

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

O Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland em espaços de Fréchet

Joémerson de Oliveira Maia

JOÃO PESSOA – PB
AGOSTO DE 2022

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

O Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland em espaços de Fréchet

por

Joémerson de Oliveira Maia

sob a orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

João Pessoa – PB
Agosto de 2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M217t Maia, Joémerson de Oliveira.

O teorema da aplicação inversa de Ekeland em espaços de Fréchet / Joémerson de Oliveira Maia. - João Pessoa, 2022.

175 f. : il.

Orientação: João Marcos Bezerra do Ó.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Espaços de Fréchet. 3. Princípio variacional de Ekeland. 4. Espaços de Banach. I. do Ó, João Marcos Bezerra. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

O Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland em espaços de Fréchet

por

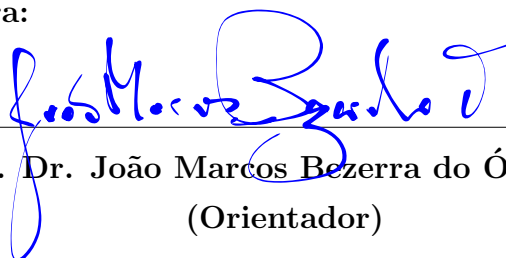
Joémerson de Oliveira Maia

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 30 de agosto de 2022.

Banca Examinadora:



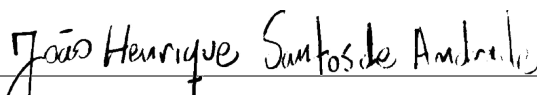
Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó – UFPB
(Orientador)



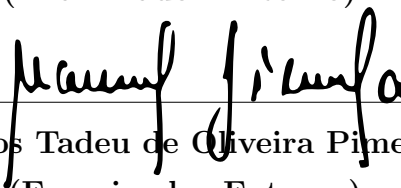
Profª. Drª. Evelina Shamarova – UFPB
(Examinadora Interna)



Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo – UFPB
(Examinador Interno)



Prof. Dr. João Henrique Santos de Andrade - USP
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta – UNESP
(Examinador Externo)

Dedico este trabalho à memória de todas as pessoas que perderam suas vidas para a COVID-19 nessa pandemia lastimável que tem assolado o nosso país desde o começo de 2020, bem como a todas as pessoas que perderam alguém importante para essa doença. São mais de 680000 vidas interrompidas no Brasil, muitas das quais teriam sido preservadas se as recomendações da ciência (isolamento social, máscara, álcool em gel, distanciamento e vacinação em massa) tivessem sido seguidas à risca (e rápido) pelos poderes públicos e privados. Uma das vidas tragicamente interrompidas pela COVID-19 foi a do professor Roberto Callejas Bedregal (1959-2021), professor do DM durante 26 anos (lecionando várias disciplinas, como “Introdução à Álgebra Linear” e “Álgebra I”, as que tive a oportunidade de cursar com ele), pesquisador nível 1 do CNPq e orientador de dezenas de alunos no PPGMAT e no PAPGM. Fica a tristeza pela sua partida precoce e a lembrança do grande professor que ele foi.

Agradecimentos

A Deus, por me dar forças e saúde para completar mais esta etapa, ainda mais nessa época tão difícil que tem sido a pandemia da COVID-19.

Ao meu pai, José Jorge Maia, à minha mãe, Selma Maria de Oliveira Maia, e aos meus irmãos, Joébert de Oliveira Maia e Joévertton de Oliveira Maia, pelo apoio em todos os momentos e pelo incentivo para avançar cada vez mais nos estudos.

A todos os professores que tive desde o ensino fundamental até a graduação, pois todas essas etapas foram fundamentais para o meu crescimento, tanto no âmbito acadêmico quanto no âmbito profissional. Dentre todos os professores que tive na graduação e no mestrado, agradeço em especial:

- Ao professor Lenimar Nunes de Andrade, pelas excelentes aulas no PIC por vários anos, pelas excelentes aulas de Cálculo II e Cálculo III na UFPB, pelas valiosas dicas de livros e pelos excelentes textos didáticos elaborados, vários dos quais me ajudaram muito em diversas disciplinas;
- À professora Miriam da Silva Pereira, pelas excelentes aulas de Elementar I, Elementar II e Fundamentos da Matemática na UFPB, pelos três anos de colaboração na equipe da OPM e pela excelente orientação no TCC da graduação;
- À professora Valdenilza Ferreira da Silva, pela orientação no projeto de ensino para olimpíadas de matemática que desenvolvemos em 2017;
- Aos demais professores que tive na graduação e no mestrado, dentre os quais cito em especial: Antônio Sales da Silva, Daniel Marinho Pellegrino, Elisandra de Fátima Gloss de Moraes, Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia, João Batista Alves Parente, Manassés Xavier de Souza, Marivaldo Pereira Matos e Uberlandio Batista Severo.

Ao professor João Marcos Bezerra do Ó pela orientação e aos professores Evelina Shamarova, Uberlandio Batista Severo, João Henrique Santos de Andrade e Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta pela avaliação deste trabalho.

A todos os meus amigos (do ensino médio, da OBMEP, da graduação e do mestrado), pelas boas conversas e pela ajuda mútua nos desafios da vida. A todos os colegas de turma do PPGMAT (por exemplo, Beatriz, Thays, Isabele, Jaislayne, Milena,

Cláudia, Alessandro, Paulo, Anderson, Lucas, Marcos e muitos outros) pelos momentos de estudo, que acabaram acontecendo de modo totalmente virtual por causa da pandemia. Um agradecimento especial a Beatriz pela parceria constante nos estudos e pelas ótimas conversas nos intervalos de descanso.

A todos os profissionais da saúde que têm se empenhado no atendimento à população nesta pandemia da COVID-19, a todos os cientistas envolvidos no desenvolvimento das vacinas e a todos os divulgadores científicos que trazem informação científica confiável em meio às tentativas (de certos indivíduos e governos mal-intencionados) de atrapalhar a vacinação.

À Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), melhor olimpíada de matemática do universo (e uma das mais importantes iniciativas da educação pública brasileira de todos os tempos), por todas as oportunidades concedidas: PIC, cerimônias de premiação, Encontro do Hotel de Hilbert, entre outras. Agradeço a todas as pessoas que fazem parte da organização da OBMEP e do PIC, por proporcionarem todas essas oportunidades, e a todos os amigos e colegas que conheci desde 2010 por meio da OBMEP (seja pelos eventos presenciais como a CN e o EHH ou pelas redes sociais). Escolhi me tornar um professor de matemática exatamente por causa da OBMEP, a olimpíada que transformou a vida de milhares de estudantes (como a minha). Espero que cada vez mais alunos e professores possam descobrir o prazer de estudar matemática por meio da OBMEP e de todas as oportunidades que ela proporciona.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o Teorema da Aplicação Inversa para aplicações diferenciáveis entre espaços de Fréchet que foi demonstrado por Ekeland [8] em 2011. Inicialmente, é apresentada uma generalização para espaços de Banach do Teorema da Aplicação Inversa clássico (para aplicações diferenciáveis em espaços euclidianos), cuja demonstração utiliza o Teorema do Ponto Fixo de Banach (e outros resultados auxiliares). Em seguida, mostramos um Teorema da Aplicação Inversa mais forte para espaços de Banach obtido por Ekeland, cuja prova é baseada no Princípio Variacional de Ekeland e em resultados sobre funções convexas subdiferenciáveis. Por fim, apresentamos a prova do Teorema da Aplicação Inversa obtido por Ekeland para espaços de Fréchet, a qual se baseia no Princípio Variacional de Ekeland, em resultados de Teoria da Medida para séries numéricas e em resultados sobre funções convexas subdiferenciáveis.

Palavras-chave: Espaços de Fréchet. Princípio Variacional de Ekeland. Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland.

Abstract

In this work, we study the Ekeland's inverse function theorem in Fréchet spaces, that was published by Ekeland [8] in 2011. Initially, we present an inverse function theorem in Banach spaces (that is more general than the classical inverse function theorem in Euclidian spaces), which proof is based on Banach's fixed point theorem. After this, we present another inverse function theorem in Banach spaces, which proof was done by Ekeland from Ekeland's variational principle and some results in convex analysis. Finally, we present the Ekeland's inverse function theorem in Fréchet spaces, which proof is based on Ekeland's variational principle and other results in measure theory and convex analysis.

Keywords: Fréchet spaces. Ekeland's variational principle. Ekeland's inverse function theorem.

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos e resultados preliminares	3
1.1 Noções básicas de espaços métricos	3
1.2 Noções básicas de topologia geral	12
1.3 Espaços vetoriais normados e espaços de Banach	17
1.4 Aplicações lineares contínuas	22
1.5 Teorema de Hahn-Banach e consequências	24
1.6 Espaços de Hilbert	25
1.7 Cálculo diferencial em espaços euclidianos	27
2 O Teorema da Aplicação Inversa em Espaços de Banach	31
2.1 Derivada de Fréchet	31
2.2 Integrais de caminhos retificáveis	40
2.3 Teorema Fundamental do Cálculo	50
2.4 Desigualdade do Valor Médio	53
2.5 Teorema da Aplicação Inversa em espaços de Banach	56
3 Espaços de Fréchet	67
3.1 Espaços de Fréchet	67
3.2 Espaços graduados e standard	77
3.3 Integral de curvas em espaços de Fréchet	88
3.4 Derivada de Gateaux	92
3.5 Resultados importantes do Cálculo em espaços de Fréchet	98
3.6 Motivação para o Teorema da Aplicação Inversa em espaços de Fréchet	105
3.7 O Teorema da Aplicação Inversa de Nash-Moser	108
4 Resultados de Teoria da Medida e Análise Não-Linear	110
4.1 Resultados de Medida e Integração para séries	110
4.2 Princípio Variacional de Ekeland	117

4.3	Funções convexas subdiferenciáveis	120
5	O Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland	123
5.1	O caso particular em espaços de Banach	124
5.2	O caso geral do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland	131
5.3	Avanços posteriores e aplicações	161
	Referências Bibliográficas	164

Introdução

O estudo dos teoremas da aplicação inversa (e da aplicação implícita) em espaços de Fréchet começou em 1956, a partir do trabalho de J. Nash [26] sobre a existência de imersões isométricas em variedades riemannianas, e foi aprofundado nas décadas de 1960 e 1970 a partir dos trabalhos de diversos matemáticos, alguns dos quais iremos destacar a seguir. Em 1960, J. Schwartz [30] obteve um teorema da aplicação implícita a partir do método utilizado por Nash. Alguns anos depois, em 1966, J. Moser [24] desenvolveu um teorema da aplicação inversa baseado no trabalho de Schwartz e mostrou que o resultado encontrado poderia ser usado para construir soluções de alguns problemas não-lineares em equações diferenciais parciais. Em 1972, F. Sergeraert [31] mostrou uma versão do teorema da aplicação implícita para uma certa categoria de aplicações entre espaços de Fréchet. A contribuição mais famosa surgiu em 1982, com o artigo de R. S. Hamilton [13] sobre o Teorema da Aplicação Inversa de Nash-Moser, o qual tem encontrado aplicações em diversas áreas da Matemática e resultou em diversos avanços na busca por casos mais gerais.

Em 2011, I. Ekeland [8] estabeleceu um novo teorema da aplicação inversa em espaços de Fréchet, o qual, além de ser mais geral do que o teorema de Nash-Moser, possui uma demonstração completamente diferente (e menos complicada), baseada no princípio variacional [9] formulado pelo próprio Ekeland quase 40 anos antes. O objetivo principal deste trabalho é apresentar o Teorema da Aplicação Inversa devido a Ekeland bem como sua prova de forma detalhada.

Para alcançar este objetivo, faremos uma revisão das noções mais importantes de Análise Funcional Linear, estabeleceremos diversos conceitos sobre Cálculo em espaços de Banach e espaços de Fréchet, e apresentaremos alguns resultados clássicos da Análise Funcional Não-Linear que são utilizados na prova do resultado principal. Após a demonstração do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland, também faremos uma breve exposição sobre os avanços na Matemática decorrentes deste teorema.

Dividimos o presente trabalho em 5 capítulos:

- O *Capítulo 1* contém algumas definições e resultados básicos de Espaços Métricos, Análise no $\mathbb{R}^n$, Topologia Geral e Análise Funcional Linear, com o objetivo de

facilitar a referência aos resultados que serão utilizados no desenvolvimento dos assuntos dos capítulos seguintes. As principais referências para este capítulo são os livros [2], [3] e [18], e outras referências importantes serão citadas ao longo do texto.

- No *Capítulo 2*, vamos fazer uma breve introdução ao Cálculo Diferencial e Integral em espaços de Banach, com o objetivo de apresentar o Teorema da Aplicação Inversa em espaços de Banach, que é uma generalização do Teorema da Aplicação Inversa em espaços euclidianos (de Análise no $\mathbb{R}^n$) e é um caso particular do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland. As referências para este capítulo são os livros [2], [16] e [19].
- No *Capítulo 3*, faremos uma introdução aos espaços de Fréchet, que generalizam os espaços de Banach, e desenvolveremos algumas noções de cálculo diferencial e integral em espaços de Fréchet. Também veremos que o Teorema da Aplicação Inversa em espaços de Banach pode não ser válido para certas aplicações entre espaços de Fréchet, o que motivou o desenvolvimento de resultados mais específicos para espaços de Fréchet. As principais referências para este capítulo são os artigos de Hamilton [13] e Ekeland [8], e outras referências importantes são os livros [2], [29] e [35].
- No *Capítulo 4*, enunciaremos alguns resultados preliminares (de Medida e Integração, de Análise Convexa e o Princípio Variacional de Ekeland) que serão usados na demonstração do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland. As referências mais importantes para este capítulo são os livros [12], [17] e [28].
- Por fim, o *Capítulo 5* é onde se encontram os principais resultados deste trabalho. Começaremos apresentando um caso particular do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland para espaços de Banach. Em seguida, desenvolveremos a demonstração do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland para espaços de Fréchet, juntamente com alguns resultados obtidos a partir deste. Para finalizar, comentaremos brevemente sobre generalizações deste teorema e aplicações às Equações Diferenciais Parciais. A principal referência para este capítulo é o artigo de Ekeland [8].

Capítulo 1

Conceitos e resultados preliminares

Neste primeiro capítulo, faremos uma introdução à Análise Funcional no contexto dos espaços de Banach, com os principais conceitos e resultados que serão necessários para o entendimento dos próximos capítulos.

1.1 Noções básicas de espaços métricos

Iniciaremos este capítulo revisitando algumas noções básicas de espaços métricos (ver [7] ou [22] para uma exposição mais abrangente).

Definição 1.1. Seja X um conjunto. Uma **métrica** é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (que associa a cada par ordenado (x, y) , com $x \in X$ e $y \in X$, um número real $d(x, y) \in \mathbb{R}$) satisfazendo as seguintes propriedades:

(D1) Para todo $x \in X$, tem-se $d(x, x) = 0$.

(D2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$.

(D3) Para quaisquer $x, y \in X$, tem-se $d(x, y) = d(y, x)$.

(D4) Para quaisquer $x, y, z \in X$, vale a desigualdade triangular:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Dizemos então que o par (X, d) é um **espaço métrico**. Quando não houver dúvida ou possibilidade de confusão sobre a métrica do espaço X , dizemos simplesmente que X é um espaço métrico.

Exemplo 1.1. Os conjuntos a seguir são espaços métricos:

- (1) $X = \mathbb{R}$ com a métrica proveniente do módulo: $d(x, y) = |x - y|$.

- (2) $X = \mathbb{C}$ com a métrica da distância entre dois pontos: $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- (3) $X = \mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$.
- (4) $X = \mathbb{R}^n$ com a métrica da soma: $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$
- (5) $X = \mathbb{R}^n$ com a métrica do máximo: $d_2(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$.
- (6) O espaço das funções limitadas $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{B}([a, b]; \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}; \exists k > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq k, \forall x \in [a, b]\},$$

com a métrica $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$.

- (7) Sendo $(M_1, d_1), \dots, (M_n, d_n)$ espaços métricos, o produto cartesiano $M_1 \times \dots \times M_n$ é um espaço métrico com qualquer uma das métricas a seguir:

- $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + \dots + d_n(x_n, y_n)$
- $d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$
- $d(x, y) = \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + \dots + (d_n(x_n, y_n))^2}$

- (8) Qualquer conjunto X com a métrica zero-um: $d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$

- (9) Qualquer subconjunto S de um espaço métrico M é um espaço métrico com a métrica de M (restrita a $S \times S$). Por exemplo, $S = \mathbb{Q}$ é um espaço métrico com a métrica de $M = \mathbb{R}$.

- (10) Seja $\{(M_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família infinita enumerável de espaços métricos, de modo que existe uma sequência $c_i \geq 0$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty$ e $d_i(x_i, y_i) \leq c_i$ para quaisquer $x_i, y_i \in M_i$ (para qualquer $i \in \mathbb{N}$). O produto cartesiano infinito $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ é o conjunto de todas as sequências $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, com $x_i \in M_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, e é um espaço métrico com a métrica $d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(x_i, y_i)$.

Definição 1.2. Sejam (M, d) um espaço métrico, $a \in M$ e $r > 0$ um número real. Definimos as **bolas** e a **esfera** da seguinte forma:

- A **bola aberta** de centro a e raio r é o conjunto dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor que r , ou seja:

$$B(a; r) = \{x \in M : d(x, a) < r\}$$

- A **bola fechada** de centro a e raio r é o conjunto dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor ou igual a r , ou seja:

$$B[a; r] = \{x \in M : d(x, a) \leq r\}$$

- A **esfera** de centro a e raio r é o conjunto dos pontos de M cuja distância ao ponto a é igual a r , ou seja:

$$S(a; r) = \{x \in M : d(x, a) = r\}$$

É imediato ver que $B[a; r] = B(a; r) \cup S(a; r)$.

Exemplo 1.2. Exemplos de bolas e esferas:

- (1) No espaço métrico $M = \mathbb{R}$ (com a métrica usual), temos:

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$$

$$B[a; r] = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r]$$

$$S(a; r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| = r\} = \{a - r, a + r\}$$

- (2) No espaço métrico $M = \mathbb{R}^n$ (com a métrica euclidiana), temos:

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < r\}$$

$$B[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} \leq r\}$$

$$S(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} = r\}$$

Se $n = 2$ (ou seja, para $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}$), a bola fechada é um círculo (também chamado de disco), a bola aberta é o interior de um círculo e a esfera é uma circunferência.

- (3) No espaço métrico $M = \mathbb{R}^n$ (com a métrica da soma), temos:

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1 - a_1| + \dots + |x_n - a_n| < r\}$$

$$B[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1 - a_1| + \dots + |x_n - a_n| \leq r\}$$

$$S(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1 - a_1| + \dots + |x_n - a_n| = r\}$$

Se $n = 2$, as bolas e a esfera têm o formato de um quadrado com lados paralelos às diagonais do plano.

(4) No espaço métrico $M = \mathbb{R}^n$ (com a métrica do máximo), temos:

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, y_i) < r\}$$

$$B[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, y_i) \leq r\}$$

$$S(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, y_i) = r\}$$

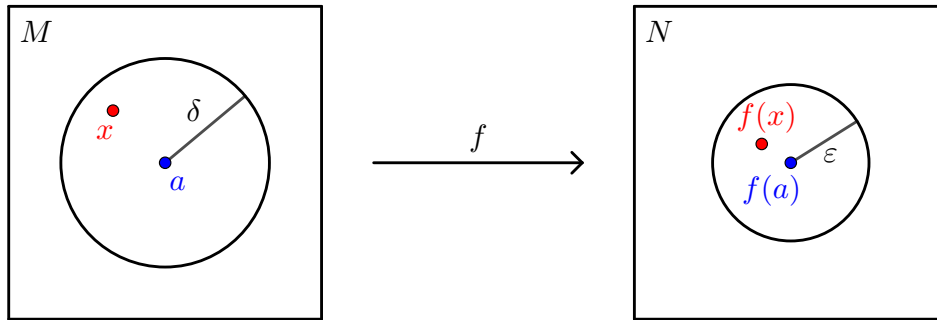
Se $n = 2$, as bolas e a esfera têm o formato de um quadrado com lados paralelos aos eixos. Se $n = 3$, as bolas e a esfera têm o formato de um cubo com arestas paralelas aos eixos.

Proposição 1.1. Sejam M um espaço métrico, $a, b \in M$ com $a \neq b$, e $r, s > 0$ tais que $r + s \leq d(a, b)$. Então, $B(a; r) \cap B(b; s) = \emptyset$.

Demonstração. Ver [22], página 13. □

Observação 1.1. Ou seja: dados dois pontos distintos em um espaço métrico, sempre é possível obter bolas abertas disjuntas centradas nesses pontos. Pode-se verificar o mesmo para bolas fechadas.

Definição 1.3. Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Dizemos que uma função $f : M \rightarrow N$ é **contínua** no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d_M(x, a) < \delta$ então $d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Se f for contínua em todos os pontos $a \in M$, então dizemos simplesmente que f é contínua.



De modo equivalente, dizemos que $f : M \rightarrow N$ é contínua em $a \in M$ quando, para qualquer bola aberta $B(f(a); \varepsilon)$ de centro $f(a)$, existe uma bola aberta $B(a; \delta)$ de centro a tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon)$.

Exemplo 1.3. Exemplos de funções contínuas (ver [22], páginas 31 a 33):

- (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (ver [20], página 223).

- (2) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua em $a \in \mathbb{C}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|z - a| < \delta$ então $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ (ver [33], página 47).
- (3) Toda função $f : M \rightarrow N$ que é **lipschitziana** (ou seja, existe uma constante $c > 0$ tal que $d_N(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_M(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$) é contínua. Quando $c = 1$, dizemos que f é uma **contração fraca**. Quando $0 \leq c < 1$, dizemos que f é uma **contração**.
- (4) Se $f_1, \dots, f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções lipschitzianas e $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ são constantes reais, então $k_1 f_1 + \dots + k_n f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ é lipschitziana.
- (5) Sendo $(M_1, d_1), \dots, (M_n, d_n)$ espaços métricos e considerando o produto cartesiano $M = M_1 \times \dots \times M_n$ com qualquer uma das métricas definidas no Exemplo 1.1 (item (7)), a projeção $p_i : M \rightarrow M_i$, $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ é uma contração fraca, daí é contínua.
- (6) A métrica $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma contração fraca, daí é contínua.
- (7) Uma função $f : M \rightarrow N$ é **uniformemente contínua** quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in M$, $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Toda função uniformemente contínua é contínua, mas não vale a recíproca (ver [22], página 155).

Proposição 1.2. Algumas propriedades elementares das funções contínuas entre espaços métricos:

- (1) A composta de duas aplicações contínuas é contínua.
- (2) A restrição de uma aplicação contínua (a um subconjunto do seu domínio) é contínua.
- (3) A aplicação $f : M \rightarrow N_1 \times N_2$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ é contínua (no ponto $a \in M$) se, e somente se, $f_1 : M \rightarrow N_1$ e $f_2 : M \rightarrow N_2$ também são contínuas (no ponto $a \in M$).
- (4) Se $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, então $f + g$ e $f \cdot g$ são contínuas. Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in M$, então $\frac{f}{g}$ é contínua.

Demonstração. Ver [22], páginas 34 a 38. □

Definição 1.4. Sejam M e N espaços métricos, e seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação. Dizemos que f é um **homeomorfismo** se f é contínua e bijetora, cuja inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ também é contínua.

Exemplo 1.4. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é um homeomorfismo, pois f é contínua e sua inversa $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ também é contínua.

Definição 1.5. Seja M um espaço métrico no qual existem duas métricas d_1 e d_2 . Dizemos que d_1 e d_2 são **equivalentes** quando a aplicação identidade $i_{12} : (M, d_1) \rightarrow (M, d_2)$ é um homeomorfismo.

Exemplo 1.5. Seja M um espaço métrico no qual existem duas métricas d_1 e d_2 . Consideremos a aplicação identidade $i_{12} : (M, d_1) \rightarrow (M, d_2)$. Se existirem constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que $\alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y)$, então:

$$\begin{aligned} d_2(i_{12}(x), i_{12}(y)) &\leq \beta \cdot d_1(x, y) \\ d_1(i_{12}^{-1}(x), i_{12}^{-1}(y)) &\leq \frac{1}{\alpha} \cdot d_2(x, y) \end{aligned}$$

Assim, i_{12} e i_{12}^{-1} são lipschitzianas, portanto são contínuas. Então, concluímos que as métricas d_1 e d_2 são equivalentes.

Definição 1.6. Seja $X \subset M$ um subconjunto do espaço métrico M . Um ponto $a \in M$ é:

- um **ponto interior** de X se existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset X$;
- um **ponto de fronteira** de X se existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \cap X \neq \emptyset$ e $B(a; r) \cap (M \setminus X) \neq \emptyset$;
- um **ponto aderente** a X se, para todo $r > 0$, $B(a; r) \cap X \neq \emptyset$;
- um **ponto de acumulação** de X se, para todo $r > 0$, $B(a; r) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.

O conjunto dos pontos interiores de X é o **interior** de X , denotado por $\text{Int } X$. O conjunto dos pontos de fronteira de X é a **fronteira** de X , denotada por $\text{fr } X$ ou ∂X . O conjunto dos pontos aderentes a X é o **fecho** de X , denotado por $\overline{X}$. O conjunto dos pontos de acumulação de X é denotado por X' . Dizemos que X é **aberto** se $\text{Int } X = X$ e dizemos que X é **fechado** se $\overline{X} = X$.

Exemplo 1.6. Exemplos de conjuntos abertos e fechados:

- (1) Em qualquer espaço métrico M , temos que o conjunto vazio $\emptyset$ e o próprio M são simultaneamente abertos e fechados, as bolas abertas são conjuntos abertos e as bolas fechadas são conjuntos fechados.
- (2) Todo subconjunto finito de um espaço métrico M é fechado.

- (3) A interseção de um número finito de conjuntos abertos e a união de uma família qualquer de conjuntos abertos são conjuntos abertos (ver [22], páginas 68 e 69).
- (4) A união de um número finito de conjuntos fechados e a interseção de uma família qualquer de conjuntos fechados são conjuntos fechados (ver [22], página 79).

Proposição 1.3. Para todo $X \subset M$, tem-se:

- (1) $M = (\text{Int } X) \cup \partial X \cup (\text{Int}(M \setminus X))$.
- (2) X é aberto se, e somente se, $X \cap \partial X = \emptyset$.
- (3) $\text{Int } X$ é aberto.
- (4) $\overline{X} = (\text{Int } X) \cup \partial X$.
- (5) $\overline{X}$ é fechado.
- (6) X é fechado se, e somente se, $\partial X \subset X$.
- (7) ∂X é fechado.
- (8) $\overline{X} = X \cup X'$.

Demonstração. Ver [22], páginas 65, 66, 76, 78, 79 e 83. □

Proposição 1.4. Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação bijetora $h : M \longrightarrow N$ é um homeomorfismo se, e somente se, h é uma bijeção entre os abertos de M e os abertos de N (ou seja, $X \subset M$ é aberto em M se, e somente se, $h(X)$ é aberto em N).

Demonstração. Ver [22], página 73. □

Teorema 1.1. Sejam d_1 e d_2 duas métricas no mesmo conjunto M . As métricas d_1 e d_2 são equivalentes se, e somente se, os espaços métricos (M, d_1) e (M, d_2) possuem os mesmos conjuntos abertos.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Se as métricas d_1 e d_2 são equivalentes, então a aplicação inclusão $i_{12} : (M, d_1) \longrightarrow (M, d_2)$ é um homeomorfismo (ver Definição 1.5). Logo, pela Proposição 1.4, temos que $X \subset (M, d_1)$ é aberto se, e somente se, $i_{12}(X) = X \subset (M, d_2)$ é aberto. Portanto, os espaços métricos (M, d_1) e (M, d_2) possuem os mesmos conjuntos abertos.

$(\Leftarrow)$ Se os espaços métricos (M, d_1) e (M, d_2) possuem os mesmos conjuntos abertos, então $X \subset (M, d_1)$ é aberto se, e somente se, $X \subset (M, d_2)$ é aberto. Logo, $X \subset (M, d_1)$ é aberto se, e somente se, $i_{12}(X) \subset (M, d_2)$ é aberto. Então, pela Proposição 1.4, a aplicação inclusão $i_{12} : (M, d_1) \longrightarrow (M, d_2)$ é um homeomorfismo. Portanto, as métricas d_1 e d_2 são equivalentes. □

Definição 1.7. Uma **sequência** em um espaço métrico M é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ um ponto $x(n) \in M$. Denotamos os pontos de uma sequência por $x_1 = x(1)$, $x_2 = x(2)$, $x_3 = x(3)$ e assim por diante. Assim, a sequência de pontos $x_1, x_2, x_3, \dots$ é denotada por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_n) .

Definição 1.8. Seja (M, d) um espaço métrico e seja $(x_n) \subset M$ uma sequência. Dizemos que a sequência (x_n) **converge** para um ponto $a \in M$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Neste caso, dizemos que a sequência (x_n) é **convergente** e que a é o **limite** da sequência (x_n) . Denotamos o limite por $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ ou simplesmente $a = \lim x_n$, e neste caso dizemos que $x_n \rightarrow a$. Se uma sequência (x_n) não é convergente, dizemos que ela é **divergente** (ou que ela **diverge**). Nesse caso, escrevemos $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty$ (ou $\lim x_n = \infty$).

Proposição 1.5. Sejam M, N espaços métricos. A aplicação $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n) \subset M$ com $x_n \rightarrow a$ tem-se $f(x_n) \rightarrow f(a)$ em N .

Demonstração. Ver [22], página 130. □

Definição 1.9. Seja M um espaço métrico. Dizemos que uma sequência $(x_n) \subset M$ é uma **sequência de Cauchy** quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$ então $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Definição 1.10. Um espaço métrico M é **completo** quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Exemplo 1.7. Exemplos:

- (1) Toda sequência convergente no espaço métrico $M = \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy e vice-versa (ver [20], páginas 126 e 127). Assim, $\mathbb{R}$ é completo. Exemplos de sequências convergentes (ou seja, que são de Cauchy) em $\mathbb{R}$: $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $z_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$, entre outras.
- (2) Exemplos de sequências em $\mathbb{R}$ que não convergem (ou seja, não são de Cauchy): $x_n = n$, $y_n = (-1)^n$, $z_n = \sin(n^2)$, entre outras.
- (3) Toda sequência convergente no espaço métrico $M = \mathbb{R}^n$ é uma sequência de Cauchy e vice-versa (ver [21], página 18). Assim, $\mathbb{R}^n$ é completo. Fazendo a identificação natural $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, segue daí que $\mathbb{C}$ é completo.
- (4) Se M e N são espaços métricos tais que $M \subset N$, uma sequência de pontos $x_n \in M$ é de Cauchy em M se, e somente se, é de Cauchy em N (ver [22], página

167). Por exemplo: uma sequência de pontos $x_n \in \mathbb{Q}$ é de Cauchy em $\mathbb{Q}$ se, e somente se, é de Cauchy em $\mathbb{R}$.

(5) Seja $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ a sequência de números racionais definida por $x_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$. Esta também é uma sequência de números reais e ela converge para o número de Euler $e \in \mathbb{R}$, ou seja, $\lim x_n = e$. Logo, $(x_n) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy, dessa forma $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ é uma sequência de Cauchy (pelo item anterior). Porém, $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ não converge em $\mathbb{Q}$, pois $\lim x_n = e \notin \mathbb{Q}$. Logo, (x_n) é uma sequência de Cauchy que não converge em $\mathbb{Q}$. Isso mostra que o espaço métrico $M = \mathbb{Q}$ não é completo, pois existe uma sequência de Cauchy que não é convergente em $\mathbb{Q}$.

(6) Seja M um espaço métrico completo. Então, um subconjunto $F \subset M$ (que é um espaço métrico com a métrica de M) é fechado se, e somente se, é um espaço métrico completo (ver [22], página 172).

(7) O produto cartesiano $M_1 \times \dots \times M_n$ é completo se, e somente se, os espaços métricos $M_1, \dots, M_n$ são completos (ver [22], página 173).

(8) O produto cartesiano infinito $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ é completo se, e somente se, M_i é completo para cada $i \in \mathbb{N}$ (ver [22], página 173).

Proposição 1.6. Um espaço métrico M é completo se, e somente se, para toda sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$ de subconjuntos fechados não-vazios $F_n \subset M$, com $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0$, existe um ponto $a \in M$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.

Demonstração. Ver [22], página 197. □

Definição 1.11. Seja M um espaço métrico e seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação. Dizemos que $x \in M$ é um **ponto fixo** de f se $f(x) = x$.

Teorema 1.2 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Se (M, d) é um espaço métrico completo e $f : M \rightarrow M$ é uma contração, então f possui um único ponto fixo $z \in M$ e esse ponto fixo é obtido da seguinte forma: para todo $x_0 \in M$, definamos $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $\dots$, $x_n = f(x_{n-1})$ e assim por diante, assim a sequência (x_n) é convergente e $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.*

Demonstração. Ver [22], página 207. □

Corolário 1.1 (Teorema do Ponto Fixo para contrações restritas a bolas fechadas). Seja (M, d) um espaço métrico completo. Seja $f : M \rightarrow M$ uma contração, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ com $0 \leq c < 1$ tal que para quaisquer $x, y \in M$ tem-se $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$. Dado qualquer $a \in M$, se $r \geq \frac{d(a, f(a))}{1-c}$ então a bola fechada $B[a; r]$ é invariante por f , ou seja, $f(B[a; r]) \subset B[a; r]$. Em particular, o ponto fixo de f pertence à bola $B[a; r]$.

Demonstração. Ver [22], página 208. □

Definição 1.12. Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Dizemos que uma função $f : M \rightarrow N$ é uma **isometria** se preserva distâncias, ou seja, se para quaisquer $x, y \in X$ tem-se

$$d_N(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Dizemos que M e N são **isométricos** se existe uma isometria bijetora de M em N .

Teorema 1.3 (Completamento de um espaço métrico). *Seja (M, d) um espaço métrico. Então, existe um espaço métrico completo $(\widehat{M}, \widehat{d})$ (denominado **completamento de M**) tal que $\widehat{M}$ possui um subespaço N isométrico a M e denso em $\widehat{M}$. Além disso, o completamento $\widehat{M}$ de M é único a menos de isometrias.*

Demonstração. Ver [18], páginas 41 a 45. □

1.2 Noções básicas de topologia geral

Nesta seção, faremos uma breve apresentação dos espaços topológicos (que são uma generalização natural dos espaços métricos). Para uma exposição mais detalhada, indicamos consultar [23] ou [25].

Definição 1.13. Seja X um conjunto. Uma **topologia** em X é uma coleção τ de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Os conjuntos $\emptyset$ e X pertencem à coleção τ , ou seja, $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$.
- (ii) A união dos elementos de uma família de elementos de τ é um elemento de τ .
Ou seja: se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma família de elementos de τ , então $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau$.
- (iii) A interseção de uma quantidade finita de elementos de τ é um elemento de τ .
Ou seja: se $A_1, \dots, A_n \in \tau$, então $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$.

Um conjunto X munido da topologia τ é denominado **espaço topológico**. Também podemos definir um espaço topológico como sendo um par ordenado (X, τ) , onde X é um conjunto e τ é a topologia nele definida. Quando não houver nenhuma dúvida ou possibilidade de confusão sobre qual é a topologia τ do conjunto X , podemos omitir a menção explícita à topologia τ , assim diremos simplesmente que X é um espaço topológico.

Definição 1.14. Seja (X, τ) um espaço topológico e seja U um subconjunto de X , isto é, $U \subset X$. Se $U \in \tau$ (ou seja, se U é um elemento da coleção τ), dizemos que U é um **conjunto aberto** de X (ou simplesmente um **aberto** de X).

Exemplo 1.8. Exemplos de espaços topológicos:

- (1) $X = \{a, b, c\}$ com a topologia $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$;
- (2) Qualquer conjunto X com a **topologia discreta** $\mathcal{P}(X)$ (conjunto das partes de X);
- (3) Qualquer conjunto X com a **topologia trivial** $\tau = \{\emptyset, X\}$;
- (4) Todo espaço métrico (M, d) é um espaço topológico, cuja topologia é formada pelo vazio, por M , por todas as bolas abertas em M e por todas as uniões de bolas abertas em M .
- (5) Todo subconjunto Y de um espaço topológico (X, τ) é um espaço topológico com a seguinte topologia:

$$\tau_A = \{B \cap A : B \in \tau\}$$

Neste caso, dizemos que Y é um **subespaço topológico** de X .

Definição 1.15. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que o conjunto $A \subset X$ é **fechado** se $X \setminus A$ é aberto (ou seja, A é fechado se $X \setminus A \in \tau$).

Definição 1.16. Seja X um espaço topológico e $A \subset X$ um subconjunto qualquer. Definimos o **interior** de A como sendo a união de todos os abertos de X contidos em A e denotamos o interior de A por $\text{Int } A$. Definimos o **fecho** de A como sendo a interseção de todos os fechados de X que contêm A e denotamos o fecho de A por $\overline{A}$.

Proposição 1.7. Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Então $x \in \overline{A}$ se, e somente se, $A \cap U \neq \emptyset$ para todo aberto U contendo x .

Demonstração. Ver [25], página 96. □

Proposição 1.8. Seja X um espaço topológico e seja $A \subset X$ um subconjunto qualquer. Então:

(1) A é aberto se, e somente se, $\text{Int } A = A$.

(2) A é fechado se, e somente se, $\overline{A} = A$.

Demonstração. Ver [23], páginas 69 e 70. □

Definição 1.17. Seja $x \in X$. Se $U \subset X$ é um aberto tal que $x \in U$, dizemos que U é uma **vizinhança** de x .

Definição 1.18. Sejam X e Y espaços topológicos e seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. A **imagem inversa** de um conjunto $V \subset Y$ pela função f é o conjunto dos pontos de X cujas imagens pertencem ao conjunto V , ou seja:

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$$

Definição 1.19. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é **contínua** se, para todo aberto $V \subset Y$, a imagem inversa $f^{-1}(V) \subset X$ é um aberto de X .

Teorema 1.4. *Sejam X e Y espaços topológicos e seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) f é contínua.
- (2) Para todo subconjunto $A \subset X$, tem-se $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
- (3) Para todo fechado $B \subset Y$, a imagem inversa $f^{-1}(B)$ é um fechado em X .
- (4) Para cada $x \in X$ e para cada vizinhança V de $f(x)$, existe uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subset V$.

Demonstração. Ver [25], páginas 104 e 105. □

Teorema 1.5. *Sejam X , Y e Z espaços topológicos.*

- (a) (Função constante) Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma função constante, ou seja, se existe $y_0 \in Y$ fixo tal que $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$, então f é contínua.
- (b) (Inclusão) Se A é um subespaço de X , então a inclusão $j : A \longrightarrow X$ é contínua. (Consequentemente, a identidade $i : X \longrightarrow X$ é contínua.)
- (c) (Função composta) Se $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ são contínuas, então a função composta $g \circ f : X \longrightarrow Z$ é contínua.
- (d) (Restringindo o domínio) Se $f : X \longrightarrow Y$ é contínua e A é um subespaço de X , então a restrição $f|_A : A \longrightarrow Y$ é contínua.

(e) (*Restringindo ou expandindo o contradomínio*) Seja $f : X \longrightarrow Y$ contínua. Se Z é um subespaço de Y contendo a imagem $f(X)$, então a função $g : X \longrightarrow Z$ obtida restringindo o contradomínio de f a Z é contínua. Se Z é um espaço do qual Y é subespaço, então a função $h : X \longrightarrow Z$ obtida expandindo o contradomínio de f é contínua.

(f) (*Formulação local de continuidade*) A função $f : X \longrightarrow Y$ é contínua se X pode ser escrito como uma união de conjuntos abertos U_α tais que $f|_{U_\alpha}$ é contínua para cada α .

Demonstração. Ver [25], página 108. □

Teorema 1.6 (Lema de colagem). *Seja $X = A \cup B$ um espaço topológico, onde A e B são fechados em X , e seja Y outro espaço topológico. Sejam $f : A \longrightarrow Y$ e $g : B \longrightarrow Y$ funções contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, então a função $h : X \longrightarrow Y$ definida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B, \end{cases}$$

é contínua. (Ou seja, podemos “colar” as funções contínuas f e g para formar uma nova função contínua.)

Demonstração. Ver [25], página 109. □

Teorema 1.7. *Seja $f : A \longrightarrow X \times Y$ dada por $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$, onde $f_1 : A \longrightarrow X$ e $f_2 : A \longrightarrow Y$. Então f é contínua se, e somente se, f_1 e f_2 são contínuas. (As funções f_1 e f_2 são denominadas **funções-coordenada** de f .)*

Demonstração. Ver [25], página 110. □

Teorema 1.8. *Seja $f : X \times Y \longrightarrow Z$ uma função contínua. Então, para quaisquer $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, as funções*

$$\begin{aligned} f_1 : X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto f(x, y_0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_2 : Y &\longrightarrow Z \\ y &\longmapsto f(x_0, y) \end{aligned}$$

são contínuas.

Demonstração. Para todo $y_0 \in Y$ fixado, considere a função:

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow X \times Y \\ x &\longmapsto (x, y_0) \end{aligned}$$

As funções-coordenada $g_1 : X \longrightarrow X$ e $g_2 : X \longrightarrow Y$, definidas respectivamente por $g_1(x) = x$ e $g_2(x) = y_0$, são contínuas, pois g_1 é a identidade e g_2 é uma função constante (ver o Teorema 1.5). Pelo Teorema 1.7, segue que g é contínua. Novamente pelo Teorema 1.5, concluímos que $f_1 = f \circ g$ é contínua. O caso da função f_2 é análogo: basta definir

$$\begin{aligned} h : Y &\longrightarrow X \times Y \\ y &\longmapsto (x_0, y), \end{aligned}$$

de modo que $f_2 = f \circ h$, e aplicar o mesmo raciocínio. □

Definição 1.20. Dizemos que um espaço topológico X tem uma **base enumerável em x** se existe uma coleção enumerável $\mathcal{B}$ de vizinhanças de x tais que cada vizinhança de x contém pelo menos um elemento de $\mathcal{B}$. Se X tem uma base enumerável em cada um de seus pontos, dizemos que X satisfaz o **primeiro axioma de enumerabilidade**.

Exemplo 1.9. Todo espaço métrico (M, d) satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. Para verificar isso, basta tomar, em cada ponto $a \in M$, a coleção $\mathcal{B}$ formada pelas vizinhanças $V_n = \{x \in M : d(x, a) < \frac{1}{n}\}$, pois para toda vizinhança $U \subset M$ de a existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n \subset U$.

Definição 1.21. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um **espaço topológico de Hausdorff** (ou um **espaço de Hausdorff**) se, para quaisquer pontos $x, y \in X$ com $x \neq y$, existem vizinhanças U e V de x e y , respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$.

Observação 1.2. Ou seja, dados dois pontos distintos em um espaço topológico de Hausdorff, é possível obter vizinhanças disjuntas desses pontos.

Exemplo 1.10. Exemplos de espaços topológicos (de Hausdorff ou não):

- (1) Todo espaço métrico é um espaço topológico de Hausdorff (pela Proposição 1.1).
- (2) Qualquer conjunto X com a topologia discreta $\mathcal{P}(X)$ é um espaço de Hausdorff, pois para quaisquer $x, y \in X$ distintos podemos tomar as vizinhanças $\{x\}$ (de x) e $\{y\}$ (de y), que são disjuntas.
- (3) Seja X um conjunto qualquer com a topologia trivial $\tau = \{\emptyset, X\}$. Então, X não é um espaço de Hausdorff, pois se $x \neq y$ então a única vizinhança de x é X e a única vizinhança de y é X , sendo assim não existem vizinhanças disjuntas destes dois pontos.

Definição 1.22. Uma **sequência** em um espaço topológico X é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$ que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ um ponto $x(n) = x_n \in X$.

Definição 1.23. Seja X um espaço topológico. Dizemos que uma sequência $(x_n) \subset X$ **converge** para um ponto $a \in X$ se para toda vizinhança U de a existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $x_n \in U$. Neste caso, dizemos que a sequência (x_n) é **convergente** e que a é o **limite** da sequência (x_n) .

Proposição 1.9. Se X é um espaço topológico de Hausdorff, então toda sequência convergente em X possui um único limite.

Demonstração. Ver [23], página 145. □

1.3 Espaços vetoriais normados e espaços de Banach

A partir desta seção (até a penúltima seção deste capítulo), introduziremos os principais conceitos básicos e alguns dos teoremas mais importantes da Análise Funcional Linear. Tudo o que apresentaremos nestas próximas quatro seções pode ser consultado com mais detalhes em diversos livros, tais como [2], [3] e [18] (além de outros livros que serão citados ao longo da exposição).

Definição 1.24. Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Uma **seminorma** em E é uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$;
- (ii) Para todo $x \in E$ e para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
- (iii) Para quaisquer $x, y \in E$, vale a desigualdade triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definição 1.25. Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Uma **norma** em E é uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e, além disso, $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
- (ii) Para todo $x \in E$ e para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
- (iii) Para quaisquer $x, y \in E$, vale a desigualdade triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dizemos então que E é um **espaço vetorial normado**.

Observação 1.3. Assim, uma norma é uma seminorma na qual $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Exemplo 1.11. Exemplos de espaços vetoriais normados:

- (1) O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um espaço vetorial normado, cuja norma é o módulo usual $|x| = \max\{x, -x\}$.
- (2) O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é um espaço vetorial normado, cuja norma é o módulo usual $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (3) O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial normado no qual podem ser definidas três normas:

- Norma euclidiana: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

- Norma da soma: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

- Norma do máximo: $\|x\|_{\max} = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

- (4) $\mathbb{C}^n$ é um espaço vetorial normado com a norma $\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}$.

- (5) Se E é um espaço vetorial normado, então todo subespaço vetorial $F \subset E$ é um espaço vetorial normado (com a norma de E restrita a F).

- (6) Seja X um conjunto qualquer. O espaço das funções limitadas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, denotado por $B(X)$, é um espaço vetorial normado com a norma $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$. O espaço das funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, denotado por $C([a, b])$, é um espaço vetorial normado, pois é um subespaço do espaço $B([a, b])$ das funções limitadas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, a norma em $C([a, b])$ é $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Analogamente, o espaço dos polinômios $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é um espaço vetorial normado (pois é um subespaço de $C([a, b])$) com a norma $\|p\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |p(x)|$. Da mesma forma, sendo $D_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\}$ o disco de centro na origem e raio n no plano complexo, o espaço das funções $f : D_n \rightarrow \mathbb{C}$ com a norma $\|f\|_{\infty} = \sup_{z \in D_n} |f(z)| = \max_{z \in D_n} |f(z)|$ é um espaço vetorial normado.

- (7) Para cada $p \geq 1$, seja l^p o espaço das seqüências $x = (x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots) \subset \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^p < \infty$. Então, l^p é um espaço vetorial normado com a norma

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso $p = 2$, o espaço l^2 é chamado **espaço das seqüências de Hilbert**. Considerando seqüências $z = (z_n) = (z_1, z_2, z_3, \dots) \subset \mathbb{C}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p < \infty, \text{ a norma de } l^p \text{ é } \|z\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- (8) Seja l^∞ o espaço das sequências limitadas $x = (x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots) \subset \mathbb{R}$, ou seja, tais que existe uma constante $C_x > 0$ (dependendo de x) tal que $|x_i| \leq C_x$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Então, l^∞ é um espaço vetorial normado com a norma $\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$. No caso das sequências limitadas $z = (z_n) = (z_1, z_2, z_3, \dots) \subset \mathbb{C}$, a norma de l^∞ é $\|z\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |z_i|$.

- (9) O espaço $L^1([a, b])$ das funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com a norma

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

é um espaço vetorial normado. Mais geralmente, para todo $p \geq 1$, podemos definir os espaços vetoriais normados $L^p([a, b])$ das funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com a norma

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Observação 1.4. Todo espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço métrico com a métrica induzida pela norma:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Neste caso, a métrica induzida pela norma satisfaz as seguintes propriedades (de verificação simples):

- (a) $d(x + a, y + a) = d(x, y)$
- (b) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$

Ou seja, se uma métrica não satisfaz uma dessas propriedades, então ela não é induzida por uma norma.

Observação 1.5. A recíproca da observação anterior não é verdadeira, ou seja, nem todo espaço métrico (que seja um espaço vetorial) é normado. Isso significa que existem espaços métricos cuja métrica não é proveniente de uma norma. Por exemplo, considere o espaço vetorial das sequências (limitadas ou não) de números complexos (podem ser números reais também) com a métrica dada por

$$d((z_n), (w_n)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|z_j - w_j|}{1 + |z_j - w_j|}$$

(ver [18], páginas 9 a 11). Essa métrica não é proveniente de uma norma, pois não satisfaz o fato (b) apresentado na observação anterior.

Definição 1.26. Seja E um espaço vetorial normado. Como E é um espaço métrico com a métrica induzida, podemos definir as bolas e esferas da seguinte forma:

$$B(a; r) = \{x \in E : \|x - a\| < r\}$$

$$B[a; r] = \{x \in E : \|x - a\| \leq r\}$$

$$S(a; r) = \{x \in E : \|x - a\| = r\}$$

Definição 1.27. Seja $X \subset E$ um subconjunto do espaço vetorial E . Dizemos que X é um conjunto **convexo** se, para quaisquer $a, b \in X$, o segmento de reta

$$[a, b] := \{ta + (1 - t)b \in E : 0 \leq t \leq 1\}$$

está contido em X .

Exemplo 1.12. Para quaisquer $x \in E$ e $r > 0$, a bola aberta $B(x; r)$ é um conjunto convexo, pois:

$$\begin{aligned} a, b \in B(x; r), \quad t \in [0, 1] &\Rightarrow \|x - a\| < r, \quad \|x - b\| < r \\ &\Rightarrow \|x - ta - (1 - t)b\| = \|tx + (1 - t)x - ta - (1 - t)b\| \\ &\Rightarrow \|x - ta - (1 - t)b\| \leq t\|x - a\| + (1 - t)\|x - b\| \\ &\Rightarrow \|x - ta - (1 - t)b\| < tr + (1 - t)r = r \\ &\Rightarrow ta + (1 - t)b \in B(x; r) \end{aligned}$$

Da mesma forma, pode-se mostrar que a bola fechada $B[x; r]$ é um conjunto convexo.

Definição 1.28. Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que uma sequência $(x_n) \subset E$ **converge** para um ponto $x \in E$ se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0$. Neste caso, dizemos que a sequência (x_n) é **convergente** e escrevemos: $x_n \rightarrow x$. Caso contrário, a sequência é **divergente**.

Exemplo 1.13. Exemplos de sequências convergentes:

(1) No espaço vetorial normado $\mathbb{R}$, as sequências definidas por $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ e $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ são convergentes e as sequências definidas por $d_n = n$, $e_n = (-1)^n$ e $f_n = \sin n^2$ são divergentes.

(2) No espaço vetorial normado $\mathbb{C}$, as sequências definidas por $a_n = \frac{i}{n}$, $b_n = \frac{1 + in^3}{n^4}$ e $c_n = \frac{i^n}{n}$ são convergentes e as sequências definidas por $d_n = n + in^2$, $e_n = (-1)^n i$ e $f_n = i^n$ são divergentes.

(3) No espaço vetorial normado $\mathbb{R}^n$, a sequência $x_k = \left(\frac{1}{k^2}, \frac{2}{k^2}, \dots, \frac{n}{k^2}\right)$ é convergente e a sequência $y_k = (1, 2^k, 3^k, \dots, n^k)$ é divergente.

- (4) No espaço vetorial normado $\mathbb{C}^n$, a sequência $z_k = \left(\frac{i^k}{k^2}, \frac{2i^k}{k^2}, \dots, \frac{ni^k}{k^2}\right)$ é convergente e a sequência $w_k = (i^k, (2i)^k, \dots, (ni)^k)$ é divergente.
- (5) No espaço vetorial normado $C([a, b])$, a sequência $f_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!}$ converge para $f(x) = e^x$, enquanto a sequência $g_k(x) = kx$ é divergente.
- (6) No espaço vetorial normado dos polinômios $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, a sequência $f_k(x) = 1 + \frac{x}{k} + \frac{x^2}{k}$ converge para $f(x) = 1$.

Definição 1.29. Seja E um espaço vetorial normado. Uma **sequência de Cauchy** é uma sequência $(x_n) \subset E$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Definição 1.30. Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que E é um **espaço de Banach** se o espaço métrico E com a métrica induzida pela norma é completo, isto é, se toda sequência de Cauchy $(x_n) \subset E$ converge para um elemento $x \in E$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0$$

Exemplo 1.14. Exemplos de espaços de Banach (e de espaços que não são de Banach):

- (1) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ (com alguma das normas conhecidas) são espaços de Banach, pois toda sequência de Cauchy nesses espaços é convergente.
- (2) Se considerarmos o espaço vetorial $\mathbb{Q}$ sobre o corpo $\mathbb{Q}$ (com a norma induzida por $\mathbb{R}$), temos que $\mathbb{Q}$ não é um espaço de Banach, pois existem sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não convergem para pontos de $\mathbb{Q}$ (por exemplo, a sequência $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ converge para $e \notin \mathbb{Q}$).
- (3) $C([a, b])$ com a norma $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ é um espaço de Banach.
- (4) O espaço das funções contínuas $f : D_n \rightarrow \mathbb{C}$, onde $D_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\}$, com a norma $\|f\|_\infty = \max_{z \in D_n} |f(z)|$, é um espaço de Banach.
- (5) O espaço vetorial dos polinômios $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com a norma $\|p\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |p(x)|$ não é um espaço de Banach, pois, por exemplo, a sequência $p_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ é de Cauchy mas $p_n(x) \rightarrow \cos x$, que não é um polinômio.
- (6) Os espaços $(l^p, \|\cdot\|_p)$ e $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ são espaços de Banach.

- (7) O espaço $L^1([a, b])$ com a norma $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$ não é um espaço de Banach. Por exemplo, considere a sequência de funções $f_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f_m(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ m(t - \frac{1}{2}) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}] \\ 1, & \text{se } t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1] \end{cases}$$

Pode-se verificar que (f_m) é uma sequência de Cauchy, mas não converge para nenhuma função contínua.

Observação 1.6. Como todo espaço vetorial normado é um espaço métrico com a métrica induzida pela norma, temos pelo Teorema 1.3 que todo espaço vetorial normado E possui um complemento $\widehat{E}$ tal que $\widehat{E}$ possui um subespaço F isométrico a E e denso em $\widehat{E}$.

1.4 Aplicações lineares contínuas

Definição 1.31. Sejam E e F espaços vetoriais normados sobre o corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que $T : E \rightarrow F$ é uma **aplicação linear contínua** se:

- para quaisquer $x, y \in E$, $T(x + y) = T(x) + T(y)$;
- para quaisquer $x \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, $T(\alpha x) = \alpha T(x)$;
- para quaisquer $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x - x_0\| < \delta$ então $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$.

Proposição 1.10. Sejam E e F espaços vetoriais normados sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja $T : E \rightarrow F$ uma aplicação linear. As seguintes condições são equivalentes:

- (a) T é lipschitziana.
- (b) T é uniformemente contínua.
- (c) T é contínua.
- (d) T é contínua em algum ponto de E .
- (e) T é contínua na origem.
- (f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$.
- (g) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Ver [2], página 33. □

Exemplo 1.15. Exemplos de aplicações lineares contínuas ou descontínuas:

- (1) Toda aplicação linear entre espaços vetoriais normados cujo domínio possui dimensão finita é contínua (ver [18], página 96). Em particular, toda aplicação linear entre espaços vetoriais normados de dimensão finita é contínua.
- (2) A aplicação linear $\delta : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ (onde a norma de $C([0, 1])$ é $\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$) definida por $\delta(f) = f(0)$ é contínua.
- (3) A aplicação linear $D : P([0, 1]) \rightarrow P([0, 1])$ (onde a norma de $P([0, 1])$ é $\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$) definida por $D(p) = p'$ não é contínua (ver [2], páginas 37 e 38). Isto mostra que aplicações lineares cujo domínio possui dimensão infinita podem não ser contínuas.

Exemplo 1.16. Seja E um espaço vetorial normado. A função norma $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em qualquer ponto $x_0 \in E$, pois:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0 \text{ tal que } \|x - x_0\| < \varepsilon \Rightarrow \left| \|x\| - \|x_0\| \right| \leq \|x - x_0\| < \varepsilon = \delta$$

Entretanto, a norma não é linear, pois geralmente não se tem $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Por exemplo, considerando o espaço $E = \mathbb{R}$ com a norma usual, temos que $|1 + (-1)| = |0| = 0$, mas $|1| + |-1| = 1 + 1 = 2$.

Definição 1.32. O espaço vetorial das aplicações lineares contínuas $T : E \rightarrow F$ é denotado por $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposição 1.11. Sejam E e F espaços vetoriais normados.

- (a) A expressão

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

define uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$.

- (b) $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ para quaisquer $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$.
- (c) Se F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Ver [2], páginas 34 e 35. □

Teorema 1.9 (Teorema da Extensão Linear). *Sejam E um espaço vetorial normado, $F \subset E$ um subespaço e G um espaço de Banach (E, F, G espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$). Seja $f : F \rightarrow G$ uma aplicação linear contínua. Então o fecho $\overline{F}$ de F é um subespaço vetorial normado de E e existe uma única extensão de f a uma aplicação linear contínua $g : \overline{F} \rightarrow G$, cuja norma é a mesma de f .*

Demonstração. Ver [19], páginas 75 e 76. □

1.5 Teorema de Hahn-Banach e consequências

Nesta seção, apresentaremos o Teorema de Hahn-Banach, que é um dos mais importantes resultados da Análise Funcional, e algumas de suas consequências. Apresentaremos aqui apenas os enunciados dos teoremas, cujas demonstrações podem ser estudadas em diversos livros de Análise Funcional (tais como os que serão citados como referências em cada resultado).

Iniciamos enunciando a versão do Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais sobre o corpo dos reais:

Teorema 1.10 (Forma analítica do Teorema de Hahn-Banach). *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos reais e seja p um funcional sublinear, ou seja, uma função tal que:*

$$(1) \ p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x), \forall x \in E \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

$$(2) \ p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E.$$

Seja G um subespaço vetorial de E e seja $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Então, existe um funcional linear $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_G = g$ e $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Ver [2], páginas 56 a 58. □

O Teorema de Hahn-Banach possui uma versão mais geral, que também é válida para espaços vetoriais sobre o corpo dos complexos:

Teorema 1.11 (Forma complexa do Teorema de Hahn-Banach). *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e seja p um funcional sublinear. Seja G um subespaço vetorial de E e seja $g : G \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear tal que $|g(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Então, existe um funcional linear $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $f|_G = g$ e $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. Ver [2], páginas 58 e 59. □

No caso dos espaços vetoriais normados (e em particular dos espaços de Banach), o Teorema de Hahn-Banach é enunciado da seguinte forma:

Teorema 1.12 (Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais normados). *Seja E um espaço vetorial normado sobre o corpo $\mathbb{K}$, seja G um subespaço vetorial de E e seja $g : G \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então, existe um funcional linear contínuo $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $f|_G = g$ e $\|f\| = \|g\|$.*

Demonstração. Ver [2], página 60. □

O Teorema de Hahn-Banach possui inúmeras consequências, como por exemplo os dois corolários que seguem:

Corolário 1.2. Seja X um espaço vetorial normado. Então, existe $f \in X^*$ tal que se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Demonstração. Ver [27], páginas 83 e 84. □

Corolário 1.3. Seja X um espaço vetorial normado e seja $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X^*$. Então, $x_0 = 0$.

Demonstração. Basta tomar a contrapositiva do Corolário 1.2 com $x_1 = x_0$ e $x_2 = 0$. □

As **formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach** são versões do Teorema de Hahn-Banach que se referem a conceitos topológicos (ou geométricos) dos espaços vetoriais normados. Elas não serão mencionadas aqui, pois não serão utilizadas na demonstração dos resultados seguintes. O(a) leitor(a) interessado(a) em estudá-las pode consultar, por exemplo, o livro de Botelho, Pellegrino e Teixeira [2], páginas 67 a 75.

1.6 Espaços de Hilbert

Definição 1.33. Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ ou sobre o corpo $\mathbb{C}$. Um **produto interno** em E é uma aplicação

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

tal que, para quaisquer $x, y, z \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(P1) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

$$(P2) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle.$$

$$(P3) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \text{ (então no caso real tem-se } \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle).$$

$$(P4) \quad \text{Para todo } x \neq 0, \langle x, x \rangle > 0.$$

Nesse caso, dizemos que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço vetorial com produto interno. Quando ficar evidente de qual produto interno se trata, dizemos simplesmente que E é um espaço vetorial com produto interno.

Proposição 1.12. Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno. Então a função $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ é uma norma em E .

Demonstração. Ver [2], páginas 104 a 106. $\square$

Proposição 1.13. Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (e normado com a norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$). Então, para quaisquer $x, y \in E$, tem-se:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Demonstração. Temos que:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle = \langle x + y, x \rangle + \langle x + y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 1.14. Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$, com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (e normado com a norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$). Então, para quaisquer $x, y \in E$, tem-se:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Demonstração. Temos que:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle = \overline{\langle x + y, x \rangle} + \overline{\langle x + y, y \rangle} \\ &= \overline{\langle x, x \rangle} + \overline{\langle x, y \rangle} + \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle y, y \rangle} = \|x\|^2 + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

$\square$

Definição 1.34. Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno (assim E é um espaço vetorial normado com a norma induzida pelo produto interno, isto é, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$). Dizemos que E é um **espaço de Hilbert** se E é completo na norma induzida pelo produto interno. Ou seja: E é um espaço de Hilbert se ele é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.

Exemplo 1.17. Exemplos de espaços de Hilbert (e de espaços que não são de Hilbert):

- (1) O espaço $\mathbb{R}^n$ com o produto interno $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ é um espaço de Hilbert, pois

a norma induzida pelo produto interno é a norma euclidiana $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ e

$\mathbb{R}^n$ com essa norma é um espaço de Banach.

- (2) O espaço $\mathbb{C}^n$ com o produto interno $\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}$ é um espaço de Hilbert,

pois a norma induzida pelo produto interno é a norma usual $\|z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n z_i^2}$ e $\mathbb{C}^n$ com essa norma é um espaço de Banach.

- (3) O espaço l^2 das sequências $x = (x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots) \subset \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ é um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle x, y \rangle = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i}$.

No caso das sequências $z = (z_n) = (z_1, z_2, z_3, \dots) \subset \mathbb{C}$ tais que $\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 < \infty$, l^2 é um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle z, w \rangle = \left(\sum_{i=1}^{\infty} z_i \overline{w_i} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} z_i \overline{w_i}}$.

- (4) O espaço l^p das sequências $z = (z_n) = (z_1, z_2, z_3, \dots) \subset \mathbb{C}$ tais que $\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p < \infty$ não é um espaço de Hilbert (e o caso particular nos reais também não é um espaço de Hilbert).

- (5) O espaço $L^2([a, b])$ das funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com a norma $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$ é um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$.

Definição 1.35. Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e seja $T : H_1 \rightarrow H_2$ uma aplicação linear contínua. Se existir uma aplicação linear $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ tal que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle, \quad \forall x \in H_1, \quad \forall y \in H_2,$$

dizemos que T^* é o **adjunto** de T .

1.7 Cálculo diferencial em espaços euclidianos

Nos espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$, podemos estudar a noção de derivada e estabelecer o primeiro Teorema da Aplicação Inversa deste trabalho. Uma exposição mais detalhada do cálculo diferencial em espaços euclidianos pode ser consultada no livro [21].

Definição 1.36. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, definimos a **i -ésima derivada parcial** de f no

ponto $a \in U$ como sendo:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

(onde e_i é o i -ésimo vetor da base usual de $\mathbb{R}^n$).

Definição 1.37. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis. Para cada vetor $v \in \mathbb{R}^n$, definimos a **derivada direcional** de f no ponto $a \in U$, na direção do vetor v , como sendo:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

Assim, as derivadas parciais são as derivadas direcionais na direção dos vetores da base de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.38. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis. Dizemos que f é **diferenciável** no ponto $a \in U$ se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ existem e, para todo $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $a + v \in U$, vale a igualdade:

$$f(a + v) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot v_i + \rho(v)\|v\|, \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \rho(v) = 0$$

Exemplo 1.18. Alguns exemplos conhecidos de funções diferenciáveis (de 1 até n variáveis) são as funções polinomiais, funções exponenciais, funções logarítmicas, funções trigonométricas e as mais diversas somas, produtos, quocientes e composições entre essas funções (sendo diferenciáveis em todos os pontos em que elas estão bem definidas).

Definição 1.39. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $f(x) = f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, é **diferenciável** no ponto $a \in U$ quando existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$f(a + v) = f(a) + T(v) + r(v), \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$

A transformação linear T é a **derivada** de f no ponto a , denotada por $T = f'(a)$. Dizemos que f é **diferenciável** em U quando é diferenciável em todos os pontos $a \in U$.

Definição 1.40. A matriz da transformação linear $f'(a)$ em relação às bases canônicas

de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ é a **matriz jacobiana** de f no ponto a :

$$Jf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m-1}}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{m-1}}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{m-1}}(a) & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{m-1}}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix}$$

Teorema 1.13. A aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $f(x) = f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, é diferenciável em $a \in U$ se, e somente se, suas funções-coordenada $f_1, \dots, f_n : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em a .

Demonstração. Ver [21], páginas 250 e 251. □

Exemplo 1.19. Exemplos de aplicações diferenciáveis:

- (1) Toda aplicação constante $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = c \in \mathbb{R}^n$ é diferenciável e neste caso $f'(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}^m$.
- (2) Toda aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável e neste caso $T'(a) = T$ para todo $a \in \mathbb{R}^m$:

$$T(a + v) = T(a) + T(v) = T(a) + T(v) + 0 = T(a) + T'(a)(v) + r(v),$$

onde $T'(a) = T$ e $r \equiv 0$.

- (3) Toda aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)),$$

onde $f_1, \dots, f_n$ são funções diferenciáveis conhecidas de n variáveis, é diferenciável. (Por exemplo: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $f(x, y, z) = (xy, xz, yz, x^2 + y^2 + z^2)$.)

Proposição 1.15. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e convexo. Se $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável e existe uma constante $M > 0$ tal que $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in U$, então f é lipschitziana e $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in U$.

Demonstração. Ver [21], página 268. □

Definição 1.41. Dizemos que uma aplicação diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 se a derivada $f'(a)$ é contínua para todo $a \in U$. Dizemos que f é de classe

C^2 se $f'(a)$ é de classe C^1 , e, mais geralmente, f é de classe C^k se $f'(a)$ é de classe C^{k-1} .

Definição 1.42. Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Um **difeomorfismo** é uma aplicação diferenciável bijetora $f : U \rightarrow V$ cuja inversa $f : V \rightarrow U$ também é diferenciável. Dizemos que f é um **difeomorfismo local** quando, para cada $x \in U$, existem uma bola aberta $B(x; \delta) \subset U$ e um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ tais que $f(x) \in V$ e $f : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

O Teorema da Aplicação Inversa fornece um critério para que uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um difeomorfismo local de classe C^k :

Teorema 1.14 (Teorema da Aplicação Inversa em espaços euclidianos). *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que a derivada $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo para todo $x_0 \in U$ (ou seja, se $\det(Jf(x_0)) \neq 0$ para todo $x_0 \in U$). Então, f é um difeomorfismo local de classe C^k em x_0 . Além disso, se $y_0 = f(x_0)$, então $(f^{-1})'(x_0) = (f'(x_0))^{-1}$.*

Demonstração. Ver [21], páginas 280 a 288. □

Observação 1.7. O caso particular do Teorema 1.14 com $n = 1$ é uma das regras conhecidas do Cálculo Diferencial das funções de uma variável: se $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função bijetora diferenciável, com inversa f^{-1} , tal que $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável e $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$ (ver, por exemplo, o livro [34] para mais detalhes).

No próximo capítulo, vamos desenvolver as noções de Cálculo Diferencial (e um Teorema da Aplicação Inversa) para espaços de Banach em geral.

Capítulo 2

O Teorema da Aplicação Inversa em Espaços de Banach

Neste segundo capítulo, faremos uma breve introdução ao Cálculo Diferencial e Integral nos espaços de Banach e apresentaremos o caso particular do Teorema da Aplicação Inversa nesses espaços.

2.1 Derivada de Fréchet

Definição 2.1. Sejam E e F espaços de Banach e seja $U \subset E$ aberto. Dizemos que uma função $f : U \subset E \longrightarrow F$ é **Fréchet-diferenciável no ponto** $x_0 \in U$ se existe uma aplicação linear contínua $A : E \longrightarrow F$ tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + R(x_0, h)$$

para todo $h \in E$ tal que $x_0 + h \in B(x_0; \varepsilon) \subset U$ para algum $\varepsilon > 0$, onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Neste caso, a aplicação A é denominada **derivada de Fréchet** de f em x_0 e denotamos $A = Df(x_0)$. Dizemos que f é **Fréchet-diferenciável** em U se f for Fréchet-diferenciável em todos os pontos de U .

Exemplo 2.1. Sejam $E = \mathbb{R}^m$ e $F = \mathbb{R}^n$ (os quais são espaços de Banach), e seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $a \in U$ quando existe uma aplicação linear $T = f'(a) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(a + v) - f(a) = T \cdot v + r(v), \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0.$$

Assim, toda aplicação diferenciável (no sentido da Análise no $\mathbb{R}^n$) é uma função Fréchet-diferenciável entre os espaços de Banach $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Isso mostra que o conceito de função Fréchet-diferenciável generaliza para espaços de Banach a noção de aplicação diferenciável entre espaços euclidianos.

Exemplo 2.2. Sejam E, F espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ (podendo ser o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos) e seja $f : U \subset E \longrightarrow F$ uma função constante definida em um aberto $U \subset E$:

$$f(x) = c \in F, \forall x \in E$$

Para todo $x_0 \in U$ e para todo $h \in E$ tal que $x_0 + h \in U$, consideremos a aplicação linear nula $A : E \longrightarrow F$ (tal que $A(x) = 0$ para todo $x \in E$) e $R(x_0, h) = 0$. Logo:

$$f(x_0 + h) = c = f(x_0) = f(x_0) + \underbrace{A(h)}_{=0} + \underbrace{R(x_0, h)}_{=0} \Rightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + R(x_0, h)$$

Então, toda função constante $f : U \subset E \longrightarrow F$ é Fréchet-diferenciável e sua derivada de Fréchet em todos os pontos do aberto U é a aplicação linear nula:

$$Df(x_0) = 0, \forall x_0 \in U$$

A recíproca também é válida, desde que U seja conexo: se $U \subset E$ é um aberto conexo e a derivada de uma aplicação Fréchet-diferenciável $f : U \subset E \longrightarrow F$ é nula em todos os pontos de U , então f é constante. Demonstraremos isso mais adiante.

Exemplo 2.3. Sejam E, F espaços de Banach e seja $A : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear contínua. Sendo $U \subset E$ aberto, $x_0 \in U$ e $h \in E$ tal que $x_0 + h \in U$, temos que:

$$A(x_0 + h) = A(x_0) + A(h)$$

Logo, definindo $R(x_0, h) = 0$ para quaisquer $x_0 \in U$ e $h \in E$, obtemos que:

$$A(x_0 + h) = A(x_0) + A(h) + \underbrace{R(x_0, h)}_{=0}, \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0$$

Logo, toda aplicação linear contínua entre espaços de Banach é Fréchet-diferenciável e sua derivada é ela própria:

$$DA(x_0) = A, \forall x_0 \in E$$

Assim, o resultado conhecido para espaços euclidianos (toda aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável e $T'(x) = T$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$) também é válido para

espaços de Banach em geral.

Exemplo 2.4. Seja H um espaço de Hilbert sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos reais e seja $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ para todo $x \in H$. Então, para quaisquer $x, h \in H$, temos:

$$f(x + h) = \|x + h\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2 = f(x) + 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2,$$

onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \|h\| = 0.$$

Logo, concluímos que f é Fréchet-diferenciável e que $Df(x)(h) = 2\langle x, h \rangle$.

Exemplo 2.5. Seja H um espaço de Hilbert sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos e seja $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ para todo $x \in H$. Então, para quaisquer $x, h \in H$, temos:

$$f(x + h) = \|x + h\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, h \rangle + \|h\|^2 = f(x) + 2\operatorname{Re}\langle x, h \rangle + \|h\|^2,$$

onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \|h\| = 0.$$

Logo, concluímos que f é Fréchet-diferenciável e que $Df(x)(h) = 2\operatorname{Re}\langle x, h \rangle$.

Exemplo 2.6. Seja H um espaço de Hilbert (sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos reais) e seja $A : H \rightarrow H$ uma aplicação linear contínua. Considere a função $f_A : H \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_A(x) = \langle A(x), x \rangle$. Temos que:

$$\begin{aligned} f_A(x + h) &= \langle A(x + h), x + h \rangle = \langle A(x) + A(h), x + h \rangle \\ &= \langle A(x), x \rangle + \langle A(x), h \rangle + \langle A(h), x \rangle + \langle A(h), h \rangle \\ &= f_A(x) + \langle A(x), h \rangle + \langle h, A^*(x) \rangle + \langle A(h), h \rangle \\ &= f_A(x) + \langle A(x), h \rangle + \langle A^*(x), h \rangle + \langle A(h), h \rangle \\ &= f_A(x) + \langle A(x) + A^*(x), h \rangle + \langle A(h), h \rangle \\ &= f_A(x) + \langle (A + A^*)(x), h \rangle + \langle A(h), h \rangle \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\langle A(h), h \rangle|}{\|h\|} &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|A(h)\| \|h\|}{\|h\|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|A\| \|h\| \|h\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \|A\| \|h\| = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\langle A(h), h \rangle|}{\|h\|} = 0 \end{aligned}$$

Então, f_A é Fréchet-diferenciável e $Df_A(x)(h) = \langle (A + A^*)(x), h \rangle$.

Exemplo 2.7. Sejam E um espaço de Banach e $f : (a, b) \longrightarrow E$ um **caminho** (ou **curva**) no espaço E . Dizemos que f é Fréchet-diferenciável no ponto $t_0 \in (a, b)$ se existe uma aplicação linear contínua $Df(t_0) : \mathbb{R} \longrightarrow E$ tal que:

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + Df(t_0)(h) + R(t_0, h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(t_0, h)\|}{|h|} = 0 \quad (2.1)$$

Reorganizando a equação (2.1), temos:

$$Df(t_0)(h) = f(t_0 + h) - f(t_0) - R(t_0, h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(t_0, h)\|}{|h|} = 0 \quad (2.2)$$

Como $Df(t_0) : \mathbb{R} \longrightarrow E$ é uma aplicação linear, temos que $Df(t_0)(h) = h \cdot Df(t_0)(1)$, então a equação (2.2) pode ser reescrita como:

$$h \cdot Df(t_0)(1) = Df(t_0)(h) = f(t_0 + h) - f(t_0) - R(t_0, h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(t_0, h)\|}{|h|} = 0 \quad (2.3)$$

Dividindo a equação (2.3) por h , obtemos:

$$Df(t_0)(1) = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0) - R(t_0, h)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(t_0, h)\|}{|h|} = 0 \quad (2.4)$$

Como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(t_0, h)\|}{|h|} = 0$, temos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(t_0, h)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{R(t_0, h)}{h} \right\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(t_0, h)\|}{|h|} = 0 \quad (2.5)$$

Tomando o limite com $h \rightarrow 0$ na equação (2.4) e utilizando a equação (2.5), concluimos que:

$$\begin{aligned} Df(t_0)(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0) - R(t_0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(t_0, h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \end{aligned}$$

Então, um caminho $f : (a, b) \longrightarrow E$ é Fréchet-diferenciável no ponto $t_0 \in (a, b)$ se existe uma aplicação linear contínua $Df(t_0) : \mathbb{R} \longrightarrow E$ tal que:

$$Df(t_0)(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

De modo análogo ao que ocorre nos espaços euclidianos, podemos utilizar a notação $f'(t_0) = Df(t_0)(1)$ para denotar a derivada de uma curva como sendo um vetor, ou

seja:

$$f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

A seguir, veremos alguns resultados importantes sobre a derivada de Fréchet. Todos eles generalizam fatos que são conhecidos para aplicações diferenciáveis entre espaços euclidianos:

Proposição 2.1. Sejam E e F espaços de Banach e $U \subset E$ aberto. Se a função $f : U \rightarrow F$ é Fréchet-diferenciável no ponto $x_0 \in U$, então a derivada de Fréchet de f em x_0 é única e f é contínua em x_0 .

Demonstração. Suponhamos que existam duas derivadas de Fréchet de f no ponto x_0 , ou seja, suponhamos que existam duas aplicações lineares contínuas $A, B : E \rightarrow F$ tais que:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + R_1(x_0, h), \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_1(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (2.6)$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + B(h) + R_2(x_0, h), \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_2(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (2.7)$$

Como A e B são lineares, temos que $A(0) = B(0) = 0$, então para $h = 0$ temos que $A(h) = B(h)$. Daqui em diante, consideremos que $h \neq 0$. Pelas equações (2.6) e (2.7), temos:

$$A(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - R_1(x_0, h), \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_1(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (2.8)$$

$$B(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - R_2(x_0, h), \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_2(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (2.9)$$

Subtraindo as equações (2.8) e (2.9), obtemos:

$$\begin{aligned} (A - B)(h) &= A(h) - B(h) \\ &= f(x_0 + h) - f(x_0) - R_1(x_0, h) - f(x_0 + h) + f(x_0) + R_2(x_0, h) \\ &= R_2(x_0, h) - R_1(x_0, h) \end{aligned} \quad (2.10)$$

A partir da equação (2.10) e utilizando a desigualdade triangular, temos:

$$\|(A - B)(h)\| = \|R_2(x_0, h) - R_1(x_0, h)\| \leq \|R_2(x_0, h)\| + \|R_1(x_0, h)\| \quad (2.11)$$

Dividindo a desigualdade (2.11) por $\|h\|$, obtemos:

$$\frac{\|(A - B)(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|R_2(x_0, h)\|}{\|h\|} + \frac{\|R_1(x_0, h)\|}{\|h\|} \quad (2.12)$$

Sendo $t \in \mathbb{R}$, temos que $th \in E$, logo, pela desigualdade (2.12):

$$\frac{\|(A - B)(th)\|}{\|th\|} \leq \frac{\|R_2(x_0, th)\|}{\|th\|} + \frac{\|R_1(x_0, th)\|}{\|th\|} \quad (2.13)$$

Como A e B são aplicações lineares, temos que $A - B$ é linear. Pelas propriedades da norma e pela linearidade de $A - B$, a desigualdade (2.13) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\|t \cdot (A - B)(h)\|}{\|th\|} &\leq \frac{\|R_2(x_0, th)\|}{\|th\|} + \frac{\|R_1(x_0, th)\|}{\|th\|} \\ \frac{|t| \cdot \|(A - B)(h)\|}{|t| \cdot \|h\|} &\leq \frac{\|R_1(x_0, th)\|}{\|th\|} + \frac{\|R_2(x_0, th)\|}{\|th\|} \\ \frac{\|(A - B)(h)\|}{\|h\|} &\leq \frac{\|R_1(x_0, th)\|}{\|th\|} + \frac{\|R_2(x_0, th)\|}{\|th\|}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

para todo $h \in E$. Se $t \rightarrow 0$, então $th \rightarrow 0$. Logo, tomando o limite com $t \rightarrow 0$ na desigualdade (2.14), obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|(A - B)(h)\|}{\|h\|} \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|R_1(x_0, th)\|}{\|th\|} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|R_2(x_0, th)\|}{\|th\|}$$

Portanto:

$$\frac{\|(A - B)(h)\|}{\|h\|} \leq \lim_{th \rightarrow 0} \frac{\|R_1(x_0, th)\|}{\|th\|} + \lim_{th \rightarrow 0} \frac{\|R_2(x_0, th)\|}{\|th\|} = 0 + 0 = 0, \quad \forall h \in E \quad (2.15)$$

Então, pela desigualdade (2.15), concluímos que:

$$\begin{aligned} \frac{\|(A - B)(h)\|}{\|h\|} = 0, \quad \forall h \in E &\Rightarrow \|(A - B)(h)\| = 0, \quad \forall h \in E \\ &\Rightarrow (A - B)(h) = 0, \quad \forall h \in E \Rightarrow A - B = 0 \\ &\Rightarrow A = B = Df(x_0) \\ &\Rightarrow R_1(x_0, h) = R_2(x_0, h) = R(x_0, h) \end{aligned}$$

Portanto, a derivada de Fréchet de f em x_0 é única. Agora vamos mostrar que f é contínua em x_0 . Temos que:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)(h) + R(x_0, h), \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0$$

Logo:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Df(x_0)(h) + R(x_0, h), \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0$$

Pela desigualdade triangular e pelo fato de $Df(x_0) : E \longrightarrow F$ ser contínua, temos:

$$\begin{aligned} \|f(x_0 + h) - f(x_0)\| &= \|Df(x_0)(h) + R(x_0, h)\| \leq \|Df(x_0)(h)\| + \|R(x_0, h)\| \\ &\leq \|Df(x_0)\| \|h\| + \|R(x_0, h)\| \end{aligned} \quad (2.16)$$

Observe que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|R(x_0, h)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\|R(x_0, h)\|}{\|h\|} \cdot \|h\| \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, h)\|}{\|h\|} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \|h\| = 0 \cdot 0 = 0$$

Logo, tomando o limite com $h \rightarrow 0$ na equação (2.16), concluímos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \|Df(x_0)\| \|h\| + \lim_{h \rightarrow 0} \|R(x_0, h)\| = 0 + 0 = 0$$

Portanto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f(x_0 + h) - f(x_0)\| = 0$$

Segue então que f é contínua em x_0 . □

Corolário 2.1. Se $f : U \subset E \longrightarrow F$ não é contínua em $x_0 \in U$, então f não é Fréchet-diferenciável em x_0 .

Demonstração. Contrapositiva da Proposição 2.1. □

Proposição 2.2. Sejam E e F espaços de Banach e $U \subseteq E$ aberto. Sejam $f, g : U \longrightarrow F$ funções Fréchet-diferenciáveis em $x_0 \in E$ e seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, a função $f + \lambda g : U \longrightarrow F$ é Fréchet-diferenciável em x_0 e $D(f + \lambda g)(x_0) = Df(x_0) + \lambda Dg(x_0)$.

Demonstração. Como $f, g : U \longrightarrow F$ são funções Fréchet-diferenciáveis em $x_0 \in E$, temos que existem aplicações lineares contínuas $A = Df(x_0) : E \longrightarrow F$ e $B = Dg(x_0) : E \longrightarrow F$ tais que:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + A(h) + R_1(x_0, h), \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_1(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0 \\ g(x_0 + h) &= g(x_0) + B(h) + R_2(x_0, h), \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_2(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)(x_0 + h) &= f(x_0 + h) + \lambda g(x_0 + h) \\ &= f(x_0) + A(h) + R_1(x_0, h) + \lambda g(x_0) + \lambda B(h) + \lambda R_2(x_0, h) \\ &= f(x_0) + \lambda g(x_0) + A(h) + \lambda B(h) + R_1(x_0, h) + \lambda R_2(x_0, h) \\ &= (f + \lambda g)(x_0) + (A + \lambda B)(h) + R_1(x_0, h) + \lambda R_2(x_0, h) \end{aligned}$$

Definindo $R_3(x_0, h) = R_1(x_0, h) + \lambda R_2(x_0, h)$, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_3(x_0, h)\|}{\|h\|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_1(x_0, h) + \lambda R_2(x_0, h)\|}{\|h\|} \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_1(x_0, h)\|}{\|h\|} + |\lambda| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_2(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Então:

$$(f + \lambda g)(x_0 + h) = (f + \lambda g)(x_0) + (A + \lambda B)(h) + R_3(x_0, h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_3(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0$$

Assim, concluímos que $f + \lambda g$ é Fréchet-diferenciável em x_0 e que:

$$D(f + \lambda g)(x_0) = A + \lambda B = Df(x_0) + \lambda Dg(x_0)$$

□

O seguinte lema será importante na demonstração da Regra da Cadeia:

Lema 2.1. Sejam E e F espaços de Banach e $U \subseteq E$ aberto. Sejam $A : E \rightarrow F$ uma aplicação linear contínua e $R_1, R_2 : U \rightarrow F$ aplicações tais que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} = 0$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_2(h)\|}{\|h\|} = 0$. Então, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_2(A(h) + R_1(h))\|}{\|h\|} = 0$.

Demonstração. Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\|R_2(A(h) + R_1(h))\|}{\|h\|} &= \frac{\|R_2(A(h) + R_1(h))\|}{\|A(h) + R_1(h)\|} \cdot \frac{\|A(h) + R_1(h)\|}{\|h\|} \\ &\leq \frac{\|R_2(A(h) + R_1(h))\|}{\|A(h) + R_1(h)\|} \cdot \frac{\|A(h)\| + \|R_1(h)\|}{\|h\|} \\ &\leq \frac{\|R_2(A(h) + R_1(h))\|}{\|A(h) + R_1(h)\|} \cdot \frac{\|A\|\|h\| + \|R_1(h)\|}{\|h\|} \\ &= \frac{\|R_2(A(h) + R_1(h))\|}{\|A(h) + R_1(h)\|} \cdot \left(\|A\| + \frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} \right) \end{aligned}$$

Como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} = 0$, temos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|R_1(h)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} \cdot \|h\| \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \|h\| = 0 \cdot 0 = 0$$

Logo, $\lim_{h \rightarrow 0} R_1(h) = 0$. Como A é linear, temos que $\lim_{h \rightarrow 0} A(h) = A(0) = 0$. Então,

$\lim_{h \rightarrow 0} (A(h) + R_1(h)) = 0$. Daí, como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_2(h)\|}{\|h\|} = 0$, segue que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_2(A(h) + R_1(h))\|}{\|A(h) + R_1(h)\|} = \lim_{A(h) + R_1(h) \rightarrow 0} \frac{\|R_2(A(h) + R_1(h))\|}{\|A(h) + R_1(h)\|} = 0$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_2(A(h) + R_1(h))\|}{\|h\|} &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\|R_2(A(h) + R_1(h))\|}{\|A(h) + R_1(h)\|} \cdot \left(\|A\| + \frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} \right) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_2(A(h) + R_1(h))\|}{\|A(h) + R_1(h)\|} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\|A\| + \frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} \right) \\ &= 0 \cdot \|A\| = 0 \end{aligned}$$

Então, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_2(A(h) + R_1(h))\|}{\|h\|} = 0$. □

Teorema 2.1 (Regra da Cadeia). *Sejam E, F, G espaços de Banach, $f : U \subset E \rightarrow F$ e $g : V \subset F \rightarrow G$ aplicações tais que U e V são abertos com $f(U) \subset V$. Se f é Fréchet-diferenciável no ponto $x_0 \in U$ e g é Fréchet-diferenciável no ponto $f(x_0) \in V$, então a aplicação $g \circ f : U \subset E \rightarrow G$ é Fréchet-diferenciável em $x_0 \in U$ e neste caso vale a igualdade*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

Demonstração. Como f é Fréchet-diferenciável em x_0 , temos que:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)(h) + R_1(h), \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Como g é Fréchet-diferenciável em x_0 , temos que:

$$g(f(x_0) + k) = g(f(x_0)) + Dg(f(x_0))(k) + R_2(k), \text{ onde } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|R_2(k)\|}{\|k\|} = 0$$

Logo:

$$\begin{aligned} g \circ f(x_0 + h) &= g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0) + Df(x_0)(h) + R_1(h)) \\ &= g(f(x_0)) + Dg(f(x_0))(Df(x_0)(h) + R_1(h)) + R_2(Df(x_0)(h) + R_1(h)) \\ &= g \circ f(x_0) + [Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)](h) + R_3(h), \end{aligned}$$

onde $R_3(h) = Dg(f(x_0)) \circ R_1(h) + R_2(Df(x_0)(h) + R_1(h))$. Note que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_3(h)\|}{\|h\|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|Dg(f(x_0)) \circ R_1(h) + R_2(Df(x_0)(h) + R_1(h))\|}{\|h\|} \\
 &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|Dg(f(x_0)) \circ R_1(h)\| + \|R_2(Df(x_0)(h) + R_1(h))\|}{\|h\|} \\
 &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|Dg(f(x_0))\| \cdot \|R_1(h)\| + \|R_2(Df(x_0)(h) + R_1(h))\|}{\|h\|} \\
 &= \|Dg(f(x_0))\| \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_2(Df(x_0)(h) + R_1(h))\|}{\|h\|} \\
 &= \|Dg(f(x_0))\| \cdot 0 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_2(Df(x_0)(h) + R_1(h))\|}{\|h\|} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_2(Df(x_0)(h) + R_1(h))\|}{\|h\|}
 \end{aligned}$$

Como $Df(x_0)$ é uma aplicação linear, segue do Lema 2.1 que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_2(Df(x_0)(h) + R_1(h))\|}{\|h\|} = 0$$

Portanto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_3(h)\|}{\|h\|} \leq 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_3(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Então, segue que:

$$g \circ f(x_0 + h) = g \circ f(x_0) + [Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)](h) + R_3(h), \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_3(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Portanto, $g \circ f$ é Fréchet-diferenciável em $x_0 \in U$ e $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$. $\square$

Observação 2.1. Também é válida a Desigualdade do Valor Médio para aplicações Fréchet-diferenciáveis entre espaços de Banach (generalizando o resultado conhecido para aplicações diferenciáveis entre espaços euclidianos), mas a demonstração que apresentaremos requer conhecimentos sobre integrais de funções $f : [a, b] \rightarrow E$. A seguir, vamos desenvolver a teoria das integrais nesse tipo de funções e, mais adiante, vamos apresentar a Desigualdade do Valor Médio.

2.2 Integrais de caminhos retificáveis

Nesta seção, introduziremos algumas noções básicas sobre o cálculo de integrais de caminhos retificáveis em espaços de Banach. Para começar, vamos apresentar dois resultados importantes sobre o cálculo diferencial de funções $f : (a, b) \rightarrow E$ (cuja

definição de derivada foi estabelecida no Exemplo 2.7):

Proposição 2.3. São válidas as seguintes propriedades:

- (1) Se $f : (a, b) \longrightarrow E$ é Fréchet-diferenciável em $t_0 \in (a, b)$, então a derivada $f'(t_0)$ é única e f é contínua em t_0 .
- (2) Sejam $f, g : (a, b) \longrightarrow E$ Fréchet-diferenciáveis em $t_0 \in (a, b)$ e seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, $f + \lambda g : (a, b) \longrightarrow E$ é Fréchet-diferenciável em $t_0 \in (a, b)$ e $(f + \lambda g)'(t_0) = f'(t_0) + \lambda g'(t_0)$.

Demonstração. (1) Se $f : (a, b) \longrightarrow E$ é Fréchet-diferenciável, segue da Proposição 2.1 que $Df(t_0) : \mathbb{R} \longrightarrow E$ é única e que f é contínua em t_0 . Logo, $f'(t_0) = Df(t_0)(1)$ possui um valor único.

(2) Se $f, g : (a, b) \longrightarrow E$ são Fréchet-diferenciáveis, segue da Proposição 2.2 que o caminho $f + \lambda g$ é Fréchet-diferenciável e que $D(f + \lambda g)(t_0)(h) = Df(t_0)(h) + \lambda Dg(t_0)(h)$. Então:

$$(f + \lambda g)'(t_0) = D(f + \lambda g)(t_0)(1) = Df(t_0)(1) + \lambda Dg(t_0)(1) = f'(t_0) + \lambda g'(t_0)$$

□

Proposição 2.4. Seja E um espaço de Banach. Se $f : (a, b) \longrightarrow E$ é diferenciável em (a, b) e $f'(t_0) = 0$ para todo $t_0 \in (a, b)$, então f é constante.

Demonstração. Seja $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Definamos a função $f_\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f_\varphi(t) = \varphi(f(t))$. Pela Regra da Cadeia (Teorema 2.1), temos que, para todo $t_0 \in (a, b)$,

$$f'_\varphi(t_0) = (\varphi \circ f)'(t_0) = D(\varphi \circ f)(t_0)(1) = D\varphi(f(t_0)) \circ Df(t_0)(1) = \varphi(f'(t_0)) = 0,$$

pois $f'(t_0) = 0$. Como a derivada de f_φ é igual a 0 em todos os pontos de (a, b) , temos (do Cálculo de uma variável) que f_φ é constante, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f_\varphi(t) = c$ para todo $t \in (a, b)$. Então, para todo $\varphi \in E^*$ e para quaisquer $s, t \in (a, b)$, temos:

$$\varphi(f(s) - f(t)) = \varphi(f(s)) - \varphi(f(t)) = f_\varphi(s) - f_\varphi(t) = c - c = 0$$

Pelo Corolário 1.3 (do Teorema de Hahn-Banach), segue que $f(s) - f(t) = 0$, logo $f(s) = f(t)$ para quaisquer $s, t \in (a, b)$. Portanto, f é constante. □

A partir de agora, vamos desenvolver a teoria das integrais de funções $f : [a, b] \longrightarrow E$. Em muitos aspectos, o que apresentaremos se assemelha à integral de Riemann

(de funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$) e às integrais de linha (de funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$).

Definição 2.2. Sejam $[a, b]$ um intervalo fechado e E um espaço de Banach. Uma função $f : [a, b] \rightarrow E$ é denominada **função escada** se existem uma partição $P = \{a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b\}$ e vetores $v_1, \dots, v_n \in E$ tais que se $a_{i-1} < t < a_i$, então $f(t) = v_i$. Nesse caso, dizemos também que f é **escada com relação a P** .

Definição 2.3. Sejam P, Q partições de $[a, b]$. Dizemos que Q é um **refinamento** de P se $P \subset Q$. Assim, a maneira mais simples de refinar uma partição é acrescentando-lhe um ponto.

Proposição 2.5. Se $f, g : [a, b] \rightarrow E$ são funções escada com relação às partições P_1 e P_2 respectivamente, então existe uma partição Q de $[a, b]$ tal que f e g são escada com relação a Q .

Demonstração. Como $f : [a, b] \rightarrow E$ é uma função escada com relação à partição $P_1 = \{a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n = b\}$, temos que existem vetores $u_1, \dots, u_n \in E$ tais que se $a_{i-1} < t < a_i$ então $f(t) = u_i$. Como $g : [a, b] \rightarrow E$ é uma função escada com relação à partição $P_2 = \{b_0 = a \leq b_1 \leq \dots \leq b_{m-1} \leq b_m = b\}$, temos que existem vetores $v_1, \dots, v_m \in E$ tais que se $b_{j-1} < t < b_j$ então $g(t) = v_j$. Tomemos $Q = P_1 \cup P_2$. Então, $Q = \{c_0 = a \leq c_1 \leq \dots \leq c_{k-1} \leq c_k = b\}$, onde, para todo $l \in \{1, \dots, k\}$, tem-se $c_l = a_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$ ou $c_l = b_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$, e $k \leq m + n - 1$ (temos que $k = m + n - 1$ se P_1 e P_2 não tiverem pontos em comum além das extremidades, e $k < m + n - 1$ caso contrário; por exemplo, se $P_1 \subset P_2$ ou $P_2 \subset P_1$, então $k = \max\{m, n\}$). Assim, temos que:

- Se $c_{l-1} < t < c_l$ então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $a_{i-1} < t < a_i$, então $f(t) = u_i$. Logo, tomando $w_l = u_i$, temos que existem $w_1, \dots, w_k \in E$ tais que se $c_{l-1} < t < c_l$ então $f(t) = w_l$. Assim, f é uma função escada com relação à partição Q .
- Se $c_{l-1} < t < c_l$ então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $b_{j-1} < t < b_j$, então $g(t) = v_j$. Logo, tomando $z_l = v_j$, temos que existem $z_1, \dots, z_k \in E$ tais que se $c_{l-1} < t < c_l$ então $g(t) = z_l$. Assim, g é uma função escada com relação à partição Q .

Fica assim demonstrado que f e g são funções escada com relação à partição Q . $\square$

Proposição 2.6. O conjunto das funções escada $f : [a, b] \rightarrow E$, com a norma $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} \|f(x)\|_E$, é um espaço vetorial normado.

Demonstração. Temos que:

- Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow E$ funções escada, então (pela Proposição 2.5) existe uma partição $P = \{a_0 = a \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n = b\}$ tal que existem vetores $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in E$ de modo que $f(t) = u_i$ e $g(t) = v_i$ se $a_{i-1} < t < a_i$. Logo, $(f + g)(t) = f(t) + g(t) = u_i + v_i$ se $a_{i-1} < t < a_i$. Portanto, $f + g : [a, b] \longrightarrow E$ é uma função escada com relação à partição P .
- Seja $f : [a, b] \longrightarrow E$ uma função escada e seja $\lambda \in \mathbb{K}$ uma constante. Então, existe uma partição $P = \{a_0 = a \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n = b\}$ e existem vetores $v_1, \dots, v_n \in E$ tais que se $a_{i-1} < t < a_i$ então $f(t) = v_i$. Logo, $(\lambda f)(t) = \lambda \cdot f(t) = \lambda v_i$ se $a_{i-1} < t < a_i$. Assim, concluímos que $\lambda f : [a, b] \longrightarrow E$ é uma função escada com relação à partição P .

Logo, o espaço das funções escada $f : [a, b] \longrightarrow E$ é um espaço vetorial, o qual será denotado por $S([a, b], E)$. Definamos $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} \|f(x)\|_E$. Então:

- Se $f : [a, b] \longrightarrow E$ é uma função escada, temos que $f(x) \in E$ para todo $x \in [a, b]$, logo $\|f(x)\|_E \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ (pois $\|\cdot\|_E$ é uma norma), então $\sup_{x \in [a, b]} \|f(x)\|_E \geq 0$, ou seja, $\|f\| \geq 0$. Além disso, temos que $\|f\| = 0$ se, e somente se, $\sup_{x \in [a, b]} \|f(x)\|_E = 0$, o que ocorre se, e somente se, $\|f(x)\|_E = 0$ para todo $x \in [a, b]$, o que ocorre se, e somente se, $f \equiv 0$. Assim, temos que $\|f\| = 0$ se, e somente se, $f \equiv 0$.
- Sejam $f : [a, b] \longrightarrow E$ uma função escada e $\lambda \in \mathbb{K}$ uma constante. Pelas propriedades do supremo e da norma, temos que:

$$\|\lambda f\| = \sup_{x \in [a, b]} \|\lambda f(x)\|_E = \sup_{x \in [a, b]} |\lambda| \|f(x)\|_E = |\lambda| \sup_{x \in [a, b]} \|f(x)\|_E = |\lambda| \cdot \|f\|$$

- Para quaisquer funções escada $f, g : [a, b] \longrightarrow E$, temos que:

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup_{x \in [a, b]} \|(f + g)(x)\|_E = \sup_{x \in [a, b]} \|f(x) + g(x)\|_E \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} (\|f(x)\|_E + \|g(x)\|_E) = \sup_{x \in [a, b]} \|f(x)\|_E + \sup_{x \in [a, b]} \|g(x)\|_E \\ &= \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

Então, o espaço $S([a, b], E)$ das funções escada é um espaço vetorial normado. □

Definição 2.4. Seja $f : [a, b] \longrightarrow E$ uma função escada com relação à partição $P = \{a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b\}$ e sejam $v_1, \dots, v_n \in E$ tais que se $a_{i-1} < t < a_i$ então

$f(t) = v_i$. Definimos a **integral de f com respeito à partição P** da seguinte forma:

$$I_P(f) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})v_i$$

Proposição 2.7. Seja $f : [a, b] \rightarrow E$ uma função escada. Então, o valor da integral $I_P(f)$ não depende da partição P .

Demonstração. Seja $f : [a, b] \rightarrow E$ uma função escada com relação à partição $P = \{a \leq a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b\}$. Então, existem $v_1, \dots, v_n \in E$ tais que se $a_{i-1} < t < a_i$ então $f(t) = v_i$. Seja $Q = \{a = b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_m = b\}$ outra partição de $[a, b]$ tal que $P \subset Q$. Então, existem $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_n \leq m$ e $b_{j_k} = a_k$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Temos que $f(t) = v_i$ sempre que $a_{i-1} < t < a_i$, ou seja, sempre que $b_{j_{i-1}} < t < b_{j_i}$. Logo, existem $u_1, \dots, u_m \in E$, definidos por

$$u_j = \begin{cases} v_1, & \text{se } 1 \leq j \leq j_1 \\ v_2, & \text{se } j_1 + 1 \leq j \leq j_2 \\ \dots & \\ v_n, & \text{se } j_{n-1} + 1 \leq j \leq j_n, \end{cases}$$

tais que se $b_{j-1} < t < b_j$ então $f(t) = u_j$. Desta forma, podemos calcular a integral $I_Q(f)$:

$$\begin{aligned} I_Q(f) &= \sum_{j=1}^m (b_j - b_{j-1})u_j \\ &= \sum_{j=1}^{j_1} (b_j - b_{j-1})u_j + \sum_{j=j_1+1}^{j_2} (b_j - b_{j-1})u_j + \dots + \sum_{j=j_{n-1}+1}^{j_n} (b_j - b_{j-1})u_j \\ &= \sum_{j=1}^{j_1} (b_j - b_{j-1})v_1 + \sum_{j=j_1+1}^{j_2} (b_j - b_{j-1})v_2 + \dots + \sum_{j=j_{n-1}+1}^{j_n} (b_j - b_{j-1})v_n \\ &= (b_{j_1} - b_0)v_1 + (b_{j_2} - b_{j_1})v_2 + \dots + (b_{j_n} - b_{j_{n-1}})v_n \\ &= (a_1 - a)v_1 + (a_2 - a_1)v_2 + \dots + (a_n - a_{n-1})v_n \\ &= (a_1 - a_0)v_1 + (a_2 - a_1)v_2 + \dots + (a_n - a_{n-1})v_n = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})v_i \\ &= I_P(f) \end{aligned}$$

Portanto, se $P \subset Q$ então $I_Q(f) = I_P(f)$. Isto mostra que o valor da integral $I_P(f)$ não depende da partição P escolhida (desde que f seja uma função escada com relação a essa partição). $\square$

Observação 2.2. Assim, podemos denotar a integral $I_P(f)$ simplesmente por $I(f)$. Também podemos denotar a integral por $I_a^b(f)$, para deixar especificado o intervalo $[a, b]$ no qual f está definida.

Proposição 2.8. A integral de funções escada que têm valores em espaços de Banach é linear, ou seja:

- (1) $I(f + g) = I(f) + I(g)$, para quaisquer funções escada $f, g : [a, b] \rightarrow E$;
- (2) $I(\lambda f) = \lambda \cdot I(f)$, para toda função escada $f : [a, b] \rightarrow E$ e para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Demonstração. (1) Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow E$ funções escada com relação à partição $P = \{a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b\}$. Então, existem vetores $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in E$ tais que se $a_{i-1} < t < a_i$ então $f(t) = v_i$ e $g(t) = u_i$, de onde segue que:

$$I_P(f) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})v_i$$

$$I_P(g) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})u_i$$

Além disso, se $a_{i-1} < t < a_i$ temos que $(f + g)(t) = f(t) + g(t) = v_i + u_i$. Logo, a integral de $f + g$ com respeito à partição P é dada por:

$$\begin{aligned} I_P(f + g) &= \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})(v_i + u_i) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})v_i + \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})u_i \\ &= I_P(f) + I_P(g) \end{aligned}$$

Como a integral não depende da partição, segue que $I(f + g) = I(f) + I(g)$.

(2) Seja $f : [a, b] \rightarrow E$ uma função escada com relação à partição $P = \{a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b\}$. Então, existem vetores $v_1, \dots, v_n \in E$ tais que se $a_{i-1} < t < a_i$ então $f(t) = v_i$. Logo, se $a_{i-1} < t < a_i$ então $\lambda f(t) = \lambda v_i$. Assim, temos que:

$$I_P(\lambda f) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})(\lambda v_i) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})v_i = \lambda \cdot I_P(f)$$

Como a integral não depende da partição, segue que $I(\lambda f) = \lambda \cdot I(f)$. □

Observação 2.3. Assim, a integral é um funcional linear $I : S([a, b], E) \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposição 2.9. O funcional linear $I : S([a, b], E) \rightarrow \mathbb{R}$ que define a integral de uma função escada é contínuo, ou seja:

$$\|I(f)\| \leq (b - a)\|f\|$$

Demonstração. Sejam $P = \{a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ e $v_1, \dots, v_n \in E$ tais que se $a_{i-1} < t < a_i$ então $f(t) = v_i$. Logo, a integral é definida da seguinte forma:

$$I(f) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})v_i$$

Pela desigualdade triangular, temos:

$$\begin{aligned} \|I(f)\| &= \left\| \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})v_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|(a_i - a_{i-1})v_i\| = \sum_{i=1}^n |a_i - a_{i-1}| \|v_i\| \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \|v_i\| \leq \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \sup_{x \in [a, b]} \|f(x)\| = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \|f\| \\ &= (a_n - a_0) \|f\| = (b - a) \|f\|, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Pela Observação 1.6, temos que o espaço $S([a, b], E)$ das funções escada possui um completamento. Então, podemos estender a definição de integral para os caminhos pertencentes ao completamento de $S([a, b], E)$, como veremos a seguir:

Definição 2.5. Uma função $f : [a, b] \rightarrow E$ é um **caminho retificável** se é o limite uniforme de uma sequência de funções escada, ou seja, se existe uma sequência de funções escada $f_n : [a, b] \rightarrow E$ que converge uniformemente para f . Assim, o completamento do espaço das funções escada é denominado **espaço dos caminhos retificáveis** e é denotado por $R([a, b], E)$.

Proposição 2.10. O espaço $R([a, b], E)$ dos caminhos retificáveis, com a norma $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} \|f(x)\|_E$, é um espaço vetorial normado.

Demonstração. Temos que:

- Sendo $f, g : [a, b] \rightarrow E$ caminhos retificáveis, temos que existem sequências de funções escada $f_n : [a, b] \rightarrow E$ e $g_n : [a, b] \rightarrow E$ que convergem uniformemente para f e g , respectivamente. Ou seja:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_1 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\|_E < \frac{\varepsilon}{4}, \forall x \in [a, b] \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_2 \Rightarrow \|g_n(x) - g(x)\|_E < \frac{\varepsilon}{4}, \forall x \in [a, b] \end{aligned}$$

Logo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = \max\{n_1, n_2\} + 1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $n > n_1$ e $n > n_2$, logo $\|f_n(x) - f(x)\|_E < \frac{\varepsilon}{4}$ e $\|g_n(x) - g(x)\|_E < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo

$x \in [a, b]$. Dessa forma, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então:

$$\begin{aligned} \|(f_n + g_n)(x) - (f + g)(x)\|_E &= \|(f_n - f)(x) + (g_n - g)(x)\|_E \\ &\leq \|(f_n - f)(x)\|_E + \|(g_n - g)(x)\|_E < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $x \in [a, b]$. Então, a sequência de funções $f_n + g_n : [a, b] \rightarrow E$ converge uniformemente para $f + g$. Portanto, $f + g : [a, b] \rightarrow E$ é um caminho retificável.

- Sendo $f : [a, b] \rightarrow E$ um caminho retificável e $\lambda \in \mathbb{K}$ uma constante, temos que existe uma sequência de funções escada $f_n : [a, b] \rightarrow E$ que converge uniformemente para f , ou seja:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\|_E < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}, \forall x \in [a, b]$$

Logo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então:

$$\|\lambda f_n(x) - \lambda f(x)\|_E = |\lambda| \|f_n(x) - f(x)\|_E < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1} < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$$

Então, existe uma sequência de funções escada $\lambda f_n : [a, b] \rightarrow E$ que converge uniformemente para λf . Portanto, $\lambda f : [a, b] \rightarrow E$ é um caminho retificável.

Logo, o espaço dos caminhos retificáveis $f : [a, b] \rightarrow E$ é um espaço vetorial. Utilizando o mesmo argumento da demonstração de que o espaço das funções escada é um espaço vetorial normado (Proposição 2.6), concluímos que o espaço dos caminhos retificáveis é um espaço vetorial normado. $\square$

Observação 2.4. Pelo Teorema da Extensão Linear (Teorema 1.9), podemos estender o operador integral $I : S([a, b], E)$ ao espaço $R([a, b], E)$. Se $f \in S([a, b], E)$, então existe uma sequência de funções escada $f_n : [a, b] \rightarrow E$ tal que $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ (uniformemente). Assim, definiremos a integral de f da seguinte forma:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n)$$

Proposição 2.11. A integral de caminhos retificáveis $f : [a, b] \rightarrow E$ é linear, ou seja:

- (1) Para quaisquer caminhos retificáveis $f, g : [a, b] \rightarrow E$, tem-se:

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

(2) Para todo caminho retificável $f : [a, b] \longrightarrow E$ e para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se:

$$\int_a^b (\lambda f(t)) \, dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t) \, dt$$

Demonstração. (1) Sendo $f, g : [a, b] \longrightarrow E$ caminhos retificáveis, existem sequências de funções escada $f_n, g_n : [a, b] \longrightarrow E$ tais que $f_n \rightarrow f$ e $g_n \rightarrow g$ uniformemente. Então, pela definição de integral de caminhos e pelas propriedades da integral de funções escada, temos que $f_n + g_n$ converge uniformemente para $f + g$, logo:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(t) + g(t)) \, dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n + g_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (I(f_n) + I(g_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} I(g_n) = \int_a^b f(t) \, dt + \int_a^b g(t) \, dt \end{aligned}$$

(2) Sendo $f : [a, b] \longrightarrow E$ um caminho retificável, sendo $f_n : [a, b] \longrightarrow E$ uma sequência de funções escada que converge uniformemente para f e sendo $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que λf_n converge uniformemente para λf , logo:

$$\int_a^b (\lambda f(t)) \, dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(\lambda f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda \cdot I(f_n)) = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n) = \lambda \cdot \int_a^b f(t) \, dt$$

□

Proposição 2.12. Seja $f : [a, b] \longrightarrow E$ um caminho retificável.

(1) Se $a \leq c \leq b$, então:

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^c f(t) \, dt + \int_c^b f(t) \, dt$$

(2) Se $a \leq c \leq d \leq b$, então:

$$\int_d^c f(t) \, dt = - \int_c^d f(t) \, dt$$

$$(3) \left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leq (b - a) \|f\|$$

Demonstração. (1) Seja $f : [a, b] \longrightarrow E$ um caminho retificável. Então, existe uma sequência de funções escada $f_n : [a, b] \longrightarrow E$ que converge uniformemente para f . Seja $c \in [a, b]$ e seja $P = \{a_0 = a \leq a_1 \leq \dots \leq a_{j-1} \leq a_j = c \leq a_{j+1} \leq \dots \leq a_{m-1} \leq a_m = b\}$ uma partição de $[a, b]$ (em relação à qual as funções f_n sejam funções escada). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $v_{n_1}, \dots, v_{n_m} \in E$ vetores tais que se $a_{i-1} < t < a_i$ então $f_n(t) = v_{n_i}$.

Então, a integral de f_n com respeito à partição P é:

$$I_a^b(f_n) = \sum_{i=1}^m (a_i - a_{i-1})v_{n_i}$$

Logo, temos:

$$I_a^b(f_n) = \sum_{i=1}^j (a_i - a_{i-1})v_{n_i} + \sum_{i=j+1}^m (a_i - a_{i-1})v_{n_i} = I_a^c(f_n) + I_c^b(f_n)$$

Segue então que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_a^b(f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_a^c(f_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} I_c^b(f_n) \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt}$$

(2) Pelo item anterior, temos que:

$$\int_c^d f(t) dt + \int_d^c f(t) dt = \int_c^c f(t) dt$$

Sendo $P = \{a_0 = c, c = a_1\}$ uma partição do intervalo $[c, c] = \{c\}$ e $u_1 \in E$ um vetor qualquer (por exemplo, $u_1 = f(c)$), temos que:

$$I_c^c(f_n) = \sum_{i=1}^1 (a_i - a_{i-1})u_i = (a_1 - a_0)v_1 = (c - c)v_1 = 0 \cdot v_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, segue que:

$$\int_c^c f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_c^c(f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

Então, concluímos que:

$$\int_c^d f(t) dt + \int_d^c f(t) dt = 0 \Rightarrow \boxed{\int_d^c f(t) dt = - \int_c^d f(t) dt}$$

(3) Seja $f : [a, b] \rightarrow E$ um caminho retificável, então existe uma sequência de funções escada $f_n : [a, b] \rightarrow E$ que converge uniformemente para f . Temos que $\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n)$. Pela Proposição 2.9, temos que $\|I(f_n)\| \leq (b - a)\|f_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então:

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| = \left\| \lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n) \right\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|I(f_n)\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (b - a)\|f_n\| = (b - a)\|f\|$$

□

Proposição 2.13. Seja $\lambda : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear contínua. Se $f : [a, b] \longrightarrow E$ é um caminho retificável, então $\lambda \circ f$ também é retificável e nesse caso temos:

$$\int_a^b (\lambda \circ f)(t) dt = \lambda \left(\int_a^b f(t) dt \right)$$

Demonstração. Se $f : [a, b] \longrightarrow E$ é um caminho retificável, então existe uma sequência de funções escada $f_n : [a, b] \longrightarrow E$ que converge uniformemente para f . Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma partição $P_n = \{a_{0,n} = a \leq a_{1,n} \leq \dots \leq a_{m_n-1,n} \leq a_{m_n,n} = b\}$ de $[a, b]$ e existem vetores $u_{1,n}, \dots, u_{m_n,n} \in E$ tais que se $a_{i-1,n} < t < a_{i,n}$ então $f_n(t) = u_{i,n}$. A integral de cada função f_n é dada por:

$$I(f_n) = \sum_{i=1}^{m_n} (a_{i,n} - a_{i-1,n}) u_{i,n}$$

Seja $\lambda : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear contínua. Definamos a sequência de funções $g_n = \lambda \circ f_n : [a, b] \longrightarrow F$, $g_n(t) = \lambda(f_n(t))$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma partição $P_n = \{a_{0,n} = a \leq a_{1,n} \leq \dots \leq a_{m_n-1,n} \leq a_{m_n,n} = b\}$ de $[a, b]$ e existem vetores $v_{1,n} = \lambda(u_{1,n}), \dots, v_{m_n,n} = \lambda(u_{m_n,n}) \in F$ tais que se $a_{i-1,n} < t < a_{i,n}$ então $g_n(t) = v_{i,n}$. Dessa forma, a integral de cada função g_n é dada por:

$$\begin{aligned} I(g_n) &= \sum_{i=1}^{m_n} (a_{i,n} - a_{i-1,n}) v_{i,n} = \sum_{i=1}^{m_n} (a_{i,n} - a_{i-1,n}) \lambda(u_{i,n}) = \sum_{i=1}^{m_n} \lambda((a_{i,n} - a_{i-1,n}) u_{i,n}) \\ &= \lambda \left(\sum_{i=1}^{m_n} (a_{i,n} - a_{i-1,n}) u_{i,n} \right) = \lambda(I(f_n)) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\int_a^b (\lambda \circ f)(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(g_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(I(f_n)) = \lambda \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n) \right) = \lambda \left(\int_a^b f(t) dt \right)$$

□

2.3 Teorema Fundamental do Cálculo

Para caminhos retificáveis, podemos estabelecer um Teorema Fundamental do Cálculo similar ao que é conhecido para funções reais de uma variável real:

Teorema 2.2 (Teorema Fundamental do Cálculo para caminhos em espaços de Banach). *Seja $f : [a, b] \longrightarrow E$ um caminho retificável, e suponhamos que f seja contínua*

em um ponto $c \in (a, b)$. Então, a aplicação

$$\begin{aligned}\varphi : [a, b] &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto \varphi(t) = \int_a^t f(s) \, ds\end{aligned}$$

é diferenciável em c e sua derivada é $f(c)$.

Demonstração. Pelas propriedades da integral, temos que:

$$\varphi(c+h) = \int_a^{c+h} f(s) \, ds = \int_a^c f(s) \, ds + \int_c^{c+h} f(s) \, ds = \varphi(c) + \int_c^{c+h} f(s) \, ds$$

Seja $T : \mathbb{R} \longrightarrow E$ a aplicação linear definida por $T(h) = f(c) \cdot h$. Somando $0 = T(h) - T(h)$ ao lado direito da igualdade (o que mantém a igualdade válida), temos:

$$\varphi(c+h) = \varphi(c) + \int_c^{c+h} f(s) \, ds + T(h) - T(h)$$

Logo:

$$\begin{aligned}\varphi(c+h) &= \varphi(c) + T(h) + \int_c^{c+h} f(s) \, ds - T(h) \\ &= \varphi(c) + T(h) + \int_c^{c+h} f(s) \, ds - f(c) \cdot h \\ &= \varphi(c) + T(h) + \int_c^{c+h} f(s) \, ds - f(c) \cdot (c+h-c) \\ &= \varphi(c) + T(h) + \int_c^{c+h} f(s) \, ds - \int_c^{c+h} f(c) \, ds \\ &= \varphi(c) + T(h) + \int_c^{c+h} (f(s) - f(c)) \, ds\end{aligned}$$

Além disso, sendo $R(h) = \int_c^{c+h} (f(s) - f(c)) \, ds$, temos que:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(h)\|}{|h|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left\| \int_c^{c+h} (f(s) - f(c)) \, ds \right\|}{|h|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(c+h-c) \|f - f(c)\|}{|h|} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot \left(\sup_{t \in [c, c+h]} \|f(t) - f(c)\| \right)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [c, c+h]} \|f(t) - f(c)\| \\ &= \sup_{t \in [c, c]} \|f(t) - f(c)\| = \|f(c) - f(c)\| = 0\end{aligned}$$

Então, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(h)\|}{|h|} = 0$, assim concluímos que φ é diferenciável no ponto c e $D\varphi(c)(h) =$

$T(h) = f(c) \cdot h$, logo $\varphi'(c) = D\varphi(c)(1) = f(c) \cdot 1 = f(c)$. Em particular, temos que:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(s) \, ds - \int_a^a f(s) \, ds = \int_a^b f(s) \, ds - 0 = \int_a^b f(t) \, dt$$

□

O Teorema Fundamental do Cálculo para caminhos em espaços de Banach também pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 2.3 (Segunda versão do Teorema Fundamental do Cálculo para caminhos em espaços de Banach). *Seja $f : [a, b] \rightarrow E$ um caminho retificável e Fréchet-diferenciável, então:*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) \, dt$$

Demonstração. Como f é Fréchet-diferenciável, temos que f é contínua (pela Proposição 2.1) e a derivada $Df(c) : \mathbb{R} \rightarrow E$ é contínua para todo $c \in (a, b)$. Definamos a seguinte função $g : [a, b] \rightarrow E$:

$$g(t) = \int_a^t f'(s) \, ds,$$

onde $f'(s) = Df(s)(1)$. Pelo Teorema 2.2, temos que $Dg(c)(h) = f'(c) \cdot h$ para todo $c \in (a, b)$, ou seja, $Dg(c)(h) = f'(c) \cdot h = Df(c)(1) \cdot h = Df(c)(h)$. Então:

$$D(f - g)(c)(h) = Df(c)(h) - Dg(c)(h) = Df(c)(h) - Df(c)(h) = 0, \quad \forall c \in (a, b)$$

Assim, pela Proposição 2.4, temos que $f - g$ é constante, ou seja, existe $v \in E$ tal que $(f - g)(t) = v$ para todo $t \in [a, b]$. Em particular, temos que $(f - g)(a) = v$, logo $(f - g)(t) = (f - g)(a)$ para todo $t \in [a, b]$, ou seja, $f(t) - g(t) = f(a) - g(a)$ para todo $t \in [a, b]$. Observe que $g(a) = \int_a^a f'(s) \, ds = 0$, logo $f(t) - g(t) = f(a)$ para todo $t \in [a, b]$. Então, em particular, temos que $f(b) - g(b) = f(a)$, ou seja, $g(b) = f(b) - f(a)$. Portanto:

$$g(b) = \int_a^b f'(s) \, ds \Rightarrow f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) \, dt$$

□

2.4 Desigualdade do Valor Médio

Para desenvolvermos a demonstração da Desigualdade do Valor Médio para aplicações Fréchet-diferenciáveis, vamos precisar de alguns resultados preliminares.

Lema 2.2. Sejam E e F espaços de Banach. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ um caminho, isto é, para cada $t \in [a, b]$ tem-se que $\alpha(t) : E \rightarrow F$ é uma aplicação linear contínua. Suponhamos que α seja um caminho retificável, de modo que sua integral é a aplicação linear contínua $\int_a^b \alpha(t) dt \in \mathcal{L}(E, F)$. Então, para todo $y \in E$, tem-se que

$$\int_a^b \alpha(t)y dt = \int_a^b \alpha(t) dt \cdot y,$$

onde $\alpha(t)y \in F$ é a imagem de $y \in E$ pela aplicação linear $\alpha(t)$ e $\int_a^b \alpha(t) dt \cdot y \in F$ é a imagem de $y \in E$ pela aplicação linear $\int_a^b \alpha(t) dt$.

Demonstração. Para $y \in E$ fixado, definamos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \beta_y : (E, F) &\longrightarrow F \\ \alpha(t) &\longmapsto \alpha(t) \cdot y, \end{aligned}$$

onde $\alpha(t) \cdot y \in F$ é a imagem de $y \in E$ pela aplicação linear $\alpha(t)$. Temos que β_y é linear, pois, para quaisquer $\alpha(t), \alpha(s) \in (E, F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos:

$$\beta_y(\alpha(t) + \lambda\alpha(s)) = (\alpha(t) + \lambda\alpha(s)) \cdot y = \alpha(t) \cdot y + \lambda\alpha(s) \cdot y = \beta_y(\alpha(t)) + \lambda\beta_y(\alpha(s))$$

Além disso, β_y é contínua, pois:

$$\frac{\|\beta_y(\alpha(t))\|}{\|\alpha(t)\|} = \frac{\|\alpha(t) \cdot y\|}{\|\alpha(t)\|} \leq \frac{\|\alpha(t)\| \cdot \|y\|}{\|\alpha(t)\|} = \|y\| < \infty \Rightarrow \sup_{\alpha(t) \neq 0} \frac{\|\beta_y(\alpha(t))\|}{\|\alpha(t)\|} < \infty$$

Logo, pela Proposição 2.13, segue que:

$$\int_a^b \beta_y \circ \alpha(t) dt = \beta_y \left(\int_a^b \alpha(t) dt \right) \Rightarrow \int_a^b \alpha(t) \cdot y dt = \left(\int_a^b \alpha(t) dt \right) \cdot y$$

Portanto, $\int_a^b \alpha(t)y dt = \int_a^b \alpha(t) dt \cdot y$, como queríamos demonstrar. $\square$

Teorema 2.4. Sejam E e F espaços de Banach. Sejam $U \subset E$ aberto e $f : U \rightarrow F$ uma aplicação Fréchet-diferenciável. Seja $x \in U$ e seja $y \in E$ tal que o caminho

$\gamma : [0, 1] \longrightarrow E$, definido por $\gamma(t) = x + ty$, está contido em U . Então:

$$f(x + y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + ty)y \, dt = \int_0^1 Df(x + ty) \, dt \cdot y$$

Demonstração. Primeiramente, temos que:

$$\gamma(t + h) = x + (t + h)y = x + ty + hy = \gamma(t) + hy$$

Então, definindo $R(t, h) = 0$ para quaisquer $t \in [0, 1]$ e $h \in \mathbb{R}$, temos que $D\gamma(t)(h) = hy$. Agora, definamos o caminho $g : [0, 1] \longrightarrow F$ por $g(t) = f(x + ty)$, ou seja, $g = f \circ \gamma$. Pela Regra da Cadeia (Teorema 2.1), temos que:

$$Dg(t)(h) = Df(\gamma(t)) \circ D\gamma(t)(h) = Df(x + ty)(hy)$$

Tomando $h = 1$ na equação acima, obtemos:

$$g'(t) = Dg(t)(1) = Df(x + ty)(1 \cdot y) = Df(x + ty)(y)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 2.3), temos que:

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) \, dt \Rightarrow f(x + y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + ty)y \, dt$$

Como f é Fréchet-diferenciável em $x + ty \in U$, temos que $Df(x + ty)$ é uma aplicação linear contínua. Então, pelo Lema 2.2, segue que:

$$\int_0^1 Df(x + ty)y \, dt = \int_0^1 Df(x + ty) \, dt \cdot y$$

Portanto:

$$f(x + y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + ty)y \, dt = \int_0^1 Df(x + ty) \, dt \cdot y$$

□

Como consequência do teorema anterior, temos a Desigualdade do Valor Médio:

Teorema 2.5 (Desigualdade do Valor Médio). *Sejam E e F espaços de Banach, $U \subseteq E$ aberto e $f : U \longrightarrow F$ uma aplicação Fréchet-diferenciável. Sejam $x_1, x_2 \in U$ tais que o segmento $\ell := \{tx_1 + (1 - t)x_2 : 0 \leq t \leq 1\} = \{x_2 + t(x_1 - x_2) : 0 \leq t \leq 1\}$ está contido em U . Então:*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \sup_{x \in \ell} \|Df(x)\| \cdot \|x_1 - x_2\|$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.4, temos que:

$$f(x_1) - f(x_2) = \int_0^1 Df(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2) dt$$

Definamos o caminho $g : [0, 1] \rightarrow F$ por $g(t) = Df(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2)$. A função g é contínua (pois é a composição da aplicação contínua Df com a aplicação contínua $\gamma(t) = x_2 + t(x_1 - x_2)$). Então, pelas propriedades da integral (de funções de uma variável), temos:

$$\begin{aligned} \|f(x_1) - f(x_2)\| &= \left\| \int_0^1 Df(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|Df(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2)\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|Df(x_2 + t(x_1 - x_2))\| \cdot \|x_1 - x_2\| dt \\ &= \|x_1 - x_2\| \cdot \int_0^1 \|Df(x_2 + t(x_1 - x_2))\| dt \\ &\leq \|x_1 - x_2\| \cdot (1 - 0) \cdot \sup_{t \in [0, 1]} \|Df(x_2 + t(x_1 - x_2))\| \\ &= \sup_{x \in \ell} \|Df(x)\| \cdot \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

ou seja:

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \sup_{x \in \ell} \|Df(x)\| \cdot \|x_1 - x_2\|$$

□

Uma consequência importante da Desigualdade do Valor Médio é a recíproca do Exemplo 2.2, válida desde que o aberto $U \subset E$ seja conexo:

Corolário 2.2. Sejam E e F espaços de Banach e $U \subseteq E$ um aberto conexo. Se $f : U \rightarrow F$ é uma aplicação Fréchet-diferenciável tal que $Df(x) = 0$ para todo $x \in U$, então f é constante.

Demonstração. Seja $x_0 \in U$. Definamos o conjunto $V = \{x \in U : f(x) = f(x_0)\}$. Temos que $V \neq \emptyset$, pois $x_0 \in V$. Como f é Fréchet-diferenciável em x_0 , temos que f é contínua em x_0 (pela Proposição 2.1), e, pela mesma razão, f é contínua em todos os pontos de U . Seja $y \in \overline{V}$, então existe uma sequência de pontos $y_n \in V$ (ou seja, $f(y_n) = f(x_0)$) tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$. Como f é contínua em U , segue que $f(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0) = f(x_0)$, logo $y \in V$. Assim, temos que $\overline{V} \subseteq V$, portanto $\overline{V} = V$, daí V é fechado. Agora, seja $z_0 \in V$, então $z_0 \in U$, daí existe $r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subset U$. Como a bola aberta $B(z_0, r)$ é convexa, temos que, para todo

$z \in B(z_0, r)$, o segmento $\ell = \{tz_0 + (1-t)z : 0 \leq t \leq 1\}$ está contido em $B(z_0, r)$, logo, pela Desigualdade do Valor Médio (Teorema 2.5), temos que $\|f(z) - f(z_0)\| \leq \sup_{x \in \ell} \|Df(x)\| \cdot \|z - z_0\|$. Por hipótese, $Df(x) = 0$ para todo $x \in U$, então concluímos que $\|f(z) - f(z_0)\| \leq 0$, ou seja, $f(z) = f(z_0)$ para todo $z \in B(z_0, r)$. Como $z_0 \in V$, temos que $f(z_0) = f(x_0)$, logo $f(z) = f(x_0)$ para todo $z \in B(z_0, r)$. Assim, para todo $z \in B(z_0, r)$ tem-se $z \in V$, portanto $B(z_0, r) \subset V$. Dessa forma, concluímos que para todo $z_0 \in V$ existe $r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subset V$, logo V é aberto. Então, $V \subseteq U$ é simultaneamente aberto e fechado. Como U é conexo, temos que $V = \emptyset$ ou $V = U$, mas já sabemos que $V \neq \emptyset$, assim $V = U$. Portanto, $f(x) = f(x_0)$ para todo $x \in U$, então f é constante. $\square$

A Desigualdade do Valor Médio é fundamental para a demonstração do resultado mais importante deste capítulo: o Teorema da Aplicação Inversa em espaços de Banach.

2.5 Teorema da Aplicação Inversa em espaços de Banach

O Teorema da Aplicação Inversa em espaços de Banach requer não apenas que a aplicação seja diferenciável (e que sua derivada seja um isomorfismo linear), mas que seja também de classe C^1 . Em espaços de Banach em geral (inclusive nos espaços euclidianos), temos as seguintes definições acerca de aplicações e difeomorfismos de classe C^1 :

Definição 2.6. Sejam E e F espaços de Banach e seja $U \subset E$ aberto. Dizemos que uma função $f : U \subset E \longrightarrow F$ é **de classe C^1** se f é Fréchet-diferenciável e a aplicação

$$\begin{aligned} Df : U &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x_0 &\longmapsto Df(x_0) \end{aligned}$$

é contínua.

Definição 2.7. Sejam E e F espaços de Banach, $U \subset E$ um aberto e $f : U \longrightarrow F$ uma aplicação de classe C^1 . Dizemos que f é um **difeomorfismo de classe C^1** (ou um **C^1 -difeomorfismo**) se a imagem $V = f(U)$ é um conjunto aberto em F e se existe uma aplicação $g : V \longrightarrow U$ de classe C^1 tal que $g \circ f$ e $f \circ g$ são as aplicações identidade em U e V , respectivamente (nesse caso, denotamos $g = f^{-1}$). Um difeomorfismo de classe C^1 também é denominado **aplicação C^1 -invertível**.

Definição 2.8. Dizemos que $f : U \subset E \longrightarrow F$ é um **difeomorfismo local de classe C^1** em $x_0 \in U$ (ou um **C^1 -difeomorfismo local em x_0**) se existe um aberto $U_0 \subset U$,

tal que $x_0 \in U_0$, de modo que a restrição de f a U_0 é um difeomorfismo de classe C^1 . Se f é um difeomorfismo local de classe C^1 em x_0 , dizemos que f é **localmente C^1 -invertível** em x_0 .

Como mostraremos a seguir, a composição de difeomorfismos de classe C^1 é também um difeomorfismo de classe C^1 e a composição de difeomorfismos locais de classe C^1 é também um difeomorfismo local de classe C^1 .

Proposição 2.14. Sejam E , F e G espaços de Banach, e seja $U \subset E$ aberto. Seja $f : U \subset E \rightarrow F$ um difeomorfismo de classe C^1 (assim $V = f(U) \subset F$ é aberto). Seja $g : V \subset F \rightarrow G$ um difeomorfismo de classe C^1 . Então, a composição $g \circ f : U \subset E \rightarrow G$ é um difeomorfismo de classe C^1 .

Demonstração. Como f e g são difeomorfismos de classe C^1 , temos que:

- f e g são Fréchet-diferenciáveis, assim são contínuas;
- As aplicações

$$\begin{aligned} Df : U &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x_0 &\mapsto Df(x_0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Dg : V &\rightarrow \mathcal{L}(F, G) \\ y_0 &\mapsto Dg(y_0) \end{aligned}$$

são contínuas;

- Existem as aplicações inversas $f^{-1} : V \rightarrow E$ e $g^{-1} : g(V) \rightarrow F$, ambas de classe C^1 , tais que $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$, $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$, $g^{-1} \circ g = \text{Id}_F$ e $g \circ g^{-1} = \text{Id}_G$.

Como f e g são Fréchet-diferenciáveis, temos pela Regra da Cadeia (Teorema 2.1) que $g \circ f$ é Fréchet-diferenciável e:

$$D(g \circ f)(x_0)(h) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)(h), \quad \forall x_0 \in U, \quad \forall h \in E$$

Como $Dg : V \rightarrow \mathcal{L}(F, G)$ é contínua e $f : U \subset E \rightarrow F$ é contínua, temos que a aplicação

$$\begin{aligned} Dg \circ f : U &\rightarrow \mathcal{L}(F, G) \\ x_0 &\mapsto Dg \circ f(x_0) = Dg(f(x_0)) \end{aligned}$$

é contínua. Como $Dg \circ f : U \subset E \rightarrow \mathcal{L}(F, G)$ e $Df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ são contínuas, temos que a aplicação

$$\begin{aligned} A : U &\rightarrow \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) \\ x_0 &\mapsto (Dg(f(x_0)), Df(x_0)) \end{aligned}$$

é contínua. Também é contínua a aplicação

$$\begin{aligned} B : \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ (T_2, T_1) &\longmapsto T_2 \circ T_1, \end{aligned}$$

então a aplicação

$$\begin{aligned} D(g \circ f) : U &\longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ x_0 &\longmapsto Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0), \end{aligned}$$

obtida por $D(g \circ f) = B \circ A$, é contínua. Logo, a composição de aplicações de classe C^1 é uma aplicação de classe C^1 , então as composições $g \circ f$ e $f^{-1} \circ g^{-1}$ são de classe C^1 . Temos que $g \circ f(U) = g(V)$ é aberto em G , pois $V = f(U)$ é aberto e g é um difeomorfismo de classe C^p . Note que:

- $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ \text{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$
- $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ \text{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{Id}_G$

Então, existe uma aplicação $f^{-1} \circ g^{-1} : g(V) \longrightarrow U$ de classe C^1 tal que $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{Id}_E$ e $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \text{Id}_G$. Portanto, $g \circ f : U \subset E \longrightarrow G$ é um difeomorfismo de classe C^1 . $\square$

Proposição 2.15. Sejam E , F e G espaços de Banach, e seja $U \subset E$ aberto. Seja $f : U \subset E \longrightarrow F$ um difeomorfismo local de classe C^1 no ponto $x_0 \in U$ (assim existe um aberto $U_0 \subset U$ tal que $x_0 \in U_0$ e $f|_{U_0}$ é um difeomorfismo de classe C^1). Seja $g : V \subset F \longrightarrow G$ um difeomorfismo local de classe C^1 no ponto $f(x_0) \in V$ (assim existe um aberto $V_0 = f(U_0) \subset V$ tal que $f(x_0) \in V_0$ e $g|_{V_0}$ é um difeomorfismo de classe C^1). Então, a composição $g \circ f : U \subset E \longrightarrow G$ é um difeomorfismo local de classe C^1 no ponto $x_0 \in U$.

Demonstração. Pelas hipóteses, temos que existe um aberto $U_0 \subset U$ tal que $x_0 \in U_0$ e $f|_{U_0}$ é um difeomorfismo de classe C^1 , de modo que $V_0 = f(U_0) \subset V$ é um aberto tal que $f(x_0) \in V_0$ e $g|_{V_0}$ é um difeomorfismo de classe C^1 . Temos que $(g \circ f)|_{U_0} = (g|_{V_0}) \circ (f|_{U_0})$ é a composição de difeomorfismos de classe C^1 , logo, pela Proposição 2.14, temos que $(g \circ f)|_{U_0}$ é um difeomorfismo de classe C^1 . Então, existe um aberto $U_0 \subset U$ tal que $x_0 \in U_0$ e $(g \circ f)|_{U_0}$ é um difeomorfismo de classe C^1 . Portanto, a composição $g \circ f : U \subset E \longrightarrow G$ é um difeomorfismo local de classe C^1 no ponto $x_0 \in U$. $\square$

O Teorema da Aplicação Inversa, que apresentaremos a seguir, fornece um critério para que uma aplicação entre espaços de Banach seja um difeomorfismo local de classe C^1 . Ele é uma generalização do Teorema da Aplicação Inversa em espaços euclidianos

(Teorema 1.14) e é um caso particular do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland (que será estudado no Capítulo 5). A demonstração que faremos aqui segue as ideias apresentadas no livro [16].

Teorema 2.6 (Teorema da Aplicação Inversa em espaços de Banach). *Sejam E e F espaços de Banach, $U \subset E$ um aberto e $f : U \rightarrow F$ uma aplicação de classe C^1 . Seja $x_0 \in U$ e suponha que $Df(x_0) : E \rightarrow F$ é um isomorfismo linear (ou seja, uma aplicação linear contínua cuja inversa também é contínua). Então, f é um difeomorfismo local de classe C^1 em x_0 . Além disso, se $y_0 = f(x_0)$, então $D(f^{-1})(y_0) = [Df(x_0)]^{-1} : F \rightarrow E$.*

Demonstração. O nosso objetivo é mostrar que, sob as condições apresentadas, a aplicação f possui uma inversa que é de classe C^1 . Sendo assim, o primeiro passo é mostrar que a aplicação inversa f^{-1} existe. Primeiramente, mostraremos que para todo $k \in F$ suficientemente pequeno (no sentido de que a norma $\|k\|$ seja próxima de zero), existe $h \in E$ tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + k, \quad (2.17)$$

o que significa que a aplicação f é sobrejetora (pois para cada vizinhança de $f(x_0)$ em F existe uma vizinhança de x_0 em E cuja imagem por f está na referida vizinhança de $f(x_0)$). Como $f : U \subset E \rightarrow F$ é uma aplicação de classe C^1 (assim, f é Fréchet-diferenciável), temos que, para todo $x_0 \in U$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)(h) + r(x_0, h), \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (2.18)$$

A partir da equação (2.18), temos que a equação (2.17) é equivalente a:

$$\begin{aligned} f(x_0) + k &= f(x_0) + Df(x_0)(h) + r(x_0, h) \Rightarrow k = Df(x_0)(h) + r(x_0, h) \\ &\Rightarrow Df(x_0)(h) = k - r(x_0, h) \\ &\Rightarrow h = [Df(x_0)]^{-1}(k - r(x_0, h)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Além disso, da equação (2.19), temos também que $r(x_0, h) = k - Df(x_0)(h)$. Para simplificar a notação (pois $x_0 \in U$ é fixado), seja $r_0 : E \rightarrow F$ definida por $r_0(h) = r(x_0, h)$, ou seja, $r_0(h) = k - Df(x_0)(h)$. Definamos uma aplicação $T : E \rightarrow E$ por $T(h) = [Df(x_0)]^{-1}(k - r_0(h))$ (nesse caso, $k \in F$ é como se fosse uma constante). Assim, a equação (2.19) (e consequentemente a equação (2.17)) é equivalente a dizer que

$$h = T(h), \quad (2.20)$$

ou seja, que $h \in E$ é um ponto fixo da aplicação T . Então, mostraremos que T possui

um ponto fixo, o que implicará na existência da aplicação inversa f^{-1} . Da definição de T , temos que:

$$\begin{aligned}
 \|T(h_1) - T(h_2)\| &= \|[Df(x_0)]^{-1}(k - r_0(h_1)) - [Df(x_0)]^{-1}(k - r_0(h_2))\| \\
 &= \|[Df(x_0)]^{-1}(k - r_0(h_1) - k + r_0(h_2))\| \\
 &= \|[Df(x_0)]^{-1}(-r_0(h_1) + r_0(h_2))\| \\
 &\leq \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \| -r_0(h_1) + r_0(h_2) \| \\
 &= \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \|r_0(h_1) - r_0(h_2)\|
 \end{aligned}$$

Então:

$$\|T(h_1) - T(h_2)\| \leq \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \|r_0(h_1) - r_0(h_2)\| \quad (2.21)$$

Pela definição de r_0 , temos que:

$$r_0(h + v) = f(x_0 + h + v) - f(x_0) - Df(x_0)(h + v) \quad (2.22)$$

$$r_0(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)(h) \quad (2.23)$$

Subtraindo as equações (2.22) e (2.23), obtemos:

$$r_0(h + v) - r_0(h) = f(x_0 + h + v) - f(x_0 + h) - Df(x_0)(v) \quad (2.24)$$

Como f é Fréchet-diferenciável, temos que:

$$f(x_0 + h + v) = f(x_0 + h) + Df(x_0 + h)(v) + r(x_0 + h, v), \quad (2.25)$$

onde $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|r(x_0 + h, v)\|}{\|v\|} = 0$. Então, pela equação (2.25), temos:

$$f(x_0 + h + v) - f(x_0 + h) = Df(x_0 + h)(v) + r(x_0 + h, v), \quad (2.26)$$

onde $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|r(x_0 + h, v)\|}{\|v\|} = 0$. Pelas equações (2.24) e (2.26), segue que:

$$\begin{aligned}
 r_0(h + v) - r_0(h) &= Df(x_0 + h)(v) - Df(x_0)(v) + r(x_0 + h, v) \\
 r_0(h + v) - r_0(h) &= (Df(x_0 + h) - Df(x_0))(v) + r(x_0 + h, v),
 \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|r(x_0 + h, v)\|}{\|v\|} = 0$. Dessa maneira, concluímos que r_0 é Fréchet-diferenciável no ponto h e neste caso $Dr_0(h) = Df(x_0 + h) - Df(x_0)$. Logo, pela Desigualdade do

Valor Médio (Teorema 2.5), temos que:

$$\|r_0(h_1) - r_0(h_2)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Dr_0(h_2 + t(h_1 - h_2))\| \cdot \|h_1 - h_2\| \quad (2.28)$$

Considere a aplicação:

$$\begin{aligned} Dr_0 : E &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ h &\longmapsto Dr_0(h) = Df(x_0 + h) - Df(x_0) \end{aligned}$$

Temos que $Df(x_0) \in \mathcal{L}(E, F)$ é constante com relação à variável h . Além disso, como

$$\begin{aligned} Df : E &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x_0 &\longmapsto Df(x_0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A : E &\longrightarrow E \\ h &\longmapsto x_0 + h \end{aligned}$$

são contínuas, concluímos que $Df \circ A : E \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ definida por $Df(A(h)) = Df(x_0 + h)$ é contínua. Portanto, $Dr_0 : E \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ é contínua, então r_0 é de classe C^1 . Observe que $Dr_0(0) = Df(x_0 + 0) - Df(x_0) = 0$. Como $Dr_0(0) = 0$ e r_0 é de classe C^1 em $h = 0$, temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|h\| \leq \delta$ então $\|Dr_0(h)\| \leq \varepsilon$. Em particular, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2\|[Df(x_0)]^{-1}\|} > 0$, temos que existe $\delta > 0$ tal que se $\|h\| \leq \delta$ então $\|Dr_0(h)\| \leq \frac{1}{2\|[Df(x_0)]^{-1}\|}$. Definimos a bola fechada de centro 0 e raio δ em E por:

$$B_\delta = \{h \in E : \|h\| \leq \delta\}$$

A bola fechada B_δ é convexa (analogamente ao Exemplo 1.12), então, se $h_1, h_2 \in B_\delta$, temos que $h_2 + t(h_1 - h_2) \in B_\delta$ para todo $t \in [0, 1]$. Assim, segue que:

$$\begin{aligned} h_1, h_2 \in B_\delta &\Rightarrow \|Dr_0(h_2 + t(h_1 - h_2))\| \leq \frac{1}{2\|[Df(x_0)]^{-1}\|}, \quad \forall t \in [0, 1] \\ &\Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Dr_0(h_2 + t(h_1 - h_2))\| \leq \frac{1}{2\|[Df(x_0)]^{-1}\|} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Pelas desigualdades (2.28) e (2.29), temos:

$$h_1, h_2 \in B_\delta \Rightarrow \|r_0(h_1) - r_0(h_2)\| \leq \frac{\|h_1 - h_2\|}{2\|[Df(x_0)]^{-1}\|} \quad (2.30)$$

Pelas desigualdades (2.21) e (2.30), concluímos que:

$$h_1, h_2 \in B_\delta \Rightarrow \|T(h_1) - T(h_2)\| \leq \frac{1}{2}\|h_1 - h_2\| \quad (2.31)$$

Assim, $T : B_\delta \longrightarrow E$ é uma contração. Pela definição de $T(h) = [Df(x_0)]^{-1}(k - r_0(h))$, temos que:

$$\begin{aligned} \|T(h)\| &= \|[Df(x_0)]^{-1}(k - r_0(h))\| \leq \|[Df(x_0)]^{-1}\| \|k - r_0(h)\| \\ &\leq \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot (\|k\| + \|r_0(h)\|) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Tomando $h_1 = h \in B_\delta$ e $h_2 = 0 \in B_\delta$ na desigualdade (2.30), temos que:

$$\|r_0(h) - r_0(0)\| \leq \frac{\|h - 0\|}{2\|[Df(x_0)]^{-1}\|} \Rightarrow \|r_0(h)\| \leq \frac{\|h\|}{2\|[Df(x_0)]^{-1}\|} \quad (2.33)$$

Definamos $\eta = \frac{\delta}{2\|[Df(x_0)]^{-1}\|}$ e seja $B_\eta = \{k \in F : \|k\| \leq \eta\}$ a bola fechada de centro 0 e raio η em F . Logo, se $h \in B_\delta$ e $k \in B_\eta$ (ou seja, $\|h\| \leq \delta$ e $\|k\| \leq \eta$), segue das desigualdades (2.32) e (2.33) que:

$$\begin{aligned} \|T(h)\| &\leq \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot (\|k\| + \|r_0(h)\|) \\ &\leq \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \left(\eta + \frac{\|h\|}{2\|[Df(x_0)]^{-1}\|} \right) \\ &\leq \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \left(\frac{\delta}{2\|[Df(x_0)]^{-1}\|} + \frac{\delta}{2\|[Df(x_0)]^{-1}\|} \right) \\ &= \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \frac{\delta}{\|[Df(x_0)]^{-1}\|} = \delta \end{aligned} \quad (2.34)$$

Então, se $h \in B_\delta$ (e $k \in B_\eta$) temos que $T(h) \in B_\delta$. Assim, concluímos que $T(B_\delta) \subset B_\delta$. Como B_δ é um subconjunto fechado do espaço de Banach E (que é um espaço métrico completo), segue do Teorema do Ponto Fixo para contrações restritas a bolas fechadas (Corolário 1.1) que T possui um único ponto fixo em B_δ , ou seja, existe um único $h \in B_\delta$ tal que $h = T(h)$. Assim, a equação (2.20) é válida, e sabemos que esta é equivalente à equação (2.17), então a equação (2.17) é válida, ou seja, f é sobrejetora. Agora, vamos mostrar que f é injetora. Considere a aplicação $\varphi : E \longrightarrow E$ definida por $\varphi(x) = x - f(x)$. Então, φ é Fréchet-diferenciável e $D\varphi(x_0) = \text{Id}_E - Df(x_0)$ para todo $x_0 \in U$, ou seja, $D\varphi(x_0)(h) = h - Df(x_0)(h)$ para todo $h \in E$ com $x_0 + h \in U$. Com isso, temos que φ é de classe C^1 , pois a aplicação

$$\begin{aligned} D\varphi : E &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x_0 &\longmapsto \text{Id}_E - Df(x_0) \end{aligned}$$

é contínua. Temos que $D\varphi(x_0)(0) = 0 - Df(x_0)(0) = 0 - 0 = 0$, então para todo $\alpha \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|h\| \leq \delta$ então $\|D\varphi(x_0)(h)\| \leq \alpha$. Logo:

$$\forall \alpha \in (0, 1), \exists \delta > 0 \text{ tal que } \|h\| \in B_\delta \Rightarrow \|D\varphi(x_0)(h)\| \leq \alpha \quad (2.35)$$

Sejam $h_1, h_2 \in B_\delta$ e consideremos a função $\gamma : [0, 1] \rightarrow B_\delta$ definida por $\gamma(t) = h_2 + t(h_1 - h_2)$. Definamos a função $\psi = \varphi \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow E$, ou seja, $\psi(t) = \varphi(\gamma(t)) = \varphi(h_2 + t(h_1 - h_2))$. Pela Regra da Cadeia (Teorema 2.1), temos que $\psi'(t) = D\varphi(h_2 + t(h_1 - h_2))(h_1 - h_2)$, logo:

$$\begin{aligned} \|\psi'(t)\| &= \|D\varphi(h_2 + t(h_1 - h_2))(h_1 - h_2)\| \\ &\leq \|D\varphi(h_2 + t(h_1 - h_2))\| \cdot \|h_1 - h_2\| \leq \alpha \|h_1 - h_2\| \end{aligned} \quad (2.36)$$

Pela definição de ψ , temos que $\psi(0) = \varphi \circ \gamma(0) = \varphi(h_2)$ e $\psi(1) = \varphi \circ \gamma(1) = \varphi(h_1)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 2.3), temos:

$$\varphi(h_2) - \varphi(h_1) = \psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t) dt \quad (2.37)$$

Tomando a norma na equação acima, utilizando a propriedade (3) da Proposição 2.12 e a desigualdade anterior, temos que:

$$\|\varphi(h_2) - \varphi(h_1)\| = \left\| \int_0^1 \psi'(t) dt \right\| \leq (1 - 0) \|\psi'(t)\| \leq \alpha \|h_1 - h_2\| \quad (2.38)$$

Pela desigualdade acima e pela definição de φ , segue que:

$$\|h_2 - f(h_2) - h_1 + f(h_1)\| \leq \alpha \|h_1 - h_2\| \quad (2.39)$$

Logo, pela desigualdade triangular no lado esquerdo da desigualdade acima, temos:

$$\|h_1 - h_2\| - \|f(h_1) - f(h_2)\| \leq \|h_2 - f(h_2) - h_1 + f(h_1)\| \leq \alpha \|h_1 - h_2\| \quad (2.40)$$

Manipulando a desigualdade acima, obtemos o seguinte:

$$\|f(h_1) - f(h_2)\| \geq (1 - \alpha) \|h_1 - h_2\| \quad (2.41)$$

Como $0 < \alpha < 1$, concluímos que se $h_1 \neq h_2$ então $\|f(h_1) - f(h_2)\| \geq (1 - \alpha) \|h_1 - h_2\| > 0$, ou seja, $f(h_1) \neq f(h_2)$. Logo, f é injetora. Portanto, f é bijetora e assim existe uma aplicação inversa local $f^{-1} : f(U) \subset F \rightarrow E$ que associa a cada vizinhança de $f(x_0) \in F$ uma vizinhança de $x_0 \in E$. Essa inversa é dada da seguinte forma: sendo

$g : B_\eta \longrightarrow B_\delta$ uma aplicação tal que $h = g(k)$ é o ponto fixo da equação (2.20), temos da equação (2.17) que:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = f(x_0) + k &\Rightarrow f(x_0 + g(k)) = f(x_0) + k \\ &\Rightarrow f^{-1}(f(x_0) + k) = x_0 + g(k) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Com a existência de f^{-1} demonstrada, o próximo (e último) passo é mostrar que f^{-1} é de classe C^1 . Sejam $h_1 = g(k_1)$ e $h_2 = g(k_2)$, temos, a partir da equação (2.19), que:

$$h_1 = [Df(x_0)]^{-1}(k_1 - r_0(h_1)) \quad (2.43)$$

$$h_2 = [Df(x_0)]^{-1}(k_2 - r_0(h_2)) \quad (2.44)$$

Subtraindo as equações (2.43) e (2.44) e tomando a norma desta diferença, obtemos:

$$\begin{aligned} \|h_1 - h_2\| &= \|[Df(x_0)]^{-1}(k_1 - r_0(h_1)) - [Df(x_0)]^{-1}(k_2 - r_0(h_2))\| \\ &= \|[Df(x_0)]^{-1}(k_1 - r_0(h_1) - k_2 + r_0(h_2))\| \\ &\leq \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \|k_1 - r_0(h_1) - k_2 + r_0(h_2)\| \\ &\leq \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot (\|k_1 - k_2\| + \|r_0(h_1) - r_0(h_2)\|) \\ &= \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \|k_1 - k_2\| + \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \|r_0(h_1) - r_0(h_2)\| \end{aligned} \quad (2.45)$$

Pelas desigualdades (2.30) e (2.45), temos que:

$$\begin{aligned} \|h_1 - h_2\| &\leq \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \|k_1 - k_2\| + \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \|r_0(h_1) - r_0(h_2)\| \\ &\leq \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \|k_1 - k_2\| + \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \frac{\|h_1 - h_2\|}{2\|[Df(x_0)]^{-1}\|} \\ &= \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \|k_1 - k_2\| + \frac{1}{2}\|h_1 - h_2\| \end{aligned} \quad (2.46)$$

Subtraindo $\frac{1}{2}\|h_1 - h_2\|$ dos dois lados da desigualdade (2.46) e depois multiplicando os dois lados por 2, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|h_1 - h_2\| &\leq \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \|k_1 - k_2\| \\ \|h_1 - h_2\| &\leq 2\|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \|k_1 - k_2\| \end{aligned} \quad (2.47)$$

A desigualdade (2.47) pode ser reescrita como:

$$\|g(k_1) - g(k_2)\| \leq 2\|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \|k_1 - k_2\|, \quad k_1, k_2 \in B_\eta \quad (2.48)$$

Então, g é uma aplicação Lipschitziana em B_η (logo é contínua em B_η). Substituindo

$h = g(k)$ na equação (2.19), obtemos:

$$g(k) = [Df(x_0)]^{-1}(k - r_0(g(k))) = [Df(x_0)]^{-1}(k) - [Df(x_0)]^{-1}(r_0(g(k))) \quad (2.49)$$

Definamos a aplicação $s : B_\eta \longrightarrow F$ por $s(k) = -[Df(x_0)]^{-1}(r_0(g(k)))$. Da equação (2.42), temos que se $k = 0$ então $f^{-1}(f(x_0)+0) = x_0+g(0)$, logo $f^{-1}(f(x_0)) = x_0+g(0)$, então $x_0 = x_0 + g(0)$, daí $g(0) = 0$. Assim, a equação (2.49) pode ser reescrita como:

$$g(k) - g(0) = [Df(x_0)]^{-1}(k) + s(k) \quad (2.50)$$

Logo:

$$\|s(k)\| = \| - [Df(x_0)]^{-1}(r_0(g(k))) \| \leq \| [Df(x_0)]^{-1} \| \|r_0(g(k))\| \quad (2.51)$$

A desigualdade (2.51) pode ser escrita também como:

$$\|s(k)\| \leq \| [Df(x_0)]^{-1} \| \|r_0(h)\| \quad (2.52)$$

Tomando $k_1 = k$ e $k_2 = 0$ na desigualdade (2.48), temos:

$$\|g(k) - g(0)\| \leq 2\| [Df(x_0)]^{-1} \| \cdot \|k - 0\| \Rightarrow \|g(k)\| \leq 2\| [Df(x_0)]^{-1} \| \|k\| \quad (2.53)$$

A desigualdade (2.53) pode ser reescrita como:

$$\|h\| \leq 2\| [Df(x_0)]^{-1} \| \|k\| \Rightarrow \frac{\|h\|}{\|k\|} \leq 2\| [Df(x_0)]^{-1} \| \quad (2.54)$$

Logo:, a partir das desigualdades (2.52) e (2.54), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\|s(k)\|}{\|k\|} &= \frac{\|h\| \cdot \|s(k)\|}{\|k\| \cdot \|h\|} \leq 2\| [Df(x_0)]^{-1} \| \cdot \frac{\| [Df(x_0)]^{-1} \| \|r_0(h)\|}{\|h\|} \\ &= 2\| [Df(x_0)]^{-1} \|^2 \cdot \frac{\|r_0(h)\|}{\|h\|} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Tomando o limite com $k \rightarrow 0$ (consequentemente $h \rightarrow 0$) na desigualdade (2.55), concluímos que:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|s(k)\|}{\|k\|} \leq 2\| [Df(x_0)]^{-1} \|^2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r_0(h)\|}{\|h\|} = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|s(k)\|}{\|k\|} = 0 \quad (2.56)$$

Segue das equações (2.50) e (2.56) que:

$$g(k) - g(0) = [Df(x_0)]^{-1}(k) + s(k), \text{ onde } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|s(k)\|}{\|k\|} = 0 \quad (2.57)$$

Portanto, g é diferenciável em $k = 0$ e $Dg(0) = [Df(x_0)]^{-1}$. Pela equação (2.42) e pelo fato de que $g(0) = 0$, temos:

$$f^{-1}(f(x_0) + k) - f^{-1}(f(x_0)) = x_0 + g(k) - x_0 = g(k) = g(k) - g(0)$$

Pela equação (2.57), concluímos que:

$$f^{-1}(f(x_0) + k) - f^{-1}(f(x_0)) = [Df(x_0)]^{-1}(k) + s(k), \text{ onde } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|s(k)\|}{\|k\|} = 0 \quad (2.58)$$

Portanto, a aplicação inversa f^{-1} é diferenciável em $f(x_0)$ e $D(f^{-1})(f(x_0)) = [Df(x_0)]^{-1}$. Como $Df(x_0)$ é contínua, segue que $D(f^{-1})(f(x_0)) = [Df(x_0)]^{-1}$ é contínua. Definamos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} D(f^{-1}) : F &\longrightarrow \mathcal{L}(F, E) \\ y_0 &\longrightarrow D(f^{-1})(y_0) = [Df(f^{-1}(y_0))]^{-1} \end{aligned}$$

Sendo $J : \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(F, E)$ definida por $J(T) = T^{-1}$, temos que J é contínua (ver [19], página 363). Note que $D(f^{-1}) = J \circ Df \circ f^{-1}$. Temos que J é contínua (pelo que mostramos anteriormente), $Df : U \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ é contínua (pois f é de classe C^1) e $f^{-1} : f(U) \longrightarrow U$ é contínua (pois f^{-1} é diferenciável). Então, $D(f^{-1})$ é contínua. Assim, concluímos que f^{-1} é de classe C^1 . Portanto, f é um difeomorfismo local de classe C^1 em x_0 . $\square$

Capítulo 3

Espaços de Fréchet

Neste terceiro capítulo, vamos fazer uma apresentação dos espaços de Fréchet, que são uma generalização dos espaços de Banach. Desenvolveremos algumas noções de Cálculo Diferencial e Integral nesses espaços e verificaremos que o Teorema da Aplicação Inversa do capítulo anterior nem sempre vale para espaços de Fréchet.

3.1 Espaços de Fréchet

Nesta seção, vamos introduzir os espaços de Fréchet, que generalizam os espaços de Banach e serão nosso universo de estudo central a partir deste capítulo. Começaremos com os espaços vetoriais topológicos em geral (ver [2], [29] ou [35] para mais detalhes) e depois passaremos a estudar os espaços de Fréchet (ver [13] para mais detalhes).

Definição 3.1. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ (por exemplo, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e seja τ uma topologia em V . O par (V, τ) é denominado um **espaço vetorial topológico** sobre $\mathbb{K}$ se os seguintes axiomas são satisfeitos:

- (1) $(x, y) \mapsto x + y$ é uma aplicação contínua de $V \times V$ em V ;
- (2) $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ é uma aplicação contínua de $\mathbb{K} \times V$ em V .

Quando não houver nenhuma possibilidade de confusão a respeito de qual é a topologia no espaço vetorial V , dizemos simplesmente que V é um espaço vetorial topológico.

Exemplo 3.1. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Consideremos em E a topologia induzida pela norma (topologia forte) e definamos as aplicações $s : E \times E \rightarrow E$, $s(x, y) = x + y$ (soma de vetores) e $p : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$, $p(\lambda, x) = \lambda x$ (multiplicação por escalar), considerando $E \times E$ e $\mathbb{K} \times E$ com a topologia produto. Temos que:

- Para quaisquer $(x, y), (a, b) \in E \times E$, tem-se:

$$\|s(x, y) - s(a, b)\| = \|x + y - (a + b)\| = \|x - a + y - b\| \leq \|x - a\| + \|y - b\|$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \|(x, y) - (a, b)\|_{E \times E} < \delta &\Rightarrow \|(x, y) - (a, b)\|_{E \times E} < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow \|x - a\| < \frac{\varepsilon}{2}, \|y - b\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow \|s(x, y) - s(a, b)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Logo, $s : E \times E \longrightarrow E$ é contínua.

- Para quaisquer $(\lambda, x), (\alpha, a) \in \mathbb{K} \times E$, tem-se:

$$\begin{aligned} \|p(\lambda, x) - p(\alpha, a)\| &= \|\lambda x - \alpha a\| = \|\lambda x - \lambda a + \lambda a - \alpha a\| \\ &\leq |\lambda| \|x - a\| + |\lambda - \alpha| \|a\| \end{aligned}$$

Para todo $\delta > 0$, temos que:

$$\|(\lambda, x) - (\alpha, a)\|_{\mathbb{K} \times E} < \delta \Rightarrow |\lambda - \alpha| < \delta, \|x - a\| < \delta$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2|\lambda| + 1}, \frac{\varepsilon}{2\|a\| + 1} \right\} > 0$ tal que se $\|(\lambda, x) - (\alpha, a)\|_{\mathbb{K} \times E} < \delta$ então:

$$\|p(\lambda, x) - p(\alpha, a)\| < |\lambda| \delta + \delta \|a\| \leq |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\lambda| + 1} + \frac{\varepsilon}{2\|a\| + 1} \cdot \|a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Logo, $p : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ é contínua.

Logo, E é um espaço vetorial topológico. Com isso, temos que todo espaço vetorial normado é um espaço vetorial topológico.

Exemplo 3.2. Seja X um espaço vetorial com a topologia indiscreta $\tau = \{\emptyset, X\}$. Definamos as aplicações $s : X \times X \longrightarrow X$, $s(x, y) = x + y$ (soma de vetores) e $p : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$, $p(\lambda, x) = \lambda x$ (multiplicação por escalar), considerando $X \times X$ e $\mathbb{K} \times X$ com a topologia produto. Então:

- No caso da soma de vetores $s : X \times X \longrightarrow X$, $s(x, y) = x + y$, temos X com a topologia $\tau = \{\emptyset, X\}$ e $X \times X$ com a topologia produto $\tau_2 = \{\emptyset, \emptyset \times X, X \times \emptyset, X \times X\} = \{\emptyset, X \times X\}$. É claro que $\emptyset \in \tau \Rightarrow s^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_2$. Tomando $X \in \tau$, temos que, para todo $(x, y) \in X \times X$, existe $x + y \in X$ tal que

$(x, y) \in s^{-1}(x+y) \subset s^{-1}(X)$. Então, $X \times X \subset s^{-1}(X) \Rightarrow s^{-1}(X) = X \times X \in \tau_2$. Assim, a imagem inversa de todo aberto de τ é um aberto de τ_2 . Portanto, a soma de vetores é contínua.

- No caso da multiplicação por escalar $p : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$, $p(\lambda, x) = \lambda x$, temos X com a topologia $\tau = \{\emptyset, X\}$ e $\mathbb{K}$ com a topologia usual $\tau_3 = \{\emptyset, \mathbb{K}\} \cup \{B(x, \varepsilon)\}_{x \in \mathbb{K}, \varepsilon > 0}$, logo induzimos em $\mathbb{K} \times X$ a seguinte topologia produto:

$$\tau_4 = \{\emptyset, \mathbb{K} \times X\} \cup \{B(x, \varepsilon) \times X\}_{x \in \mathbb{K}, \varepsilon > 0}$$

É claro que $\emptyset \in \tau \Rightarrow p^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_4$. Tomando $X \in \tau$, temos que, para todo $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X$, existe $\lambda x \in X$ tal que $(\lambda, x) \in p^{-1}(\lambda x) \subset p^{-1}(X)$. Então, $\mathbb{K} \times X \subset p^{-1}(X) \Rightarrow p^{-1}(X) = \mathbb{K} \times X \in \tau_4$. Assim, a imagem inversa de todo aberto de τ é um aberto de τ_4 . Portanto, a multiplicação por escalar é contínua.

Concluimos então que X com a topologia indiscreta é um espaço vetorial topológico. Além disso, se $X \neq \{0\}$, podemos verificar que X não é um espaço vetorial normado. Suponhamos que $X \neq \{0\}$ com a topologia indiscreta $\tau = \{\emptyset, X\}$ seja um espaço vetorial normado com uma norma $\|\cdot\|$. Assim, temos que a topologia τ é induzida pela norma $\|\cdot\|$. Como consequência, a bola aberta $B(0, 1) = \{x \in X; \|x\| < 1\}$ é um aberto da topologia τ , então $B(0, 1) = \emptyset$ ou $B(0, 1) = X$. Como $0 \in B(0, 1)$, temos que $B(0, 1) \neq \emptyset$, logo $B(0, 1) = X$. Dessa forma, como $B(0, 1)$ é um conjunto limitado (por ser uma bola aberta), temos que X é um conjunto limitado, ou seja, existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$ para todo $x \in X$. Sabemos que X é um espaço vetorial não-trivial ($X \neq \{0\}$), então se $x \in X$ tem-se $\lambda x \in X$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, logo $\|\lambda x\| \leq M$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, daí $\|x\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Tomando $\lambda \rightarrow \infty$, concluimos que $\|x\| = 0$ para todo $x \in X$, ou seja, $X = \{0\}$, contradição! Portanto, $X \neq \{0\}$ com a topologia indiscreta $\tau = \{\emptyset, X\}$ não é um espaço vetorial normado.

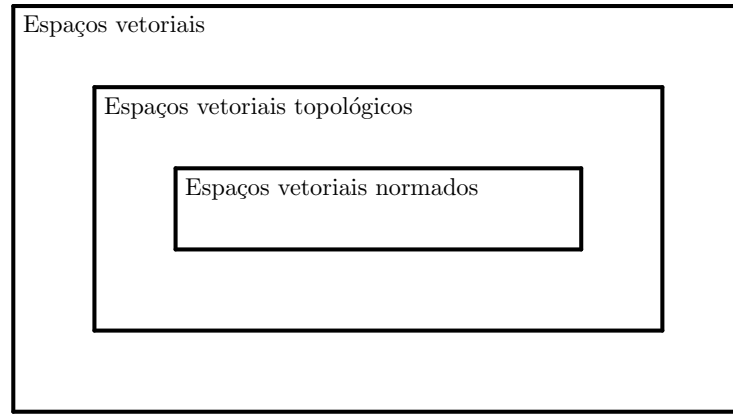
Observação 3.1. O exemplo anterior nos mostra que existem espaços vetoriais topológicos que não são espaços vetoriais normados. Dessa forma, os espaços vetoriais topológicos são uma classe mais geral do que os espaços vetoriais normados.

Exemplo 3.3. Seja $E \neq \{0\}$ um espaço vetorial com a soma $s : E \times E \longrightarrow E$, $s(x, y) = x + y$ e a multiplicação por escalar $p : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$, $p(\lambda, x) = \lambda x$. Consideremos em E a topologia discreta $\tau_d = \mathcal{P}(E) = \{A : A \subseteq E\}$. Seja $A = \{a\} \subseteq E$ com $a \neq 0$. Todo subconjunto de E é aberto na topologia τ_d , então $\{a\}$ é aberto na topologia τ_d . Temos que:

$$p^{-1}(\{a\}) = \{(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E : \lambda x = a\}$$

Por exemplo, $(1, a) \in p^{-1}(\{a\})$. Suponhamos que exista um aberto $V \subseteq p^{-1}(\{a\}) \subseteq \mathbb{K} \times E$ tal que $(1, a) \in V$, então existem abertos $V_1 \subseteq \mathbb{K}$ e $V_2 \subseteq E$ tais que $1 \in V_1$, $a \in V_2$ e $V_1 \times V_2 \subseteq V$. Como V_1 é aberto de $\mathbb{K}$ e $1 \in V_1$, temos que existe algum $\alpha \in V_1$ tal que $\alpha \neq 1$. Logo, $(\alpha, a) \in V_1 \times V_2$, assim $(\alpha, a) \in V$, então $(\alpha, a) \in p^{-1}(\{a\})$. Porém, $p(\alpha, a) = \alpha a \neq a$, logo $p(\alpha, a) \notin \{a\}$, então $(\alpha, a) \notin p^{-1}(\{a\})$, o que implica que $V \not\subseteq p^{-1}(\{a\})$, absurdo! Portanto, não existe nenhum aberto $V \subseteq p^{-1}(\{a\})$ tal que $(1, a) \in V$. Segue então que $(1, a)$ não é um ponto interior de $p^{-1}(\{a\})$. Assim, $p^{-1}(\{a\})$ não é um aberto de $\mathbb{K} \times E$. Como a imagem inversa do aberto $\{a\} \subseteq E$ pela aplicação p não é um aberto, concluímos que p não é contínua. Portanto, E não é um espaço vetorial topológico.

Observação 3.2. O exemplo anterior nos mostra que existem espaços vetoriais que não são espaços vetoriais topológicos. Temos, então, as seguintes inclusões:



Exemplo 3.4. Seja (E, τ) um espaço vetorial topológico (sobre o corpo $\mathbb{K}$) e M um subespaço vetorial de E . Como E é um espaço vetorial topológico, temos que as aplicações $s : E \times E \rightarrow E$, $s(x, y) = x + y$ e $p : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$, $p(\lambda, x) = \lambda x$ são contínuas. Consideremos em M a topologia induzida pela topologia de E . Assim, a topologia produto em $M \times M$ coincide com a topologia induzida pela topologia produto em $E \times E$ e a topologia produto em $\mathbb{K} \times M$ coincide com a topologia induzida pela topologia produto em $\mathbb{K} \times E$. Dessa forma, as restrições $s|_{M \times M} : M \times M \rightarrow M$ e $p|_{\mathbb{K} \times M} : \mathbb{K} \times M \rightarrow M$ são contínuas. Portanto, M é um espaço vetorial topológico.

Definição 3.2. Seja E um espaço vetorial.

- (a) Dizemos que um subconjunto $A \subset E$ é **absorvente** se para todo $x \in E$ existe $\lambda_0 > 0$ tal que $x \in \lambda A$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \geq \lambda_0$.
- (b) Dizemos que um subconjunto $A \subset E$ é **equilibrado** se $\lambda x \in A$ para todo $x \in A$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq 1$, ou seja, se $\lambda A \subseteq A$ sempre que $|\lambda| \leq 1$.

Definição 3.3. Um espaço vetorial topológico V sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) é **localmente convexo** se toda vizinhança V da origem contém um aberto convexo A tal que $0 \in A$.

Definição 3.4. Seja $\mathcal{P}$ uma família de seminormas em um espaço vetorial E :

$$\mathcal{P} = \{p_i\}_{i \in I}, \quad p_i \text{ é uma seminorma para todo } i \in I$$

Dados $x_0 \in E$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$, definimos:

$$V(x_0, p_1, \dots, p_n; \varepsilon) = \{x \in E : p_i(x - x_0) < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$$

Para cada $x \in E$, definimos por $\mathcal{V}_x$ a coleção de todos os subconjuntos de E da forma $V(x, p_1, \dots, p_n; \varepsilon)$, com $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ e $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$.

Os resultados a seguir mostram que podemos construir espaços vetoriais topológicos localmente convexos a partir de famílias de seminormas:

Teorema 3.1. *Seja $\mathcal{P}$ uma família de seminormas no espaço vetorial E . Então:*

- (a) *Existe uma topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ em E que, para cada $x \in E$, admite $\mathcal{V}_x$ como base de vizinhanças, ou seja:*

$$\tau_{\mathcal{P}} = \{G \subseteq E : \text{para cada } x \in G \text{ existe } U \in \mathcal{V}_x \text{ tal que } U \subseteq G\}$$

*A topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ é chamada **topologia gerada pela família de seminormas $\mathcal{P}$** .*

- (b) *$(E, \tau_{\mathcal{P}})$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo.*

- (c) *Cada seminorma $p \in \mathcal{P}$ é contínua na topologia $\tau_{\mathcal{P}}$.*

- (d) *$(E, \tau_{\mathcal{P}})$ é um espaço de Hausdorff se, e somente se, para cada $x \in E$, $x \neq 0$ existe uma seminorma $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) \neq 0$.*

Demonstração. Ver [2], páginas 234 a 236. □

Teorema 3.2. *Seja $\mathcal{B}_0$ uma base de vizinhanças convexas e equilibradas da origem no espaço localmente convexo E . Então a topologia de E é gerada pela família de seminormas $\mathcal{P} = \{p_V\}_{V \in \mathcal{B}_0}$.*

Demonstração. Ver [2], páginas 239 e 240. □

Teorema 3.3. *Um espaço vetorial topológico é localmente convexo se, e somente se, sua topologia é gerada por uma família de seminormas.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Segue do Teorema 3.2.

($\Leftarrow$) Segue dos itens (a) e (b) do Teorema 3.1. $\square$

No caso particular em que E é gerado por uma família enumerável de seminormas, podemos definir uma métrica em E :

Teorema 3.4. *Seja E um espaço vetorial topológico gerado por uma família enumerável de seminormas $\{\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \dots\}$ (ou seja, $\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \dots \leq \|x\|_n \leq \dots$ para todo $x \in E$), tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : p_n(x) = 0\} = \{0\}$. Seja $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$. Então, a aplicação*

$$\begin{aligned} d : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i \|x - y\|_i}{1 + \|x - y\|_i} \end{aligned}$$

é uma métrica em E (que define a topologia de E).

Demonstração. Uma versão do resultado acima com $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$ pode ser encontrada em [6], páginas 105 e 106 (o argumento utilizado pode ser generalizado para qualquer sequência $\alpha_n > 0$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$). $\square$

Assim, os espaços vetoriais topológicos gerados por famílias enumeráveis de seminormas recebem uma denominação especial:

Definição 3.5. Se um espaço vetorial topológico E é gerado por uma família enumerável de seminormas, dizemos que E é **metrizável**.

Exemplo 3.5. Exemplos de espaços vetoriais topológicos localmente convexos (metrizáveis ou não):

- (1) Seja E um espaço vetorial normado. Então, a topologia usual (a **topologia forte**) é gerada por uma norma, ou seja, é gerada por uma família enumerável (finita) de seminormas. Então, E com a topologia forte é um espaço vetorial topológico metrizável.
- (2) Seja E um espaço vetorial normado com a topologia fraca $\sigma(E, E^*)$, a qual é gerada pela família de seminormas

$$\mathcal{P} = \{p : E \longrightarrow \mathbb{R}, p(x) = |\varphi(x)|, \varphi \in E^*\}$$

(para mais detalhes, consulte [2], páginas 143 a 151). Então, E é localmente convexo, mas não é metrizável, pois a família de seminormas acima não é enumerável.

- (3) Seja E um espaço vetorial normado e consideremos o espaço dual E^* com a topologia fraca* $\sigma(E^*, E)$, a qual é gerada pela família de seminormas

$$\mathcal{P} = \{p : E^* \longrightarrow \mathbb{R}, p(\varphi) = |\varphi(x)|, x \in E\}$$

(para mais detalhes, consulte [2], páginas 151 a 157). Então, E^* é localmente convexo, mas não é metrizável, pois a família de seminormas acima não é enumerável.

- (4) Seja $\mathbb{R}^\infty$ o espaço vetorial das sequências (a_j) de números reais. Definamos a seguinte família de seminormas em $\mathbb{R}^\infty$:

$$\|(a_j)\|_n = \sum_{j=0}^n |a_j|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A família (enumerável) de seminormas acima gera uma topologia para o espaço $\mathbb{R}^\infty$, então $\mathbb{R}^\infty$ é um espaço vetorial topológico metrizável.

- (5) Seja $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Definamos a seguinte família de seminormas:

$$\|f\|_n = \sup_{x \in [-n, n]} |f(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A família (enumerável) de seminormas acima gera uma topologia para o espaço $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, então $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é um espaço vetorial topológico metrizável.

- (6) Seja $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Definamos a seguinte família de seminormas em $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$:

$$\|f\|_n = \sum_{j=0}^n \sup_{x \in [a, b]} |f^{(j)}(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A família (enumerável) de seminormas acima gera uma topologia para o espaço $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$, então $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ é um espaço vetorial topológico metrizável.

- (7) Seja $\mathcal{H}$ o espaço vetorial de todas as funções holomorfas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Tomemos

a seguinte família de seminormas:

$$\|f\|_n = \sup\{|f(z)| : |z| \leq n\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A família (enumerável) de seminormas acima gera uma topologia para o espaço $\mathcal{H}$, então $\mathcal{H}$ é um espaço vetorial topológico metrizável.

Os resultados a seguir estabelecerão a noção de espaço vetorial topológico metrizável completo:

Proposição 3.1. Seja E um espaço vetorial topológico metrizável, com a métrica definida a partir da família de seminormas $\{\|\cdot\|_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que gera E , ou seja:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i \|x - y\|_i}{1 + \|x - y\|_i}, \quad \text{onde } \alpha_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$$

Uma sequência $(x_j) \subset E$ é uma sequência de Cauchy no espaço métrico E se, e somente se, (x_j) é uma sequência de Cauchy com relação a todas as seminormas de E . Ou seja:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(x_j, x_k) < \varepsilon \text{ sempre que } j, k > k_0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que, } \forall n \in \mathbb{N}, \|x_j - x_k\|_n < \varepsilon \text{ sempre que } j, k > k_0}$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Se $(x_j) \subset E$ é uma sequência de Cauchy em E , temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_j, x_k) < \varepsilon$ sempre que $j, k > k_0$. Logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i \|x_j - x_k\|_i}{1 + \|x_j - x_k\|_i} < \varepsilon$ sempre que $j, k > k_0$. Tomando a sequência definida por

$\alpha_n = 1$ e $\alpha_i = 0$ para todo $i \neq n$, temos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\|x_j - x_k\|_n}{1 + \|x_j - x_k\|_n} < \varepsilon$ sempre que $j, k > k_0$ (logo podemos assumir que $\varepsilon < 1$ suficientemente próximo de 1), então $\|x_j - x_k\|_n < \varepsilon + \varepsilon \|x_j - x_k\|_n$, daí $(1 - \varepsilon) \|x_j - x_k\|_n < \varepsilon$, ou seja, $\|x_j - x_k\|_n < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$.

Para todo $\eta > 0$, existe $\varepsilon = \frac{\eta}{1 + \eta} > 0$ tal que $\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \eta$, ou seja, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_j - x_k\|_n < \eta$ sempre que $j, k > k_0$. Portanto, (x_j) é uma sequência de Cauchy com relação a todas as seminormas de E .

$(\Leftarrow)$ Se (x_j) é uma sequência de Cauchy com relação a todas as seminormas de E , temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_j - x_k\|_n < \varepsilon$ sempre que $j, k > k_0$ e $n \in \mathbb{N}$. Para todo $\eta > 0$, existe $\varepsilon = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i} > 0$ tal que

$$d(x_j, x_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i \|x_j - x_k\|_i}{1 + \|x_j - x_k\|_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \|x_j - x_k\|_i < \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varepsilon = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \eta$$

sempre que $j, k > k_0$. Portanto, (x_j) é uma sequência de Cauchy no espaço métrico E . $\square$

Proposição 3.2. Seja E um espaço vetorial topológico metrizável. Uma sequência $(x_j) \subset E$ é convergente para a na topologia da métrica usual de E se, e somente se, é convergente para a com relação a todas as seminormas de E . Ou seja:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(x_j, a) < \varepsilon \text{ sempre que } j > k_0} \\ \Updownarrow \\ \boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que, } \forall n \in \mathbb{N}, \|x_j - a\|_n < \varepsilon \text{ sempre que } j > k_0}$$

Demonstração. A demonstração é análoga à da Proposição 3.1, bastando substituir x_k por a em todos os passos (da ida e da volta). $\square$

Corolário 3.1. Seja E um espaço vetorial topológico metrizável. Então:

- (1) Uma sequência $(x_j) \subset E$ não é uma sequência de Cauchy no espaço métrico E se, e somente se, existe pelo menos uma seminorma na qual (x_j) não é de Cauchy.
- (2) Uma sequência $(x_j) \subset E$ não converge para a na topologia da métrica usual de E se, e somente se, existe pelo menos uma seminorma na qual (x_j) não converge para a .

Demonstração. (1) Contrapositiva da Proposição 3.1.

- (2) Contrapositiva da Proposição 3.2.

$\square$

Definição 3.6. Seja V um espaço vetorial topológico metrizável. Dizemos que V é um **espaço de Fréchet** se V for um espaço métrico completo (com a métrica proveniente da família de seminormas).

Exemplo 3.6. Seja E um espaço de Banach, então E é um espaço vetorial normado completo, daí E é um espaço vetorial topológico metrizável completo. Portanto, todo espaço de Banach é um espaço de Fréchet.

Exemplo 3.7. Seja $\mathbb{R}^\infty$ o espaço vetorial topológico metrizável formado pelas sequências (a_j) de números reais, munido da seguinte família (enumerável) de seminormas que geram a sua topologia:

$$\|(a_j)\|_n = \sum_{j=0}^n |a_j|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ao mesmo tempo, temos que $\mathbb{R}^\infty = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$ é um produto cartesiano enumerável de espaços métricos completos, então $\mathbb{R}^\infty$ é completo. Portanto, $\mathbb{R}^\infty$ é um espaço de Fréchet.

Exemplo 3.8. Seja $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial topológico metrizável das funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, munido da seguinte família de seminormas que geram a sua topologia:

$$\|f\|_n = \sup_{x \in [-n, n]} |f(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Seja (f_j) uma sequência de Cauchy em $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, então, pela Proposição 3.1, (f_j) é uma sequência de Cauchy com relação a todas as seminormas de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cada seminorma $\|\cdot\|_n$ é a norma usual do espaço $C([-n, n])$ das funções contínuas $f : [-n, n] \rightarrow \mathbb{R}$, o qual é um espaço de Banach, logo (f_j) é uma sequência convergente em $C([-n, n])$, ou seja, (f_j) converge com relação a cada seminorma $\|\cdot\|_n$. Portanto, (f_j) converge com relação a todas as seminormas de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, então, pela Proposição 3.2, segue que (f_j) é convergente no espaço métrico $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Logo, toda sequência de Cauchy em $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é convergente, portanto $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é um espaço de Fréchet.

Exemplo 3.9. Outros exemplos de espaços de Fréchet:

- (1) O espaço vetorial topológico $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ das funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , cuja topologia é gerada pela família de seminormas

$$\|f\|_n = \sum_{j=0}^n \sup_{x \in [a, b]} |f^{(j)}(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

é um espaço de Fréchet (ver [13], página 68).

- (2) O espaço vetorial topológico $\mathcal{H}$ das funções holomorfas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, cuja topologia é gerada pela família de seminormas

$$\|f\|_n = \sup\{|f(z)| : |z| \leq n\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

é um espaço de Fréchet (ver [13], página 68).

- (3) Sendo F um espaço de Fréchet, o espaço $C([a, b], F)$ das funções $f : [a, b] \rightarrow F$ é um espaço de Fréchet (ver [13], página 71).

Proposição 3.3. Todo subespaço fechado de um espaço de Fréchet é um espaço de Fréchet.

Demonstração. Seja F um espaço de Fréchet. Então, F é um espaço vetorial topológico metrizable e completo. Assim, G é um espaço vetorial topológico com a topologia de subespaço induzida por F . Como F é metrizable, temos que topologia de F é gerada por uma família enumerável $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de seminormas, logo a topologia de G (que é induzida pela de F) é gerada pela família dessas seminormas restritas a G , ou seja, é gerada pela família de seminormas $\{p_n|_G\}_{n \in \mathbb{N}}$, então G é metrizable. Por fim, como G é um subespaço fechado de um espaço métrico completo, segue que G é completo. Portanto, G é um espaço de Fréchet. $\square$

Apesar de ser apresentado no contexto dos espaços vetoriais normados, o Teorema de Hahn-Banach (na forma dos Teoremas 1.10 e 1.11) é válido para espaços vetoriais em geral, inclusive para espaços de Fréchet (e espaços vetoriais topológicos em geral). Além disso, é possível estabelecer uma forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais topológicos e alguns corolários análogos aos que são conhecidos em espaços normados. A discussão sobre as consequências do Teorema de Hahn-Banach em espaços vetoriais topológicos foge aos objetivos deste trabalho e o(a) leitor(a) interessado(a) pode consultar a literatura existente sobre espaços vetoriais topológicos (ver, por exemplo, [29] ou [35]). Para prosseguir com a apresentação dos assuntos seguintes, precisaremos apenas dos resultados a seguir:

Corolário 3.2. Sejam F um espaço de Fréchet e $x_0 \in F$ tal que $x_0 \neq 0$. Então, existe um funcional linear contínuo $f : F \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $f(x_0) \neq 0$.

Demonstração. Ver [35], página 187. $\square$

Corolário 3.3. Seja F um espaço de Fréchet. Se $f(x_0) = 0$ para todo funcional linear contínuo $f : F \rightarrow \mathbb{K}$, então $x_0 = 0$.

Demonstração. Contrapositiva do Corolário 3.2. $\square$

3.2 Espaços graduados e standard

Em alguns espaços de Fréchet que são muito conhecidos, a sequência de normas que induz a topologia é crescente (não-decrescente). Assim, essa classe de espaços recebe uma denominação especial:

Definição 3.7. Um espaço de Fréchet X é **graduado** se sua topologia é definida por uma sequência crescente de seminormas $\|\cdot\|_k$, $k \geq 0$, ou seja, se sua topologia é definida por uma sequência de seminormas $\|\cdot\|_k$ tais que $\|x\|_k \leq \|x\|_{k+1}$ para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $x \in X$.

Exemplo 3.10. São graduados os seguintes espaços de Fréchet:

- (1) Sendo E um espaço de Banach, sua topologia forte é gerada pela norma $\|\cdot\|$. Tomando $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos uma sequência crescente de seminormas (iguais) que geram a topologia de E . Então, todo espaço de Banach é um espaço de Fréchet graduado.
- (2) Seja $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, munido da seguinte família de seminormas que geram a sua topologia:

$$\|f\|_n = \sup_{x \in [-n, n]} |f(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Então, $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é um espaço de Fréchet graduado.

- (3) O espaço $\mathcal{H}$ das funções holomorfas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, cuja topologia é gerada pela família de seminormas

$$\|f\|_n = \sup\{|f(z)| : |z| \leq n\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

é um espaço de Fréchet graduado.

- (4) O espaço $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ das funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , cuja topologia é gerada pela família de seminormas

$$\|f\|_n = \sum_{j=0}^n \sup_{x \in [a, b]} |f^{(j)}(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

é um espaço de Fréchet graduado.

- (5) Seja $(B, \|\cdot\|_B)$ um espaço de Banach. Definamos o espaço $\Sigma(B)$ das sequências (x_k) em B tais que $\sum_{k=0}^{\infty} e^{nk} \|x_k\|_B < \infty$ para todo $n \geq 0$. Definindo $\|(x_k)\|_n = \sum_{k=0}^{\infty} e^{nk} \|x_k\|_B$, temos uma quantidade enumerável de seminormas, com as quais $\Sigma(B)$ é um espaço de Fréchet graduado (ver [13], página 133). Este é o chamado espaço das sequências exponencialmente decrescentes em B .

Os espaços de Fréchet graduados são gerados por sequências crescentes de seminormas, então podemos obter espaços de Fréchet a partir de sequências crescentes de normas (que são seminormas), como é o caso dos espaços de Banach (gerados por uma sequência crescente de normas iguais). No universo dos espaços de Fréchet graduados que são gerados por normas, valem alguns resultados interessantes. Começaremos com o seguinte:

Teorema 3.5. *Seja X um espaço de Fréchet cuja topologia é gerada por uma sequência crescente de normas $\|\cdot\|_k$, $k \geq 0$, ou seja, tal que $\|x\|_k \leq \|x\|_{k+1}$ para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $x \in X$. Seja X_k o completamento do espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|_k)$. Então:*

- (i) Para cada $k \geq 0$, $X_{k+1} \subseteq X_k$;
- (ii) Para cada $k \geq 0$, a aplicação $i_k : X_{k+1} \longrightarrow X_k$ definida por $i_k(x) = x$ é injetora e contínua, e neste caso $\|i_k\| \leq 1$;
- (iii) Para cada $k \geq 0$, X é um subespaço denso de X_k ;
- (iv) $X = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$.

Demonstração. (i) Se $a \in X_{k+1}$, então existe uma sequência $x_n \in X$ tal que $x_n \rightarrow a$ na norma de X_{k+1} , ou seja, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - a\|_{k+1} = 0$. Logo, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - a\|_k \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - a\|_{k+1} = 0$, assim $a \in X_k$. Com isso, concluímos que $X_{k+1} \subseteq X_k$, para cada $k \geq 0$.

(ii) Para cada $k \geq 0$, temos que a aplicação $i_k : X_{k+1} \longrightarrow X_k$ definida por $i_k(x) = x$ é injetora, pois se $i_k(x) = i_k(y)$ então $x = y$. Além disso, como $\|x\|_k \leq \|x\|_{k+1}$ (por definição), temos que $\|i_k(x)\|_k \leq \|x\|_{k+1}$, então i_k é contínua e neste caso $\|i_k\| \leq 1$.

(iii) Como X_k é o completamento do espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|_k)$, temos pelo Teorema 1.3 (ver Observação 1.6) que $(X, \|\cdot\|_k)$ (ou algum espaço isométrico a ele) é um subespaço denso de X_k .

(iv) Temos que $X \subseteq X_k$ para todo $k \geq 0$ (por definição), então $X \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$. Vamos

provar a outra inclusão. Suponhamos que $\bigcap_{k=0}^{\infty} X_k \not\subseteq X$, ou seja, suponhamos que

exista um ponto $a \in \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$ tal que $a \notin X$. Como $a \in \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$, temos que $a \in X_k$ para todo $k \geq 0$. Por hipótese, $a \notin X$. Como X é um espaço de Fréchet, temos que X é um espaço métrico completo (com a métrica usual dada pelo Teorema 3.4). Logo, não existe nenhuma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \rightarrow a$ na métrica usual de X . Ou seja, para toda sequência $(x_n) \subset X$, $x_n \not\rightarrow a$ na métrica usual de X . Então, pelo Corolário 3.1, temos que, para toda sequência $(x_n) \subset X$, existe pelo menos uma norma $\|\cdot\|_{k_0}$ na qual $x_n \not\rightarrow a$. Logo, existe uma subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}}$ tal que:

$$\exists \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N} \text{ tal que } n \in \mathbb{N}_1 \text{ e } n > n_0 \Rightarrow \|x_n - a\|_{k_0} \geq \varepsilon$$

Por definição, a sequência de normas é crescente, então $\|x_n - a\|_{k_0} \leq \|x_n - a\|_{k_0+1} \leq \|x_n - a\|_{k_0+2} \leq \dots$, pelo que obtemos a seguinte conclusão: para todo $k \geq k_0$, existe uma subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}}$ tal que:

$$\exists \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N} \text{ tal que } n \in \mathbb{N}_1 \text{ e } n > n_0 \Rightarrow \|x_n - a\|_k \geq \|x_n - a\|_{k_0} \geq \varepsilon$$

Logo, $x_n \not\rightarrow a$ em todas as normas $\|\cdot\|_k$ com $k \geq k_0$. Além disso, se $(y_n) \subset X$ for outra sequência (nesse caso, temos que $y_n \not\rightarrow a$), temos, pelo Corolário 3.1, que existe pelo menos uma norma $\|\cdot\|_{p_0}$ na qual $y_n \not\rightarrow a$, e, pelo fato das normas formarem uma sequência crescente, temos que $y_n \not\rightarrow a$ em todas as normas $\|\cdot\|_p$ com $p \geq p_0$. Logo, não existe nenhuma outra sequência $(y_n) \subset X$ tal que $y_n \rightarrow a$ em todas as seminormas $\|\cdot\|_k$ com $k \geq k_0$. Então, $a \notin X_{k_0}$ (e, além disso, $a \notin X_k$ para todo $k \geq k_0$), logo $a \notin \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$, o que é absurdo, pois contradiz uma das

hipóteses iniciais! Portanto, concluímos que: se $a \in \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$, então $a \in X$. Com

isso, segue que $\bigcap_{k=0}^{\infty} X_k \subseteq X$. Então, $X = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$.

□

Observação 3.3. No caso específico em que X é um espaço de Banach, gerado pela família de seminormas $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|$, temos que X_k é o complemento de $(X, \|\cdot\|_k) = (X, \|\cdot\|) = X$, logo $X_k = X$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\bigcap_{k=0}^{\infty} X_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} X = X$. Nesse caso específico, a igualdade obtida no item (iv) do Teorema 3.5 poderia ser obtida imediatamente.

Exemplo 3.11. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado cuja fronteira seja suave. Temos, então, que o fecho $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto. Consideremos o espaço $C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$ das funções $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^∞ . Uma função f é de classe C^∞ se, e somente se, f é de classe C^k para todo $k \geq 1$, então temos que:

$$C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$$

Definamos a seguinte derivada parcial de $f(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x))$ de ordem $p_1 + \dots + p_n$:

$$\frac{\partial^{p_1+\dots+p_n} f}{\partial^{p_1} x_1 \dots \partial^{p_n} x_n}(x) = \left(\frac{\partial^{p_1+\dots+p_n} f_1}{\partial^{p_1} x_1 \dots \partial^{p_n} x_n}(x), \dots, \frac{\partial^{p_1+\dots+p_n} f_d}{\partial^{p_1} x_1 \dots \partial^{p_n} x_n}(x) \right)$$

Consideremos $\mathbb{R}^d$ com a norma euclidiana, então:

$$\left\| \frac{\partial^{p_1+\dots+p_n} f}{\partial^{p_1} x_1 \dots \partial^{p_n} x_n}(x) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial^{p_1+\dots+p_n} f_1}{\partial^{p_1} x_1 \dots \partial^{p_n} x_n}(x) \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial^{p_1+\dots+p_n} f_d}{\partial^{p_1} x_1 \dots \partial^{p_n} x_n}(x) \right)^2}$$

Cada espaço $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$ das funções $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^k é um espaço de Banach com a norma $\|f\|_k = \max_{\substack{p_1+\dots+p_n \leq k \\ x \in \overline{\Omega}}} \left\| \frac{\partial^{p_1+\dots+p_n} f}{\partial^{p_1} x_1 \dots \partial^{p_n} x_n}(x) \right\|$ (ver [8], página 92). Logo,

$C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$ é um espaço de Fréchet cuja topologia é gerada pela sequência de normas $\|\cdot\|_k$.

Exemplo 3.12. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado cuja fronteira seja suave e consideremos o espaço $C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$ das funções $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^∞ . Seja $H^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ o espaço das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ com derivadas parciais de ordem até k tais que $\int_{\Omega} \left\| \frac{\partial^{p_1+\dots+p_n} f}{\partial^{p_1} x_1 \dots \partial^{p_n} x_n}(x) \right\|^2 dx < \infty$. Cada espaço $H^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ é um espaço de Banach com a norma definida por $\|f\|_k^2 = \sum_{p_1+\dots+p_n \leq k} \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial^{p_1+\dots+p_n} f}{\partial^{p_1} x_1 \dots \partial^{p_n} x_n}(x) \right\|^2 dx$ e, além disso,

$C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d) = \bigcap_{k=1}^{\infty} H^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ (ver [8], página 92). Logo, $C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d) = \bigcap_{k=1}^{\infty} H^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ é um espaço de Fréchet cuja topologia é gerada pela sequência de normas $\|\cdot\|_k$.

Observação 3.4. Sempre que nos referirmos a um espaço de Fréchet graduado $X = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$, estaremos nos referindo a um espaço de Fréchet X cuja topologia é gerada por uma sequência crescente de normas $\|\cdot\|_k$, onde X_k é o completamento de $(X, \|\cdot\|_k)$. Quando não explicitarmos que X é um espaço de Fréchet cuja topologia é gerada por uma sequência crescente de normas, a notação $X = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$ deixará implícito que X é um espaço desse tipo.

Quando um espaço graduado tem sua topologia natural (gerada pela métrica da Proposição 3.4) induzida por uma sequência crescente de normas, é possível definir uma topologia equivalente a partir de outra métrica. Vamos começar com as seguintes definições:

Definição 3.8. Seja $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Dizemos que $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tem **suporte ilimitado** se $\sup\{k | \alpha_k \neq 0\} = \infty$.

Exemplo 3.13. As sequências $\alpha_k = \frac{1}{k^2}$ e $\beta_k = \frac{1}{2^k}$ têm suporte ilimitado, pois $\alpha_k \neq 0$ e $\beta_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

O resultado a seguir apresenta duas possíveis métricas equivalentes, diferentes da usual, para um espaço graduado gerado por uma família enumerável não-decrescente de normas:

Proposição 3.4. Seja $X = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$ um espaço de Fréchet graduado gerado por uma família não-decrescente de normas $\|\cdot\|_k$ (onde X_k é o completamento de X com relação à norma $\|\cdot\|_k$). Seja $\alpha_k \geq 0$ uma sequência com suporte ilimitado tal que $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty$, e sejam $r_1, r_2 > 0$ números positivos quaisquer. Então, as distâncias

$$d_1(x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r_1, \|x - y\|_k\} \quad (3.1)$$

e

$$d_2(x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r_2, \|x - y\|_k\} \quad (3.2)$$

são métricas equivalentes em X . Dessa forma, os espaços métricos (X, d_1) e (X, d_2) possuem a mesma topologia.

Demonstração. Temos que:

- Para todo $x \in X$, tem-se:

$$d_1(x, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r_1, \|x - x\|_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r_1, 0\} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot 0 = 0$$

- Se $x \neq y$, temos que $x - y \neq 0$, logo $\|x - y\|_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (pois cada $\|\cdot\|_k$ é uma norma). Como (α_k) é uma sequência de termos não-negativos com suporte ilimitado, temos que $\alpha_k > 0$ para infinitos valores de k , então $\alpha_k \min\{r_1, \|x - y\|_k\} > 0$ para infinitos valores de k . Portanto, segue que:

$$d_1(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r_1, \|x - y\|_k\} > 0$$

- Para quaisquer $x, y \in X$, tem-se:

$$d_1(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r_1, \|x - y\|_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r_1, \|y - x\|_k\} = d_1(y, x)$$

- Sejam $x, y, z \in X$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que:

– Se $r_1 \leq \|x - z\|_k$, $r_1 \leq \|x - y\|_k$ e $r_1 \leq \|y - z\|_k$, temos que:

$$\min\{r_1, \|x - z\|_k\} = r_1 \leq r_1 + r_1 = \min\{r_1, \|x - y\|_k\} + \min\{r_1, \|y - z\|_k\}$$

– Se $r_1 \geq \|x - z\|_k$, $r_1 \leq \|x - y\|_k$ e $r_1 \leq \|y - z\|_k$, temos que:

$$\begin{aligned} \min\{r_1, \|x - z\|_k\} &= \|x - z\|_k \leq r_1 \leq r_1 + r_1 \\ &= \min\{r_1, \|x - y\|_k\} + \min\{r_1, \|y - z\|_k\} \end{aligned}$$

– Se $r_1 \leq \|x - z\|_k$, $r_1 \geq \|x - y\|_k$ e $r_1 \leq \|y - z\|_k$, temos que:

$$\min\{r_1, \|x - z\|_k\} = r_1 \leq \|x - y\|_k + r_1 = \min\{r_1, \|x - y\|_k\} + \min\{r_1, \|y - z\|_k\}$$

– Se $r_1 \leq \|x - z\|_k$, $r_1 \leq \|x - y\|_k$ e $r_1 \geq \|y - z\|_k$, temos que:

$$\min\{r_1, \|x - z\|_k\} = r_1 \leq r_1 + \|y - z\|_k = \min\{r_1, \|x - y\|_k\} + \min\{r_1, \|y - z\|_k\}$$

– Se $r_1 \geq \|x - z\|_k$, $r_1 \geq \|x - y\|_k$ e $r_1 \leq \|y - z\|_k$, temos que:

$$\begin{aligned} \min\{r_1, \|x - z\|_k\} &= \|x - z\|_k \leq r_1 \leq \|x - y\|_k + r_1 \\ &= \min\{r_1, \|x - y\|_k\} + \min\{r_1, \|y - z\|_k\} \end{aligned}$$

– Se $r_1 \geq \|x - z\|_k$, $r_1 \leq \|x - y\|_k$ e $r_1 \geq \|y - z\|_k$, temos que:

$$\begin{aligned} \min\{r_1, \|x - z\|_k\} &= \|x - z\|_k \leq r_1 \leq r_1 + \|y - z\|_k \\ &= \min\{r_1, \|x - y\|_k\} + \min\{r_1, \|y - z\|_k\} \end{aligned}$$

– Se $r_1 \leq \|x - z\|_k$, $r_1 \geq \|x - y\|_k$ e $r_1 \geq \|y - z\|_k$, temos que:

$$\begin{aligned} \min\{r_1, \|x - z\|_k\} &= r_1 \leq \|x - z\|_k \leq \|x - y\|_k + \|y - z\|_k \\ &= \min\{r_1, \|x - y\|_k\} + \min\{r_1, \|y - z\|_k\} \end{aligned}$$

– Se $r_1 \geq \|x - z\|_k$, $r_1 \geq \|x - y\|_k$ e $r_1 \geq \|y - z\|_k$, temos que:

$$\begin{aligned} \min\{r_1, \|x - z\|_k\} &= \|x - z\|_k \leq \|x - y\|_k + \|y - z\|_k \\ &= \min\{r_1, \|x - y\|_k\} + \min\{r_1, \|y - z\|_k\} \end{aligned}$$

Portanto, $\min\{r_1, \|x - z\|_k\} \leq \min\{r_1, \|x - y\|_k\} + \min\{r_1, \|y - z\|_k\}$ para quaisquer

$x, y, z \in X$ e $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\alpha_k \min\{r_1, \|x - z\|_k\} \leq \alpha_k \min\{r_1, \|x - y\|_k\} + \alpha_k \min\{r_1, \|y - z\|_k\}$$

para quaisquer $x, y, z \in X$ e $k \in \mathbb{N}$. Dessa maneira, concluímos que:

$$\begin{aligned} d_1(x, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r_1, \|x - z\|_k\} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k \min\{r_1, \|x - y\|_k\} + \alpha_k \min\{r_1, \|y - z\|_k\}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r_1, \|x - y\|_k\} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r_1, \|y - z\|_k\} \\ &= d_1(x, y) + d_1(y, z) \end{aligned}$$

Então, d_1 é uma métrica. A demonstração de que d_2 é uma métrica é completamente análoga. Agora, vamos verificar que estas métricas são equivalentes. Sem perda de generalidade, consideremos que $r_1 > r_2$. Temos que:

- Se $\|x - y\|_k \leq r_2$, temos que $\|x - y\|_k \leq r_2 < r_1$, logo:

$$\alpha_k \min\{r_1, \|x - y\|_k\} = \alpha_k \|x - y\|_k = \alpha_k \min\{r_2, \|x - y\|_k\} \quad (3.3)$$

- Se $r_2 < \|x - y\|_k \leq r_1$, temos que:

$$\begin{aligned} \alpha_k \min\{r_2, \|x - y\|_k\} &= \alpha_k r_2 \leq \alpha_k \|x - y\|_k = \alpha_k \min\{r_1, \|x - y\|_k\} \\ &\leq \alpha_k r_1 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \alpha_k r_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \alpha_k \min\{r_2, \|x - y\|_k\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

- Se $r_1 < \|x - y\|_k$, temos que $r_2 < r_1 < \|x - y\|_k$, logo:

$$\begin{aligned} \alpha_k \min\{r_2, \|x - y\|_k\} &= \alpha_k r_2 \leq \alpha_k r_1 = \alpha_k \min\{r_1, \|x - y\|_k\} = \alpha_k r_1 \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \alpha_k r_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \alpha_k \min\{r_2, \|x - y\|_k\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

A partir da equação (3.3) e das desigualdades (3.4) e (3.5), obtemos:

$$\alpha_k \min\{r_2, \|x - y\|_k\} \leq \alpha_k \min\{r_1, \|x - y\|_k\} \leq \frac{r_1}{r_2} \cdot \alpha_k \min\{r_2, \|x - y\|_k\} \quad (3.6)$$

para quaisquer $x, y \in X$ e para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto:

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r_2, \|x - y\|_k\} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r_1, \|x - y\|_k\} = d_1(x, y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r_1, \|x - y\|_k\} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r_2} \cdot \alpha_k \min\{r_2, \|x - y\|_k\} \right) \\ &= \frac{r_1}{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r_2, \|x - y\|_k\} = \frac{r_1}{r_2} \cdot d_2(x, y) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Então, pela desigualdade (3.7), concluímos que $d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \frac{r_1}{r_2} \cdot d_2(x, y)$ para quaisquer $x, y \in X$. Pelo Exemplo 1.5, temos que as métricas d_1 e d_2 são equivalentes. Pelo Teorema 1.1, concluímos que os espaços métricos (X, d_1) e (X, d_2) possuem a mesma topologia. $\square$

Na proposição a seguir, veremos que, em um espaço graduado gerado por uma sequência não-decrescente de normas, esse tipo de métrica estabelecido na proposição anterior gera exatamente a mesma topologia que é gerada pela métrica usual:

Proposição 3.5. Seja $X = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$ um espaço de Fréchet graduado. Seja $\alpha_k \geq 0$ uma sequência com suporte ilimitado tal que $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty$. Seja $r > 0$ um número positivo. Então:

(1) A topologia de X é induzida pela seguinte distância:

$$d_E(x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r, \|x - y\|_k\} \quad (3.8)$$

(2) $x_n \in X$ é uma sequência de Cauchy no espaço métrico (X, d_E) se, e somente se, (x_n) é uma sequência de Cauchy com relação a todas as normas $\|\cdot\|_k$.

(3) $x_n \rightarrow x$ em (X, d_E) se, e somente se, $x_n \rightarrow x$ em todos os espaços X_k .

Demonstração. (1) De acordo com a Proposição 3.4, temos que são equivalentes as métricas $d_E(x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r, \|x - y\|_k\}$ e $d_1(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{1, \|x - y\|_k\}$. Logo, se provarmos que a métrica d_1 é equivalente à métrica usual

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k \|x - y\|_k}{1 + \|x - y\|_k}, \quad (3.9)$$

obteremos que as métricas d e d_E são equivalentes. Temos que:

- Se $\|x - y\|_k \leq 1$, então, para quaisquer $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \alpha_k \min\{1, \|x - y\|_k\} &= \frac{\alpha_k \|x - y\|_k}{2} \leq \frac{\alpha_k \|x - y\|_k}{1 + \|x - y\|_k} \\ &\leq \alpha_k \|x - y\|_k = \alpha_k \min\{1, \|x - y\|_k\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

- Se $1 < \|x - y\|_k$, então $\frac{\|x - y\|_k}{1 + \|x - y\|_k} > \frac{1}{2}$, daí obtemos, para quaisquer $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \alpha_k \min\{1, \|x - y\|_k\} &= \frac{\alpha_k}{2} \leq \frac{\alpha_k \|x - y\|_k}{1 + \|x - y\|_k} \leq \alpha_k \\ &= \alpha_k \min\{1, \|x - y\|_k\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Portanto, em ambos os casos, temos que, para quaisquer $x, y \in X$ e $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2} \cdot \alpha_k \min\{1, \|x - y\|_k\} \leq \frac{\alpha_k \|x - y\|_k}{1 + \|x - y\|_k} \leq \alpha_k \min\{1, \|x - y\|_k\} \quad (3.12)$$

Então, para quaisquer $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \alpha_k \min\{1, \|x - y\|_k\} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k \|x - y\|_k}{1 + \|x - y\|_k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{1, \|x - y\|_k\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Portanto, para quaisquer $x, y \in X$, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{2} \cdot d_1(x, y) \leq d_E(x, y) \leq d_1(x, y) \quad (3.14)$$

Pelo Exemplo 1.5, as métricas d_1 e d_E são equivalentes, então as métricas d e d_E são equivalentes. Pelo Teorema 1.1, concluímos que as métricas d e d_E geram a mesma topologia! Então, concluímos que a topologia de X também é induzida pela distância

$$d_E(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{r, \|x - y\|_k\}.$$

- (2) Como as métricas d e d_E geram a mesma topologia, temos que x_n é uma sequência de Cauchy no espaço métrico (X, d_E) se, e somente se, x_n é uma sequência de Cauchy no espaço métrico (X, d) . Além disso, pela Proposição 3.1, temos que x_n é uma sequência de Cauchy no espaço métrico (X, d) se, e somente se, x_n é uma

sequência de Cauchy com relação a todas as normas $\|\cdot\|_k$. Portanto, concluímos que x_n é uma sequência de Cauchy no espaço métrico (X, d_E) se, e somente se, x_n é uma sequência de Cauchy com relação a todas as normas $\|\cdot\|_k$.

- (3) Como as métricas d e d_E geram a mesma topologia, temos que $x_n \rightarrow x$ no espaço métrico (X, d_E) se, e somente se, $x_n \rightarrow x$ no espaço métrico (X, d) . Além disso, pela Proposição 3.2, temos que $x_n \rightarrow x$ no espaço métrico (X, d) se, e somente se, $x_n \rightarrow x$ com relação a todas as normas $\|\cdot\|_k$. Assim, temos que $x_n \rightarrow x$ no espaço métrico (X, d_E) se, e somente se, $x_n \rightarrow x$ com relação a todas as normas $\|\cdot\|_k$. Concluímos, então, que $x_n \rightarrow x$ no espaço métrico (X, d_E) se, e somente se, $x_n \rightarrow x$ em todos os espaços X_k .

□

A seguir, definiremos uma classe particular de espaços graduados:

Definição 3.9. Seja X um espaço de Fréchet graduado. Um ponto $x \in X$ é **controlado** se existe uma constante $c_0(x)$ tal que $\|x\|_k \leq (c_0(x))^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definição 3.10. Um espaço de Fréchet graduado X é **standard** se, para todo $x \in X$, existem uma constante $c_1(x)$ e uma sequência $x_n \in X$ tais que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|_k = 0, \quad (3.15)$$

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \|x_n\|_k \leq c_1(x) \|x\|_k, \quad (3.16)$$

e cada ponto x_n é controlado:

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \|x_n\|_k \leq (c_0(x_n))^k \quad (3.17)$$

Exemplo 3.14. Seja X um espaço de Banach, então X é um espaço de Fréchet graduado (ver Exemplo 3.10) cuja topologia é gerada pela norma $\|\cdot\|$ (ou pela família de normas $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|$). Se $x = 0$, ao tomar a sequência $x_n = 0$ verificamos facilmente a validade de tudo o que diz a Definição 3.10. Sendo assim, consideremos a partir de agora que $x \neq 0$ (e $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Para todo $x \in X$, existe uma sequência $x_n \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, é válida a equação (3.15). Agora, observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq \|x\| + \|x_n - x\|$. Como $x_n \rightarrow x$, temos que existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| \leq \|x_{n_0} - x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $\|x_n\| \leq \|x\| + \|x_n - x\| \leq \|x\| + \|x_{n_0} - x\|$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $c_1(x) = 1 + \frac{\|x_{n_0} - x\|}{\|x\|}$, obtemos:

$$\|x_n\| \leq \|x\| + \|x_{n_0} - x\| = \left(1 + \frac{\|x_{n_0} - x\|}{\|x\|}\right) \|x\| = c_1(x) \|x\|$$

Ou seja, $\|x_n\|_k \leq c_1(x) \|x\|_k$ para quaisquer $n, k \in \mathbb{N}$, então é válida a desigualdade (3.16). Por fim, note que:

- Se $\|x_n\| \geq 1$, então $\|x_n\|_k = \|x_n\| \leq (\|x_n\|)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- Se $\|x_n\| < 1$, então $(\|x_n\|)^k < \|x_n\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\frac{1}{\|x_n\|} > 1$. Logo, $\left(\frac{1}{\|x_n\|}\right)^k = \frac{1}{(\|x_n\|)^k} > 1 > \|x_n\|$, ou seja, $\|x_n\|_k = \|x_n\| \leq \left(\frac{1}{\|x_n\|}\right)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para todo $x_n \in X$, definamos $c_0(x_n) = \max\left\{\|x_n\|, \frac{1}{\|x_n\|}\right\}$. Então, $\|x_n\|_k \leq (c_0(x_n))^k$ para quaisquer $n, k \in \mathbb{N}$, pelo que a desigualdade (3.17) é válida. Portanto, X é standard.

Exemplo 3.15. Os espaços $C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$ e $C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d) = \bigcap_{k=1}^{\infty} H^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ (dos Exemplos 3.11 e 3.12) são standard (ver [8], página 96).

Como veremos no final deste Capítulo 3 e também ao longo do Capítulo 5, os teoremas da aplicação inversa que foram estabelecidos em espaços de Fréchet (a saber, os teoremas de Nash-Moser e Ekeland) são válidos para espaços de Fréchet graduados que satisfazem determinadas condições.

Agora que já estamos familiarizados com a topologia dos espaços de Fréchet (bem como dos espaços graduados), iremos estabelecer, nas próximas seções, algumas noções de Cálculo nesses espaços.

3.3 Integral de curvas em espaços de Fréchet

Nesta seção, vamos definir a integral de curvas $f : [a, b] \longrightarrow F$ com valores em um espaço de Fréchet (generalizando as integrais de caminhos retificáveis em espaços de Banach). A proposição a seguir (seguindo as ideias do artigo [13]) estabelece a definição e as propriedades básicas da integral:

Proposição 3.6. Sejam F um espaço de Fréchet e $f : [a, b] \longrightarrow F$ um caminho. Então, existe um único elemento $\int_a^b f(t) dt \in F$ tal que:

(1) Para todo funcional linear contínuo $L : F \longrightarrow \mathbb{R}$, tem-se:

$$L \left(\int_a^b f(t) \, dt \right) = \int_a^b L(f(t)) \, dt$$

(2) Para toda seminorma contínua $\| \cdot \| : F \longrightarrow \mathbb{R}$, tem-se:

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \, dt$$

(3) Se $a \leq c \leq b$, então:

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^c f(t) \, dt + \int_c^b f(t) \, dt$$

(4) Para quaisquer funções $f, g : [a, b] \longrightarrow F$, tem-se:

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt + \int_a^b g(t) \, dt$$

(5) Para quaisquer $f : [a, b] \longrightarrow F$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se:

$$\int_a^b (\lambda f(t)) \, dt = \lambda \int_a^b f(t) \, dt$$

(Nesse caso, dizemos que $\int_a^b f(t) \, dt \in F$ é a **integral** de $f : [a, b] \longrightarrow F$.)

Demonstração. Seja $f : [a, b] \longrightarrow F$ uma função contínua e linear por partes, ou seja, existe uma partição $P = \{a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = b\}$ de $[a, b]$ tal que f é linear em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ ($1 \leq i \leq k$). Consideremos o espaço $PL([a, b], F)$ das funções $f : [a, b] \longrightarrow F$ que são lineares por partes. Então, o espaço $C([a, b], F)$ é o fecho de $PL([a, b], F)$ (podemos pensar isso de forma intuitiva: por exemplo, no caso em que $F = \mathbb{R}$, uma curva contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser aproximada por uma sequência de curvas lineares por partes, então estendemos o mesmo argumento a qualquer espaço de Fréchet). Vamos, primeiramente, definir a integral nas funções lineares por partes, da seguinte maneira (pela chamada regra trapezoidal):

$$I_a^b(f) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} [f(t_{i-1}) + f(t_i)](t_i - t_{i-1})$$

Temos que:

- (1) Para todo funcional linear contínuo $L : F \longrightarrow \mathbb{R}$ e para toda $f \in PL([a, b], F)$, tem-se:

$$\begin{aligned} L(I_a^b(f)) &= L\left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{2}[f(t_{i-1}) + f(t_i)](t_i - t_{i-1})\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}L(f(t_{i-1}) + f(t_i))(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}[L(f(t_{i-1})) + L(f(t_i))](t_i - t_{i-1}) = I_a^b(L(f)) \end{aligned}$$

- (2) Para toda seminorma contínua $\|\cdot\| : F \longrightarrow \mathbb{R}$ e para toda $f \in PL([a, b], F)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \|I_a^b(f)\| &= \left\|\sum_{i=1}^k \frac{1}{2}[f(t_{i-1}) + f(t_i)](t_i - t_{i-1})\right\| \leq \sum_{i=1}^k \left\|\frac{1}{2}[f(t_{i-1}) + f(t_i)](t_i - t_{i-1})\right\| \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}[\|f(t_{i-1}) + f(t_i)\|](t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}[\|f(t_{i-1})\| + \|f(t_i)\|](t_i - t_{i-1}) = I_a^b(\|f\|) \end{aligned}$$

- (3) Se $f \in PL([a, b], F)$, tomemos uma partição $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = b$ tal que $t_j = c$ para algum $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Logo:

$$\begin{aligned} I_a^b(f) &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}[f(t_{i-1}) + f(t_i)](t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^j \frac{1}{2}[f(t_{i-1}) + f(t_i)](t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=j+1}^k \frac{1}{2}[f(t_{i-1}) + f(t_i)](t_i - t_{i-1}) \\ &= I_a^c(f) + I_c^b(f) \end{aligned}$$

(4) Se $f, g \in PL([a, b], F)$, então:

$$\begin{aligned}
 I_a^b(f + g) &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} [(f + g)(t_{i-1}) + (f + g)(t_i)](t_i - t_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} [f(t_{i-1}) + g(t_{i-1}) + f(t_i) + g(t_i)](t_i - t_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} [f(t_{i-1}) + f(t_i)](t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} [g(t_{i-1}) + g(t_i)](t_i - t_{i-1}) \\
 &= I_a^b(f) + I_a^b(g)
 \end{aligned}$$

(5) Se $f \in PL([a, b], F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então:

$$\begin{aligned}
 I_a^b(\lambda f) &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} [(\lambda f)(t_{i-1}) + (\lambda f)(t_i)](t_i - t_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} [\lambda(f(t_{i-1}) + f(t_i))](t_i - t_{i-1}) \\
 &= \lambda \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} [f(t_{i-1}) + f(t_i)](t_i - t_{i-1}) = \lambda I_a^b(f)
 \end{aligned}$$

Desta forma, temos que a integral $I_a^b(f)$ é um funcional linear contínuo no espaço $PL([a, b], F)$, satisfazendo as condições (1) a (5). Pelo Teorema da Extensão Linear (Teorema 1.9), podemos estender a integral para o espaço das funções contínuas $C([a, b], F)$, ou seja, se $f_n : [a, b] \rightarrow F$ é uma sequência de funções em $PL([a, b], F)$ que converge uniformemente para uma função $f \in C([a, b], F)$, então a integral de f é definida por:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_a^b(f_n)$$

Então:

(1) Para todo funcional linear contínuo $L : F \rightarrow \mathbb{R}$ e para toda $f \in C([a, b], F)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 L \left(\int_a^b f(t) dt \right) &= L \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} I_a^b(f_n) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L(I_a^b(f_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_a^b(L(f_n)) \\
 &= \int_a^b L(f(t)) dt
 \end{aligned}$$

(2) Para toda seminorma contínua $\| \cdot \| : F \rightarrow \mathbb{R}$ e para todo caminho $f \in$

$C([a, b], F)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(t) dt \right\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow +\infty} I_a^b(f_n) \right\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|I_a^b(f_n)\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_a^b(\|f_n\|) \\ &= \int_a^b \|f(t)\| dt \end{aligned}$$

(3) Se $f \in C([a, b], F)$, tomemos uma partição $P = \{a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = b\}$ tal que $t_j = c$ para algum $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Logo:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_a^b(f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_a^c(f_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} I_c^b(f_n) = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

(4) Se $f, g \in C([a, b], F)$, então:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(t) + g(t)) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} I_a^b(f_n + g_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_a^b(f_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} I_a^b(g_n) \\ &= \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt \end{aligned}$$

(5) Se $f \in C([a, b], F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então:

$$\int_a^b (\lambda f(t)) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_a^b(\lambda f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda I_a^b(f_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} I_a^b(f_n) = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

Logo, a integral é um funcional linear contínuo no espaço $C([a, b], F)$, satisfazendo as condições (1) a (5). Para completar a demonstração, falta apenas mostrar a unicidade da integral. Supondo que existam dois elementos $I_1, I_2 \in F$ que satisfazem as condições acima, temos pela condição (1) que $L(I_1) = \int_a^b L(f(t)) dt$ e $L(I_2) = \int_a^b L(f(t)) dt$ para todo funcional linear contínuo $L : F \rightarrow \mathbb{R}$. Logo, para todo funcional linear contínuo $L : F \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se $L(I_1 - I_2) = L(I_1) - L(I_2) = \int_a^b L(f(t)) dt - \int_a^b L(f(t)) dt = 0$. Pelo Corolário 3.3, segue que $I_1 - I_2 = 0$, ou seja, $I_1 = I_2$. Portanto, se $f \in C([a, b], F)$ é uma função contínua, existe um único elemento $\int_a^b f(t) dt \in F$ satisfazendo as propriedades (1) a (5). $\square$

3.4 Derivada de Gateaux

Nesta seção, introduziremos o cálculo diferencial para funções definidas entre espaços de Fréchet. Apresentaremos a seguir (com base no artigo [13]) a definição de derivada, diversos exemplos e propriedades:

Definição 3.11. Sejam F e G espaços de Fréchet e seja $U \subset F$ aberto. Dizemos que uma função $f : U \subset F \rightarrow G$ é **Gateaux-diferenciável em $x_0 \in U$ na direção do vetor $h \in F$** se existir o seguinte limite:

$$Df(x_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

Neste caso, $Df(x_0)(h)$ é denominado **derivada de Gateaux** de f em x_0 na direção de $h \in F$. Dizemos que f é **Gateaux-diferenciável em U** se f for Gateaux-diferenciável em todos os pontos de U (na direção de todos os vetores $h \in F$).

Observação 3.5. Em alguns casos específicos de funções $f : E \rightarrow F$ entre espaços de Banach, para não haver confusão com a derivada de Fréchet, denotaremos a derivada de Gateaux por $D_G f(x_0)(h)$.

Observação 3.6. Assim, a derivada de Gateaux generaliza para espaços de Fréchet a noção de **derivada direcional** de aplicações entre espaços euclidianos. Dessa forma, também podemos usar a notação $\frac{\partial f}{\partial h}(x_0)$ para a derivada de Gateaux em x_0 na direção do vetor h .

Exemplo 3.16. Sejam F e G espaços de Fréchet e seja $L : F \rightarrow G$ uma aplicação linear contínua. Então, por definição, temos que:

$$\begin{aligned} DL(x_0)(h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(x_0 + th) - L(x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(x_0 + th - x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(th)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot L(h)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} L(h) = L(h) \end{aligned}$$

Portanto, toda aplicação linear contínua entre espaços de Fréchet é Gateaux-diferenciável e sua derivada é ela própria, ou seja, $DL(x_0) = L$ para todo $x_0 \in F$. Isto generaliza para espaços de Fréchet o Exemplo 2.3.

Exemplo 3.17. Seja F um espaço de Fréchet e seja $f : (a, b) \rightarrow F$ (ou seja, seja f uma curva em um espaço de Fréchet). Definimos a derivada de f como sendo a derivada de Gateaux de f no ponto $t \in (a, b)$ na direção do vetor $1 \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = Df(t)(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + 1 \cdot h) - f(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h}$$

Assim, temos uma definição análoga ao caso dos espaços de Banach (ver Exemplo 2.7).

Exemplo 3.18. Sejam F e G espaços de Fréchet e seja $f : F \rightarrow G$ uma função constante definida em um aberto $U \subset F$: $f(x) = c \in G$, para todo $x \in U$. Então, para

quaisquer $x_0 \in U$ e $h \in F$, temos:

$$DF(x_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c - c}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

Ou seja, a derivada de qualquer função constante entre espaços de Fréchet é nula.

Nos espaços de Banach, podemos fazer uma comparação entre as derivadas de Fréchet e Gateaux. Observe os dois exemplos a seguir:

Exemplo 3.19. Sejam E e F espaços de Banach, seja $U \subset E$ aberto e seja $f : U \subset E \rightarrow F$ uma aplicação Fréchet-diferenciável em $x_0 \in U$, ou seja, existe uma aplicação linear contínua $A = Df(x_0) : E \rightarrow F$ tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + R(x_0, h), \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Então, podemos escrever o seguinte:

$$f(x_0 + th) = f(x_0) + Df(x_0)(th) + R(x_0, th), \text{ onde } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, th)\|}{\|th\|} = 0$$

Como $Df(x_0) : E \rightarrow F$ é linear, temos que $Df(x_0)(th) = t \cdot Df(x_0)(h)$. Logo:

$$f(x_0 + th) = f(x_0) + t \cdot Df(x_0)(h) + R(x_0, th)$$

Portanto:

$$t \cdot Df(x_0)(h) = f(x_0 + th) - f(x_0) + R(x_0, th),$$

de onde segue que:

$$Df(x_0)(h) = \frac{f(x_0 + th) - f(x_0) - R(x_0, th)}{t}$$

Tomando o limite com $t \rightarrow 0$, segue que:

$$\begin{aligned} Df(x_0)(h) &= \lim_{t \rightarrow 0} Df(x_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0) - R(x_0, th)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(x_0, th)}{t} \\ &= D_G f(x_0)(h) - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(x_0, th)}{t} \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(x_0, th)}{t} &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, th)\|}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, th)\| \|h\|}{|t| \|h\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, th)\|}{\|th\|} \|h\| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, th)\|}{\|th\|} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \|h\| = \lim_{th \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, th)\|}{\|th\|} \cdot \|h\| = 0 \cdot \|h\| = 0\end{aligned}$$

Então, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(x_0, th)}{t} = 0$. Dessa forma, concluímos que:

$$Df(x_0)(h) = D_G f(x_0)(h) - 0 = D_G f(x_0)(h)$$

Portanto, se f é Fréchet-diferenciável em $x_0 \in U$, então f é Gateaux-diferenciável em $x_0 \in U$ e as derivadas de Fréchet e Gateaux são iguais.

Exemplo 3.20. A recíproca do Exemplo 3.19 não é verdadeira, ou seja, nem toda função Gateaux-diferenciável entre espaços de Banach é Fréchet-diferenciável. Para ilustrar isso, vamos observar um exemplo do Cálculo de duas variáveis. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Podemos calcular a derivada direcional (ou seja, a derivada de Gateaux) de f na origem, na direção de qualquer vetor $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$:

- Se $v = (0, 0)$, então:

$$D_G f(0, 0)(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

- Se $v = (0, b) \neq (0, 0)$, então:

$$\begin{aligned}D_G f(0, 0)(v) &= \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + tv) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, bt) - 0}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, bt)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0(bt)^2}{0^2 + (bt)^4}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0\end{aligned}$$

- Se $v = (a, b) \neq (0, 0)$ com $a \neq 0$, então:

$$\begin{aligned}D_G f(0, 0)(v) &= \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + tv) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(at, bt) - 0}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(at, bt)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{at(bt)^2}{(at)^2 + (bt)^4}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{ab^2 t^3}{a^2 t^2 + b^4 t^4}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ab^2 t^2}{a^2 t^2 + b^4 t^4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ab^2}{a^2 + b^4 t^2} = \frac{ab^2}{a^2} = \frac{b^2}{a}\end{aligned}$$

Então, f é Gateaux-diferenciável na origem (na direção de qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^2$). Porém, f não é contínua na origem! Verificaremos isso da maneira usual do Cálculo: tomaremos dois caminhos que passam pela origem e observaremos que os limites de $f(x, y)$ com $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ sobre esses caminhos serão diferentes.

- Tomemos o caminho γ_1 definido por $\gamma_1(t) = (t, 0)$ (ou seja, o eixo x). Temos que:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \gamma_1}} f(x, y) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ (x,y) = (t,0)}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot 0^2}{t^2 + 0^4} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

- Tomemos o caminho γ_2 definido por $\gamma_2(t) = (t^2, t)$ (ou seja, uma parábola). Temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \gamma_2}} f(x, y) &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ (x,y) = (t^2, t)}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot t^2}{(t^2)^2 + t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{t^4 + t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{2t^4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Então, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe, portanto f não é contínua em $(0, 0)$. Logo, pelo Corolário 2.1, concluímos que f não é Fréchet-diferenciável em $(0, 0)$.

Alguns exemplos interessantes de derivadas de Gateaux ocorrem nas aplicações $P : C^\infty([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ (que associam cada função $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ a uma outra função $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$):

Exemplo 3.21. Considere a aplicação $P : C^\infty([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ definida por $P(f) = f^2 = f \cdot f$ para toda função $f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$, ou seja, $(P(f))(x) = f(x) \cdot f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Temos que:

$$\begin{aligned} DP(f)(h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f + th) - P(f)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f + th) \cdot (f + th) - f \cdot f}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^2 + 2tfh + t^2h^2 - f^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2tfh + t^2h^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (2fh + th^2) \\ &= 2fh + 0 = 2fh \end{aligned}$$

Então, $P(f) = f^2$ é Gateaux-diferenciável e $DP(f)(h) = 2fh$.

Exemplo 3.22. Considere a aplicação $P : C^\infty([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ definida por $P(f) = f^3 = f \cdot f \cdot f$ para toda função $f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$, ou seja, $(P(f))(x) = (f(x))^3$

para todo $x \in [a, b]$. Temos que:

$$\begin{aligned} DP(f)(h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f+th) - P(f)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f+th)^3 - f^3}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^3 + 3tf^2h + 3t^2fh^2 + t^3h^3 - f^3}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3tf^2h + 3t^2fh^2 + t^3h^3}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (3f^2h + 3tfh^2 + th^3) = 3f^2h + 0 + 0 = 3f^2h \end{aligned}$$

Então, $P(f) = f^3$ é Gateaux-diferenciável e $DP(f)(h) = 3f^2h$.

Exemplo 3.23. Considere a aplicação $P : C^\infty([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ definida por $P(f) = f'$ para toda função $f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$, ou seja, $(P(f))(x) = f'(x)$ para todo $x \in [a, b]$ (que é o operador derivação). Temos que:

$$\begin{aligned} DP(f)(h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f+th) - P(f)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f+th)' - f'}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f' + th' - f'}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{th'}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} h' = h' \end{aligned}$$

Então, $P(f) = f'$ é Gateaux-diferenciável e $DP(f)(h) = h'$.

Exemplo 3.24. Considere a aplicação $P : C^\infty([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ definida por $P(f) = f^{(n)}$ para toda função $f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$, ou seja, $(P(f))(x) = f^{(n)}(x)$ para todo $x \in [a, b]$ (derivada n -ésima). Temos que:

$$\begin{aligned} DP(f)(h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f+th) - P(f)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f+th)^{(n)} - f^{(n)}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{(n)} + th^{(n)} - f^{(n)}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{th^{(n)}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} h^{(n)} = h^{(n)} \end{aligned}$$

Então, $P(f) = f^{(n)}$ é Gateaux-diferenciável e $DP(f)(h) = h^{(n)}$.

Exemplo 3.25. Considere a aplicação $P : C^\infty([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ definida por $P(f) = ff'$ para toda função $f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$, ou seja, $(P(f))(x) = f(x) \cdot f'(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Temos que:

$$\begin{aligned} DP(f)(h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f+th) - P(f)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f+th)(f+th)' - ff'}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f+th)(f' + th') - ff'}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ff' + tfh' + tf'h + t^2f'h' - ff'}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tfh' + tf'h + t^2f'h'}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (fh' + f'h + tf'h') = fh' + f'h + 0 \\ &= fh' + f'h \end{aligned}$$

Então, $P(f) = ff'$ é Gateaux-diferenciável e $DP(f)(h) = fh' + f'h$.

Apresentamos a seguir a primeira das (muitas) propriedades da derivada de Gateaux:

Proposição 3.7. Sejam F e G espaços de Fréchet e $U \subset F$ aberto. Sejam $f, g : U \rightarrow G$ funções Gateaux-diferenciáveis em $x_0 \in F$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, $f + \lambda g : U \rightarrow G$ é Gateaux-diferenciável em x_0 e $D(f + \lambda g)(x_0) = Df(x_0) + \lambda Dg(x_0)$.

Demonstração. Vamos verificar se a derivada de Gateaux

$$D(f + \lambda g)(x_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f + \lambda g)(x_0 + th) - (f + \lambda g)(x_0)}{t}$$

existe e a qual expressão ela é igual:

$$\begin{aligned} D(f + \lambda g)(x_0)(h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f + \lambda g)(x_0 + th) - (f + \lambda g)(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) + \lambda g(x_0 + th) - f(x_0) - \lambda g(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0) + \lambda g(x_0 + th) - \lambda g(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda g(x_0 + th) - \lambda g(x_0)}{t} \\ &= Df(x_0)(h) + \lambda \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + th) - g(x_0)}{t} \\ &= Df(x_0)(h) + \lambda Dg(x_0)(h) = (Df(x_0) + \lambda Dg(x_0))(h) \end{aligned}$$

Então, $f + \lambda g$ é Gateaux-diferenciável e $D(f + \lambda g)(x_0) = Df(x_0) + \lambda Dg(x_0)$. $\square$

3.5 Resultados importantes do Cálculo em espaços de Fréchet

Nesta seção, apresentaremos (seguindo as ideias do artigo [13]) diversos resultados envolvendo derivadas e integrais em espaços de Fréchet, tais como o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia.

Definição 3.12. Sejam F e G espaços de Fréchet e seja $U \subset F$ aberto. Dizemos que uma função $f : U \subset F \rightarrow G$ é **de classe C^1** se f é Gateaux-diferenciável e a aplicação

$$\begin{aligned} Df : U \times F &\rightarrow G \\ (x_0, h) &\mapsto Df(x_0, h) = Df(x_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \end{aligned}$$

é contínua.

Teorema 3.6. *Sejam X um espaço topológico e F um espaço de Fréchet. Seja $f : X \times [a, b] \longrightarrow F$ uma aplicação contínua. Definamos a aplicação $g : X \longrightarrow F$ por*

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) \, dt.$$

Então, g é contínua.

Demonstração. Como F é um espaço de Fréchet, os abertos de F são construídos a partir das seminormas. Então podemos expressar a continuidade de f em termos de cada uma delas. Sendo $x_0 \in X$ e $t \in (a, b)$, como f é contínua em cada $(x_0, t) \in X \times [a, b]$, temos que: para todo $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $U \subset X$ de x_0 tal que, para toda seminorma $\|\cdot\|$ em F , para quaisquer $x \in U$ e $t \in [a, b]$ tem-se $\|f(x, t) - f(x_0, t)\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Então:

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(x_0)\| &= \left\| \int_a^b f(x, t) \, dt - \int_a^b f(x_0, t) \, dt \right\| = \left\| \int_a^b (f(x, t) - f(x_0, t)) \, dt \right\| \\ &\leq \int_a^b \|f(x, t) - f(x_0, t)\| \, dt < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} \, dt = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

Logo, g é contínua. □

Lema 3.1 (Composição entre curva e funcional linear). *Seja F um espaço de Fréchet. Se $f : (a, b) \longrightarrow F$ é uma curva de classe C^1 e $L : F \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, então a função $L \circ f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 e neste caso tem-se:*

$$(L \circ f)'(t) = L(f'(t))$$

Demonstração. Como $f : (a, b) \longrightarrow F$ é uma curva de classe C^1 e $L : F \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, temos que f e L são Gateaux-diferenciáveis (ver Exemplos 3.16 e 3.17), logo:

$$\begin{aligned} D(L \circ f)(t)(h) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(L \circ f)(t+sh) - (L \circ f)(t)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(f(t+sh)) - L(f(t))}{h} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} L \left(\frac{f(t+sh) - f(t)}{h} \right) = L \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(t+sh) - f(t)}{h} \right) \\ &= L(Df(t)(h)) \end{aligned}$$

Então, a função $L \circ f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ é Gateaux-diferenciável. Neste caso, temos:

$$(L \circ f)'(t) = D(L \circ f)(t)(1) = L(Df(t)(1)) = L(f'(t))$$

Considere agora a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} D(L \circ f) : (a, b) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, h) &\longmapsto D(L \circ f)(t)(h) = L(Df(t)(h)) \end{aligned}$$

Como f é de classe C^1 , temos que a aplicação

$$\begin{aligned} Df : (a, b) \times \mathbb{R} &\longrightarrow F \\ (t, h) &\longmapsto Df(t)(h) \end{aligned}$$

é contínua. Como L é contínua e $D(L \circ f) = L(Df)$, concluímos que $D(L \circ f)$ é contínua. Portanto, a função $L \circ f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 . $\square$

Teorema 3.7 (Teorema Fundamental do Cálculo para curvas em espaços de Fréchet). *Seja F um espaço de Fréchet. Se $f : (a, b) \longrightarrow F$ é uma curva de classe C^1 , então:*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1, temos que $(L \circ f)'(t) = L(f'(t))$ para todo funcional linear contínuo $L : F \longrightarrow \mathbb{R}$. Como $L \circ f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que:

$$(L \circ f)(b) - (L \circ f)(a) = \int_a^b (L \circ f)'(t) dt \Rightarrow L(f(b)) - L(f(a)) = \int_a^b L(f'(t)) dt$$

Pela linearidade de L , no lado esquerdo da equação, e pela definição de integral em espaços de Fréchet (ver Proposição 3.6), no lado direito da equação, obtemos:

$$L(f(b) - f(a)) = L\left(\int_a^b f'(t) dt\right)$$

Logo:

$$L\left(f(b) - f(a) - \int_a^b f'(t) dt\right) = 0, \quad \forall L : F \longrightarrow \mathbb{R}$$

Portanto, pelo Corolário 3.3, segue que:

$$f(b) - f(a) - \int_a^b f'(t) dt = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$$

$\square$

Lema 3.2. Sejam F e G espaços de Fréchet. Se $f : F \longrightarrow G$ é uma função de classe C^1 e são fixados $x_0, h \in F$, então a curva $g : \mathbb{R} \longrightarrow G$ definida por $g(t) = f(x_0 + th)$ é de classe C^1 em t e $g'(t) = Df(x_0 + th)(h)$.

Demonstração. Temos que:

$$\begin{aligned} g'(t) &= Dg(t)(1) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(t+k) - g(t)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th + kh) - f(x_0 + th)}{k} \\ &= Df(x_0 + th)(h) \end{aligned}$$

□

Teorema 3.8. *Sejam F e G espaços de Fréchet e seja $U \subseteq F$ aberto. Se $f : U \subseteq F \rightarrow G$ é uma função de classe C^1 e o caminho de x_0 a $x_0 + h$ está contido em U , então:*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \int_0^1 Df(x_0 + th)(h) dt$$

Demonstração. Seja $g : [0, 1] \rightarrow G$ a curva definida por $g(t) = f(x_0 + th)$. Pelo Lema 3.2, temos que g é de classe C^1 , então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 3.7), temos que:

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt$$

Pelo Lema 3.2, temos que $g'(t) = Df(x_0 + th)(h)$. E, por definição, temos que $g(1) = f(x_0 + h)$ e $g(0) = f(x_0)$. Logo:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \int_0^1 Df(x_0 + th)(h) dt$$

□

Lema 3.3. *Sejam F e G espaços de Fréchet, $U \subset F$ aberto, $f : U \subset F \rightarrow G$ de classe C^1 , $x_0 \in U$, $h \in F$ e $c \in \mathbb{K}$. Então:*

$$Df(x_0)(ch) = cDf(x_0)(h)$$

Demonstração. Primeiramente, consideremos $c = 0$. Neste caso, temos que:

$$\begin{aligned} Df(x_0)(0 \cdot h) &= Df(x_0)(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 0t) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0 = 0 \cdot Df(x_0)(h) \end{aligned}$$

Agora, consideremos que $c \neq 0$. Pela definição da derivada de Gateaux, temos que:

$$Df(x_0)(ch) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + cth) - f(x_0)}{t} = c \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + cth) - f(x_0)}{ct}$$

Substituindo $u = ct$, temos que se $t \rightarrow 0$ temos $u \rightarrow 0$. Logo:

$$Df(x_0)(ch) = c \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + cth) - f(x_0)}{ct} = c \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + uh) - f(x_0)}{u} = cDf(x_0)(h)$$

□

Lema 3.4. Sejam F e G espaços de Fréchet e seja $U \subseteq F$ aberto. Se $f : U \subseteq F \rightarrow G$ é uma função de classe C^1 , $x_0 \in U$, $h \in F$ e $t \in \mathbb{R}$ é pequeno, então:

$$\frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = \int_0^1 Df(x_0 + u th)(h) du$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.8, temos que:

$$\int_0^1 Df(x_0 + u th)(th) du = f(x_0 + 1 \cdot th) - f(x_0 + 0 \cdot th) = f(x_0 + th) - f(x_0)$$

Dividindo os dois lados por t , obtemos (com o auxílio do Lema 3.3):

$$\int_0^1 Df(x_0 + u th)(h) du = \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

□

Teorema 3.9. Sejam F e G espaços de Fréchet, $U \subset F$ aberto, $f : U \subset F \rightarrow G$ de classe C^1 , $x_0 \in U$ e $h_1, h_2 \in F$. Então:

$$Df(x_0)(h_1 + h_2) = Df(x_0)(h_1) + Df(x_0)(h_2)$$

Demonstração. Temos que:

$$f(x_0 + t(h_1 + h_2)) - f(x_0) = [f(x_0 + th_1 + th_2) - f(x_0 + th_1)] + [f(x_0 + th_1) - f(x_0)]$$

Pelo Lema 3.4, temos que

$$\frac{f(x_0 + th_1) - f(x_0)}{t} = \int_0^1 Df(x_0 + u th_1)(h_1) du$$

e

$$\frac{f(x_0 + th_1 + th_2) - f(x_0 + th_1)}{t} = \int_0^1 Df(x_0 + th_1 + u th_2)(h_2) du.$$

Somando estas duas equações, obtemos:

$$\frac{f(x_0 + th_1 + th_2) - f(x_0)}{t} = \int_0^1 Df(x_0 + u th_1)(h_1) du + \int_0^1 Df(x_0 + th_1 + u th_2)(h_2) du$$

Então:

$$\begin{aligned} Df(x_0)(h_1 + h_2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th_1 + th_2) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\int_0^1 Df(x_0 + u h_1)(h_1) \, du + \int_0^1 Df(x_0 + th_1 + u h_2)(h_2) \, du \right] \end{aligned}$$

Considere $X = \mathbb{R}$, então, pelo Teorema 3.6, as integrais no lado direito da equação são contínuas na variável $t \in X$. Então, segue que:

$$\begin{aligned} Df(x_0)(h_1 + h_2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\int_0^1 Df(x_0 + u h_1)(h_1) \, du + \int_0^1 Df(x_0 + th_1 + u h_2)(h_2) \, du \right] \\ &= \int_0^1 Df(x_0 + 0)(h_1) \, du + \int_0^1 Df(x_0 + 0)(h_2) \, du \\ &= \int_0^1 Df(x_0)(h_1) \, du + \int_0^1 Df(x_0)(h_2) \, du \\ &= (1 - 0)Df(x_0)(h_1) + (1 - 0)Df(x_0)(h_2) \\ &= Df(x_0)(h_1) + Df(x_0)(h_2) \end{aligned}$$

□

Observação 3.7. O Lema 3.3 e o Teorema 3.9 mostram que a derivada de Gateaux $Df(x_0)$ é uma aplicação linear.

Proposição 3.8. Sejam F e G espaços de Fréchet, $U \subset F$ aberto e $f : U \subset F \rightarrow G$ uma função de classe C^1 no ponto $x_0 \in U$. Então, a aplicação

$$\begin{aligned} Df(x_0) : F &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto Df(x_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração. Como f é de classe C^1 , temos que a aplicação

$$\begin{aligned} Df : U \times F &\longrightarrow G \\ (x_0, h) &\longmapsto Df(x_0, h) = Df(x_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \end{aligned}$$

é contínua. Logo, fixando $x_0 \in U$, temos pelo Teorema 1.8 que a aplicação

$$\begin{aligned} Df(x_0) : F &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto Df(x_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \end{aligned}$$

é contínua.

□

Lema 3.5. Sejam F e G espaços de Fréchet e seja $U \subset F$ aberto. Por simplicidade, suponhamos que U seja convexo. Seja $f : U \subset F \longrightarrow G$ uma função contínua. Então f é de classe C^1 se, e somente se, existe uma aplicação contínua $L : U \times U \times F \longrightarrow G$, com $L(x_0, x_1)(h)$ linear na variável h , tal que para quaisquer $x_0, x_1 \in U$ tem-se

$$f(x_1) - f(x_0) = L(x_0, x_1)(x_1 - x_0).$$

Neste caso, sempre temos que:

$$Df(x_0)(h) = L(x_0, x_0)(h)$$

Demonstração. Ver [13], páginas 77 e 78. □

Teorema 3.10 (Regra da Cadeia para funções Gateaux-diferenciáveis). *Sejam E, F e G espaços de Fréchet e sejam $f : E \longrightarrow F$ e $g : F \longrightarrow G$ funções de classe C^1 . Então, $g \circ f : E \longrightarrow G$ é de classe C^1 e*

$$D(g \circ f)(x_0)(h) = Dg(f(x_0))Df(x_0)(h).$$

Demonstração. Por simplicidade, suponhamos que f e g sejam definidas em abertos convexos, ou seja, sejam $U \subset E$ e $V \subset F$ abertos. Pelo Lema 3.5, como f e g são de classe C^1 , temos que existem aplicações contínuas $L : U \times U \times E \longrightarrow F$, $L(x_0, x_1)(h)$, e $M : V \times V \times F \longrightarrow G$, $M(y_0, y_1)(k)$, lineares nas variáveis h e k , respectivamente, tais que

$$f(x_1) - f(x_0) = L(x_0, x_1)(x_1 - x_0), \quad \forall x_0, x_1 \in U,$$

e

$$g(y_1) - g(y_0) = M(y_0, y_1)(y_1 - y_0), \quad \forall y_0, y_1 \in V.$$

Definamos uma função $N : U \times U \times E \longrightarrow G$ por

$$N(x_0, x_1)(h) = M(f(x_0), f(x_1))(L(x_0, x_1)(h)).$$

Então, N é contínua, pois é obtida substituindo a terceira variável da aplicação M (que é contínua) pela aplicação L (que é contínua). Além disso, temos que, para quaisquer $h_1, h_2 \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} N(x_0, x_1)(\lambda h_1 + h_2) &= M(f(x_0), f(x_1))(L(x_0, x_1)(\lambda h_1 + h_2)) \\ &= M(f(x_0), f(x_1))(\lambda L(x_0, x_1)(h_1) + L(x_0, x_1)(h_2)) \\ &= \lambda N(x_0, x_1)(h_1) + N(x_0, x_1)(h_2) \end{aligned}$$

Logo, N é linear na terceira variável. Sendo $y_0 = f(x_0)$ e $y_1 = f(x_1)$, consideremos que $y_0, y_1 \in V$. Temos que:

$$\begin{aligned} g(f(x_1)) - g(f(x_0)) &= g(y_1) - g(y_0) = M(y_0, y_1)(y_1 - y_0) \\ &= M(f(x_0), f(x_1))(f(x_1) - f(x_0)) \\ &= M(f(x_0), f(x_1))(L(x_0, x_1)(x_1 - x_0)) = N(x_0, x_1)(x_1 - x_0) \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 3.5, $g \circ f$ é de classe C^1 . Também pelo Lema 3.5, temos que $Df(x_0)(h) = L(x_0, x_0)(h)$, $Dg(y_0)(k) = M(y_0, y_0)(k)$ e $D(g \circ f)(x_0)(h) = N(x_0, x_0)(h)$. Então:

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(x_0)(h) &= N(x_0, x_0)(h) = M(f(x_0), f(x_0))(L(x_0, x_0)(h)) \\ &= Dg(f(x_0))(Df(x_0)(h)) \end{aligned}$$

□

Corolário 3.4. Sejam F e G espaços de Fréchet. Se $f : [a, b] \rightarrow F$ uma curva de classe C^1 e $g : F \rightarrow G$ é uma função de classe C^1 , então $g \circ f : [a, b] \rightarrow G$ é uma curva de classe C^1 e

$$(g \circ f)'(t) = Dg(f(t))f'(t).$$

Demonstração. Por definição (ver Exemplo 3.17), temos que $(g \circ f)'(t) = D(g \circ f)(t)(1)$ e $f'(t) = Df(t)(1)$. Pela Regra da Cadeia (Teorema 3.10), concluímos que $g \circ f$ é de classe C^1 e:

$$D(g \circ f)(t)(1) = Dg(f(t))Df(t)(1) \Rightarrow (g \circ f)'(t) = Dg(f(t))f'(t)$$

□

3.6 Motivação para o Teorema da Aplicação Inversa em espaços de Fréchet

Como a topologia dos espaços de Fréchet é bastante diferente da topologia dos espaços de Banach, é natural questionar se o Teorema da Aplicação Inversa apresentado em espaços de Banach (Teorema 2.6) seria válido para espaços de Fréchet em geral ou não. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 3.26. Seja $C^\infty([-1, 1], \mathbb{R})$ o espaço das funções $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe

C^∞ , que é um espaço de Fréchet. Considere o seguinte operador diferencial:

$$P : C^\infty([-1, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty([-1, 1], \mathbb{R}), \quad P(f) = f - xf \frac{df}{dx} = f - xff'$$

Temos que:

$$\begin{aligned} DP(f)(h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f + th) - P(f)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f + th) - x(f + th)(f + th)' - f + xff'}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{th - x(f + th)(f' + th') + xff'}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{th - xff' - txfh' - txhf' - t^2xhh' + xff'}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{th - txfh' - txhf' - t^2xhh'}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (h - xfh' - xhf' - txhh') \\ &= h - xfh' - xhf' = h - xf \frac{dh}{dx} - xh \frac{df}{dx} \end{aligned}$$

Logo, P é Gateaux-diferenciável e de classe C^∞ . Se $f = 0$, temos que $P(0) = 0 - x \cdot 0 \cdot 0' = 0$ e que $DP(0)(h) = h - x \cdot 0 \cdot h' - x \cdot h \cdot 0' = h$, ou seja, $DP(0) = \text{Id}$ (a aplicação identidade). Assim, $P(0) = 0$ e $DP(0)$ é um isomorfismo. Se o Teorema da Aplicação Inversa para espaços de Banach (Teorema 2.6) fosse válido para espaços de Fréchet, existiriam vizinhanças $U, V \subset C^\infty([-1, 1], \mathbb{R})$ da origem (ou seja, da função identicamente nula) tais que $P : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo. Porém, vamos mostrar que isso não ocorre! Seja $g_n = \frac{1}{n} + \frac{x^n}{n!}$. Então, $g_n \rightarrow 0$ em $C^\infty([-1, 1], \mathbb{R})$, assim toda vizinhança V da origem contém elementos dessa sequência. Por outro lado, para toda vizinhança U da origem em $C^\infty([-1, 1], \mathbb{R})$ e para toda função $f \in U$, temos que f pode ser escrita como uma série de potências em torno de $x_0 = 0$, ou seja:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Logo:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

Então:

$$\begin{aligned}
 P(f) &= f - xff' = f \cdot (1 - xf') = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \cdot \left(1 - x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \right) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k \right) \\
 &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \cdot (1 - a_1 x - 2a_2 x^2 - 3a_3 x^3 + \dots) \\
 &= a_0 + (a_1 - a_0 a_1)x + (a_2 - a_1^2 - a_0 a_2)x^2 + (a_3 - 3a_1 a_2 - 3a_0 a_3)x^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Se $P(f) = g_n$, então:

$$a_0 + (a_1 - a_0 a_1)x + (a_2 - a_1^2 - 2a_0 a_2)x^2 + (a_3 - 3a_1 a_2 - 3a_0 a_3)x^3 + \dots = \frac{1}{n} + \frac{x^n}{n!}$$

Note que:

- Se $n = 1$, temos que:

$$a_0 + (a_1 - a_0 a_1)x + (a_2 - a_1^2 - 2a_0 a_2)x^2 + \dots = 1 + x$$

Então, $a_0 = 1$ e $a_1 - a_0 a_1 = 1$, logo $a_1 - a_0 a_1 = a_1 - a_1 = 0$, daí $0 = 1$, o que é absurdo! Assim, concluímos que $P(f) \neq g_1$.

- Se $n = 2$, temos que:

$$a_0 + (a_1 - a_0 a_1)x + (a_2 - a_1^2 - 2a_0 a_2)x^2 + \dots = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}$$

Então, $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 - a_0 a_1 = 0$ e $a_2 - a_1^2 - 2a_0 a_2 = \frac{1}{2}$. Substituindo $a_0 = \frac{1}{2}$ na segunda equação, obtemos $a_1 = 0$. Logo, substituindo $a_0 = \frac{1}{2}$ e $a_1 = 0$ na terceira equação, obtemos $a_2 - 0 - a_2 = \frac{1}{2}$, ou seja, $0 = \frac{1}{2}$, o que é absurdo! Daí, temos que $P(f) \neq g_2$.

- De modo análogo, podemos mostrar que $P(f) \neq g_3$, $P(f) \neq g_4$ e assim por diante.

Procedendo dessa forma, concluímos que não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(f) = g_n$. Então, para toda vizinhança U da origem, temos que $g_n \notin P(U)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $V = P(U)$ não é uma vizinhança da origem, o que é um absurdo! Isso mostra que o Teorema da Aplicação Inversa clássico para espaços de Banach não vale para espaços de Fréchet.

Outros contraexemplos podem ser consultados no artigo de Hamilton [13], páginas 123 a 129. Esses contraexemplos motivaram a busca por versões do teorema da aplicação inversa que fossem válidas para espaços de Fréchet que não englobassem apenas os espaços de Banach. Desde a década de 1950, matemáticos como Nash [26], Schwartz [30], Moser [24] e Sergeraert [31] deram contribuições importantes nessa linha de pesquisa, e um ponto importante dessa trajetória foi o artigo publicado por Hamilton [13] em 1982, que apresenta com detalhes a construção do Teorema da Aplicação Inversa de Nash-Moser.

3.7 O Teorema da Aplicação Inversa de Nash-Moser

A seguir, estabeleceremos algumas definições que serão importantes para a compreensão do enunciado do Teorema da Aplicação Inversa de Nash-Moser. Exemplos e mais detalhes podem ser consultados no artigo de Hamilton [13]:

Definição 3.13. Sejam $\{\|\cdot\|_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\|\cdot\|'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ duas seqüências de seminormas em um espaço graduado X . Dizemos que $\{\|\cdot\|_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\|\cdot\|'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são **mansamente equivalentes** de grau r e base b se $\|f\|_n \leq C\|f\|'_{n+r}$ e $\|f\|'_n \leq C\|f\|_{n+r}$ para todo $n \geq b$ (onde a constante C pode depender de n).

Definição 3.14. Sejam F e G espaços de Fréchet graduados. Dizemos que uma aplicação linear $L : F \longrightarrow G$ satisfaz uma **estimativa mansa** de grau r e base b se

$$\|L(f)\|_n \leq C\|f\|_{n+r}$$

para todo $n \geq b$ (onde a constante C pode depender de n). Dizemos que L é **mansa** se satisfaz uma estimativa mansa para algum r e para algum b .

Definição 3.15. Sejam F e G espaços graduados. Dizemos que F é uma **soma direta mansa** de G se existem aplicações lineares mansas $L : F \longrightarrow G$ e $M : G \longrightarrow F$ tais que a composição $M \circ L : F \longrightarrow F$ é a identidade.

Definição 3.16. Seja B um espaço de Banach. Dizemos que um espaço graduado F é **manso** se ele é uma soma direta mansa do espaço $\Sigma(B)$ das seqüências exponencialmente decrescentes em B (ver Exemplo 3.10).

Definição 3.17. Sejam F e G espaços graduados, $U \subset F$ aberto e $P : U \longrightarrow G$ uma aplicação (não-linear). Dizemos que P satisfaz uma **estimativa mansa** de grau r e base b se

$$\|P(f)\|_n \leq C(1 + \|f\|_{n+r})$$

para quaisquer $f \in U$ e $n \geq b$ (onde a constante C pode depender de n). Dizemos que P é uma aplicação **mansa** se P é contínua e satisfaz uma estimativa mansa em uma vizinhança de cada ponto de U .

Teorema 3.11 (Teorema da Aplicação Inversa de Nash-Moser). *Sejam F e G espaços mansos, $U \subset F$ um aberto e $P : U \rightarrow G$ uma aplicação suave mansa. Suponha que a equação para a derivada, $DP(f)(h) = k$, possui uma única solução $h \in VP(f)(k)$ para quaisquer $f \in U$ e $k \in G$, e suponha que a família de inversas $VP : U \times G \rightarrow F$ é uma aplicação suave mansa. Então, P é localmente invertível e cada inversa local P^{-1} é uma aplicação suave mansa.*

Demonstração. Ver [13], páginas 171 a 187. □

A demonstração deste teorema é construída a partir de um algoritmo cujo limite resulta na aplicação inversa que se deseja obter (esse processo é chamado por Ekeland [8] de “procedimento de iteração de Newton”), e essa demonstração é muito longa, sendo formada por uma sequência de quase 30 resultados (cujas demonstrações não são triviais). Para mais detalhes sobre o enunciado e a prova do Teorema da Aplicação Inversa de Nash-Moser, sugerimos consultar o artigo de Hamilton [13], páginas 65 a 187. Aplicações deste teorema à Geometria Riemanniana e às Equações Diferenciais Parciais, bem como generalizações que já eram conhecidas no começo da década de 1980, podem ser encontradas em [13], páginas 187 a 221.

Um resultado mais forte (e cuja demonstração é, curiosamente, menos complicada) foi demonstrado por Ekeland [8] em 2011, e sua demonstração é o foco do último capítulo deste trabalho. Antes de chegar lá, vamos estabelecer, no próximo capítulo, alguns resultados importantes que nos ajudarão a entender essa demonstração.

Capítulo 4

Resultados de Teoria da Medida e Análise Não-Linear

Neste quarto capítulo, vamos apresentar alguns resultados de Medida e Integração para séries numéricas (Teorema da Convergência Monótona, Lema de Fatou e Teorema da Convergência Dominada), o Princípio Variacional de Ekeland e alguns resultados de Análise Convexa que são utilizados na demonstração do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland.

4.1 Resultados de Medida e Integração para séries

Relembraremos a seguir algumas noções básicas de Medida e Integração, com destaque para as versões para séries do Teorema da Convergência Monótona, do Lema de Fatou e do Teorema da Convergência Dominada (que são bastante desconhecidas se comparadas às versões para integrais em geral). Para um estudo mais aprofundado sobre Medida e Integração, sugerimos consultar [11] ou [17].

Definição 4.1. Seja Ω um conjunto. Um **semi-anel** $\mathcal{S}$ é uma coleção de subconjuntos de Ω tais que:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{S}$;
- (ii) Se $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ então $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$;
- (iii) Se $S_0, S \in \mathcal{S}$ são tais que $S_0 \subseteq S$, então existem $S_1, \dots, S_m \in \mathcal{S}$ disjuntos tais que $S \setminus S_0 = \bigcup_{j=1}^m S_j$. Neste caso da união disjunta, utiliza-se a notação $\bigcup_{j=1}^m S_j = \sum_{j=1}^m S_j$, ou seja, $S \setminus S_0 = \sum_{j=1}^m S_j$.

Exemplo 4.1. Sendo $\Omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (o conjunto dos números naturais), considere a coleção de conjuntos $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Então:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{S}$;
- (ii) Se $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$, então $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{N}$, logo $S_1 \cap S_2 \subseteq \mathbb{N}$, daí $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$.
- (iii) Se $S_0, S \in \mathcal{S}$ são tais que $S_0 \subseteq S$, então $S \setminus S_0 \subseteq \mathbb{N}$, ou seja, $S \setminus S_0 \in \mathcal{S}$. Logo, existe $S_1 = S \setminus S_0 \in \mathcal{S}$ tal que $S \setminus S_0 = \sum_{j=1}^1 S_j$.

Logo, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ é um semi-anel.

Definição 4.2. Seja $\mathcal{S}$ um semi-anel. Uma **medida finitamente aditiva** é uma função $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que se $S_1, \dots, S_n, S \in \mathcal{S}$ e $S = \sum_{i=1}^n S_i$ então $\mu(S) = \sum_{i=1}^n \mu(S_i)$. Uma **medida σ -aditiva** é uma função $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que se $S_n, S \in \mathcal{S}$ e $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ então $\mu(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$.

Exemplo 4.2. Consideremos no semi-anel $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ a **medida de contagem**, ou seja: $\mu(A) = \#A$ se $A \in \mathcal{S}$ é finito e $\mu(A) = +\infty$ se $A \in \mathcal{S}$ é infinito. Temos que:

- A medida de contagem μ é finitamente aditiva, pois se $S_1, \dots, S_n, S \subseteq \mathbb{N}$ e $S = \sum_{i=1}^n S_i$ então $\mu(S) = \mu\left(\sum_{i=1}^n S_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(S_i)$.
- A medida de contagem μ é σ -aditiva, pois se $S_1, \dots, S_n, S \subseteq \mathbb{N}$ e $S = \sum_{i=1}^{\infty} S_i$ então $\mu(S) = \mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S_i)$.

Definição 4.3. Seja Ω um conjunto. A **função indicadora** de $A \subseteq \Omega$ é a função $1_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Definição 4.4. Seja Ω um conjunto e seja $\mathcal{S}$ um semi-anel de subconjuntos de Ω . Dizemos que $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função $\mathcal{S}$ -simples** se

$$h = \sum_{j=1}^m r_j 1_{S_j},$$

onde $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}$, $S_1, \dots, S_m \in \mathcal{S}$ e $S_1, \dots, S_m$ são disjuntos. O **espaço das funções $\mathcal{S}$ -simples** é denotado por

$$\mathcal{H} = \{h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} | h \text{ é } \mathcal{S}\text{-simples}\}.$$

A **integral** de h relativamente a uma medida $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow [0, +\infty)$ é definida por

$$I(h) = \sum_{j=1}^m r_j \mu(S_j).$$

Definição 4.5. Sejam $t_n, t \in [-\infty, +\infty]$. Dizemos que $t_n \nearrow t$ quando $\lim t_n = t$ e $t_n \leq t_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que $t_n \searrow t$ quando $\lim t_n = t$ e $t_n \geq t_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 4.6. Sejam $f_n, f : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty]$. Dizemos que $f_n \nearrow f$ quando $f_n(x) \nearrow f(x)$ para todo $x \in \Omega$. Dizemos que $f_n \searrow f$ quando $f_n(x) \searrow f(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Definição 4.7. Seja $f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ uma função. Definimos a **integral superior** de f por:

$$I^*(f) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} I(h_n) : h_n \in \mathcal{H}, h_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} h_n \geq f \right\}$$

Definição 4.8. Seja Ω um conjunto. Uma **σ -álgebra** em Ω é uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω tal que $\emptyset \in \mathcal{A}$ e tal que dados $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$ tem-se $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ e $A_n^C \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 4.9. Sendo Ω um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra em Ω e $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ uma medida σ -aditiva, dizemos que $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ é um **espaço de medida**.

Definição 4.10. Dizemos que $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ é um **espaço de medida completo** quando dado qualquer $A \in \mathcal{A}$ tal que $\nu(A) = 0$, então para todo $E \subseteq A$ tem-se $E \in \mathcal{A}$.

Exemplo 4.3. Seja $\mathcal{S}$ um semi-anel e seja $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow [0, +\infty]$ uma medida σ -aditiva. A **σ -álgebra de Lebesgue** Λ é uma σ -álgebra tal que $\mathcal{S} \subseteq \Lambda$ e:

(L-1) Se $f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ é do tipo $f = \sum_{n=1}^{\infty} r_n 1_{A_n}$, com $A_n \in \Lambda$ e $r_n \geq 0$ real, então

$$I^*(f) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n I^*(1_{A_n}).$$

(L-2) Definindo $\nu(A) = I^*(1_A)$ para todo $A \in \Lambda$, então $\nu : \Lambda \longrightarrow [0, +\infty]$ é uma medida σ -aditiva tal que o espaço de medida (Ω, Λ, ν) é completo.

(L-3) Se $A \subseteq \Omega$ satisfaz $A \cap S \in \Lambda$ para todo $S \in \mathcal{S}$, então $A \in \Lambda$.

Para uma demonstração detalhada da existência da σ -álgebra de Lebesgue satisfazendo as propriedades (L-1), (L-2) e (L-3), ver [17], páginas 39 a 47.

Definição 4.11. Sejam Ω um conjunto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ou $f : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ uma função. Definamos o seguinte conjunto:

$$[f > r] = \{x \in \Omega : f(x) > r\} = f^{-1}((r, +\infty))$$

Definição 4.12. Seja Ω um conjunto e seja $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra em Ω . Dizemos que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ou $f : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ é **$\mathcal{A}$ -mensurável** (ou **mensurável relativamente a $\mathcal{A}$**) quando para todo $r \in \mathbb{R}$ tem-se $[f > r] \in \mathcal{A}$.

Definição 4.13. Sendo $f : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ uma função Λ -mensurável (ou seja, mensurável relativamente à σ -álgebra de Lebesgue), definimos a **integral** de f por $I(f) = I^*(f)$.

Proposição 4.1. Algumas propriedades da integral de funções Λ -mensuráveis $f : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$:

- (i) Se $f \geq g$, então $I(f) \geq I(g)$.
- (ii) Para toda função Λ -mensurável $f : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ e para toda constante $r > 0$, vale $I(rf) = r \cdot I(f)$.
- (iii) Se $f = \sum_{n=1}^{\infty} r_n 1_{A_n}$, com $r_n \geq 0$ real e $A_n \in \Lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então:

$$I(f) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \mu(A_n)$$

- (iv) Para quaisquer funções Λ -mensuráveis $f_n : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$, tem-se:

$$I\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$$

Demonstração. Ver [17], página 66. □

Exemplo 4.4. Consideremos no semi-anel $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ a medida de contagem, que é σ -aditiva. Consideremos a σ -álgebra de Lebesgue gerada pela medida de contagem. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ uma função qualquer (ou seja, uma sequência numérica de termos positivos). Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $f(n) \in [0, +\infty]$. Definamos

$g : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$ por $g(n) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)1_{\{j\}}(n)$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{j=0}^{\infty} f(j)1_{\{j\}}(n) = \sum_{j=0}^{n-1} f(j)1_{\{j\}}(n) + f(n)1_{\{n\}}(n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} f(j)1_{\{j\}}(n) \\ &= 0 + f(n) + 0 = f(n) \end{aligned}$$

Logo, $f = g$, ou seja, $f(n) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)1_{\{j\}}(n)$. Então:

$$I^*(f) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)I^*(1_{\{j\}}) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)I(1_{\{j\}}) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)\mu(\{j\}) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)$$

Logo, $I(f) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)$. Se os termos da sequência forem denotados por $f(j) = a_j$, então $I(f) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$.

Definição 4.14. Seja $X \subseteq \Omega$. Dizemos que uma propriedade vale **em quase toda parte em** X (o que abreviamos como “vale q.t.p. em X ”) quando existe um conjunto de medida nula $A \subseteq X$ tal que a propriedade vale para todo $x \in X \setminus A$. Quando $X = \Omega$, dizemos simplesmente que a propriedade vale q.t.p. (ou seja, vale em quase toda parte).

Teorema 4.1 (Teorema da Convergência Monótona). *Consideremos funções $f_n, f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ que sejam Λ -mensuráveis.*

- (i) *Se $f_n \nearrow f$ q.t.p. (ou seja, se $f_n(x) \nearrow f(x)$ para quase todo $x \in \Omega$), então $I(f_n) \nearrow I(f)$.*
- (ii) *Se $f_n \searrow f$ q.t.p., com $I(f_1) < +\infty$, então $I(f_n) \searrow I(f)$.*

Demonstração. Ver [17], página 73. □

Teorema 4.2 (Lema de Fatou). *Para qualquer sequência de funções Λ -mensuráveis $f_n : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ vale:*

- (i) $I(\liminf f_n) \leq \liminf I(f_n)$.
- (ii) *Em consequência, se $f_n \rightarrow f$ q.t.p., então vale $I(f) \leq \liminf I(f_n)$.*

Demonstração. Ver [17], página 100. □

Teorema 4.3 (Teorema da Convergência Dominada). *Sejam $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ou $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funções Λ -mensuráveis tais que $f_n \rightarrow f$ q.t.p.. Se existe uma função integrável $g : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ tal que $g \geq |f_n|$ q.t.p., então as funções f_n e f são integráveis e $I(f_n) \rightarrow I(f)$.*

Demonstração. Ver [17], páginas 101 e 102. □

Se considerarmos funções mensuráveis na σ -álgebra de Lebesgue gerada pela medida de contagem em $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, obtemos as versões para séries numéricas do teorema da convergência monótona, do lema de Fatou e do teorema da convergência dominada. Enunciaremos e demonstraremos a seguir esses resultados (ver [32] para mais detalhes), com base na construção da integral que fizemos no Exemplo 4.4.

Teorema 4.4 (Teorema da Convergência Monótona para séries). *Sejam $(a_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ e $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ seqüências de termos não negativos tais que:*

- para todo $k \in \mathbb{N}$, $a_{n,k} \nearrow a_k$ quando $n \rightarrow +\infty$;
- para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma constante $C > 0$ tal que $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \leq C < \infty$.

Então:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$$

Demonstração. Considere a seqüência de funções $f_n : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ definida por $f_n(k) = a_{n,k}$ e considere a função $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ definida por $f(k) = a_k$. Então, temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$, $I(f) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $I(f_n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $a_{n,k} \nearrow a_k$ quando $n \rightarrow +\infty$, ou seja, $f_n \nearrow f$ quando $n \rightarrow +\infty$. Então, pelo Teorema da Convergência Monótona (Teorema 4.1), temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n) = I(f)$. Como $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$, segue que $I(f) = I\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n\right)$, logo $I(f) = I\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n)$. Então:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$$

□

Teorema 4.5 (Segunda versão do Teorema da Convergência Monótona para séries). *Sejam $(a_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ e $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ seqüências de termos não negativos tais que:*

- para todo $k \in \mathbb{N}$, $a_{n,k} \searrow a_k$ quando $n \rightarrow +\infty$;
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_{1,k} < \infty$.

Então:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$$

Demonstração. A demonstração é análoga à do Teorema 4.4, bastando substituir $\nearrow$ por $\searrow$ onde for necessário. $\square$

Teorema 4.6 (Lema de Fatou para séries). *Sejam $(a_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ e $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sequências de termos não negativos tais que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} = a_k$. Então:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} \right) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$$

Demonstração. Considere a sequência de funções $f_n : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ definida por $f_n(k) = a_{n,k}$ e considere a função $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ definida por $f(k) = a_k$. Então, temos que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$, $I(f) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $I(f_n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$. Logo, neste caso, $I(f) = I\left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n\right)$. Pelo Lema de Fatou (Teorema 4.2(i)), temos que $I\left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} I(f_n)$, então $I(f) = I\left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} I(f_n)$. Segue que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} \right) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$$

$\square$

Teorema 4.7 (Teorema da Convergência Dominada para séries). *Sejam $(a_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sequências de termos não negativos tais que:*

- $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$;
- para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} = a_k$;
- para quaisquer $n, k \in \mathbb{N}$, $|a_{n,k}| \leq b_k$.

Então:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Demonstração. Considere a sequência de funções $f_n : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ definida por $f_n(k) = a_{n,k}$ e considere as funções $f, g : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ definidas por $f(k) = a_k$ e $g(k) = b_k$, respectivamente. Então, temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ e $|f_n| \leq g$. Como

$I(g) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$ (por hipótese), temos que g é integrável (pelo Exemplo 4.4). Pelo Teorema da Convergência Dominada (Teorema 4.3), temos que $I(f_n) \rightarrow I(f)$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k. \quad \square$$

4.2 Princípio Variacional de Ekeland

Nesta seção, vamos apresentar algumas noções básicas sobre funções semicontínuas inferiormente (definidas em espaços topológicos de Hausdorff em geral, tais como os espaços métricos) e o Princípio Variacional de Ekeland, o qual é um resultado importante da Teoria dos Pontos Críticos que será utilizado na demonstração do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland. Mais detalhes sobre funções semicontínuas inferiormente e o Princípio Variacional de Ekeland podem ser encontrados nos livros [12] e [37].

Definição 4.15. Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Dizemos que um funcional $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é **semicontínuo inferiormente** se para todo $a \in \mathbb{R}$ o conjunto $[\phi > a] = \phi^{-1}((a, +\infty)) = \{x \in X : \phi(x) > a\}$ é aberto.

Definição 4.16. Um espaço topológico de Hausdorff X é **compacto** se toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura finita.

Teorema 4.8. *Sejam X um espaço topológico compacto e $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional semicontínuo inferiormente. Então:*

- (a) ϕ é limitado inferiormente;
- (b) o ínfimo de ϕ é atingido em um ponto $x_0 \in X$.

Demonstração. (a) Como ϕ é semicontínuo inferiormente, temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $A_n = \{x \in X : \phi(x) > -n\}$ é aberto. Além disso, os conjuntos A_n formam uma cobertura aberta para X . Como X é compacto, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{j=1}^{n_0} A_j$. Então:

$$X = \bigcup_{j=1}^{n_0} A_j = \bigcup_{j=1}^{n_0} \{x \in X : \phi(x) > -j\} = \{x \in X : \phi(x) > -n_0\}$$

Dessa forma, concluímos que $\phi(x) > -n_0$ para todo $x \in X$, ou seja, ϕ é limitada inferiormente.

(b) Seja $l = \inf_{x \in X} \phi(x)$. Então, como $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é limitada inferiormente, temos que $l > -\infty$. Suponhamos que o ínfimo l não seja atingido, ou seja, que não

exista $x \in X$ tal que $\phi(x) = l$. Assim, para todo $x \in X$, temos que $\phi(x) > l + \frac{1}{n}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, temos que:

$$X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in X : \phi(x) > l + \frac{1}{n} \right\} \subseteq X \Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in X : \phi(x) > l + \frac{1}{n} \right\}$$

Como X é compacto, temos que a cobertura aberta formada pelos abertos $B_n = \left\{ x \in X : \phi(x) > l + \frac{1}{n} \right\}$ também possui uma subcobertura finita, ou seja, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{n_1} \left\{ x \in X : \phi(x) > l + \frac{1}{n} \right\} = \left\{ x \in X : \phi(x) > l + \frac{1}{n_1} \right\}$. Isto implica que $\phi(x) > l + \frac{1}{n_1}$ para todo $x \in X$, ou seja, $\inf_{x \in X} \phi(x) \geq l + \frac{1}{n_1}$ (pois o ínfimo é superior ou igual a qualquer cota inferior), daí $l \geq l + \frac{1}{n_1}$, o que é absurdo! Então, concluímos que o ínfimo l é atingido, ou seja, existe $x_0 \in X$ tal que $\inf_{x \in X} \phi(x) = \phi(x_0)$. $\square$

Definição 4.17. Dizemos que uma função $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é **sequencialmente semicontínua inferiormente** se para toda sequência $(x_n) \subset X$ com $\lim x_n = x_0$ tem-se $\phi(x_0) \leq \liminf \phi(x_n)$.

Proposição 4.2. (a) Toda função semicontínua inferiormente $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é sequencialmente semicontínua inferiormente.

(b) Se X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, então toda função sequencialmente semicontínua inferiormente é semicontínua inferiormente.

Demonstração. (a) Seja $(x_n) \subset X$ uma sequência com $\lim x_n = x_0$. Suponhamos inicialmente que $\phi(x_0) < +\infty$. Para cada $\varepsilon > 0$, considere o conjunto aberto $A = \{x \in X : \phi(x) > \phi(x_0) - \varepsilon\}$. Assim, $x_0 \in A$, daí existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \geq n_0$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\phi(x_n) > \phi(x_0) - \varepsilon$. Daí, obtemos que $\liminf \phi(x_n) \geq \phi(x_0) - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, então $\liminf \phi(x_n) \geq \phi(x_0)$. No caso em que $\phi(x_0) = +\infty$, tomemos $A = \{x \in X : \phi(x) > M\}$ para cada $M > 0$, assim $x_0 \in A$. Como A é aberto e $x_n \rightarrow x_0$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $x_n \in A \Rightarrow \phi(x_n) > M$. Logo, $\liminf \phi(x_n) > M$ para todo $M > 0$, ou seja, $\liminf \phi(x_n) = +\infty = \phi(x_0)$. Em ambos os casos, concluímos que se $\lim x_n = x_0$ então $\phi(x_0) \leq \liminf \phi(x_n)$, ou seja, ϕ é sequencialmente semicontínua inferiormente.

(b) Suponhamos que X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade e que ϕ é sequencialmente semicontínua inferiormente. Suponhamos por absurdo que ϕ não seja semicontínua inferiormente, logo $A = \phi^{-1}((a, +\infty)) = \{x \in X : \phi(x) > a\}$ não é aberto, ou seja, $F = A^C = \{x \in X : \phi(x) \leq a\}$ não é fechado. Então, existe $x_0 \in \overline{F} \setminus F$, e neste caso $\phi(x_0) > a$. Como X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, existe uma base enumerável $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de vizinhanças abertas de x_0 . Além disso, como $x_0 \in \overline{F}$,

temos que $F \cap O_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, tomemos $x_n \in F \cap O_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo, para toda vizinhança U de x_0 , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in O_n \subset U$ se $n \geq n_0$. Segue daí que $\lim x_n = x_0$. Como por hipótese ϕ é sequencialmente semicontínua inferiormente, segue que $\phi(x_0) \leq \liminf \phi(x_n)$. Como $x_n \in F$, temos que $\phi(x_n) \leq a$, logo $\liminf \phi(x_n) \leq a$. Então, $a < \phi(x_0) \leq \liminf \phi(x_n) \leq a$, ou seja, $a < a$, o que é impossível! Portanto, se X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade e ϕ é sequencialmente semicontínua inferiormente, então ϕ é semicontínua inferiormente. $\square$

Corolário 4.1. Se X é um espaço métrico, então as noções de função semicontínua inferiormente e função sequencialmente semicontínua inferiormente coincidem.

Demonstração. Como X é um espaço métrico, temos que X é um espaço topológico e satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade (Exemplo 1.9). Então, pela Proposição 4.2, toda função semicontínua inferiormente $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é sequencialmente semicontínua inferiormente e vice-versa. Assim, as duas noções coincidem em espaços métricos. $\square$

Apresentaremos a seguir duas versões do Princípio Variacional de Ekeland:

Teorema 4.9 (Primeira versão do Princípio Variacional de Ekeland). *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Seja $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Então, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in X$ tal que:*

$$\phi(u_\varepsilon) \leq \inf_{x \in X} \phi(x) + \varepsilon \quad (4.1)$$

$$\phi(u_\varepsilon) < \phi(u) + \varepsilon d(u, u_\varepsilon), \quad \forall u \in X \text{ com } u \neq u_\varepsilon \quad (4.2)$$

Demonstração. Ver [37], páginas 29 e 30. $\square$

Teorema 4.10 (Segunda versão do Princípio Variacional de Ekeland). *Seja (X, d) um espaço métrico completo e seja $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional semicontínuo inferiormente e inferiormente limitado. Sejam dados $\varepsilon > 0$ e $\bar{u} \in X$ tais que*

$$\phi(\bar{u}) \leq \inf_{x \in X} \phi(x) + \varepsilon. \quad (4.3)$$

Então, dado $\lambda > 0$, existe $u_\lambda \in X$ tal que:

$$\phi(u_\lambda) \leq \phi(\bar{u}) \quad (4.4)$$

$$d(u_\lambda, \bar{u}) \leq \lambda \quad (4.5)$$

$$\phi(u_\lambda) < \phi(u) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u, u_\lambda), \quad \forall u \neq u_\lambda \quad (4.6)$$

Demonstração. Ver [37], página 30. □

Observação 4.1. Como o Princípio Variacional de Ekeland (em ambas as versões) vale para todo espaço métrico, em particular temos que o Princípio Variacional de Ekeland vale para espaços de Banach e para espaços de Fréchet em geral.

4.3 Funções convexas subdiferenciáveis

No artigo de Ekeland [8], a prova do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland se baseia em alguns resultados auxiliares que são relacionados com a ideia de **subdiferencial de uma função convexa**. Por isso, faremos a seguir uma breve exposição sobre funções convexas subdiferenciáveis. Mais detalhes sobre Análise Convexa e suas aplicações podem ser encontrados, por exemplo, nos livros [1], [28] e [37].

Definição 4.18. Seja X um espaço vetorial topológico. Dizemos que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é **convexa** se $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ para quaisquer $x, y \in X$ e $0 \leq \alpha \leq 1$.

Exemplo 4.5. Seja X um espaço vetorial topológico e seja $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear. Então, T é convexa, pois, para quaisquer $x, y \in X$ e $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$T(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \alpha T(x) + (1 - \alpha)T(y) \leq \alpha T(x) + (1 - \alpha)T(y)$$

Exemplo 4.6. Sendo E um espaço vetorial normado, temos que a função $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|$ (a norma) é convexa, pois, para quaisquer $x, y \in E$ e $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= \|\alpha x + (1 - \alpha)y\| \leq \|\alpha x\| + \|(1 - \alpha)y\| = \alpha\|x\| + (1 - \alpha)\|y\| \\ &= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \end{aligned}$$

Exemplo 4.7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - x^2$. Então, tomando $x = -1$, $y = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, temos que:

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= f\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f(0) = 1 - 0^2 = 1 \\ \bullet \quad \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) &= \frac{1}{2} \cdot f(-1) + \frac{1}{2} \cdot f(1) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Então, tomando $x = -1$, $y = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, temos que $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$. Portanto, $f(x) = 1 - x^2$ não é uma função convexa.

Definição 4.19. Seja X um espaço vetorial topológico e seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Dizemos que $g \in X^*$ (ou seja, $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo) é um **subgradiente** de f em x se g satisfaz a seguinte desigualdade:

$$f(y) \geq f(x) + g(y - x), \quad \forall y \in X$$

O conjunto dos subgradientes de f em x é chamado **subdiferencial** de f e denotado por $\partial f(x)$:

$$\partial f(x) = \{g \in X^* : f(y) \geq f(x) + g(y - x), \quad \forall y \in X\}$$

É possível que $\partial f(x) = \emptyset$. Caso $\partial f(x) \neq \emptyset$, dizemos que f é **subdiferenciável** em x .

Teorema 4.11. *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se f é contínua em $x \in X$, então $\partial f(x) \neq \emptyset$ (ou seja, f é subdiferenciável em x).*

Demonstração. Ver [28], página 34. □

Exemplo 4.8. Seja E um espaço vetorial normado. A função norma $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa (ver Exemplo 4.6) e é contínua em qualquer ponto $x_0 \in E$ (ver Exemplo 1.16). Então, pelo Teorema 4.11, a norma é subdiferenciável em qualquer ponto $x_0 \in E$, ou seja, existe um funcional linear contínuo $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (isto é, $f \in \partial \|\cdot\|(x_0)$) tal que:

$$\|x\| \geq \|x_0\| + f(x - x_0), \quad \forall x \in E$$

Em particular, pela desigualdade triangular temos que:

$$f(x - x_0) \leq \|x\| - \|x_0\| \leq \|x - x_0\|, \quad \forall x \in E$$

Então, para todo $x \in E$, temos que:

$$f(x) = f(x + x_0 - x_0) \leq \|x + x_0 - x_0\| = \|x\|$$

Observação 4.2. Quando não houver dúvida sobre qual é a função convexa cujo subdiferencial estamos considerando, podemos simplificar a notação e escrever:

$$N(x) = \{g \in X^* : f(y) \geq f(x) + g(y - x), \quad \forall y \in X\}$$

Proposição 4.3. Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado, $(X^*, \|\cdot\|_*)$ o espaço dual de X , $y \neq 0$ um elemento qualquer de X e $N(y)$ o subdiferencial da norma no ponto y . Então:

$$f \in N(y) \iff \|f\|_* = 1 \text{ e } f(y) = \|y\|$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $f \in N(y)$. Então, para todo $y \in X$, temos que:

- $-\|y\| = \|0\| - \|y\| \geq f(0 - y) = f(-y) = -f(y) \Rightarrow f(y) \geq \|y\|$
- $\|y\| = 2\|y\| - \|y\| = \|2y\| - \|y\| \geq f(2y - y) = f(y) \Rightarrow f(y) \leq \|y\|$

Então, $f(y) = \|y\|$. Além disso, para quaisquer $x \in X$ e $\lambda > 0$, temos que:

$$\|\lambda x + y\| - \|y\| \geq f(\lambda x + y - y) = f(\lambda x) = \lambda f(x) \Rightarrow f(x) \leq \frac{\|\lambda x + y\| - \|y\|}{\lambda}$$

Logo:

$$f(x) \leq \left\| \frac{\lambda x + y}{\lambda} \right\| - \left\| \frac{y}{\lambda} \right\| \Rightarrow f(x) \leq \left\| x + \frac{y}{\lambda} \right\| - \frac{\|y\|}{\lambda}$$

Tomando $\lambda \rightarrow +\infty$ na desigualdade acima, obtemos:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left\| x + \frac{y}{\lambda} \right\| - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\|y\|}{\lambda} \Rightarrow f(x) \leq \|x\| + 0 \Rightarrow f(x) \leq \|x\|$$

Pela Proposição 1.11, temos que $\|f\|_* = \sup\{\|f(x)\| : x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\}$. Logo:

$$\|f\|_* = \sup\{|f(x)| : x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\|x\| : x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\} = 1$$

Note que $\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1$ e que:

$$\left| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right| = \left| \frac{f(y)}{\|y\|} \right| = \left| \frac{\|y\|}{\|y\|} \right| = 1$$

Então, $\sup\{|f(x)| : x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\} = 1$. Portanto, $\|f\|_* = 1$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\|f\|_* = 1$ e $f(y) = \|y\|$. Então, para qualquer $x \in X$, temos que:

$$\|x\| - \|0\| \geq f(x) \Rightarrow \|x\| \geq f(x)$$

Logo, para qualquer $x \in X$, temos que:

$$\|x\| - \|y\| = \|x\| - f(y) \geq f(x) - f(y) = f(x - y)$$

Portanto, $f \in N(y)$. □

Capítulo 5

O Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland

Neste quinto (e último) capítulo, vamos apresentar o principal resultado deste trabalho: o Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland para aplicações entre espaços de Fréchet, que generaliza o Teorema da Aplicação Inversa de Nash-Moser (Teorema 3.11). O Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland [8] foi publicado em 2011 e sua demonstração se baseia nos resultados discutidos no Capítulo 4, em especial no Princípio Variacional de Ekeland. O desenvolvimento da prova do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland neste capítulo será feito em várias etapas, as quais descreveremos a seguir.

Na primeira seção, demonstraremos um caso particular em espaços de Banach, que é mais forte que o Teorema da Aplicação Inversa do Capítulo 2. A demonstração será desenvolvida a partir de dois resultados preliminares (devidamente estabelecidos no começo dessa seção), do Princípio Variacional de Ekeland e de um dos resultados de funcionais subdiferenciáveis estudados no Capítulo 4.

A segunda seção deste capítulo é a parte mais importante deste trabalho: nela, demonstraremos com detalhes o caso geral do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland para espaços de Fréchet. Serão utilizados o Princípio Variacional de Ekeland e diversos resultados de Análise Convexa, e muitas ideias utilizadas na demonstração do caso particular para espaços de Banach também serão utilizadas na demonstração do caso geral. Ao combinar o primeiro teorema dessa seção com todos os corolários seguintes, obteremos o enunciado completo do Teorema da Aplicação Inversa formulado e demonstrado por Ekeland. Finalizaremos a seção com a demonstração de um Teorema da Função Implícita obtido por Ekeland a partir deste Teorema da Aplicação Inversa.

O capítulo (e consequentemente o trabalho) será finalizado com breves comentários acerca de generalizações e aplicações do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland.

5.1 O caso particular em espaços de Banach

Para compreender a ideia que será utilizada para a demonstração do caso geral do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland, vamos apresentar um caso particular em espaços de Banach (seguindo os passos do artigo de Ekeland [8]). Para começar, apresentaremos dois resultados preliminares:

Proposição 5.1. Seja X um espaço de Banach e sejam $x, y \in X$. Então, existe um funcional linear contínuo $f \in \partial\|\cdot\|(x) = N(x)$ (ou seja, um subdiferencial da norma em x), possivelmente dependendo de y , tal que:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = f(y)$$

Demonstração. Como a norma é subdiferenciável em todos os pontos de X (ver Exemplo 4.8), temos que existe um funcional linear contínuo $f \in N(x)$ tal que:

$$\begin{aligned} \|x + ty\| \geq \|x\| + f(x + ty - x) &\Rightarrow \|x + ty\| - \|x\| \geq f(ty) \\ &\Rightarrow \|x + ty\| - \|x\| \geq tf(y) \\ &\Rightarrow \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \geq f(y) \end{aligned} \quad (5.1)$$

para quaisquer $x, y \in X$ e $t > 0$. Tomando o limite inferior com $t \rightarrow 0$, temos:

$$\liminf_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \geq \liminf_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(y) = f(y) \quad (5.2)$$

Por outro lado, temos (de modo análogo à desigualdade (5.1)) que:

$$\begin{aligned} \|x - ty\| \geq \|x\| + f(x - ty - x) &\Rightarrow \|x - ty\| - \|x\| \geq f(-ty) \\ &\Rightarrow \|x - ty\| - \|x\| \geq -tf(y) \\ &\Rightarrow \frac{\|x - ty\| - \|x\|}{-t} \leq f(y) \\ &\Rightarrow \frac{\|x\| - \|x - ty\|}{t} \leq f(y) \end{aligned} \quad (5.3)$$

para quaisquer $x, y \in X$ e $t > 0$. Então, em particular, temos que:

$$\frac{\|x + ty\| - \|x + ty - ty\|}{t} \leq f(y) \Rightarrow \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \leq f(y) \quad (5.4)$$

para quaisquer $x, y \in X$ e $t > 0$. Tomando o limite superior com $t \rightarrow 0$, temos:

$$\limsup_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \leq \limsup_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(y) = f(y) \quad (5.5)$$

Pelas desigualdades (5.2) e (5.5), concluímos que:

$$f(y) \leq \liminf_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \leq \limsup_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \leq f(y) \quad (5.6)$$

Logo:

$$\boxed{\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = f(y)} \quad (5.7)$$

Portanto, existe um funcional linear contínuo $f \in N(x)$ (subdiferencial da norma em x), possivelmente dependendo de y , tal que $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = f(y)$. $\square$

Lema 5.1. Sejam X e Y espaços de Banach. Suponha que $F : X \rightarrow Y$ é Gateaux-diferenciável. Sejam x e ξ em X e defina uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t) := \|F(x + t\xi)\|, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Então, f possui uma derivada à direita em todos os pontos do seu domínio e existe algum $g \in N(F(x + t\xi))$ tal que:

$$f'_+(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = g(DF(x + t\xi)(\xi))$$

Demonstração. Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \frac{\|F(x + (t+h)\xi)\| - \|F(x + t\xi)\|}{h} \\ &= \frac{\|F(x + t\xi + h\xi)\| - \|F(x + t\xi)\|}{h} \\ &= \frac{\|F(x + t\xi) + F(x + t\xi + h\xi) - F(x + t\xi)\| - \|F(x + t\xi)\|}{h} \end{aligned}$$

Definamos $z(h) = \frac{F(x + t\xi + h\xi) - F(x + t\xi)}{h}$, de modo que $F(x + t\xi + h\xi) - F(x + t\xi) = hz(h)$. Então, a equação acima pode ser escrita como:

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{\|F(x + t\xi) + hz(h)\| - \|F(x + t\xi)\|}{h} \quad (5.8)$$

Como F é Gateaux-diferenciável, temos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} z(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + t\xi + h\xi) - F(x + t\xi)}{h} = DF(x + t\xi)(\xi) \quad (5.9)$$

A princípio, a função z não está definida no ponto $h = 0$. Como existe o limite $\lim_{h \rightarrow 0} z(h)$, definamos $h(0) = \lim_{h \rightarrow 0} z(h) = DF(x + t\xi)(\xi)$ (o que também irá simplificar a notação em alguns passos posteriores). Temos, pela desigualdade triangular, que:

$$\begin{aligned} |||F(x + t\xi) + hz(h)|| - ||F(x + t\xi) + hz(0)||| &\leq \|hz(h) - hz(0)\| \\ &= |h| \|z(h) - z(0)\| \end{aligned} \quad (5.10)$$

Considerando $h > 0$ (daqui em diante), a desigualdade (5.10) pode ser reescrita como:

$$|||F(x + t\xi) + hz(h)|| - ||F(x + t\xi) + hz(0)||| \leq h \|z(h) - z(0)\| \quad (5.11)$$

A partir da desigualdade (5.11), temos:

$$\|F(x + t\xi) + hz(h)\| - \|F(x + t\xi) + hz(0)\| \leq h \|z(h) - z(0)\| \quad (5.12)$$

$$\|F(x + t\xi) + hz(0)\| - \|F(x + t\xi) + hz(h)\| \leq h \|z(h) - z(0)\| \quad (5.13)$$

A partir das desigualdades (5.12) e (5.13), temos, respectivamente:

$$\|F(x + t\xi) + hz(h)\| \leq h \|z(h) - z(0)\| + \|F(x + t\xi) + hz(0)\| \quad (5.14)$$

$$\|F(x + t\xi) + hz(h)\| \geq \|F(x + t\xi) + hz(0)\| - h \|z(h) - z(0)\| \quad (5.15)$$

Combinando a equação (5.8) e a desigualdade (5.14), temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \frac{\|F(x + t\xi) + hz(h)\| - \|F(x + t\xi)\|}{h} \\ &\leq \frac{h \|z(h) - z(0)\| + \|F(x + t\xi) + hz(0)\| - \|F(x + t\xi)\|}{h} \\ &= \|z(h) - z(0)\| + \frac{\|F(x + t\xi) + hz(0)\| - \|F(x + t\xi)\|}{h} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Tomando o limite com $h \rightarrow 0$ na desigualdade (5.16) e utilizando a Proposição 5.1, temos que existe um funcional linear contínuo $g \in N(F(x + t\xi))$ tal que:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &\leq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \|z(h) - z(0)\| + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\|F(x + t\xi) + hz(0)\| - \|F(x + t\xi)\|}{h} \\ &= 0 + g(z(0)) = g(DF(x + t\xi)(\xi)) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Combinando a equação (5.8) e a desigualdade (5.15), temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \frac{\|F(x+t\xi) + hz(h)\| - \|F(x+t\xi)\|}{h} \\
 &\geq \frac{\|F(x+t\xi) + hz(0)\| - h\|z(h) - z(0)\| - \|F(x+t\xi)\|}{h} \\
 &= \frac{\|F(x+t\xi) + hz(0)\| - \|F(x+t\xi)\|}{h} - \|z(h) - z(0)\| \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

Tomando o limite com $h \rightarrow 0$ na desigualdade (5.18) e utilizando a Proposição 5.1, temos que existe um funcional linear contínuo $g \in N(F(x+t\xi))$ tal que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &\geq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\|F(x+t\xi) + hz(0)\| - \|F(x+t\xi)\|}{h} - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \|z(h) - z(0)\| \\
 &= g(z(0)) + 0 = g(DF(x+t\xi)(\xi)) \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

Pelas desigualdades (5.17) e (5.19), concluímos que:

$$\begin{aligned}
 g(DF(x+t\xi)(\xi)) &\leq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \leq g(DF(x+t\xi)(\xi)) \\
 &\Rightarrow \boxed{\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = g(DF(x+t\xi)(\xi))} \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

Portanto, existe algum $g \in N(F(x+t\xi))$ tal que a derivada à direita de f existe e é dada por $f'_+(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = g(DF(x+t\xi)(\xi))$. $\square$

Antes de enunciar e demonstrar o caso particular do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland em espaços de Banach (o qual utiliza os dois resultados anteriores), vamos apresentar uma versão mais geral do Lema 5.1 que será utilizada na demonstração do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland em espaços de Fréchet:

Lema 5.2. Sejam X e Y espaços de Banach. Suponha que $F : X \rightarrow Y$ é Gateaux-diferenciável. Sejam $x, \xi \in X$, $y \in Y$ e definamos uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t) := \|F(x+t\xi) - y\|, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Então, f possui uma derivada à direita em todos os pontos do seu domínio e existe algum $g \in N(F(x+t\xi) - y)$ tal que:

$$f'_+(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = g(DF(x+t\xi)(\xi))$$

Demonstração. Como F é Gateaux-diferenciável e y é uma constante (portanto Gateaux-

diferenciável), temos que $G : X \longrightarrow Y$ definida por $G(x + t\xi) = F(x + t\xi) - y$ é Gateaux-diferenciável. Neste caso, temos que $DG(x + t\xi)(\xi) = DF(x + t\xi)(\xi)$. Então, pelo Lema 5.1, a função $f(t) = \|G(x + t\xi)\| = \|F(x + t\xi) - y\|$ possui uma derivada à direita em todos os pontos do seu domínio e existe algum $g \in N(F(x + t\xi) - y)$ tal que:

$$f'_+(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = g(DG(x + t\xi)(\xi)) = g(DF(x + t\xi)(\xi))$$

□

A seguir, apresentamos o caso particular do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland em espaços de Banach:

Teorema 5.1 (Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland em espaços de Banach). *Sejam X e Y espaços de Banach. Seja $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua e Gateaux-diferenciável, tal que $F(0) = 0$. Suponhamos que a derivada $DF(x)$ tem uma inversa à direita $L(x)$, uniformemente limitada em uma vizinhança da origem, ou seja:*

- $\forall v \in Y, DF(x)L(x)(v) = v$
- $\|x\| \leq R \Rightarrow \|L(x)\| \leq m$

Então, para todo $\bar{y} \in Y$ tal que $\|\bar{y}\| < \frac{R}{m}$ e para todo $\mu > m$ existe $\bar{x} \in X$ tal que $\|\bar{x}\| < R$, $\|\bar{x}\| \leq \mu\|\bar{y}\|$ e $F(\bar{x}) = \bar{y}$.

Demonstração. Primeiramente, observe que se $\bar{y} = 0$ então $\|\bar{y}\| = 0 < \frac{R}{m}$ e, para todo $\mu > m$, existe $\bar{x} = 0$ tal que $\|\bar{x}\| = 0 < R$, $\|\bar{x}\| = 0 \leq \mu \cdot 0 = \mu\|\bar{y}\|$ e $F(\bar{x}) = F(0) = 0 = \bar{y}$. Então, daqui em diante, consideremos $\bar{y} \neq 0$. Considere a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|F(x) - \bar{y}\|$. Então, f é contínua (pois F é contínua, a constante $\bar{y}$ é contínua e a norma é contínua) e é limitada inferiormente (pois a norma é limitada inferiormente). Temos que $f(0) = \|F(0) - \bar{y}\| = \|0 - \bar{y}\| = \|\bar{y}\| > 0$ e que $f(0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + f(0)$. Tomemos $\varepsilon = f(0) > 0$. Então, pelo Princípio Variacional de Ekeland (Teorema 4.10, que pode ser utilizado pois X é um espaço de Banach: ver Observação 4.1), temos que, dado $r > 0$, existe um ponto $\bar{x} \in X$ tal que:

- $f(\bar{x}) \leq f(0)$;
- $d(\bar{x}, 0) \leq r$, ou seja, $\|\bar{x}\| \leq r$;
- $f(\bar{x}) < f(x) + \frac{f(0)}{r}\|x - \bar{x}\|, \forall x \neq \bar{x}$.

Temos que $f(0) = \|F(0) - \bar{y}\| = \|0 - \bar{y}\| = \|\bar{y}\|$. Tomando $r = \mu\|\bar{y}\|$, obtemos que:

- $f(\bar{x}) \leq f(0)$;
- $\|\bar{x}\| \leq \mu\|\bar{y}\|$;
- $\frac{f(0)}{r} = \frac{\|\bar{y}\|}{\mu\|\bar{y}\|} = \frac{1}{\mu}$, então:

$$f(x) > f(\bar{x}) - \frac{1}{\mu}\|x - \bar{x}\|, \quad \forall x \neq \bar{x} \quad (5.21)$$

Além disso, como $\|\bar{y}\| < \frac{R}{m}$, temos que $m < \frac{R}{\|\bar{y}\|}$. Se $m < \mu < \frac{R}{\|\bar{y}\|}$, então $\|\bar{x}\| \leq \mu\|\bar{y}\| < \frac{R}{m} \cdot \|\bar{y}\| = R$. Vamos analisar o outro caso, em que $m < \frac{R}{\|\bar{y}\|} \leq \mu$. Como $\|\bar{y}\| < \frac{R}{m}$, temos que existe algum $\delta > 0$ tal que $\|\bar{y}\| = \frac{R - \delta}{m}$, logo $\|\bar{x}\| \leq \mu\|\bar{y}\| = \mu \cdot \frac{R - \delta}{m} = \frac{\mu}{m} \cdot (R - \delta)$. Tomando $\mu = \mu_n = m + \frac{1}{n}$, temos que $\|\bar{x}\| \leq \frac{\mu_n}{m} \cdot (R - \delta)$, logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{x}\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{m} \cdot (R - \delta)$, então $\|\bar{x}\| \leq \frac{m}{m} \cdot (R - \delta) = R - \delta < R$. Portanto, $\|\bar{x}\| < R$ em ambos os casos. Assim, nos resta mostrar que $F(\bar{x}) = \bar{y}$. Suponhamos que isto não seja verdade, ou seja, suponhamos que $F(\bar{x}) \neq \bar{y}$. Sejam $u \in X$ e $t > 0$ tais que $x = \bar{x} + tu$. Pela desigualdade (5.21), obtemos:

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + tu) &> f(\bar{x}) - \frac{1}{\mu}\|\bar{x} + tu - \bar{x}\| \\ f(\bar{x} + tu) - f(\bar{x}) &> -\frac{1}{\mu}\|tu\| \\ \|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\| - \|F(\bar{x}) - \bar{y}\| &> -\frac{t}{\mu}\|u\| \\ \frac{\|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\| - \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|}{t} &> -\frac{1}{\mu}\|u\| \end{aligned} \quad (5.22)$$

Como F é Gateaux-diferenciável (por hipótese) e a constante $\bar{y}$ também é Gateaux-diferenciável, temos que a aplicação $G : X \rightarrow Y$ definida por $G(x) = F(x) - \bar{y}$ é Gateaux-diferenciável, e nesse caso temos que $DG(x)(u) = DF(x)(u)$. Definamos a função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(t) = \|G(\bar{x} + tu)\| = \|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\|$. Pelo Lema 5.1, temos que existe algum $p \in N(G(\bar{x} + tu))$ tal que:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\| - \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|}{t} &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{g(t) - g(0)}{t} = p(DG(\bar{x} + 0u)(u)) \\ &= p(DG(\bar{x})(u)) = p(DF(\bar{x})(u)) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Pela Proposição 4.3, $\|p\|_* = 1$ e $p(F(\bar{x} + tu) - \bar{y}) = \|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\|$, logo, tomando o

limite com $t \rightarrow 0$ nesta segunda igualdade, obtemos:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} p(F(\bar{x} + tu) - \bar{y}) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\| \Rightarrow p(F(\bar{x}) - \bar{y}) = \|F(\bar{x}) - \bar{y}\| \quad (5.24)$$

Tomando o limite com $t \rightarrow 0$ na desigualdade (5.22) e utilizando a equação (5.23), obtemos:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\| - \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|}{t} \geq -\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{1}{\mu} \|u\| \Rightarrow p(DF(\bar{x})(u)) \geq -\frac{1}{\mu} \|u\| \quad (5.25)$$

Tomando $u = -L(\bar{x})(F(\bar{x}) - \bar{y})$, temos que:

$$DF(\bar{x})(-L(\bar{x})(F(\bar{x}) - \bar{y})) = -DF(\bar{x})L(\bar{x})(F(\bar{x}) - \bar{y}) = -F(\bar{x}) + \bar{y} \quad (5.26)$$

Como $\|\bar{x}\| < R$ (o que já provamos anteriormente), temos por hipótese que $\|L(\bar{x})\| \leq m$. Então, para todo vetor $v \in Y$, temos que $\|L(\bar{x})(v)\| \leq \|L(\bar{x})\| \|v\|$. A partir da equação (5.26) e da desigualdade (5.25), obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} p(-F(\bar{x}) + \bar{y}) &= p(DF(\bar{x})(-L(\bar{x})(F(\bar{x}) - \bar{y}))) \geq -\frac{1}{\mu} \|-L(\bar{x})(F(\bar{x}) - \bar{y})\| \\ &\geq -\frac{1}{\mu} \|-L(\bar{x})\| \|F(\bar{x}) - \bar{y}\| = -\frac{1}{\mu} \|L(\bar{x})\| \|F(\bar{x}) - \bar{y}\| \end{aligned} \quad (5.27)$$

Multiplicando a desigualdade (5.27) por -1 e utilizando o fato de que $\|L(\bar{x})\| \leq m$, obtemos:

$$p(F(\bar{x}) - \bar{y}) \leq \frac{1}{\mu} \|L(\bar{x})\| \|F(\bar{x}) - \bar{y}\| \leq \frac{m}{\mu} \|F(\bar{x}) - \bar{y}\| \quad (5.28)$$

Pela equação (5.24), obtemos, a partir da desigualdade (5.28):

$$\begin{aligned} \|F(\bar{x}) - \bar{y}\| &\leq \frac{1}{\mu} \|L(\bar{x})\| \|F(\bar{x}) - \bar{y}\| \leq \frac{m}{\mu} \|F(\bar{x}) - \bar{y}\| \\ &\Rightarrow \|F(\bar{x}) - \bar{y}\| \leq \frac{m}{\mu} \|F(\bar{x}) - \bar{y}\| \end{aligned} \quad (5.29)$$

A partir da desigualdade (5.29), concluímos que $\frac{m}{\mu} \geq 1$, ou seja, $m \geq \mu$. Mas, por hipótese, $\mu > m$, então supor que $F(\bar{x}) \neq \bar{y}$ implica em um absurdo! Com isso, concluímos que $F(\bar{x}) = \bar{y}$. Isto finaliza a demonstração do teorema. $\square$

Observação 5.1. Vimos anteriormente que o Teorema da Aplicação Inversa para funções Fréchet-diferenciáveis em espaços de Banach (ou seja, o Teorema 2.6 apresentado no Capítulo 2) requer que a aplicação f seja Fréchet-diferenciável e de classe C^1 , que a derivada de Fréchet $Df(x_0)$ seja contínua e que a inversa da derivada $Df(x_0)$ também seja contínua. Por outro lado, o Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland para

espaços de Banach (ou seja, o Teorema 5.1 apresentado acima) requer que a aplicação F seja Gateaux-diferenciável (o que é mais forte do que ser Fréchet-diferenciável) e que a inversa $L(x)$ da derivada de Gateaux possua uma cota superior em uma vizinhança da origem (ou seja, não é necessário que a derivada ou sua inversa dependa continuamente de x). Portanto, o Teorema 5.1, ainda em espaços de Banach, é mais forte que o Teorema 2.6.

5.2 O caso geral do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland

Como já demonstramos com detalhes um caso particular para espaços de Banach e também já desenvolvemos diversos resultados acerca da topologia dos espaços graduados e dos espaços standard (no Capítulo 3), estamos em condições de enunciar e demonstrar o caso geral do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland. A demonstração será feita a partir de uma sequência de resultados que foram demonstrados por Ekeland em 2011 [8].

O primeiro resultado que apresentaremos é o seguinte teorema que estabelece a existência da aplicação inversa sob certas condições:

Teorema 5.2 (Existência da aplicação inversa). *Sejam $X = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$ e $Y = \bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k$ espaços de Fréchet graduados, tais que Y é standard. Dados um número real $R \in (0, +\infty]$ e um número inteiro $k_0 \geq 0$, consideremos a bola*

$$B_X(k_0, R) := \{x \in X : \|x\|_{k_0} < R\}$$

(por exemplo, se $R = +\infty$ então $B_X(k_0, R) = X$). *Seja $F : X \rightarrow Y$ uma aplicação. Sejam dados dois números inteiros $d_1 \geq 0$ e $d_2 \geq 0$ e duas sequências não-decrescentes $m_k > 0$ e $m'_k > 0$. Suponha que, para todo $x \in B_X(k_0, R)$, a aplicação F satisfaz às seguintes condições:*

- (1) $F(0) = 0$;
- (2) F é contínua e Gateaux-diferenciável;
- (3) Para todo $u \in X$, existe um número real $c_2(u) > 0$ tal que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|DF(x)(u)\|_k \leq c_2(u)(m_k \|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k) \quad (5.30)$$

(4) Existe uma aplicação linear $L(x) : Y \longrightarrow X$ tal que $DF(x)L(x) = I_Y$:

$$\forall v \in Y, DF(x)L(x)(v) = v \quad (5.31)$$

(ou seja, $DF(x)$ possui uma inversa à direita $L(x)$);

(5) Para todo $v \in Y$, tem-se que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|L(x)(v)\|_k \leq m'_k \|v\|_{k+d_2} \quad (5.32)$$

Seja $\beta_k \geq 0$ uma sequência com suporte ilimitado satisfazendo o seguinte:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k m_k m'_{k+d_1} n^k < \infty \quad (5.33)$$

Então, para todo $\bar{y} \in Y$ tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k < \frac{\beta_{k_0+d_2}}{m'_{k_0}} R, \quad (5.34)$$

existe um ponto $\bar{x}$ tal que:

$$F(\bar{x}) = \bar{y}, \quad (5.35)$$

$$\|\bar{x}\|_{k_0} < R. \quad (5.36)$$

Demonstração. Se $\bar{y} = 0$ (o qual satisfaz a desigualdade (5.34), pois $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|0\|_k = 0 < \frac{\beta_{k_0+d_2}}{m'_{k_0}} R$), então existe $\bar{x} = 0$ satisfazendo a equação (5.35) (pois $F(0) = 0$ por hipótese) e a desigualdade (5.36) (pois $\|0\|_{k_0} = 0 < R$). Então, consideremos daqui em diante que $\bar{y} \neq 0$. Primeiramente, vamos definir uma sequência (α_k) por $\alpha_k = \frac{\beta_{k+d_2}}{m'_k}$. Como, por hipótese, $\beta_{k+d_2} \geq 0$ e $m'_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $\alpha_k = \frac{\beta_{k+d_2}}{m'_k} > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, como (por hipótese) a sequência (β_k) tem suporte ilimitado, concluímos que a sequência (α_k) definida por $\alpha_k = \frac{\beta_{k+d_2}}{m'_k}$ também tem suporte ilimitado. Consideremos em X a distância d definida por:

$$d(x_1, x_2) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{R, \|x_1 - x_2\|_k\} \quad (5.37)$$

Pela Proposição 3.5, temos que (X, d) é um espaço métrico completo. Vamos considerar

a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(x) - \bar{y}\|_k \quad (5.38)$$

A função f definida na equação (5.38) é limitada inferiormente, pois cada uma das normas $\|\cdot\|_k$ é limitada inferiormente. Para todo $x \in X$, temos que $\|F(x) - \bar{y}\|_k \geq 0$ e $\beta_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(x) - \bar{y}\|_k \geq 0$ para todo $x \in X$.

Portanto, concluímos que:

$$0 \leq \inf_{x \in X} f(x) \quad (5.39)$$

Como $\inf_{x \in X} f(x) \leq f(a)$ para todo $a \in X$, temos que:

$$0 \leq \inf_{x \in X} f(x) \leq f(0) \quad (5.40)$$

E, além disso, temos que:

$$f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(0) - \bar{y}\|_k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|0 - \bar{y}\|_k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k \quad (5.41)$$

Então $f(0) > 0$, pois $\bar{y} \neq 0$. Logo:

$$0 \leq \inf_{x \in X} f(x) \leq f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k < \infty \quad (5.42)$$

Seja $(x_n) \subset (X, d)$ uma sequência tal que $x_n \rightarrow x$. Temos que:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(x_n) - \bar{y}\|_k \quad (5.43)$$

Pelo Lema de Fatou (Teorema 4.6), obtemos o seguinte:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(x_n) - \bar{y}\|_k \geq \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|F(x_n) - \bar{y}\|_k \quad (5.44)$$

Pela Proposição 3.5, temos que $x_n \rightarrow x$ em todos os espaços X_k . Como F é contínua, segue que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|F(x_n) - \bar{y}\|_k &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \lim_{n \rightarrow +\infty} \|F(x_n) - \bar{y}\|_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(x) - \bar{y}\|_k = f(x) \end{aligned} \quad (5.45)$$

Combinando a desigualdade (5.44) e a equação (5.45), concluímos que:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|F(x_n) - \bar{y}\|_k = f(x) \quad (5.46)$$

Portanto, temos que $f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$, ou seja, f é uma função sequencialmente semicontínua inferiormente (ver Definição 4.17). Segue do Corolário 4.1 que f é semicontínua inferiormente. Sendo $\bar{y} \in Y$ tal que $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k < \frac{\beta_{k_0+d_2}}{m'_{k_0}} R$ (pela desigualdade (5.34) da hipótese do teorema), pelas propriedades dos números reais podemos tomar um número real positivo $R' < R$ tal que $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k < \frac{\beta_{k_0+d_2}}{m'_{k_0}} R' < \frac{\beta_{k_0+d_2}}{m'_{k_0}} R$. Então:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k < \frac{\beta_{k_0+d_2}}{m'_{k_0}} R' \quad (5.47)$$

Essa desigualdade voltará a ser mencionada mais adiante. Lembremos agora que a função f definida na equação (5.38) é inferiormente limitada e semicontínua inferiormente. Somando $f(0)$ aos dois lados da desigualdade (5.39), temos que:

$$f(0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + f(0) \quad (5.48)$$

Então, existe $\varepsilon = f(0) > 0$ tal que $f(0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$. Pelo Princípio Variacional de Ekeland (Teorema 4.10, que pode ser utilizado pois X é um espaço de Fréchet: ver Observação 4.1), concluímos que, dado $\lambda > 0$, existe $\bar{x} \in X$ tal que:

$$f(\bar{x}) \leq f(0) \quad (5.49)$$

$$d(\bar{x}, 0) \leq \lambda \quad (5.50)$$

$$f(\bar{x}) < f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, \bar{x}), \quad \forall x \neq \bar{x} \quad (5.51)$$

Tomemos $\lambda = R' \alpha_{k_0}$. Então, podemos escrever a desigualdade (5.50) como:

$$d(\bar{x}, 0) \leq R' \alpha_{k_0} \quad (5.52)$$

Pela desigualdade (5.51), temos que:

$$f(x) > f(\bar{x}) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, \bar{x}) = f(\bar{x}) - \frac{f(0)}{R' \alpha_{k_0}} d(x, \bar{x}), \quad \forall x \neq \bar{x} \quad (5.53)$$

Pelas equações (5.38) e (5.41), a desigualdade (5.49) pode ser reescrita como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k \quad (5.54)$$

Pela desigualdade triangular (válida em cada uma das normas $\|\cdot\|_k$), temos que $\|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k \geq \|F(\bar{x})\|_k - \|\bar{y}\|_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k \geq \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (\|F(\bar{x})\|_k - \|\bar{y}\|_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x})\|_k - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k \quad (5.55)$$

Pelas desigualdades (5.54) e (5.55), obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x})\|_k - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k, \quad (5.56)$$

de onde obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x})\|_k \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k < \infty \quad (5.57)$$

Suponhamos que $\|\bar{x}\|_{k_0} > R'$, assim $\bar{x} \neq 0$, logo $\|\bar{x}\|_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, pela definição de d (ver equação (5.37)), temos que:

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{R, \|\bar{x} - 0\|_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{R, \|\bar{x}\|_k\} \\ &> \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{R', \|\bar{x}\|_k\} \\ &= \sum_{k=0}^{k_0} \alpha_k \min\{R', \|\bar{x}\|_k\} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \alpha_k \min\{R', \|\bar{x}\|_k\} \\ &> \sum_{k=0}^{k_0} \alpha_k \min\{R', \|\bar{x}\|_k\} + 0 \\ &= \alpha_{k_0} \min\{R', \|\bar{x}\|_{k_0}\} + \sum_{k=0}^{k_0-1} \alpha_k \min\{R', \|\bar{x}\|_k\} \\ &> \alpha_{k_0} R' + 0 = R' \alpha_{k_0}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

o que contradiz a desigualdade (5.52). Assim, não podemos ter $\|\bar{x}\|_{k_0} > R'$. Portanto, $\|\bar{x}\|_{k_0} \leq R' < R$. Então, é válida a desigualdade (5.36). Para completar a demonstração, precisamos provar a equação (5.35), ou seja, que $F(\bar{x}) = \bar{y}$. Começaremos

definindo a seguinte constante (que ajudará a simplificar alguns cálculos posteriores):

$$A = \frac{f(0)}{R'\alpha_{k_0}} = \frac{1}{R'\alpha_{k_0}} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k \quad (5.59)$$

Assim, a desigualdade (5.53) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$f(x) > f(\bar{x}) - Ad(x, \bar{x}), \quad \forall x \neq \bar{x} \quad (5.60)$$

Em particular, para quaisquer $t > 0$ e $u \in X$, temos que $\bar{x} + tu \neq \bar{x}$. Então, tomando $x = \bar{x} + tu$ com $t > 0$ e $u \in X$ na desigualdade (5.60), segue que:

$$f(\bar{x} + tu) > f(\bar{x}) - Ad(\bar{x} + tu, \bar{x}) \Rightarrow -f(\bar{x} + tu) + f(\bar{x}) < Ad(\bar{x} + tu, \bar{x}) \quad (5.61)$$

Dividindo a desigualdade (5.61) por t , obtemos:

$$\frac{-1}{t} \cdot f(\bar{x} + tu) + \frac{1}{t} \cdot f(\bar{x}) < \frac{A}{t} \cdot d(\bar{x} + tu, \bar{x}) \quad (5.62)$$

Desenvolvendo a desigualdade (5.62) a partir das definições de d e f (ver equações (5.37) e (5.38), respectivamente), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\|_k + \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k &< \frac{A}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{R, \|\bar{x} + tu - \bar{x}\|_k\} \\ \Rightarrow \frac{-1}{t} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\|_k - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k \right] &< \frac{A}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{R, \|tu\|_k\} \end{aligned}$$

Então:

$$\frac{-1}{t} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\|_k - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k \right] < \frac{A}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \min\{R, t\|u\|_k\} \quad (5.63)$$

Agora, suponhamos que $F(\bar{x}) \neq \bar{y}$. Definamos $v = F(\bar{x}) - \bar{y} \in Y$ e $u = -L(\bar{x})(v)$ (onde $L(\bar{x})$ é a inversa à direita de $DF(\bar{x})$, vide equação (5.31)). Então:

$$DF(\bar{x})(u) = DF(\bar{x})(-L(\bar{x})(v)) = -DF(\bar{x})L(\bar{x})(v) = -v = -(F(\bar{x}) - \bar{y}) \quad (5.64)$$

Como Y é standard (ver Definição 3.10) e $v = F(\bar{x}) - \bar{y} \in Y$, temos que existem uma constante $c_1(v)$ e uma sequência $v_n \in Y$ (bem como uma constante $c_0(v_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$) tais que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - v\|_k = 0 \quad (5.65)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|v_n\|_k \leq c_1(v)\|v\|_k \quad (5.66)$$

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \|v_n\|_k \leq (c_0(v_n))^k \quad (5.67)$$

Definamos $u_n = -L(\bar{x})(v_n)$. Pela condição (5) da hipótese do teorema (vide equação (5.32)), temos que:

$$\|u_n - u\|_k = \|-L(\bar{x})(v_n) + L(\bar{x})(v)\|_k = \|L(\bar{x})(-v_n + v)\|_k \leq m'_k \|v - v_n\|_{k+d_2} \quad (5.68)$$

Pela equação (5.65), concluímos a partir da desigualdade (5.68) que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_k \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} m'_k \|v - v_n\|_{k+d_2} = 0 \quad (5.69)$$

Logo, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Usando novamente a equação (5.32) da hipótese e a desigualdade (5.67), obtemos a seguinte desigualdade envolvendo u_n e v_n :

$$\|u_n\|_k = \|-L(\bar{x})(v_n)\|_k = \|L(\bar{x})(v_n)\|_k \leq m'_k \|v_n\|_{k+d_2} \leq m'_k (c_0(v_n))^{k+d_2} \quad (5.70)$$

para quaisquer $n, k \in \mathbb{N}$. Fazendo $u = u_n$ na desigualdade (5.63) e uma pequena manipulação no lado direito, temos:

$$\frac{-1}{t} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x} + tu_n) - \bar{y}\|_k - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k \right] < A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{t} \min\{R, t\|u_n\|_k\} \quad (5.71)$$

Vamos estudar o que ocorre com a desigualdade (5.71) acima se $t \rightarrow 0$. Para isso, precisamos verificar se os limites dos dois lados quando $t \rightarrow 0$ existem ou não. Vamos começar pelo lado direito. Fixando $n \in \mathbb{N}$, temos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\alpha_k}{t} \min\{R, t\|u_n\|_k\} = \alpha_k \min\left\{\frac{R}{t}, \frac{t\|u_n\|_k}{t}\right\} = \alpha_k \min\left\{\frac{R}{t}, \|u_n\|_k\right\}$. Definamos $\gamma_k(t) = \frac{\alpha_k}{t} \min\{R, t\|u_n\|_k\} = \alpha_k \min\left\{\frac{R}{t}, \|u_n\|_k\right\}$. Se $t \rightarrow 0$, podemos tomar $t = \frac{1}{s}$, com $s \in \mathbb{N}$, e neste caso $s \rightarrow +\infty$. Seja $\delta_k(s) = \gamma_k(\frac{1}{s}) = \gamma_k(t)$. Então:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{t} \min\{R, t\|u_n\|_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k(s) \quad (5.72)$$

Temos que $\delta_k(s) \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{N}$ (por definição). Também podemos observar que se $q > s$ então $\delta_k(q) = \gamma_k(\frac{1}{q}) = \alpha_k \min\{Rq, \|u_n\|_k\} \geq \alpha_k \min\{Rs, \|u_n\|_k\} = \delta_k(s)$, ou seja, a sequência $(\delta_k(s))_{s \in \mathbb{N}}$ é crescente para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, observe que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \delta_k(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma_k(\frac{1}{s}) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha_k \min\{Rs, \|u_n\|_k\} = \alpha_k \|u_n\|_k$, ou seja, $\delta_k(s) \nearrow \alpha_k \|u_n\|_k$. Pelo Teorema da Convergência Monótona para séries (Teorema 4.4), con-

cluímos que:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|u_n\|_k \quad (5.73)$$

Então, das equações (5.72) e (5.73), segue que:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{t} \min\{R, t\|u_n\|_k\} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|u_n\|_k \quad (5.74)$$

Multiplicando a equação (5.74) por A (a constante definida na equação (5.59)), obtemos uma importante conclusão sobre o lado direito da desigualdade (5.71):

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \left(A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{t} \min\{R, t\|u_n\|_k\} \right) = A \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|u_n\|_k \quad (5.75)$$

Agora, vamos estudar o que ocorre com o lado esquerdo da desigualdade (5.71) se $t \rightarrow 0$. Definamos a sequência de funções $g_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ por $g_k(t) = \|F(\bar{x} + tu_n) - \bar{y}\|_k$. Então:

$$\frac{-1}{t} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x} + tu_n) - \bar{y}\|_k - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-\beta_k (g_k(t) - g_k(0))}{t} \quad (5.76)$$

Pela desigualdade triangular, temos que $\|\bar{x} + tu_n\|_k \leq \|\bar{x}\|_k + t\|u_n\|_k$. Já vimos anteriormente que $\|\bar{x}\|_{k_0} \leq R' < R$, então, tomando $\bar{t} > 0$ tal que $\bar{t} < \frac{R - R'}{\|u_n\|_{k_0}}$, obtemos que se $0 < t < \bar{t}$ então $\|\bar{x} + tu_n\|_{k_0} \leq \|\bar{x}\|_{k_0} + t\|u_n\|_{k_0} < \|\bar{x}\|_{k_0} + \bar{t}\|u_n\|_{k_0} < R' + \frac{R - R'}{\|u_n\|_{k_0}} \cdot \|u_n\|_{k_0} = R' + R - R' = R$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\bar{t} \leq 1$ (pois a conclusão anterior vale para qualquer $\bar{t} < \frac{R - R'}{\|u_n\|_{k_0}}$, incluindo quando $\bar{t} \leq 1$). Como F é Gateaux-diferenciável, temos pelo Lema 5.2 que g_k possui uma derivada à direita em todos os pontos do seu domínio e existe um funcional linear contínuo $p_{k,n} \in N_k(F(\bar{x} + tu_n) - \bar{y})$ tal que:

$$\begin{aligned} |(g_k)'_+(t)| &= \left| \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{g_k(t+h) - g_k(t)}{h} \right| = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \left| \frac{g_k(t+h) - g_k(t)}{h} \right| \\ &= |p_{k,n}(DF(\bar{x} + tu_n)(u_n))| \leq \|DF(\bar{x} + tu_n)(u_n)\|_k \end{aligned} \quad (5.77)$$

(onde a última desigualdade segue do Exemplo 4.8). Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$, considerando a função $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_k(t) = \|F(\bar{x} + tu_n)\|_k$, temos pelo Lema 5.1 que f_k possui uma derivada à direita em todos os pontos do seu domínio e

existe um funcional linear contínuo $q_{k,n} \in N_k(F(\bar{x} + tu_n))$ tal que:

$$\begin{aligned} |(f_k)'_+(t)| &= \left| \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f_k(t+h) - f_k(t)}{h} \right| = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \left| \frac{f_k(t+h) - f_k(t)}{h} \right| \\ &= |q_{k,n}(DF(\bar{x} + tu_n)(u_n))| \leq \|DF(\bar{x} + tu_n)(u_n)\|_k \end{aligned} \quad (5.78)$$

Pela condição (3) do enunciado do teorema (desigualdade (5.30)), temos que:

$$\begin{aligned} \|DF(\bar{x} + tu_n)(u_n)\|_k &\leq c_2(u_n)(m_k\|u_n\|_{k+d_1} + \|F(\bar{x} + tu_n)\|_k) \\ &= c_2(u_n)(m_k\|u_n\|_{k+d_1} + f_k(t)) \end{aligned} \quad (5.79)$$

Pelas desigualdades (5.78) e (5.79), temos:

$$(f_k)'_+(t) \leq |(f_k)'_+(t)| \leq c_2(u_n)(m_k\|u_n\|_{k+d_1} + f_k(t)), \quad (5.80)$$

de onde obtemos que:

$$(f_k)'_+(t) - c_2(u_n)f_k(t) \leq c_2(u_n)m_k\|u_n\|_{k+d_1} \quad (5.81)$$

Multiplicando a desigualdade (5.81) pelo fator integrante $I(t) = e^{\int -c_2(u_n) dt} = e^{-tc_2(u_n)}$, temos:

$$e^{-tc_2(u_n)}(f_k)'_+(t) - c_2(u_n)e^{-tc_2(u_n)}f_k(t) \leq c_2(u_n)m_k\|u_n\|_{k+d_1}e^{-tc_2(u_n)} \quad (5.82)$$

Integrando a desigualdade (5.82) de 0 a t , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-tc_2(u_n)}(f_k)'_+(t) - c_2(u_n)e^{-tc_2(u_n)}f_k(t) dt &\leq \int_0^t c_2(u_n)m_k\|u_n\|_{k+d_1}e^{-tc_2(u_n)} dt \\ \Rightarrow [e^{-tc_2(u_n)}f_k(t)]_0^t &\leq \left[c_2(u_n)m_k\|u_n\|_{k+d_1} \cdot \frac{e^{-tc_2(u_n)}}{(-c_2(u_n))} \right]_0^t = [-m_k\|u_n\|_{k+d_1}e^{-tc_2(u_n)}]_0^t \\ &\Rightarrow e^{-tc_2(u_n)}f_k(t) - e^0f_k(0) \leq -m_k\|u_n\|_{k+d_1}e^{-tc_2(u_n)} + m_k\|u_n\|_{k+d_1}e^0 \\ &\Rightarrow e^{-tc_2(u_n)}f_k(t) - \|F(\bar{x})\|_k \leq -m_k\|u_n\|_{k+d_1}e^{-tc_2(u_n)} + m_k\|u_n\|_{k+d_1} \\ &\Rightarrow e^{-tc_2(u_n)}f_k(t) + m_k\|u_n\|_{k+d_1}e^{-tc_2(u_n)} \leq m_k\|u_n\|_{k+d_1} + \|F(\bar{x})\|_k \end{aligned} \quad (5.83)$$

Multiplicando a desigualdade (5.83) por $e^{tc_2(u_n)}$, obtemos:

$$f_k(t) + m_k\|u_n\|_{k+d_1} \leq e^{tc_2(u_n)}(m_k\|u_n\|_{k+d_1} + \|F(\bar{x})\|_k) \quad (5.84)$$

Combinando as desigualdades (5.79) e (5.84), temos:

$$\begin{aligned} \|DF(\bar{x} + tu_n)(u_n)\|_k &\leq c_2(u_n)(m_k\|u_n\|_{k+d_1} + f_k(t)) \\ &\leq c_2(u_n)e^{tc_2(u_n)}(m_k\|u_n\|_{k+d_1} + \|F(\bar{x})\|_k) \end{aligned} \quad (5.85)$$

Como $0 < t < 1$, temos que $e^{tc_2(u_n)} < e^{c_2(u_n)}$. Definamos $C_2(u_n) = c_2(u_n)e^{c_2(u_n)}$. Utilizando isto e a desigualdade (5.70), obtemos a partir da desigualdade (5.85):

$$\begin{aligned} \|DF(\bar{x} + tu_n)(u_n)\|_k &\leq c_2(u_n)e^{tc_2(u_n)}(m_k\|u_n\|_{k+d_1} + \|F(\bar{x})\|_k) \\ &\leq c_2(u_n)e^{c_2(u_n)}(m_k m'_{k+d_1}(c_0(v_n))^{k+d_1+d_2} + \|F(\bar{x})\|_k) \\ &= C_2(u_n)(m_k m'_{k+d_1}(c_0(v_n))^{k+d_1+d_2} + \|F(\bar{x})\|_k) \end{aligned} \quad (5.86)$$

Pelas desigualdades (5.77) e (5.86), obtemos:

$$\begin{aligned} |(g_k)'_+(t)| &\leq \|DF(\bar{x} + tu_n)(u_n)\|_k \\ &\leq C_2(u_n)(m_k m'_{k+d_1}(c_0(v_n))^{k+d_1+d_2} + \|F(\bar{x})\|_k) \\ &= C_2(u_n)m_k m'_{k+d_1}(c_0(v_n))^{k+d_1+d_2} + C_2(u_n)\|F(\bar{x})\|_k \end{aligned} \quad (5.87)$$

para todo $t \in (0, 1)$. Assim, a derivada $(g_k)'_+$ é limitada. Pela Proposição 1.15, segue que g_k é lipschitziana e que:

$$\begin{aligned} |g_k(t) - g_k(0)| &\leq (C_2(u_n)m_k m'_{k+d_1}(c_0(v_n))^{k+d_1+d_2} + C_2(u_n)\|F(\bar{x})\|_k) \cdot (t - 0) \\ &= (C_2(u_n)m_k m'_{k+d_1}(c_0(v_n))^{k+d_1+d_2} + C_2(u_n)\|F(\bar{x})\|_k) \cdot t \end{aligned} \quad (5.88)$$

Multiplicando a desigualdade (5.88) por $\frac{\beta_k}{t}$, obtemos:

$$\beta_k \left| \frac{g_k(t) - g_k(0)}{t} \right| \leq \beta_k C_2(u_n)m_k m'_{k+d_1}(c_0(v_n))^{k+d_1+d_2} + \beta_k C_2(u_n)\|F(\bar{x})\|_k \quad (5.89)$$

Pela desigualdade (5.57), temos que $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(x)\|_k < \infty$ para todo $x \in X$, então

$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x})\|_k < \infty$, logo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k C_2(u_n)\|F(\bar{x})\|_k = C_2(u_n) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x})\|_k < \infty \quad (5.90)$$

Como $c_0(v_n) \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que existe $a_n \in \mathbb{N}$ tal que $c_0(v_n) \leq a_n$ para

cada $n \in \mathbb{N}$. Pela desigualdade (5.33), obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k C_2(u_n) m_k m'_{k+d_1} (c_0(v_n))^k \leq C_2(u_n) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k m_k m'_{k+d_1} a_n^k < \infty \quad (5.91)$$

Logo, pelas desigualdades (5.89), (5.90) e (5.91), concluimos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left| \frac{g_k(t) - g_k(0)}{t} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k C_2(u_n) m_k m'_{k+d_1} (c_0(v_n))^{k+d_1+d_2} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k C_2(u_n) \|F(\bar{x})\|_k,$$

então:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left| \frac{g_k(t) - g_k(0)}{t} \right| < \infty \quad (5.92)$$

Portanto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta_k \cdot \frac{g_k(t) - g_k(0)}{t} \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left| \frac{g_k(t) - g_k(0)}{t} \right| < \infty \quad (5.93)$$

Tomando o limite com $t \rightarrow 0$ na equação (5.76), obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} -\beta_k (g_k)'_+(0) &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-\beta_k (g_k(t) - g_k(0))}{t} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \left(\frac{-1}{t} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x} + tu_n) - \bar{y}\|_k - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k \right] \right) \end{aligned} \quad (5.94)$$

Tomando o limite com $t \rightarrow 0$ na desigualdade (5.71) e utilizando as equações (5.75) e (5.94), segue que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} -\beta_k (g_k)'_+(0) &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \left(\frac{-1}{t} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x} + tu_n) - \bar{y}\|_k - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k \right] \right) \\ &\leq \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \left(A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{t} \min\{R, t\|u_n\|_k\} \right) = A \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|u_n\|_k \end{aligned} \quad (5.95)$$

Pelo Lema 5.2, temos que existe $p_{k,n} \in N_k(F(\bar{x}) - \bar{y})$ (pois $p_{k,n} \in N_k(F(\bar{x} + tu_n) - \bar{y})$ e $t \rightarrow 0$) tal que:

$$(g_k)'_+(0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{g_k(t) - g_k(0)}{t} = p_{k,n}(DF(\bar{x})(u_n)) \quad (5.96)$$

Logo, podemos reescrever a desigualdade (5.95) da seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} -\beta_k p_{k,n}(DF(\bar{x})(u_n)) \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|u_n\|_k \quad (5.97)$$

Como $u_n = -L(\bar{x})(v_n)$, temos que $DF(\bar{x})(u_n) = -DF(\bar{x})(L(\bar{x})(v_n)) = -v_n$, logo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} -\beta_k p_{k,n}(DF(\bar{x})(u_n)) = \sum_{k=0}^{\infty} -\beta_k p_{k,n}(-v_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k p_{k,n}(v_n) \quad (5.98)$$

$$A \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|u_n\|_k = A \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \| -L(\bar{x})(v_n) \|_k = A \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|L(\bar{x})(v_n)\|_k \quad (5.99)$$

Combinando as equações (5.98) e (5.99) com a desigualdade (5.97), obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k p_{k,n}(v_n) \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|L(\bar{x})(v_n)\|_k \quad (5.100)$$

Seja $\|\cdot\|_k^*$ a norma do espaço dual $(X_k)^*$. Pela Proposição 4.3, temos que $\|p_{k,n}\|_k^* = 1$ e $p_{k,n}(F(\bar{x}) - \bar{y}) = \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k$. Definamos $\varphi_k(n) = \beta_k p_{k,n}(v_n)$ e $\psi_k(n) = \alpha_k \|L(\bar{x})(v_n)\|_k$. Com essa nova notação, podemos reescrever a desigualdade (5.100) como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(n) \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(n) \quad (5.101)$$

Pela definição de $\varphi_k(n)$, pelo fato de que $p_{k,n}$ é contínua com $\|p_{k,n}\|_k^* = 1$, pela desigualdade (5.66) e pela definição de v , obtemos:

$$\begin{aligned} |\varphi_k(n)| &= |\beta_k p_{k,n}(v_n)| \leq \beta_k \|p_{k,n}\|_k^* \|v_n\|_k \leq \beta_k c_1(v) \|v\|_k \\ &= c_1(v) \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k \end{aligned} \quad (5.102)$$

Pela definição de $\psi_k(n)$, pela definição de α_k , pela desigualdade (5.32), pela desigualdade (5.66) e pela definição de v , obtemos:

$$\begin{aligned} |\psi_k(n)| &= \alpha_k \|L(\bar{x})(v_n)\|_k = \frac{\beta_{k+d_2}}{m'_k} \|L(\bar{x})(v_n)\|_k \leq \frac{\beta_{k+d_2}}{m'_k} \cdot m'_k \|v_n\|_{k+d_2} \\ &= \beta_{k+d_2} \|v_n\|_{k+d_2} \leq \beta_{k+d_2} c_1(v) \|v\|_{k+d_2} = c_1(v) \beta_{k+d_2} \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_{k+d_2} \end{aligned} \quad (5.103)$$

Pelas desigualdades (5.54) e (5.47), temos que, para todo $x \in X$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(x) - \bar{y}\|_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k < \frac{\beta_{k_0+d_2}}{m'_{k_0}} R' < \infty$$

Então, em particular, temos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k < \infty \quad (5.104)$$

Assim, pelas desigualdades (5.102) e (5.104), temos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(n)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_1(v) \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k = c_1(v) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k < \infty \quad (5.105)$$

E, pelas desigualdades (5.103) e (5.104), temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k(n)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} c_1(v) \beta_{k+d_2} \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_{k+d_2} = c_1(v) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k+d_2} \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_{k+d_2} \\ &= c_1(v) \sum_{k=d_2}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k \leq c_1(v) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k < \infty \end{aligned} \quad (5.106)$$

Pela desigualdade (5.69), concluímos anteriormente que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \| -L(\bar{x})(v_n) + L(\bar{x})(v) \|_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, assim $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L(\bar{x})(v_n) - L(\bar{x})(v)\|_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\|\cdot\|_k$ é uma norma, concluímos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (L(\bar{x})(v_n) - L(\bar{x})(v)) = 0$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow +\infty} L(\bar{x})(v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L(\bar{x})(v)$. Pela definição de $\psi_k(n)$, concluímos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_k(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_k \|L(\bar{x})(v_n)\|_k = \alpha_k \|L(\bar{x})(v)\|_k \quad (5.107)$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada para séries (Teorema 4.7), concluímos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|L(\bar{x})(v)\|_k \quad (5.108)$$

Pela Proposição 4.3, temos que $\|p_{k,n}\|_k^* = 1$ e $p_{k,n}(F(\bar{x}) - \bar{y}) = \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k$, ou seja, $p_{k,n}(v) = \|v\|_k$. Então:

$$\begin{aligned} |p_{k,n}(v_n) - \|v\|_k| &= |p_{k,n}(v_n) - p_{k,n}(v)| = |p_{k,n}(v_n - v)| \leq \|p_{k,n}\|_k^* \|v_n - v\|_k \\ &= \|v_n - v\|_k \end{aligned} \quad (5.109)$$

Pela equação (5.65) e pela desigualdade (5.109), temos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |p_{k,n}(v_n) - \|v\|_k| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - v\|_k = 0 \quad (5.110)$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |p_{k,n}(v_n) - \|v\|_k| = 0$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{k,n}(v_n) = \|v\|_k$. Pela definição de

$\varphi_k(n)$, concluímos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_k(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_k p_{k,n}(v_n) = \beta_k \|v\|_k \quad (5.111)$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada para séries (Teorema 4.7), concluímos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|v\|_k \quad (5.112)$$

Tomando o limite com $n \rightarrow +\infty$ na desigualdade (5.101), obtemos o seguinte a partir das equações (5.108) e (5.112):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} A \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(n) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|v\|_k \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|L(\bar{x})(v)\|_k \quad (5.113)$$

Pela definição, $\alpha_k = \frac{\beta_{k+d_2}}{m'_k}$. Então, pela desigualdade (5.113), temos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|v\|_k \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|L(\bar{x})(v)\|_k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{k+d_2}}{m'_k} \|L(\bar{x})(v)\|_k \quad (5.114)$$

Pela desigualdade (5.32), temos que $\|L(\bar{x})(v)\|_k \leq m'_k \|v\|_{k+d_2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\frac{\|L(\bar{x})(v)\|_k}{m'_k} \leq \|v\|_{k+d_2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, logo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|v\|_k \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{k+d_2}}{m'_k} \|L(\bar{x})(v)\|_k \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k+d_2} \|v\|_{k+d_2} \quad (5.115)$$

Então:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|v\|_k \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k+d_2} \|v\|_{k+d_2} = A \sum_{k=d_2}^{\infty} \beta_k \|v\|_k \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|v\|_k \quad (5.116)$$

Assim, como $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|v\|_k \geq 0$, concluímos que $A \geq 1$. Então, pela equação (5.59), concluímos que:

$$A = \frac{1}{R' \alpha_{k_0}} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k \geq 1 \quad (5.117)$$

Multiplicando a desigualdade (5.117) por $R' \alpha_{k_0} > 0$ e utilizando a definição de α_k , obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k \geq R' \alpha_{k_0} = \frac{\beta_{k_0+d_2}}{m'_{k_0}} R', \quad (5.118)$$

o que contradiz a desigualdade (5.47). Como a suposição de que $F(\bar{x}) \neq \bar{y}$ levou a esta contradição, concluímos que $F(\bar{x}) = \bar{y}$. Então, é válida a equação (5.35). Dessa forma, sob as hipóteses dadas, para todo $\bar{y} \in Y$ tal que $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|\bar{y}\|_k < \frac{\beta_{k_0+d_2}}{m'_{k_0}} R$ (desigualdade (5.34)), existe um ponto $\bar{x}$ tal que $F(\bar{x}) = \bar{y}$ (equação (5.35)) e $F(\bar{x}) = \bar{y}$ (desigualdade (5.36)). Portanto, nessas condições, existe a aplicação inversa $F^{-1} : Y \rightarrow X$ tal que $F^{-1}(\bar{y}) = \bar{x}$ (ou, mais geralmente, $\bar{x} \in F^{-1}(\bar{y}) = \{x \in X : F(x) = \bar{y}\}$, caso a inversa F^{-1} seja multivalente). $\square$

Pode-se verificar que diversas aplicações entre espaços de Fréchet satisfazem as condições do Teorema 5.2. Um exemplo é o seguinte:

Exemplo 5.1. Considere a aplicação $P : C^\infty([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ definida por $P(f) = f'$ para toda função $f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$, ou seja, $(P(f))(x) = f'(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Então, temos que $DP(f)(h) = h'$ (ver Exemplo 3.23). O espaço $X = Y = C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ das funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ é graduado (ver Exemplo 3.10) e é standard (ver Exemplo 3.15 com $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e $d = 1$). Temos que:

- (1) $P(0) = \frac{d}{dx}(0) = 0$;
- (2) P é contínua e Gateaux-diferenciável;
- (3) Consideremos $R = +\infty$, de modo que $B_{C^\infty([a, b], \mathbb{R})}(k_0, R) = C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ para todo $k_0 \in \mathbb{N}$. Para quaisquer $f, h \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ e para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\begin{aligned} \|DP(f)(h)\|_k &= \|h'\|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in [a, b]} |h^{(j+1)}(x)| = \sum_{j=1}^{k+1} \sup_{x \in [a, b]} |h^{(j)}(x)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{k+1} \sup_{x \in [a, b]} |h^{(j)}(x)| = \|h\|_{k+1} \leq \|h\|_{k+1} + \|P(f)\|_k \end{aligned}$$

Tomemos a sequência $m_k = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (assim $m_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$). Tomando a constante $c_2(h) = 1$ e sendo $d_1 = 1$, obtemos a desigualdade (5.30).

- (4) Para todo $f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$, considere a aplicação $L(f) : C^\infty([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ definida por:

$$L(f)(h) = \int_a^x h(t) dt$$

Temos que $L(f) : C^\infty([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ é uma aplicação linear, pois,

para quaisquer $h_1, h_2 \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} L(f)(h_1 + \lambda h_2) &= \int_a^x (h_1(t) + \lambda h_2(t)) dt = \int_a^x h_1(t) dt + \lambda \int_a^x h_2(t) dt \\ &= L(f)(h_1) + \lambda L(f)(h_2) \end{aligned}$$

Além disso, temos que:

$$DP(f)(L(f)(h(x))) = DP(f) \left(\int_a^x h(t) dt \right) = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x h(t) dt \right) = h(x)$$

Então, $L(f)$ é a inversa à direita de $DP(f)$ (satisfazendo à equação (5.31)).

(5) Para quaisquer $f, h \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} \|L(f)(h)\|_k &= \sum_{j=0}^k \sup_{x \in [a, b]} |[L(f)(h)]^{(j)}(x)| \\ &= \sup_{x \in [a, b]} |[L(f)(h)](x)| + \sum_{j=1}^k \sup_{x \in [a, b]} |[L(f)(h)]^{(j)}(x)| \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x h(t) dt \right| + \sum_{j=1}^k \sup_{x \in [a, b]} |h^{(j-1)}(x)| \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} \left((x - a) \sup_{t \in [a, x]} |h(t)| \right) + \sum_{j=0}^{k-1} \sup_{x \in [a, b]} |h^{(j)}(x)| \\ &\leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} \left(\sup_{t \in [a, x]} |h(t)| \right) + \sum_{j=0}^{k-1} \sup_{x \in [a, b]} |h^{(j)}(x)| \\ &\leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |h(x)| + \sum_{j=0}^{k-1} \sup_{x \in [a, b]} |h^{(j)}(x)| \\ &\leq (b - a) \sum_{j=0}^k \sup_{x \in [a, b]} |h^{(j)}(x)| + \sum_{j=0}^k \sup_{x \in [a, b]} |h^{(j)}(x)| \\ &= (b - a + 1) \sum_{j=0}^k \sup_{x \in [a, b]} |h^{(j)}(x)| = (b - a + 1) \|h\|_k \end{aligned}$$

Tomando a sequência $m'_k = b - a + 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (assim $m'_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$) e sendo $d_2 = 0$, obtemos a desigualdade (5.32).

Seja $\beta_k \geq 0$ uma sequência com suporte ilimitado tal que $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k m_k m'_{k+d_1} n^k < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $(b - a + 1) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k n^k < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k n^k < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $g \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ uma função. Como $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ é um espaço de

Fréchet graduado, temos que $\|g\|_k \leq \|g\|_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se existir algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|g\|_k \leq n_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (ou seja, se a sequência $(\|g\|_k)_{k \in \mathbb{N}}$ for limitada), temos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|g\|_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k n_0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (n_0)^k < \infty$$

Agora, suponhamos que não exista nenhum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|g\|_k \leq n_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe algum $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|g\|_{k_0} > n$. Consequentemente, $\|g\|_k > n$ para todo $k \geq k_0$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\|g\|_k)^k > n^k$ para todo $k \geq k_0$. Nesse caso, vamos definir a seguinte sequência:

$$\beta_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k < k_0 \\ \frac{1}{k^k (\|g\|_k)^k}, & \text{se } k \geq k_0 \end{cases}$$

A sequência $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tem infinitos termos maiores que 0, então possui suporte ilimitado. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k n^k = \sum_{k=0}^{k_0-1} \beta_k n^k + \sum_{k=k_0}^{\infty} \beta_k n^k \leq 0 + \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{n^k}{k^k (\|g\|_k)^k} < \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{n^k}{k^k n^k} = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^k} < \infty$$

Assim, concluímos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|g\|_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} \beta_k \|g\|_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\|g\|_k}{k^k (\|g\|_k)^k} \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^k} < \infty$$

Então, em ambos os casos (isto é, tanto faz se $(\|g\|_k)_{k \in \mathbb{N}}$ for limitada ou não), a conclusão que obtemos é a mesma: se $\beta_k \geq 0$ for uma sequência com suporte ilimitado tal que $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k m_k m'_{k+d_1} n^k < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|g\|_k < \infty$ para todo $g \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$. Pelo Teorema 5.2, concluímos que existe $f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ tal que $P(f) = g$, ou seja, $f' = g$. Assim, existe a aplicação inversa $P^{-1} : C^\infty([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ tal que $P^{-1}(g) = f$, ou seja, $P^{-1}(f') = f$.

A seguir, apresentaremos alguns corolários obtidos por Ekeland [8] a partir do Teorema 5.2:

Corolário 5.1. Sejam $X = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$ e $Y = \bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k$ espaços de Fréchet graduados, com Y standard, e seja $F : X \rightarrow Y$ uma aplicação satisfazendo às hipóteses do Teorema 5.2. Então, se $x \in B_X(k_0, R)$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(3) Para todo $u \in X$, existe um número real $c_2(u) > 0$ tal que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|DF(x)(u)\|_k \leq c_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k)$$

(3B) Para todo $u \in X$, existe um número real $c'_2(u) > 0$ tal que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|DF(x)(u)\|_k \leq c'_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k + 1)$$

Demonstração. $\boxed{(3) \Rightarrow (3B)}$ Supondo que a afirmação (3) seja válida, temos que, para todo $u \in X$, existe um número real $c_2(u) > 0$ tal que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|DF(x)(u)\|_k \leq c_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k) \quad (5.119)$$

Seja $c'_2(u) = c_2(u)$. Então, pela desigualdade (5.119), temos que, para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|DF(x)(u)\|_k &\leq c_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k) = c'_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k) \\ &\leq c'_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k + 1) \end{aligned} \quad (5.120)$$

Logo, a afirmação (3) implica na afirmação (3B).

$\boxed{(3B) \Rightarrow (3)}$ Suponhamos que a afirmação (3B) seja válida. Então, para todo $u \in X$, existe um número real $c'_2(u) > 0$ tal que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|DF(x)(u)\|_k \leq c'_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k + 1) \quad (5.121)$$

Como $DF(x) : X \longrightarrow Y$ é linear, temos que $DF(x)(0) = 0$. Então, tomando qualquer $c_2(0) > 0$, temos que $\|DF(x)(0)\|_k = 0 \leq c_2(0)(m_k\|0\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k)$. Assim, a afirmação (3) é válida para $u = 0$. Agora, suponhamos que $u \neq 0$. Definamos $c_2(u) = c'_2(u) \left(1 + \frac{1}{m_0\|u\|_0}\right)$. Então, temos:

$$\begin{aligned} c_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k) &= c'_2(u) \left(1 + \frac{1}{m_0\|u\|_0}\right) (m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k) \\ &= c'_2(u) \left(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k + \frac{m_k\|u\|_{k+d_1}}{m_0\|u\|_0} + \frac{\|F(x)\|_k}{m_0\|u\|_0}\right) \end{aligned} \quad (5.122)$$

Como as sequências $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(\|\cdot\|_k)_{k \in \mathbb{N}}$ são não-decrescentes, temos que $m_k \geq m_0$ e $\|u\|_{k+d_1} \geq \|u\|_0$, logo $m_k\|u\|_{k+d_1} \geq m_0\|u\|_0$, assim $\frac{m_k\|u\|_{k+d_1}}{m_0\|u\|_0} \geq 1$. Logo, pela equação

(5.122), segue que:

$$\begin{aligned} c_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k) &\geq c'_2(u) \left(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k + 1 + \frac{\|F(x)\|_k}{m_0\|u\|_0} \right) \\ &\geq c'_2(u) (m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k + 1) \end{aligned} \quad (5.123)$$

Pelas desigualdades (5.121) e (5.123), segue que, para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\|DF(x)(u)\|_k \leq c'_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k + 1) \leq c_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k)$$

Logo, a afirmação (3B) implica na afirmação (3). $\square$

Observação 5.2. Sendo assim, pelo Corolário 5.1, o Teorema 5.2 poderia ser enunciado com a condição (3B) no lugar da condição (3).

Observação 5.3. É possível generalizar o Corolário 5.1 da seguinte forma: sob as hipóteses do Corolário 5.1, as seguintes afirmações são equivalentes:

(3) Para todo $u \in X$, existe um número real $c_2(u) > 0$ tal que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|DF(x)(u)\|_k \leq c_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k)$$

(3C) Para todo $u \in X$, existe um número real $c'_2(u) > 0$ tal que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|DF(x)(u)\|_k \leq c'_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k + a)$$

onde $a \geq 0$ é uma constante qualquer.

Para mostrar que (3) implica em (3C), podemos utilizar o mesmo argumento da prova de que (3) implica em (3B) e trocar 1 por a na última linha da desigualdade (5.120). Para mostrar que (3C) implica em (3), podemos tomar $c_2(u) = c'_2(u) \left(1 + \frac{a}{m_0\|u\|_0} \right)$ e seguir o mesmo passo-a-passo da demonstração de que (3B) implica em (3). Dessa forma, o Teorema 5.2 também poderia ser enunciado com a condição (3C) no lugar da condição (3).

Corolário 5.2 (Sobrejeção local). Sejam $X = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$ e $Y = \bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k$ espaços de Fréchet graduados, com Y standard, e seja $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação satisfazendo às condições de (1) a (5) do Teorema 5.2. Suponha que $\|y\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}}$. Então, para todo $\mu > m'_{k_0}$, existe algum $x \in B_X(k_0, R)$ tal que $\|x\|_{k_0} \leq \mu\|y\|_{k_0+d_2}$ e $F(x) = y$.

Demonstração. Como $\|y\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}}$, temos que $m'_{k_0}\|y\|_{k_0+d_2} < R$. Para todo $\mu > m'_{k_0}$, temos que $m'_{k_0}\|y\|_{k_0+d_2} < \mu\|y\|_{k_0+d_2}$. Então, tomemos $R' < R$ tal que $m'_{k_0}\|y\|_{k_0+d_2} < R' < \mu\|y\|_{k_0+d_2}$ (é possível que $m'_{k_0}\|y\|_{k_0+d_2} < R' < R < \mu\|y\|_{k_0+d_2}$ ou $m'_{k_0}\|y\|_{k_0+d_2} < R' < \mu\|y\|_{k_0+d_2} < R$). Logo, $\|y\|_{k_0+d_2} < \frac{R'}{m'_{k_0}}$, de modo que podemos tomar um número $h > 0$ suficientemente pequeno tal que $h < \frac{\frac{R'}{m'_{k_0}} - \|y\|_{k_0+d_2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}}$, ou seja,

tal que:

$$\|y\|_{k_0+d_2} + h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} < \frac{R'}{m'_{k_0}} \quad (5.124)$$

Definamos a seguinte sequência $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de números reais não-negativos:

$$\beta_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k < k_0 + d_2 \\ 1 & \text{se } k = k_0 + d_2 \\ \frac{h}{k^k \max\{\|y\|_k, m_k m'_{k+d_1}\}} & \text{se } k > k_0 + d_2 \end{cases} \quad (5.125)$$

Note que (β_k) é uma sequência com suporte ilimitado. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k m_k m'_{k+d_1} n^k &= \left(\sum_{k=0}^{k_0+d_2-1} \beta_k m_k m'_{k+d_1} n^k \right) + \left(\sum_{k=k_0+d_2}^{\infty} \beta_k m_k m'_{k+d_1} n^k \right) \\ &= \sum_{k=k_0+d_2}^{\infty} \beta_k m_k m'_{k+d_1} n^k \\ &= \beta_{k_0+d_2} m_{k_0+d_2} m'_{k_0+d_1+d_2} n^{k_0+d_2} + \left(\sum_{k=k_0+d_2+1}^{\infty} \beta_k m_k m'_{k+d_1} n^k \right) \\ &= m_{k_0+d_2} m'_{k_0+d_1+d_2} n^{k_0+d_2} + \sum_{k=k_0+d_2+1}^{\infty} \frac{h m_k m'_{k+d_1} n^k}{k^k \max\{\|y\|_k, m_k m'_{k+d_1}\}} \\ &\leq m_{k_0+d_2} m'_{k_0+d_1+d_2} n^{k_0+d_2} + \sum_{k=k_0+d_2+1}^{\infty} \frac{h n^k}{k^k} \end{aligned} \quad (5.126)$$

Vamos estudar a convergência da série $\sum_{k=k_0+d_2+1}^{\infty} \frac{h n^k}{k^k}$ que aparece no lado direito da desigualdade (5.126). Temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{h n^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{h n^k}{k^k}} \right| &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{h n^{k+1} k^k}{h n^k (k+1)^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{n k^k}{(k+1)^{k+1}} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{n k^k}{k^k (k+1)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{n}{k+1} = 0 \end{aligned} \quad (5.127)$$

Pela desigualdade (5.127), concluímos que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{hn^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{hn^k}{k^k}} \right| = 0$, logo a série $\sum_{k=k_0+d_2+1}^{\infty} \frac{hn^k}{k^k}$ é convergente. Pela desigualdade (5.126), concluímos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k m_k m'_{k+d_1} n^k \leq m_{k_0+d_2} m'_{k_0+d_1+d_2} n^{k_0+d_2} + \sum_{k=k_0+d_2+1}^{\infty} \frac{hn^k}{k^k} < \infty$$

Então, a sequência (β_k) satisfaz a desigualdade (5.33) que é uma das hipóteses do Teorema 5.2. Pela definição de (β_k) na equação (5.125) e utilizando a desigualdade (5.124), temos também que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|y\|_k &= \left(\sum_{k=0}^{k_0+d_2-1} \beta_k \|y\|_k \right) + \beta_{k_0+d_2} \|y\|_{k_0+d_2} + \left(\sum_{k=k_0+d_2+1}^{\infty} \beta_k \|y\|_k \right) \\ &= \|y\|_{k_0+d_2} + \sum_{k=k_0+d_2+1}^{\infty} \frac{h \|y\|_k}{k^k \max\{\|y\|_k m_k m'_{k+d_1}\}} \\ &\leq \|y\|_{k_0+d_2} + \sum_{k=k_0+d_2+1}^{\infty} \frac{h}{k^k} < \|y\|_{k_0+d_2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h}{k^k} < \frac{R'}{m'_{k_0}} \end{aligned} \quad (5.128)$$

Então, pelo Teorema 5.2, existe $x \in B_X(k_0, R')$ (ou seja, $\|x\|_{k_0} < R'$) tal que $\|x\|_{k_0} < R' < \mu \|y\|_{k_0+d_2}$ e $F(x) = y$. Como $R' < R$, segue que existe $x \in B_X(k_0, R)$ (ou seja, $\|x\|_{k_0} < R$) tal que $\|x\|_{k_0} < \mu \|y\|_{k_0+d_2}$ (logo $\|x\|_{k_0} \leq \mu \|y\|_{k_0+d_2}$) e $F(x) = y$. $\square$

Corolário 5.3. Considere as seguintes bolas:

$$B_X(k_0, R) = \{x \in X : \|x\|_{k_0} < R\} \quad (5.129)$$

$$B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right) = \left\{y \in Y : \|y\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}}\right\} \quad (5.130)$$

Então, a aplicação inversa $F^{-1} : Y \rightarrow X$ (sob as hipóteses do Corolário 5.2) estabelece uma aplicação entre as bolas $B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right)$ e $B_X(k_0, R)$, a aplicação inversa $F^{-1} : B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right) \rightarrow B_X(k_0, R)$ pode ser multivalente, ou seja,

$$F^{-1}(y) = \{x \in B_X(k_0, R) : F(x) = y\} \quad (5.131)$$

e $F^{-1}(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right)$.

Demonstração. Pelo Corolário 5.2, temos que se $y \in B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right)$ (ou seja, $\|y\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}}$) então existe $x \in B_X(k_0, R)$ (ou seja, $\|x\|_{k_0} < R$) tal que $F(x) = y$, logo

existe $x \in B_X(k_0, R)$ tal que $x \in F^{-1}(y)$. Então, F^{-1} estabelece uma aplicação entre as bolas $B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right)$ e $B_X(k_0, R)$. Como para todo $y \in B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right)$ existe $x \in B_X(k_0, R)$ tal que $x \in F^{-1}(y)$, concluímos que $F^{-1}(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right)$. Assim, F^{-1} pode ser multivalente (ou seja, para todo $y \in B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right)$, o conjunto $F^{-1}(y)$ tem um ou mais elementos). $\square$

Observação 5.4. Um exemplo em que a aplicação inversa é multivalente é o Exemplo 5.1: $P : C^\infty([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ definida por $P(f) = f'$. Considerando, por exemplo, a função $g \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ definida por $g(x) = x$, existem infinitas funções $f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ tais que $f \in P^{-1}(g)$:

$$P^{-1}(g) = \{f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R}) : f' = g\} = \left\{f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R}) : f(x) = \frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}\right\}$$

Corolário 5.4 (Inversa lipschitziana). Sejam $X = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$ e $Y = \bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k$ espaços de Fréchet graduados, com Y standard, e seja $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação satisfazendo às condições de (1) a (5) do Teorema 5.2. Então, para quaisquer $y_0, y_1 \in B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right)$, $x_0 \in F^{-1}(y_0)$ e $\mu > m'_{k_0}$, temos:

$$\begin{aligned} \inf\{\|x_0 - x_1\|_{k_0} : x_1 \in F^{-1}(y_1)\} &= \inf\{\|x_0 - x_1\|_{k_0} : F(x_1) = y_1\} \\ &\leq \mu\|y_0 - y_1\|_{k_0+d_2} \end{aligned} \quad (5.132)$$

Demonstração. Tomemos algum $R' > 0$ tal que $R' < R$ e $\max\{\|y_0\|_{k_0+d_2}, \|y_1\|_{k_0+d_2}\} < \frac{R'}{m'_{k_0}}$. Então, $y_0, y_1 \in B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R'}{m'_{k_0}}\right)$. Consideremos o segmento de reta $y_t = y_0 + t(y_1 - y_0)$, $0 \leq t \leq 1$ (ou seja, o segmento que liga t_0 a t_1). Como as bolas em um espaço vetorial normado são convexas (Exemplo 1.12), concluímos que $y_t \in B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R'}{m'_{k_0}}\right)$ para todo $t \in [0, 1]$, então $\|y_t\|_{k_0+d_2} < \frac{R'}{m'_{k_0}}$ para todo $t \in [0, 1]$. Logo, para todo $t \in [0, 1]$, temos pelo Corolário 5.3 que existe $x_t \in F^{-1}(y_t)$ tal que $\|x_t\|_{k_0} < R'$. Para cada $t \in [0, 1]$, definamos a função $F_t : X \longrightarrow Y$ por $F_t(x) = F(x + x_t) - y_t$. Assim, considerando as hipóteses do Teorema 5.2, temos que $\|x + x_t\|_{k_0} < R$. Logo:

$$\|x\|_{k_0} = \|x + x_t - x_t\|_{k_0} \leq \|x + x_t\|_{k_0} + \|-x_t\|_{k_0} < R + R'$$

Temos que:

- (1) $F_t(0) = F(0 + x_t) - y_t = F(x_t) - y_t = 0$;
- (2) Em relação à variável $x \in X$, temos que F é contínua e Gateaux-diferenciável

(por hipótese) e y_t também é (pois y_t é constante com relação a x), então F_t é contínua e Gateaux-diferenciável. Neste caso, temos que, para todo $u \in X$:

$$\begin{aligned} DF_t(x)(u) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F_t(x + su) - F_t(x)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(x + su + x_t) - y_t - F(x + x_t) + y_t}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(x + x_t + su) - F(x + x_t)}{s} = DF(x + x_t)(u) \end{aligned}$$

- (3) Por hipótese (condição (3) do Teorema 5.2), temos que, para todo $u \in X$, existe um número real $c_2(u) > 0$ tal que $\|DF(x)(u)\|_k \leq c_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (ver desigualdade (5.30)). Logo, para quaisquer $u \in X$ e $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} \|DF_t(x)(u)\|_k &= \|DF(x + x_t)(u)\|_k \leq c_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x + x_t)\|_k) \\ &= c_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F_t(x) + y_t\|_k) \\ &\leq c_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F_t(x)\|_k + \|y_t\|_k) \\ &\leq c_2(u) \left(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F_t(x)\|_k + \frac{R'}{m'_{k_0}} \right) \end{aligned}$$

Pela Observação 5.3, temos que existe um número real $c'_2(u) > 0$ tal que:

$$\|DF_t(x)(u)\|_k \leq c'_2(u) (m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F_t(x)\|_k)$$

- (4) Por hipótese, temos que existe uma aplicação linear $L(x + x_t) : Y \longrightarrow X$ tal que $DF(x + x_t)L(x + x_t) = I_Y$ (ver desigualdade (5.31)). Então, $DF_t(x)L(x + x_t) = I_Y$. Definindo $L_t : Y \longrightarrow X$ por $L_t(x) = L(x + x_t)$, temos que $DF_t(x)L_t(x) = I_Y$. Portanto, $DF_t(x)$ possui uma inversa à direita $L_t(x)$.

- (5) Por hipótese (ver desigualdade (5.32)), temos que, para quaisquer $v \in Y$ e $k \in \mathbb{N}$, $\|L(x + x_t)(v)\|_k \leq m'_k\|v\|_{k+d_2}$. Então, para todo $v \in Y$, tem-se que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|L_t(x)(v)\|_k \leq m'_k\|v\|_{k+d_2}$$

Então, a aplicação $F_t : X \longrightarrow Y$ definida por $F_t(x) = F(x + x_t) - y_t$ satisfaz todas as condições de (1) a (5) do Teorema 5.2, com $\|x\|_{k_0} < R + R'$. Temos, em particular, que $F_0(x) = F(x + x_0) - y_0$ satisfaz as condições de (1) a (5) do Teorema 5.2, com $\|x\|_{k_0} < R + R'$. Note que $F_0(x - x_0) = F(x - x_0 + x_0) - y_0 = F(x) - y_0$. Se $y = F(x)$, então $F_0(x - x_0) = y - y_0$. Pelo Corolário 5.2 aplicado à função F_0 , se $\|y - y_0\|_{k_0+d_2} < \frac{R + R'}{m'_{k_0}}$ então, para todo $\mu > m'_{k_0}$, existe $x - x_0 \in F_0^{-1}(y - y_0)$ (ou

seja, $x \in F^{-1}(y)$ tal que:

$$\|x - x_0\|_{k_0} \leq \mu \|y - y_0\|_{k_0+d_2}$$

Para todo $x_1 \in F^{-1}(y_1)$, temos que $F_0(x_1 - x_0) = F(x_1) - y_0 = y_1 - y_0$. Observe também que $\|y_0 - y_1\|_{k_0+d_2} \leq \|y_0\|_{k_0+d_2} + \|y_1\|_{k_0+d_2} < \frac{R'}{m'_{k_0}} + \frac{R'}{m'_{k_0}} < \frac{R+R'}{m'_{k_0}}$. Então, existe algum $x'_1 \in F^{-1}(y_1)$ tal que:

$$\|x'_1 - x_0\|_{k_0} \leq \mu \|y_1 - y_0\|_{k_0+d_2}$$

Como $\|\cdot\|_{k_0}$ é uma norma, temos que $\|x_1 - x_0\|_{k_0} \geq 0$ para todo $x_1 \in F^{-1}(y_1)$, então o conjunto $\{\|x_1 - x_0\|_{k_0} : x_1 \in F^{-1}(y_1)\}$ é limitado inferiormente, assim possui ínfimo. Portanto:

$$\inf\{\|x_1 - x_0\|_{k_0} : x_1 \in F^{-1}(y_1)\} \leq \|x'_1 - x_0\|_{k_0} \leq \mu \|y_1 - y_0\|_{k_0+d_2}$$

Assim, provamos a desigualdade (5.132). $\square$

Corolário 5.5 (Regularidade finita). Sejam $X = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$ e $Y = \bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k$ espaços de Fréchet graduados, com Y standard, e seja $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação satisfazendo às condições de (1) a (5) do Teorema 5.2. Suponhamos que F se estende a uma aplicação contínua $\bar{F} : X_{k_0} \longrightarrow Y_{k_0+d_2}$ e tomemos algum ponto $y \in Y_{k_0+d_2}$ tal que $\|y\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}}$. Então existe algum ponto $x \in X_{k_0}$ tal que $\|x\|_{k_0} < R$ e $\bar{F}(x) = y$. Além disso, a inversa $\bar{F}^{-1} : B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right) \longrightarrow B_X(k_0, R)$ satisfaz uma condição de Lipschitz análoga à desigualdade (5.132): para quaisquer $y_0, y_1 \in Y_{k_0+d_2}$ com $\|y_0\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}}$ e $\|y_1\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}}$, $x_0 \in \bar{F}^{-1}(y_0)$ e $\mu > m'_{k_0}$, temos:

$$\inf\{\|x_0 - x_1\|_{k_0} : \bar{F}(x_1) = y_1\} \leq \mu \|y_0 - y_1\|_{k_0+d_2} \quad (5.133)$$

Demonstração. Tomemos $R' > 0$ tal que $R' < R$ e $\|y\|_{k_0+d_2} < \frac{R'}{m'_{k_0}}$. Como $y \in Y_{k_0+d_2}$ e $Y_{k_0+d_2}$ é um espaço de Banach, existe uma sequência $b_n \in Y_{k_0+d_2}$ tal que $b_n \rightarrow y$ em $Y_{k_0+d_2}$, ou seja, tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|b_n - y\|_{k_0+d_2} = 0$. Então, existe uma sequência $b_n \in Y_{k_0+d_2}$ tal que $\|b_n - y\|_{k_0+d_2} < \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\|b_n\|_{k_0+d_2} \leq \|y\|_{k_0+d_2} + \|b_n - y\|_{k_0+d_2} < \frac{R'}{m'_{k_0}} + \frac{1}{2^n} = \frac{R' + \frac{m'_{k_0}}{2^n}}{m'_{k_0}},$$

ou seja, $b_n \in B_Y \left(k_0 + d_2, \frac{R' + \frac{m'_{k_0}}{2^n}}{m'_{k_0}} \right)$. Além disso, como $y \in B_Y \left(k_0 + d_2, \frac{R'}{m'_{k_0}} \right)$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $B_Y \left(k_0 + d_2, \frac{R'}{m'_{k_0}} \right) \subset B_Y \left(k_0 + d_2, \frac{R' + \frac{m'_{k_0}}{2^n}}{m'_{k_0}} \right)$, concluimos que $y \in B_Y \left(k_0 + d_2, \frac{R' + \frac{m'_{k_0}}{2^n}}{m'_{k_0}} \right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, pelo Corolário 5.4, temos que, para $b_n \in B_Y \left(k_0 + d_2, \frac{R' + \frac{m'_{k_0}}{2^n}}{m'_{k_0}} \right)$ existe uma sequência $a_n \in F^{-1}(b_n)$ (neste caso, $a_n \in B_X(k_0, R' + \frac{m'_{k_0}}{2^n})$, ou seja, $a_n \in X_{k_0}$) tal que se $\mu > R + \frac{m'_{k_0}}{2^n}$ então:

$$\underbrace{\inf\{\|a_n - a_{n+1}\|_{k_0} : a_{n+1} \in F^{-1}(b_{n+1})\}}_{\|a_n - a_{n+1}\|_{k_0}} \leq \mu \|b_n - b_{n+1}\|_{k_0 + d_2}$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} \|a_n - a_{n+1}\|_{k_0} &\leq \mu \|b_n - b_{n+1}\|_{k_0 + d_2} \leq \mu (\|b_n - y\|_{k_0 + d_2} + \|y - b_{n+1}\|_{k_0 + d_2}) \\ &\leq \mu \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \leq \mu \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right) = \frac{\mu}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Então, para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$ com $p > n$, temos:

$$\|a_n - a_p\|_{k_0} \leq \sum_{j=n}^{p-1} \|a_j - a_{j+1}\|_{k_0} = \sum_{j=n}^{p-1} \frac{\mu}{2^{j-1}} = \mu \cdot \sum_{j=n}^{p-1} \frac{1}{2^{j-1}} \leq \mu \cdot \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{\mu}{2^{n-2}}$$

Portanto, a sequência $(a_n) \subset X_{k_0}$ é de Cauchy. Como X_{k_0} é completo, concluimos que existe $x \in X_{k_0}$ tal que $a_n \rightarrow x$ em X_{k_0} . Como $\|a_n\|_{k_0} < R' + \frac{m'_{k_0}}{2^n}$ e a norma $\|\cdot\|_{k_0}$ é contínua, segue que:

$$\|x\|_{k_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_{k_0} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(R' + \frac{m'_{k_0}}{2^n} \right) = R' < R$$

Como a função $\overline{F} : X_{k_0} \rightarrow Y_{k_0 + d_2}$ é a extensão de F a X_{k_0} , temos que $\overline{F}(a_n) = F(a_n) = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\overline{F}$ é contínua (por hipótese), segue que $\overline{F}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{F}(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y$. Por fim, vamos mostrar agora a condição de Lipschitz da desigualdade (5.133). Sejam $y_0, y_1 \in Y_{k_0 + d_2}$ e seja $x_0 \in \overline{F}^{-1}(y_0)$. Temos que $x_0 \in X_{k_0}$, então existe uma sequência $(c_{0,n}) \subset X$ tal que $c_{0,n} \rightarrow x_0$ na norma $\|\cdot\|_{k_0}$. Como $\overline{F}$ é a

extensão de F a X_{k_0} e é contínua, temos que:

$$y_0 = \overline{F}(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{F}(c_{0,n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(c_{0,n})$$

Definamos a sequência $(d_{0,n}) \subset Y$ por $d_{0,n} = F(c_{0,n})$. Então, $d_{0,n} \rightarrow y_0$ na norma $\|\cdot\|_{k_0+d_2}$. Tomemos uma sequência $(d_{1,n}) \subset Y$ tal que $d_{1,n} \rightarrow y_1$ na norma $\|\cdot\|_{k_0+d_2}$ e uma sequência $(c_{1,n}) \subset X$ tal que $F(c_{1,n}) = d_{1,n}$ (ou seja, $c_{1,n} \in F^{-1}(d_{1,n})$). Como a inversa F é lipschitziana (pelo Corolário 5.4), temos que F^{-1} é contínua (ver Exemplo 1.3), logo, pela Proposição 1.5, temos que $F^{-1}(d_{1,n}) \rightarrow F^{-1}(y_1)$. Então, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_{1,n} \in F^{-1}(y_1)$. Seja $x_1 \in F^{-1}(y_1)$ tal que $c_{1,n} \rightarrow x_1$ na norma $\|\cdot\|_{k_0}$. Pela desigualdade (5.132), temos que, para todo $\mu > m'_{k_0}$, a desigualdade

$$\inf\{\|c_{0,n} - c_{1,n}\|_{k_0} : F(c_{1,n}) = d_{1,n}\} \leq \mu \|d_{0,n} - d_{1,n}\|_{k_0+d_2} \quad (5.134)$$

vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\overline{F}$ é uma extensão de F a X_{k_0} , temos que $\overline{F}(c_{1,n}) = F(c_{1,n}) = d_{1,n}$, então:

$$\inf\{\|c_{0,n} - c_{1,n}\|_{k_0} : \overline{F}(c_{1,n}) = d_{1,n}\} \leq \mu \|d_{0,n} - d_{1,n}\|_{k_0+d_2} \quad (5.135)$$

Como $\overline{F}$ é contínua, temos que $\overline{F}(x_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{F}(c_{1,n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_{1,n} = y_1$. Tomando o limite com $n \rightarrow +\infty$ na desigualdade (5.135), obtemos:

$$\inf\{\|x_0 - x_1\|_{k_0} : \overline{F}(x_1) = y_1\} \leq \mu \|y_0 - y_1\|_{k_0+d_2} \quad (5.136)$$

Portanto, $\overline{F}$ satisfaz a condição de Lipschitz da desigualdade (5.133). $\square$

Combinamos o Teorema 5.2 e os Corolários 5.2, 5.4 e 5.5 para obter o enunciado completo do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland:

Teorema 5.3 (Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland). *Sejam $X = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$ e $Y = \bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k$ espaços de Fréchet graduados, com Y standard, e seja $F : X \rightarrow Y$ uma aplicação. Suponha que existam algum inteiro $k_0 \geq 0$, alguma constante $R > 0$ (finita ou igual a $+\infty$), dois inteiros $d_1, d_2 \geq 0$ e duas sequências não-decrescentes $m_k > 0$ e $m'_k > 0$ tais que, para todo $x \in X$ tal que $\|x\|_{k_0} < R$, tem-se:*

(1) $F(0) = 0$;

(2) F é contínua e Gateaux-diferenciável;

(3) Para todo $u \in X$, existe um número real $c_2(u) > 0$ tal que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|DF(x)(u)\|_k \leq c_2(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k) \quad (5.137)$$

(4) Existe uma aplicação linear $L(x) : Y \longrightarrow X$ tal que $DF(x)L(x) = I_Y$:

$$\forall v \in Y, DF(x)L(x)(v) = v \quad (5.138)$$

(ou seja, $DF(x)$ possui uma inversa à direita $L(x)$);

(5) Para todo $v \in Y$, tem-se que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|L(x)(v)\|_k \leq m'_k\|v\|_{k+d_2} \quad (5.139)$$

Então existe a aplicação inversa $F^{-1} : Y \longrightarrow X$, a qual estabelece uma aplicação entre as bolas $B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right) = \left\{y \in Y : \|y\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}}\right\}$ e $B_X(k_0, R) = \{x \in X : \|x\|_{k_0} < R\}$. Além disso, para todo $\mu > m'_{k_0}$ a inversa F^{-1} satisfaz uma condição de Lipschitz:

$$\inf\{\|x_0 - x_1\|_{k_0} : x_1 \in F^{-1}(y_1)\} \leq \mu\|y_0 - y_1\|_{k_0+d_2} \quad (5.140)$$

Por fim, se F se estende a uma aplicação contínua $\bar{F} : X_{k_0} \longrightarrow Y_{k_0+d_2}$, então a inversa $\bar{F}^{-1}$ estabelece uma aplicação entre as bolas $B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right)$ e $B_X(k_0, R)$, e a inversa $\bar{F}^{-1} : B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right) \longrightarrow B_X(k_0, R)$ satisfaz a seguinte condição de Lipschitz:

$$\inf\{\|x_0 - x_1\|_{k_0} : x_1 \in \bar{F}^{-1}(y_1)\} \leq \mu\|y_0 - y_1\|_{k_0+d_2} \quad (5.141)$$

Demonstração. Segue do Teorema 5.2 que existe a aplicação inversa F^{-1} . Segue do Corolário 5.2 que F^{-1} estabelece uma aplicação entre as bolas $B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right) = \left\{y \in Y : \|y\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}}\right\}$ e $B_X(k_0, R) = \{x \in X : \|x\|_{k_0} < R\}$. Segue do Corolário 5.4 que a inversa $F^{-1} : B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right) \longrightarrow B_X(k_0, R)$ satisfaz a condição de Lipschitz da desigualdade (5.140). Segue do Corolário 5.5 que, se $\bar{F}$ estende F a X_{k_0} , então a inversa $\bar{F}^{-1}$ estabelece uma aplicação entre as bolas $B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right)$ e $B_X(k_0, R)$, e a inversa $\bar{F}^{-1} : B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right) \longrightarrow B_X(k_0, R)$ satisfaz à condição de Lipschitz da desigualdade (5.141). $\square$

Observação 5.5. Note que as condições do Teorema da Aplicação Inversa de Nash-Moser (Teorema 3.11) são muito restritivas:

- Os espaços F e G devem ser mansos (ou seja, um tipo particular de espaços graduados);
- A aplicação P deve ser suave (ou seja, de classe C^∞) e mansa;
- A família de inversas VP também deve ser suave e mansa.

Por outro lado, no caso do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland (Teorema 5.3), observamos que:

- Os espaços X e Y devem ser graduados, com Y standard, mas não precisam ser mansos;
- A aplicação F não precisa ser de classe C^∞ . Na realidade, F não precisa sequer ser de classe C^1 ! Basta que F seja contínua e Gateaux-diferenciável;
- Não é necessário verificar que a família de inversas das derivadas $DF(x)$ seja suave e mansa. A única condição requerida para cada inversa $L(x)$ é satisfazer uma desigualdade análoga à continuidade entre as normas $\|\cdot\|_k$ e $\|\cdot\|_{k+d_2}$.

Dessa forma, concluímos que o Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland é mais geral do que o Teorema da Aplicação Inversa de Nash-Moser.

Para finalizar esta seção, apresentaremos um Teorema da Função Implícita obtido por Ekeland [8] a partir do Teorema da Aplicação Inversa (Teorema 5.3):

Teorema 5.4 (Teorema da Função Implícita de Ekeland). *Sejam $X = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$ e $Y = \bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k$ espaços de Fréchet, com Y standard, e consideremos duas aplicações $F_0, F_1 : X \longrightarrow Y$. Seja $F : X \times \mathbb{R} \longrightarrow Y$ uma aplicação definida por $F(x, \varepsilon) = F_0(x) + \varepsilon F_1(x)$. Suponha que existam inteiros $k_0, d_1, d_2 \geq 0$, sequências $m_k, m'_k > 0$ e números $R, \varepsilon_0 > 0$ tais que, para todo $(x, \varepsilon) \in X \times \mathbb{R}$ tal que $\|x\|_{k_0} \leq R$ e $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, tem-se:*

- (1) $F_0(0) = 0$ e $F_1(0) \neq 0$;
- (2) F_0 e F_1 são contínuas e Gateaux-diferenciáveis;
- (3) Para todo $(u, \delta) \in X \times \mathbb{R}$, existe um número real $c_2(u, \delta) > 0$ tal que:

$$\forall k \geq 0, \|DF(x, \varepsilon)(u, \delta)\|_k \leq c_2(u, \delta)(m_k\|(u, \delta)\|_{k+d_1} + \|F(x, \varepsilon)\|_k) \quad (5.142)$$

- (4) Existe uma aplicação linear $L(x, \varepsilon) : Y \longrightarrow X \times \mathbb{R}$ tal que:

$$DF(x, \varepsilon)L(x, \varepsilon) = I_Y \quad (5.143)$$

(ou seja, $DF(x, \varepsilon)$ possui uma inversa à direita $L(x, \varepsilon)$);

(5) Para todo $v \in Y$, temos:

$$\forall k \geq 0, \|L(x, \varepsilon)(v)\|_k \leq m'_k \|v\|_{k+d_2} \quad (5.144)$$

Então, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que

$$|\varepsilon| < \min \left\{ \frac{R}{m'_{k_0} \|F_1(0)\|_{k_0+d_2}}, \varepsilon_0 \right\} \quad (5.145)$$

e para todo $\mu > m'_{k_0}$, existe um $x_\varepsilon \in X$ tal que:

$$F(x_\varepsilon, \varepsilon) = 0 \quad (5.146)$$

e

$$\|x_\varepsilon\|_{k_0} \leq \mu |\varepsilon| \|F_1(0)\|_{k_0+d_2}. \quad (5.147)$$

Demonstração. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}$ com $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Consideremos a aplicação $G_\varepsilon : X \rightarrow Y$ definida por:

$$G_\varepsilon(x) := F_0(x) + \varepsilon(F_1(x) - F_1(0))$$

Assim, $G_\varepsilon(x) = F(x, \varepsilon) - \varepsilon F_1(0)$, ou seja, $F(x, \varepsilon) = G_\varepsilon(x) + \varepsilon F_1(0)$. Temos que:

$$(1) \ G_\varepsilon(0) = F_0(0) + \varepsilon(F_1(0) - F_1(0)) = 0 + \varepsilon \cdot 0 = 0.$$

(2) F_0 e F_1 são contínuas e Gateaux-diferenciáveis, por hipótese. Então, εF_1 é contínua e Gateaux-diferenciável (ver Proposição 3.7). Além disso, a constante $\varepsilon F_1(0)$ é Gateaux-diferenciável (ver Exemplo 3.18). Portanto, $G_\varepsilon(x) := F_0(x) + \varepsilon(F_1(x) - F_1(0))$ é contínua e Gateaux-diferenciável. Nesse caso, a derivada de Gateaux de G_ε no ponto $x \in X$ na direção do vetor $u \in X$ é dada por:

$$DG_\varepsilon(x)(u) = DF_0(x)(u) + \varepsilon DF_1(x)(u)$$

Outra expressão para a derivada de Gateaux de G_ε é a seguinte:

$$\begin{aligned} DG_\varepsilon(x)(u) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G_\varepsilon(x + tu) - G_\varepsilon(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + tu, \varepsilon) - \varepsilon F_1(0) - F(x, \varepsilon) + \varepsilon F_1(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + tu, \varepsilon) - F(x, \varepsilon)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + tu, \varepsilon + 0t) - F(x, \varepsilon)}{t} \\ &= DF(x, \varepsilon)(u, 0) \end{aligned}$$

- (3) Utilizando a desigualdade (5.142) e as propriedades básicas da norma, temos que, para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todo $u \in X$, existe um número real $c_4(u) = c_2(u, 0)$ tal que:

$$\begin{aligned} \|DG_\varepsilon(x)(u)\|_k &= \|DF(x, \varepsilon)(u, 0)\|_k \leq c_2(u, 0)(m_k\|(u, 0)\|_{k+d_1} + \|F(x, \varepsilon)\|_k) \\ &= c_4(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|G_\varepsilon(x) + \varepsilon F_1(0)\|_k) \\ &\leq c_4(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|G_\varepsilon(x)\|_k + \|\varepsilon F_1(0)\|_k) \end{aligned}$$

Pela Observação 5.3, concluímos que, para todo $u \in X$, existe um número real $c_4(u) > 0$ tal que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|DG_\varepsilon(x)(u)\|_k \leq c_4(u)(m_k\|u\|_{k+d_1} + \|G_\varepsilon(x)\|_k)$$

- (4) Definamos a aplicação $L_\varepsilon : Y \longrightarrow X$ tal que $L_\varepsilon(v) = L(x, \varepsilon)(v)$. Para quaisquer $v_1, v_2 \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

$$L_\varepsilon(v_1 + \lambda v_2) = L(x, \varepsilon)(v_1 + \lambda v_2) = L(x, \varepsilon)(v_1) + \lambda L(x, \varepsilon)(v_2) = L_\varepsilon(v_1) + \lambda L_\varepsilon(v_2)$$

pois $L(x, \varepsilon) : Y \longrightarrow X \times \mathbb{R}$ é linear. Então, $L_\varepsilon(x)$ é linear. Além disso, temos que:

$$DG_\varepsilon(x)L_\varepsilon(v) = DF(x, \varepsilon)L(x, \varepsilon)(v) = v$$

Então, $L_\varepsilon(x)$ é a inversa à direita de $DG_\varepsilon(x)$.

- (5) Pela desigualdade (5.144), temos, para quaisquer $v \in Y$ e $k \in \mathbb{N}$:

$$\|L_\varepsilon(x)(v)\|_k = \|L(x, \varepsilon)(v)\|_k \leq m'_k\|v\|_{k+d_2}$$

Então, pelo Teorema 5.3, existe $y \in B_Y\left(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}}\right)$ tal que $G_\varepsilon(x) = y$, ou seja, $F_0(x) + \varepsilon(F_1(x) - F_1(0)) = y$, o que equivale à equação $F(x, \varepsilon) - \varepsilon F_1(0) = y$, ou seja, $F(x, \varepsilon) = y + \varepsilon F_1(0)$. Para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $|\varepsilon| < \min\left\{\frac{R}{m'_{k_0}\|F_1(0)\|_{k_0+d_2}}, \varepsilon_0\right\}$ (equação (5.145)), seja $y_\varepsilon \in Y$ definido por $y_\varepsilon = -\varepsilon F_1(0)$, então:

$$\|y_\varepsilon\|_{k_0+d_2} = \|-\varepsilon F_1(0)\|_{k_0+d_2} = |\varepsilon|\|F_1(0)\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}\|F_1(0)\|_{k_0+d_2}} \cdot \|F_1(0)\|_{k_0+d_2} = \frac{R}{m'_{k_0}}$$

Assim, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $\|x_\varepsilon\|_{k_0} < R$ e $F(x_\varepsilon, \varepsilon) = y_\varepsilon + \varepsilon F_1(0) = 0$. Neste caso, pelo Corolário 5.2, temos que, para todo $\mu > m'_{k_0}$, $\|x_\varepsilon\|_{k_0} \leq \mu\|y_\varepsilon\|_{k_0+d_2} = \mu|\varepsilon|\|F_1(0)\|_{k_0+d_2}$.

□

Observação 5.6. O significado do Teorema da Função Implícita de Ekeland é que se $F : X \times \mathbb{R} \longrightarrow Y$ satisfaz as condições apresentadas então existe uma função implícita $p : \mathbb{R} \longrightarrow X$ (ou seja, uma curva no espaço de Fréchet X) tal que $p(\varepsilon) = x_\varepsilon$ e $F(p(\varepsilon), \varepsilon) = 0$.

5.3 Avanços posteriores e aplicações

Entre o surgimento dos primeiros teoremas da aplicação inversa para espaços de Fréchet e a publicação do Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland no artigo [8], se passaram quase 60 anos. Essa evolução na busca por teoremas da aplicação inversa mais fortes não parou por aí: depois do resultado do Ekeland em 2011, diversos matemáticos (incluindo o próprio Ekeland) publicaram novos resultados que generalizam o Teorema 5.3 (ou algum dos seus resultados auxiliares, tais como o Teorema 5.1 para espaços de Banach). Por exemplo, em 2015, I. Ekeland e E. Séré [10] publicaram o seguinte Teorema da Aplicação Inversa para espaços de Banach:

Teorema 5.5 (Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland-Séré). *Sejam X e Y espaços de Banach. Seja $f : X \longrightarrow Y$ contínua e Gateaux-diferenciável, com $f(0) = 0$. Suponha que a derivada $Df(x)$ tenha uma inversa à direita $L(x)$, uniformemente limitada em uma vizinhança de 0:*

- $Df(x)L(x)(h) = h$
- $\sup\{\|L(x)\| : \|x\| \leq R\} < m$

Então, para todo $y \in Y$ com $\|y\| \leq \frac{R}{m}$, existe algum $\bar{x} \in X$, com $\|\bar{x}\| \leq R$, tal que $f(\bar{x}) = \bar{y}$ e $\|\bar{x}\| \leq m\|\bar{y}\|$.

Demonstração. A demonstração se encontra disponível no artigo [10] (ver o teorema 1 de [10] e os resultados auxiliares). □

As hipóteses iniciais do Teorema 5.5 são praticamente as mesmas do Teorema 5.1 (X e Y espaços de Banach, função contínua e Gateaux-diferenciável, inversa à direita uniformemente limitada, entre outras). Sob estas hipóteses, a tese do Teorema 5.1 é que se $\|\bar{y}\| < \frac{R}{m}$ e $\mu > m$ então existe $\bar{x} \in X$ tal que $\|\bar{x}\| < R$, $\|\bar{x}\| \leq \mu\|\bar{y}\|$ e $F(\bar{x}) = \bar{y}$. Por outro lado, sob as mesmas hipóteses comuns, a tese do Teorema 5.5 é que se $\|\bar{y}\| \leq \frac{R}{m}$ (ou seja, a desigualdade não é estrita) então existe $\bar{x} \in X$ tal que $\|\bar{x}\| \leq R$, $\|\bar{x}\| \leq m\|\bar{y}\|$ e $F(\bar{x}) = \bar{y}$ (ou seja, não é necessário utilizar uma constante adicional μ). Por isso, no contexto dos espaços de Banach, o Teorema 5.5 é mais forte

que o Teorema 5.1, mesmo que de forma aparentemente sutil (mas as demonstrações são muito diferentes).

No contexto dos espaços de Fréchet em geral, podemos citar, por exemplo, uma extensão do Corolário 5.2 que foi provada por R. Cibulka e M. Fabian em 2019 [5]:

Teorema 5.6 (Teorema da Aplicação Inversa de Cibulka-Fabian). *Sejam $d_1, d_2 \geq 0$ dois números inteiros não-negativos, $R \in (0, 1)$ e $(m_k)_{k \geq 0}$ uma sequência de termos positivos. Sejam $X = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$ e $Y = \bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k$ espaços de Fréchet graduados gerados, respectivamente, pelas sequências de normas $(\|\cdot\|_k)_{k \geq 0}$ e $(|\cdot|_k)_{k \geq 0}$, onde Y é standard. Sendo $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in Y$, $R > 0$, $r > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, definamos as seguintes bolas:*

$$B_X(\bar{x}, R, \|\cdot\|_k) = \{x \in X : \|x - \bar{x}\|_k < R\}$$

$$B_Y(\bar{y}, r, |\cdot|_k) = \{y \in Y : |y - \bar{y}|_k < r\}$$

Seja $g : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua, com domínio fechado Ω , e seja fixado $\bar{x} \in \Omega$. Sendo $u \in X$, definamos o seguinte conjunto:

$$K(u, \Omega) := \{h \in X : [u, u + sh] \subset \Omega \text{ para algum } s > 0\},$$

onde $[u, u + sh] = \{u + th \in X : 0 \leq t \leq s\}$. Suponha que g satisfaz as seguintes condições:

- (i) Para todo $h \in X$, existe $\delta(h) > 0$ tal que, para todo $u \in \Omega \cap B_X(\bar{x}, R, \|\cdot\|_0)$, se $h \in K(u, \Omega)$, a derivada direcional $g'_+(u)(h)$ existe e

$$|g'_+(u)(h)|_k \leq \delta(h) \cdot (m_k \|h\|_{k+d_1} + |g(u)|_k) \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

- (ii) Para todo $u \in \Omega \cap B_X(\bar{x}, R, \|\cdot\|_0)$ e para todo $v \in Y$, existe um ponto $h \in K(u, \Omega)$ tal que

$$g'_+(u)(h) = v \text{ e } \|h\|_k \leq m_k |v|_{k+d_2} \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Então, $B_Y\left(g(\bar{y}), \frac{t}{m_0}, |\cdot|_{d_2}\right) \subset g(\Omega \cap B_X(\bar{x}, t, \|\cdot\|_0))$ para todo $t \in (0, R)$.

Demonstração. A demonstração se encontra disponível no artigo [5] (ver o teorema 2 de [5] e os resultados auxiliares). $\square$

O Teorema 5.6 é mais geral do que os resultados de Ekeland (Teorema 5.2 e Corolário 5.2) pelas seguintes razões:

- Nos resultados de Ekeland (Teorema 5.2 e Corolário 5.2), a aplicação g (denotada por F no artigo de Ekeland [8]) é definida em uma bola centrada em 0

$(B_X(k_0, R) = \{x \in X : \|x\|_{k_0} < R\}$, que seria denotada por $B_X(0, R, \|\cdot\|_{k_0})$ no artigo [5]), enquanto no Teorema 5.6 a aplicação g é definida em uma bola cujo centro pode ser qualquer ponto $\bar{x} \in \Omega$.

- Os resultados de Ekeland (Teorema 5.2 e Corolário 5.2) requerem a Gateaux-diferenciabilidade de g , enquanto o Teorema 5.6 requer apenas a existência das derivadas de Gateaux de g em algumas direções.
- O Teorema 5.2 utiliza duas sequências (m_k) e (m'_k) em seu enunciado, enquanto o Teorema 5.6 utiliza apenas uma sequência (m_k) . Além disso, o Teorema 5.6 requer uma condição mais geral do que a existência de uma aplicação linear $L(x) : Y \longrightarrow X$ que seja a inversa à direita de $DF(x)$. Para mais detalhes sobre esses fatores que tornam o Teorema 5.6 mais geral que os resultados do Ekeland, ver [5], páginas 536 e 537.

Além disso, os avanços na Matemática promovidos pelo Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland não se restringem ao desenvolvimento de teoremas da aplicação inversa mais fortes para espaços de Fréchet. Por exemplo, alguns trabalhos de R. Huang e colaboradores (ver [4], [14], [15] e [36] para mais detalhes) aplicaram o Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland ao estudo de diversas classes de equações diferenciais parciais parabólicas não-lineares. Isso mostra que o Teorema da Aplicação Inversa de Ekeland contribuiu para diversos avanços teóricos e práticos nas áreas de Análise Não-Linear e Equações Diferenciais Parciais.

Referências Bibliográficas

- [1] C. D. ALIPRANTIS, K. C. BORDER, *Infinite Dimensional Analysis*, Springer, 2006.
- [2] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO, E. TEIXEIRA. *Fundamentos de Análise Funcional*. Rio de Janeiro: SBM, 2015. [Coleção Textos Universitários]
- [3] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
- [4] J. CHEN, R. HUANG, Y. YE, *On the Second Boundary Value Problem for a Class of Fully Nonlinear Flows II*, Arch. Math. 111 (2018), 407-419.
- [5] R. CIBULKA, M. FABIAN, *On Nash-Moser-Ekeland Inverse Mapping Theorem*, Vietnam Journal of Mathematics, Volume 47, N° 3 (2019), 527-545.
- [6] J. B. CONWAY, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1990.
- [7] H. H. DOMINGUES. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*. São Paulo: Atual, 1982.
- [8] I. EKELAND, *An inverse function theorem in Fréchet spaces*, Annales de l'Institut Henri Poincaré - AN 28 (2011), 91-105.
- [9] I. EKELAND, *On the Variational Principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 47 (1974), 324-353.
- [10] I. EKELAND, E. SÉRÉ, *An implicit function theorem for non-smooth maps between Fréchet spaces*, preprint (2015). arXiv:1502.01561
- [11] P. J. FERNANDEZ. *Medida e Integração*. Rio de Janeiro: IMPA, 2002. [Projeto Euclides]
- [12] D. G. DE FIGUEIREDO, *Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Springer-Verlag, 1989.

- [13] R. S. HAMILTON, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bulletin of American Mathematical Society, Vol. 7, N° 1 (1982), 65-222.
- [14] R. HUANG, Y. YE, *On the Second Boundary Value Problem for a Class of Fully Nonlinear Flows I*, International Mathematics Research Notices, Vol. 2019, N° 18 (2019), 5539-5576.
- [15] R. HUANG, *On the second boundary value problem for Lagrangian mean curvature flow*, Journal of Functional Analysis 269 (2015), 1095-1114.
- [16] J. K. HUNTER, B. NACHTERGAELE, *Applied Analysis*, World Scientific, 2005.
- [17] C. ISNARD. *Introdução à Medida e Integração*. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. [Projeto Euclides]
- [18] E. KREYSZIG, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1978.
- [19] S. LANG, *Real and Functional Analysis*, Springer, 1993. [Graduate Texts in Mathematics]
- [20] E. L. LIMA. *Curso de Análise, volume 1*. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. [Projeto Euclides]
- [21] E. L. LIMA. *Curso de Análise, volume 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. [Projeto Euclides]
- [22] E. L. LIMA. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. [Projeto Euclides]
- [23] S. LIPSCHUTZ, *Schaum's Outline of theory and problems of general topology*, McGraw-Hill, 1965.
- [24] J. MOSER, *A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations - I*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 20, N° 2 (1966), 265-315.
- [25] J. R. MUNKRES, *Topology*, Prentice-Hall, 2000.
- [26] J. NASH, *The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds*, Annals of Mathematics, Vol. 63, N° 1 (1956), 20-63.
- [27] C. R. DE OLIVEIRA. *Introdução à Análise Funcional*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. [Projeto Euclides]

- [28] R. T. ROCKAFELLAR, *Conjugate Duality and Optimization*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1974. [CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics]
- [29] H. H. SCHAEFER, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, 1967. [Graduate Texts in Mathematics]
- [30] J. SCHWARTZ, *On Nash's Implicit Functional Theorem*, Communications in Pure and Applied Mathematics, Vol. XIII (1960), 509-530.
- [31] F. SERGERAERT, *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4^e série, tome 5, N^o 4 (1972), 599-660.
- [32] R. M. M. SETTE. *Princípio de Ekeland e o Teorema de Nash-Moser*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.
- [33] M. R. SPIEGEL, S. LIPSCHUTZ, J. J. SCHILLER, D. SPELLMAN, *Schaum's Outlines of Complex Variables*, McGraw-Hill, 2009.
- [34] J. STEWART, *Calculus*, Cengage Learning, 2012.
- [35] F. TREVES, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, 1967.
- [36] C. WANG, R. HUANG, J. BAO, *On the Second Boundary Value Problem for a Class of Fully Nonlinear Flows III*, preprint (2020). arXiv:2003.04731
- [37] C. ZALINESCU, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific, 2002.