k \delta^2(\vec{r} - \vec{r}_k)$, onde $\vec{r} = (x, y)$ e $\vec{r}_k$ denota os zeros de φ dentro do contorno de $r \rightarrow \infty$. Logo, o último termo dessa integral será zero, sobrando

$$Q_T = \int d^2x \varepsilon^{ij} \partial_i \left(|\varphi|^2 \partial_j \Lambda \right) = |\varphi|^2 \Big|_\infty \oint_{r \rightarrow \infty} dx^i \partial_i \Lambda = 2\pi n |\varphi|^2 \Big|_\infty. \quad (4.19)$$

Para soluções topológicas a carga topológica é não nula, com $Q_T = 2\pi n v^2$, desde que $|\varphi| = v \neq 0$ assintoticamente (com quebra de simetria), dizemos que n é um invariante topológico. Quando $n = 0$ e/ou $|\varphi| = 0$ para $r \rightarrow \infty$ (sem quebra de simetria), teremos $Q_T = 0$, ou seja, soluções não topológicas.

Faremos agora um estudo das equações de movimento (4.3) e (4.4). Inicialmente começaremos pela equação do campo de calibre (4.4). Resolvemos a lei de Gauss ($\beta = 0$), considerando soluções estáticas com a escolha de calibre $A_0 = 0$. Essas soluções serão eletricamente neutras, além disso, temos que as componentes T_{0i} , dada pela equação (4.9b), serão nulas. Teremos que resolver a lei de Ampère, componente $\beta = i$, escrita como

$$\varepsilon^{ij} \partial_j \left(\frac{B}{\mu(|\varphi|)} \right) = J^i. \quad (4.20)$$

Nesse caso, não existirá momento (4.11) e nem momento angular (4.12). Porém, ainda poderemos calcular a energia dessas soluções pela equação (4.10), a partir da densidade de energia (4.9a), dada por

$$\rho = \frac{1}{2\mu(|\varphi|)} B^2 + M(|\varphi|) (|D_1\varphi|^2 + |D_2\varphi|^2) + V(|\varphi|). \quad (4.21)$$

Para que tenhamos energia finita temos que $\rho(r \rightarrow \infty) = 0$. Diante disso, faremos algumas considerações acerca dos termos da densidade de energia acima. Primeiramente vamos analisar o termo potencial, $V(|\varphi(r \rightarrow \infty)|) = 0$, ou seja, $|\varphi|$ deve ir para um mínimo global do potencial. Faremos uma análise agora para o termo $B^2/(2\mu(|\varphi|))|_{r \rightarrow \infty} = 0$, para isso temos que $\varepsilon^{ij}\partial_i A_j|_{r \rightarrow \infty} = 0$ e $\mu(|\varphi(r \rightarrow \infty)|) = \mu_\infty$, onde μ_∞ é um valor não negativo, ou seja, $\mu_\infty \geq 0$. Note que μ_∞ pode ser zero ou infinito desde que o limite $B^2/(2\mu(|\varphi|))|_{r \rightarrow \infty} = 0$ seja satisfeito. Por fim, os termos $M(|\varphi|)|D_i\varphi|^2|_{r \rightarrow \infty} = 0$, com $i = 1, 2$, dependerão da forma de $M(|\varphi|)$, porém, assim como o primeiro termo, podemos fazer uma análise por $|D_i\varphi|^2$ desde que $M(|\varphi|)$ não tenha uma divergência nos extremos que impeça o termo de ir a zero. Fazendo o limite $D_i\varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0$, podemos dizer que $\partial_i \ln(\varphi) = -ieA_i$ nos extremos, integrando em torno de um círculo no infinito espacial temos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{r \rightarrow \infty} dx^i \partial_i \ln(\varphi) = -\frac{e}{2\pi} \oint_{r \rightarrow \infty} dx^i A_i = \frac{e}{2\pi} \Phi = n - \frac{e}{2\pi} \oint_{r \rightarrow \infty} dx^i \tilde{A}_i. \quad (4.22)$$

Por outro lado $D_i\varphi = (\partial_i|\varphi| + ie|\varphi|\tilde{A}_i)e^{i\Lambda}$, como $e^{i\Lambda} \neq 0$, os termos dentro dos parênteses devem ser nulos quando $r \rightarrow \infty$. Para o caso de quebra de simetria, $|\varphi| = v$, temos que $\tilde{A}_i = 0$ para que seja um estado de vácuo. O fluxo (4.7) será quantizado, dado por $\Phi = 2\pi n/e$, com n inteiro, e a equação acima será o número de zeros de φ , que resulta em n . Quando não há quebra de simetria, $|\varphi| = 0$, teremos um estado de vácuo desde que $|\varphi|\tilde{A}_i$ seja zero. Nesse caso o fluxo (4.7) não é obrigatoriamente quantizado, dependendo do valor da última integral, e a equação (4.22) não representará o número de zeros de φ .

Vamos agora fazer o procedimento de Bogomol'nyi [34], para isso reescrevemos a densidade de energia (4.21) como

$$\begin{aligned} \rho = \frac{1}{2\mu(|\varphi|)} \left(B \mp \sqrt{2\mu(|\varphi|)V(|\varphi|)} \right)^2 \mp \sqrt{\frac{2V(|\varphi|)}{\mu(|\varphi|)}} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j \\ + M(|\varphi|) |(D_1 \pm iD_2)\varphi|^2 \pm 2e|\varphi|M(|\varphi|)\varepsilon^{ij} A_j \partial_i |\varphi| \pm iM\varepsilon^{ij} (\partial_i \varphi)(\partial_j \bar{\varphi}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Considerando o vínculo

$$\frac{d}{d|\varphi|} \left(\sqrt{\frac{2V(|\varphi|)}{\mu(|\varphi|)}} \right) = -2e|\varphi|M(|\varphi|), \quad (4.24)$$

que é satisfeito para o potencial na seguinte forma

$$V(|\varphi|) = 2e^2\mu(|\varphi|) \left(\int d|\varphi| |\varphi| M(|\varphi|) \right)^2. \quad (4.25)$$

Levando o em conta vínculo (4.24) na densidade de energia (4.23) podemos colocar o segundo e o penúltimo termo em uma derivada total, o último termo podemos abrir usando (4.13) e fazendo uma integração em todo o espaço a energia será escrita como

$$E = \int dx^2 \left(M(|\varphi|) |(D_1 \pm iD_2) \varphi|^2 + \frac{1}{2\mu(|\varphi|)} \left(B \mp \sqrt{2\mu(|\varphi|)V(|\varphi|)} \right)^2 \right. \\ \left. \mp \varepsilon^{ij} \partial_i \left(A_j \sqrt{\frac{2V(|\varphi|)}{\mu(|\varphi|)}} \right) \pm 2|\varphi| M(|\varphi|) \varepsilon^{ij} (\partial_i |\varphi|) (\partial_j \Lambda) \mp i|\varphi|^2 M(|\varphi|) \varepsilon^{ij} (\partial_i \Lambda) (\partial_j \Lambda) \right), \quad (4.26)$$

onde o último termo será nulo desde que $|\varphi|^2 M(|\varphi|) = 0$ nos zeros de φ . Fazendo uso novamente de vínculo (4.24), temos que

$$E = \int dx^2 \left(M(|\varphi|) |(D_1 \pm iD_2) \varphi|^2 + \frac{1}{2\mu(|\varphi|)} \left(B \mp \sqrt{2\mu(|\varphi|)V(|\varphi|)} \right)^2 \right. \\ \left. \mp \varepsilon^{ij} \partial_i \left(A_j \sqrt{\frac{2V(|\varphi|)}{\mu(|\varphi|)}} \right) \mp \frac{1}{e} \varepsilon^{ij} \partial_i \left(\sqrt{\frac{2V(|\varphi|)}{\mu(|\varphi|)}} \right) (\partial_j \Lambda) \right) \\ = \int dx^2 \left(M(|\varphi|) |(D_1 \pm iD_2) \varphi|^2 + \frac{1}{2\mu(|\varphi|)} \left(B \mp \sqrt{2\mu(|\varphi|)V(|\varphi|)} \right)^2 \right) \\ \mp \sqrt{\frac{2V(|\varphi|)}{\mu(|\varphi|)}} \Big|_{\infty} \oint_{r \rightarrow \infty} dx^i A_i \mp \frac{1}{e} \int dx^2 \left(\varepsilon^{ij} \partial_i \left(\partial_j \Lambda \sqrt{\frac{2V(|\varphi|)}{\mu(|\varphi|)}} \right) - \sqrt{\frac{2V(|\varphi|)}{\mu(|\varphi|)}} \varepsilon^{ij} \partial_i \partial_j \Lambda \right) \\ = \int dx^2 \left(M(|\varphi|) |(D_1 \pm iD_2) \varphi|^2 + \frac{1}{2\mu(|\varphi|)} \left(B \mp \sqrt{2\mu(|\varphi|)V(|\varphi|)} \right)^2 \right) \\ \pm \Phi \sqrt{\frac{2V(|\varphi|)}{\mu(|\varphi|)}} \Big|_{\infty} \mp \frac{2\pi n}{e} \left(\sqrt{\frac{2V(|\varphi|)}{\mu(|\varphi|)}} \Big|_{\infty} - \sqrt{\frac{2V(0)}{\mu(0)}} \right), \quad (4.27)$$

com menor energia dada por

$$E \geq E_B = \left| \Phi \sqrt{\frac{2V(|\varphi|)}{\mu(|\varphi|)}} \Big|_{\infty} \right| - 2\pi \left| \frac{n}{e} \left(\sqrt{\frac{2V(|\varphi|)}{\mu(|\varphi|)}} \Big|_{\infty} - \sqrt{\frac{2V(0)}{\mu(0)}} \right) \right|, \quad (4.28)$$

também chamada de energia de BPS. Podemos reescrever essa energia de maneira compacta lembrando que quando há quebra de simetria, o fluxo será $\Phi = 2\pi n/e$, fazendo com que os dois primeiros termos se cancelem. Quando não há quebra de simetria ($|\varphi(r \rightarrow \infty)| = 0$), o segundo e o último termo que se cancelam. Logo, a energia das soluções topológicas e não topológicas podem ser escritas em termo do fluxo como

$$E_B = \left| \Phi \sqrt{\frac{2V(0)}{\mu(0)}} \right|. \quad (4.29)$$

A energia será mínima ($E = E_B$) se as equações abaixo forem satisfeitas

$$(D_1 \pm iD_2)\varphi = 0, \quad (4.30a)$$

$$B \mp \sqrt{2\mu(|\varphi|)}V(|\varphi|) = 0. \quad (4.30b)$$

Pelo vínculo (4.24) podemos reescrever o campo magnético da equação acima como

$$B \pm 2e\mu(|\varphi|) \int d|\varphi| |\varphi| M(|\varphi|) = 0. \quad (4.31)$$

Essas equações diferenciais de primeira ordem resolvem as equações de segunda ordem (4.3) e (4.4), além disso, as componentes (4.9c) do tensor energia-momento serão nulas, ou seja, $T_{ij} = 0$.

Tomaremos o *ansatz* usual para vórtices, escrevemos os campos na base polar (r, θ) como

$$\varphi = g(r)e^{in\theta} \quad \text{e} \quad \vec{A} = \frac{\hat{\theta}}{er} (n - a(r)), \quad (4.32)$$

onde $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ é a vorticidade, podendo ser positiva ou negativa. Para essa escolha os campos terão simetria circular e serão descritos por $g(r)$ e $a(r)$, que em unidades naturais $[g(r)] = \epsilon^{\frac{1}{2}}$ e $a(r)$ será adimensional. As condições de contorno dessas funções serão

$$g(0) = 0, \quad a(0) = n, \quad g(\infty) \rightarrow g_\infty, \quad a(\infty) \rightarrow a_\infty, \quad (4.33)$$

onde o valor de g_∞ determinará o tipo de solução: para soluções topológicas $g_\infty = v$ e para não topológicas $g_\infty = 0$. A constante a_∞ assume em princípio qualquer valor real e pode ser determinada a partir da densidade de energia que mostraremos em breve. Soluções não-topológicas para vórtices de Maxwell-Higgs foram estudadas em [122]. Não teremos campo elétrico, porém teremos campo magnético, que para o *ansatz* (4.32) será

$$B = -\frac{a'}{er}, \quad (4.34)$$

onde a linha denota derivada em relação à coordenada espacial r , com fluxo magnético (4.7) dado por

$$\Phi = \frac{2\pi}{e} (n - a_\infty). \quad (4.35)$$

Pela definição (4.5) a densidade de carga será nula $J_0 = 0$, com densidade de corrente

$$\vec{J} = \frac{2eag^2M}{r}\hat{\theta}. \quad (4.36)$$

Para o *ansatz* a equação do campo escalar (4.3) torna-se

$$\frac{1}{r} (rMg')' - \frac{a^2gM}{r^2} - \frac{1}{2}Mg \left(g'^2 + \frac{a^2g^2}{r^2} \right) + \frac{\mu_g a'^2}{4e^2r^2\mu^2} - \frac{1}{2}V_g = 0. \quad (4.37)$$

Pela equação (4.4), teremos apenas a lei de Ampère

$$\left(\frac{a'}{er\mu}\right)' - \frac{2eag^2M}{r} = 0. \quad (4.38)$$

Essas duas últimas equações serão as equações que precisamos resolver para obter soluções do tipo vórtices. Como pode ser visto, é um sistema de equações diferenciais acopladas. Apesar da escolha feita pelo ansatz (4.32) ter diminuído o número de equações para resolvermos, ainda assim teremos um problema bastante complicado. A densidade de energia (4.21) será dada por

$$\rho = \frac{1}{2\mu} \frac{a'^2}{e^2 r^2} + M \left(g'^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) + V. \quad (4.39)$$

As outras componentes do tensor energia-momento não nulo (4.9c), serão

$$T_{12} = M \left(g'^2 - \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) \sin(2\theta), \quad (4.40a)$$

$$T_{11} = \frac{1}{2\mu} \frac{a'^2}{e^2 r^2} + M \left(g'^2 - \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) \cos(2\theta) - V, \quad (4.40b)$$

$$T_{22} = \frac{1}{2\mu} \frac{a'^2}{e^2 r^2} + M \left(\frac{a^2 g^2}{r^2} - g'^2 \right) \cos(2\theta) - V, \quad (4.40c)$$

na base polar, essas componentes tornam-se

$$T_{rr} = \frac{1}{2\mu} \frac{a'^2}{e^2 r^2} + M \left(g'^2 - \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) - V, \quad (4.41a)$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{1}{2\mu} \frac{a'^2}{e^2 r^2} + M \left(\frac{a^2 g^2}{r^2} - g'^2 \right) - V, \quad (4.41b)$$

com $T_{r\theta} = T_{\theta r} = 0$. Observe que essas componentes são independentes do ângulo. A lei de conservação $\partial_i T^{ij} = 0$ em coordenadas polares será

$$(rT_{rr})' = T_{\theta\theta}. \quad (4.42)$$

Podemos usar o argumento de Derrick para estudar o comportamento das soluções por contrações e dilatações, semelhante ao que foi estudado nos capítulos anteriores. Esse estudo foi feito para vórtices generalizados em [120]. Fazendo uma reescala $r \rightarrow \lambda r$ nas soluções $g(r)$ e $a(r)$, temos que $g(r) \rightarrow g^{(\lambda)} = g(\lambda r)$ e $a(r) \rightarrow a^{(\lambda)} = a(\lambda r)$, com a energia reescalada

$$\begin{aligned} E^{(\lambda)} &= 2\pi \int r dr \left(\frac{1}{2e^2 r^2 \mu} \left(\frac{\partial a^{(\lambda)}}{\partial r} \right)^2 + M \left(\left(\frac{\partial g^{(\lambda)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{a^{(\lambda)2} g^{(\lambda)2}}{r^2} \right) + V \right) \\ &= 2\pi \int z dz \left(\frac{\lambda^2}{2e^2 z^2 \mu} \left(\frac{\partial a}{\partial z} \right)^2 + M \left(\left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^2 + \frac{a^2 g^2}{z^2} \right) + \lambda^{-2} V \right), \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde $z = \lambda r$. Minimizamos a equação anterior em relação à λ para obtermos

$$\left. \frac{\partial E^{(\lambda)}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = 4\pi \int z dz \left(\frac{1}{2\mu} \frac{a'^2}{e^2 z^2} - V \right) = 0. \quad (4.44)$$

A equação acima é a condição necessária para que as soluções sejam estáveis por reescala, a integral deve ser nula. Para analisarmos melhor essa condição, podemos as componentes T_{ij} do tensor energia-momento (4.40) sejam axialmente simétrico, que não dependam do ângulo, para isso tomamos

$$g'^2 = \frac{a^2 g^2}{r^2}. \quad (4.45)$$

Essa nova restrição faz com que $T_{12} = 0$ e que $T_{11} = T_{22} = T_{rr} = T_{\theta\theta} = \sigma$, onde chamamos σ de pressão e será dada por

$$\sigma = \frac{1}{2\mu} \frac{a'^2}{e^2 r^2} - V. \quad (4.46)$$

Pela conservação do tensor energia-momento $\partial_i T^{ij} = 0$, temos que ter σ igual a uma constante. Pela condição dada integral (4.44), essa constante deve ser nula ($\sigma = 0$). Logo para soluções que obedece a restrição (4.45) sejam estáveis por contrações e dilatações, devemos ter pressão nula, ou seja

$$\frac{a'^2}{e^2 r^2} = 2\mu V. \quad (4.47)$$

Podemos verificar se essas soluções com pressão nula é fato é um mínimo, para isso fazemos o teste da derivada segunda,

$$\left. \frac{\partial^2 E^{(\lambda)}}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=1} = 4\pi \int z dz \left(\frac{1}{2\mu} \frac{a'^2}{e^2 z^2} + 3V(g) \right) = 8\pi \int z dz \left(\frac{1}{\mu} B^2 \right) = 16\pi \int z dz V(g) > 0, \quad (4.48)$$

levando em conta que as parcelas das energias do campo magnético ou potencial sejam positivas, temos que será mínimo. Usando o teorema de Derrick conseguimos obter o sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (4.49a)$$

$$-\frac{a'}{er} = \pm \sqrt{2\mu V}. \quad (4.49b)$$

Para que elas satisfaçam as equações de movimento (4.37) e (4.38), o vínculo (4.24) deve ser levado em conta. Os sinais de mais ou menos dessas equações representam, respectivamente, configurações com vorticidade positiva ou negativa. Elas podem ser relacionadas pela troca $a(r) \rightarrow -a(r)$, enquanto $g(r)$ permanece inalterado. Na referência [123], os autores obtêm as equações diferenciais de primeira ordem para o modelo de Nielsen e Olesen [27], considerando as soluções simétricas com $T_{ij} = 0$.

Vale ressaltar que pelo procedimento de Bogomol'nyi realizado antes da escolha do ansatz resultará nessas mesmas equações diferenciais de primeira ordem ao substituir

(4.32) em (4.30). Poderíamos também fazer esse procedimento após a escolha do ansatz, reescrevendo a densidade de energia (4.39) como

$$\rho = M \left(g' \mp \frac{ag}{r} \right)^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{a'}{er} \pm \sqrt{2\mu V} \right)^2 \pm \frac{1}{r} \left(2agMg' - \frac{1}{e} \sqrt{\frac{2V}{\mu}} a' \right), \quad (4.50)$$

onde os dois últimos termos podem ser escritos como uma derivada total ao considerarmos o vínculo (4.24). Reescrevemos a densidade de energia acima como

$$\rho = M \left(g' \mp \frac{ag}{r} \right)^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{a'}{er} \pm \sqrt{2\mu V} \right)^2 \pm \frac{1}{r} W', \quad (4.51)$$

onde

$$W(a, g) = -\frac{a}{e} \sqrt{\frac{2V}{\mu}} = 2a \int dg g M, \quad (4.52)$$

é denominado de funcional de energia. A energia será mínima se as equações diferenciais de primeira ordem (4.49) forem satisfeitas e será dada como

$$E = 2\pi |W(a(\infty), g(\infty)) - W(a(0), g(0))|, \quad (4.53)$$

que dependerá das condições de contorno das funções g e a no funcional de energia. Para as soluções de primeira ordem (4.49) podemos escrever a densidade de energia (4.39) dependendo apenas dos campos g e a como

$$\rho = \frac{2a^2 g^2 M}{r^2} + 2V. \quad (4.54)$$

Essa forma é importante para obter as condições de contorno para os campos g e a nos extremos, já que no limite $r \rightarrow \infty$ o produto $r\rho$ deve ir a zero para que tenhamos energia finita. Como podemos ver, tanto pelo argumento de Derrick, quanto pelo procedimento BPS, conseguimos reduzir as equações de movimento de segunda ordem (4.37) para equações diferenciais de primeira ordem (4.49) desde que as funções do modelo envolvido satisfaçam o vínculo (4.24). Além disso, ainda obtemos soluções que terão energia mínima do sistema. Apesar de termos equações diferenciais de primeira ordem ainda assim serão bastante complicadas de resolver, pois serão equações acopladas. Entretanto, podemos estimar o comportamento a solução $g(r)$ próximo a origem. Conforme as condições de contorno (4.33), podemos fazer a aproximação

$$g(r \approx 0) \approx g_0(r) \quad \text{e} \quad a(r \approx 0) \approx n - a_0(r), \quad (4.55)$$

na equação (4.49a) e considerando apenas as contribuições lineares de $g_0(r)$ e $a_0(r)$, obtemos que $g_0(r) \propto r^{|n|}$, independentemente da forma de (4.2).

Seguiremos nossos estudos fazendo alguns exemplos. Por questões de simplicidade, tomaremos campos adimensionais. Para isso, fazemos a reescala

$$\varphi \rightarrow e\varphi, \quad A_\alpha \rightarrow eA_\alpha, \quad v \rightarrow ev, \quad x_\alpha \rightarrow \frac{1}{e^2}x_\alpha, \quad \mathcal{L} \rightarrow e^6\mathcal{L}, \quad (4.56)$$

ou seja, podemos tomar $e = 1$ sem perda de generalidade. Consideraremos inicialmente o modelo canônico, em seguida modelos que tem apenas permeabilidade magnética ($M = 0$) e por fim com um fator global.

4.2 Modelo Canônico

O exemplo mais simples é para a escolha $\mu = M = 1$. As equações de movimento (4.3) e (4.4) serão respectivamente

$$D_\alpha D^\alpha \varphi = -\frac{\varphi}{2|\varphi|} V_{|\varphi|} \quad \text{e} \quad \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = i(\bar{\varphi} D^\beta \varphi - \varphi \overline{D^\beta \varphi}). \quad (4.57)$$

Mesmo que sejam razoavelmente menores, ainda assim serão bastante complicadas de serem resolvidas. Esse modelo foi primeiramente estudado por [27], para um potencial do tipo $\lambda|\varphi|^4$ com quebra de simetria. Bogomol'ny mostrou em [34], que não é qualquer potencial do tipo $\lambda|\varphi|^4$ que satisfaz as equações diferenciais de primeira ordem, o parâmetro λ deve ter um valor específico λ_c , para que seja possível. Na literatura quando $\lambda = \lambda_c$ é chamado de acoplamento crítico e distingue supercondutores do tipo I e do tipo II, ver referências [24, 25, 34, 124].

Fazendo a integral (4.25) com uma constante de integração adequada, temos o potencial

$$V(|\varphi|) = \frac{1}{2} (v^2 - |\varphi|^2)^2, \quad (4.58)$$

que é do tipo $|\varphi|^4$ com quebra de simetria em $|\varphi| = v$. Esse potencial é bastante conhecido na literatura, muitas vezes chamado de chapéu mexicano, tem um máximo local em $|\varphi| = 0$ e um conjunto de mínimos em $|\varphi| = v$, como pode ser visto na figura 4.1.

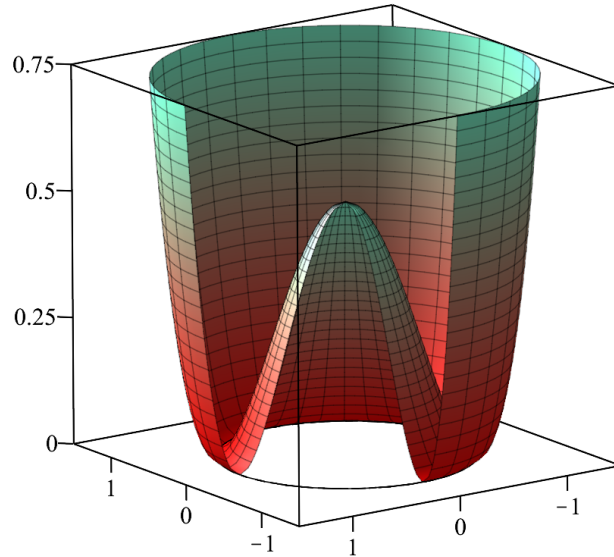


Figura 4.1 Potencial (4.58) para $v = 1$, a circunferência no plano $(\Re(\varphi), \Im(\varphi))$ representa o conjunto de mínimos.

Vamos agora fazer o estudo das soluções estáticas com simetria circular, nesse caso o comportamento dos campos pode ser determinado por duas funções: $g(r)$ e $a(r)$; conforme

a equação (4.32). As equações diferenciais de primeira ordem (4.49) serão

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (4.59a)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm (v^2 - g^2), \quad (4.59b)$$

apesar de serem bem elegantes não temos soluções analíticas para esse sistema de equações. Porém, podemos calcular o comportamento delas próximo a origem, pela aproximação (4.55) temos que

$$g_o(r) \propto r^{|n|} \quad \text{e} \quad a_o(r) \approx \pm \frac{v^2 r^2}{2}. \quad (4.60)$$

O campo magnético (4.34) para as soluções da equação (4.59) será

$$B(r) = \pm (v^2 - g^2(r)), \quad (4.61)$$

que pode ser calculada na origem como $B(0) = \pm v^2$. Já a densidade de energia (4.54) toma forma

$$\rho(r) = \frac{2a^2(r)g^2(r)}{r^2} + (v^2 - g^2(r))^2. \quad (4.62)$$

Podemos analisar as condições de contorno assintóticas das soluções $g(r)$ e $a(r)$ para termos energia finita. Nesse modelo só existirão soluções topológicas com condições de contorno: $g_\infty = v$ e $a_\infty = 0$. Como sabemos pela equação (4.53), podemos calcular a energia das soluções a partir do funcional de energia, ou seja,

$$W(a, g) = -a(v^2 - g^2), \quad (4.63)$$

com as condições de contorno (4.33), onde $g_\infty = v$ e $a_\infty = 0$. Teremos assim $E = 2\pi|n|v^2$. Podemos também fazer um estudo do comportamento assintótico das soluções, definindo $g_a(r) \approx v - g(r \gg 0)$ e $a_a(r) = a(r \gg 0)$. Podemos usar essa aproximação nas equações diferenciais de primeira ordem (4.59) e obter

$$g_a(r) \propto K_0(\sqrt{2}vr) \quad \text{e} \quad a_a(r) \propto rK_1(\sqrt{2}vr), \quad (4.64)$$

onde $K_\alpha(z)$ é a função de Bessel modificada do segundo tipo com argumento z . O comportamento assintótico das soluções serão aproximadamente exponencial com um fator de $\sqrt{r}$. Podemos tomar a forma assintótica da equação acima e escrever

$$g_a(r) \propto \frac{e^{-\sqrt{2}vr}}{\sqrt{r}} \quad \text{e} \quad a_a(r) \propto \sqrt{r}e^{-\sqrt{2}vr}. \quad (4.65)$$

Resolvendo as equações diferenciais de primeira ordem (2.25) numericamente para as condições de contorno adequadas, obtemos o comportamento das soluções $g(r)$ e $a(r)$. Na figura 4.2 temos o potencial $V(|\varphi|)$ da equação (4.58), diferentemente do potencial

representado na figura 4.1. Aqui mostramos apenas um pedaço dele, pois existe uma simetria de rotação. Ainda na figura 4.2 mostramos o comportamento das soluções $g(r)$ e $a(r)$ para vorticidade positiva $n = 1$ com $v = 1$. Veja que a solução $g(r)$ é uma função crescente que vai de $g(0) = 0$ até $g(r \rightarrow \infty) = 1$, já a solução $a(r)$ é uma função decrescente que vai de $a(0) = 1$ até $a(r \rightarrow \infty) = 0$. Como já foi mencionado, poderíamos ter soluções com vorticidade negativa, a solução $g(r)$ se manteria inalterada, mas a solução $a(r)$ passaria a ser uma função crescente com $a(0) = -|n|$. Na figura 4.2 mostramos as soluções $g(r)$ e $a(r)$, porém, podemos ainda mostrar como será o comportamento dos campos $|\varphi(x, y)|$ e $\vec{A}(x, y)$ em coordenadas cartesianas, veja a figura 4.3.

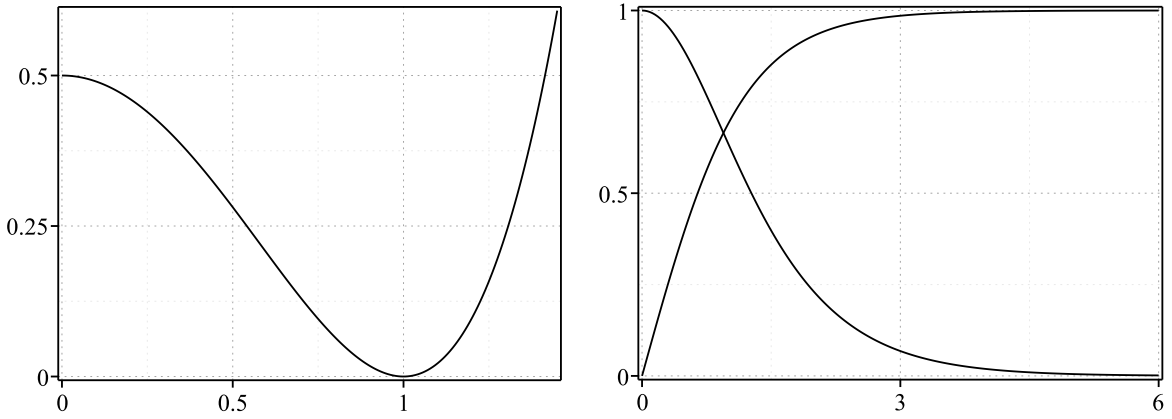


Figura 4.2 No lado esquerdo temos o potencial $V(|\varphi|)$ dado pela equação (4.58) e no lado direito temos suas soluções $g(r)$ (crescente) e $a(r)$ (decrescente), determinadas a partir da equação (4.59), para $v = 1$ com vorticidade positiva $n = 1$.

Podemos usar as soluções $g(r)$ e $a(r)$ para mostrar como será o comportamento do campo magnético $B(r)$ e da densidade de energia $\rho(r)$ a partir das equações (4.61) e (4.62), veja a figura 4.4. Tanto o campo magnético como a densidade de energia são quantidades localizadas no espaço, podemos ver melhor na figura 4.5.

4.3 Modelos com Permeabilidade

Consideraremos agora modelos que dependem apenas da permeabilidade $\mu(|\varphi|)$ com $M = 1$. Como sabemos, a função dielétrica depende do módulo do campo escalar, assim como o potencial $V(|\varphi|)$. Esse modelo foi estudado inicialmente em [114] e vastamente explorado, veja as referências [125–132]. O potencial pode ser determinado para uma permeabilidade qualquer, calculando a partir da equação (4.25), temos que

$$V(|\varphi|) = \frac{1}{2} \mu(|\varphi|) (v^2 - |\varphi|^2)^2. \quad (4.66)$$

Em princípio o potencial acima tem quebra de simetria $|\varphi| = v$, porém pode ser apareçam outros ou que esse mude de lugar dependendo da escolha da função $\mu(|\varphi|)$. Veja que o

potencial pode ter um comportamento muito diferente do da seção anterior, com isso, levar à soluções com novas características. Podemos citar, por exemplo: em [127] teremos soluções compactas, já em [129] soluções quasi-compactas e nas referências [128, 131] teremos soluções que levam a quantidades físicas com anéis. Consideraremos soluções estáticas para o ansatz usual de vórtices (4.32). As equações diferenciais de primeira ordem (4.49) para o potencial acima tomam forma

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (4.67a)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm \mu(g) (v^2 - g^2). \quad (4.67b)$$

Assim como no potencial (4.66) a segunda equação acima dependerá de um fator multiplicativo (μ), mudando completamente o problema em relação ao modelo canônico da seção anterior. A partir da função dielétrica podemos obter novos comportamentos para as soluções, conforme ilustraremos mais adiante. A partir das soluções da equação acima podemos calcular a densidade de energia considerando (4.54), ou seja,

$$\rho(r) = \frac{2a^2(r)g^2(r)}{r^2} + \mu(g(r)) (v^2 - g^2(r))^2. \quad (4.68)$$

O funcional de energia (4.52) será dado por

$$W(a, g) = -a (v^2 - g^2), \quad (4.69)$$

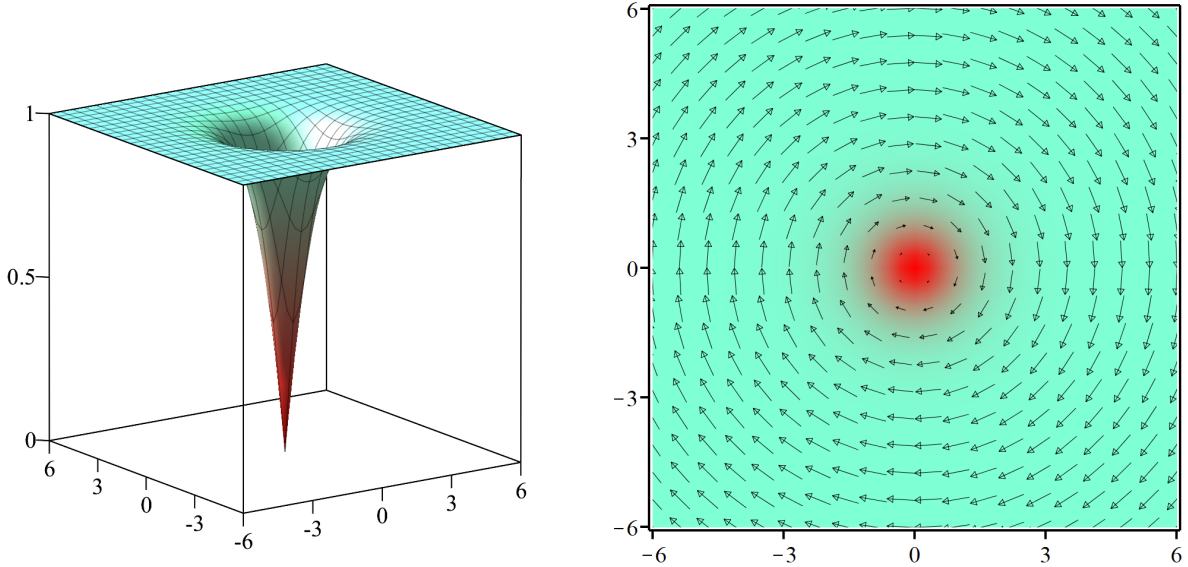


Figura 4.3 Campo escalar $|\varphi(x, y)|$ no lado esquerdo. No lado direito as setas representa o campo vetorial $\vec{A}(x, y)$ no plano xy e o colorido representa o $|\varphi(x, y)|$, onde a alteração das cores representa a altura mostrada na figura do lado esquerdo.

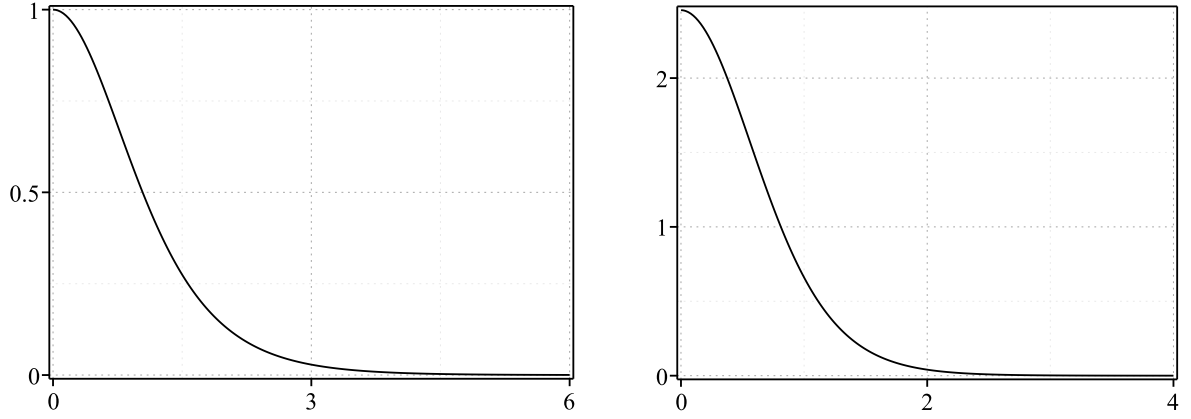


Figura 4.4 Campo magnético $B(r)$ da equação (4.61) e a densidade de energia $\rho(r)$ da (4.62) para $v = n = 1$.

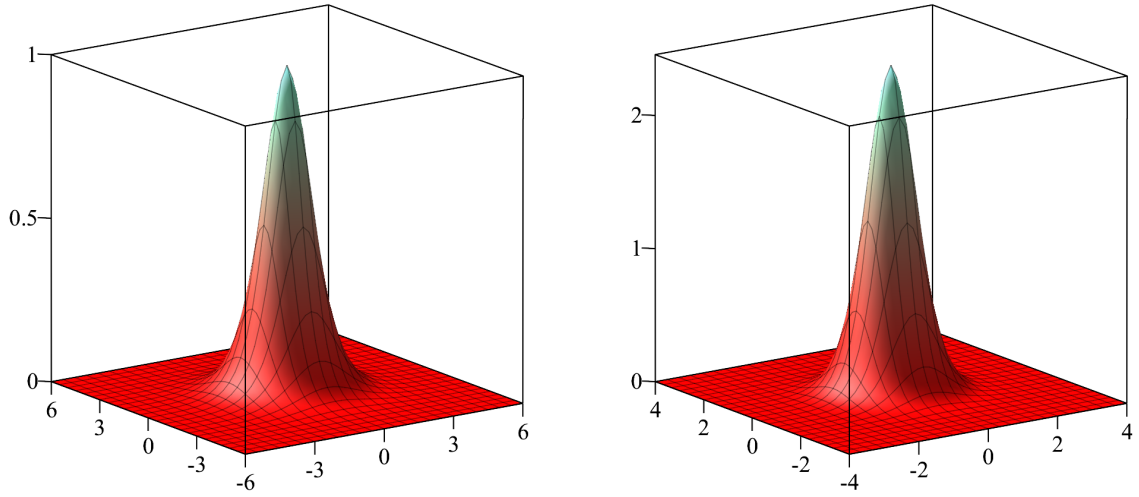


Figura 4.5 Campo magnético $B(x,y)$ e densidade de energia $\rho(x,y)$ da figura 4.4 em coordenadas cartesianas.

que independe da permeabilidade, a energia vai depender das condições de contorno de $g(r)$ e $a(r)$, para soluções topológicas $E_B = 2\pi|n|v^2$ e não topológicas $E_B = 2\pi|n - a_\infty|v^2$.

Vamos agora considerar dois modelos que tem comportamento assintótico diferente do modelo canônico, estes modelos podem ser visto da referência [133]. Estudaremos um modelo que suporta soluções analíticas e outro que resolveremos numericamente.

4.3.1 Exemplo Analítico

Consideraremos inicialmente um modelo cuja permeabilidade é dada por

$$\mu(|\varphi|) = \frac{2sn^2|\varphi|^{2s-2/|n|} \left| v^{2s} - |\varphi|^{2s} \right|^{1+1/s|n|}}{|v^2 - |\varphi|^2|}, \quad (4.70)$$

onde n é um parâmetro inteiro que para o ansatz identificaremos como a vorticidade das soluções e s é um parâmetro real com $s|n| \geq 1$. O potencial (4.66) será

$$V(g) = \frac{sn^2}{v^{4s}} g^{2s-2/|n|} \left| v^{2s} - g^{2s} \right|^{1+1/s|n|}. \quad (4.71)$$

No caso particular de vorticidade unitária $|n| = 1$, o comportamento desse potencial dependerá de s . O comportamento do potencial dependerá dos parâmetros n e s , teremos um mínimo fixo em $|\varphi| = v$ e dependendo do valor de s e n poderá ter um mínimo em $|\varphi| = 0$, lembrando que n deve ser um inteiro, já s pode ser qualquer valor real desde que $s|n| \geq 1$. Para $s|n| = 1$ o potencial terá um máximo em $|\varphi| = 0$, com $V(0) = |n|v^2$ e para $s|n| > 1$ será um mínimo. As equações diferenciais de primeira ordem (4.67) serão

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (4.72a)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm \frac{2sn^2}{v^{4s}} g^{2s-2/|n|} \left(v^{2s} - g^{2s} \right)^{1+1/s|n|}, \quad (4.72b)$$

que suporta as soluções analíticas

$$g(r) = \frac{vr^{|n|}}{\left(1 + r^{2s|n|}\right)^{1/2s}} \quad \text{e} \quad a(r) = \frac{n}{1 + r^{2s|n|}}. \quad (4.73)$$

Soluções como essas foram estudadas em outros modelos para vórtices [134–136]. Nas referências [135, 136] os autores mostram que para $n = 1$ e valores muito grande de s , essas soluções viram compactas. Apesar de termos o comportamento analítico das soluções, ainda podemos fazer um estudo perto da origem e assintoticamente. Próximo a origem teremos $g(r \approx 0) \approx vr^{|n|}$ e $n - a(r \approx 0) \approx nr^{2s|n|}$, assintoticamente será $v - g(r \gg 0) \approx vr^{-2s|n|}$ e $a(r \gg 0) \approx nr^{-2s|n|}$. Diferentemente das soluções canônicas, que têm comportamento assintótico exponencial (4.65) aqui as soluções serão potências de r . Essa é uma característica de soluções de longo alcance. O potencial (4.71) e as soluções (4.73) podem ser vistos na figura 4.6 para $v = 1$ vorticidade positiva $n = 1$ e alguns valores de s .

O campo magnético será calculado de maneira analítica como

$$B(r) = \frac{2sn^2 r^{2s|n|-2}}{\left(1 + r^{2s|n|}\right)^2}. \quad (4.74)$$

Na origem temos que: para $s|n| = 1$ o campo magnético terá um máximo e para $s|n| > 1$ um mínimo. Também podemos calcular a densidade de energia (4.68) analiticamente

$$\rho(r) = \frac{2v^2 n^2}{\left(1 + r^{2s|n|}\right)^{2+1/s}} \left(r^{2|n|-2} \left(1 - sr^{2s|n|}\right) + sr^{2s|n|-2} \left(1 + r^{2s|n|}\right)^{1/s} \right). \quad (4.75)$$

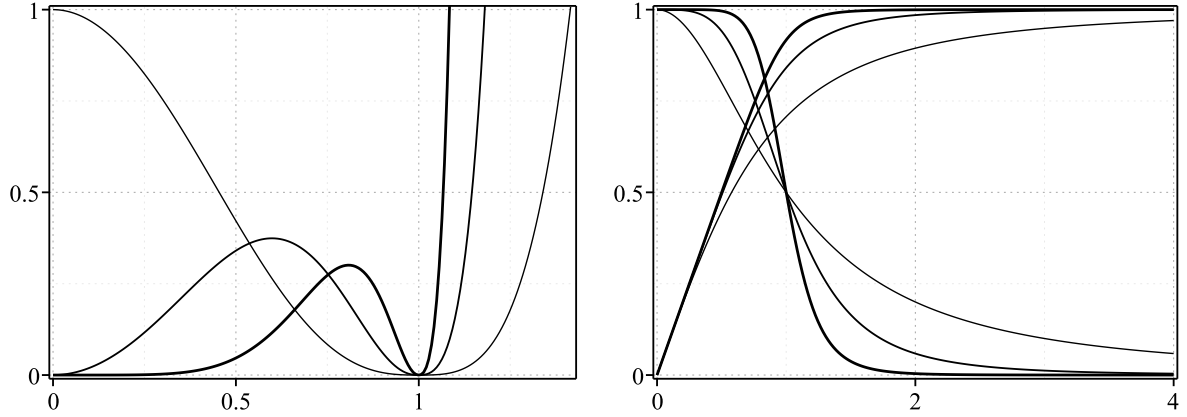


Figura 4.6 Potencial $V(|\varphi|)$ dado pela equação (4.71) no lado esquerdo e as soluções $g(r)$ (crescente) e $a(r)$ (decrescente) da (4.73) no lado direito, com $v = n = 1$ e $s = 1, 2, 4$, onde a espessura das linhas aumenta com s .

Nesse caso, as soluções serão topológicas, logo a energia será $E = 2\pi|n|v^2$. Tanto o campo magnético como a densidade de energia terão comportamento assintótico de longo alcance e seus gráficos podem ser vistos na figura 4.7, para $n = 1$ e alguns valores de s . Podemos ver por essa figura que para $s = 1$ é bastante diferente o comportamento dessas quantidades física na origem. Para $s = 1$ o campo magnético tem um máximo global na origem e para $s > 1$ será um mínimo global, a densidade de energia também terá uma modificação na origem, porém não é tão drástico como no campo magnético. Mostraremos o comportamento magnético por outra perspectiva, na figura 4.8 temos os gráficos no plano xy . Para $s = 1$ o centro é completamente preenchido, enquanto para $s > 1$ aparece um buraco e sua largura aumenta com s .

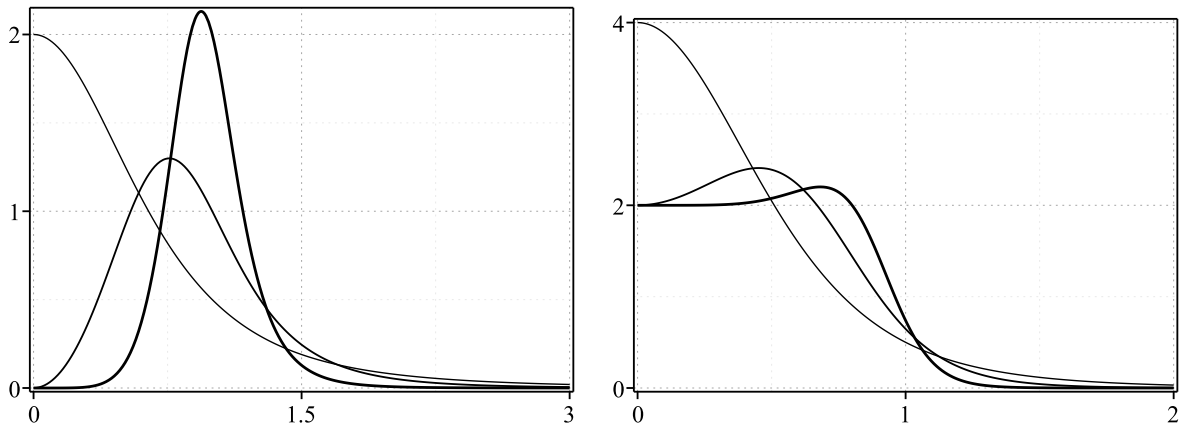


Figura 4.7 O lado esquerdo e direito serão respectivamente os campos magnéticos (4.74) e a densidades de energia (4.75), para $v = n = 1$ e $s = 1, 2, 4$, onde a espessura das linhas aumenta com s .



Figura 4.8 Campo magnético (4.74) no plano xy , para $v = n = 1$ e $s = 1, 2, 4$, da esquerda para direita.

Outras soluções analíticas com comportamentos distintos podem ser vistas nas referências [134, 135, 137], entretanto vale ressaltar que é difícil obter modelos de vórtices com soluções analíticas. Na maioria das vezes precisaremos recorrer a cálculos numéricos para resolver as equações de movimento. No próximo exemplo, estudaremos um modelo que também possui soluções e quantidades físicas com comportamentos assintóticos de longo alcance, mas não teremos soluções analíticas.

4.3.2 Exemplo Numérico

Vamos agora apresentar outro modelo estudado em [133], com a permeabilidade na forma

$$\mu(|\varphi|) = 2|\varphi|^2 \left| 1 - \frac{|\varphi|^2}{v^2} \right|^{l-1}, \quad (4.76)$$

onde l é um parâmetro real tal que $l \geq 1$. O caso particular em que $l = 1$ foi investigado na referência [114], onde a partir da permeabilidade magnética é possível obter as soluções $g(r)$ e $a(r)$ do modelo canônico com dinâmica de Chern-Simons, ver [138, 139]. No próximo capítulo estudaremos modelos com termo de Chern-Simons que suportam vórtices, mostraremos que no caso canônico, assim como em Maxwell, as soluções terão comportamento assintótico exponencial, semelhantes ao da equação (4.65). Para um l geral, o potencial (4.66) torna-se

$$V(|\varphi|) = v^4 |\varphi|^2 \left| 1 - \frac{|\varphi|^2}{v^2} \right|^{l+1}, \quad (4.77)$$

com mínimos em $|\varphi| = 0$ e $|\varphi| = v$, para $l = 1$ será um potencial do tipo $|\varphi|^6$. Quando $l > 1$, temos que $d^m V / dg^m|_{g=v} = 0$ com $m = 0, \dots, [l]$, onde $[z]$ é a função teto. Para

esse modelo, as equações diferenciais de primeira ordem (4.67) serão

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (4.78a)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm 2v^2 g^2 \left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right)^l. \quad (4.78b)$$

Como já foi dito, não conseguimos obter soluções analíticas para esse modelo. Fazendo uma análise perto da origem, definimos $g_o(r) \approx g(r \approx 0)$ e $a_o(r) \approx n - a(r \approx 0)$, que ao usar nas equações diferenciais de primeira ordem (4.78), obtemos

$$g_o(r) \propto r^{|n|} \quad \text{e} \quad a_o(r) \propto r^{2(|n|+1)}. \quad (4.79)$$

A densidade de energia (4.68) será

$$\rho(r) = 2g^2(r) \left(\frac{a^2(r)}{r^2} + v^4 \left| 1 - \frac{g^2(r)}{v^2} \right|^{l+1} \right), \quad (4.80)$$

lembrando que a energia não depende da forma que a função dielétrica tenha, mas sim das condições de contorno das soluções, que podem ser obtidas a partir da densidade de energia acima. Para esse modelo podemos ter soluções topológicas com $g_\infty = v$, $a_\infty = 0$ e energia $E = 2\pi|n|v^2$, como também não-topológicas com $g_\infty = v$, $a_\infty = 0$ e $E = 2\pi|n - a_\infty|v^2$. Entretanto, comentamos melhor sobre soluções não-topológicas no próximo capítulo, quando abordaremos os vórtices de Chern-Simons-Higgs. Iremos agora nos focar no comportamento assintótico das soluções topológicas quando $l > 1$, assintoticamente temos que $g_a(r) \approx v - g(r \gg 0)$ e $a_a(r) \approx a(r \gg 0)$, substituindo nas equações diferenciais de primeira ordem (4.78), podemos estimar essas funções como

$$g_a(r) \approx \frac{v}{2}(l-1)^{-\frac{2}{l-1}} (v^2 r)^{-\frac{2}{l-1}}, \quad (4.81a)$$

$$a_a(r) \approx \pm (l-1)^{-\frac{l+1}{l-1}} (v^2 r)^{-\frac{2}{l-1}}. \quad (4.81b)$$

Essas aproximações podem ser usadas para obter o comportamento assintótico do campo magnético e da densidade de energia

$$B(r \gg 0) \approx \pm 2v^4 (l-1)^{-\frac{2l}{l-1}} (v^2 r)^{-\frac{2l}{l-1}}, \quad (4.82a)$$

$$\rho(r \gg 0) \approx 4v^6 (l-1)^{-\frac{2(l+1)}{l-1}} (v^2 r)^{-\frac{2(l+1)}{l-1}}. \quad (4.82b)$$

Similarmente as soluções $g(r)$ e $a(r)$, essas duas quantidades físicas terão caudas que dependem de uma lei de potência em r , levando a ter característica de longo alcance. Na figura 4.9 mostramos o comportamento do potencial (4.77) e das soluções das equações diferenciais de primeira ordem (4.78) para $v = n = 1$ e alguns valores de l . O caso $l = 1$ está destacado para diferenciarmos melhor dos outros valores de l . Como pode ser visto, o

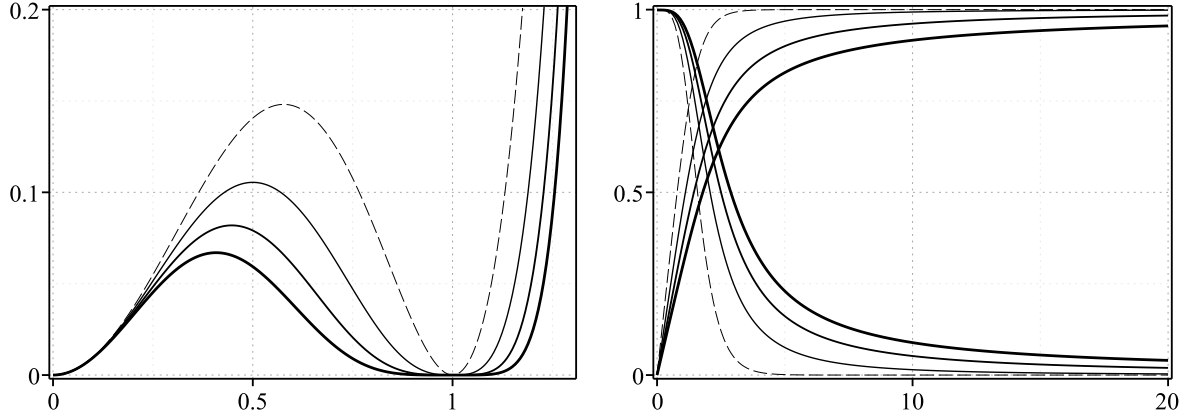


Figura 4.9 No lado esquerdo o potencial $V(|\varphi|)$ da equação (4.77) e do lado direito as soluções $g(r)$ (crescente) e $a(r)$ (decrescente) das equações (4.78) para os valores $l = 1, 2, 3, 4$, com mínimo em $v = 1$ e vorticidade positiva $n = 1$. As linhas tracejadas são para $l = 1$ enquanto as demais são para os outros valores, a espessura das linhas cresce com l

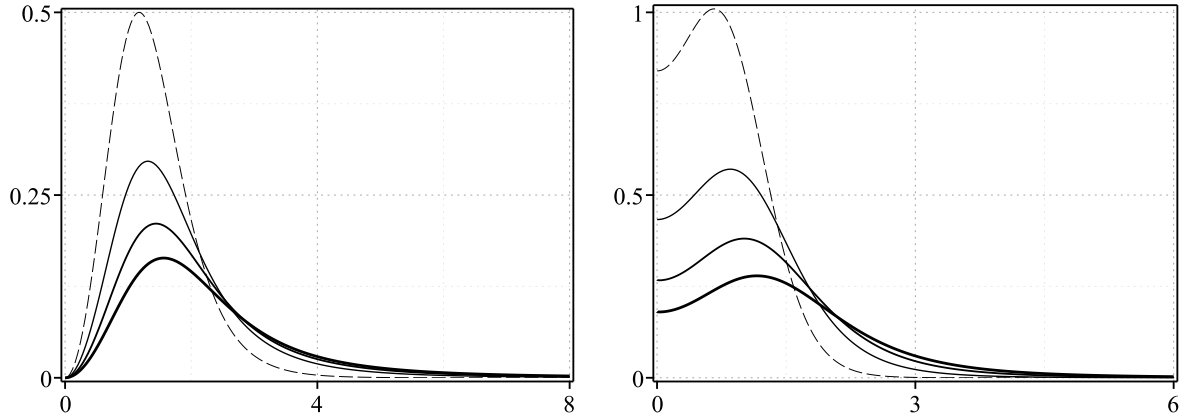


Figura 4.10 Campo magnético $B(r)$ e densidade de energia $\rho(r)$ para as soluções topológicas da figura 4.9.

parâmetro l controla o comportamento assintótico das soluções. Quanto maior o valor de l , maiores serão suas caudas. Analogamente para a figura 4.10, onde teremos os gráficos do campo magnético $B(r)$ e da densidade de energia (4.80).

Como já mencionamos, a função dielétrica nos permite gerar uma infinidade de modelos com características diferentes do modelo canônico. Modelos com permeabilidade magnética podem ser estudados em teorias com simetria extra [140–142]. Alguns desses modelos citados nas três últimas referências, são uma extensão dos modelos estudados em [143, 144].

4.4 Modelo com Fator Global

Assim como fizemos na subseção 2.3.2 para um campo escalar real, vamos agora considerar uma densidade lagrangiana com um fator global. Para isso tomamos $\mu(|\varphi|) = 1/f(|\varphi|)$, $M(|\varphi|) = f(|\varphi|)$ e $V(|\varphi|) = f(|\varphi|)U(|\varphi|)$ em (4.2) para escrevermos

$$\mathcal{L} = f(|\varphi|) \left(-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \overline{D_\alpha \varphi} D^\alpha \varphi - U(|\varphi|) \right), \quad (4.83)$$

onde $f(|\varphi|)$ e $U(|\varphi|)$ são funções arbitrárias do campo $|\varphi|$. A função $f(|\varphi|)$ faz o papel da função global, que está multiplicando um modelo canônico com potencial $U(\varphi)$, para $f(|\varphi|) = 1$ recuperamos o modelo da seção 4.2. Esse modelo foi estudado em [145], onde mostramos que para termos equações diferenciais de primeira ordem que satisfaçam as equações de movimento de (4.83), o potencial $U(|\varphi|)$ deve ser

$$U(|\varphi|) = \frac{2}{f^2(|\varphi|)} \left(\int d|\varphi| |\varphi| f(|\varphi|) \right)^2, \quad (4.84)$$

que é equivalente à equação (4.25). Para o ansatz, as equações diferenciais de primeira ordem (4.49) serão

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (4.85a)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm \sqrt{2U(g)}, \quad (4.85b)$$

lembrando que $U(g)$ vai depender de $f(g)$, conforme o vínculo (4.84). A densidade de energia (4.54) para as soluções da equação acima será

$$\rho(r) = 2f(g(r)) \left(\frac{a^2(r)g^2(r)}{r^2} + U(g(r)) \right). \quad (4.86)$$

Para determinarmos as condições de contorno nos extremos precisamos da forma de $f(g)$. Diferentemente dos modelos com permeabilidade da seção anterior, aqui não conseguiremos determinar a energia independentemente do fator global, pois o funcional (4.52) será

$$W(a, g) = -af(g)\sqrt{2U(g)}, \quad (4.87)$$

que depende de $f(g)$. Em outras palavras, precisamos saber a forma explícita do fator global para podermos determinar o potencial (4.84), verificarmos as condições de contorno pela densidade de energia (4.86) para então determinarmos a energia a partir de (4.53). Na referência [145] fizemos alguns exemplos que surgem a partir do fator global $f(|\varphi|)$, mostraremos um exemplo desses aqui.

4.4.1 Exemplo

Introduziremos o modelo que é dado pelo fator global

$$f(|\varphi|) = c \left(1 - p \sin \left(\frac{\pi |\varphi|^2}{v^2} \right) \right), \quad (4.88)$$

onde p é um parâmetro real definido no intervalo $p \in (-1, 1)$ para obter valores positivos de $f(|\varphi|)$. Neste caso, o potencial (4.84) torna-se

$$U(|\varphi|) = \frac{v^4}{2} \left(1 - p \sin \left(\frac{\pi |\varphi|^2}{v^2} \right) \right)^{-2} \left(1 - \frac{|\varphi|^2}{v^2} - \frac{p}{\pi} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi |\varphi|^2}{v^2} \right) \right) \right)^2, \quad (4.89)$$

em que a constante de integração foi escolhida para permitir a presença de um conjunto de mínimos em $|\varphi| = v$. Para $p = 0$ recuperamos o potencial $|\varphi|^4$, dado pela equação (4.58) do caso canônico. Esse potencial engendra um ponto que está sempre presente, independente do valor de p , que definimos como $|\varphi| = \tilde{g}$. É determinado pela equação algébrica

$$1 + \cos \left(\frac{\pi \tilde{g}^2}{v^2} \right) = \pi \left(1 - \frac{\tilde{g}^2}{v^2} \right) \sin \left(\frac{\pi \tilde{g}^2}{v^2} \right). \quad (4.90)$$

Infelizmente, não fomos capazes de resolver analiticamente. Usando procedimentos numéricos com $v = 1$, descobrimos $\tilde{g} = 0.5079$, com $U(\tilde{g}) = 0.2753$. Podemos ver o potencial (4.89) na figura 4.11 para $v = c = 1$ e alguns valores de p , o potencial que tinha um máximo em $g = 0$ passa a ser um mínimo para um determinado valor de p e teremos um máximo entre $0 < g < 1$.

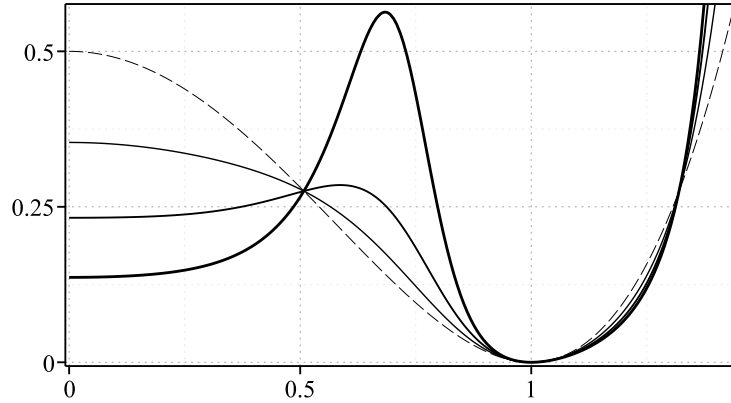


Figura 4.11 Potencial $U(|\varphi|)$ dado pela equação (4.89) para $v = 1$ e alguns valores de p . A linha tracejada representa $p = 0$ e as sólidas representam $p = 0.25, 0.5$ e 0.75 , com a espessura aumentando com p .

Nesse caso, as equações diferenciais de primeira ordem (4.85), tomams a formas

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (4.91a)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm v^2 \left(1 - p \sin \left(\frac{\pi g^2}{v^2} \right) \right)^{-1} \left(1 - \frac{g^2}{v^2} - \frac{p}{\pi} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi g^2}{v^2} \right) \right) \right). \quad (4.91b)$$

Mesmo que a função (4.88) introduza modificações no potencial, as equações diferenciais de primeira ordem na origem nos leva a comportamentos semelhantes do caso canônico,

$f(|\varphi|) = 1$, temos que

$$g(r \approx 0) \propto r^{|n|} \quad \text{e} \quad n - a(r \approx 0) \approx \frac{v^2}{2} \left(1 - \frac{2p}{\pi}\right) r^2. \quad (4.92)$$

A densidade de energia (4.86) toma forma

$$\rho(r) = 2c \left(1 - p \sin \left(\frac{\pi g^2(r)}{v^2}\right)\right) \left(\frac{a^2(r)g^2(r)}{r^2} + U(g(r))\right). \quad (4.93)$$

Esse modelo só suporta soluções topológicas, com as condições de contorno no infinito g_∞ e $a_\infty = 0$. O comportamento das soluções assintoticamente será exponencial, como no da equação (4.65). Podemos calcular energia através do funcional de energia (4.87), dada por

$$W(a, g) = -cv^2 a \left(1 - \frac{g^2}{v^2} - \frac{p}{\pi} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi g^2}{v^2}\right)\right)\right), \quad (4.94)$$

com energia $E = 2cv^2|n|(\pi - 2p)$. Na figura 4.12, temos as soluções $g(r)$ e $a(r)$ das equações diferenciais de primeira ordem (4.91) para $v, n = 1$ e alguns valores não negativos de p . As configurações que surgem com p negativo são muito semelhantes as do caso canônico, descrito pelas equações (4.59), logo, não trabalharemos com eles aqui. Ainda na figura 4.12, pode-se ver o campo magnético para os valores mencionados acima. Note que inicialmente o campo magnético é máximo na origem, quanto maior o valor de p este máximo vai se tornando um mínimo dando um máximo em outro valor de $r \neq 0$. Na densidade de energia também surge uma nova característica, veja a figura 4.13. Quando aumentamos o valor de p , a densidade de energia ganha uma estrutura interna, surge um pico para $r \neq 0$ e vai ficando cada vez mais alto enquanto p se aproxima de um.

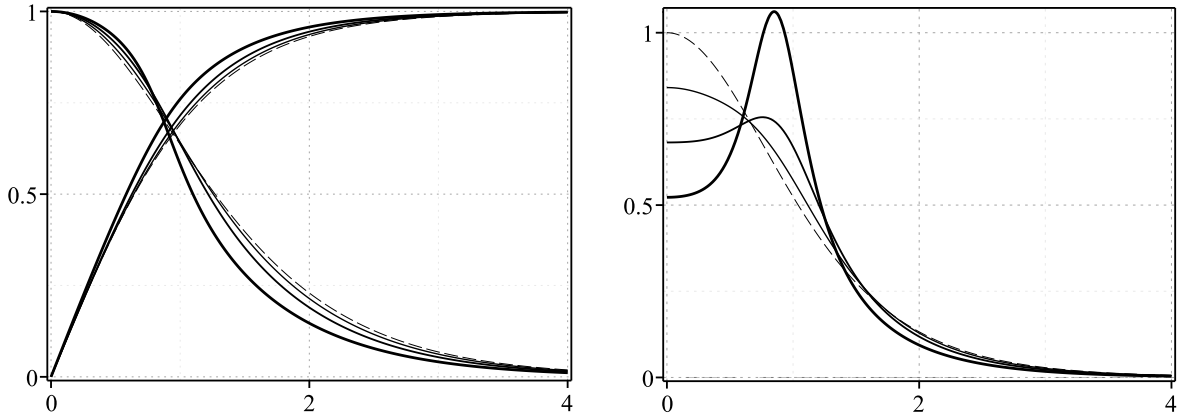


Figura 4.12 No lado esquerdo temos as soluções $g(r)$ (linhas ascendentes) e $a(r)$ (linhas descendentes) associada ao fator global (4.88) e no lado direito seus respectivos campos magnéticos $B(r)$ para $v = n = c = 1$ e alguns valores de p . A linha tracejada representa $p = 0$ e as sólidas representam $p = 0.25, 0.5$ e 0.75 , com a espessura aumentando com p .

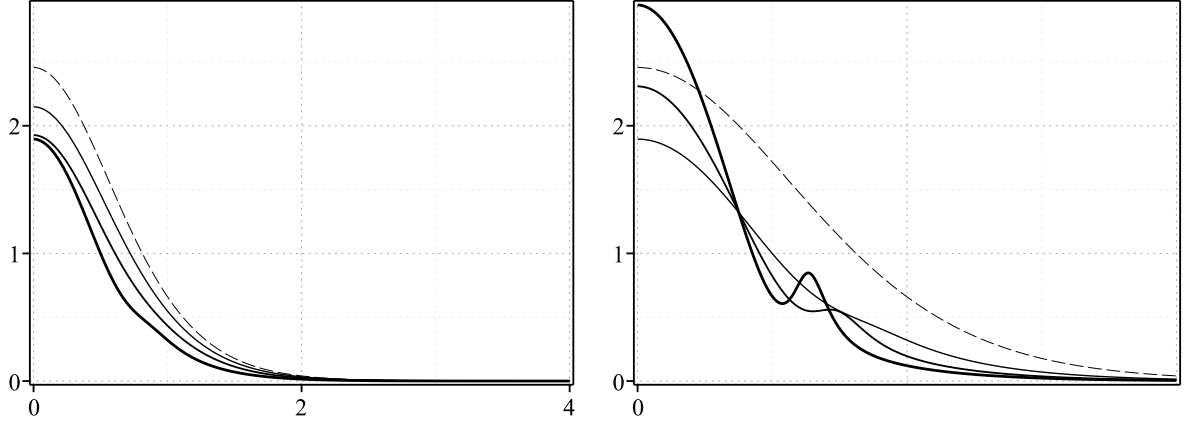


Figura 4.13 Densidade de energia (4.93) associado ao potencial (4.89) para $v = n = c$ e vários valores de p . Em ambos os lados a linha tracejada representa $p = 0$, as linhas sólidas no lado direito é para $p = 0.25, 0.5, 0.75$ e no lado direito para $p = 0.75, 0.9, 0.95$, onde a espessura das linhas aumenta com p .

Como vimos, o modelo (4.83) é diferente do estudado na seção anterior, onde consideramos apenas a função dielétrica. Nesse modelo, consideramos $M \neq 1$, porém, consideramos um vínculo entre as funções tal que $\mu(|\varphi|)M(|\varphi|) = 1$, com $M(\varphi) = f(|\varphi|)$. Podemos ver que a função $M(|\varphi|)$ pode modificar a energia das soluções, diferentemente do modelo com apenas a permeabilidade magnética. Existem modelos onde tem-se apenas a função $M(|\varphi|)$, com $\mu = 1$ no modelo geral (4.2), que suporta soluções do tipo vórtices. Podemos por exemplo, citar a referência [146], que tem soluções do tipo vacuumless.

Vórtices de Chern-Simons-Higgs

Como foi visto no capítulo anterior, os vórtices são eletricamente neutros, porém possuem um campo magnético localizado. Em 1986 apareceram alguns modelos que suportavam soluções do tipo vórtice carregado, como, por exemplo, adicionando um termo de Chern-Simons [147] ou considerando modelos não abelianos [148–150]. Porém, esses modelos são bastante complicados e não possuem equações diferenciais de primeira ordem, além disso, em particular na referência [148], os vórtices carregados não possuem energia finita. Em 1990, os autores Hong et al [138] e Jackiw et al [139, 151], mostraram que trocando o termo de Maxwell pelo de Chern-Simons é possível obter vórtices carregados com energia finita e que ainda teremos equações diferenciais de primeira ordem que minimizam a energia do sistema. Uma característica particularmente interessante desses vórtices é que sua carga é proporcional ao fluxo magnético.

5.1 Generalidades

Novamente consideraremos um campo complexo acoplado a um campo de calibre por uma simetria $U(1)$ em $(2+1)$ dimensões no espaço de Minkowski com assinatura $\text{diag}(+, -, -)$. Diferentemente do capítulo anterior, substituiremos o termo de Maxwell por um termo de Chern-Simons como sendo o termo da dinâmica para o campo de calibre. Teremos a ação $\int d^3x \mathcal{L}$, com densidade lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\gamma F_{\alpha\beta} + M(|\varphi|) \overline{D_\alpha \varphi} D^\alpha \varphi - V(|\varphi|), \quad (5.1)$$

onde $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ é o tensor de Levi-Civita e κ é uma constante que foi adicionada para manter a dimensionalidade da densidade lagrangiana, que em unidades naturais: $[\mathcal{L}] = \epsilon^3$ com $[\kappa] = \epsilon^1$. Assim como no modelo (4.2) do capítulo anterior, $M(|\varphi|)$ e $V(|\varphi|)$ são funções não negativas que dependem do campo $|\varphi|$, onde $M(|\varphi|)$ é adimensional e $[V(|\varphi|)] = \epsilon^3$. Essa lagrangiana pode não parecer invariante de calibre por conta do A_α que aparece no primeiro termo, entretanto, quando avaliamos esta transformação na ação $\mathcal{S} = \int d^3x \mathcal{L}$, verificamos que é invariante sob transformações de calibre. Aqui, não podemos fazer κ dependendo de $|\varphi|$, como no capítulo anterior com a permeabilidade magnética $\mu(|\varphi|)$, pois se fizermos $\kappa = \kappa(|\varphi|)$ esse modelo não será mais invariante de calibre. A densidade lagrangiana acima é uma generalização direta dos modelos estudado em [138, 139, 151], onde acrescentamos a função $M(|\varphi|)$ na dinâmica do campo escalar, veja as referências [152–154].

As equações de movimento para os campos φ e A_α serão, respectivamente,

$$D_\alpha (M(|\varphi|)D^\alpha \varphi) = \frac{\varphi}{2|\varphi|} \left(M_{|\varphi|} \overline{D_\alpha \varphi} D^\alpha \varphi - V_{|\varphi|} \right), \quad (5.2a)$$

$$\frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\gamma\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = J^\gamma, \quad (5.2b)$$

onde $J_\alpha = ieM(|\varphi|)(\overline{\varphi}D_\alpha \varphi - \varphi\overline{D_\alpha \varphi})$ é a 3-corrente, que também aparece no capítulo anterior na equação (4.5). Podemos expandir a última equação em duas

$$-\kappa B = J_0, \quad (5.3a)$$

$$\kappa \varepsilon^{ij} E_j = J^i, \quad (5.3b)$$

que são, respectivamente, a lei de Gauss e lei de Ampère. Pela lei de Gauss temos uma relação entre o campo magnético e a densidade de carga. Logo, fazendo uma integral em todo o espaço temos que o fluxo será proporcional a carga, ou seja,

$$Q = -\kappa \Phi. \quad (5.4)$$

Diferentemente dos vórtices de Maxwell-Higgs, aqui teremos vórtices carregados. O tensor energia-momento da densidade lagrangiana (5.1) é dado por

$$T_{\alpha\beta} = M(|\varphi|) \left(\overline{D_\alpha \varphi} D_\beta \varphi + D_\alpha \varphi \overline{D_\beta \varphi} - \eta_{\alpha\beta} \overline{D_\gamma \varphi} D^\gamma \varphi \right) + \eta_{\alpha\beta} V(|\varphi|), \quad (5.5)$$

onde cada componente representa uma quantidade física, assim como definimos em (4.9). Note que o termo de Chern-Simons não contribui para a densidade de energia. Aqui as componentes serão

$$T_{00} = M(|\varphi|) \left(|D_0 \varphi|^2 + |D_1 \varphi|^2 + |D_2 \varphi|^2 \right) + V(|\varphi|), \quad (5.6a)$$

$$T_{0i} = M(|\varphi|) \left(\overline{D_0 \varphi} D_i \varphi + D_0 \varphi \overline{D_i \varphi} \right), \quad (5.6b)$$

$$T_{ij} = M(|\varphi|) \left(\delta_{ij} \left(|D_0 \varphi|^2 - |D_1 \varphi|^2 - |D_2 \varphi|^2 \right) + \overline{D_i \varphi} D_j \varphi + D_i \varphi \overline{D_j \varphi} \right) - \delta_{ij} V(|\varphi|). \quad (5.6c)$$

Fazendo a redefinição dos campos como: $\varphi = |\varphi|e^{i\Lambda}$ e $A_\alpha = \tilde{A}_\alpha - (\partial_\alpha \Lambda)/e$, como feito anteriormente no capítulo anterior. A corrente será análoga: $J_\alpha = -2e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|) \tilde{A}_\alpha$. Podemos reescrever as leis de Gauss e Ampère (5.3) como

$$\kappa B = 2e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|) \tilde{A}_0, \quad (5.7a)$$

$$\kappa E^i = 2e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|) \varepsilon^{ij} \tilde{A}_j, \quad (5.7b)$$

e a densidade de energia (5.6a) como

$$\rho = M(|\varphi|) \left((\partial_0 |\varphi|)^2 + e^2 |\varphi|^2 \tilde{A}_0^2 + |D_1 \varphi|^2 + |D_2 \varphi|^2 \right) + V(|\varphi|). \quad (5.8)$$

Para fazer o formalismo de primeira ordem [34], usaremos a lei de Gauss (5.7a) para substituir $\tilde{A}_0$ na densidade de energia acima

$$\rho = M(|\varphi|) \left((\partial_0 |\varphi|)^2 + |D_1 \varphi|^2 + |D_2 \varphi|^2 \right) + \frac{\kappa^2 B^2}{4e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|)} + V(|\varphi|). \quad (5.9)$$

Podemos reesrever como

$$\begin{aligned} \rho = & M(|\varphi|) \left((\partial_0 |\varphi|)^2 + |(D_1 \pm iD_2) \varphi|^2 \right) \pm 2e|\varphi| M(|\varphi|) \varepsilon^{ij} A_j \partial_i |\varphi| \\ & \pm iM(|\varphi|) \varepsilon^{ij} (\partial_i \varphi) (\partial_j \bar{\varphi}) + \frac{\kappa^2}{4e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|)} \left(B \mp \frac{2e}{\kappa} |\varphi| \sqrt{M(|\varphi|) V(|\varphi|)} \right)^2 \\ & \mp \frac{\kappa}{e} \sqrt{\frac{V(|\varphi|)}{|\varphi|^2 M(|\varphi|)}} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para o vínculo

$$\frac{d}{d|\varphi|} \left(\sqrt{\frac{V(|\varphi|)}{|\varphi|^2 M(|\varphi|)}} \right) = -\frac{2e^2}{\kappa} |\varphi| M(|\varphi|), \quad (5.11)$$

o potencial deve ser

$$V(|\varphi|) = \frac{4e^4}{\kappa^2} |\varphi|^2 M(|\varphi|) \left(\int d|\varphi| |\varphi| M(|\varphi|) \right)^2. \quad (5.12)$$

Substituindo o potencial acima na densidade de energia (5.10) e integrando, obtemos

$$\begin{aligned} E = & \int dx^2 \left(M(|\varphi|) \left((\partial_0 |\varphi|)^2 + |(D_1 \pm iD_2) \varphi|^2 \right) + \frac{\kappa^2}{4e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|)} \right. \\ & \times \left(B \mp \frac{2e}{\kappa} |\varphi| \sqrt{M(|\varphi|) V(|\varphi|)} \right)^2 \mp \varepsilon^{ij} \partial_i \left(A_j \frac{\kappa}{e} \sqrt{\frac{V(|\varphi|)}{|\varphi|^2 M(|\varphi|)}} \right) \\ & \left. \pm 2|\varphi| M(|\varphi|) \varepsilon^{ij} (\partial_i |\varphi|) (\partial_j \Lambda) \mp i|\varphi|^2 M(|\varphi|) \varepsilon^{ij} (\partial_i \Lambda) (\partial_j \Lambda) \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde o último termo é zero se $|\varphi|^2 M(|\varphi|) = 0$ em $\varphi = 0$. Definindo

$$\mathcal{W}(|\varphi|) = \frac{\kappa}{e} \sqrt{\frac{V(|\varphi|)}{|\varphi|^2 M(|\varphi|)}}, \quad (5.14)$$

do qual $\mathcal{W}_\infty$ denota o valor de $\mathcal{W}(|\varphi|)$ para $r \rightarrow \infty$. Usando o vínculo (5.11) no penúltimo termo e fazendo uma integração por parte, teremos

$$\begin{aligned} E = & \int dx^2 \left(M(|\varphi|) \left((\partial_0 |\varphi|)^2 + |(D_1 \pm iD_2) \varphi|^2 \right) + \frac{\kappa^2}{4e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|)} \right. \\ & \times \left(B \mp \frac{2e}{\kappa} |\varphi| \sqrt{M(|\varphi|) V(|\varphi|)} \right)^2 \mp \mathcal{W}_\infty \oint_{r \rightarrow \infty} dx^i A_i \\ & \left. \mp \frac{1}{e} \mathcal{W}_\infty \oint_{r \rightarrow \infty} dx^i \partial_i \Lambda \pm \frac{1}{e} \int dx^2 \mathcal{W}(|\varphi|) \varepsilon^{ij} \partial_i \partial_j \Lambda \right) \\ = & \int dx^2 \left(M(|\varphi|) \left((\partial_0 |\varphi|)^2 + |(D_1 \pm iD_2) \varphi|^2 \right) + \frac{\kappa^2}{4e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|)} \right. \\ & \times \left(B \mp \frac{2e}{\kappa} |\varphi| \sqrt{M(|\varphi|) V(|\varphi|)} \right)^2 \pm \Phi \mathcal{W}_\infty \mp \frac{2\pi n}{e} (\mathcal{W}_\infty - \mathcal{W}(0)) \Big), \end{aligned} \quad (5.15)$$

cujo valor de energia mínima, é

$$E \geq E_B = |\Phi \mathcal{W}_\infty| - 2\pi \left| \frac{n}{e} \mathcal{W}_\infty \right| + 2\pi \left| \frac{n}{e} \mathcal{W}(0) \right|. \quad (5.16)$$

Para soluções topológicas temos que o fluxo é $\Phi = 2\pi n/e$, logo teremos apenas o último termo da energia E_B , já para soluções não topológicas $\mathcal{W}(\infty) = \mathcal{W}(0)$, os dois últimos termos se cancelam. Podemos escrever de maneira compacta a energia E_B acima como

$$E_B = |\Phi \mathcal{W}(0)|. \quad (5.17)$$

A energia é mínima ($E = E_B$) se as equações abaixo forem satisfeitas

$$\partial_0 |\varphi| = 0, \quad (5.18a)$$

$$(D_1 \pm i D_2) \varphi = 0, \quad (5.18b)$$

$$B \mp \frac{2e}{\kappa} |\varphi| \sqrt{M(|\varphi|) V(|\varphi|)} = 0, \quad (5.18c)$$

podemos ainda reescrever a última equação acima usando vínculo (5.11) como

$$B \pm \frac{4e^3}{\kappa^2} |\varphi|^2 M(|\varphi|) \int d|\varphi| |\varphi| M(|\varphi|) = 0. \quad (5.19)$$

Pela lei de Gauss (5.7a) temos que

$$\tilde{A}_0 = \pm \frac{1}{e} \sqrt{\frac{V(|\varphi|)}{|\varphi|^2 M(|\varphi|)}} = \mp \frac{2e}{\kappa} \int d|\varphi| |\varphi| M(|\varphi|). \quad (5.20)$$

Essas equações satisfazem as equações de movimento (5.2), como também fazem com que as componentes do tensor de cisalhamento (5.6c) sejam nulas ($T_{ij} = 0$). Além da densidade de energia, as únicas componentes não nulas do tensor energia-momento serão

$$T_{0i} = 2e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|) \tilde{A}_0 \tilde{A}_i = \kappa B \tilde{A}_i. \quad (5.21)$$

Vamos agora considerar ansatz usual para vórtices, considerando os campos na forma

$$\varphi = g(r) e^{in\theta}, \quad A_0 = h(r), \quad \vec{A} = \frac{\hat{\theta}}{er} (n - a(r)), \quad (5.22)$$

onde n é a vorticidade, com $[g(r)] = [h(r)] = \epsilon^{\frac{1}{2}}$ e $a(r)$ é adimensional. Para as seguintes condições de contorno

$$g(0) = 0, \quad h(0) = h_0, \quad a(0) = n, \quad g(\infty) \rightarrow g_\infty, \quad h(\infty) \rightarrow h_\infty, \quad a(\infty) \rightarrow a_\infty. \quad (5.23)$$

Os campos elétrico e magnético serão, respectivamente,

$$\vec{E} = -h' \hat{r} \quad \text{e} \quad B = -\frac{a'}{er}, \quad (5.24)$$

teremos apenas a componente radial do campo elétrico. O fluxo magnético pode ser calculado de maneira direta como

$$\Phi = \frac{2\pi}{e} (n - a_\infty), \quad (5.25)$$

que depende apenas das condições de contorno de $a(r)$. A densidade de carga e corrente serão

$$J_0 = -2e^2 g^2 M h \quad \text{e} \quad \vec{J} = \frac{2eag^2 M}{r} \hat{\theta}. \quad (5.26)$$

Para o ansatz (5.22) a equação de movimento para o campo escalar (5.2a) toma forma

$$\frac{1}{r} (rMg')' + gM \left(e^2 h^2 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} M_g \left(e^2 g^2 h^2 - g'^2 - \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} V_g = 0, \quad (5.27)$$

e as leis de Gauss e Ampère (5.3), respectivamente

$$\frac{\kappa a'}{er} + 2e^2 g^2 M h = 0, \quad (5.28a)$$

$$\kappa h' + \frac{2eag^2 M}{r} = 0. \quad (5.28b)$$

Usando essas equações em (5.26), temos que

$$J_0 = \frac{\kappa a'}{er} = -\kappa B \quad \text{e} \quad \vec{J} = -\kappa h' \hat{\theta} = \kappa E_r \hat{\theta}, \quad (5.29)$$

com carga

$$Q = -\frac{2\pi\kappa}{e} (n - a_\infty), \quad (5.30)$$

que é proporcional ao fluxo magnético, $Q = -\kappa\Phi$. A densidade de energia (5.6a) será

$$\rho = M \left(e^2 g^2 h^2 + g'^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) + V, \quad (5.31)$$

e as outras componentes do tensor energia-momento serão

$$T_{01} = -\frac{2eag^2 M h}{r} \sin(\theta), \quad (5.32a)$$

$$T_{02} = \frac{2eag^2 M h}{r} \cos(\theta), \quad (5.32b)$$

$$T_{12} = M \left(g'^2 - \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) \sin(2\theta), \quad (5.32c)$$

$$T_{11} = e^2 g^2 M h^2 + M \left(g'^2 - \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) \cos(2\theta) - V, \quad (5.32d)$$

$$T_{22} = e^2 g^2 M h^2 + M \left(\frac{a^2 g^2}{r^2} - g'^2 \right) \cos(2\theta) - V. \quad (5.32e)$$

Fazendo uma mudança de base para coordenadas polares, teremos

$$T_{0\theta} = \frac{2eag^2Mh}{r}, \quad (5.33a)$$

$$T_{rr} = e^2g^2Mh^2 + M \left(g'^2 - \frac{a^2g^2}{r^2} \right) - V, \quad (5.33b)$$

$$T_{\theta\theta} = e^2g^2Mh^2 + M \left(\frac{a^2g^2}{r^2} - g'^2 \right) - V, \quad (5.33c)$$

com $T_{0r} = T_{r\theta} = T_{\theta r} = 0$. Observe que essas componentes são independentes do ângulo. A lei de conservação $\partial_i T^{ij} = 0$, nessa forma será

$$(rT_{rr})' = T_{\theta\theta}. \quad (5.34)$$

Diferentemente dos vórtices de Maxwell-Higgs do capítulo anterior, aqui teremos momento e momento angular. Não conseguimos integrar o momento de maneira geral, porém conseguimos para o momento angular (4.12). Entretanto, precisamos usar a lei de Gauss (5.28a) nas componentes T_{0i} para obter

$$L = -\frac{\pi\kappa}{e^2} (n^2 - a_\infty^2). \quad (5.35)$$

Podemos usar o teorema de Derrick aqui também, usando a lei de Gauss (5.28a) na densidade de energia (5.31) para escrever

$$\rho = \frac{\kappa^2 a'^2}{4e^4 r^2 g^2 M} + M \left(g'^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) + V. \quad (5.36)$$

Fazendo a reescala $r \rightarrow \lambda r$ nas soluções $g(r)$, $h(r)$ e $a(r)$, teremos $g(r) \rightarrow g^{(\lambda)} = g(\lambda r)$, $h(r) \rightarrow h^{(\lambda)} = h(\lambda r)$ e $a(r) \rightarrow a^{(\lambda)} = a(\lambda r)$. Integrando a densidade de energia acima para as soluções reescalada, temos a energia reescalada

$$\begin{aligned} E^{(\lambda)} &= 2\pi \int r dr \left(\frac{\kappa^2}{4e^4 r^2 g^2 M} \left(\frac{\partial a^{(\lambda)}}{\partial r} \right)^2 + M \left(\left(\frac{\partial g^{(\lambda)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{a^{(\lambda)2} g^{(\lambda)2}}{r^2} \right) + V \right) \\ &= 2\pi \int z dz \left(\frac{\lambda^2 \kappa^2}{4e^4 z^2 g^2 M} \left(\frac{\partial a}{\partial z} \right)^2 + M \left(\left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^2 + \frac{a^2 g^2}{z^2} \right) + \lambda^{-2} V \right), \end{aligned} \quad (5.37)$$

onde $z = \lambda r$, minimizamos para

$$\left. \frac{\partial E^{(\lambda)}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = 4\pi \int z dz \left(\frac{\kappa^2 a'^2}{4e^4 z^2 g^2 M} - V \right) = 0. \quad (5.38)$$

Considerando que as componentes T_{ij} da equação (5.32) sejam axialmente simétricas, teremos

$$g'^2 = \frac{a^2 g^2}{r^2}, \quad (5.39)$$

que faz com que $T_{12} = 0$ e a pressão $T_{11} = T_{22} = T_{rr} = T_{\theta\theta} = \sigma$ sejam dadas por

$$\sigma = e^2 g^2 M h^2 - V = \frac{\kappa^2 a'^2}{4e^4 r^2 g^2 M} - V, \quad (5.40)$$

que pela conservação do tensor energia-momento $\partial_i T^{ij} = 0$, temos que ter σ seja uma constante. Pela integral (5.38), essa constante deve ser nula $\sigma = 0$. Fazendo com que tenhamos soluções de pressão nula, essa condição nos leva a

$$\frac{a'^2}{e^2 r^2} = \frac{4e^2 g^2 M V}{\kappa^2}. \quad (5.41)$$

Levando isso em conta, teremos que nos certificar se de fato é um mínimo. Logo, fazemos o teste da derivada segunda,

$$\left. \frac{\partial^2 E^{(\lambda)}}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=1} = 4\pi \int z dz \left(\frac{\kappa^2 a'^2}{4e^4 z^2 g^2 M} + 3V(g) \right) = 16\pi \int z dz V(g) > 0 \quad (5.42)$$

será mínimo desde que a parcela da energia potencial seja positiva. Pelo argumento de Derrick, temos que as soluções tenham pressão nula para que sejam estáveis por reescala, além disso, conseguimos obter equações diferenciais de primeira ordem

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (5.43a)$$

$$-\frac{a'}{er} = \pm \frac{2e}{\kappa} g \sqrt{MV}, \quad (5.43b)$$

que para o vínculo (5.11), resolvem as equações de movimento (4.37) e (4.37), desde que

$$h = \pm \frac{1}{e} \sqrt{\frac{V}{g^2 M}} = \mp \frac{2e}{\kappa} \int dg g M. \quad (5.44)$$

A equação diferencial de primeira ordem (5.43a) é análoga à do capítulo anterior para vórtices de Maxwell-Higgs, veja a equação (4.49a). Pelas condições de contorno (5.23) na origem, podemos fazer a aproximação (4.55) para obter $g(r \approx) \propto r^{|n|}$. O conjunto das três últimas equações resolve completamente o problema para um potencial na forma (5.12), os sinais de mais ou menos vai depender da vorticidade, n positivo ou negativo, e são relacionadas por $a(r) \rightarrow -a(r)$ e $h(r) \rightarrow -h(r)$.

O método de Bogomol'nyi pode ser realizado para obter essas equações, ou então, substituir o ansatz (5.22) nas equações (5.18) e (5.20). Por questões didáticas irei desenvolver esse procedimento de forma breve, escrevendo a densidade de energia (5.36) como

$$\rho = M \left(g' \mp \frac{ag}{r} \right)^2 + \frac{\kappa^2}{4e^2 g^2 M} \left(\frac{a'}{er} \pm \frac{2eg}{\kappa} \sqrt{MV} \right)^2 \pm \frac{1}{r} \left(2agMg' - \frac{\kappa}{e^2} \sqrt{\frac{V}{g^2 M}} a' \right), \quad (5.45)$$

e considerando o vínculo (5.11), os dois últimos termos formam uma derivada total. Logo

$$\rho = M \left(g' \mp \frac{ag}{r} \right)^2 + \frac{\kappa^2}{4e^2 g^2 M} \left(\frac{a'}{er} \pm \frac{2e}{\kappa} g \sqrt{MV} \right)^2 \pm \frac{1}{r} W', \quad (5.46)$$

com funcional de energia

$$W(a, g) = -\frac{\kappa}{e^2} a \sqrt{\frac{V}{g^2 M}} = 2a \int dg g M, \quad (5.47)$$

e energia mínima

$$E \geq E_B = 2\pi |W(a(\infty), g(\infty)) - W(a(0), g(0))|, \quad (5.48)$$

dependendo apenas das condições de contorno de g e a . A energia é mínima quando as equações diferenciais de primeira ordem são satisfeitas. A densidade de energia (5.36) para essas soluções pode ser escrita apenas em termos das funções g e a como

$$\rho = \frac{2a^2 g^2 M}{r^2} + 2V, \quad (5.49)$$

onde podemos determinar as condições de contorno de a no infinito e determinar o valor a_∞ da equação (5.23). Os valores de h_0 e h_∞ serão determinados a partir da equação (5.44), que dependerá de g .

Podemos trabalhar com campos adimensionais, fazendo a reescala

$$\varphi \rightarrow \frac{\kappa}{e} \varphi, \quad A_\alpha \rightarrow \frac{\kappa}{e} A_\alpha, \quad v \rightarrow \frac{\kappa}{e} v, \quad x_\alpha \rightarrow \frac{1}{\kappa} x_\alpha, \quad \mathcal{L} \rightarrow \frac{\kappa^4}{e^2} \mathcal{L}. \quad (5.50)$$

Logo, tomamos $e = \kappa = 1$ sem perda de generalidade.

5.2 Modelo Canônico

Consideraremos o modelo estudado em [138, 139, 151], que é um caso particular da densidade lagrangiana (5.1). O modelo canônico é obtido quando a função $M(|\varphi|)$ é constante, por conveniência tomaremos $M = 1$. Assim como no capítulo anterior, estudaremos um potencial que nos levará a equações diferenciais de primeira ordem. Nesse caso, o potencial (5.12) será

$$V(|\varphi|) = |\varphi|^2 (v^2 - |\varphi|^2)^2, \quad (5.51)$$

onde v é um parâmetro que envolve a quebra de simetria do modelo que surge da constante de integração. Diferentemente do modelo canônico para vórtices de Maxwell-Higgs estudado na seção 4.2, aqui teremos um potencial do tipo $|\varphi|^6$ com um mínimo em $|\varphi| = 0$ e um conjunto de mínimos em $|\varphi| = v$, o máximo é localizado em $|\varphi| = v/\sqrt{3}$, com

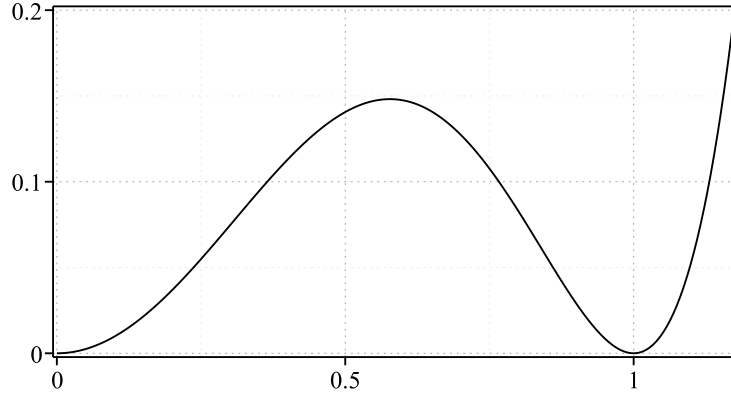


Figura 5.1 Potencial $V(|\varphi|)$ da equação (5.51) com $v = 1$.

$V(v/\sqrt{3}) = 4v^6/27$. Esse potencial pode ser visto na figura 5.1 para $v = 1$. Lembrando que existe uma simetria de rotação, esta imagem é um corte longitudinal radial.

Para estudar soluções do tipo vórtices vamos considerar o ansatz (5.22). Para determinarmos as funções $g(r)$, $h(r)$ e $a(r)$ precisamos inicialmente resolvermos as equações diferenciais de primeira ordem (5.43) para obtermos $g(r)$ e $a(r)$. A função $h(r)$ é obtida quando substituímos as soluções em (5.44). Nesse caso as equações diferenciais de primeira ordem (5.43) serão

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (5.52a)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm 2g^2(v^2 - g^2). \quad (5.52b)$$

Assim como nos vórtices de Maxwell-Higgs não conseguimos obter soluções analíticas para essas equações, porém podemos usar a aproximação (4.55) para obter o comportamento das soluções próximo à origem, com

$$g_o(r) \propto r^{|n|} \quad \text{e} \quad a_o(r) \propto r^{2(1+|n|)}. \quad (5.53)$$

Obtemos a função $h(r)$ em termos de $g(r)$ a partir da equação (5.44), que nos leva a

$$h(r) = \pm (v^2 - g^2(r)). \quad (5.54)$$

Como na origem $g_0 = 0$, temos que $h_0 = \pm v^2$, com comportamento $h_0 - h(r \approx 0) \propto r^{2|n|}$. O valor dessa função no infinito vai depender da condição de contorno de g_∞ . A partir da equação (5.24), calculamos a componente radial do campo elétrico e o campo magnético

$$E_r(r) = \frac{2a(r)g^2(r)}{r} \quad \text{e} \quad B(r) = \pm 2g^2(r)(v^2 - g^2(r)). \quad (5.55)$$

A densidade de energia (5.49) é dada por

$$\rho(r) = 2g^2(r) \left(\frac{a^2(r)}{r^2} + (v^2 - g^2(r))^2 \right), \quad (5.56)$$

podemos ter soluções topológicas, com $g_\infty = v$ e $a_\infty = 0$, como também não-topológicas, com $g_\infty = 0$ e $a_\infty \neq 0$, ver referência [151]. Para soluções topológicas, a função $g(r)$ será crescente, como já vimos nos exemplos do capítulo anterior. Já a função $a(r)$ poderá ser crescente ou decrescente, dependendo da vorticidade. Diferentemente das soluções topológicas, para as não-topológicas, a função $g(r)$ parte do zero, crescerá até certo valor máximo, tal que, $g(r_m) = g_m$. Onde o ponto r_m pode ser obtido quando $a(r_m) = 0$. Neste ponto, derivada da função $g(r)$ é nula, em seguida, a função $g(r)$ decresce até alcançar novamente o zero, veja a equação (5.52a). Para que isso aconteça, a função $a(r)$ deverá trocar de sinal em r_m . Para vorticidade positiva, teremos $a_\infty < 0$ e para negativa, $a_\infty > 0$. O valor da função $h(r)$ da equação (5.54) no infinito será, $h_\infty = 0$ para soluções topológicas e $h_\infty = h_0 = \pm v^2$ para soluções não topológicas. O funcional de energia (5.47) será

$$W(a, g) = -a(v^2 - g^2). \quad (5.57)$$

A energia vai depender das condições de contorno, para soluções topológicas $E = 2\pi|n|v^2$ e não topológicas $E = 2\pi|n - a_\infty|v^2$.

Inicialmente iremos focar nas soluções topológicas. Assintoticamente podemos escrever $v - g(r \gg 0) \approx g_a(r)$ e $a(r \gg 0) \approx a_a(r)$. Ao substituírmos essa aproximação nas equações diferenciais de primeira ordem (5.52) e considerarmos apenas as contruibuições lineares de $g_a(r)$ e $a_a(r)$, obtemos

$$g_a(r) \propto K_0(2v^2r) \quad \text{e} \quad a_a(r) \propto rK_1(2v^2r). \quad (5.58)$$

Essas funções terão comportamento exponencial do tipo

$$g_a \propto \frac{e^{-2v^2r}}{\sqrt{r}} \quad \text{e} \quad a_a \propto \sqrt{r}e^{-2v^2r}. \quad (5.59)$$

Podemos também fazer uma análise para solução $h(r)$ da equação (5.54), onde $h(r \gg 0) \propto K_0(2v^2r)$, que como foi dito ainda agora, também terá decaimento do tipo exponencial. O comportamento assintótico das soluções topológicas para vórtices de Chern-Simons-Higgs com dinâmica canônica é similar ao de Maxwell-Higgs, confira pela equação (4.65). Resolvemos as equações diferenciais de primeira ordem (5.52) numericamente para as condições de contorno $g_\infty = 1$, $a_\infty = 0$ e vorticidade positiva $n = 1$ para obtermos as soluções topológicas da figura 5.2. Podemos ver também o comportamento da função $h(r)$ dado pela equação (5.54). A componente radial do campo elétrico e o campo magnético da equação (5.55) para essas soluções podem ser vistos na figura 5.3. Podemos ver o comportamento da densidade de energia (5.56) na figura 5.4.

Agora fazendo uma análise para as soluções não topológicas, temos que assintoticamente: $g(r \gg 0) \approx g_a(r)$ e $a(r \gg 0) - a_\infty \approx a_a(r)$. Pelas equações diferenciais de primeira ordem (5.52), temos que

$$g_a(r) \propto r^{-|a_\infty|} \quad \text{e} \quad a_a(r) \propto r^{-2(|a_\infty|-1)}. \quad (5.60)$$

Fazendo um procedimento parecido para a solução $h(r)$ dada pela equação (5.54), temos que $h_\infty - h(r \gg 0) \propto r^{-2|a_\infty|}$. As soluções numéricas podem ser vistas na figura 5.5

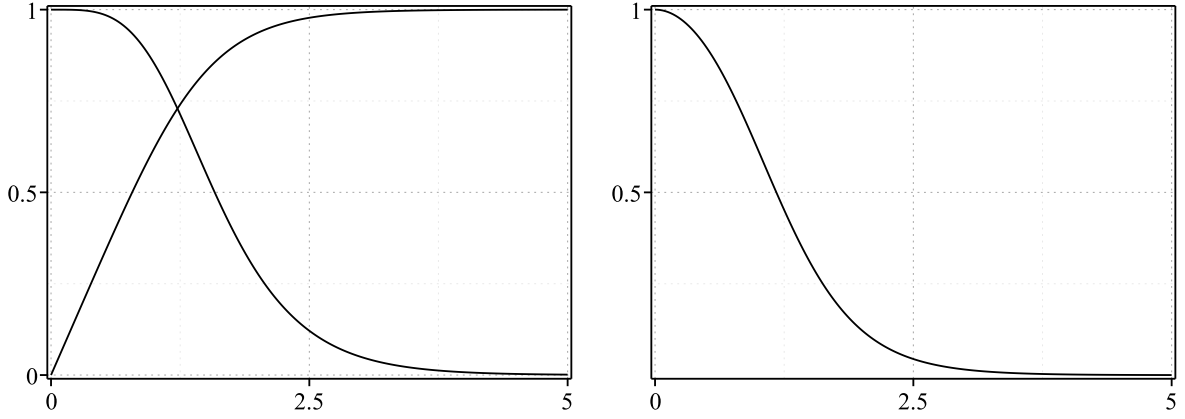


Figura 5.2 No lado esquerdo temos as soluções topológicas $g(r)$ (crescente) e $a(r)$ (decrecente) da equação (5.52), para $v = n = 1$. No lado direito temos a função $h(r)$ dado pela equação (5.54).

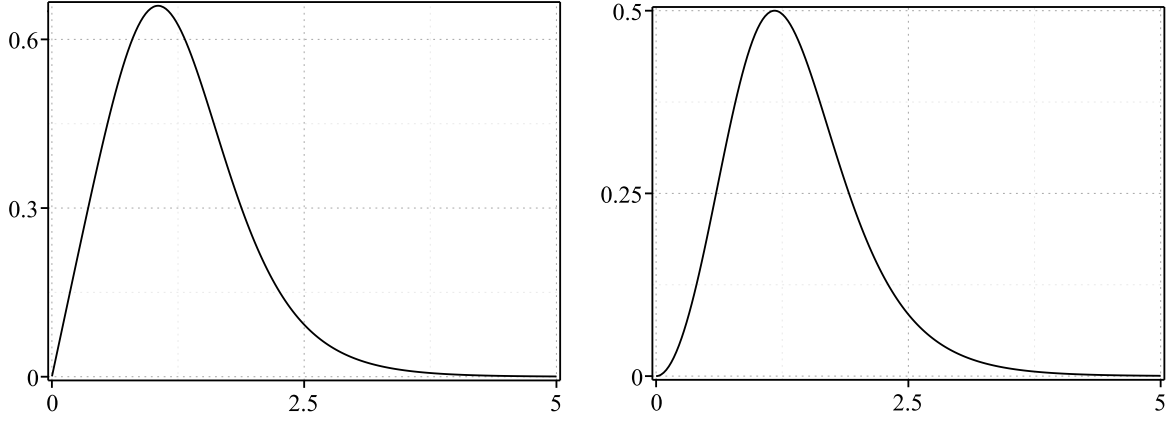


Figura 5.3 Componente radial do campo elétrico $E_r(r)$ no lado esquerdo e no lado direito o campo magnético $B(r)$ dado pela equação (5.55) para as soluções topológicas com $v = n = 1$.

para as condições de contorno g_∞ , $a_\infty \approx -4.5, -4$ e -3.5 , com $v = n = 1$. Note que essas soluções são bastantes diferentes das soluções topológicas da figura 5.2. Como já foi comentado, a solução $g(r)$ será um ponto de máximo quando $a(r)$ troca de sinal. Ainda na figura 5.5 teremos a função $h(r)$ da equação (5.54) para as soluções não-topológicas para as condições de contorno mencionadas acima. Podemos ver a componente do campo elétrico e o campo magnético da equação (5.55) na figura 5.6, a componente radial do campo elétrico $E_r(r)$ troca de sinal com $a(r)$, já o campo magnético será um mínimo nesse ponto e terá dois máximos em outros valores de r . Assim como o campo magnético, a densidade de energia (5.56) para essas soluções terá um mínimo quando $a(r)$ zero e dois picos, veja na figura 5.7.

Vale ressaltar que esses comportamentos valem para o modelo canônico ($M = 1$). Para modelos com $M(|\varphi|) \neq 1$, onde essa função depende do módulo do campo escalar $|\varphi|$,

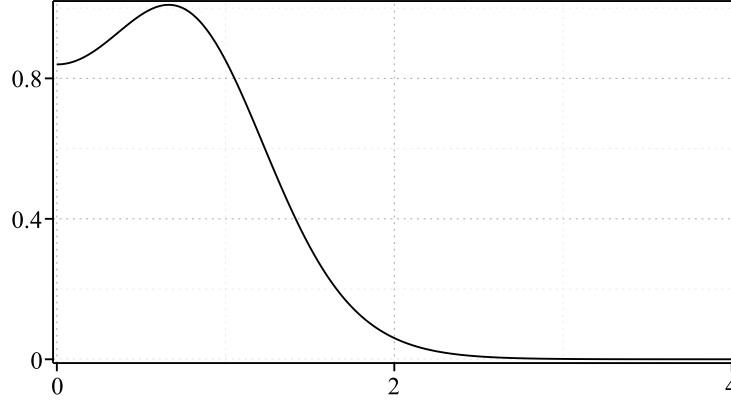


Figura 5.4 Densidade de energia $\rho(r)$ da equação (5.56) para as soluções topológicas com $v = n = 1$.

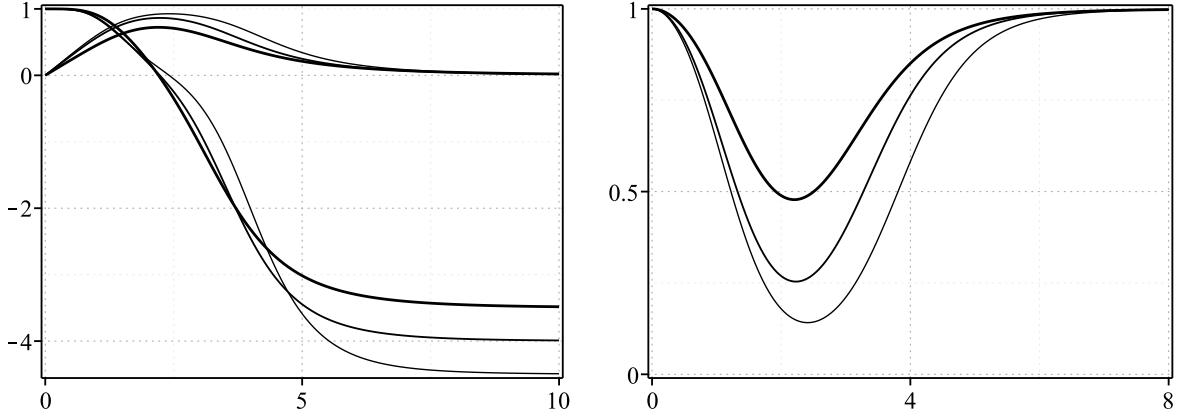


Figura 5.5 Soluções não-topológicas $g(r)$ (crescente/decrecente) e $a(r)$ (decrecente) da equação (5.52), para $v = n = 1$ e $a_\infty \approx -4.5, -4$ e -3.5 , no lado esquerdo. Função $h(r)$ da equação (5.54) no lado direito, a espessura das linhas em ambas figura aumenta com a_∞ .

podemos ter soluções e quantidades físicas com outras características, veja as referências [120, 128, 133, 146, 153–157]. Em [128] temos vórtices com anel, já em [146] soluções do tipo vacuumless. Nas referências [155, 157] tem-se soluções compactas, porém, em [155] as soluções são não-topológicas, todavia, as soluções serão analíticas, assim como em [156]. Os modelos da referência [133] serão discutidos na próxima seção.

Como foi dito acima, para um dado $M(|\varphi|)$ teremos diversos modelos com soluções distintas. Entretanto seguiremos um caminho diferente aqui, partiremos com soluções já conhecidas e tentaremos reconstruir a função $M(|\varphi|)$ que nos leva a essas soluções.

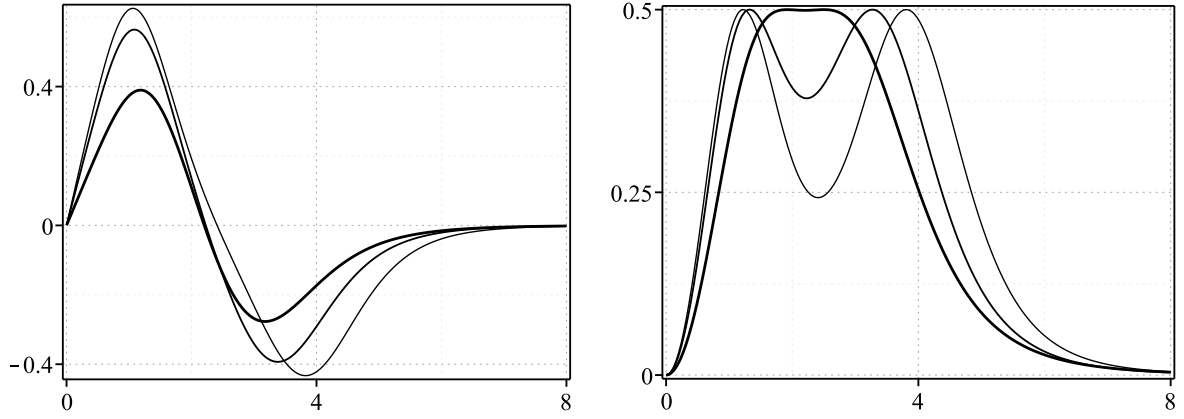


Figura 5.6 Componente radial do campo elétrico $E_r(r)$ no lado esquerdo e no lado direito o campo magnético $B(r)$ dado pela equação (5.55) para as soluções não-topológicas da figura 5.5.

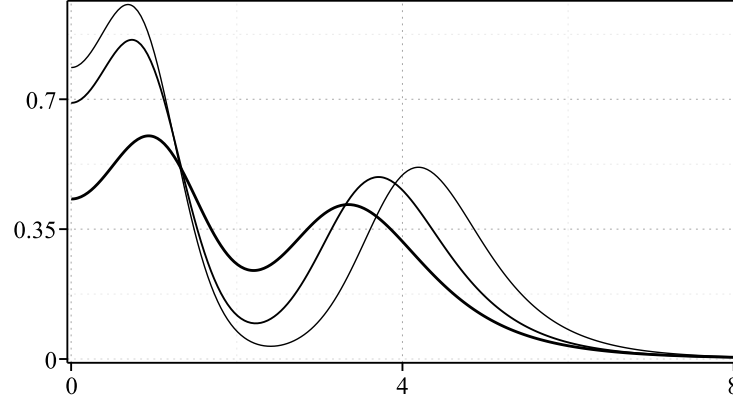


Figura 5.7 Densidade de energia $\rho(r)$ da equação (5.56) para as soluções não-topológicas da figura 5.5.

5.3 Reconstruindo Modelos

Como já foi mencionado anteriormente, as equações diferenciais de primeira ordem (5.43) para vórtices de Chern-Simons-Higgs são similares as equações (4.49) para Maxwell-Higgs. Poderíamos escrevê-las como

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (5.61a)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm f(g), \quad (5.61b)$$

onde $f(g)$ é uma função do campo escalar $|\varphi| = g$ e vai depender da densidade lagrangiana que escolhermos. Isso nos permite encontrarmos modelos em (4.2) e (5.1) com as mesmas soluções e campo magnético. Deste modo, podemos, por exemplo, usar as soluções estudadas no capítulo anterior e reconstruir o modelo no caso de Chern-Simons-Higgs.

Considerando que temos um $f(g)$ de algum modelo de Maxwell-Higgs e comparando com a equação (5.43b), teremos

$$f(g) = -4g^2 M(g) \int dg g M(g). \quad (5.62)$$

A partir dessa equação, podemos relacionar ambos os modelos, para um $f(g)$ conhecido, podemos obter a forma de $M(g)$ por

$$M(g) = \frac{f(g)}{2g^2} \left(-2 \int dg \frac{f(g)}{g} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.63)$$

Deve-se ter cuidado com essa integração, pois a constante de integração deve ser escolhida corretamente para que a função acima não seja negativa no intervalo em que a solução $g(r)$ existe. Além disso, também deve levar a modelos com energia finita não negativa. Neste caso, o potencial (5.12) pode ser calculado a partir da equação (5.62) como

$$V(g) = \frac{1}{4} \frac{f^2(g)}{g^2 M(g)}. \quad (5.64)$$

A função h da equação (5.44) será

$$h = \pm \frac{1}{2} \frac{f(g)}{g^2 M(g)}, \quad (5.65)$$

e funcional de energia (5.47) toma a forma

$$W(a, g) = -a \frac{f(g)}{2g^2 M(g)}. \quad (5.66)$$

Em seguida faremos um exemplo para mostrar como funciona este mecanismo de reconstrução de modelos.

5.3.1 Exemplo

Vamos, por exemplo, considerar os modelos estudado na seção 4.3, que nos leva a modelos com soluções e quantidades físicas de longo alcance. O exemplo analítico 4.3.1 nos leva a modelos bastantes exóticos, com potenciais dependendo de uma função hipergeométrica, conforme mostramos na referência [133]. Vale ressaltar que o procedimento mostrado acima funciona nesse caso, apesar de não termos uma forma elegante para as funções envolvidas no problema. Entretanto, para o exemplo numérico 4.3.2, temos que as equações diferenciais de primeira ordem (5.61) serão

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (5.67a)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm 2v^2 g^2 \left(1 - \frac{g^2}{v^2} \right)^l, \quad (5.67b)$$

logo, temos que

$$f(g) = 2v^2 g^2 \left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right)^l. \quad (5.68)$$

Lembrando que l é um parâmetro real com $l \geq 1$ e quando $l = 1$ recuperamos as soluções estudadas em [138, 139, 151]. Já para $l > 1$, teremos soluções de longo alcance, com comportamentos assintóticos, $g_a(r) \approx v - g(r \gg 0)$ e $a_a(r) \approx a(r \gg 0)$, dados por

$$g_a(r) \approx \frac{v}{2}(l-1)^{-\frac{2}{l-1}} (v^2 r)^{-\frac{2}{l-1}}, \quad (5.69a)$$

$$a_a(r) \approx \pm(l-1)^{-\frac{l+1}{l-1}} (v^2 r)^{-\frac{2}{l-1}}, \quad (5.69b)$$

que também nos levam a um campo magnético com potências assintóticas de r

$$B(r \gg 0) \approx \pm 2v^4(l-1)^{-\frac{2l}{l-1}} (v^2 r)^{-\frac{2l}{l-1}}. \quad (5.70)$$

Como forma de recordação, na figura 5.8 mostramos algumas soluções numéricas para as equações (5.67), assim como seus respectivos campo magnético $B(r)$.

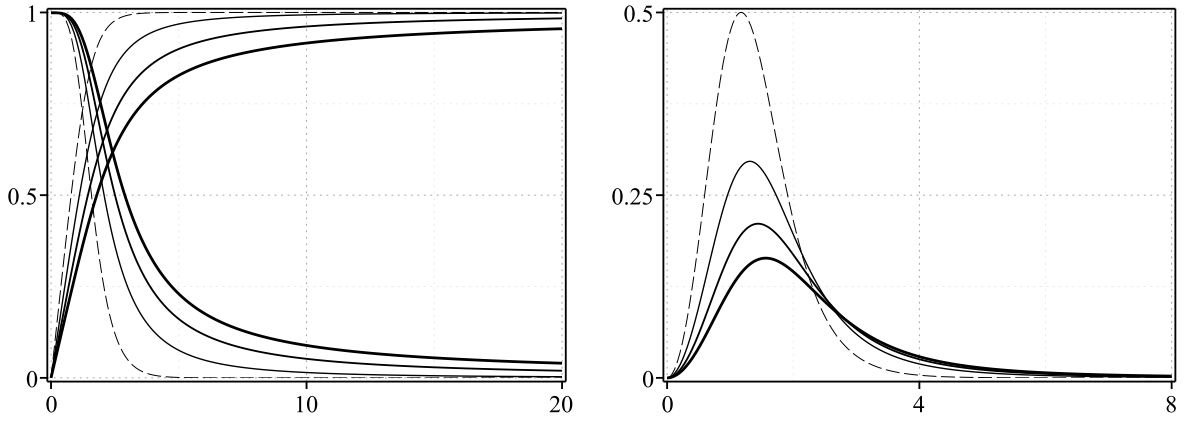


Figura 5.8 Soluções $g(r)$ (crescente) e $a(r)$ (decréscante) da equação (5.67) no lado direito e no lado esquerdo seus respectivos campo magnético $B(r)$, para $v = n = 1$, $l = 1, 2, 3$ e 4 , onde o tracejado é para $l = 1$ e as linhas sólidas para os outros valores de l , com a espessura aumentando com l .

Para a função $f(g)$ dada por (5.68), obtemos um $M(g)$ a partir da equação (5.63) bastante satisfatório, dado por

$$M(g) = \sqrt{\frac{l+1}{2}} \left|1 - \frac{g^2}{v^2}\right|^l \left[C + \left|1 - \frac{g^2}{v^2}\right|^{l+1} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.71)$$

onde C é uma constante real e não negativa, que apareceu da integração envolvida na reconstrução. O potencial (5.64) torna-se

$$V(g) = \sqrt{\frac{2}{l+1}} v^4 g^2 \left|1 - \frac{g^2}{v^2}\right|^l \sqrt{C + \left|1 - \frac{g^2}{v^2}\right|^{l+1}}. \quad (5.72)$$

Esse potencial tem um mínimo em $g = 0$ e um conjunto de mínimos em $g = v$, independentemente do valor de C . Mostraremos que $C = 0$ é um caso especial, trabalharemos com ele depois. Por ora consideraremos apenas $C > 0$, nessa situação temos que $d^m V/dg^m|_{g=v} = 0$ com $m = 0, \dots, [l-1]$, para $l = 1$ teremos as mesmas soluções topológicas do modelo canônico da seção 5.2, com comportamento assintótico exponencial (5.59). Porém, $M \neq 1$ e dependerá de C , assim como o potencial $V(g)$. A solução $h(r)$ dado pela equação (5.65), será

$$h(r) = \pm v^2 \sqrt{\frac{2}{l+1}} \sqrt{C + \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^{l+1}}, \quad (5.73)$$

com $h_0 = \pm v^2 \sqrt{2(C+1)/(l+1)}$. O comportamento na origem será o mesmo de antes do modelo canônico, veja abaixo da equação (5.54). A partir da equação (5.24), podemos escrever a componente radial do campo elétrico como

$$E_r(r) = \sqrt{2(l+1)} \frac{a(r)g^2(r)}{r} \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^l \left[C + \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^{l+1} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.74)$$

o campo magnético será o mesmo do exemplo 4.3.2. A densidade de energia (5.49) é dada por

$$\begin{aligned} \rho(r) = & \sqrt{2(l+1)} g^2(r) \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^l \left[C + \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^{l+1} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ & \times \left(\frac{a^2(r)}{r^2} + \frac{2v^4}{l+1} \left(C + \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^{l+1} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.75)$$

onde podemos ter soluções topológicas ($g_\infty = v$, $a_\infty = 0$) e não-topológicas ($g_\infty = 0$, $a_\infty \neq 0$), entretanto, iremos nos focar apenas nas soluções topológicas. O comportamento assintótico dessas soluções e de seus respectivos campos magnéticos podem ser vistos nas equações (5.69) e (5.70), e seus gráficos na figura 5.8. A condição de contorno nos extremos para a função $h(r)$ da equação (5.73) será $h_\infty = \pm v^2 \sqrt{2C/(l+1)}$. O funcional de energia (5.66) toma a forma

$$W(a, g) = -\sqrt{\frac{2}{l+1}} v^2 a \sqrt{C + \left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right)^{l+1}}, \quad (5.76)$$

com energia

$$E = 2\sqrt{\frac{2(C+1)}{l+1}} \pi |n| v^2, \quad (5.77)$$

que depende de l e C . Podemos usar a equação (5.69) para estimar o comportamento assintótico de $h(r)$, pela equação (5.73) temos que $h_a(r) \approx h(r \gg 0) - h_\infty$, com

$$h_a(r) \approx \pm \frac{v^2}{\sqrt{2C(l+1)}} (l-1)^{-\frac{2(l+1)}{l-1}} (v^2 r)^{-\frac{2(l+1)}{l-1}}. \quad (5.78)$$

Podemos fazer isso também para a componente radial do campo elétrico (5.74) e para densidade de energia (5.75), teremos

$$E_r(r \gg 0) \approx \sqrt{\frac{2(l+1)}{C}} v^4 (l-1)^{-\frac{3l+1}{l-1}} (v^2 r)^{-\frac{3l+1}{l-1}}, \quad (5.79a)$$

$$\rho(r \gg 0) \approx 2\sqrt{\frac{2C}{l+1}} v^6 (l-1)^{-\frac{2l}{l-1}} (v^2 r)^{-\frac{2l}{l-1}}. \quad (5.79b)$$

Assim como no exemplo 4.3.2, todas as soluções e quantidades físicas terão comportamentos assintótico de longo alcance. Observe que a medida que o valor de l cresce, as caudas dessas quantidades aumentam. O valor da constante $C = l$ é particularmente interessante, faz com que $h_0 = \pm v^2 \sqrt{2}$ e que todas as soluções tenham a mesma energia $E = 2\sqrt{2}\pi|n|v^2$, veja a equação (5.77). Podemos usar as soluções numéricas $g(r)$ e $a(r)$ para fazer os gráficos da função $h(r)$, da componente radial do campo elétrico $E_r(r)$ e da densidade de energia $\rho(r)$, dados respectivamente pelas equações (5.73), (5.74) e (5.75). Na figura 5.9 mostramos o potencial (5.72) e a função $h(r)$. Já na figura 5.10, teremos as quantidades físicas $E_r(r)$ e $\rho(r)$.

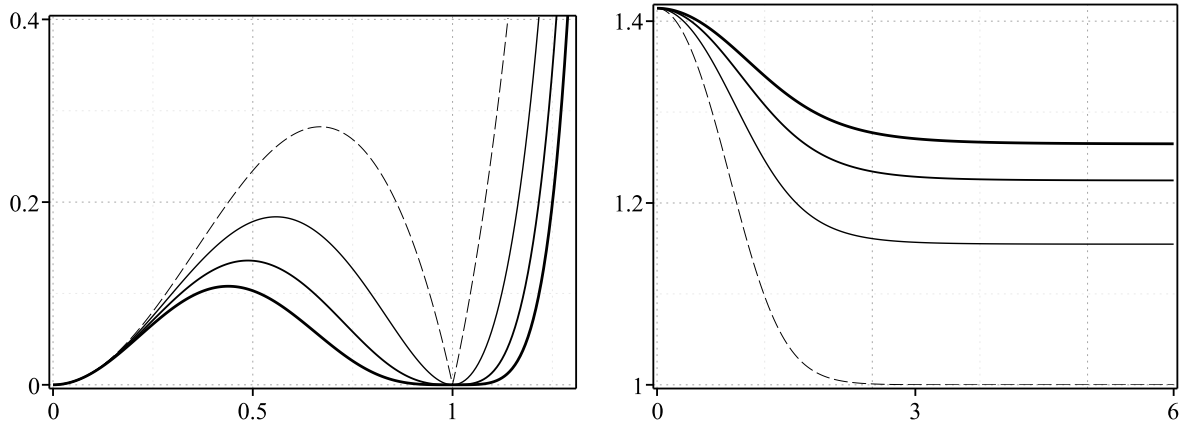


Figura 5.9 No lado esquerdo temos o potencial $V(|\varphi|)$ da equação (5.72) e no lado direito função $h(r)$ dado em (5.73), para $v = n = 1$, $C = l$ com $l = 1, 2, 3$ e 4 , onde a linha tracejada representa o caso em que $l = 1$ e as linhas sólidas os outros valores de l , onde a espessura das linhas cresce com l .

Vamos agora considerar o caso especial em que $C = 0$, a equação (5.71) se reduz a

$$M(g) = \sqrt{\frac{l+1}{2}} \left| 1 - \frac{g^2}{v^2} \right|^{\frac{l-1}{2}}, \quad (5.80)$$

e o potencial (5.72) será

$$V(g) = \sqrt{\frac{2}{l+1}} v^4 g^2 \left| 1 - \frac{g^2}{v^2} \right|^{\frac{3l+1}{2}}. \quad (5.81)$$

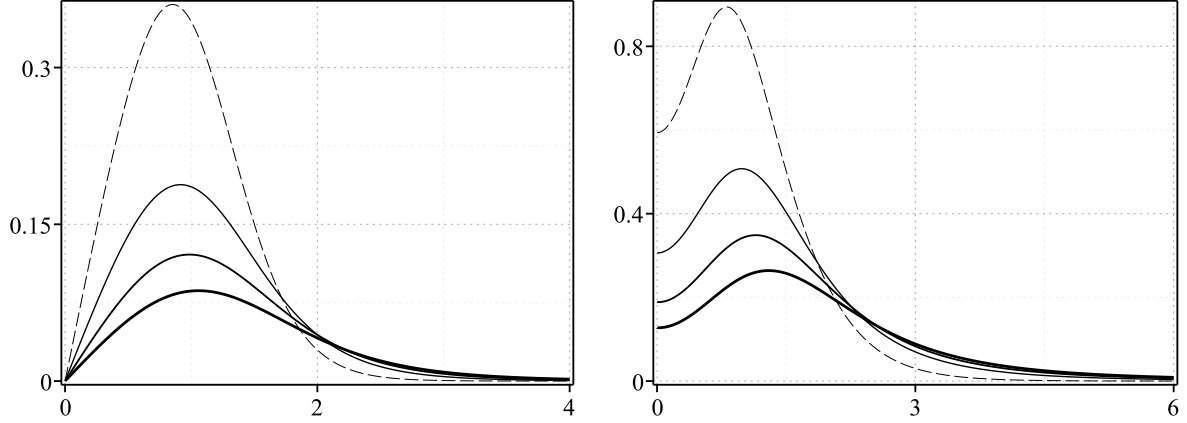


Figura 5.10 Componente radial do campo elétrico $E_r(r)$ dado pela equação (5.74) no lado direito e no lado esquerdo temos a densidade de energia $\rho(r)$ da equação (5.75), para $v = n = 1$, $C = l = 1, 2, 3$ e 4 , onde as linhas tracejadas representa $l = 1$ e as sólidas os outros valores de l , que cresce juntamente com a espessura.

Para o potencial acima temos que $d^m V/dg^m|_{g=v} = 0$ com $m = 0, \dots, \lceil (3l-1)/2 \rceil$. Note que para $l = 1$ recupera o modelo canônico de Chern-Simons-Higgs [138, 139, 151], que surge para $M(g) = 1$ e $V(g) = g^2(v^2 - g^2)^2$ e geram soluções com caudas exponenciais dadas pela equação (5.59). A função $h(r)$ da equação (5.65) torna-se

$$h(r) = \sqrt{\frac{2}{l+1}} v^2 \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^{\frac{l+1}{2}}, \quad (5.82)$$

com $h_0 = \pm v^2 \sqrt{2(C+1)/(l+1)}$ e a componente radial campo elétrico dada por (5.24) será

$$E_r(r) = \sqrt{2(l+1)} \frac{a(r)g^2(r)}{r} \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^{\frac{l-1}{2}}. \quad (5.83)$$

A densidade de energia (5.49) também se simplifica

$$\rho(r) = \sqrt{2(l+1)} g^2(r) \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^{\frac{l-1}{2}} \left(\frac{a^2(r)}{r^2} + \frac{2v^4}{l+1} \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^{l+1} \right). \quad (5.84)$$

Fazendo uma análise no infinito verificamos que comporta tanto soluções topológicas quanto não topológicas, com as condições de contorno nos extremos dadas abaixo da equação (5.75), exceto para a função $h(r)$, onde $h_\infty = 0$ para soluções topológicas, independentemente do valor de l . O funcional de energia (5.66) toma a forma

$$W(a, g) = -\sqrt{\frac{2}{l+1}} v^2 a \left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right)^{\frac{l+1}{2}}, \quad (5.85)$$

com energia $E = 2\sqrt{2/(l+1)}\pi|n|v^2$, dependendo apenas de l . Como sabemos, esse modelo comportará as mesmas soluções topológicas do modelo 4.3.2, para vórtices de Maxwell-Higgs. Assim como no caso anterior, quando $C > 0$, podemos usar o comportamento assintótico das soluções $g(r)$ e $a(r)$ dadas pela equação (5.69) e obter

$$h(r \gg 0) \approx \sqrt{\frac{2}{l+1}} v^2 (l-1)^{-\frac{l+1}{l-1}} (v^2 r)^{-\frac{l+1}{l-1}}, \quad (5.86a)$$

$$E_r(r \gg 0) \approx \sqrt{2(l+1)} v^4 (l-1)^{-\frac{2l}{l-1}} (v^2 r)^{-\frac{2l}{l-1}}, \quad (5.86b)$$

$$\rho(r \gg 0) \approx \sqrt{\frac{2}{l+1}} (l+3) v^6 (l-1)^{-\frac{3l+1}{l-1}} (v^2 r)^{-\frac{3l+1}{l-1}}. \quad (5.86c)$$

Note que o comportamento deste caso ($C = 0$) é diferente do caso anterior, veja as equações (5.78) e (5.79). A cauda das quantidades citadas acima são maiores, pois as potências de r são menores no caso $C > 0$. Nas figuras 5.11 e 5.12 mostramos o comportamento do potencial $V(|\varphi|)$, da função $h(r)$, da componente radial do campo elétrico $E_r(r)$ e o campo magnético $B(r)$ para $v = n = 1$ e vários valores de l .

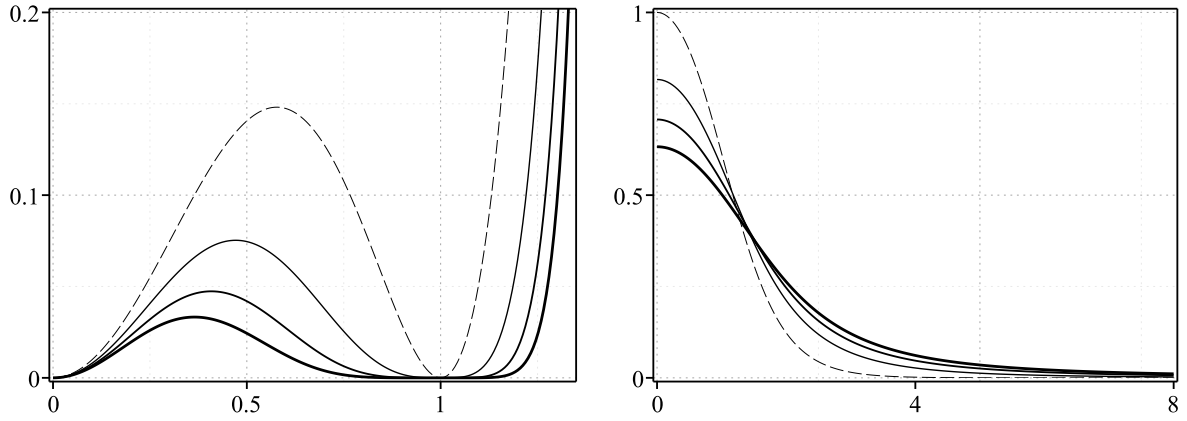


Figura 5.11 Potencial $V(|\varphi|)$ da equação (5.81) no lado esquerdo e função $h(r)$ da equação (5.82) no lado direito, para $v = n = 1$, $l = 1, 2, 3$ e 4 , onde as linhas tracejadas é para $l = 1$ e as linhas sólidas para os outros l , onde a espessura das linhas cresce com l .

Assim como em Maxwell, podemos adicionar simetrias extras em Chern-Simons, veja, por exemplo, as referências [158, 159], na referência [158] inclui-se funções tipo $M(|\varphi|)$, que multiplicam o termo dinâmico dos campos escalares envolvidos.

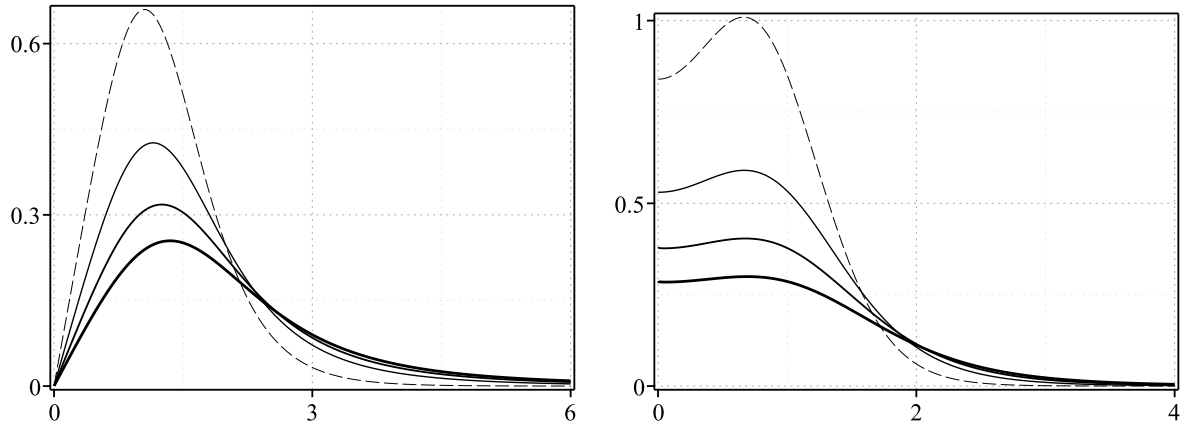


Figura 5.12 No lado esquerdo temos a componente radial do campo elétrico $E_r(r)$ dado em (5.83) e no lado direito a densidade de energia $\rho(r)$ em (5.84), para $v = n = 1$, $l = 1, 2, 3$ e 4, onde as linhas tracejadas representa $l = 1$ e as sólidas os outros valores de l , que cresce com sua espessura.

Vórtices de Maxwell-Chern-Simons-Higgs

No capítulo 4 vimos que vórtices de Maxwell-Higgs não tem carga, ou seja, são eletricamente neutros. Já no capítulo anterior, consideramos vórtices de Chern-Simons-Higgs e vimos que os vórtices serão carregados. Ainda no capítulo anterior, mencionamos que houveram outros modelos que possuíam vórtices carregados, em especial na referência [147], onde os autores estudaram um modelo abeliano com ambos os termos: Maxwell e Chern-Simons. Esse modelo também foi estudado em [160], onde os autores fazem uma análise da interação entre vórtices. Entretanto, esse modelo não possui equações diferenciais de primeira ordem, o que deixa o problema bastante complicado. Uma alternativa para obter as equações diferenciais de primeira ordem para modelos de Maxwell-Chern-Simons-Higgs é incluir um campo neutro [120, 161–163]. Porém, é possível estabelecermos um formalismo de primeira ordem sem a inclusão do campo neutro, como mostraremos nesse capítulo. Para isso, consideraremos uma generalização dos modelos estudados em [147, 160].

6.1 Generalidades

Considerando o tensor métrico $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(+, -, -)$, trabalhamos com a ação na forma $\mathcal{S} = \int d^3x \mathcal{L}$, onde a densidade Lagrangiana inclui os termos de Maxwell e Chern-Simons. O modelo generalizado a ser estudado no presente trabalho inclui duas quantidades distintas: $\mu(|\varphi|)$, que é uma permeabilidade magnética generalizada, e $M(|\varphi|)$, que modifica a dinâmica do campo escalar. A densidade Lagrangiana do modelo tem a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu(|\varphi|)} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\gamma\alpha\beta} A_\gamma F_{\alpha\beta} + M(|\varphi|) \overline{D_\alpha \varphi} D^\alpha \varphi - V(|\varphi|). \quad (6.1)$$

Na expressão acima, $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ é o tensor eletromagnético e consideramos o campo escalar minimamente acoplado ao campo do medidor, com $D_\alpha \varphi = \partial_\alpha \varphi + ie A_\alpha \varphi$. Também consideramos unidades naturais ($\hbar = c = 1$). Ao fazer isso, as dimensões das várias quantidades são: $[x^\alpha] = \epsilon^{-1}$, $[\varphi] = [A^\alpha] = [e] = \epsilon^{\frac{1}{2}}$, $[\kappa] = \epsilon^1$, e $[V(|\varphi|)] = \epsilon^3$. Além disso, ambos $\mu(|\varphi|)$ e $M(|\varphi|)$ são funções adimensionais de $|\varphi|$. O modelo acima (6.1), terá as equações de movimento para os campos escalares e de calibre, respectivamente, dadas por

$$D_\alpha (M(|\varphi|) D^\alpha \varphi) = \frac{\varphi}{2|\varphi|} \left(\frac{\mu|\varphi|}{4\mu^2(|\varphi|)} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + M_{|\varphi|} \overline{D_\alpha \varphi} D^\alpha \varphi - V_{|\varphi|} \right), \quad (6.2a)$$

$$\partial_\alpha \left(\frac{F^{\alpha\gamma}}{\mu(|\varphi|)} \right) + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\gamma\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = J^\gamma, \quad (6.2b)$$

onde $J_\alpha = ieM(|\varphi|)(\bar{\varphi}D_\alpha\varphi - \varphi\overline{D_\alpha\varphi})$, é a 3-corrente. O tensor de energia-momento associado ao modelo (6.1) será

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu(|\varphi|)} \left(F_{\alpha\gamma}F^\gamma_\beta + \frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta}F_{\gamma\sigma}F^{\gamma\sigma} \right) + \eta_{\alpha\beta}V(|\varphi|) \\ + M(|\varphi|) \left(\overline{D_\alpha\varphi}D_\beta\varphi + D_\alpha\varphi\overline{D_\beta\varphi} - \eta_{\alpha\beta}\overline{D_\gamma\varphi}D^\gamma\varphi \right). \quad (6.3)$$

Note que o tensor energia-momento desse modelo é semelhante ao do modelo de Maxwell-Higgs da equação (4.2), pois o termo de Chern-Simons não contribui na densidade de energia. Em componentes é escrito como na equação (4.9), lembrando que cada componente representa uma quantidade física.

Para lidar com configurações de vórtices, consideramos campos estáticos com o ansatz usual

$$\varphi = g(r)e^{in\theta}, \quad A_0 = h(r), \quad \vec{A} = \frac{\hat{\theta}}{er}(n - a(r)), \quad (6.4)$$

onde n é um número inteiro que controla a vorticidade das configurações do campo. As funções acima devem obedecer às condições de contorno

$$g(0) = 0, \quad h(0) = h_0, \quad a(0) = n, \quad g(\infty) \rightarrow g_\infty, \quad h(\infty) \rightarrow h_\infty, \quad a(\infty) \rightarrow a_\infty, \quad (6.5)$$

semelhantes as dos vórtices de Chern-Simons-Higgs vistos no capítulo anterior. Lembrando que as condições de contorno no infinito devem levar à soluções com energia finita. Os campos elétricos e magnéticos, definidos como $E^i = F^{i0}$ e $B = -F^{12}$, serão

$$\vec{E} = -h'\hat{r} \quad \text{e} \quad B = -\frac{a'}{er}. \quad (6.6)$$

Ao integrarmos o campo magnético acima no plano (r, θ) , obtemos o fluxo $\Phi = (2\pi/e)(n - a_\infty)$. Escrevemos as componentes da 3-corrente J_α , como

$$J_0 = -2e^2g^2Mh \quad \text{e} \quad \vec{J} = \frac{2eag^2M}{r}\hat{\theta}. \quad (6.7)$$

A equação de movimento (6.2a) associada ao campo escalar para o ansatz será

$$\frac{1}{r}(rMg')' + gM \left(e^2h^2 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{1}{4}\frac{\mu_g}{\mu^2} \left(\frac{a'^2}{e^2r^2} - h'^2 \right) \\ + \frac{1}{2}M_g \left(e^2g^2h^2 - g'^2 - \frac{g^2a^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2}V_g = 0. \quad (6.8)$$

As leis de Gauss e Ampère da equação (6.2b) serão

$$\frac{1}{r} \left(\frac{rh'}{\mu} \right)' - \frac{\kappa a'}{er} - 2e^2g^2Mh = 0, \quad (6.9a)$$

$$\left(\frac{a'}{er\mu} \right)' - \kappa h' - \frac{2eg^2Ma}{r} = 0. \quad (6.9b)$$

A densidade de energia com o ansatz (6.4) é obtida a partir da componente T_{00} da equação (6.3), resultando em

$$\rho = \frac{1}{2\mu} \left(h'^2 + \frac{a'^2}{e^2 r^2} \right) + M \left(e^2 g^2 h^2 + g'^2 + \frac{g^2 a^2}{r^2} \right) + V. \quad (6.10)$$

As outras componentes do tensor de momento de energia são

$$T_{01} = -\frac{1}{r} \left(\frac{a'h'}{e\mu} + 2eg^2 Mah \right) \sin(\theta), \quad (6.11a)$$

$$T_{02} = \frac{1}{r} \left(\frac{a'h'}{e\mu} + 2eg^2 Mah \right) \cos(\theta), \quad (6.11b)$$

$$T_{12} = \left(M \left(g'^2 - \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2\mu} h'^2 \right) \sin(2\theta), \quad (6.11c)$$

$$T_{11} = \frac{1}{2\mu} \frac{a'^2}{e^2 r^2} + e^2 g^2 M h^2 + \left(M \left(g'^2 - \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2\mu} h'^2 \right) \cos(2\theta) - V, \quad (6.11d)$$

$$T_{22} = \frac{1}{2\mu} \frac{a'^2}{e^2 r^2} + e^2 g^2 M h^2 + \left(M \left(\frac{a^2 g^2}{r^2} - g'^2 \right) + \frac{1}{2\mu} h'^2 \right) \cos(2\theta) - V, \quad (6.11e)$$

ou em coordenadas polares

$$T_{0\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{a'h'}{e\mu} + 2eg^2 Mah \right), \quad (6.12a)$$

$$T_{rr} = \frac{1}{2\mu} \frac{a'^2}{e^2 r^2} + e^2 g^2 M h^2 + \left(M \left(g'^2 - \frac{g^2 a^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2\mu} h'^2 \right) - V, \quad (6.12b)$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{1}{2\mu} \frac{a'^2}{e^2 r^2} + e^2 g^2 M h^2 + \left(M \left(\frac{g^2 a^2}{r^2} - g'^2 \right) + \frac{1}{2\mu} h'^2 \right) - V. \quad (6.12c)$$

Podemos usar a lei (6.9a) para reescrever a densidade de energia (6.10) como

$$\rho = \frac{1}{r} \left(\frac{r h h'}{\mu} \right)' - \frac{\kappa h a'}{er} + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{a'^2}{e^2 r^2} - h'^2 \right) + M \left(g'^2 + \frac{g^2 a^2}{r^2} - e^2 g^2 h^2 \right) + V. \quad (6.13)$$

A densidade de energia nessa forma é útil para desenvolvermos o formalismo de primeira ordem aqui. As equações de movimento (6.8) e (6.9) são de segunda ordem. Para obtermos equações diferenciais de primeira ordem usaremos o teorema de Derrick. Tal procedimento segue os passos da referência [120], assim consideramos a reescala $r \rightarrow \lambda r$ nas funções $a(r)$, $g(r)$ e $h(r)$. A partir desse reescalonamento teremos as soluções $a(r) \rightarrow a^{(\lambda)} = a(\lambda r)$, $g(r) \rightarrow g^{(\lambda)} = g(\lambda r)$ e $h(r) \rightarrow h^{(\lambda)} = h(\lambda r)$, onde usamos na densidade

de energia acima para calcular a energia das soluções, cuja forma explícita é

$$\begin{aligned}
E^{(\lambda)} &= 2\pi \int r dr \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu} r h^{(\lambda)} \frac{\partial h^{(\lambda)}}{\partial r} \right) - \frac{\kappa}{er} h^{(\lambda)} \frac{\partial a^{(\lambda)}}{\partial r} + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1}{e^2 r^2} \left(\frac{\partial a^{(\lambda)}}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial h^{(\lambda)}}{\partial r} \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + M \left(\left(\frac{\partial g^{(\lambda)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{a^{(\lambda)2} g^{(\lambda)2}}{r^2} - e^2 g^{(\lambda)2} h^{(\lambda)2} \right) + V \right) \\
&= 2\pi \int z dz \left(\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} z h \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{\kappa}{ez} h \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\lambda^2}{e^2 z^2} \left(\frac{\partial a}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + M \left(\left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^2 + \lambda^2 \frac{a^2 g^2}{z^2} - e^2 g^2 h^2 \right) + \lambda^{-2} V \right),
\end{aligned} \tag{6.14}$$

onde $z = \lambda r$. Para obtermos soluções rotacionalmente simétricas, tomamos $T_{12} = 0$, que nos leva a

$$M \left(g'^2 - \frac{g^2 a^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2\mu} h'^2 = 0, \tag{6.15}$$

assim como $T_{11} = T_{22}$. Uma vez que o tensor de energia-momento é conservado, pode-se escrever $T_{11} = T_{22} = \sigma$, onde σ é uma constante. Para garantirmos a estabilidade sob reescala o valor quando $\lambda = 1$, que é equivalente as soluções não reescaladas. Com isso, impomos que $\partial E^{(\lambda)} / \partial \lambda|_{\lambda=1} = 0$ e $\partial^2 E^{(\lambda)} / \partial \lambda^2|_{\lambda=1} > 0$, assim como feito nos capítulos anteriores. Estas condições são satisfeitas para $T_{11} = T_{22} = 0$, ou seja

$$e^2 g^2 M h^2 + \frac{1}{2\mu} \frac{a'^2}{e^2 r^2} - V = 0. \tag{6.16}$$

Isso significa que a condição de estresse nulo $T_{ij} = 0$, leva à soluções rotacionalmente simétricas e estáveis sob reescala. Como mostrado em [120], equações diferenciais de primeira ordem para vórtices em modelos de Maxwell-Chern-Simons-Higgs podem ser obtidas com a adição de um campo escalar neutro para equilibrar a contribuição de $h(r)$ no estresse, T_{ij} .

Aqui, apresentaremos um novo procedimento para se obter equações diferenciais de primeira ordem sem a presença do campo neutro. Para isso vinculamos as funções $\mu(|\varphi|)$ e $M(|\varphi|)$ de forma que podemos escrever

$$M(|\varphi|) = \frac{\kappa^2 \ell (\ell + 1) \mu(|\varphi|)}{2e^2 |\varphi|^2}, \tag{6.17}$$

onde ℓ é um parâmetro real adimensional. Como ambas funções $\mu(|\varphi|)$ e $M(|\varphi|)$ são não negativas, devemos ter $\ell(\ell + 1) > 0$. Além disso, para evitar divergências em $M(|\varphi|)$, escolhemos a permeabilidade magnética de modo que o limite

$$\lim_{|\varphi| \rightarrow 0} \frac{\mu(|\varphi|)}{|\varphi|^2} = N, \tag{6.18}$$

exista e que N seja um número real. Em outras palavras, queremos que $\mu(|\varphi|)$ vá para zero tão rápido quanto $|\varphi|^2$. A questão agora é desvendar a estrutura de primeira ordem para o modelo acima, na ausência de um campo escalar neutro extra. Depois de várias tentativas sem sucesso, inspirados pela equação (6.15), encontramos uma possibilidade interessante. Assim como nos modelos de Chern-Simons-Higgs do capítulo anterior, consideraremos que a componente radial do campo elétrico dependa das funções g e a de forma que

$$-h' = \frac{\kappa\ell\mu a}{er}. \quad (6.19)$$

Usando-o na lei de Gauss (6.9a), obtemos

$$-\frac{a'}{er} = \kappa\ell\mu h. \quad (6.20)$$

A partir das equações (6.17) e (6.20), pode-se mostrar que a densidade de carga dada pela equação (6.21) pode ser escrita como

$$J_0 = \kappa(\ell+1) \frac{a'}{er}. \quad (6.21)$$

Ao integrá-la, obtemos uma relação entre a carga elétrica e o fluxo magnético $Q = -\kappa(\ell+1)\Phi$, que depende de ℓ . O momento angular também dependerá de ℓ e pode ser calculado através da equação (4.12), para obtermos $L = -(\pi\kappa/e^2)(2\ell+1)(n^2 - a_\infty^2)$.

É possível mostrar que as equações (6.19) e (6.20) satisfazem a lei de Ampère dada pela equação (6.9b). Substituindo-os em (6.15) e em (6.16), é possível escrever as equações diferenciais de primeira ordem como

$$g' = \pm \sqrt{\frac{2\ell+1}{\ell+1}} \frac{ag}{r}, \quad (6.22a)$$

$$-\frac{a'}{er} = \pm \sqrt{\frac{2\ell\mu(g)V(g)}{2\ell+1}}. \quad (6.22b)$$

Essas equações devem ser resolvidas de acordo com as condições de contorno em (6.5). Observe que há um fator algébrico guiado por ℓ no lado direito da equação (6.22a). Esta característica é nova no estudo de vórtices em modelos com acoplamento mínimo, veja na referência [120], que em todos os modelos de vórtices lá estudados, possuem equações diferenciais de primeira ordem onde a derivada $g(r)$ satisfaz $g' = ag/r$, que nos leva a $g(r \approx 0) \propto r^{|n|}$ próximo a origem. O fator acima mencionado modifica o comportamento de $g(r)$ perto da origem. Pode-se mostrar que $g(r)$ comporta-se como

$$g(r \approx 0) \propto r^{|n|\sqrt{(2\ell+1)/(\ell+1)}}, \quad (6.23)$$

observe que o comportamento dependerá do parâmetro ℓ . O comportamento de $a(r)$ vai depender do modelo a ser estudado. As equações diferenciais de primeira ordem (6.22)

determinam a forma das funções $a(r)$ e $g(r)$. Ao conhecê-las, podemos encontrar $h(r)$ a partir da equação (6.20) e (6.22b), que é escrita como

$$h(r) = \pm \frac{1}{\kappa\ell} \sqrt{\frac{2\ell V(g)}{(2\ell+1)\mu(g)}}. \quad (6.24)$$

Assim, as soluções são completamente determinadas a partir das equações (6.22) e (6.24). Nessas equações, os sinais mais e menos representam vorticidades positiva e negativa. O caso de vorticidade positiva está relacionado com vorticidade negativa pela mudança $a \rightarrow -a$ e $h \rightarrow -h$.

Para garantir que as equações (6.22) e (6.24) sejam compatíveis com as equações de movimento (6.8) e (6.9), tomamos o vínculo

$$\frac{d}{dg} \sqrt{\frac{2V}{\mu}} = - \frac{\kappa^2 \sqrt{\ell^3(\ell+1)\mu}}{eg}, \quad (6.25)$$

o que leva ao potencial

$$V(g) = \frac{\kappa^4 \ell^3 (\ell+1) \mu(g)}{2e^2} \left(\int dg \frac{\mu(g)}{g} \right)^2. \quad (6.26)$$

Assim, o potencial é especificado pela permeabilidade magnética generalizada, $\mu(g)$, que deve ser escolhida para permitir a existência de soluções obedecendo às condições de contorno em (6.5). Para cumprir com o limite da equação (6.18), tomamos a permeabilidades magnética igual a zero na origem $\mu(0) = 0$, cujo potencial associado suporta um mínimo em $g = 0$, ou seja $V(0) = 0$.

Podemos reescrever a densidade de energia (6.10) usando as equações (6.19) e (6.20), substituindo h e h' para fazer depender apenas de g e a e suas correspondentes derivadas. Isto dá

$$\rho = \frac{(2\ell+1)a'^2}{2e^2\ell r^2\mu} + \frac{\kappa^2\ell(\ell+1)\mu g'^2}{2e^2g^2} + \frac{\kappa^2\ell(2\ell+1)\mu a^2}{2e^2r^2} + V. \quad (6.27)$$

Usando o vínculo (6.25) podemos escrever a densidade de energia acima como

$$\rho = \frac{\kappa^2\ell(\ell+1)\mu}{2e^2g^2} \left(g' \mp \sqrt{\frac{2\ell+1}{\ell+1}} \frac{ga}{r} \right)^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\sqrt{\frac{2\ell+1}{\ell}} \frac{a'}{er} \pm \sqrt{2\mu V} \right)^2 \pm \frac{1}{r} \frac{dW}{dr}, \quad (6.28)$$

onde o funcional de energia será

$$W(a, g) = -\frac{a}{e} \sqrt{\frac{2(2\ell+1)V(g)}{\ell\mu(g)}}. \quad (6.29)$$

Isso mostra que a energia pode ser minimizada quando o potencial é dado por (6.26) e as equações diferenciais de primeira ordem (6.22) forem satisfeitas. A energia mínima é

$$E = 2\pi |W(a(\infty), g(\infty)) - W(a(0), g(0))|. \quad (6.30)$$

e depende apenas das condições de contorno de g e a , dadas pela equação (6.5). Notamos ainda, que obtivemos as mesmas equações diferenciais de primeira ordem, embora usando um procedimento diferente. Podemos então dizer que as soluções das equações diferenciais de primeira ordem são estáveis sob reescala e minimizam também a energia do sistema. A densidade de energia (6.10) para essas soluções podem ser escritas como

$$\rho = \frac{\kappa^2(2\ell+1)\mu a^2}{e^2 r^2} + 2V, \quad (6.31)$$

lembrando que podemos determinar a condição de contorno no infinito para a função $a(r)$. A partir das equações (6.18) e (7.94), vemos que a densidade de energia acima é zero em $r = 0$ para soluções de vórtice com qualquer vorticidade.

Vamos agora fornecer um exemplo para o modelo descrito pela densidade Lagrangiana que aparece em (6.1). Por conveniência, fazemos a redimensionamento

$$\varphi \rightarrow \frac{\kappa}{e}\varphi, \quad A_\alpha \rightarrow \frac{\kappa}{e}A_\alpha, \quad \varphi \rightarrow \frac{\kappa}{e}\varphi, \quad x_\alpha \rightarrow \frac{1}{\kappa}x_\alpha, \quad \mathcal{L} \rightarrow \frac{\kappa^4}{e^2}\mathcal{L}. \quad (6.32)$$

Isso faz com que os campos e coordenadas se tornem adimensionais. Em seguida, procedemos tomando $e = \kappa = 1$ nas equações sem perder a generalidade. Note que o redimensionamento acima pode ser feito logo após a equação (6.1). Estamos fazendo isso aqui porque queríamos mostrar como os parâmetros aparecem nas equações gerais.

6.2 Exemplo

Para ilustrar o procedimento, vamos primeiro considerar a permeabilidade magnética na forma

$$\mu(|\varphi|) = c|\varphi|^2. \quad (6.33)$$

com $c > 0$. Esta escolha leva a $M(|\varphi|) = c\ell(\ell+1)/2$, que não depende de $|\varphi|$. Como afirmamos antes, ℓ é um parâmetro real que deve obedecer $\ell(\ell+1) > 0$, o que exige $\ell < -1$ ou $\ell > 0$. Neste caso, o potencial em (6.26) torna-se

$$V(|\varphi|) = \frac{1}{8}c^3\ell^3(\ell+1)|\varphi|^2(v^2 - |\varphi|^2)^2, \quad (6.34)$$

onde v é um parâmetro envolvido na quebra de simetria do potencial. Este potencial é mostrado na figura 6.1 para $v = 1$, $c = 2$ e alguns valores de ℓ .

As equações diferenciais de primeira ordem (6.22) tornam-se

$$g' = \pm \sqrt{\frac{2\ell+1}{\ell+1}} \frac{ag}{r}, \quad (6.35a)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm \frac{1}{2}c^2\ell^2 \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} g^2 (v^2 - g^2). \quad (6.35b)$$

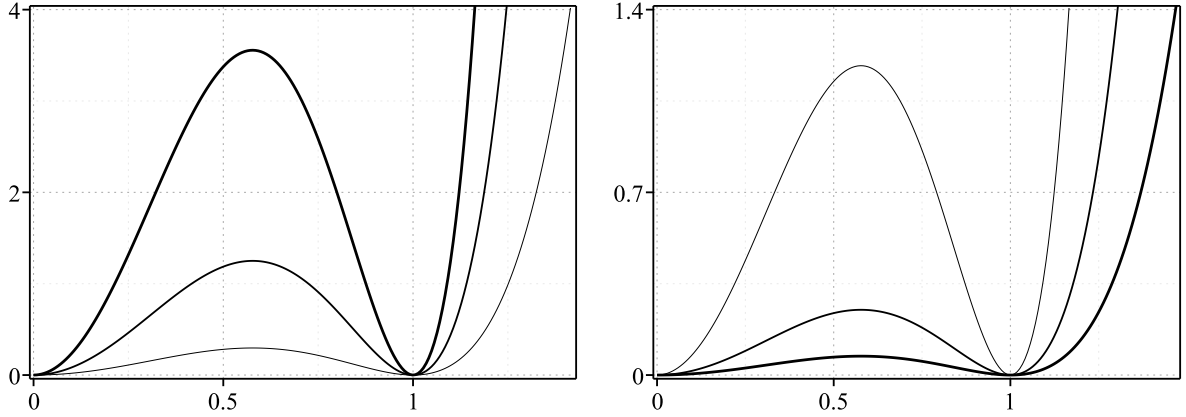


Figura 6.1 Potencial $V(|\varphi|)$ da equação (6.34) para $v = 1$ e $c = 2$. No lado esquerdo mostramos o caso com ℓ positivo, para $\ell = 1, 1.5$ e 2 , enquanto no lado direito exibimos o caso com ℓ negativo, para $\ell = -2, -1.5$ e -1.25 . Em cada figura, a espessura das linhas aumenta com o aumento de ℓ .

e a função $h(r)$ da equação (6.24) toma a forma

$$h(r) = \pm \frac{c\ell}{2} \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} (v^2 - g^2(r)). \quad (6.36)$$

A condição de contorno (6.5) para essa solução na origem é $h_0 = \pm (c\ell v^2/2) \sqrt{(\ell+1)/(2\ell+1)}$. Para determinar as soluções das equações diferenciais de primeira ordem (6.35) precisamos saber as condições de contorno no extremos g_∞ e a_∞ . Entretanto, podemos fazer um estudo próximo à origem. Como sabemos o comportamento de $g(r)$ próximo a origem é dado pela equação (6.23), que depende de ℓ . Usando esse resultado nas equações diferenciais de primeira ordem (6.22) com as condições de contorno (6.5) podemos estimar o comportamento das soluções $a(r)$ e $h(r)$ perto da origem, que serão

$$n - a(r \approx 0) \propto r^{2\left(1+|n|\sqrt{(2\ell+1)/(\ell+1)}\right)}, \quad (6.37a)$$

$$h_0 - h(r \approx 0) \propto r^{2|n|\sqrt{(2\ell+1)/(\ell+1)}}. \quad (6.37b)$$

Os campos elétricos e magnéticos podem ser calculados a partir da equação (6.6). Os comportamentos dessas quantidades perto da origem são

$$E_r(r \approx 0) \propto r^{2|n|\sqrt{(2\ell+1)/(\ell+1)}-1}, \quad (6.38a)$$

$$B(r \approx 0) \propto r^{2|n|\sqrt{(2\ell+1)/(\ell+1)}}. \quad (6.38b)$$

Já a densidade de energia (6.31) para as soluções diferenciais das equações de primeira ordem (6.35) tem a forma

$$\rho = c\ell(2\ell+1)g^2 \left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{c^2\ell^2(\ell+1)}{4(2\ell+1)} (v^2 - g^2)^2 \right). \quad (6.39)$$

Podemos calcular também o seu comportamento próximo a origem, que será

$$\rho(r \approx 0) \propto r^{2\left(|n|\sqrt{(2\ell+1)/(\ell+1)}-1\right)}. \quad (6.40)$$

Pela densidade de energia (6.39) vemos que podemos ter soluções topológicas, com as condições de contorno $g_\infty = v$ e $a_\infty = 0$, como também não-topológicas $g_\infty = 0$ e $a_\infty \neq 0$. Entretanto, vamos nos concentrar apenas nas soluções topológicas. Apesar de não conseguirmos obter soluções analíticas para as equações diferenciais de primeira ordem (6.35), podemos fazer uma análise assintótica para as soluções $g(r)$, $a(r)$ e obter $v - g(r \gg 0) \propto K_0(clv^2r)$, $a(r \gg 0) \propto rK_1(clv^2r)$, lembrando que $K_\alpha(z)$ é a função de Bessel modificada do segundo tipo com argumento z . Vale ressaltar que esse comportamento assintótico é semelhante aos dos modelos canônicos para os vórtices de Maxwell-Higgs e Chern-Simons-Higgs dos capítulos anteriores. A condição de contorno no infinito da função $h(r)$ dado pela equação (6.36) será $h_\infty = 0$, podemos analisar assintoticamente também e determinar que $h(r \gg 0) \propto K_0(clv^2r)$. Calcularemos a energia a partir do funcional de energia (6.29), que tem a forma

$$W(g, a) = -\frac{c}{2}\sqrt{\ell^2(\ell+1)(2\ell+1)}a(v^2 - g^2), \quad (6.41)$$

logo, para as soluções topológicas, temos que a energia será $E = \pi cv^2|n|\sqrt{\ell^2(\ell+1)(2\ell+1)}$.

Como foi já foi dito, não conseguimos obter soluções analíticas para as equações diferenciais de primeira ordem (6.35), entretanto podemos obter soluções numéricas. Na figura 6.2, mostramos o perfil das soluções topológicas $g(r)$, $a(r)$ e $h(r)$ para $v = n = 1$, $c = 2$ e vários valores de ℓ , tanto positivos quanto negativos. Já na figura 6.3 temos seus respectivos campos elétricos e magnéticos. Observe que o campo elétrico muda de sentido conforme mudamos ℓ de positivo para negativo; isso está de acordo com a mudança de sinal da carga elétrica, conforme comentamos no parágrafo abaixo da equação (6.21). O comportamento da densidade de energia (6.39) pode ser visto na figura 6.4 para $n = v = c = 1$ e alguns valores de ℓ . Observe que há um vale ao redor da origem. Para destacar esse comportamento, fazemos a densidade de energia no plano na figura 6.5.

Também podemos considerar simetrias extras em modelos com termos de Maxwell e Chern-Simons, veja, por exemplo, a referência [164]. Nesse trabalho os autores conseguem obter soluções do tipo vórtices onde pode existir uma inversão de sinal no campo magnético.

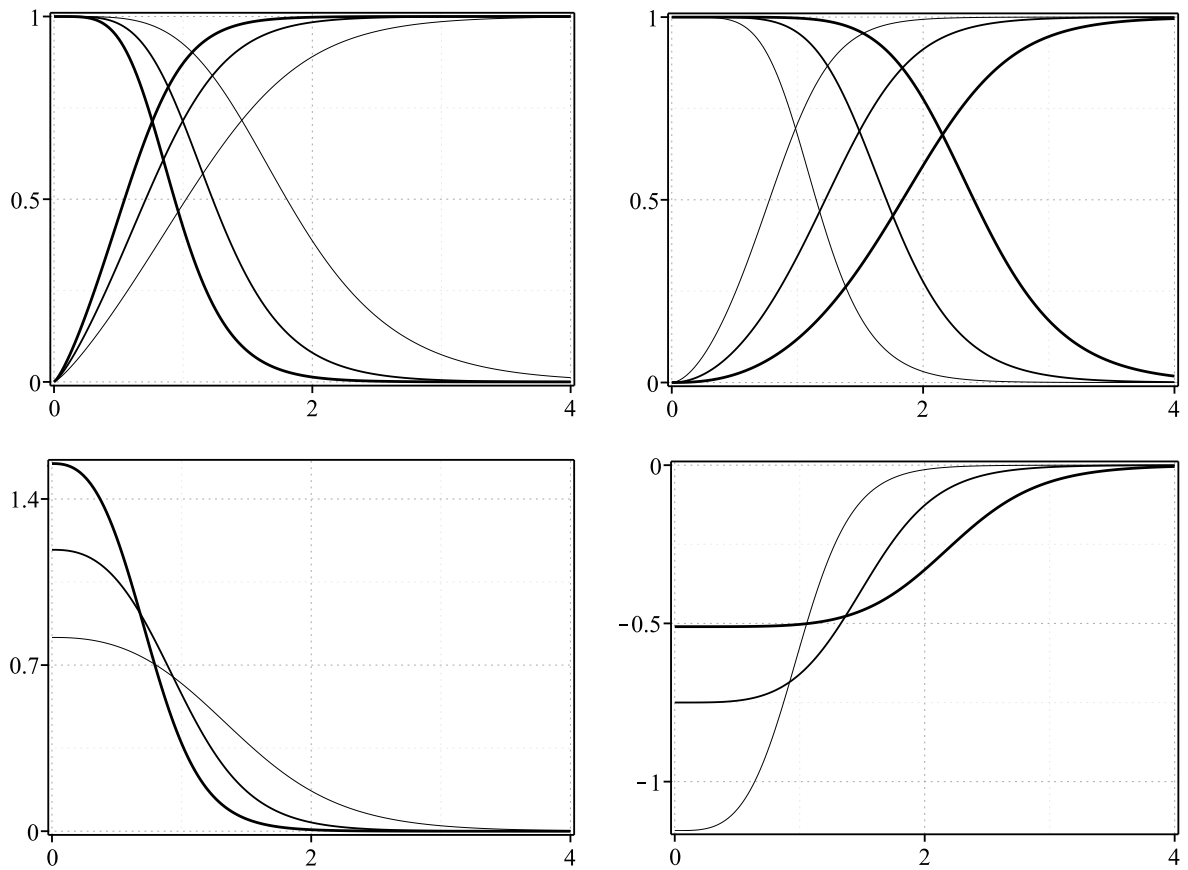


Figura 6.2 Nas figuras de cima, podemos ver as soluções $g(r)$ (linhas ascendentes) e $a(r)$ (linhas descendentes) da equação (6.35). Nas figuras abaixo, temos as funções $h(r)$ da equação (6.36), para $n = v = 1$ e $c = 2$. Os painéis da esquerda retratam o caso com ℓ positivo, para $\ell = 1, 1.5$ e 2 , enquanto os painéis da direita o negativo ℓ , com $\ell = -2, -1.5$ e -1.25 . A espessura das linhas aumenta com ℓ em cada painel.

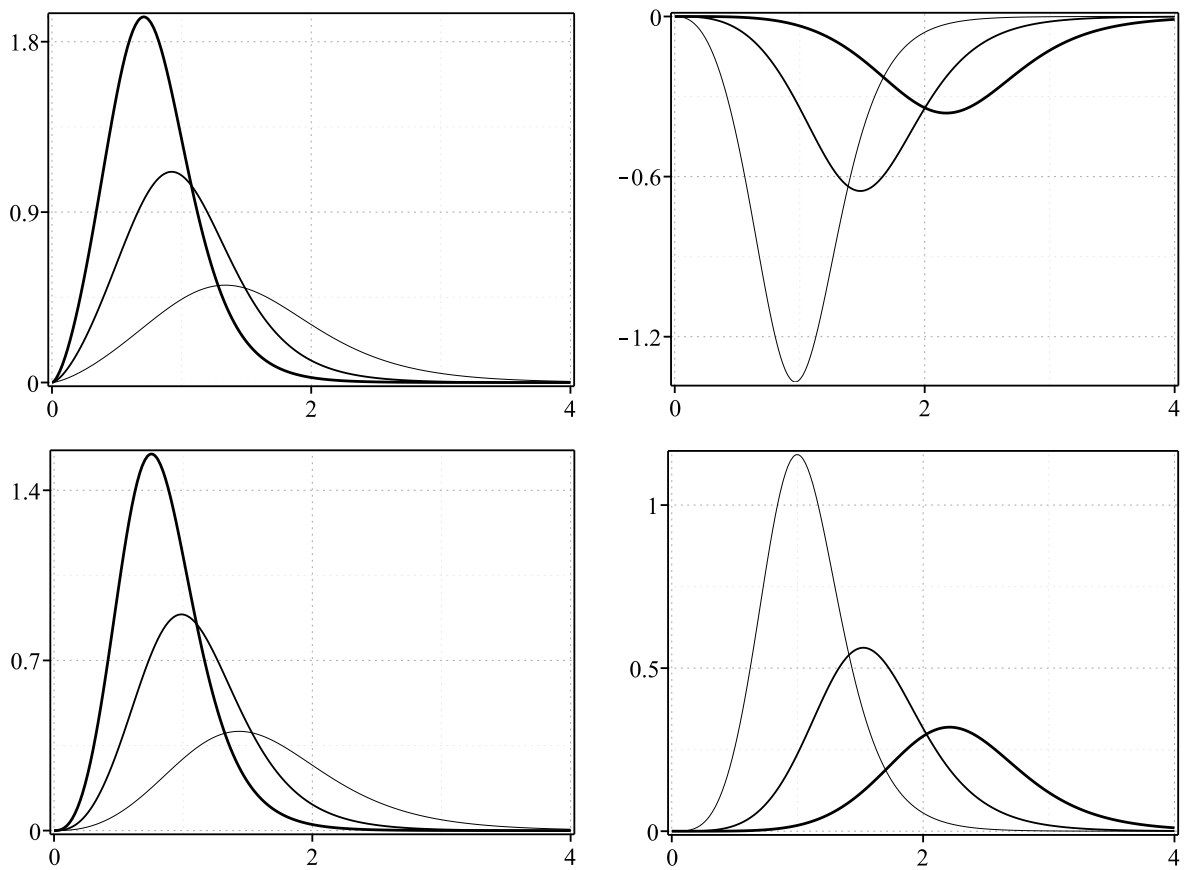


Figura 6.3 As componentes radiais do campo elétrico $E_r(r)$ em cima e os campos magnéticos $B(r)$ em baixo, dados pela equação (6.6) associado as soluções topológicas da equação (6.35) e (6.36), para $n = v = 1$ e $c = 2$. Os painéis da esquerda retratam o caso com ℓ positivo, para $\ell = 1, 1.5$ e 2 , enquanto os da direita para ℓ negativo, com $\ell = -2, -1.5$ e -1.25 . A espessura das linhas aumenta com ℓ em cada painel.

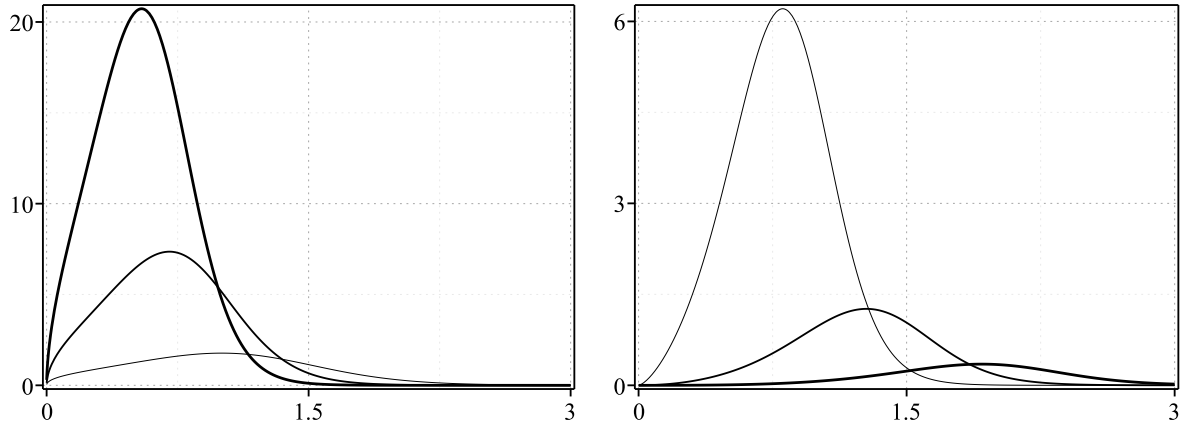


Figura 6.4 Densidade de energia $\rho(r)$ da equação (2.8) para $n = v = 1$ e $c = 2$ e alguns valores de ℓ . No lado esquerdo temos para $\ell = 1, 1.5$ e 2 , já no lado direito temos para $\ell = -2, -1.5$ e -1.25 . A espessura das linhas aumenta com ℓ .



Figura 6.5 Densidade de energia (2.8) no plano (r, θ) , para $n = v = 1$ e $c = 2$, com $\ell = 1$ em azul e $\ell = -1.25$ em vermelho.

Vórtices de Maxwell-Chern-Simons-Higgs com Acoplamento Não-Mínimo

Nesse capítulo mostraremos outra maneira de obter vórtices de Maxwell-Chern-Simons-Higgs, para isso faremos uma modificação na derivada covariante. Consideraremos um acoplamento não mínimo, que consiste em adicionar um termo a mais no acoplamento mínimo. Os primeiros estudos de vórtices com acoplamento não mínimo foi em [165, 166], onde o termo extra é interpretado como um momento magnético anômalo. Apesar de ser possível obter equações diferenciais de primeira ordem, as soluções deste modelo terão caráter não-topológico. Uma generalização desse modelo foi estudada nas referências [167–169], onde inclui-se uma função dielétrica no termo extra. Nos guiaremos por esses trabalhos para estudar um modelo ainda mais geral. A presença do acoplamento mínimo pode ser usada para se obter um termo de Chern-Simons a partir da quebra espontânea de simetria em modelos de Maxwell-Higgs, ver [170]. Vale ressaltar que a definição de acoplamento não mínimo não é única, pode-se obter soluções do tipo vórtices em modelos com acoplamento não mínimo no contexto de violação de Lorentz [171].

7.1 Generalidades

Vamos agora estudar modelos de vórtices de Maxwell-Chern-Simons com acoplamento não mínimo. Consideraremos a densidade lagrangiana estudada em [172], que é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu(|\varphi|)}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}A_{\gamma}F_{\alpha\beta} + M(|\varphi|)\overline{\mathcal{D}}_{\alpha}\varphi\mathcal{D}^{\alpha}\varphi - V(|\varphi|). \quad (7.1)$$

Note que é bastante semelhante à do capítulo anterior, veja a equação (6.1). Entretanto a derivada covariante não é mais a mesma, temos que $\mathcal{D}_{\alpha} = \partial_{\alpha} + ieA_{\alpha} - iqG(|\varphi|)F_{\alpha}$ onde $F_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}F^{\beta\gamma}/2$ é o dual do tensor eletromagnético. Além disso, definimos $F_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}F^{\gamma}$, onde $F_0 = -B$ e $F_i = \varepsilon_{ij}E^j$, com E^i sendo as componentes do campo elétrico $\vec{E}$ e B o campo magnético. Em unidades naturais a quantidade $[q] = \epsilon^{-\frac{1}{2}}$, a função $G(|\varphi|)$ é adimensional. Para $q = 0$ recuperamos o modelo anterior, já que o acoplamento não mínimo é composto pela derivada mínima mais um termo extra $\mathcal{D}_{\alpha} = D_{\alpha} - iqG(|\varphi|)F_{\alpha}$. Vale ressaltar que apesar da modificação da derivada covariante no modelo acima, ainda será invariante sob transformações $U(1)$. As equações de movimento para o campos serão

$$\mathcal{D}_\alpha (M(|\varphi|)\mathcal{D}^\alpha \varphi) = \frac{\varphi}{2|\varphi|} \left(\frac{\mu|\varphi|}{2\mu^2(|\varphi|)} F_\alpha F^\alpha + M_{|\varphi|} \overline{\mathcal{D}_\alpha \varphi} \mathcal{D}^\alpha \varphi + \frac{q}{e} G_{|\varphi|} F_\alpha \mathcal{J}^\alpha - V_{|\varphi|} \right), \quad (7.2a)$$

$$\varepsilon^{\gamma\alpha\beta} \partial_\alpha \left(\frac{1}{\mu(|\varphi|)} F_\beta - \frac{q}{e} G(|\varphi|) \mathcal{J}_\beta \right) = \kappa F^\gamma - \mathcal{J}^\gamma, \quad (7.2b)$$

onde

$$\mathcal{J}_\alpha = ieM(|\varphi|)(\overline{\varphi} \mathcal{D}_\alpha \varphi - \varphi \overline{\mathcal{D}_\alpha \varphi}), \quad (7.3)$$

é a 3-corrente. Note que a corrente conservada para o modelo (7.1) é diferente dos modelos anteriores. Poderíamos ainda escrevê-la como $\mathcal{J}_\alpha = J_\alpha + 2qe|\varphi|^2 G(|\varphi|) M(|\varphi|) F_\alpha$, onde J_α é a 3-corrente associada aos modelos com acoplamento mínimo, definido na equação (4.5). O tensor energia-momento para esse modelo é dado por

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} = & \left(\frac{1}{\mu(|\varphi|)} - 2q^2|\varphi|^2 G^2(|\varphi|) M(|\varphi|) \right) \left(F_\alpha F_\beta - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} F_\gamma F^\gamma \right) \\ & + M(|\varphi|) \left(\overline{\mathcal{D}_\alpha \varphi} D_\beta \varphi + \overline{\mathcal{D}_\beta \varphi} D_\alpha \varphi - \eta_{\alpha\beta} \overline{\mathcal{D}_\lambda \varphi} D^\lambda \varphi \right) + \eta_{\alpha\beta} V(|\varphi|). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Note que as derivadas covariantes que aparecem no tensor energia-momento do modelo (7.1) são do acoplamento mínimo ($D_\alpha = \partial_\alpha + ieA_\alpha$). Podemos escrever $T_{\alpha\beta}$ em termos de suas componentes, cujas formas são

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2|\varphi|^2 G^2 M \right) (\vec{E}^2 + B^2) + M (|D_0 \varphi|^2 + |D_1 \varphi|^2 + |D_2 \varphi|^2) + V, \quad (7.5a)$$

$$T_{0i} = - \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2|\varphi|^2 G^2 M \right) \varepsilon_{ij} E^j B + M (\overline{D_0 \varphi} D_i \varphi + D_0 \varphi \overline{D_i \varphi}), \quad (7.5b)$$

$$\begin{aligned} T_{ij} = & \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2|\varphi|^2 G^2 M \right) \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E}^2 + B^2) - E_i E_j \right) + M (\delta_{ij} (|D_0 \varphi|^2 - |D_1 \varphi|^2 - |D_2 \varphi|^2) \\ & + \overline{D_i \varphi} D_j \varphi + D_i \varphi \overline{D_j \varphi}) - \delta_{ij} V, \end{aligned} \quad (7.5c)$$

onde cada uma representa uma quantidade física.

Até o momento não fomos capazes de fazer o procedimento de Bogomol'nyi, para isso precisaremos tomar alguns vínculos entre as funções envolvidas do modelo (7.1). Algo semelhante ao que foi realizado no capítulo anterior, quando vinculamos as funções $\mu(|\varphi|)$ e $M(|\varphi|)$ na equação (6.17). Porém, podemos obter algumas informações extras quando tomamos o ansatz usual para vórtices, não iremos reescrevê-los novamente aqui, mas pode ser visto na equação (6.4) com as condições de contorno (6.5), lembrando que as condições de contorno nos extremos são determinadas para que tenhamos soluções com energia finita. Os campos elétricos e magnéticos serão os mesmos da (6.6), assim como o fluxo magnético, que dependerá das condições de contorno do campo $a(r)$. As densidades de carga e de corrente da equação (7.3) serão

$$\mathcal{J}_0 = -2eg^2 M \left(eh - \frac{qGa'}{er} \right) \quad \text{e} \quad \vec{\mathcal{J}} = 2eg^2 M \left(\frac{a}{r} - qGh' \right) \hat{\theta}. \quad (7.6)$$

Assim, a equação de movimento para o campo escalar (7.2a) toma forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (rMg')' + \left(gM + \frac{1}{2}g^2M_g\right) \left(\left(eh - \frac{qGa'}{er} \right)^2 - \left(\frac{a}{r} - qGh' \right)^2 \right) - \frac{1}{2}M_g g'^2 \\ + \left(\frac{\mu_g}{4\mu^2} + q^2g^2GMG_g \right) \left(\frac{a'^2}{e^2r^2} - h'^2 \right) + qg^2MG_g \left(\frac{ah'}{r} - \frac{ha'}{r} \right) - \frac{1}{2}V_g = 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

As leis de Gauss e Ampère dados pela equação (7.2b) serão, respectivamente,

$$\frac{1}{r} \left(\left(\frac{1}{\mu} - 2q^2g^2G^2M \right) rh' + 2qg^2GMa \right)' - \left(1 - \frac{2qe}{\kappa}g^2GM \right) \frac{\kappa a'}{er} - 2e^2g^2Mh = 0, \quad (7.8a)$$

$$\left(\left(\frac{1}{\mu} - 2q^2g^2G^2M \right) \frac{a'}{er} + 2qe g^2GMh \right)' - \left(1 - \frac{2qe}{\kappa}g^2GM \right) \kappa h' - \frac{2eg^2Ma}{r} = 0. \quad (7.8b)$$

Podemos usá-las para reescrever a equação (7.6) como

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= \frac{1}{r} \left(\left(1 - \frac{2qe}{\kappa}g^2GM \right) \frac{\kappa a}{e} - (P - 2q^2g^2G^2M) rh' \right)', \\ \vec{\mathcal{J}} &= -\hat{\theta} \left(\left(1 - \frac{2eq}{\kappa}g^2GM \right) \kappa h - \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2g^2G^2M \right) \frac{a'}{er} \right)'. \end{aligned} \quad (7.9)$$

A densidade de energia (7.5a) será

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2g^2G^2M \right) \left(h'^2 + \frac{a'^2}{e^2r^2} \right) + M \left(e^2g^2h^2 + g'^2 + \frac{a^2g^2}{r^2} \right) + V, \quad (7.10)$$

e as outras componentes do tensor energia-momento serão

$$T_{01} = -\frac{1}{er} \left(\left(\frac{1}{\mu} - 2q^2g^2G^2M \right) a'h' + 2e^2g^2Mah \right) \sin(\theta), \quad (7.11a)$$

$$T_{02} = \frac{1}{er} \left(\left(\frac{1}{\mu} - 2q^2g^2G^2M \right) a'h' + 2e^2g^2Mah \right) \cos(\theta), \quad (7.11b)$$

$$T_{12} = \left(M \left(g'^2 - \frac{g^2a^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2g^2G^2M \right) h'^2 \right) \sin(2\theta), \quad (7.11c)$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2g^2G^2M \right) \frac{a'^2}{e^2r^2} + e^2g^2Mh^2 - V \\ &\quad + \left(M \left(g'^2 - \frac{g^2a^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2g^2G^2M \right) h'^2 \right) \cos(2\theta), \end{aligned} \quad (7.11d)$$

$$\begin{aligned} T_{22} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2g^2G^2M \right) \frac{a'^2}{e^2r^2} + e^2g^2Mh^2 - V \\ &\quad + \left(M \left(\frac{g^2a^2}{r^2} - g'^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2g^2G^2M \right) h'^2 \right) \cos(2\theta), \end{aligned} \quad (7.11e)$$

que em coordenadas polares ficam representadas por

$$T_{0\theta} = \frac{1}{er} \left(\left(\frac{1}{\mu} - 2q^2 g^2 G^2 M \right) a' h' + 2e^2 g^2 M a h \right), \quad (7.12a)$$

$$T_{rr} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2 g^2 G^2 M \right) \frac{a'^2}{e^2 r^2} + e^2 g^2 M h^2 - V \\ + \left(M \left(g'^2 - \frac{g^2 a^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2 g^2 G^2 M \right) h'^2 \right), \quad (7.12b)$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2 g^2 G^2 M \right) \frac{a'^2}{e^2 r^2} + e^2 g^2 M h^2 - V \\ + \left(M \left(\frac{g^2 a^2}{r^2} - g'^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2 g^2 G^2 M \right) h'^2 \right). \quad (7.12c)$$

Usando a lei de Gauss (7.8a) na densidade de energia (7.10), obtemos

$$\rho = \frac{1}{r} \left(\left(\frac{1}{\mu} - 2q^2 g^2 G^2 M \right) r h h' + 2q a g^2 G M h \right)' + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2 g^2 G^2 M \right) \\ \times \left(\frac{a'^2}{e^2 r^2} - h'^2 \right) + M \left(g'^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} - e^2 g^2 h^2 + \frac{2q g^2 G}{r} (h a' - a h') \right) + V. \quad (7.13)$$

Assim como nos capítulos anteriores, podemos fazer uma reescala $r \rightarrow \lambda r$ nas funções $g(r)$, $a(r)$ e $h(r)$ e usar o teorema de Derrick. Para que as componentes do tensor energia-momento tenha simetria axial, temos que

$$M \left(g'^2 - \frac{g^2 a^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2 g^2 G^2 M \right) h'^2 = 0. \quad (7.14)$$

Essa exigência faz com que $T_{12} = 0$, $T_{11} = T_{22} = \sigma$, onde σ é uma constante. Para que as soluções sejam estáveis por reescala temos que $\sigma = 0$, que nos leva a

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - 2q^2 g^2 G^2 M \right) \frac{a'^2}{e^2 r^2} + e^2 g^2 M h^2 - V = 0. \quad (7.15)$$

Concluimos que para que essas soluções sejam estáveis por contrações e dilatações, devem ter o tensor de estresse nulo $T_{ij} = 0$. Veja que apesar de obtermos duas equações diferenciais de primeira ordem (7.14) e (7.15), não será suficiente para resolver as equações de movimento (7.7) e (7.8). Entretanto, conseguimos desenvolver duas maneiras distintas de obter equações diferenciais de primeira ordem para o modelo geral (7.1), separamos em caso 1 e caso 2.

7.2 Caso 1

Esse caso foi inicialmente considerado em [165], para o modelo (7.1) com $\mu(\varphi) = M(\varphi) = G(\varphi) = 1$. Nesse trabalho os autores consideram soluções com simetria rotacional

e conseguem obter equações diferenciais de primeira ordem que satisfazem as equações diferenciais de segunda ordem (7.7) e (7.8), entretanto só existirão soluções não-topológicas. Uma generalização desse método foi realizado em [167, 168], onde inclui a permeabilidade magnética $\mu(|\varphi|)$ com condições específicas. Em seguida, na referência [169] os autores obtêm equações diferenciais de primeira ordem sem assumir invariância rotacional, satisfazendo as equações (7.2). Nos trabalhos citados acima foi considerado $M(|\varphi|) = 1$, aqui faremos uma extensão da sugestão deles com a inclusão da função geral $M(|\varphi|)$. Consideraremos que a permeabilidade magnética $\mu(|\varphi|)$ e a função $G(|\varphi|)$ satisfaçam

$$\frac{q\kappa}{e}\mu(|\varphi|)G(|\varphi|) = 1. \quad (7.16)$$

Nesse caso, a densidade lagrangiana (7.1) toma forma

$$\mathcal{L} = -\frac{q\kappa}{4e}G(|\varphi|)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\lambda\mu\nu}A_\lambda F_{\mu\nu} + M(|\varphi|)\overline{\mathcal{D}_\mu\varphi}\mathcal{D}^\mu\varphi - V(|\varphi|), \quad (7.17)$$

e a equação de movimento para o campo de calibre (7.2b) torna-se

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu\left(\frac{q}{e}G(|\varphi|)(\kappa F_\lambda - \mathcal{J}_\lambda)\right) + \kappa F^\nu - \mathcal{J}^\nu = 0, \quad (7.18)$$

que pode ser resolvida por $\mathcal{J}_\mu = \kappa F_\mu$. Para essas soluções em particular, podemos relacionar a densidade de carga com o campo magnético $\mathcal{J}_0 = -\kappa B$. Portanto, podemos escrever a carga em termos do fluxo

$$Q = -\kappa\Phi. \quad (7.19)$$

Fazendo a redefinição de campos $\varphi = |\varphi|e^\Lambda$ e $A_\mu = \tilde{A}_\mu - (1/e)\partial_\mu\Lambda$ podemos reescrever $\mathcal{J}_\mu = \kappa F_\mu$ como

$$\kappa F_\mu = -\frac{2e^2|\varphi|^2M(|\varphi|)\tilde{A}_\mu}{f(|\varphi|)}, \quad (7.20)$$

onde

$$f(|\varphi|) = 1 - \frac{2qe}{\kappa}|\varphi|^2G(|\varphi|)M(|\varphi|). \quad (7.21)$$

Essa função deve ser não negativa e será igual a um quando $q = 0$, onde recuperamos o modelo (5.1). As componentes 0 e i da equação (7.20) serão as leis de Gauss e Ampère, dadas por

$$\kappa B = \frac{2e^2|\varphi|^2M(|\varphi|)\tilde{A}_0}{f(|\varphi|)}, \quad (7.22a)$$

$$\kappa E^i = \frac{2e^2|\varphi|^2M(|\varphi|)\epsilon^{ij}\tilde{A}_j}{f(|\varphi|)}. \quad (7.22b)$$

Note que essas equações são de primeira ordem e lembram muito as equações do modelo de Chern-Simons-Higgs, veja (5.2b), a única diferença é devido à função $f(|\varphi|)$ definida

em (7.21). A equação de movimento do campo escalar (7.2a) para as soluções da equação (7.20) será

$$\mathcal{D}_\mu (M(|\varphi|)\mathcal{D}^\mu \varphi) - \frac{\varphi}{2|\varphi|} \left(M_{|\varphi|} \overline{\mathcal{D}_\mu \varphi} \mathcal{D}^\mu \varphi + \frac{q\kappa}{2e} G_{|\varphi|} F_\mu F^\mu - V_{|\varphi|} \right) = 0, \quad (7.23)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem. Para simplificar o problema, iremos desenvolver o método Bogomol'nyi nesse caso. Usando (7.20) para substituir $\tilde{A}_0$ e E^i na densidade de energia (7.5a), obtemos

$$\begin{aligned} \rho = M(|\varphi|) & \left((\partial_0 |\varphi|)^2 + (\partial_1 |\varphi|)^2 + (\partial_2 |\varphi|)^2 + \frac{e^2 \tilde{A}_1^2 |\varphi|^2}{f(|\varphi|)} + \frac{e^2 \tilde{A}_2^2 |\varphi|^2}{f(|\varphi|)} \right) \\ & + \frac{\kappa^2 f(|\varphi|) B^2}{4e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|)} + V(|\varphi|). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Introduzindo a notação $\partial_\pm = \partial_1 \pm i\partial_2$ e $\tilde{A}_\pm = \tilde{A}_1 \pm i\tilde{A}_2$, podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned} \rho = M(|\varphi|) & \left((\partial_0 |\varphi|)^2 + \left| \partial_\pm |\varphi| + \frac{ie\tilde{A}_\pm |\varphi|}{\sqrt{f(|\varphi|)}} \right|^2 \right) \pm \frac{2e|\varphi| M(|\varphi|) \epsilon^{ij} \tilde{A}_j \partial_i |\varphi|}{\sqrt{f(|\varphi|)}} \\ & + \frac{\kappa^2 f(|\varphi|)}{4e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|)} \left(B \mp \frac{2e}{\kappa} |\varphi| \sqrt{\frac{M(|\varphi|) V(|\varphi|)}{f(|\varphi|)}} \right)^2 \mp \frac{\kappa}{e} \sqrt{\frac{f(|\varphi|) V(|\varphi|)}{|\varphi|^2 M(|\varphi|)}} \epsilon^{ij} \partial_i A_j. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Para o vínculo

$$\frac{d}{d|\varphi|} \left(\sqrt{\frac{f(|\varphi|) V(|\varphi|)}{|\varphi|^2 M(|\varphi|)}} \right) = -\frac{2e^2 |\varphi| M(|\varphi|)}{\kappa \sqrt{f(|\varphi|)}}, \quad (7.26)$$

teremos o potencial

$$V(|\varphi|) = \frac{4e^4 |\varphi|^2 M(|\varphi|)}{\kappa^2 f(|\varphi|)} \left(\int d|\varphi| \frac{|\varphi| M(|\varphi|)}{\sqrt{f(|\varphi|)}} \right)^2. \quad (7.27)$$

Considerando o vínculo (7.26) na densidade de energia (7.76) e fazendo uma integração em todo espaço, obtemos a energia

$$\begin{aligned} E = \int dx^2 & \left(M(|\varphi|) \left((\partial_0 |\varphi|)^2 + \left| \partial_\pm |\varphi| + \frac{ie|\varphi| \tilde{A}_\pm}{\sqrt{f(|\varphi|)}} \right|^2 \right) + \frac{\kappa^2 f(|\varphi|)}{4e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|)} \right. \\ & \times \left(B \mp \frac{2e}{\kappa} |\varphi| \sqrt{\frac{M(|\varphi|) V(|\varphi|)}{f(|\varphi|)}} \right)^2 \mp \frac{\kappa}{e} \epsilon^{ij} \partial_i \left(\sqrt{\frac{f(|\varphi|) V(|\varphi|)}{|\varphi|^2 M(|\varphi|)}} A_j \right) \\ & \left. \pm \frac{2|\varphi| M(|\varphi|) \epsilon^{ij} (\partial_i |\varphi|) (\partial_j \Lambda)}{\sqrt{f(|\varphi|)}} \right). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Definimos a função

$$\mathcal{W}(|\varphi|) = \frac{\kappa}{e} \sqrt{\frac{f(|\varphi|)V(|\varphi|)}{|\varphi|^2 M(|\varphi|)}}, \quad (7.29)$$

para reescrever a enegia como

$$\begin{aligned} E = \int dx^2 & \left(M(|\varphi|) \left((\partial_0 |\varphi|)^2 + \left| \partial_\pm |\varphi| + \frac{ie|\varphi|\tilde{A}_\pm}{\sqrt{f(|\varphi|)}} \right|^2 \right) + \frac{\kappa^2 f(|\varphi|)}{4e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|)} \right. \\ & \times \left(B \mp \frac{2e}{\kappa} |\varphi| \sqrt{\frac{M(|\varphi|)V(|\varphi|)}{f(|\varphi|)}} \right)^2 \Big) \mp \mathcal{W}_\infty \oint_{r \rightarrow \infty} dx^i A_i \\ & \mp \frac{1}{e} \mathcal{W}_\infty \oint_{r \rightarrow \infty} dx^i \partial_i \Lambda \pm \frac{1}{e} \int dx^2 \mathcal{W}(|\varphi|) \epsilon^{ij} \partial_i \partial_j \Lambda, \end{aligned} \quad (7.30)$$

onde $\mathcal{W}_\infty$ é o valor de $\mathcal{W}(|\varphi|)$ em $r \rightarrow \infty$. A energia terá um valor mínimo, dado por

$$E \geq E_B = |\Phi \mathcal{W}_\infty| - 2\pi \left| \frac{n}{e} \mathcal{W}_\infty \right| + 2\pi \left| \frac{n}{e} \mathcal{W}(0) \right|, \quad (7.31)$$

e será mínima $E = E_B$, quando

$$\partial_0 |\varphi| = 0, \quad (7.32a)$$

$$\partial_\pm |\varphi| + \frac{ie|\varphi|\tilde{A}_\pm}{\sqrt{f(|\varphi|)}} = 0, \quad (7.32b)$$

$$B \mp \frac{2e}{\kappa} |\varphi| \sqrt{\frac{V(|\varphi|)M(|\varphi|)}{f(|\varphi|)}} = 0, \quad (7.32c)$$

que são equações diferenciais de primeira ordem que satisfazem as equações de movimento (7.20) e (7.23), desde que o potencial tenha forma dada por (7.27). Usando a lei de Gauss (7.22a) podemos escrever

$$\tilde{A}_0 = \pm \frac{1}{e|\varphi|} \sqrt{\frac{V(|\varphi|)f(|\varphi|)}{M(|\varphi|)}}. \quad (7.33)$$

Essas equações além de minimizarem a energia, fazem com que as componentes do tensor energia-momento (7.5c) sejam iguais a zero, ou seja, $T_{ij} = 0$. Porém a componente T_{0i} não é nula e possui a forma

$$T_{0i} = \frac{2e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|) \tilde{A}_0 \tilde{A}_i}{f(|\varphi|)} = \kappa B \tilde{A}_i, \quad (7.34)$$

indicando que essas soluções possuem momento angular.

Considerando soluções com simetria circular (ansatz), as equações (7.20) tornam-se

$$\frac{\kappa a'}{er} + \frac{2e^2 g^2 M(g) h}{f(g)} = 0, \quad (7.35a)$$

$$\kappa h' + \frac{2eag^2 M(g)}{rf(g)} = 0, \quad (7.35b)$$

onde $f(g)$ é dada pela equação (7.21). A equação de movimento para o campo escalar (7.23) para o ansatz (6.4), será

$$\frac{1}{r} (rMg')' + \frac{g}{f^2} \left(M + \frac{1}{2}gM_g + \frac{qe}{\kappa}g^3M^2G_g \right) \left(e^2h^2 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} (M_g g'^2 + V_g) = 0. \quad (7.36)$$

Substituindo o ansatz nas equações diferenciais de primeira ordem (7.32), teremos

$$g' = \pm \frac{ag}{r} \frac{1}{\sqrt{f}}, \quad (7.37a)$$

$$-\frac{a'}{er} = \pm \frac{2eg}{\kappa} \sqrt{\frac{MV}{f}}, \quad (7.37b)$$

e substituindo em (7.33), temos

$$h = \pm \frac{1}{eg} \sqrt{\frac{Vf}{M}}. \quad (7.38)$$

Lembrando que o potencial deve resolver o vínculo (7.26), nesse caso, as equações diferenciais de primeira ordem (7.37) juntamente com a equação acima satisfaz as equações de movimento (7.35) e (7.36). Os sinais de mais ou menos indica quando teremos soluções com vorticidade positiva ou negativa respectivamente e podem ser relacionadas a partir da troca $a \rightarrow -a$ e $h \rightarrow -h$. Vale ressaltar que poderíamos ter usado as equações obtidas a partir do argumento de Derrick (7.14) e (7.15), juntamente com (7.35) para obter essas mesmas equações diferenciais de primeira ordem. Para as soluções das equações acima a densidade de energia (7.10) pode ser escrita como $\rho = \pm(1/r)W'$, onde o funcional de energia é dado por

$$W(a, g) = -\frac{\kappa a}{e^2 g} \sqrt{\frac{V(g)f(g)}{M(g)}}, \quad (7.39)$$

com energia

$$E = 2\pi |W(a(\infty), g(\infty)) - W(a(0), g(0))|. \quad (7.40)$$

Podemos ainda escrever a densidade de energia para essas soluções dependendo apenas dos campos g e a como

$$\rho = \frac{2a^2 g^2 M}{r^2 f} + 2V. \quad (7.41)$$

Escrever a densidade de energia dessa forma é conveniente para determinarmos as condições de contorno nos infinitos para cada modelo. Para as condições de contornos adequadas, podemos calcular o momento angular (4.12) como $L = -(\pi\kappa/e^2)(n^2 - a_\infty^2)$.

Ressaltamos aqui a presença da função f na equação (7.37a). Por conta dessa função não é possível fazer um estudo das soluções próximos da origem, seus comportamentos dependerão da função f quando $r \approx 0$. Para os modelos estudados até o momento, quando temos soluções topológicas, a função $g(r)$ é monotonicamente crescente, conectando $g = 0$ e $g = v$. Já as soluções $a(r)$ serão funções monotonicamente decrescentes ou crescentes, dependendo da vorticidade. Para essas soluções topológicas, a derivada $g'(r)$ nunca zera,

exeto quando $r \rightarrow \infty$. Existem modelos que $a'(r)$ pode zerar nesse intervalo [128]. Porém, até onde se sabe, não existem modelos onde $g'(r)$ tem esse comportamento. Como já foi mencionado, o aparecimento dessa função f , pode modificar completamente as soluções, não só a origem, mas como também em todo o intervalo de validade, levando à modelos com novas características.

Podemos fazer a reescala

$$x_\alpha \rightarrow \frac{1}{\kappa} x_\alpha, \quad \varphi \rightarrow \frac{\kappa}{e} \varphi, \quad A_\alpha \rightarrow \frac{\kappa}{e} A_\alpha, \quad v \rightarrow \frac{\kappa}{e} v, \quad q \rightarrow \frac{e}{\kappa} q, \quad \mathcal{L} \rightarrow \frac{\kappa^4}{e^2} \mathcal{L} \quad (7.42)$$

para trabalharmos com quantidades adimensionais. Logo, podemos fazer $e = \kappa = 1$ sem perda de generalidade.

7.2.1 Exemplos

Agora ilustramos nosso procedimento com uma generalização dos modelos considerados em [165, 167, 168], dado por

$$G(|\varphi|) = \frac{1 - M^2(|\varphi|) (1 - |\varphi|^2/v^2)^{1-l}}{2q|\varphi|^2 M(|\varphi|)}, \quad (7.43)$$

onde l é um parâmetro real e v é o parâmetro de quebra de simetria. Da definição (7.21), temos que $f(|\varphi|) = M^2(|\varphi|) (1 - |\varphi|^2/v^2)^{1-l}$. Note que, em princípio, $M(|\varphi|)$ é arbitrário, restrito apenas pelo caráter não negativo da densidade de energia. Recuperamos o modelo estudado em [165, 166], tomando $M = 1$ e $l = 0$, que resulta em $G = 1/(2qv^2)$, com permeabilidade magnética constante. Esse resultado foi generalizado em [167, 168], que considera $M = 1$ e l arbitrário, logo, $G(|\varphi|) = (1 - (1 - |\varphi|^2/v^2)^{1-l})/(2q|\varphi|^2)$. Para uma função geral $M(|\varphi|)$, a equação acima pode ser substituída em (7.27) para obtermos o potencial

$$V(|\varphi|) = \frac{4v^4|\varphi|^2}{(l+1)^2 M(|\varphi|)} \left(1 - \frac{|\varphi|^2}{v^2}\right)^{2l}, \quad (7.44)$$

onde escolhemos a constante de integração adequadamente para obter quebra de simetria, independentemente de $M(|\varphi|)$. Para encontrar as soluções, devemos resolver as equações diferenciais de primeira ordem (7.37), que para esse modelo serão dadas por

$$g' = \frac{ag}{rM(g)} \left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right)^{\frac{l-1}{2}}, \quad (7.45a)$$

$$-\frac{a'}{er} = \frac{4v^2g^2}{(l+1)M(g)} \left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right)^{\frac{3l-1}{2}}. \quad (7.45b)$$

Note que é necessário sugerir uma forma para a função $M(g)$ para obtermos as soluções. O campo $h(r)$ dado pela equação (7.38) é escrito em termos da solução $g(r)$ como

$$h(r) = \frac{2v^2}{(l+1)} \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^{\frac{l+1}{2}}. \quad (7.46)$$

Na origem temos que $h_0 = 2v^2/(l+1)$. Observe que h não depende explicitamente de $M(g)$, entretanto muda o comportamento de $g(r)$, que deve ser substituído na equação acima.

O funcional de energia (7.39) toma forma

$$W(a, g) = -\frac{2v^2 a}{(l+1)} \left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right)^{\frac{l+1}{2}}. \quad (7.47)$$

Então, a energia não depende de $M(g)$, uma vez que, depende apenas dos valores limites de $a(r)$ e $g(r)$, veja a equação (7.40). Por outro lado, a densidade de energia é modificada por $M(g)$, para esse modelo a equação (7.41) toma a forma

$$\rho = \frac{2g^2}{M(g)} \left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right)^{l-1} \left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{4v^4}{(l+1)^2} \left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right)^{l+1}\right). \quad (7.48)$$

Lembrando que é a partir da densidade de energia acima que determinamos as condições de contorno nos infinitos. No entanto, deve-se ter o cuidado de tomar as condições de contorno adequadas, pois estão relacionadas com o caráter topológico ou não-topológico do vórtice e além disso, as soluções devem ter energia finita. Revisaremos o caso mais simples, que aparece para $M = 1$ que foi estudado [165, 167, 168]. Em particular, na referência [165], temo que $M = 1$ e $l = 0$, a densidade de energia torna-se

$$\rho = 2g^2 \left(\frac{a^2}{r^2} \left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right)^{-1} + 4v^4\right). \quad (7.49)$$

Portanto, para garantir a finitude da energia, devemos impor que $g_\infty = 0$ com a_∞ qualquer. Isso significa que as soluções de vórtices encontradas devem ter caráter não topológico. Esse modelo foi generalizado nas referências [167, 168], com a inclusão de uma permeabilidade magnética generalizada conduzida pelo campo escalar. Para $M = 1$ e $l = 1$, recuperamos o modelo Chern-Simons-Higgs canônico [138, 139, 151], com a densidade de energia dada por

$$\rho = 2g^2 \left(\frac{a^2}{r^2} + (v^2 - g^2)^2\right). \quad (7.50)$$

Teremos soluções topológicas ($a_\infty = 0$ e $g_\infty = v$), ou não-topológicas ($a_\infty \neq 0$ e $g_\infty = 0$), como vimos no capítulo 5. Para $M = 1$ e $l > 1$, pode-se ver de (7.48) que as soluções topológicas são suportadas pelo modelo, com a_∞ qualquer e $g(\infty) \rightarrow v$. Diferentemente dos modelos estudados nos capítulos anteriores, não precisamos que $a_\infty = 0$ para que tenhamos energia finita, pois aqui existe um fator $(1 - g^2/v^2)^{l-1}$, que é zero em $g = v$, como também zera o lado direito das equações diferenciais de primeira ordem (7.45). Esse modelo também suporta soluções não-topológicas, com a_∞ qualquer e $g(\infty) \rightarrow 0$, pois o fator g^2 vai para zero e protege a energia contra divergências. Usando as equações (7.47) e (7.40) pode-se mostrar que, neste caso, as soluções topológicas tem energia $E = 4\pi v^2 |n|/(l+1)$, enquanto as soluções não-topológicas tem energia $E = 4\pi v^2 |n - a_\infty|/(l+1)$.

Introduziremos dois novos modelos, onde a função $M \neq 1$, leva à novas configurações de vórtice. Primeiramente consideraremos um modelo que modificamos o comportamento das soluções na origem [172]. Em seguida mostraremos modelos que geram zeros na derivada de $g(r)$, que nos leva a vórtices com multianéis em suas quantidades físicas, veja [173].

7.2.1.1 Exemplo 1.1

Consideraremos uma função $M(|\varphi|)$ que dependa de um parâmetro λ . Este modelo foi estudado em [172], onde escolhemos a função $M(|\varphi|)$ de maneira apropriada para levar a modificações no centro do vórtices. Para

$$M(|\varphi|) = \left(\lambda + (1 - \lambda) \frac{|\varphi|^2}{v^2} \right) \left(1 - \frac{|\varphi|^2}{v^2} \right)^{\frac{l-1}{2}}, \quad (7.51)$$

onde λ é um parâmetro com $\lambda \in (0, 1]$. Da equação (7.43) temos que

$$G(|\varphi|) = \frac{1 - \left(\lambda + (1 - \lambda) \frac{|\varphi|^2}{v^2} \right)^2}{2q|\varphi|^2 \left(\lambda + (1 - \lambda) \frac{|\varphi|^2}{v^2} \right)} \left(1 - \frac{|\varphi|^2}{v^2} \right)^{\frac{1-l}{2}}. \quad (7.52)$$

Note que para $\lambda = l = 1$ recuperamos o modelo Chern-Simons-Higgs canônico. O potencial (7.44) toma forma

$$V(|\varphi|) = \frac{4v^4|\varphi|^2 \left(1 - \frac{|\varphi|^2}{v^2} \right)^{\frac{3l+1}{2}}}{(l+1)^2 \left(\lambda + (1 - \lambda) \frac{|\varphi|^2}{v^2} \right)}. \quad (7.53)$$

Com mínimos em $|\varphi| = 0$ e $|\varphi| = v$, como pode ser visto na figura 7.1 para $v = l = 1$ e alguns valores de λ .

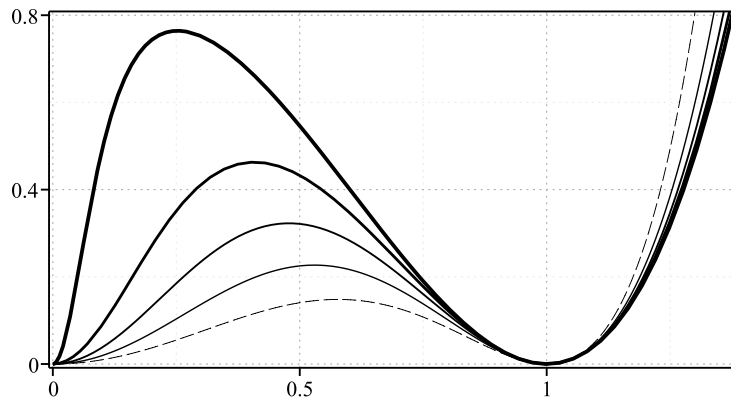


Figura 7.1 Potencial $V(|\varphi|)$ dado pela equação (7.53) para $v = l = 1$ e $\lambda = 0.01, 0.1, 0.25, 0.5$ e 1. A espessura das linhas sólidas diminui com λ , em particular para $\lambda = 1$ temos a linha tracejada.

As equações diferenciais de primeira ordem (7.45) serão

$$g' = \frac{ag}{r(\lambda + (1-\lambda)g^2/v^2)}, \quad (7.54a)$$

$$-\frac{a'}{r} = \frac{4v^2g^2(1-g^2/v^2)^l}{(l+1)(\lambda + (1-\lambda)g^2/v^2)}. \quad (7.54b)$$

Agora investigamos o comportamento das soluções perto da origem, tomamos $a_o(r) \approx n - a(r \approx 0)$ e $g_o(r) \approx g(r \approx 0)$ para mostrar que as equações acima levam a

$$g_o(r) \propto r^{\frac{n}{\lambda}} \quad \text{e} \quad a_o(r) \propto r^{\frac{2(n+\lambda)}{\lambda}}. \quad (7.55)$$

Esse comportamento é bastante parecido com o do modelo estudado no capítulo anterior, onde estudamos vórtices de Maxwell-Chern-Simons com acoplamento mínimo. Para determinar $h(r)$, deve-se resolver as equações diferenciais de primeira ordem (7.54) e substituir a solução $g(r)$ conhecida na equação (7.46). A densidade de energia (7.48) torna-se

$$\rho(r) = \frac{2g^2(r)(1-g^2(r)/v^2)^{\frac{l-1}{2}}}{(\lambda + (1-\lambda)g^2(r)/v^2)} \left(\frac{a^2(r)}{r^2} + \frac{4v^4}{(l+1)^2} \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2} \right)^{l+1} \right). \quad (7.56)$$

Pela densidade de energia acima vemos que o modelo suporta tanto soluções topológicas quanto não-topológicas de energia finita para $l \geq 1$. Aqui, lidaremos apenas com soluções topológicas, com $g_\infty = v$ e $a_\infty = 0$. A partir das equações (7.47) e (7.40), é simples mostrar que a energia das soluções topológicas é dada por $E = 4\pi|n|v^2/(1+l)$. Além disso, vemos que o fluxo é $\Phi = 2\pi n$, logo, tanto o fluxo magnético quanto a carga em (7.19) são quantizados.

Em seguida, usamos procedimentos numéricos para resolver as equações diferenciais de primeira ordem envolvidas e encontrar os perfis de $a(r)$, $g(r)$ e $h(r)$. Eles podem ser vistos em 7.2, onde traçamos essas funções para $q = v = n = l = 1$ e alguns valores de λ . Pode-se ver isso, quando λ diminui, o platô que aparece em cada uma das soluções torna-se mais largo. Observe que, embora as soluções se comportem de forma distinta perto da origem, a cauda das soluções são muito semelhantes para os vários valores de λ . Usando essas soluções, calculamos seus respectivos campos elétricos e magnéticos e a densidade de energia. Essas quantidades são exibidas nas figuras 7.3 e 7.4. Observe que elas têm um buraco ao redor da origem, cuja profundidade e largura se tornam maiores à medida que λ diminui.

7.2.1.2 Exemplo 1.2

Mostraremos agora um modelo estudado em [173]. Destacamos que a equação (7.37a) é diferente das equações que aparece no estudo de modelos de vórtices com acoplamento mínimo, que só leva a um perfil monotônico para $g(r)$ no estudo de soluções topológicas.

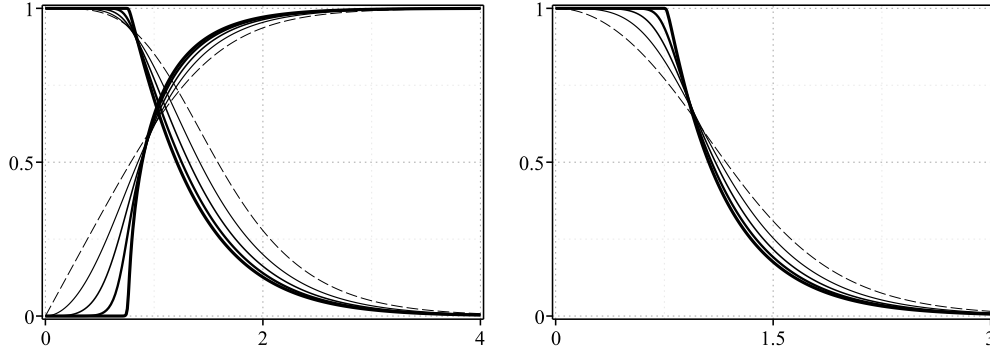


Figura 7.2 Soluções $g(r)$ (crescente) e $a(r)$ (decrecente) das equações diferenciais de primeira ordem (7.54) do lado esquerdo e do lado direito o campo $h(r)$ dado pela equação (7.46) para as soluções de (7.54) com $n = v = l = 1$ e $\lambda = 0.01, 0.1, 0.25, 0.5$ e 1 . A espessura das linhas sólidas diminui com λ , em particular para $\lambda = 1$ temos a linha tracejada.

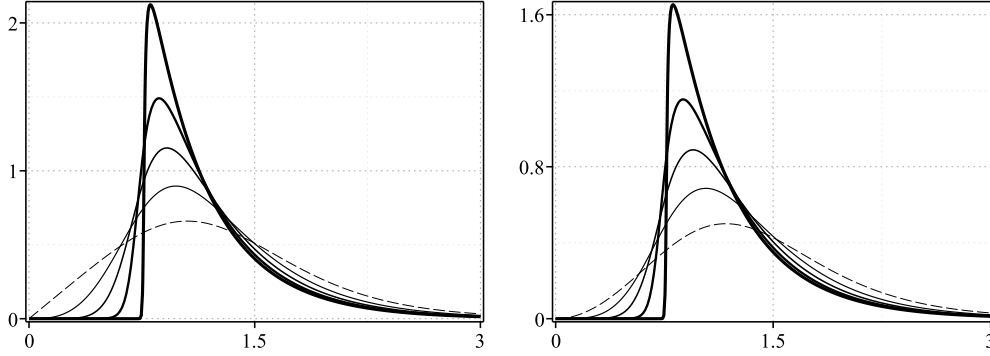


Figura 7.3 Componente radial do campo elétrico $E_r(r)$ e campo magnético $B(r)$ para as soluções da figura 7.2, com $n = v = l = 1$ e $\lambda = 0.01, 0.1, 0.25, 0.5$ e 1 . A espessura das linhas sólidas diminui com λ , em particular para $\lambda = 1$ temos a linha tracejada.

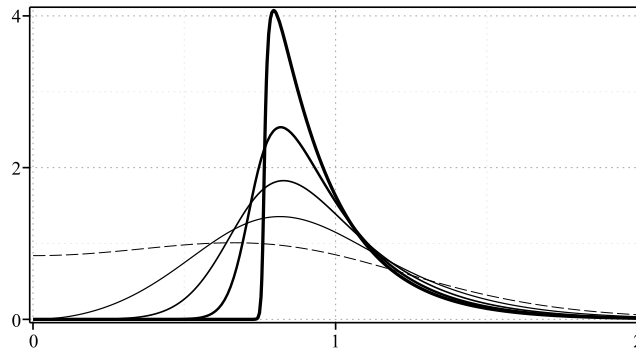


Figura 7.4 Densidade de energia $\rho(r)$ dado pela equação (7.56) para $n = v = l = 1$ e $\lambda = 0.01, 0.1, 0.25, 0.5$ e 1 . A espessura das linhas sólidas diminui com λ , em particular para $\lambda = 1$ temos a linha tracejada.

Aqui, $f(g)$ aparece no denominador no lado direito das equações diferenciais de primeira ordem (7.37) e na densidade de energia (7.41). Portanto, esta função pode ser usada para gerar zeros em $g'(r)$, no campo magnético e na densidade de energia, de modo que ambas as soluções $g(r)$ e $a(r)$ geram platôs nesses pontos. Para ilustrar essa nova característica, tomamos a função $G(|\varphi|)$ da equação (7.43) para $l = 1$ e

$$M^4(|\varphi|) = \frac{1 + \ell}{1 + \ell(1 - |\varphi|^2/w^2)^2}, \quad (7.57)$$

onde $\ell \geq 0$ e $0 < w < v$ são os parâmetros que controlam o modelo. Da equação (7.43), vemos que para $\ell = 0$ leva a $M(|\varphi|) = 1$ e $G(|\varphi|) = 0$, então, o momento magnético anômalo desaparece e o modelo de Chern-Simons-Higgs canônico [138, 139, 151] é recuperado. Quando ℓ aumenta, a função f obtém um valor cada vez maior no ponto r_* , definido por $g(r_*) = w$, portanto, esperamos que a derivada das soluções se torne cada vez menor neste ponto. No limite $\ell \rightarrow \infty$, temos que

$$M(|\varphi|) = \left| 1 - \frac{|\varphi|^2}{w^2} \right|^{-\frac{1}{2}}, \quad (7.58)$$

que é divergente em r_* . O potencial em (7.44) toma forma

$$V_\ell(|\varphi|) = |\varphi|^2 (v^2 - |\varphi|^2)^2 \left(\frac{1 + \ell(1 - |\varphi|^2/w^2)^2}{1 + \ell} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (7.59)$$

que, no limite $\ell \rightarrow \infty$, torna-se

$$V(|\varphi|) = |\varphi|^2 (v^2 - |\varphi|^2)^2 \sqrt{\left| 1 - \frac{|\varphi|^2}{w^2} \right|}. \quad (7.60)$$

Na figura 7.5, nós mostramos o potencial (7.59) para $v = 1$, $w = 1/\sqrt{3}$, e vários valores de ℓ , incluindo $\ell = 0$ e o limite infinito dado na equação acima. Pode-se ver que o comportamento do potencial muda significativamente com ℓ em $|\varphi| = 1/\sqrt{3}$, onde $V(1/\sqrt{3}) = (4/27)(1 + \ell)^{-\frac{1}{4}}$. Começando com $\ell = 0$, podemos ver que este ponto determina um máximo. Quando ℓ aumenta, sua altura desce até $\ell = 3$. Para $\ell > 3$, este ponto se torna um mínimo local do potencial. No limite $\ell \rightarrow \infty$, temos que $V(1/\sqrt{3}) = 0$, portanto, o potencial ganha um mínimo global neste ponto.

Para um ℓ geral, as equações diferenciais de primeira ordem (7.45) serão

$$g' = \frac{ag}{r} \left(\frac{1 + \ell(1 - g^2/w^2)^2}{1 + \ell} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (7.61a)$$

$$-\frac{a'}{r} = 2g^2 (v^2 - g^2) \left(\frac{1 + \ell(1 - g^2/w^2)^2}{1 + \ell} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (7.61b)$$

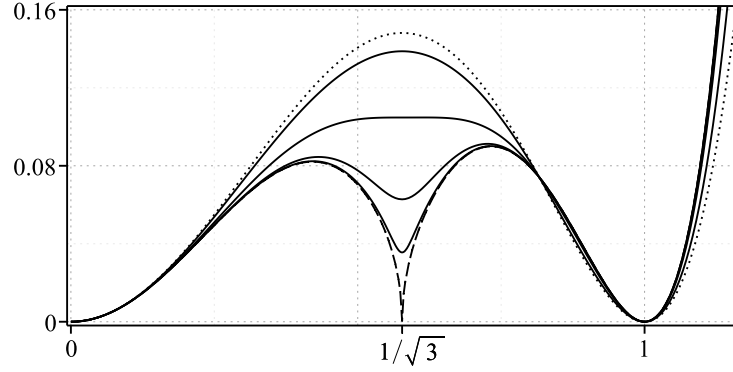


Figura 7.5 Potencial $V(|\varphi|)$ dado pela (7.59) para $v = 1$, $w = 1/\sqrt{3}$ e $\ell = 0, 0.3, 3, 30, 300$ e o limite $\ell \rightarrow \infty$. A linha tracejada representa o caso $\ell = 0$ e a linha com traços e pontos representa o limite $\ell \rightarrow \infty$, descrito pela equação (7.60).

Independentemente do valor de ℓ , a função $h(r)$ é dada em termos da solução $g(r)$ conforme a equação (7.46) para $l = 1$. Para ℓ infinito, as equações acima tornam-se

$$g' = \frac{ag}{r} \sqrt{\left|1 - \frac{g^2}{w^2}\right|}, \quad (7.62a)$$

$$-\frac{a'}{r} = 2g^2 (v^2 - g^2) \sqrt{\left|1 - \frac{g^2}{w^2}\right|}. \quad (7.62b)$$

Para investigarmos o comportamento de $g(r)$ nas proximidades do ponto r_* , fazemos $g(r \approx r_*) - w \approx g_w(r)$ e $a(r \approx r_*) - a_* \approx a_w(r)$, onde $a_* = a(r_*)$. Expandindo até a ordem mais baixa em g_w e a_w , teremos

$$g_w(r) \approx \frac{1}{2} w a_* \operatorname{sgn}(r - r_*) \ln^2\left(\frac{r}{r_*}\right). \quad (7.63)$$

A expressão acima nos permite ver que a função $g(r)$ têm um ponto de inflexão em $r = r_*$ quando $\ell \rightarrow \infty$. Isso também ocorre com $a(r)$ e $h(r)$. A densidade de energia (7.48) toma a forma

$$\rho_\lambda(r) = 2g^2(r) \left(\frac{1 + \lambda \left(1 - g^2(r)/w^2\right)^2}{1 + \lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{a^2(r)}{r^2} + (v^2 - g(r)^2)^2 \right), \quad (7.64)$$

cujos limites para $\lambda \rightarrow \infty$ será

$$\rho(r) = 2g^2(r) \sqrt{\left|1 - \frac{g(r)^2}{w^2}\right|} \left(\frac{a^2(r)}{r^2} + (v^2 - g(r)^2)^2 \right). \quad (7.65)$$

Nos focaremos nas soluções topológicas com $g_\infty = v$ e $a_\infty = 0$. Note que por conta do fator global que multiplica a densidade de energia acima, será nulo no ponto $r = r_*$, onde $g(r) = w$. Isso dá origem a um anel na densidade de energia, cuja localização depende de w .

Na figura 7.6, mostramos as soluções para $v = n = l = 1$, $w = 1/\sqrt{3}$ e vários valores de ℓ . O ponto $r = r_* \approx 0.687$ é um ponto de inflexão das soluções no limite $\ell \rightarrow \infty$, de tal modo que $g(r_*) = 1/\sqrt{3}$, $a(r_*) \approx 0.973$ e $h(r_*) \approx 0.667$. Até onde se sabe, essa característica na função $g(r)$ é nova no estudo de vórtices relativísticos. Na figura 7.7 fazemos os gráficos dos campos elétricos e magnéticos usando (6.6) para as soluções da diferencial equação de primeira ordem (7.61) e (7.62), juntamente com suas respectivas densidades de energia (7.64) e (7.65). Podemos ver que o parâmetro ℓ modifica o comportamento interno da estrutura, levando a um conjunto de zeros em r_* nessas quantidades físicas. Para ilustrar melhor esse comportamento, na figura 7.8 exibimos no plano. Mostrando como o parâmetro ℓ cava a estrutura para formar um anel. Portanto, esse modelo apresenta um maneira de modificar suavemente a inclinação das soluções enquanto seus campos elétricos e magnéticos, como também a densidade de energia vão de um disco para uma estrutura em forma de anel.

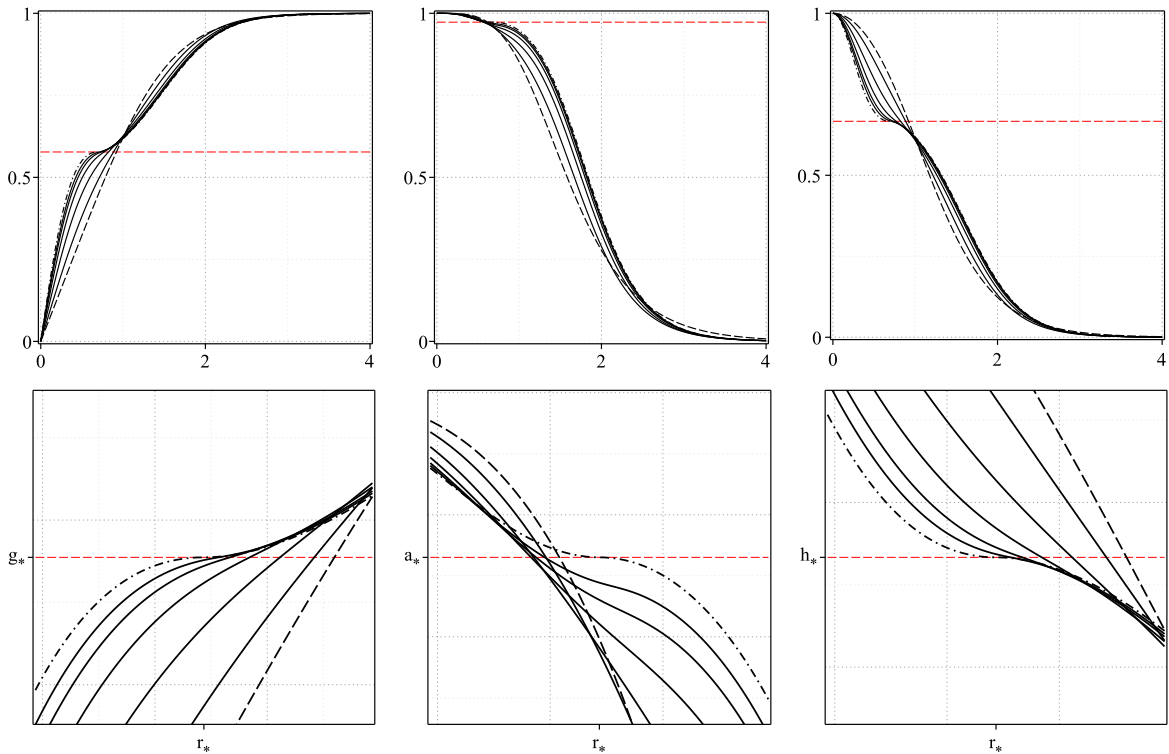


Figura 7.6 Soluções $g(r)$ (esquerda), $a(r)$ (meio) da equação (7.61), e $h(r)$ (direita) dado pela equação (7.46) para $v = l = n = 1$, $w = 1/\sqrt{3}$ e $\ell = 0, 3, 30, 300, 3000, 30000$, e ainda o limite $\ell \rightarrow \infty$. Os painéis inferiores mostram o comportamento dessas soluções perto do ponto $r = r_* \approx 0.687$. A linha tracejada representa $\ell = 0$, as linhas sólidas os demais valores de ℓ , exceto $\ell \rightarrow \infty$ que é dado pela linha com traços e pontos.

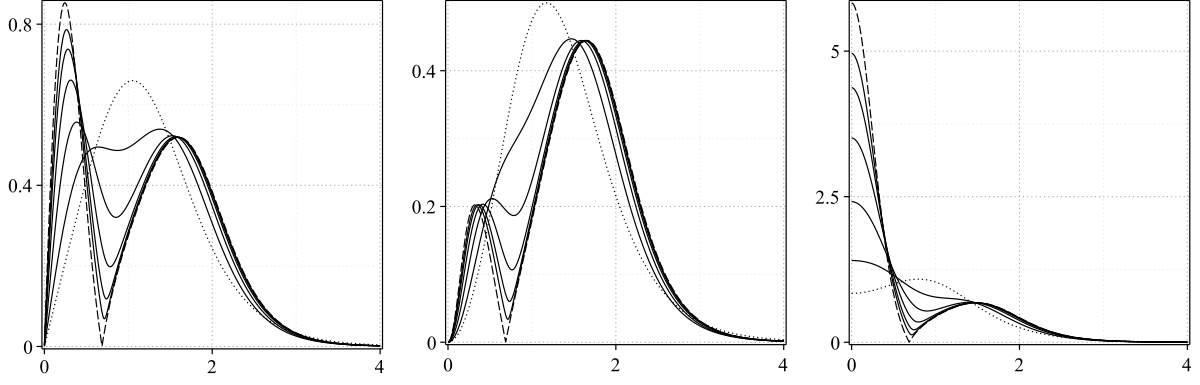


Figura 7.7 Componente radial do campo elétrico $E_r(r)$ (esquerda), campo magnético $B(r)$ (meio) e densidade de energia $\rho(r)$ (direita) para as soluções da figura 7.6.

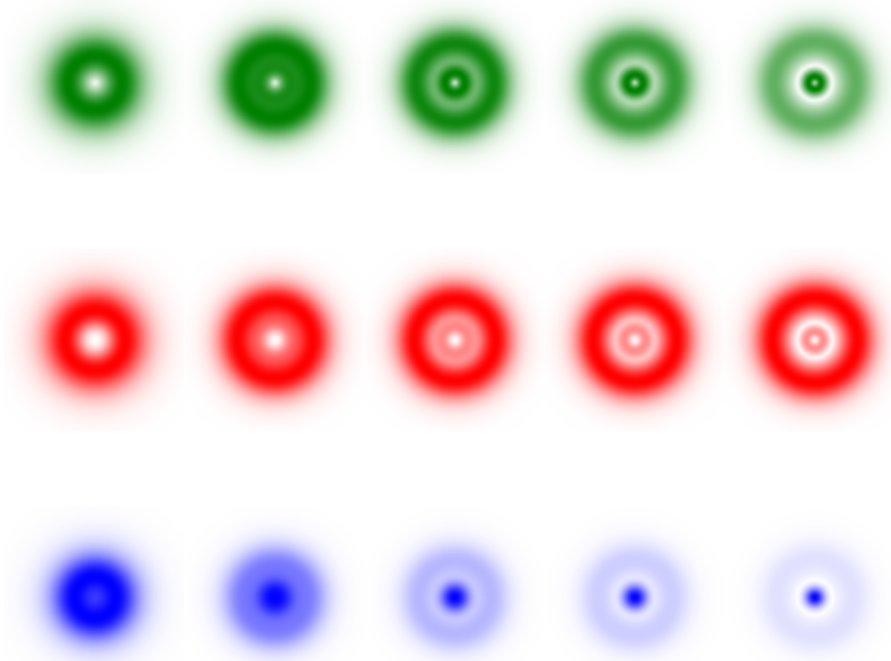


Figura 7.8 Componente radial do campo elétrico (verde/cima), campo magnético (vermelho/meio) dados pela equação (6.6) e a densidade de energia da equação (7.64) no plano, para $v = n = 1$, $w = 1/\sqrt{3}$ e $\ell = 0, 3, 30, 300$ e o limite $\ell \rightarrow \infty$, da esquerda para direita.

O modelo descrito pela função (7.57) leva a soluções com um único ponto de inflexão. Ele pode ser generalizado para gerar quantos pontos de inflexão forem desejados nas soluções. Já que sabemos como o parâmetro ℓ funciona, nos concentraremos no caso $\ell \rightarrow \infty$. Em seguida, consideraremos a função $M_k(|\varphi|)$ com a mesma forma da equação (7.58) com a mudança $w \rightarrow w_k$, e tomamos $M(|\varphi|) = M_1(|\varphi|)M_2(|\varphi|) \dots M_N(|\varphi|)$, do qual $w_i \neq w_j$ para $i \neq j$, e $0 < w_i < v$. Portanto, N controla o número de pontos de inflexão nas

soluções, que aparecem nos pontos $r = r_{*k}$, definido por $g(r_{*k}) = w_k$, para $k = 1, 2, \dots, N$, como pode ser visto pelas equações diferenciais de primeira ordem (7.45) para a função acima com $l = 1$. O potencial pode ser obtido usando (7.44).

Outra maneira para generalizar esse modelo é pegar a função

$$M^2(|\varphi|) = |\sec(k\pi|\varphi|/v)|, \quad (7.66)$$

onde $k \in \mathbb{N}$. Note que para $k = 0$ recuperamos o modelo de Chern-Simons-Higgs canônico ($M = f = 1$). Como $|\varphi|$ existe no intervalo $[0, v)$, vemos que o parâmetro k atua como um contador para infinitos na função $M(|\varphi|)$. Como M aparece no denominador do lado direito das equações diferenciais de primeira ordem (7.45) e na densidade de energia (7.48), a função acima leva à inclinação nula das soluções e, conseqüentemente, zeros nos campos elétrico e magnético, e na densidade de energia em k pontos. Para não ficar bastante cansativo, já sabemos os procedimentos a serem tomados, ilustraremos esse novo modelo exibindo a componente radial do campo elétrico, o campo magnético e a densidade de energia na figura 7.9 para $k = 0, 1, 2, 3$ e 4. Mostramos também a componente radial do campo elétrico e o campo magnético perto da origem na figura 7.10 para melhor exibi-lo nesta região. Observe que, quando k aumenta, mais e mais conjuntos de zeros aparecem nessas quantidades físicas, dando origem a uma configuração de vórtice com múltiplos anéis.



Figura 7.9 A componente radial do campo elétrico (verde/cima), campo magnético (vermelho/meio) e densidade de energia (azul/baixo) associado ao modelo descrito pela função (7.66) no plano, com $x \in [-4, 4]$ e $y \in [-4, 4]$, para $v = n = 1$, $k = 0, 1, 2, 3$ e 4, da esquerda para direita.

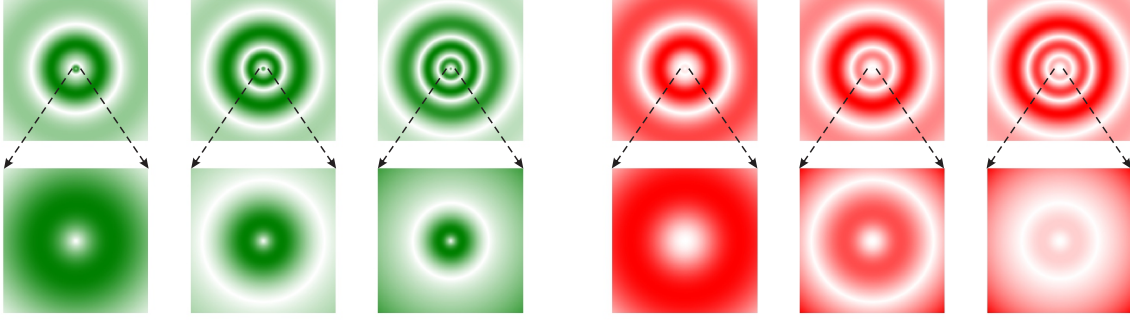


Figura 7.10 Componente radial do campo elétrico (verde/esquerda), campo magnético (vermelho/direita) referente ao modelo descrito pela função (7.66) no plano para $v = n = 1$, com $k = 2, 3$ e 4 . Os gráficos superiores são exibidos no intervalo $x \in [-2, 2]$ e $y \in [-2, 2]$, enquanto os inferiores são feitos para $x \in [-0.1, 0.1]$ e $y \in [-0.1, 0.1]$, para que se possa ver o comportamento do campo elétrico próximo à origem.

7.3 Caso 2

Vamos agora desenvolver outro caminho que leva a equações diferenciais de primeira ordem compatíveis com as equações de movimento (7.2) para o modelo (7.1). Em vez de restringir $\mu(|\varphi|)$ e $G(|\varphi|)$ como no caso anterior, o vínculo é

$$2q^2|\varphi|^2 G^2(|\varphi|)\mu(|\varphi|)M(|\varphi|) = 1. \quad (7.67)$$

Reescrevemos a densidade lagrangiana (7.1) como

$$\mathcal{L} = -\frac{q^2}{2}|\varphi|^2 G^2(|\varphi|)M(|\varphi|)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\gamma\alpha\beta}A_\gamma F_{\alpha\beta} + M(|\varphi|)\overline{\mathcal{D}_\alpha\varphi}\mathcal{D}^\alpha\varphi - V(|\varphi|). \quad (7.68)$$

Expandimos a expressão acima para mostrar que o termo de Maxwell desaparece, podendo ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\gamma\alpha\beta}\left(A_\gamma + \frac{2iq}{\kappa}G(|\varphi|)M(|\varphi|)(\overline{\varphi}D_\gamma\varphi - \varphi\overline{\mathcal{D}_\gamma\varphi})\right)F_{\alpha\beta} + M(|\varphi|)\overline{\mathcal{D}_\alpha\varphi}\mathcal{D}^\alpha\varphi - V(|\varphi|), \quad (7.69)$$

que é um tipo de generalização do modelo de Chern-Simons-Higgs investigado em [174].

A equação de movimento para o campo escalar (7.2a) será

$$D_\alpha(M(|\varphi|)D^\alpha\varphi) + \frac{iq\kappa f_{|\varphi|}}{4e|\varphi|}F_\alpha D^\alpha\varphi = \frac{\varphi}{2|\varphi|}(M_{|\varphi|}\overline{\mathcal{D}_\alpha\varphi}\mathcal{D}^\alpha\varphi - V_{|\varphi|}), \quad (7.70)$$

e a do campo de calibre (7.2b) torna-se

$$\begin{aligned} & \kappa\epsilon^{\gamma\alpha\beta}\partial_\alpha(f(|\varphi|))A_\beta + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\gamma\alpha\beta}f(|\varphi|)\partial_\alpha A_\beta + \frac{\kappa}{2e}\epsilon^{\gamma\alpha\beta}\partial_\alpha(f(|\varphi|))\partial_\beta\Lambda \\ & = -2e^2|\varphi|^2M(|\varphi|)\tilde{A}^\gamma + \frac{\kappa}{2e}\epsilon^{\gamma\alpha\beta}(1-f(|\varphi|))\partial_\alpha\partial_\beta\Lambda, \end{aligned} \quad (7.71)$$

onde

$$f(|\varphi|) = 1 - \frac{4qe}{\kappa} |\varphi|^2 G(|\varphi|) M(|\varphi|). \quad (7.72)$$

Note que usamos a redefinição de campos $\varphi = |\varphi|e^\Lambda$ e $A_\mu = \tilde{A}_\mu - (1/e)\partial_\mu\Lambda$. Se $f(|\varphi|) = 1$ para $\varphi = 0$ o último termo da equação de movimento para o campo de calibre será nulo, podemos reescreve-la como

$$\kappa\epsilon^{\gamma\alpha\beta}\partial_\alpha\left(\sqrt{f(|\varphi|)}A_\beta\right) + \frac{\kappa}{e}\epsilon^{\gamma\alpha\beta}\partial_\alpha\left(\sqrt{f(|\varphi|)}\right)\partial_\beta\Lambda = -\frac{2e^2|\varphi|^2M(|\varphi|)\tilde{A}^\gamma}{\sqrt{f(|\varphi|)}} \quad (7.73)$$

Embora a equação acima seja de primeira ordem, a equação do campo escalar (7.70) é de segunda ordem. Para obter equações diferenciais de primeira ordem, desenvolveremos o procedimento Bogomol'nyi, da mesma forma como foi feito no caso anterior em 7.2. A condição (7.67) faz com que a densidade de energia (7.5a) seja

$$\rho = M(|\varphi|)\left((\partial_0|\varphi|)^2 + e^2|\varphi|^2\tilde{A}_0^2 + |D_1\varphi|^2 + |D_2\varphi|^2\right) + V(|\varphi|). \quad (7.74)$$

Tomando $\gamma = 0$ da equação (7.73), que é equivalente a lei de Gauss, obtém-se uma expressão para $\tilde{A}_0$, que usamos na equação acima para obter

$$\begin{aligned} \rho = M(|\varphi|)\left((\partial_0|\varphi|)^2 + |D_1\varphi|^2 + |D_2\varphi|^2\right) + \frac{\kappa f(|\varphi|)}{4e^2|\varphi|^2M(|\varphi|)} \\ \times \left(\epsilon^{ij}\partial_i\left(\sqrt{f(|\varphi|)}A_j\right) + \frac{1}{e}\epsilon^{ij}\partial_i\left(\sqrt{f(|\varphi|)}\right)(\partial_j\Lambda)\right)^2 + V(|\varphi|). \end{aligned} \quad (7.75)$$

Essa densidade de energia pode ser reorganizada como

$$\begin{aligned} \rho = M(|\varphi|)\left((\partial_0|\varphi|)^2 + |(D_1 \pm iD_2)\varphi|^2\right) \pm 2e|\varphi|M(|\varphi|)\epsilon^{ij}A_j\partial_i|\varphi| \pm \frac{1}{i}M(|\varphi|)\epsilon^{ij}(\partial_i\bar{\varphi})(\partial_j\varphi) \\ + \frac{\kappa^2 f(|\varphi|)}{4e^2|\varphi|^2M(|\varphi|)}\left(\epsilon^{ij}\partial_i\left(\sqrt{f(|\varphi|)}A_j\right) + \frac{1}{e}\epsilon^{ij}\partial_i\left(\sqrt{f(|\varphi|)}\right)(\partial_j\Lambda) \pm \frac{2e}{\kappa}|\varphi|\sqrt{\frac{M(|\varphi|)V(|\varphi|)}{f(|\varphi|)}}\right)^2 \\ \mp \frac{\kappa}{e}\sqrt{\frac{f(|\varphi|)V(|\varphi|)}{|\varphi|^2M(|\varphi|)}}\epsilon^{ij}\left(\partial_i\left(\sqrt{f(|\varphi|)}A_j\right) + \frac{1}{e}\partial_i\left(\sqrt{f(|\varphi|)}\right)(\partial_j\Lambda)\right). \end{aligned} \quad (7.76)$$

Além disso, consideraremos o vínculo

$$\frac{d}{d|\varphi|}\left(\sqrt{\frac{f(|\varphi|)V(|\varphi|)}{|\varphi|^2M(|\varphi|)}}\right) = -\frac{2e^2|\varphi|M(|\varphi|)}{\kappa\sqrt{f(|\varphi|)}}, \quad (7.77)$$

que leva o potencial assumir a forma

$$V(|\varphi|) = \frac{4e^4|\varphi|^2M(|\varphi|)}{\kappa^2 f(|\varphi|)}\left(\int d|\varphi|\frac{|\varphi|M(|\varphi|)}{\sqrt{f(|\varphi|)}}\right)^2. \quad (7.78)$$

Para o potencial acima, podemos integrar a densidade de energia (7.76) para obter a energia

$$\begin{aligned}
E = \int d^2x & \left(M(|\varphi|) \left((\partial_0 |\varphi|)^2 + |(D_1 \pm iD_2) \varphi|^2 \right) + \frac{\kappa^2 f(|\varphi|)}{4e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|)} \right. \\
& \times \left(\varepsilon^{ij} \partial_i \left(\sqrt{f(|\varphi|)} A_j \right) + \frac{1}{e} \varepsilon^{ij} \partial_i \left(\sqrt{f(|\varphi|)} \right) (\partial_j \Lambda) \pm \frac{2e}{\kappa} |\varphi| \sqrt{\frac{M(|\varphi|) V(|\varphi|)}{f(|\varphi|)}} \right)^2 \\
& \mp \frac{\kappa}{e} \varepsilon^{ij} \partial_i \left(f(|\varphi|) \sqrt{\frac{V(|\varphi|)}{|\varphi|^2 M(|\varphi|)}} A_j \right) \pm 2|\varphi| M(|\varphi|) \varepsilon^{ij} (\partial_i |\varphi|) (\partial_j \Lambda) \\
& \left. \mp i|\varphi|^2 M(|\varphi|) \varepsilon^{ij} (\partial_i \Lambda) (\partial_j \Lambda) \mp \frac{\kappa}{e^2} \sqrt{\frac{f(|\varphi|) V(|\varphi|)}{|\varphi|^2 M(|\varphi|)}} \varepsilon^{ij} \partial_i \left(\sqrt{f(|\varphi|)} \right) (\partial_j \Lambda) \right). \tag{7.79}
\end{aligned}$$

Se $|\varphi|^2 M(|\varphi|) = 0$ em $\varphi = 0$ e definindo

$$\mathcal{W}(|\varphi|) = \frac{\kappa}{e} f(|\varphi|) \sqrt{\frac{V(|\varphi|)}{|\varphi|^2 M(|\varphi|)}}, \tag{7.80}$$

teremos a energia

$$\begin{aligned}
E = \int d^2x & \left(M(|\varphi|) \left((\partial_0 |\varphi|)^2 + |(D_1 \pm iD_2) \varphi|^2 \right) + \frac{\kappa^2 f(|\varphi|)}{4e^2 |\varphi|^2 M(|\varphi|)} \right. \\
& \times \left(\varepsilon^{ij} \partial_i \left(\sqrt{f(|\varphi|)} A_j \right) + \frac{1}{e} \varepsilon^{ij} \partial_i \left(\sqrt{f(|\varphi|)} \right) (\partial_j \Lambda) \pm \frac{2e}{\kappa} |\varphi| \sqrt{\frac{M(|\varphi|) V(|\varphi|)}{f(|\varphi|)}} \right)^2 \Bigg) \\
& \mp \mathcal{W}_\infty \oint_{r \rightarrow \infty} dx^i A_i \mp \frac{1}{e} \mathcal{W}_\infty \oint_{r \rightarrow \infty} dx^i \partial_i \Lambda \pm \frac{1}{e} \int d^2x \mathcal{W}(|\varphi|) \varepsilon^{ij} \partial_i \partial_j \Lambda. \tag{7.81}
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{W}_\infty$ é o valor de $\mathcal{W}(|\varphi|)$ para $r \rightarrow \infty$. Pela expressão acima, vemos que a energia terá um valor mínimo, dado por

$$E \geq E_B = |\Phi \mathcal{W}_\infty| - 2\pi \left| \frac{n}{e} \mathcal{W}_\infty \right| + 2\pi \left| \frac{n}{e} \mathcal{W}(0) \right|, \tag{7.82}$$

que é obtido quando

$$\partial_0 |\varphi| = 0, \tag{7.83a}$$

$$(D_1 \pm iD_2) \varphi = 0, \tag{7.83b}$$

$$\varepsilon^{ij} \partial_i \left(\sqrt{f(|\varphi|)} A_j \right) + \frac{1}{e} \varepsilon^{ij} \partial_i \left(\sqrt{f(|\varphi|)} \right) (\partial_j \Lambda) \pm \frac{2e}{\kappa} |\varphi| \sqrt{\frac{M(|\varphi|) V(|\varphi|)}{f(|\varphi|)}} = 0. \tag{7.83c}$$

Pela lei de Gauss (componente $\gamma = 0$ da equação (7.73)), teremos

$$\tilde{A}_0 = \pm \frac{1}{e|\varphi|} \sqrt{\frac{V(|\varphi|)}{M(|\varphi|)}}. \tag{7.84}$$

Vale ressaltar que o conjunto dessas quatro últimas equações satisfaz as equações de movimento (7.70) e (7.73) desde que o vínculo (7.77) seja válido. As soluções dessas equações leva a $T_{ij} = 0$ e as componentes T_{0i} serão dadas por

$$T_{0i} = 2e^2|\varphi|^2 M(|\varphi|) \tilde{A}_0 \tilde{A}_i = -\kappa \sqrt{f(|\varphi|)} \varepsilon^{jk} \left(\partial_j \left(\sqrt{f(|\varphi|)} A_k \right) + \frac{1}{e} \partial_j \left(\sqrt{f(|\varphi|)} \right) (\partial_k \Lambda) \right) \tilde{A}_i. \quad (7.85)$$

Consideramos agora os campos com simetria rotacional (ansatz), conforme a equação (6.4). Nesse caso, as leis de Gauss e Ampère (7.73), para o ansatz tomam as formas

$$\frac{\kappa f a'}{er} + \frac{\kappa a f_g g'}{2er} + 2e^2 g^2 M h = 0, \quad (7.86a)$$

$$\kappa f h' + \frac{\kappa h f_g g'}{2} + \frac{2e g^2 M a}{r} = 0, \quad (7.86b)$$

ou de maneira compacta são escritas como

$$\frac{\kappa}{er} \left(a \sqrt{f} \right)' + \frac{2e^2 g^2 M h}{\sqrt{f}} = 0, \quad (7.87a)$$

$$\kappa \left(h \sqrt{f} \right)' + \frac{2e g^2 M a}{r \sqrt{f}} = 0. \quad (7.87b)$$

Isso torna a densidade de carga (7.9) para a condição (7.67) tomar a forma

$$\mathcal{J}_0 = \frac{\kappa}{er} \left(\left(1 - \frac{2qe}{\kappa} g^2 G M \right) a \right)'. \quad (7.88)$$

Portanto, não é proporcional ao campo magnético como no caso da seção anterior, e não podemos garantir que a carga está relacionada ao fluxo magnético. Integrando a equação acima vemos que a carga dependerá das condições de contorno de $g(r)$ e $a(r)$.

Podemos ver que, as leis de Gauss e Ampère (7.86) são diferentes das do caso anterior, como também a carga. Observe as equações de movimento (7.86) relacionadas ao campo de calibre são de primeira ordem. No entanto, eles não são suficientes para resolver o problema, pois devemos calcular três funções: $a(r)$, $g(r)$ e $h(r)$. A terceira equação é dada por (7.7), que torna-se

$$\frac{1}{r} \left(r M g' \right)' + \frac{g}{f} \left(M + \frac{1}{2} g M_g + \frac{2qe}{\kappa} g^3 M^2 G_g \right) \left(e^2 h^2 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} \left(M_g g'^2 + V_g \right) = 0. \quad (7.89)$$

Observe, no entanto, que a equação de movimento acima é de segunda ordem. Assim, precisamos encontrar condições adicionais para obter equações diferenciais de primeira ordem que resolvam o problema. Da mesma forma como no caso investigado na seção anterior, poderíamos usar o procedimento de Bogomol'nyi ou o teorema de Derrick para obter as equações diferenciais de primeira ordem que resolvem as equações de movimento. Substituindo o ansatz nas equações (7.83), obtemos

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (7.90a)$$

$$-\frac{a'}{er} = \pm \frac{g}{f} \left(\frac{f_g a^2}{2er^2} + \frac{2e}{\kappa} \sqrt{MV} \right), \quad (7.90b)$$

desde que o potencial tenha a forma dada pela equação (7.78). Podemos calcular $h(r)$ usando a equação (7.84) para as soluções da equação acima como

$$h = \pm \frac{1}{eg} \sqrt{\frac{V}{M}}. \quad (7.91)$$

Podemos escrever a densidade de energia (7.10) como $\rho = \pm(1/r)W'$, onde $W = W(a, g)$ é o funcional de energia, dado por

$$W(a, g) = -\frac{\kappa a f(g)}{e^2 g} \sqrt{\frac{V(g)}{M(g)}}. \quad (7.92)$$

Ao integrarmos essa densidade de energia, temos

$$E = 2\pi |W(a(\infty), g(\infty)) - W(a(0), g(0))|. \quad (7.93)$$

Enfatizamos que este formalismo de primeira ordem é compatível com as equações de movimento (7.86) e (7.89). Nas equações (7.90) e (7.91), o sinal mais/menos descreve configurações com vorticidade positiva/negativa. Pode-se relacionar essas possibilidades fazendo as mudanças $a(r) \rightarrow -a(r)$ e $h(r) \rightarrow -h(r)$. Para simplificar, lidamos apenas com vorticidade positiva. Note que a equação diferencial de primeira ordem (7.90a) é diferentes de (7.37a), uma vez que, seu lado direito apresenta apenas um termo linear em g . Entretanto, a equação (7.90a) é exatamente a mesmo que surge no formalismo de primeira ordem para vórtices em modelos com acoplamento mínimo dos capítulos 4 e 5. Portanto, a função $g(r)$ próximo à origem é uma de lei de potência, na forma

$$g(r) \propto r^{|n|}. \quad (7.94)$$

Por outro lado, a equação diferencial de primeira ordem (7.90b) apresenta dois termos, com um deles dependendo de a^2 , que difere da equação (7.37b). Dependendo do sinal de f_g , o termo em a^2 pode competir com o outro. Isso é interessante porque, como mostraremos a seguir, traz novas configurações; não aparece na abordagem usual [165, 167, 168] nem em modelos com acoplamento mínimo na forma investigada nos três últimos capítulos anteriores, no qual $a'/(er)$ é igual a uma função de g . Além disso, uma vez que o comportamento de $g(r)$ perto da origem é dada pela equação acima, pode-se mostrar que, neste regime, a função f deve se comportar como $f_g/f \propto g^{m/|n|-1}$, com $m > 2$, para fazer o campo magnético $B = -a'/(er)$ ser finito.

A densidade de energia (7.10) para as soluções $g(r)$ e $a(r)$ da equação (7.90) é

$$\rho = \frac{2a^2 g^2 M}{r^2} + 2V, \quad (7.95)$$

que pode ser usada para determinar as condições de contornos g_∞ e g_0 . Com isso podemos calcular a carga ao integrar a equação (7.88), como também o momento angular usando (4.12), que é dado por

$$L = \frac{\pi\kappa}{e^2} (a_\infty^2 f(g_\infty) - n^2 f(0)) = -\frac{\pi\kappa}{e^2} (n^2 - a_\infty^2 f(g_\infty)), \quad (7.96)$$

se $f(0) = 1$. Podemos utilizar a reescala do caso anterior dado pela equação (7.42) e tomamos $e = \kappa = 1$ sem perda de generalidade para simplificar na análise do exemplo.

7.3.1 Exemplo

Assim como no caso anterior, nos guiaremos pela referência [172] para desenvolvermos um exemplo aqui. Tomamos

$$G(|\varphi|) = \frac{1 - M^2(|\varphi|) (1 - |\varphi|^2/v^2)^{1-l}}{4qg^2 M(|\varphi|)}, \quad (7.97)$$

para podermos escrever (7.72) como $f(|\varphi|) = M^2(|\varphi|) (1 - |\varphi|^2/v^2)^{1-l}$, onde $l \geq 1$. A permeabilidade magnética é dada pela equação (7.67), que resulta em

$$\mu(|\varphi|) = \frac{8g^2 M(|\varphi|)}{(1 - M^2(|\varphi|) (1 - |\varphi|^2/v^2)^{1-l})^2}. \quad (7.98)$$

Logo, o potencial (7.78) pode ser escrito como

$$V(|\varphi|) = \frac{4v^4 |\varphi|^2}{(l+1)^2 M(|\varphi|)} \left(1 - \frac{|\varphi|^2}{v^2}\right)^{2l}, \quad (7.99)$$

com quebra de simetria em v^2 . Podemos recuperar um modelo específico estudado em [174] quando tomamos $M(g) = (1 - g^2/v^2)^2$ e $l = 3$. A densidade de carga (7.88) será

$$\mathcal{J}_0 = \frac{1}{2r} \left(a + aM^2(g) \left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right)^{1-l} \right)'. \quad (7.100)$$

Não iremos reescrever as equações diferenciais de primeira ordem (7.90) para um $M(g)$ geral, serão reescritos em breve quando formos introduzirmos o modelo a ser analisado. Entretanto, reescrevemos (7.91), que será

$$h(r) = \pm \frac{2v^2}{(l+1)M} \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^l, \quad (7.101)$$

com M sendo uma função de $g(r)$.

Consideraremos agora uma função $M(|\varphi|)$ que estudamos em [172]. A escolha dessa função foi com o objetivo de trazer novos comportamentos para a solução $a(r)$, que nos levará a inversão no sinal do campo magnético dependendo das escolhas dos parâmetros. Este modelo surge quando tomamos

$$M(|\varphi|) = \left(1 + \lambda \frac{|\varphi|^2}{v^2}\right)^{\frac{s}{2}} \left(1 - \frac{|\varphi|^2}{v^2}\right)^{\frac{l-1}{2}}, \quad (7.102)$$

onde λ é um parâmetro adimensional não negativo e s é um número real. O potencial dado em (7.99) simplifica para

$$V(|\varphi|) = \frac{4v^4 |\varphi|^2}{(l+1)^2} \left(1 + \lambda \frac{|\varphi|^2}{v^2}\right)^{-\frac{s}{2}} \left(1 - \frac{|\varphi|^2}{v^2}\right)^{\frac{3l+1}{2}}. \quad (7.103)$$

Seus mínimos estão localizados em $|\varphi| = 0$ e $|\varphi| = v$. No caso particular quem $l = 1$ e $\lambda = 0$ recuperamos o Chern-Simons-Higgs canônico. O potencial acima pode ser visto na figura 7.11 para $v = l = 1$ e alguns valores de λ e s .

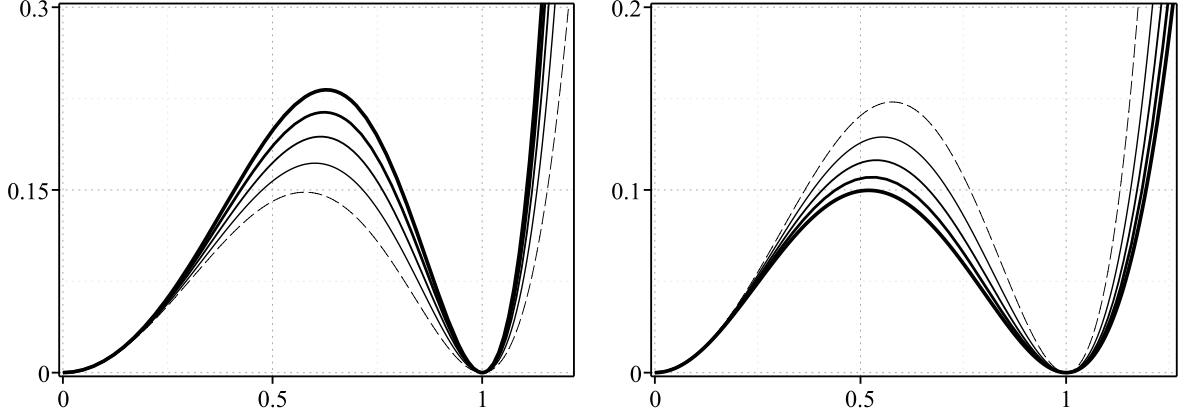


Figura 7.11 Potencial $V(|\varphi|)$ dado pela equação (7.103) para $v = l = 1$ e $\lambda = 0, 1, 2, 3$ e 4 , com $s = -1$ para o lado esquerdo e $s = 1$ para o lado direito. A espessura das linhas sólidas cresce com λ , em particular para $\lambda = 0$ temos a linha tracejada.

Devemos resolver as equações (7.90) com os sinais positivos. Observe, no entanto, que a equação diferencial de primeira ordem (7.90a) não muda com $M(g)$ e $G(g)$. Por outro lado, a equação diferencial de primeira ordem (7.90b) assume a forma

$$-\frac{a'}{r} = \frac{\lambda s a^2 g^2}{v^2 r^2} \left(1 + \lambda \frac{g^2}{v^2}\right)^{-1} + \frac{4v^2 g^2}{(l+1)} \left(1 + \lambda \frac{g^2}{v^2}\right)^{-s} \left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right)^l. \quad (7.104)$$

Conhecendo as soluções, podemos calcular $h(r)$ a partir da equação (7.101), o que nos leva a

$$h(r) = \frac{2v^2}{(l+1)} \left(1 + \lambda \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^{-\frac{s}{2}} \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^{\frac{l+1}{2}}. \quad (7.105)$$

Temos que na origem $h_0 = 2v^2/(l+1)$. Para verificar se esta função possui pontos críticos fora da origem, tomamos a derivada da expressão acima em relação a r . Como $g' > 0$, tomamos $h_g = 0$, o que nos leva a

$$\tilde{g} = v \sqrt{\frac{\lambda s + l + 1}{\lambda(s - l - 1)}}. \quad (7.106)$$

se $0 < \tilde{g} < v$, a solução $h(r)$ apresenta um ponto crítico. Usando este argumento, pode-se mostrar que esta função suporta um máximo global para $s < 0$ e $\lambda > \lambda_c$, onde

$$\lambda_c = \frac{l+1}{|s|}, \quad (7.107)$$

o que leva à uma estrutura interna na componente radial do campo elétrico $E_r(r)$.

O funcional de energia $W(a, g)$ é calculado a partir da equação (7.92), para obter a expressão

$$W(a, g) = -\frac{2v^2 a}{(l+1)} \left(1 + \lambda \frac{g^2}{v^2}\right)^{\frac{s}{2}} \left(1 - \frac{g^2}{v^2}\right)^{\frac{l+1}{2}}. \quad (7.108)$$

A densidade de energia (7.95) para as soluções das equações (7.90a) e (7.104) será

$$\begin{aligned} \rho(r) = & 2g^2(r) \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^{\frac{l-1}{2}} \left(1 + \lambda \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^{-\frac{s}{2}} \\ & \times \left(\frac{a^2(r)}{r^2} \left(1 + \lambda \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^s + \frac{v^4}{(l+1)^2} \left(1 - \frac{g^2(r)}{v^2}\right)^{l+1} \right). \end{aligned} \quad (7.109)$$

Para calcular as soluções deve-se ter cuidado com as condições de contorno, que estão associadas ao caráter topológico ou não-topológico do vórtice. A partir da equação acima, vemos que a energia é finita para soluções topológicas, com $a_\infty = 0$ e $g_\infty = v$, e também para soluções não topológicas, com $g_\infty = 0$ e a_∞ qualquer. Para simplificar, apenas calcularemos as soluções topológicas aqui. Usando as equações (7.108) e (7.40), pode-se usar as condições de contorno mencionadas acima para mostrar que sua energia é $E = 4\pi|n|v^2/(l+1)$, com fluxo magnético quantizado $\Phi = 2\pi n$. A densidade de carga (7.100) torna-se

$$\mathcal{J}_0 = \frac{1}{2r} \left(a + a \left(1 + \lambda \frac{g^2}{v^2}\right)^s \right)', \quad (7.110)$$

que ao integrá-la, pode-se mostrar que $Q = -2\pi n$. Note que mesmo que não seja proporcional ao campo magnético ($\mathcal{J}_0 \neq -B$), a carga é proporcional ao fluxo: $Q = -\Phi$, e será quantizada.

Infelizmente, não fomos capazes de calcular as soluções analíticas para as equações diferenciais de primeira ordem (7.90a) e (7.104). Então, usamos procedimentos numéricos e exibimos os perfis de $g(r)$, $a(r)$ e $h(r)$ para $q = v = n = l = 1$ e alguns valores de λ e s na figura 7.12. Vemos que, para $s < 0$, $a(r)$ não é monotonicamente decrescente: aumenta perto da origem até um máximo em $a_{max} > n$, e então diminui até zero. Esse comportamento apareceu antes em [174], em um modelo minimamente acoplado com uma modificação específica no termo de Chern-Simons. Um comportamento semelhante ocorre na função $h(r)$. A solução $g(r)$, embora apresente alterações no sinal de sua segunda derivada, sempre aumenta no intervalo $[0, v]$. Representamos a componente radial do campo elétrico e o campo magnético na figura 7.13. O campo elétrico pode mudar seu sinal para $\lambda > \lambda_c$, onde λ_c é definido pela equação (7.107). Para o campo magnético, a mudança em seu sinal é uma evidência de uma inversão de fluxo magnético, que ocorre para qualquer valor positivo de λ . Essa característica aparece no cenário de violação de Lorentz em modelos minimamente acoplados [175–177], como também em modelos com simetria extra [164], porém é novo em modelos com acoplamento não mínimo. É também de interesse na matéria condensada e já apareceu antes no estudo de vórtices fracionários em supercondutores de dois componentes [178].

A densidade de energia e a densidade de carga podem ser vistas na figura 7.14. Observe que a densidade de energia apresenta um buraco em torno da origem que se torna mais profundo à medida que λ aumenta. A densidade de carga tem um pico que fica mais alto à medida que λ aumenta. O caso $\sigma > 0$ leva a soluções topológicas com o comportamento monotônico usual. No entanto, quando λ aumenta, o buraco no centro do campo magnético e da densidade de energia desaparece, tornando-se um máximo. Além disso, o parâmetro λ modifica o comportamento da densidade de carga, que pode apresentar uma mudança em seu sinal.

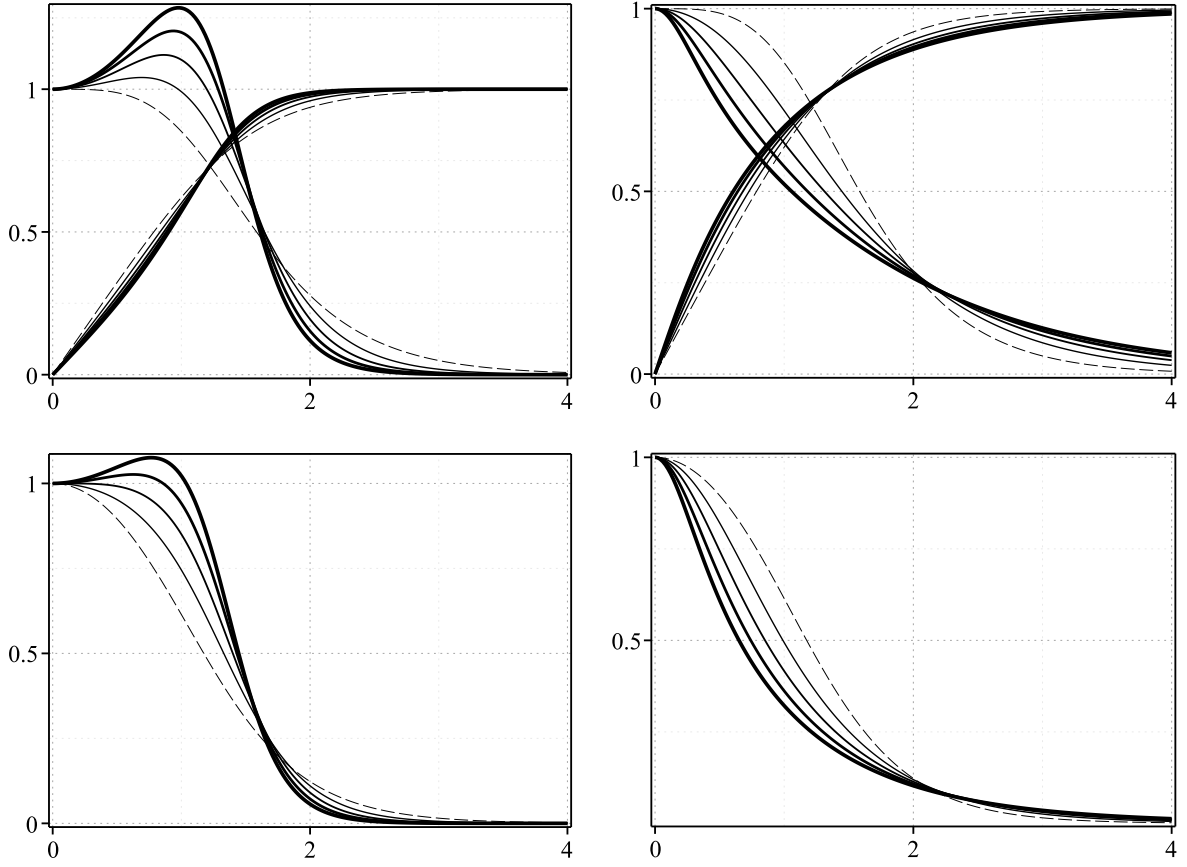


Figura 7.12 As figuras de cima são para as soluções $g(r)$ (crescente) e $a(r)$ (decréscante) da equação diferencial de primeira ordem (7.90a) e (7.104), as figuras de baixo é para o campo $h(r)$ dado pela equação (7.105) para $n = v = l = 1$ e $\lambda = 0, 1, 2, 3$ e 4, com $\sigma = -1$ para o lado esquerdo e $\sigma = 1$ para o lado direito. A espessura das linhas sólidas cresce com λ , em particular para $\lambda = 0$ temos a linha tracejada.

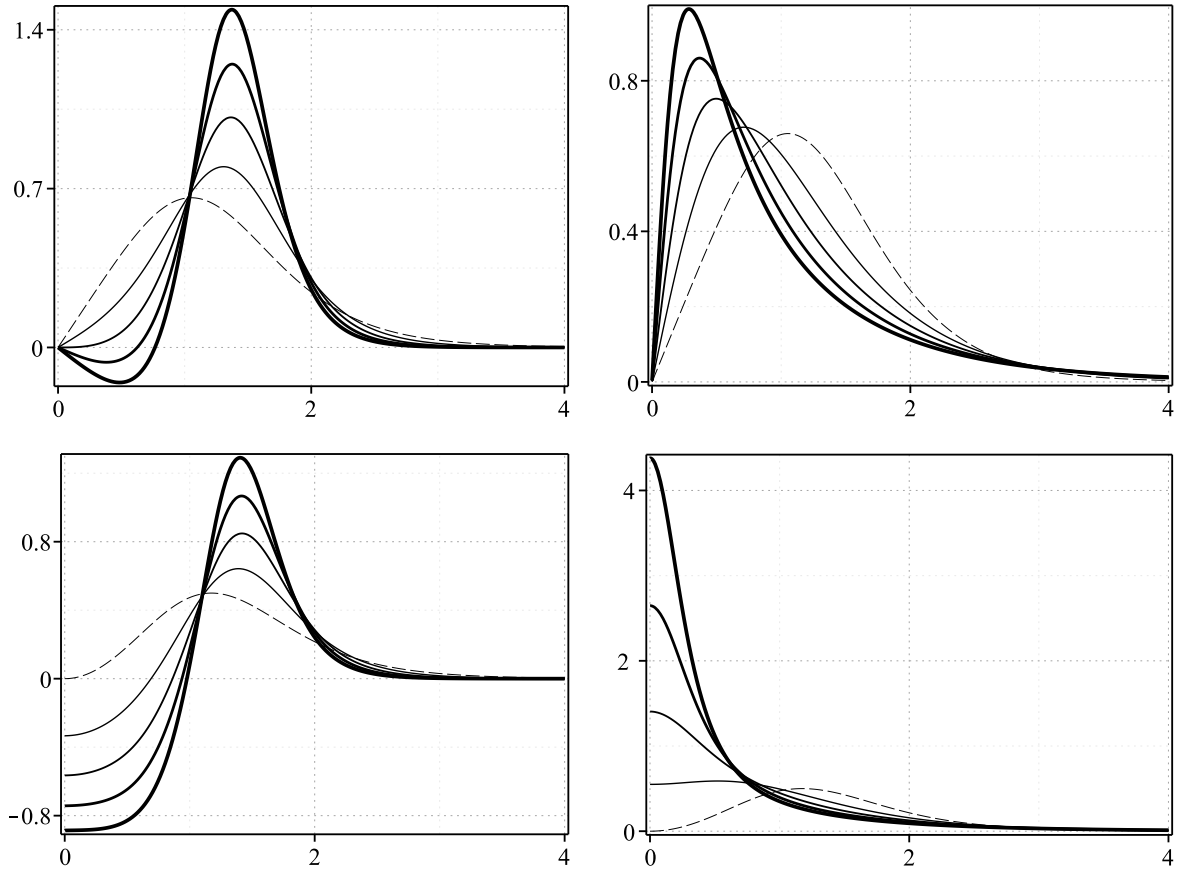


Figura 7.13 As figuras de cima é a componente radial do campo elétrico $E_r(r)$ e as de baixo é para o campo magnético $B(r)$ dado respectivamente pela equação (6.6) para as soluções das equações diferenciais de primeira ordem para o modelo (7.102), com $n = v = l = 1$ e $\lambda = 0, 1, 2, 3$ e 4, onde o lado esquerdo é para $s = -1$ e o direito para $s = 1$. A espessura das linhas sólidas cresce com λ , em particular para $\lambda = 0$ temos a linha tracejada.

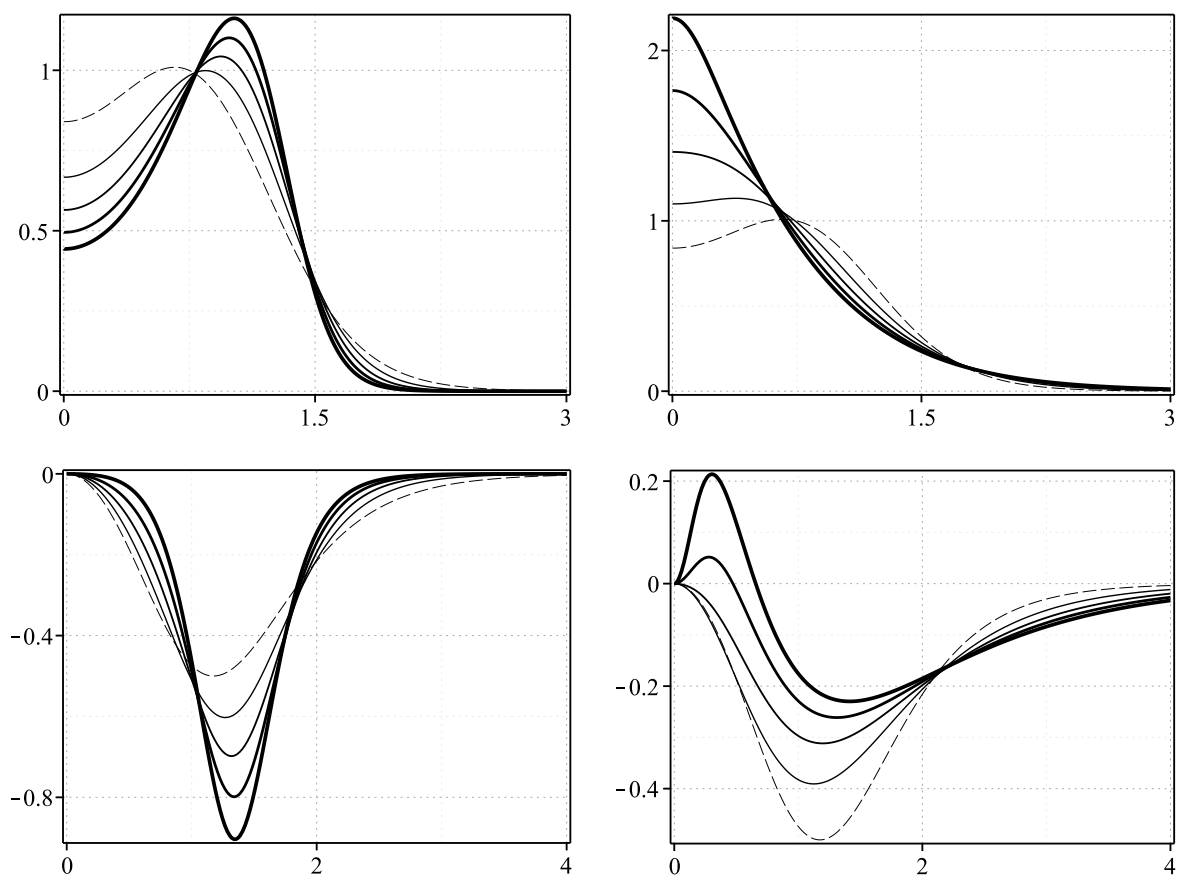


Figura 7.14 As figuras de cima é a densidade de energia $\rho(r)$ e as de baixo é a densidade de carga $\mathcal{J}_0(r)$ dado respectivamente pelas equações (7.109) e (7.110) para $n = v = l = 1$ e $\lambda = 0, 1, 2, 3$ e 4, com $s = -1$ para o lado esquerdo e $s = 1$ para o lado direito. A espessura das linhas sólidas cresce com λ , em particular para $\lambda = 0$ temos a linha tracejada.

CAPÍTULO 8

Conclusões

Nesse tese investigamos soluções topológicas e não-topológicas usando o formalismo de campos em uma e duas dimensões espaciais. Iniciamos nosso estudo no capítulo 2 com as soluções em uma dimensão espacial, que podem ser obtidas usando apenas um campo escalar real. Apesar da simplicidade do formalismo para apenas um campo escalar, mostramos que é possível obter soluções com diversos comportamentos diferentes. Em particular, nessa tese mostramos os modelos ϕ^4 e ϕ^6 com dinâmica canônica, que possuem um comportamento assintótico exponencial, como também um modelo que possui massa clássica nula e que tem uma cauda polinomial. Citamos ainda a possibilidade de outras características, como soluções compactas e vacuumless. O comportamento assintótico dessas soluções é importante para fazer um estudo da interação entre tais estruturas, como, por exemplo, calcular a força de interação entre dois kinks ou entre um kink e um anti-kink [179–181]. Em seguida mostramos alguns modelos com dinâmica generalizada que suportam soluções de defeitos. Primeiramente consideramos uma dinâmica que possui um fator global, que multiplica todos os termos do modelo. Continuamos este estudo introduzindo novos modelos, modificando apenas o termo dinâmico do campo escalar e depois com a inclusão do termo de cuscuton [45, 75]. O estudo de interação entre soluções pode ser estendida para esse cenário, até onde sabemos não foi estudado interação entre defeitos unidimensionais com dinâmicas generalizadas.

Seguimos nosso estudo para soluções em uma dimensão espacial com a inclusão de mais de um campo escalar. No capítulo 3 desenvolvemos o formalismo matemático necessário para obter soluções de defeitos, mostramos ainda que é possível estudar a estabilidade linear das soluções mesmo nessa generalização. Como foi discutido, apesar de termos construído um formalismo para obter equações diferenciais de primeira ordem que satisfazem as equações de movimento, ainda teremos que resolver sistemas de equações diferenciais bastante complicados. Exemplificamos com um modelo de dois campos com dinâmica canônica, onde usamos o método das órbitas para obter soluções analíticas em alguns casos. Analisamos também a estabilidade linear desse modelo para algumas órbitas e comentamos sobre as dificuldades de se estudar a estabilidade para as outras órbitas. Estamos estudando novos modelos de dois campos usando dinâmicas generalizadas a fim de obtermos uma análise mais aprofundada da estabilidade linear das soluções. Podemos também usar essas soluções em outros contextos, como, por exemplo, em espaço curvo, para modelos de branas, energia escura e dilaton [182–190].

Nos capítulos seguintes dedicamos ao estudo das soluções em duas dimensões espaciais, os vórtices. No capítulo 4 estudamos os vórtices de Maxwell-Higgs, onde fazemos uma generalização do modelo canônico e desenvolvemos o formalismo de primeira ordem de

duas maneiras diferentes. Primeiro, fazemos o procedimento de Bogomol'nyi, onde as equações diferenciais de primeira ordem surgem de maneira direta quando minimizamos o funcional de energia. Vale ressaltar que, para que essas equações diferenciais de primeira ordem satisfaçam as equações de movimento, é necessário impor um vínculo entre as funções do modelo. Podemos ainda obter estas equações diferenciais de primeira ordem usando o argumento de Derrick, elas surgem quando impomos que as soluções tenham que ser estáveis por contrações e dilatações. Entretanto, para usar o argumento de Derrick é preciso tomar soluções com simetria circular. Ainda nesse capítulo revisamos o modelo canônico e depois apresentamos duas classes de modelos com dinâmica generalizada. Primeiramente consideramos modelos com apenas a função dielétrica, onde apresentamos dois novos modelos, um com soluções analíticas e outro com soluções numéricas [133]. Em seguida, estudamos um modelo onde há um fator global multiplicado em toda densidade lagrangiana e mostramos um exemplo [145]. Assim como nos kinks, podemos estudar a interação entre vórtices [124]. Essa análise pode ser estendida para modelos com dinâmica generalizada, como, por exemplo, em casos onde há interação de vórtices de longo alcance.

No capítulo 5 continuamos nosso estudo de estruturas planares com os vórtices de Chern-Simons-Higgs. Diferentemente dos vórtices de Maxwell-Higgs, que são eletricamente neutros, os vórtices de Chern-Simons-Higgs são carregados. Aqui também desenvolvemos o formalismo de primeira ordem pelo procedimento de Bogomol'nyi e usando o teorema de Derrick. Fazemos uma revisão do modelo canônico, que suporta tanto soluções topológicas como não-topológicas. O estudo é seguido para modelos generalizados, onde usamos soluções já conhecidas do capítulo anterior e reconstruímos modelos que suportam essas soluções [133]. O estudo de vórtices de Chern-Simons pode ser estendido com a inclusão de simetrias extras, estamos investigando novos modelos nesse cenário que possuem simetria $U(1) \times U(1)$.

Finalizamos a tese com o estudo de vórtices de Maxwell-Chern-Simons-Higgs nos capítulos 6 e 7. No capítulo 6 estudamos esses vórtices com o acoplamento mínimo usual, assim como foi feito nos dois capítulos anteriores. Mostramos que para obtermos o formalismo de primeira ordem precisamos de um vínculo adicional. As equações diferenciais de primeira ordem são controladas por um parâmetro que modifica o núcleo do vórtice, mostramos este comportamento com um exemplo que leva a um potencial do tipo $|\varphi|^6$. É possível ainda obter diversos outros modelos com comportamentos diferentes, como por exemplo: soluções compactas ou de longo alcance. Já no capítulo 7 estudamos os vórtices de Maxwell-Chern-Simons com acoplamento não mínimo, que pode ser interpretado como um momento magnético anômalo [172]. Vimos que considerar essa modificação na derivada covariante deixa o problema ainda mais complexo, entretanto, ainda é possível desenvolver o formalismo de primeira ordem e obter soluções. Assim como no capítulo anterior, precisaremos de um vínculo adicional para obter essas equações que minimizam a energia, entretanto, nesse caso existem duas classes de modelos, dependendo do vínculo tomado inicialmente. Exemplificamos esses modelos de diversas maneiras, consideramos um modelo que faz modificações na origem dos vórtices, outro que gera anéis nas quantidades físicas envolvidas e por fim um modelo que leva a inversão de fluxo magnético. Apesar dos vórtices de Maxwell-Chern-Simons-Higgs ser um estudo antigo, ainda não foi

muito explorado, assim como nos modelos anteriores, podemos fazer uma análise da interação desses vórtices, como também considerá-los com simetrias extras. Além disso, esses vórtices podem ser estudados em espaço curvo, um assunto que ainda precisa ser melhor entendido. Uma outra possibilidade seria considerar essas soluções na eletrodinâmica modificada [191].

APÊNDICE A

Invariância de forma

No estudo da mecânica quântica supersimétrica conseguimos fatorar a equação de Schrödinger em operadores supersimétricos [46], as vantagens de trabalhar com esses operadores são inúmeras. Em alguns casos específicos pode existir uma propriedade chamada invariância de forma, que permite resolver as equações de autovalores completamente. Esses conceitos podem ser generalizados para as equações de Sturm-Liouville [44]. Considerando os operadores supersimétricos

$$S = A \left(-\frac{d}{dx} + M \right) \quad \text{e} \quad S^\dagger = A \left(\frac{d}{dx} + M + K \right), \quad (\text{A.1})$$

onde $K = (A\mathcal{L}_X)'/(A\mathcal{L}_X)$ com $\mathcal{L}_X$ sendo a função peso. Usando os operadores acima teremos

$$L_1 = S^\dagger S = -\frac{1}{\mathcal{L}_X} \frac{d}{dx} A^2 \mathcal{L}_X \frac{d}{dx} + U_1(x), \quad (\text{A.2a})$$

$$L_2 = S S^\dagger = -\frac{1}{\mathcal{L}_X} \frac{d}{dx} A^2 \mathcal{L}_X \frac{d}{dx} + U_2(x), \quad (\text{A.2b})$$

onde L_1 e L_2 são parceiros supersimétrico, com potenciais $U_1(x)$ e $U_2(x)$ dados por

$$U_1(x) = A^2 M (M + K) + A (AM)', \quad (\text{A.3a})$$

$$U_2(x) = A^2 M (M + K) - A (AM + AK)'. \quad (\text{A.3b})$$

Ao considerar o operador (A.2a), obtemos a equação de autovalor $L_1 \xi_n^{(1)} = (\omega_n^{(1)})^2 \xi_n^{(1)}$, estamos usando o sobrescrito (1) para denotar as autofunções e autovalores associados a esta equação. Por outro lado, também temos uma equação para o parceiro supersimétrico (2.46), na forma $L_2 \xi_n^{(2)} = (\omega_n^{(2)})^2 \xi_n^{(2)}$, o sobrescrito (2) representam as autofunções e autovalores associados a esta equação do parceiro. Apesar de estarmos lidando com operadores de Sturm-Liouville, pode-se mostrar que existe uma relação entre os auto-estados e autovalores dos parceiros estão relacionados de uma forma semelhante ao caso de Schödinger [46], de forma que

$$\omega_n^{(2)} = \omega_{n+1}^{(1)}, \quad \omega_0^{(1)} = 0, \quad (\text{A.4a})$$

$$\xi_n^{(2)} = S \xi_{n+1}^{(1)} / \omega_{n+1}^{(1)}, \quad \xi_{n+1}^{(1)} = S^\dagger \xi_n^{(2)} / \omega_n^{(2)}, \quad (\text{A.4b})$$

desde que os operadores (A.1) sejam não singulares. Por conveniência, definimos $S_{\{1\}} \equiv S$, cujo operador Sturm-Liouville associado é $L_{\{1\}} = S_{\{1\}}^\dagger S_{\{1\}}$ e o operador parceiro $L_{\{2\}} =$

$S_{\{1\}}S_{\{1\}}^\dagger$. Podemos construir uma hierarquia, escrevendo o operador $L_{\{2\}}$ em termos de novos operadores $S_{\{2\}}$ e $S_{\{2\}}^\dagger$ como $L_{\{2\}} = S_{\{2\}}^\dagger S_{\{2\}} + (\omega_1^{(1)})^2$, onde o menor autovalor é $(\omega_0^{(2)})^2 = (\omega_1^{(1)})^2$. Seguindo essas linhas, podemos gerar um terceiro operador de Sturm-Liouville $L_{\{3\}} = S_{\{2\}}S_{\{2\}}^\dagger + (\omega_1^{(1)})^2$, e usá-lo para construir os operadores $S_{\{3\}}$ e $S_{\{3\}}^\dagger$, como $L_{\{3\}} = S_{\{3\}}^\dagger S_{\{3\}} + (\omega_1^{(2)})^2$. Isso pode ser feito recursivamente, de modo que possamos construir vários operadores $L_{\{m\}}$ autovalores e auto-estados, dados respectivamente por

$$\omega_n^{(m)} = \omega_{n+1}^{(m-1)} = \dots = \omega_{n+m-1}^{(1)} \quad \text{e} \quad \xi_n^{(m)} \propto S_{\{m-1\}} \dots S_{\{1\}} \xi_{n+m-1}^{(1)}. \quad (\text{A.5})$$

Investigaremos um pouco da propriedade de invariância de forma [46, 192], que é uma condição para a solubilidade exata para equações de SL. Esse método é usado quando os operadores supersimétricos (A.1) dependem de um conjunto de parâmetros a , que é usado para construir os operadores $S(a)$ e $S^\dagger(a)$. Podemos escrever

$$S(a_1)S^\dagger(a_1) = S^\dagger(a_2)S(a_2) + R(a_1), \quad (\text{A.6})$$

onde, $a_2 = f(a_1)$, com f sendo uma função arbitrária e $R(a_1)$ é um resto não nulo independente de x . Esta expressão pode ser usada para mostrar que $U_{1,2}(x; a)$ são potenciais invariantes de forma (SIP) se a condição

$$U_2(x; a_1) = U_1(x; a_2) + R(a_1), \quad (\text{A.7})$$

for satisfeita. Pela expressão acima, vemos $R(a_1)$ representa o espaçamento entre o menor autovalor dos dois potenciais parceiros. Após sucessivas aplicações deste método, podemos determinar algebricamente que

$$(\omega_n^{(1)})^2 = \sum_{k=1}^n R(a_k) \quad \text{and} \quad \xi_n^{(1)}(x; a_1) \propto \prod_{k=1}^n S^\dagger(a_k) \xi_0^{(1)}(x; a_{n+1}). \quad (\text{A.8})$$

onde o parâmetro a_k é dado pela aplicação de f em a_1 sucessivamente por k vezes, isso é,

$$a_k = f(\underbrace{\dots}_{k \text{ vezes}} f(a_1)). \quad (\text{A.9})$$

Nessa tese, faremos o caso mais simples da propriedade de invariância da forma, na qual os parâmetros a_1 e a_2 estão relacionados por meio de uma deslocação. Então, para simplificar, chamamos $a_1 = a$ e $a_2 = a - \lambda$, onde λ é um parâmetro real. Logo, a equação (A.7) pode ser escrito como

$$U_2(x; a) = U_1(x; a - \lambda) + R(a) \quad (\text{A.10})$$

e a equação (A.9) como $a_k = a - (k-1)\lambda$.

Em seguida, trabalhamos a invariância da forma associada ao caso em que A é constante e temos $M(x; a) = -a \tanh(\lambda x)$, que é controlado pelo parâmetro a , e a função de

peso tem a forma $\mathcal{L}_{X_s} = \text{sech}^{\frac{b}{\lambda}}(\lambda x)$, com b sendo um parâmetro real que o controla. As funções mencionadas acima permite a construção dos operadores supersimétricos S e $S^\dagger$ como

$$S(a) = -A \left(\frac{d}{dx} + a \tanh(\lambda x) \right) \quad \text{and} \quad S^\dagger(a) = A \left(\frac{d}{dx} - (a+b) \tanh(\lambda x) \right), \quad (\text{A.11})$$

e os potenciais parceiros supersimétricos

$$U_1(x; a) = A^2 \left[a(a+b) - a(a+b+\lambda) \text{sech}^2(\lambda x) \right], \quad (\text{A.12a})$$

$$U_2(x; a) = A^2 \left[a(a+b) - (a-\lambda)(a+b) \text{sech}^2(\lambda x) \right], \quad (\text{A.12b})$$

que são compatíveis com a condição em (A.10) para invariância de forma, com resto $R(a) = A^2 \lambda (2a+b-\lambda)$. Uma vez que estamos lidando com SIP, as expressões em (A.8) são úteis para calcular os auto-estados η_n e seus respectivos autovalores $\left(\omega_n^{(1)}\right)^2$ para o potencial $U_1(x; a)$. Eles são dados por

$$\eta_n^{(1)}(x) = \text{sech}^{\frac{a}{\lambda}-n}(\lambda x) P_n^{(s-n, s-n)}(\tanh(\lambda x)) \quad \text{e} \quad \left(\omega_n^{(1)}\right)^2 = A^2 \lambda^2 n(2s-n), \quad (\text{A.13})$$

onde $s = (2a+b)/2\lambda$ e $P_n^{(l,m)}(z)$ denota os polinômios de Jacobi com argumento z e parâmetros l e m . Nesse caso, $n = 0, 1, \dots, \lceil s-1 \rceil$, onde $\lceil z \rceil$ denota a função teto com argumento z .

Referências Bibliográficas

- [1] R. Rajaraman, *Solitons and instantons: A Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-Holland (1982).
- [2] C. Rebbi & G. Soliani, *Solitons and Particles*, World Scientific Publishing Company (1984).
- [3] A. Vilenkin & E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press (1994).
- [4] N. Manton & P. Sutcliffe, *Topological solitons*, Cambridge University Press (2004).
- [5] T. Vachaspati, *Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons*, Cambridge University Press (2006).
- [6] E.J. Weinberg, *Classical solutions in Quantum Field Theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics*, Cambridge University Press (2012).
- [7] Y.M. Shnir, *Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories*, Cambridge University Press (2018).
- [8] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*, Cambridge University Press (2013).
- [9] C.A. Almeida, D. Bazeia, L. Losano & J.M.C. Malbouisson, *New results for deformed defects*, Phys. Rev. D **69**, 067702 (2004).
- [10] E.J. Copeland, M. Sami & S. Tsujikawa, *Dynamics of dark energy*, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 1753 (2006).
- [11] A.G. Riess et al, *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. **116**, 1009 (1998).
- [12] C. Armendáriz-Picón, T. Damour & V. Mukhanov, *k-Inflation*, Phys.Lett.B 458, 209 (1999).
- [13] J. Garriga & V.F. Mukhanov, *Perturbations in k-inflation*, Phys. Lett. B **458**, 219 (1999).
- [14] C. Armendáriz-Picón & V.F. Mukhanov, *Inflation Without Potential*, Int. J. Theor. Phys. **39**, 1877 (2000).

- [15] T. Chiba, T. Okabe & M. Yamaguchi, *Kinetically driven quintessence*, Phys. Rev. D **62**, 023511 (2000).
- [16] C. Armendáriz-Picón, V. Mukhanov & P.J. Steinhardt, *Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological Constant and Late-Time Cosmic Acceleration*, Phys. Rev. Lett. **85**, 4438 (2000).
- [17] C. Armendáriz-Picón, V. Mukhanov & P.J. Steinhardt, *Essentials of k -essence*, Phys. Rev. D **63**, 103510 (2001).
- [18] C. Armendáriz-Picón & E.A. Lim, *Haloes of k -essence*, JCAP **08**, 007 (2005).
- [19] A.D. Rendall, *Dynamics of k -essence*, Class. Quantum Grav. **23**, 1557 (2006).
- [20] E. Babichev, V. Mukhanov & A. Vikman, *k -Essence, superluminal propagation, causality and emergent geometry*, JHEP **02**, 101 (2008).
- [21] E. Babichev, *Global topological k -defects*, Phys. Rev. D **74**, 085004 (2006).
- [22] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, & J.C.R.E. Oliveira, *Generalized global defect solutions*, Eur. Phys. J. C **51**, 953 (2007).
- [23] D. Bazeia, L. Losano & R. Menezes, *First-order framework and generalized global defect solutions*, Phys. Lett. B **668**, 246 (2008).
- [24] V.L. Ginzburg & L.D. Landau, *On the theory of superconductivity*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**, 1064 (1950).
- [25] A.A. Abrikosov, *On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group*, Zh. Eksp. Teor. Fis. **32**, 1442 (1957); Sov. Phys. JETP **5**, 1174 (1957).
- [26] U. Essmann & H. Träuble, *The direct observation of individual flux lines in type II superconductors*, Phys. Lett. A **24**, 526 (1967).
- [27] H.B. Nielsen & P. Olesen, *Vortex-line models for dual strings*, Nucl. Phys. B **61**, 45 (1973).
- [28] G't Hooft, *Magnetic monopoles in unified gauge theories*, Nucl. Phys. B **79**, 276 (1974).
- [29] A.M. Polyakov, *Particle spectrum in quantum field theory*, JETP Lett. **20**, 194 (1974); Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**, 430 (1974).
- [30] B. Julia & A. Zee, *Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory*, Phys. Rev. D **11**, 2227 (1975).
- [31] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Math.-phys. Klasse **1918**, 235 (1918).

- [32] G.H. Derrick, *Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles*, J. Math. Phys. **5**, 1252 (1964).
- [33] P.P. Avelino, D. Bazeia R. Menezes & J.G.G.S. Ramos, *Localized D-dimensional global k-defects*, Eur. Phys. J. C **71**, 1683 (2011).
- [34] E.B. Bogomol'nyi, *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys **24**, 449 (1976).
- [35] M.K. Prasad & C.M. Sommerfield, *Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975).
- [36] A.T. Avelar, D. Bazeia, L. Losano & R. Menezes, *New lump-like structures in scalar-field models*, Eur. Phys. J. C **55**, 133 (2008).
- [37] M.A. Lohe, *Soliton structures in $P(\varphi)_2$* , Phys. Rev. D **20**, 3120 (1979).
- [38] I. Cho & A. Vilenkin, *Vacuum defects without a vacuum*, Phys. Rev. D **59**, 021701(R) (1998).
- [39] I. Cho & A. Vilenkin, *Gravitational field of vacuumless defects*, Phys. Rev. D **59**, 063510 (1999).
- [40] D. Bazeia, *Topological solitons in a vacuumless system*, Phys. Rev. D **60**, 067705 (1999).
- [41] G.B Arfken & H.J. Weber, *Mathematical methods for physicists*, Elsevier Inc (2005).
- [42] J. Goldstone & R. Jackiw, *Quantization of nonlinear waves*, Phys. Rev. D **11**, 1486 (1975).
- [43] R. Jackiw, *Quantum meaning of classical field theory*, Rev. Mod. Phys. **49**, 681 (1977).
- [44] M.N. Hounkonnou, K. Sodoga & E.S. Azatassou, *Factorization of Sturm-Liouville operators: solvable potentials and underlying algebraic structure*, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 371 (2005).
- [45] I. Andrade, M.A. Marques & R. Menezes, *Stability of kinklike structures in generalized models*, Nucl. Phys. B **951**, 114883 (2020).
- [46] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, *Supersymmetry & quantum mechanics*, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).
- [47] A.R. Gomes, R. Menezes & J.C.R.E. Oliveira, *Highly interactive kink solutions*, Phys. Rev. D **86**, 025008 (2012).
- [48] M. Mohammadi, N. Riazi & A. Azizi *Radiative Properties of Kinks in the $\sin^4(\phi)$ System*, Prog. Theor. Phys. **128**, 615 (2012).

- [49] D. Bazeia, R. Menezes & D.C. Moreira, *Analytical study of kinklike structures with polynomial tails*, J. Phys. Commun. **2** 055019 (2018).
- [50] N.S. Manton, *Forces between kinks and antikinks with long-range tails*, J. Phys. A: Math. Theor. **52** 065401, (2019).
- [51] G. Flores-Hidalgo and N.F. Svaiter, *Constructing bidimensional scalar field theory models from zero mode fluctuations*, Phys. Rev. D **66**, 025031 (2002).
- [52] D. Bazeia, M.A. Marques and R. Menezes, *Models for asymmetric hybrid brane*, Phys. Rev. D **92**, 084058 (2015).
- [53] P. Kumar, A. Khare and A. Saxena, *A minimal nonlinearity logarithmic potential: Kinks with super-exponential profiles*, Int. J. Mod. Phys. B **35**, 2150114 (2021).
- [54] P. Rosenau & J.M. Hyman *Compactons Solitons with finite wavelength*, Phys. Rev. Lett. **70**, 564 (1993).
- [55] D. Bazeia, L. Losano, M.A. Marques & R. Menezes, *From kinks to compactons*, Phys. Lett. B **736**, 515 (2014).
- [56] D. Bazeia, L. Losano, M.A. Marques & R. Menezes, *Compact structures in standard field theory*, EPL **107**, 61001 (2014).
- [57] J. Goldstone, *Field theories with « Superconductor » solutions*, Nuovo Cim **19**, 154 (1961).
- [58] Y. Nambu & G. Jona-Lasinio, *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I*, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- [59] J. Goldstone, A. Salam & S. Weinberg, *Broken Symmetries*, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [60] P.W. Higgs, *Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons*, Phys. Rev. **145**, 1156 (1966).
- [61] P.G. Kevrekidis & J. Cuevas-Maraver, *A Dynamical Perspective on the ϕ^4 Model: Past, Present and Future*, Springer International Publishing (2019).
- [62] D. Bazeia, M.A.G. León, L. Losano & J.M. Guilarte, *Deformed defects for scalar fields with polynomial interactions*, Phys. Rev. D **73**, 105008 (2006).
- [63] D. Bazeia, M.A.G. León, L. Losano & J.M. Guilarte, *New scalar field models and their defect solutions*, EPL **93**, 41001 (2011).
- [64] J. Rubinstein, *Sine-Gordon Equation*, J. Math. Phys. **11**, 258 (1970).
- [65] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell & H. Segur, *Method for Solving the Sine-Gordon Equation*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1262 (1973).

- [66] D. Bazeia, L. Losano & R. Menezes, *Defect structures in sine-Gordon like models*, Physica D **208**, 236 (2005).
- [67] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes & M.A.M. Souza, *New family of sine-Gordon models*, EPL **87**, 21001 (2009).
- [68] D. Bazeia, L. Losano & J.M.C. Malbouisson, *Deformed defects*, Phys. Rev. D **66**, 101701(R) (2002).
- [69] A.T. Avelar, D. Bazeia, W.B. Cardoso & L. Losano, *Lump-like structures in scalar-field models in 1+1 dimensions*, Phys. Lett. A **374**, 222 (2009).
- [70] D. Bazeia, M.A. Marques & R. Menezes, *Compact lumps*, EPL **111**, 61002 (2015).
- [71] M.A. Marques, *Novel lump-like structures*, EPL **125**, 11001 (2019).
- [72] L. Losano, M.A. Marques & R. Menezes, *Generalized scalar field models with the same energy density and linear stability*, Phys. Lett. B **775**, 178 (2017).
- [73] N. Afshordi, D.J.H. Chung & G. Geshnizjani, *Causal field theory with an infinite speed of sound*, Phys. Rev. D **75**, 083513 (2007).
- [74] N. Afshordi, D.J.H. Chung, M. Doran & G. Geshnizjani, *Cuscuton cosmology: Dark energy meets modified gravity*, Phys. Rev. D **75**, 123509 (2007).
- [75] I. Andrade, M.A. Marques & R. Menezes, *Cuscuton kinks and branes*, Nucl. Phys. B **942**, 188 (2019).
- [76] D. Bazeia, E. da Hora, R. Menezes, H. P. de Oliveira & C. dos Santos, *Compactlike kinks and vortices in generalized models*, Phys. Rev. D **81**, 125016 (2010).
- [77] D. Bazeia, L. Losano & R. Menezes, *New results on compact structures*, Phys. Lett. B **731**, 293 (2014).
- [78] R. Rajaraman & E.J. Weinberg, *Internal symmetry and the semiclassical method in quantum field theory*, Phys. Rev. D **11**, 2950 (1975).
- [79] C. Montonen, *On solitons with an Abelian charge in scalar field theories: (I) Classical theory and Bohr-Sommerfeld quantization*, Nucl. Phys. B **112**, 349 (1976).
- [80] R. Rajaraman, *Solitons of Coupled Scalar Field Theories in Two Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **42**, 200 (1979).
- [81] H.M. Ruck, *Solitons in cyclic symmetric field theories*, Nucl. Phys. B **167**, 320 (1980).
- [82] D. Bazeia, M.J. dos Santos & R.F. Ribeiro, *Solitons in systems of coupled scalar fields*, Phys. Lett. A **208**, 84 (1995).

- [83] D. Bazeia, W. Freire, L. Losano & R.F. Ribeiro, *Topological Defects and the Trial Orbit Method*, Mod. Phys. Lett. A **17**, 1945 (2002).
- [84] D. Bazeia, J. Menezes & M.M. Santos, *Complete factorization of equations of motion in Wess-Zumino theory*, Phys. Lett. B **521**, 418 (2001).
- [85] D. Bazeia, J. Menezes & M.M. Santos, *Complete factorization of equations of motion in supersymmetric field theories*, Nucl. Phys. B **636**, 132 (2002).
- [86] D. Bazeia & M.M. Santos, *Classical stability of solitons in systems of coupled scalar fields*, Phys. Lett. A **217**, 28 (1996).
- [87] A. Vilenkin & A.E. Everett, *Cosmic Strings and Domain Walls in Models with Goldstone and Pseudo-Goldstone Bosons*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1867 (1982).
- [88] S. Coleman, *Q-balls*, Nucl. Phys. B **262**, (1985). [Erratum *ibid* **269**, 744 (1986)].
- [89] J.M. Cerveró & P.G. Estévez, *Exact two-dimensional Q-balls near the kink phase*, Phys. Lett. B **176**, 139 (1986).
- [90] C.N. Kumar & A. Khare, *Q-ball solutions in 1+1 dimensions for a class of $SO(2)$ -invariant potentials*, J. Phys. A: Math. Gen. **20**, L1219 (1987).
- [91] T.D. Lee & Y. Pang, *Nontopological solitons*, Phys. Rep. **221**, 251 (1992).
- [92] D. Bazeia, R.F. Ribeiro & M.M. Santos, *Topological defects inside domain walls*, Phys. Rev. D **54**, 1852 (1996).
- [93] D. Bazeia, R.F. Ribeiro & M.M. Santos, *Solitons in a class of systems of two coupled real scalar fields*, Phys. Rev. E **54**, 2943 (1996).
- [94] D. Bazeia, J.R. Nascimento, R.F. Ribeiro & D. Toledo, *Soliton stability in systems of two real scalar fields*, J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 8157 (1997).
- [95] D. Bazeia & F.A. Brito, *Domain ribbons inside domain walls at finite temperature*, Phys. Rev. D **56**, 7869 (1997).
- [96] M. A. Shifman and M. B. Voloshin, *Degenerate domain wall solutions in supersymmetric theories*, Phys. Rev. D **57**, 2590 (1998).
- [97] J.D. Edelstein, M.L. Trobo, F.A. Brito & D. Bazeia, *Kinks inside supersymmetric domain ribbons*, Phys. Rev. D **57**, 7561 (1998).
- [98] D. Bazeia, H. Boschi-Filho & F.A. Brito, *Domain defects in systems of two real scalar fields*, JHEP **04**, 028 (1999).
- [99] D. Bazeia & F.A. Brito, *Tiling the Plane without Supersymmetry*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1094 (2000).

- [100] D. Bazeia & F.A. Brito, *Bags, junctions, and networks of BPS and non-BPS defects*, Phys. Rev. D **61**, 105019 (2000).
- [101] A.A. Izquierdo, M.A.G. León, J.M. Guilarte & M.T. Mayado, *Kink variety in systems of two coupled scalar fields in two space-time dimensions*, Phys. Rev. D **65**, 085012 (2002).
- [102] A.A. Izquierdo, M.A.G. León, J.M. Guilarte & M.T. Mayado, *Adiabatic motion of two-component BPS kinks*, Phys. Rev. D **66**, 105022 (2002).
- [103] A.A. Izquierdo, W.G. Fuertes, M.A.G. León & J.M. Guilarte, *One-loop corrections to classical masses of kink families*, Nucl. Phys. B **681**, 163 (2004).
- [104] A.A. Izquierdo, *Kink dynamics in a system of two coupled scalar fields in two space-time dimensions*, Physica D **365**, 12 (2018).
- [105] D. Bazeia, A.S. Inácio & L. Losano, *Kinks and Domain Walls in Models for Real Scalar Fields*, Int. J. Mod. Phys. A **19**, 575 (2004).
- [106] D. Bazeia, J. Menezes & R. Menezes, *Global Defects in Field Theory with Applications to Condensed Matter*, Mod. Phys. Lett. B **19**, 801 (2005).
- [107] D. Bazeia, L. Losano & J.R.L. Santos, *Kinklike structures in scalar field theories: From one-field to two-field models*, Phys. Lett. A **377**, 1615 (2013).
- [108] D. Bazeia, M.A. Liao & M.A. Marques, *Geometrically constrained kinklike configurations*, Eur. Phys. J. Plus **135**, 383 (2020).
- [109] D. Bazeia, L. Losano & C. Wotzasek, *Domain walls in three-field models*, Phys. Rev. D **66**, 105025 (2002).
- [110] A.A. Izquierdo & J.M. Guilarte, *Composite solitary waves in three-component scalar field theory: Three-body low-energy scattering*, Physica D **220**, 31 (2006).
- [111] J.R.L. Santos, P.H.R.S. Moraes, D.A. Ferreira & D.C. Vilar Neta, *Building analytical three-field cosmological models*, Eur. Phys. J. C **78**, 169 (2018).
- [112] A.R. Aguirre & E.S. Souza, *Extended multi-scalar field theories in (1+1) dimensions*, Eur. Phys. J. C **80**, 1143 (2020).
- [113] D. Bazeia, E. Hora, C. Santos & R. Menezes, *BPS solutions to a generalized Maxwell-Higgs model*, Eur. Phys. J. C **71**, 1833 (2011).
- [114] J. Lee & S. Nam, *Bogomol'nyi equations of Chern-Simons Higgs theory from a generalized abelian Higgs model*, Phys. Lett. B **261**, 437 (1991).
- [115] M.A. Lohe, *Generalized noninteracting vortices*, Phys. Rev. D **23**, 2335 (1981).

- [116] M.A. Lohe, *Existence and uniqueness of generalized vortices*, J. Math. Phys. **24**, 148 (1983).
- [117] E. Babichev, *Gauge k -vortices*, Phys. Rev. D **77**, 065021 (2008).
- [118] C. Adam, P. Klimas, J. Sánchez-Guillén & A. Wereszczyński, *Compact gauge K vortices*, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 135401 (2009)
- [119] R. Casana & A. Cavalcante *Self-dual configurations in Abelian Higgs models with k -generalized gauge field dynamics*, J. High Energ. Phys. **51**, (2016).
- [120] D. Bazeia, L. Losano, M.A. Marques, R. Menezes & I. Zafalan, *First order formalism for generalized vortices*, Nucl. Phys. B **934**, 212 (2018).
- [121] Sean Carroll, *An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry*, Addison Wesley (2004).
- [122] D. Bazeia, R. Casana, M.M. Ferreira jr. & E. da Hora, *Nontopological self-dual Maxwell-Higgs vortices*, EPL **109**, 21001 (2015).
- [123] H.J. de Vega & F.A. Schaposnik, *Classical vortex solution of the Abelian Higgs model*, Phys. Rev. D **14**, 1100 (1976).
- [124] L. Jacobs & C. Rebbi, *Interaction energy of superconducting vortices*, Phys. Rev. B **19**, 4486 (1979).
- [125] D. Bazeia, *Vortices in a generalized Higgs model*, Phys. Rev. D **46**, 1879 (1992).
- [126] W. Fuertes & J. Guilarte, *Low-energy vortex dynamics in Abelian Higgs systems*, Eur. Phys. J. C **9**, 535 (1999).
- [127] D. Bazeia, L. Losano, M.A. Marques, R. Menezes & I. Zafalan, *Compact vortices*, Eur. Phys. J. C **77**, 63 (2017).
- [128] D. Bazeia, M.A. Marques & D. Melnikov, *Planar ringlike vortices*, Phys. Lett. B **785**, 454 (2018).
- [129] D. Bazeia, M.A. Marques & R. Menezes, *Quasi-compact vortices*, EPL **129**, 31001 (2020).
- [130] S. Chen & M. Yang, *Existence of the topological solutions arising in vortices-antivortices equation*, J. Math. Phys. **61**, 061515 (2020).
- [131] F.C.E. Lima & C.A.S. Almeida, *Ring-like vortices in a logarithmic generalized Maxwell theory*, EPL **131**, 31003 (2020).
- [132] F.C.E. Lima, A.Y. Petrov & C.A.S. Almeida, *Vortex solutions in nonpolynomial scalar QED*, Phys. Rev. D **103**, 096019 (2021).

- [133] I. Andrade, M.A. Marques & R. Menezes, *Long range vortex configurations in generalized models with Maxwell or Chern-Simons dynamics*, Phys. Rev. D **102**, 025017 (2020).
- [134] R. Casana, M.M. Ferreira, E. da Hora & C. dos Santos, *Analytical BPS Maxwell-Higgs vortices*, Adv. High Energy Phys. **2014**, 210929 (2014).
- [135] D. Bazeia, L. Losano, M.A. Marques & R. Menezes, *Analytic vortex solutions in generalized models of the Maxwell-Higgs type*, Phys. Lett. B **778**, 22 (2018).
- [136] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques & R. Menezes, *First Order Framework for Gauge k -Vortices*, Adv. High Energy Phys. **2018**, 9635427 (2018).
- [137] H.S. Ramadhan, *Some exact BPS solutions for exotic vortices and monopoles*, Phys. Lett. B **758**, 140 (2016).
- [138] J. Hong, Y. Kim & P.Y. Pac, *Multivortex solutions of the Abelian Chern-Simons-Higgs theory*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2230 (1990).
- [139] R. Jackiw & E.J. Weinberg, *Self-Dual Chern-simons Vortices*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2234 (1990).
- [140] D. Bazeia, M.A. Marques & R. Menezes, *Maxwell-Higgs vortices with internal structure*, Phys. Lett. B **780**, 485 (2018).
- [141] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques & R. Menezes, *Vortices in a Generalized Maxwell-Higgs Model with Visible and Hidden Sectors*, Adv. High Energy Phys. **2019**, 3187289 (2019).
- [142] D. Bazeia, M.A. Liao, M. A. Marques & R. Menezes, *Multilayered vortices*, Phys. Rev. Research **1**, 033053 (2019).
- [143] P. Arias & F.A. Schaposnik, *Vortex solutions of an Abelian Higgs model with visible and hidden sectors*, J. High Energ. Phys. **2014**, 11 (2014).
- [144] P. Arias, E. Ireson, C. Núñez & F.A. Schaposnik, *$\mathcal{N} = 2$ SUSY Abelian Higgs model with hidden sector and BPS equations*, J. High Energ. Phys. **2015**, 156 (2015).
- [145] I. Andrade, M.A. Marques & R. Menezes, *Vortices in Maxwell-Higgs models with a global factor*, EPL **133**, 31002 (2021).
- [146] M.A. Marques *Vortices in Vacuumless Systems*, Adv. High Energy Phys. **2019**, 9406585 (2019).
- [147] S.K. Paul & A. Khare, *Charged vortices in an abelian Higgs model with Chern-Simons term*, Phys. Lett. B **174**, 420 (1986). [Erratum *ibid* **177**, 453 (1986)].
- [148] M.V. Manías, C.M. Naón, F.A. Schaposnik & M. Trobo, *Non-abelian charged vortices as cosmic strings*, Phys. Lett. B **171**, 199 (1986).

- [149] H.J. de Vega & F.A. Schaposnik, *Electrically Charged Vortices in Non-Abelian Gauge Theories with Chern-Simons Term*, Phys. Rev. Lett. **56**, 2564 (1986).
- [150] C.N. Kumar & A. Khare, *Charged vortex of finite energy in nonabelian gauge theories with Chern-Simons term*, Phys. Lett. B **178**, 395 (1986).
- [151] R. Jackiw, K. Lee & E.J. Weinberg, *Self-dual Chern-Simons solitons*, Phys. Rev. D **42**, 3488 (1990).
- [152] Y. Yang, *A generalized self-dual Chern-Simons-Higgs theory*, Lett. Math. Phys. **23**, 179 (1991).
- [153] D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos & R. Menezes, *Generalized self-dual Chern-Simons vortices*, Phys. Rev. D **81**, 125014 (2010).
- [154] C. dos Santos & E. da Hora, *Domain walls in a generalized Chern-Simons model*, Eur. Phys. J. C **70**, 1145 (2010).
- [155] C. dos Santos, *Compact solitons in an Abelian-Higgs Chern-Simons model*, Phys. Rev. D **82**, 125009 (2010).
- [156] C. dos Santos & E. da Hora, *Lump-like solitons in a generalized Abelian-Higgs Chern-Simons model*, Phys. J. C **71**, 1519 (2011).
- [157] D. Bazeia, L. Losano, M.A. Marques & R. Menezes, *Compact Chern-Simons vortices*, Phys. Lett. B **772**, 253 (2017).
- [158] K.H. Nam, *$U(1) \times U(1)$ Chern-Simons solitons of a general Higgs potential*, J. Math. Anal. Appl. **385**, 92 (2012).
- [159] P. Arias, E. Ireson, F.A. Schaposnik & G. Tallarita, *Chern-Simons-Higgs theory with visible and hidden sectors and its*, Phys. Lett. B **749**, 368 (2015).
- [160] L. Jacobs, A. Khare, C.N. Khumar & S.K. Paul, *The interaction of Chern-Simons vortices*, Int. J. Mod. Phys. A **6**, 3441 (1991).
- [161] C. Lee, K. Lee & H. Min, *Selfdual Maxwell Chern-Simons solitons*, Phys. Lett. B **252**, 79 (1990).
- [162] D. Bazeia, *Note on Chern-Simons solitons*, Phys. Rev. D **43**, 4074 (1991).
- [163] D. Bazeia, R. Casana, E. da Hora & R. Menezes, *Generalized self-dual Maxwell-Chern-Simons-Higgs model*, Phys. Rev. D **85**, 125028 (2012).
- [164] E. Ireson, F.A. Schaposnik & G. Tallarita, *Visible and hidden sectors in a model with Maxwell and Chern-Simons gauge dynamics*, Int. J. Mod. Phys. A **31**, 1650178 (2016).

- [165] M. Torres, *Bogomolny limit for nontopological solitons in a Chern-Simons model with anomalous magnetic moment*, Phys. Rev. D **46**, R2295 (1992).
- [166] J. Escalona, A. Antillon & M. Torres, *Stability of nontopological Chern-Simons vortices in a ϕ^2 model*, Mod. Phys. Lett. A **8**, 2955 (1993).
- [167] P.K. Ghosh, *Degenerate topological vortex solutions from a generalized abelian Higgs model with a Chern-Simons term*, Phys. Lett. B **326**, 264 (1994).
- [168] P.K. Ghosh, *Bogomolny equations of Maxwell-Chern-Simons vortices from a generalized Abelian Higgs model*, Phys. Rev. D **49**, 5458 (1994).
- [169] T. Lee & H. Min, *Bogomolny equations for solitons in Maxwell-Chern-Simons gauge theories with the magnetic moment interaction term*, Phys. Rev. D **50**, 7738 (1994).
- [170] S.K. Paul & A. Khare, *Chern-Simons term by spontaneous symmetry breaking in an abelian Higgs model*, Phys. Lett. B **193**, 253 (1987). [Erratum *ibid* **196**, 571 (1987)].
- [171] R. Casana, M.M. Ferreira Jr. & A.L. Mota, *Topological self-dual configurations in a Maxwell-Higgs model with a CPT-odd and Lorentz-violating nonminimal coupling*, Annals Phys. **375**, 179 (2016).
- [172] I. Andrade, D. Bazeia, M.A. Marques & R. Menezes, *Vortices in Maxwell-Chern-Simons-Higgs models with nonminimal coupling*, Phys. Rev. D **102**, 045018 (2020).
- [173] I. Andrade, M.A. Marques & R. Menezes, *Ringlike vortex structures in models with anomalous magnetic moment*, EPL **137**, 54001 (2022).
- [174] J. Burzlaff, A. Chakrabarti & D.H. Tchrakian, *Generalized selfdual Chern-Simons vortices*, Phys. Lett. B **293**, 127 (1992).
- [175] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, E. da Hora & C. Miller, *Magnetic flux inversion in Charged BPS vortices in a Lorentz-violating Maxwell-Higgs framework*, Phys. Lett. B **718**, 620 (2012).
- [176] R. Casana, M.M. Ferreira Jr., E. da Hora & A.B.F. Neves, *Maxwell-Chern-Simons vortices in a CPT-odd Lorentz-violating Higgs electrodynamics*, Eur. Phys. J. C **74**, 3064 (2014).
- [177] R. Casana & G. Lazar, *Topological charged BPS vortices in Lorentz-violating Maxwell-Higgs electrodynamics*, Phys. Rev. D **90**, 065007 (2014).
- [178] E. Babaev, J. Jäykkä & M. Speight, *Magnetic Field Delocalization and Flux Inversion in Fractional Vortices in Two-Component Superconductors*, Phys. Rev. Lett. **103**, 237002 (2009).
- [179] J.K. Perring & T.H.R. Skyrme, *A model unified field equation*, Nucl. Phys. **31**, 550 (1962).

- [180] N.S. Manton, *An effective Lagrangian for solitons*, Nucl. Phys. B **150**, 397 (1979).
- [181] N.S. Manton, *Forces between kinks and antikinks with long-range tails*, J. Phys. A: Math. Theor. **52**, 065401 (2019).
- [182] O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser, & A. Karch, *Modeling the fifth dimension with scalars and gravity*, Phys. Rev. D **62**, 046008 (2000).
- [183] M. Gremm, *Four-dimensional gravity on a thick domain wall*, Phys. Lett. B **478**, 434 (2000).
- [184] D. Bazeia & A.R. Gomes, *Bloch brane*, JHEP **05**, 012 (2004).
- [185] D. Bazeia, A.R. Gomes, L. Losano & R. Menezes, *Braneworld models of scalar fields with generalized dynamics*, Phys. Lett. B **671**, 402 (2009).
- [186] D. Bazeia, R. Menezes & R. da Rocha, *A Note on Asymmetric Thick Branes*, Adv. High Energy Phys. **2014**, 276729 (2014).
- [187] D. Bazeia, C.B. Gomes, L. Losano & R. Menezes, *First-order formalism and dark energy*, Phys. Lett. B **633**, 415 (2006).
- [188] B. Stötzl, *Two-dimensional gravitation and sine-Gordon solitons*, Phys. Rev. D **52**, 2192 (1995).
- [189] Y. Zhong, *Revisit on two-dimensional self-gravitating kinks: superpotential formalism and linear stability*, J. High Energ. Phys. **118**, (2021).
- [190] Y. Zhong, Fei-Yu Li & Xu-Dong Liu, *K-field kinks in two-dimensional dilaton gravity*, Phys. Lett. B **822**, 136716 (2021).
- [191] M.E.Tobar, B.T. McAllister & M. Goryachev, *Modified axion electrodynamics as impressed electromagnetic sources through oscillating background polarization and magnetization*, Phys. Dark Univ. **26**, 100339 (2019).
- [192] L.E. Gendenshtein, *Derivation of exact spectra of the Schrödinger equation by means of supersymmetry*, JETP Lett. **38**, 356 (1983).