Ranielison Dantas da Costa

A equação de Dirac em referenciais acelerados

João Pessoa

Fevereiro de 2022

Ranielison Dantas da Costa

A equação de Dirac em referenciais acelerados

Dissertação realizada no Departamento de Física da UFPB, sob orientação do Prof. Dr. Jansen Brasileiro Formiga, para a obtenção do grau de Mestre em Física.

João Pessoa

Fevereiro de 2022

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C838e Costa, Ranielison Dantas da.
A equação de Dirac em referenciais acelerados / Ranielison Dantas da Costa. - João Pessoa, 2022.
51 f.

Orientação: Jansen Brasileiro Formiga.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Geometria de curvas. 2. Minkowski. 3. Serret-Frenet. 4. Dirac. I. Formiga, Jansen Brasileiro. II. Título.

UFPB/BC CDU 514.774(043)

Elaborado por Gracilene Barbosa Figueiredo - CRB-15/794

Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** do aluno **Ranielison Dantas da Costa,** candidato a Título de Mestre em Física na Área de Gravitação e Cosmologia.

Aos vinte e um dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e dois, às 16:00, reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Gravitação e Cosmologia, **Ranielison Dantas da Costa.** A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: Jansen Brasileiro Formiga, orientador e presidente da banca examinadora, Fábio Leal de Melo Dahia (UFPB) e Raimundo Silva Júnior (UFRN). Dando início aos trabalhos, o Prof. Jansen Brasileiro Formiga comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado" A Equação de Dirac em referenciais acelerados"**.** Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado".** Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu, Bethyanne Leite Aragão, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **21 de fevereiro de 2022**.

Prof. Dr. Jansen Brasileiro Formiga
Orientador – PPGF/UFPB
Prof. Dr. Fábio Leal, de Melo Dahia — Fabio Leal de Melo Dahia
PPGF/UFPB
Prof. Raimundo Silva Júnior
UFRN

Link da reunião
https://meet.google.com/xch-bcam-pmv

Bethyanne Leite Aragão

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO
Participação em Banca

Declaro, para os devidos fins que consta dos arquivos desta Secretaria, ter a **Banca Examinadora da dissertação de Mestrado,** do aluno **Ranielison Dantas da Costa** intitulada "A Equação de Dirac em referenciais acelerados ", defendida no dia 21 de fevereiro de 2022, às 16:00, de forma remota, sido formada pelos seguintes professores:

Nome	Instituição
Jansen Brasileiro Formiga (orientador)	PPGF/UFPB
Fábio Leal de Melo Dahia	PPGF/UFPB
Raimundo Silva Júnior r	UFRN

João Pessoa, 21 de fevereiro de 2022.

Bethyanne Leite Aragão
Auxiliar em Administração

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

ATAS E DECLARAÇÕES DE DEFESA

Aluno: Ranielison Dantas da Costa

Nível: MESTARADO

Orientador: Jansen Brasileiro Formiga

Data: 21/02/2022, 16:00

Quando eu era criança, a minha professora, a senhora Marta, falou que o sol era, assim como os pontinhos que víamos durante a noite no céu, uma estrela. Aquela foi a primeira informação científica que tive, e ficou gravada em minha memória até hoje. Dedico este trabalho à todas as crianças que, assim como eu, sonharam um dia em se tornar cientistas.

Agradecimentos

Muitas pessoas contribuíram de forma direta ou indiretamente na minha formação como físico, em especial, ao meu orientador, o professor Jansen Brasileiro Formiga, e ao meu irmão e melhor amigo Ranilson por tudo que fez por mim.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Discutimos nesta dissertação alguns conceitos importantes da geometria de curvas no espaço de Minkowski, e a partir desses conceitos formulamos as equações de Serret-Frenet no espaço-tempo quadridimensional de Minkowski. Enunciamos alguns importantes teoremas, dentre eles, o teorema fundamental da teoria local das curvas em M. Mostramos também um caso geral, onde os vetores de Serret-Frenet são escritos em termos das coordenadas próprias do observador. Resolvemos as equações de Serret-Frenet para o caso particular de curvas planas, e a partir desse caso, foi possível analisar de forma clara o caso no qual a aceleração do observador é inversamente proporcional ao tempo próprio. A partir do formalismo de Serret-Frenet, apresentamos e analisamos a equação de Dirac em um referencial adaptado a um observador acelerado qualquer. A partir dessa equação e de um modelo idealizado no qual um laboratório na Terra descreve um movimento circular e uniforme na ausência do campo gravitacional, conseguimos examinar os efeitos da contribuição do tempo próprio para dois casos específicos, a saber, quando o observador está na superfície, e o outro quando o observador estiver no centro da Terra. A partir das equações de Dirac, descrevemos o movimento acelerado de um observador, tanto para o caso geral, onde não há restrição na rotação da tríade, quanto para o caso no qual a tríade gira obedecendo as equações de Serret-Frenet. Usando dados como raio e frequência angular da Terra, foi possível obter a solução da versão aproximada da equação de Dirac para um observador em rotação.

Palavras-chaves: Minkowski, Serret-Frenet e Dirac.

Abstract

In this dissertation, we discuss some important concepts of the geometry of curves in Minkowski space, and from these concepts we formulate the Serret-Frenet equations in Minkowski's four-dimensional space-time. We state some important theorems, among them, the fundamental theorem of the local theory of curves in M. We also show a general case, where the Serret-Frenet vectors are written in terms of the observer's eigencoordinates. We solved the Serret-Frenet equations for the particular case of plane curves, and from that case, it was possible to clearly analyze the case in which the observer's acceleration is inversely proportional to the proper time. From the Serret-Frenet formalism, we present and analyze the Dirac equation in a frame adapted to any accelerated observer. From this equation and an idealized model in which a laboratory on Earth describes a circular and uniform motion in the absence of the gravitational field, we were able to examine the effects of the contribution of proper time for two specific cases, namely, when the observer is on the surface. , and the other when the observer is at the center of the Earth. Based on Dirac's equations, we describe the accelerated motion of an observer, both for the general case, where there is no restriction on the rotation of the triad, and for the case in which the triad rotates obeying the Serret-Frenet equations. Using data such as Earth's radius and angular frequency, it was possible to obtain the solution of the approximate version of Dirac's equation for a rotating observer.

Key-words: Minkowski, Serret-Frenet and Dirac.

Sumário

1 INTRODUÇÃO 11

2 O ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI 15
2.1 A interpretação física do espaço-tempo de Minkowski 17
2.2 O grupo de Lorentz 19
2.3 Vetores nulos (tipo luz) e fótons 23
2.4 Vetores do tipo tempo e partículas de matéria 23
2.5 A hipótese do relógio 24

3 GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CURVAS NO M 29
3.1 Curvas regulares e comprimento de arco 29
3.2 Fórmulas de Serret-Frenet 29
3.3 Propriedades das fórmulas de Serret-Frenet 30
3.4 Consequências do Teorema Fundamental das Curvas 31
3.5 Curvas planas 31
3.6 Base de Serret-Frenet nas coordenadas próprias 32
3.7 Referencial próprio em uma base arbitrária 34
3.8 Relação entre as acelerações e as curvaturas 35
3.9 Curvas planas com aceleração inversamente proporcional ao tempo próprio. 36

4 EQUAÇÃO DE DIRAC 39
4.1 Equação de Dirac em referenciais não inerciais 39

5 CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS EM UM REFERENCIAL GIRANTE 43
5.1 Estimativa para o modelo da Terra. 49

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS. 53

REFERÊNCIAS 55

1 Introdução

Por volta do século III a.C, Euclides publicou um tratado sobre matemática, intitulado “Os elementos”, onde reuniu toda a geometria desenvolvida na Grécia antiga. O nascimento da geometria do espaço tridimensional (geometria euclidiana) se deu precisamente a partir deste trabalho publicado por Euclides. “Os elementos” de Euclides é uma das obras mais influentes da história da matemática (LOGUNOV, 2020). Por outro lado, no contexto da física, Isaac Newton formulou sua mecânica baseada na existência de um espaço absoluto que tinha as mesmas propriedades da geometria euclidiana, e que permitia a definição de um referencial onde suas leis seriam válidas, o chamado referencial inercial. Entretanto, no século XX, descobriu-se que o espaço e o tempo não são absolutos. Essa descoberta, primeiramente, levou a teoria da relatividade especial e ao espaço-tempo de Minkowski. Posteriormente, ela acabou levando a formulação da teoria da relatividade geral, onde a noção de espaço-tempo foi mudada Além disso, na relatividade geral, não existe mais os chamados “referenciais inerciais globais”. Portanto, o estudo de fenômenos físicos em referenciais acelerados se tornou fundamental para a compreensão dos fenômenos da física quando as medidas realizadas são de alta precisão, mesmo no contexto aproximado da relatividade especial. Nesta dissertação, dissertaremos sobre esse tipo de referencial no contexto da relatividade especial e da mecânica quântica relativística.

O significado físico da relatividade, embora profundo do ponto de vista científico, é um conceito simples. Ele diz que as leis da física são invariantes, independentemente do estado de movimento do observador (ISAACSON, 2007). No contexto da relatividade de Galileu, tínhamos uma receita (transformações de Galileu) de como passarmos de um referencial inercial para outro referencial, também inercial. As leis de Newton permaneciam inalteradas. Porém, quando essas transformações eram aplicadas as equações de Maxwell, que descrevem a eletrodinâmica clássica, as equações mudavam de forma; elas não eram covariantes. Era inevitável, então, perguntar: Em qual referencial inercial são válidas as equações de Maxwell? Seria um referencial em repouso com relação a um meio chamado de Éter? Einstein ousou impor o princípio da relatividade e dizer que as equações de Maxwell deveriam ser válidas em todos os referenciais inerciais. Para isso, entretanto, ele precisou abandonar a relatividade galileana. O resultado foi a adoção das transformações de Lorentz. Por sua vez, Herman Minkowski, professor de Einstein, percebeu que a nova teoria da relatividade poderia ser formulada de maneira natural em uma nova geometria, a geometria de Minkowski. Era realizado, assim, o casamento entre a teoria da relatividade especial e a geometria de Minkowski.

Apesar do casamento entre a geometria de Minkowski e a teoria da relatividade especial parecer imediato, ele de fato não é tão simples assim. O espaço tempo de Minkowski pode ser caracterizado pela ausência de curvatura riemanniana, o que não exclui os referenciais acelerados. No entanto, a relatividade especial, como formulada por Einstein, não se aplica a referenciais acelerados; ela é válida apenas para referenciais inerciais, o que justifica o nome "relatividade especial" (ou "relatividade restrita"). Para poder formular o princípio da relatividade para qualquer referencial, Einstein formulou o princípio da equivalência, que pode ser resumido na afirmação feita pelo próprio Einstein em 1918 "A inércia e a gravitação são, em essência, idênticas" (veja, por exemplo, a página 233 de (NORTON, 1985). Esse princípio permitiu a formulação de um princípio de relatividade geral, isto é, a equivalência entre referenciais de qualquer natureza, acelerados ou não. A partir desse princípio, Einstein passou a defender a tese de que todos os referenciais têm campo gravitacional, mesmo aqueles presentes em referenciais acelerados no espaço-tempo de Minkowski (NORTON, 1985). (Vale a pena salientar que na visão moderna o campo gravitacional é visto como sendo sinônimo de curvatura do espaço-tempo; portanto, não há campo gravitacional em Minkowski.). O problema que surgiu naturalmente desse princípio é que nem todos os campos gravitacionais poderiam ser reproduzidos por referenciais acelerados no espaço-tempo de Minkowski. A resolução desse problema veio do que hoje chamamos de Teoria da Relatividade Geral (RG), que é formulada em um espaço-tempo curvo em uma geometria Riemanniana. Na relatividade geral, todo espaço-tempo é curvo; o espaço-tempo de Minkowski passa a ser apenas uma aproximação para situações nas quais podemos desprezar os efeitos que o conteúdo de matéria, seja do sistema em estudo ou do referencial, têm sobre a geometria. A conclusão natural da RG é a de que precisamos lidar com referenciais que não são globalmente inerciais.

Devido à importância dos referencias acelerados, analisaremos esses referenciais no contexto aproximado da geometria de Minkowski e com sistemas quânticos. Para isso, utilizaremos a equação de Dirac escrita nas coordenadas próprias de um observador acelerado (HEHL; NI, 1990; FORMIGA, 2020).

Nossa exposição está organizada da seguinte forma. No segundo capítulo, estão as ideias fundamentais do espaço-tempo de Minkowski, onde expusemos, sem a necessidade de demonstrar, alguns importantes teoremas. Também é no capítulo dois que enunciamos a hipótese do relógio, onde tal hipótese se faz necessário no estudo de observadores acelerados sem precisar, portanto, recorrer a relatividade geral. No capítulo três, apresentamos os conceitos básicos da geometria das curvas em M^4, curvas regulares e comprimento de arco. Apresentamos também no capítulo três, as fórmulas de Serret-Frenet, assim como, algumas de suas propriedades. É no capítulo três que expusemos o teorema fundamnetal das curvas. E para finalizar o capítulo três, consideramos a base de Serret-Frenet nas coordenadas próprias, referencial próprio em uma base arbitária e os conceitos de curvaturas, primeira e segunda torção de curvas para o espaço-tempo de Minkowski.

No capítulo 4, apresentamos de forma sucinta a equação de Dirac para um referencial não inercial, onde usamos os conceitos expostos nos capítulos anteriores para escrever a equação de Dirac em termos das curvaturas. No final do capítulo 4 também consideramos uma hamiltoniana relativística para um referencial acelerado qualquer nas coordenadas próprias do observador que está na origem. Já no capítulo 5, usamos um modelo simplificado da Terra para fazermos algumas estimativas. Como resultado, mostramos que o tempo próprio do observador que está no laboratório, portanto, na superfície da Terra, pode ser aproximado pelo tempo de um observador no centro da Terra. Além disso, obtemos uma hamiltoniana aproximada e a comparamos com os resultados já conhecidos na literatura.

2 O espaço-tempo de Minkowski

A relatividade especial rejeita totalmente a ideia de tempo absoluto, mais que isso, rejeita a imagem newtoniana de que o tempo absoluto é separado do espaço euclidiano tridimensional. A alternativa encontrada foi introduzi uma quarta dimensão contínua e trabalhar com um espaço quadridimensional, que chamamos de espaço-tempo de Minkowski (ou simplesmente Minkowski). Um ponto nesse espaço quadridimensional representa um evento e pode ser identificado pelas coordenadas (t, x, y, z), onde x, y e z são as coordenadas espaciais e t é a coordenada temporal. Por sua vez, o conceito de distância entre dois pontos desse espaço tem um significado diferente do caso euclidiano, como veremos mais adiante quando apresentarmos o conceito de métrica, que está associada com a maneira com a qual generalizamos o conceito de distância.

Em termos matemáticos, o espaço-tempo de Minkowski é um espaço vetorial M-quadridimensional, munido de uma forma bilinear simétrica e não-degenerado g. Uma forma bilinear é uma aplicação $g : M \times M \longrightarrow R$, que é linear em cada variável, ou seja, $g(a_1 v_1 + a_2 v_2, w) = a_1 g(v_1, w) + a_2 g(v_2, w)$ e $g(v, a_1 w_1 + a_2 w_2) = a_1 g(v, w_1) + a_2 g(v, w_2)$, para todo $a_1, a_2 \in R$ e $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in M$. g é dito ser simétrico se $g(w, v) = g(v, w)$ para todo v e w, e não-degenerado se $g(v, w) = 0$, para todo w em M, implicar $v = 0$. Uma forma simétrica bilinear e não-degenerada g é normalmente chamada de produto interno, e $g(v, w)$ é comumente escrito como $v \cdot w$ ou $\langle v, w \rangle$.

No espaço-tempo de Minkowski, existe uma base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ com a propriedade de que se $v = x^\mu e_\mu$ e $w = y^\mu e_\mu$, onde usamos a convenção de que índeces repetidos representam um somatório com $\mu = 0, 1, 2, 3$, então

$$g(v, w) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3,$$

onde g é conhecido na literatura como produto interno de Lorentz.

Se o produto interno $g(v, w) = 0$, então os vetores v e $w \in M$ são ditos ortogonais. Um vetor $v \neq 0 \in M$ é dito ser unitário se satisfazer a condição $g(v, w) = \pm 1$. Em M existe uma base de vetores ortonormais $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, que denotaremos simplesmente por e_μ, tal que o produto interno satisfaz a relação $g(e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu}$ são os elementos da matriz

$$(\eta_{\mu\nu})_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Perceba que essa base tem um vetor do tipo tempo e três vetores do tipo espaço. Quando formos tratar do referencial de um observador, veremos que o vetor do tipo tempo estará associado com a quadrivelocidade do observador, enquanto que os outros vetores do tipo espaço representarão sua tríade.

Em termos da convenção de soma de Einstein, podemos escrever o produto interno entre dois vetores arbitrário na forma

$$g(v, w) = \eta_{\mu\nu} v^\mu w^\nu.$$

Seja g um produto interno em um espaço vetorial arbitrário $\vec{V}$, então a aplicação $Q : \vec{V} \longrightarrow R$ define uma forma quadrática dada por $Q(v) = g(v, v) = v \cdot v = v^2$. Diante disso, temos o lema:

Lema 1. Seja $L : M \longrightarrow M$ uma aplicação linear. Então, as seguintes declarações são equivalentes (NABER, 1988)

a) L é uma transformação ortogonal

b) L preserva a forma quadrática de M, ou seja, $Q(Lv) = Q(v)$ para todo $v \in M$

c) L transporta qualquer base ortonormal de M em outra base ortonormal de M

Seja $L : M \longrightarrow M$ uma transformação linear ortogonal e uma base ortonormal dada por $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. Então, pelo Lema 1, $\bar{e_0} = Le_0$, $\bar{e_1} = Le_1$, $\bar{e_2} = Le_2$ e $\bar{e_3} = Le_3$ também formarão uma base para o M. Sobretudo, cada e_μ, poderá ser escrito como uma combinação linear de $\{\bar{e_\mu}\}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} e_\mu &= \Lambda^0{}_\mu(L\bar{e_0}) - \Lambda^1{}_\mu(L\bar{e_1}) - \Lambda^2{}_\mu(L\bar{e_2}) - \Lambda^3{}_\mu(L\bar{e_3}) \\ &= \Lambda^0{}_\mu\bar{e_0} - \Lambda^1{}_\mu\bar{e_1} - \Lambda^2{}_\mu\bar{e_2} - \Lambda^3{}_\mu\bar{e_3}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ou de forma compacta

$$e_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \bar{e_\nu}, \tag{2.2}$$

onde os coefientes $\Lambda^\nu{}_\mu$ são constantes. A expressão acima é conhecida na literatura como transformações de Lorentz. Sendo a métrica de Minkowski invariante frente as transformações de Lorentz, então a condição de ortogonalidade, $g(e_\mu, e_\nu) = e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\mu\nu}$ pode ser escrita como

$$\Lambda^\nu{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\lambda \eta_{\nu\sigma} = \eta_{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

onde fizemos $e_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \bar{e_\nu}$ e $e_\nu = \Lambda^\sigma{}_\lambda \bar{e_\sigma}$. Ou escrita de outra forma

$$(\Lambda^T)_\nu{}^\mu \Lambda^\sigma{}_\lambda \eta_{\nu\sigma} = \eta_{\mu\nu}$$

Em notação matricial, podemos escrever

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \tag{2.4}$$

onde esta relação é conhecida como condição de grupo de Lorentz.

Definiremos $\Lambda = [\Lambda^T]$ como a matriz associada a transformação L por

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_0{}^0 & \Lambda_0{}^1 & \Lambda_0{}^2 & \Lambda_0{}^3 \\ \Lambda_1{}^0 & \Lambda_1{}^1 & \Lambda_1{}^2 & \Lambda_1{}^3 \\ \Lambda_2{}^0 & \Lambda_2{}^1 & \Lambda_2{}^2 & \Lambda_2{}^3 \\ \Lambda_3{}^0 & \Lambda_3{}^1 & \Lambda_3{}^2 & \Lambda_3{}^3 \end{pmatrix}.$$

Observe que Λ (conhecida como matriz de Lorentz), na verdade, é a matriz L^{-1} em relação a base $\{\bar{e_\mu}\}$.

Se considerarmos que a matriz Λ associada a uma transformação ortogonal L seja uma matriz de transformação usual de coordenadas, então qualquer evento $v = x^\mu e_\mu$ em M pode ser expresso na base $\{\bar{e_\mu}\}$ como

$$\bar{x^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu e_\nu. \tag{2.5}$$

Vejamos, agora, como interpretar os elementos presentes no espaço-tempo de Minkowski fisicamente.

2.1 A interpretação física do espaço-tempo de Minkowski

Em 1895, então com 16 anos, Einstein se perguntou o que ele veria se cavalgasse um raio de luz. "Eu deveria observar, concluiu ele, esse raio de luz como um campo eletromagnético espacialmente oscilatório e em repouso" (para mais detalhes, veja a página 33 de (CLEBER,)). Einstein se baseou na física newtoniana na qual não havia restrição para que um corpo fosse acelerado à velocidade da luz. Até meados de 1905, os físicos eram essencialmente newtonianos no sentido de que o espaço era composto por três dimensões, e o tempo era absoluto. Tal posição adotada pelos físicos à época era sustentada pelo senso comum e percepção de mundo.

Em 1908 em uma palestra intitulada "Espaço e Tempo", Minkowski apresentou aos físicos uma visão totalmente nova da relatividade, onde esta torna-se tão elegante quanto poderosa se o tempo fosse visto como a quarta dimensão. Surgiu assim o conceito de espaço-tempo. Na verdade, o conceito de espaço-tempo foi motivado pelo também matemático Felix Klein em seu famoso programa de Erlangem, onde ele se propôs a examinar a evolução do conceito de geometria e assim propõe unificar as diferentes teorias geométricas recorrendo a ideia de grupos de simetria (SANTOS, 2009).

Uma das características mais marcantes do grupo de Lorentz é a preservação do intervalo entre dois eventos, podendo dessa forma ser interpretado como uma pseudo-distância. O nascimento do espaço-tempo de Minkowski se dá pela união do grupo de Lorentz e a relatividade, união esta causada pela extensão do princípio da relatividade de Galileu ao eletromagnetismo.

No mundo de Minkowski os elementos são denominados de eventos, onde estes são definidos como um acontecimento localizado em uma determinada posição do espaço em um determinado instante. A sucessão de eventos a cada instante é chamada de linha de universo do observador.

Vejamos agora algumas hipóteses fundamentais para a relatividade especial.

Causalidade: Dois observadores concordarão com a ordem temporal de quaisquer dois eventos na linha de universo de um fóton, ou seja, se os eventos são $x = x^\mu e_\mu = \bar{x}^\mu \bar{e_\mu}$ e $x_0 = x_0^\mu e_\mu = \bar{x}_0^\mu \bar{e_\mu}$, então $x^0 - x_0^0$ e $\bar{x}^0 - \bar{x}_0^0$ terão o mesmo sinal.

Homogeneidade: Todos os observadores inerciais concordarão com a mesma origem do espaço-tempo, ou seja, se tivermos dois referenciais inerciais $S(x^0, x^1, x^2, x^3)$ e $\bar{S}(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$, então a transformação de coordenadas $S \longrightarrow \bar{S}$ é linear e escrita como $\bar{x}^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu x^\nu$.

Princípio da relatividade de Eisntein: As leis da física têm a mesma forma em todos os referencias inerciais. Observe que de forma sutil, Einstein estendeu o princípio da relatividade de Galileu a todas as leis da física. As equações de Maxwell devem, assim como todas as outras leis da física, permanecer invariantes ao passar de um referencial inercial para outro.

Cosntância da velocidade da luz: A velocidade da luz (no vácuo) tem o mesmo valor c em qualquer direção e em todos os referenciais inerciais. Isso significa que a velocidade da luz independe do movimento uniforme relativo entre os observadores, ou seja, quaisquer dois observadores que se movem com velocidades uniformes diferentes em relação a uma certa fonte de luz obterão o mesmo valor para a velocidade da luz no vácuo.

2.2 O grupo de Lorentz

Qualquer vetor $v \in M$ é do tipo espaço, do tipo tempo ou tipo luz se $Q(v) < 0$, $Q(v) > 0$ e $Q(v) = 0$, respectivamente.

Teorema 1. Suponha que v seja do tipo tempo, e w do tipo tempo ou tipo luz e ambos sejam diferentes de zero. Seja $\{e_\mu\}$ uma base ortonormal de M, $v = x^\mu e_\mu$ e $w = y^\mu e_\mu$. Então, anunciamos

a) $x^0 y^0 > 0$, se $v \cdot w > 0$.

b) $x^0 y^0 < 0$, se $v \cdot w < 0$.

A demosntração desse teorema pode ser encontrada em (NABER, 1988).

Corolário: Seja um vetor qualquer não-nulo $v \in M$ ortogonal a outro vetor w do tipo tempo, então v deve ser do tipo espaço.

O teorema 1 traz uma consequência forte, o produto $x^0 y^0$ (que não pode ser nulo) terá o mesmo sinal em relação a todas as bases ortonormais de M. Por exemplo, se v é do tipo tempo e w é do tipo tempo ou tipo luz, então v e w terão a mesma orientação temporal se $v \cdot w > 0$ e orientação temporal oposta se $v \cdot w < 0$.

Visto que as transformações ortogonais de M são isomórficas (possuem a mesma forma), elas devem ter inversas, segue-se que a matriz de Lorentz Λ associada a tais transformações também possuem inversa.

Depois de algumas manipulações algébricas simples, (2.4) torna-se

$$\Lambda^T \eta = \eta \Lambda^{-1},$$

$$\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta,$$

como $\eta^{-1} = \eta$, então a matriz inversa de Lorentz será

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta.$$

Para expressarmos a transformação inversa de coordenadas $\bar{x}^\nu = {\Lambda_\mu}^\nu x^\mu$, introduziremos a notação: escreveremos cada $\bar{e}_\mu$ como uma combinação linear de e_α, ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{e}_\mu &= {(\Lambda^{-1})_\mu}^0 e_0 + {(\Lambda^{-1})_\mu}^1 e_1 + {(\Lambda^{-1})_\mu}^2 e_2 + {(\Lambda^{-1})_\mu}^3 e_3, \\ &= {(\Lambda^{-1})_\mu}^\alpha e_\alpha, \end{aligned}$$

onde $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Com isso, a transformação inversa de $\bar{x}^\nu = {\Lambda_\mu}^\nu x^\mu$ torna-se

$$x^\mu = {(\Lambda^{-1})_\nu}^\mu \bar{x}^\nu.$$

De posse dessa notação, a condição de ortogonalidade $\bar{e}_\alpha \cdot \bar{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$ pode ser expressa como

$$(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\beta}\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}.$$

Veja que, tomando o determinante de ambos os lados de $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, e notando que $det\eta = -1$ e $det\Lambda^T = det\Lambda$, então $(det\Lambda)^2 = 1$. Conclui-se

$$det\Lambda = \pm 1.$$

Observe o seguinte, fazendo $\alpha = \beta = 0$ em $\Lambda_{\alpha}{}^{\sigma}\Lambda_{\beta}{}^{\rho}\eta_{\sigma\rho} = \eta_{\alpha\beta}$, obtemos

$$(\Lambda_0{}^0)^2 = 1 + (\Lambda_0{}^1)^2 + (\Lambda_0{}^2)^2 + (\Lambda_0{}^3)^2,$$

que implica, $(\Lambda_0{}^0)^2 \geq 1$. Como resultado

$$\Lambda_0{}^0 \geq 1,$$

ou

$$\Lambda_0{}^0 \leq -1.$$

Um elemento Λ do grupo de Lorentz é dito ser próprio se $det\Lambda = 1$ e impróprio se $det\Lambda = -1$. Além disso, ele é ortócrono se $\Lambda_0{}^0 \geq 1$ e não-ortócrono se $\Lambda_0{}^0 \leq -1$. As chamadas transformações impróprias de Lorentz têm a característica peculiar de inverter a orientação espacial, enquanto que as não-ortócronas invertem a ordem temporal. Já em ortócronas, podemos estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 2. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) Λ é ortócrona.

b) Λ preserva a orientação temporal de todos os vetores do tipo luz diferentes de zero.

c) Λ preserva a orientação temporal de todos os vetores do tipo tempo.

A prova desse teorema pode ser encontrada em (NABER, 1988).

Doravante, restringiremos o nosso estudo ao conjunto L das transformações de Lorentz próprias e ortócronas. Observe que a partir do teorema 2, é notório que a inversa de uma transformação de Lorentz ortócrona também será ortócrona, assim como, o produto de duas transformações ortócronas também será ortócrona.

Isso significa que L é fechado sob a formação de produtos e inversas, isto é, L é um subgrupo do grupo de Lorentz. Comumente, nos referiremos a L meramente como o grupo de Lorentz, onde deixamos subentendido que os seus elementos são próprios e ortócronos. As transformações de coordenadas entre os referenciais inerciais são realizadas por elementos de L.

É importante lembrar que, além das transformações de Lorentz relacionarem apenas referenciais inerciais, as origens dos referenciais devem ser as mesmas. Para incluirmos translações da origem, precisamos do grupo de Poincaré. Esse grupo tem o grupo de Lorentz como um caso particular. Uma transformação de Poincaré pode ser denotada por $\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + d^\mu$, onde d^μ é um quadrivetor constante que representa o deslocamento da origem.

Considere duas bases inerciais $\{e_\alpha\}$ e $\{\bar{e}_\alpha\}$ e seus respectivos referenciais S e $\bar{S}$. Se dois eventos quaisquer na linha de universo de um ponto em $\bar{S}$ está em repouso, então suas coordenadas satisfazem $\Delta\bar{x}^1 = \Delta\bar{x}^2 = \Delta\bar{x}^3 = 0$, onde $\Delta\bar{x}^0$ é a separação temporal dos dois eventos medido em $\bar{S}$. De $\bar{x}^\nu = \Lambda_\mu{}^\nu x^\mu$, encontramos que a difereça temporal em S é

$$\Delta x^\beta = \bar{\Lambda}_\alpha{}^\beta \Delta\bar{x}^\alpha = \bar{\Lambda}_0{}^\beta \Delta\bar{x}^0. \tag{2.6}$$

Da expressão (2.6) e do fato de $\Lambda_0{}^0$ e $\bar{\Lambda}_0{}^0$ serem diferentes de zero, decorre que

$$\frac{\Delta x^i}{\Delta x^0} = \frac{\bar{\Lambda}_0{}^i}{\Lambda_0{}^0} = -\frac{\Lambda_i{}^0}{\Lambda_0{}^0} \tag{2.7}$$

são constantes e independentes do ponto específico em repouso em $\bar{S}$ que escolhermos. Em termos físicos, essas relações são as componentes da velocidade ordinária tridimensional de $\bar{S}$ em relação a S:

$$\vec{u} = u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3,$$

onde

$$u^i = \frac{\bar{\Lambda}_0{}^i}{\bar{\Lambda}_0{}^0} = -\frac{\Lambda_i{}^0}{\Lambda_0{}^0}.$$

com $i = 1, 2, 3$.

Observe que a partir de (2.7)

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\Delta x^i}{\Delta x^0}\right)^2 = (\Lambda_0{}^0)^{-2} \sum_{i=1}^{3} (\Lambda_i{}^0)^2 = (\Lambda_0{}^0)^{-2}[(\Lambda_0{}^0)^2 - 1],$$

e de forma similar

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\Delta\bar{x}^i}{\Delta\bar{x}^0}\right)^2 = (\Lambda_0{}^0)^{-2}[(\Lambda_0{}^0)^2 - 1].$$

Fisicamente, essas igualdades significam que a velocidade de $\bar{S}$ em relação a S e a velocidade de S em relação a $\bar{S}$ possuem a mesma magnitude, que denotaremos por β.

Em vista disso, $\beta^2 = 1 - ({\Lambda_0}^0)^{-2}$ é, sobretudo, $0 \leq \beta^2 < 1$ e $\beta = 0$ se, e somente se, Λ for uma rotação, conforme o lema abaixo:

Lema 2. Seja $\Lambda = [\Lambda]$ uma transformação de Lorentz própria e ortócrona. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

a) Λ é uma rotação.

b) ${\Lambda_0}^1 = {\Lambda_0}^2 = {\Lambda_0}^3 = 0$.

c) ${\Lambda_1}^0 = {\Lambda_2}^0 = {\Lambda_3}^0 = 0$.

d) ${\Lambda_0}^0 = 1$.

A demonstração desse lema pode ser encontrada em (NABER, 1988).

Assim, resolvendo $\beta^2 = 1 - ({\Lambda_0}^0)^{-2}$ para ${\Lambda_0}^0$(e considerando a raíz quadrada positiva, visto que Λ é assumido ortócrono) obtemos

$$\begin{aligned} \beta^2 &= 1 - ({\Lambda_0}^0)^{-2}, \\ ({\Lambda_0}^0)^{-2} &= 1 - \beta^2, \\ {\Lambda_0}^0 &= (1-\beta^2)^{-1/2} (= {\bar{\Lambda}_0}^{\ 0}), \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde a quantidade $(1-\beta^2)^{-1/2}$ é comumente designado por γ. Se assumirmos que Λ não seja uma rotação, então $\vec{u}$ pode ser escrito como

$$\vec{u} = \beta \vec{d} = \beta(d^1 e_1 + d^2 e_2 + d^3 e_3),$$

onde $d^i = \frac{u^i}{\beta}$. $\vec{d}$ é conhecido na literatura como o trivetor direcional de $\bar{S}$ em relação a S, enquanto que os d^i são os cossenos diretores do segmento de linha reta na linha de universo ao longo do qual o observador em S enxerga $\bar{S}$ se deslocando.

De forma similar

$$\vec{\bar{u}} = \beta \vec{\bar{d}} = \beta(\bar{d}^1 \bar{e}_1 + \bar{d}^2 \bar{e}_2 + \bar{d}^3 \bar{e}_3),$$

com $\bar{d}^i = \frac{\bar{u}^i}{\beta}$.

Por simplicidade, tomemos os cossenos diretores d^i e $\bar{d}^i$ como $d^1 = 1$, $\bar{d}^1 = -1$ e $d^2 = \bar{d}^2 = d^3 = \bar{d}^3 = 0$, isto é, $\vec{d} = e_1$ e $\vec{\bar{d}} = -e_1$. Do ponto de vista físico, isso corresponde à situação na qual um observador em S vê $\bar{S}$ se movendo na direção positiva do eixo x^1, e um observador em $\bar{S}$ vê S se movendo na direção negativa do eixo x^1. Portanto, de (2.8), ${\bar{\Lambda}_0}^{\ i} = -{\Lambda_i}^0 = \beta(1-\beta^2)^{-1/2} d^i$ e ${\Lambda_0}^i = -{\Lambda_i}^0 = \beta(1-\beta^2)^{-1/2} \bar{d}^i$ descobrimos que a matriz Λ de transformação terá a seguinte forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & {\Lambda_1}^1 & {\Lambda_2}^1 & {\Lambda_3}^1 \\ 0 & {\Lambda_1}^2 & {\Lambda_2}^2 & {\Lambda_3}^2 \\ 0 & {\Lambda_1}^3 & {\Lambda_2}^3 & {\Lambda_3}^3 \end{pmatrix}.$$

Usando as condições de ortogonalidades, é possível reduzir a matriz acima para

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {\Lambda_2}^2 & {\Lambda_3}^2 \\ 0 & 0 & {\Lambda_2}^3 & {\Lambda_3}^3 \end{pmatrix}.$$

A matriz formada pelos termos que dependem apenas dos Λ na matriz acima representa uma rotação arbitrária no plano R^2.

2.3 Vetores nulos (tipo luz) e fótons

Suponha que p e q sejam dois eventos quaisquer descritos pelas coordenas x_p^μ e x_q^μ de um certo referencial inercial. Se o vetor de p até q for do tipo luz, então essas coordenadas devem satisfazer a equação

$$(x_q^0 - x_p^0)^2 - (x_q^1 - x_p^1)^2 - (x_q^2 - x_p^2)^2 - (x_q^3 - x_p^3)^2 = 0. \tag{2.9}$$

Assim, pelo teorema 2 e do fato de $\Delta x^0 = x_q^0 - x_p^0 \neq 0$, concluímos que o sinal de $q - p$ é orientado para o futuro se $\Delta x^0 > 0$ e orientado para o passado se $\Delta x^0 < 0$. Fisicamente, se $q - p$ for do tipo luz e orientado para o futuro, então o evento p poderia ser a emissão de um fóton e q a detecção desse fóton em um tempo posterior.

A equação (2.9) representa um cone circular reto localizado em p, que chamamos de cone de luz. Uma propriedade interessante dos vetores do tipo luz não nulos é que eles são ortogonais se, e somente se, eles forem paralelos, ou seja, se um for proporcional ao outro.

2.4 Vetores do tipo tempo e partículas de matéria

Suponha, agora, que $q-p$ seja um intervalo do tipo tempo, de modo que tenhamos a seguinte inequação na base e_μ, $(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x)^2 < (\Delta x^0)^2$. Evidentemente, $\Delta x^0 \neq 0$ e, portanto, assumiremos sem perda de generalidade que $\Delta x^0 > 0$.

Dividindo ambos os lados da inequação acima por Δx^0, obtemos

$$\frac{\left[(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2\right]^{1/2}}{\Delta x^0} < 1. \tag{2.10}$$

A partir de (2.10), concluímos que todas as partículas que se deslocam ao longo de curvas do tipo tempo têm velocidade inferior a velocidade da luz, que aqui tomamos como 1.

Vejamos, agora alguns resultados interessantes sobre vetores do tipo tempo.

Teorema 3. Sejam x e y vetores tipo tempo, diferentes de zero e não paralelos. Então, x e y terão a mesma orientação temporal se $x \cdot y > 0$.

Teorema 4. Sejam dois vetores do tipo tempo x e y que têm a mesma orientação temporal, ou seja, $x \cdot y > 0$. Então

$$\tau(x + y) \geq \tau(x) + \tau(y),$$

onde $\tau(x) = \sqrt{Q(x)}$. A igualdade é válida apenas se x e y forem linearmente dependentes.

Um conceito importante para o desenvolvimento desta dissertação é o de trajetórias de partículas de matéria, uma vez que os observadores são tratados como sendo partículas puntiformes que se propagam ao longo de trajetórias cujos vetores tangentes são do tipo tempo. Para clarearmos essa ideia, considere o seguinte. Seja $I \subseteq R$ um intervalo aberto qualquer. Uma aplicação $\alpha : I \longrightarrow M$ é denominada de curva de M. Com relação a qualquer que seja o sistema inercial de coordenadas para M, podemos escrever $\alpha(t) = (x^0(t),\ x^1(t),\ x^2(t),\ x^3(t))$ para cada $t \in I$. Vamos supor que α seja suave, ou seja, $x^\mu(t)$ é de classe C^∞ e $\alpha'(t) \neq 0$. Veja que se $\bar{x}^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu x^\nu$, então $\frac{d\bar{x}^\mu}{dt} = \Lambda_\nu{}^\mu \frac{dx^\nu}{dt}$, onde tal definição de suavidade não depende, portanto, de nossa escolha de coordenadas inerciais. A curva α é dita ser do tipo tempo se $\alpha'(t)$ for do tipo tempo para cada $t \in I$, ou seja, $\alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} > 0$, e voltada para o futuro se $\frac{dx^0}{dt} > 0$ para cada t. Uma curva voltada para o futuro, suave e do tipo tempo em M será chamada de linha de universo de uma partícula material.

2.5 A hipótese do relógio

Seja $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ a linha de universo de alguma partícula material em M, então $L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)|^{1/2} dt$ é visto como o lapso temporal entre $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ medido por um relógio padrão que é transportado pela partícula.

$L(\alpha)$ está relacionado ao que chamamos de tempo próprio, uma vez que corresponde ao intervalo de tempo entre dois eventos medido pelo relógio de um único observador(partícula) que passa pelos dois eventos. Assim, podemos definir o tempo τ pela expressão

$$\tau = \int_0^t \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}dt. \tag{2.11}$$

Será bastante conveniente parametrizar a curva pelo tempo próprio, já que o vetor tangente obtido pela derivada em termos de τ tem módulo 1. Em outras palavras, se $\alpha(\tau) = (x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau))$, então $\alpha'(\tau)\cdot\alpha'(\tau) = 1$.

Em 1905, quando Einstein publicou o seu famoso artigo intitulado "Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimentos ", ele introduziu de forma implícita a hipótese do relógio. Ao se referir a equação da dilatação temporal ele conclui, "se esta equação é válida para um observador em movimento retilíneo uniforme (MRU) com velocidade de módulo constante ao longo de um caminho poligonal, também deve ser válida para o movimento ao longo de um caminho curvo qualquer"(FREITAS, 2019), onde este é imaginado como sendo uma série de infinitos MRUs de deslocamentos infinitesimais, todos com a mesma velocidade.

Esta suposição ficou conhecida como a hipótese do relógio. Esta hipósete generaliza a equação da dilatação temporal para

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

Observe que a expressão acima associa um intervalo infinitesimal temporal dt medido por dois relógios sincronizados em relação ao referencial S ao intervalo infinitesimal temporal próprio $d\tau$ medido por único relógio que se movimenta em relação a S.

Portanto, a hipótese do relógio afirma que a dilatação temporal é afetada a cada instante unicamente pelo módulo da velocidade instantânea do relógio em relação ao referencial S, independentemente da aceleração que o relógio que mede τ tenha.

E por fim, concluiremos este capítulo com um exemplo e um paradoxo que, particularmente acho muito interessante do ponto de vista da teoria.

Evidência da dilatação temporal

O fenômeno da dilatação temporal foi observada experimentalmente em 1941 por B. Rossi e D. B. Hall (TAYLOR, 2013). Rossi e Hall usaram o decaimento de partículas subatômicas instáveis para medir uma dilatação apreciável. A espectativa de vida de certos tipos de mésons é tão pequena que, mesmo se eles viajassem a velocidade da luz, o tempo necessário para percorrer toda a atmosfera seria em torno de 10 vezes a sua própria vida (de repouso), e mesmo assim eles conseguem chegar a superfície da Terra.

Paradoxo do celeiro

Imagine que um corredor carregando uma barra de 15m de comprimento se desloca com uma velocidade próxima a da luz em direção a um celeiro de 10m de comprimento que está em repouso em relação a Terra.

Um observador no referencial do celeiro pode abrir e fechar as portas frontal e traseira do celeiro através de um controle remoto de forma simultânea e instantânea. Assim, quando o corredor carregando a barra estiver dentro do celeiro o observador irá fechar e abrir as portas do celeiro, de modo que o corredor e a barra fiquem momentaneamente e completamente no interior do celeiro. É possível que o corredor e o observador concordem que a barra fique totalmente dentro do celeiro?

De acordo com as nossas experiências cotidianas, isso obviamente seria impossível. No entanto, do ponto de vista relativístico, podemos nos surpreender bastante com alguns resultados. Como a barra está em repouso em relação ao corredor, então da perspectiva da barra o corredor é um referncial inercial.

Da ótica do observador a barra é levemente contraída e, portanto, menor que o celeiro. Assim, não haverá problemas em fechar as duas portas do celeiro quando a barra estiver momentaneamnente e totalmente no interior do celeiro.

O paradoxo surge quando olhamos a situação do ponto de vista do corredor. Na visão do corredor é o celeiro quem se move em sua direção e, portanto, sofre uma contração em seu comprimento deixando assim, o celeiro ainda menor, ou seja, do ponto de vista do corredor, a barra nunca caberá completamente dentro do celeiro. E agora, como resolvemos esse problema?

Da ótica do observador, a barra pode encaixar-se momentaneamente dentro do celeiro se as portas forem fechadas e abertas simultaneamente. Embora no referencial do corredor os comprimentos da barra e do celeiro sejam incompatíveis. Em vista disso, a única alternativa é se os eventos de abrir e fechar as portas não forem de fato simultâneos para ambos os referenciais. Poderíamos, no entanto, nos questionar qual das duas portas fecha primeiro, já que os eventos não são simultâneos.

Considere que ambas as portas estejam abertas antes da entrada da barra, então a primeira porta a se fechar tem que ser a dos fundos, pois se a porta frontal se fechar primeiro irá quebrar a barra, uma vez que esta ainda não está totalmente dentro do celeiro. Todavia, a porta que se fechar primeiro também será a porta que se abrirá primeiro, pois enquanto a parte da frente da barra deixa o celeiro, a parte de trás entra. Sendo assim, quando a parte traseira da barra estiver completamente dentro do celeiro, a parte frontal pode ser fechada (para mais detalhes, veja (PEREIRA; MIZUKOSHI,)).

Uma propriedade muito importante da relatividade especial é a existência de referenciais inerciais globais. Tais referenciais podem ser caracterizados da seguinte forma. Em Minkowski, existe um sistema de coordenadas (t, x, y, z) tais que a métrica pode ser escrita na forma

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Por sua vez, a partir desse sistema de coordenadas, podemos construir o seguinte referencial

$$\begin{aligned} e_{(0)} &= \partial_t, \\ e_{(1)} &= \partial_x, \\ e_{(2)} &= \partial_y, \\ e_{(3)} &= \partial_z. \end{aligned}$$

Um referencial com essas características é dito ser "um referencial inercial global", pois é inercial e está definido em todos os pontos do espaço-tempo

3 Geometria Diferencial de Curvas no M

Neste capítulo, apresentaremos de forma bastante sucinta o conceito de comprimento de arco, curvatura e torção. Mostraremos as fórmulas de Serret-Frenet no espaço-tempo de Minkowski, e enunciaremos o teorema fundamental da teoria local das curvas em M, além de apresentarmos também a solução das fórmulas de Serret-Frenet para o caso da curva está confinada no plano. Nas seções subsequentes, mostraremos o caso geral dos vetores de Serret-Frenet escritos em termos das coordenadas próprias do observador, e por fim, apresentaremos o conceito de referencial prórpio em uma base arbitrária, relação entre aceleração e curvatura, e o caso particular de curvas planas com aceleração inversamente proporcional ao tempo próprio.

3.1 Curvas regulares e comprimento de arco

No estudo da geometria diferencial das curvas é fundamental a existência de uma tangente em cada ponto da curva. Chamaremos de pontos singulares de f se $\forall t \in I$, $f'(t) = 0$ e, de pontos regulares se $\forall t \in I$, $f'(t) \neq 0$. Trabalharemos apenas com as curvas regulares, ou seja, curvas onde o vetor tangente esteja bem definido em cada ponto da curva.

O comprimento de arco de uma curva regular paramentrizada $f : I \rightarrow M^4$, de $t_0 \in I$ até um ponto qualquer $t \in I$ é definido como

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{f'(t) \cdot f'(t)} dt,$$

ou podemos expressar em termos de $\eta_{\mu\nu}$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt, \tag{3.1}$$

onde $|f'(t)| = \left|\frac{df}{dt}\right| = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}}$ define o módulo do vetor tangente à curva. Se s é o comprimento de arco, então $|f'(s)| = 1$ (CARMO, 2005).

3.2 Fórmulas de Serret-Frenet

Seja $x^\mu = x^\mu(s)$ a linha de universo de um observador, onde s é o comprimento de arco da trajetória do observador. Derivando em relação ao comprimento de arco, obtemos o vetor tangente que denotaremos por

$$e^\mu_{(0)} = \frac{dx^\mu}{ds}, \tag{3.2}$$

onde $e^{\mu}_{(0)}$ é chamado de vetor tangente à curva. Como s é o comprimento de arco, esse vetor é unitário, $e^{\mu}_{(0)}e_{(0)\mu} = \eta_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} = 1$.

Além disso, ele é um vetor do tipo tempo, pois é tangente a linha de universo do observador.

Derivando (3.2) em relação ao comprimento de arco, obtemos

$$k_1 e^{\mu}_{(1)} = \frac{de^{\mu}_{(0)}}{ds}, \tag{3.3}$$

onde o número positivo $k_1 = |\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2}|$ é chamado de curvatura de $x^{\mu} = x^{\mu}(s)$ em s e, o vetor $e^{\mu}_{(1)}$ é ortogonal ao vetor tangente $e^{\mu}_{(0)}$.

A partir dos vetores $e_{(0)}$ e $e_{(1)}$, podemos definir mais outros dois vetores de tal forma que tenhamos uma base formada por quatro vetores ortonormais. Existe uma infinidade de vetores que são ortonormais a $e_{(0)}$ e $e_{(1)}$. Porém, aqui trabalharemos com um vetor $e_{(2)}$ e um vetor $e_{(3)}$ que satisfaçam as seguintes relações

$$\frac{de^{\mu}_{(0)}}{ds} = k_1 e^{\mu}_{(1)}, \tag{3.4}$$

$$\frac{de^{\mu}_{(1)}}{ds} = k_1 e^{\mu}_{(0)} + k_2 e^{\mu}_{(2)}, \tag{3.5}$$

$$\frac{de^{\mu}_{(2)}}{ds} = k_3 e^{\mu}_{(3)} - k_2 e^{\mu}_{(1)}, \tag{3.6}$$

$$\frac{de^{\mu}_{(3)}}{ds} = -k_3 e^{\mu}_{(2)}. \tag{3.7}$$

Essas são as fórmulas de Serret-Frenet no espaço-tempo de Minkowski. Perceba que do jeito que estão escritas, elas são válidas apenas na base lorentziana $(\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$. As grandezas $k_2(s)$ e $k_3(s)$ são chamadas de primeira e segunda torção, respectivamente. (Elas também podem ser chamadas genericamente de curvaturas). Os significados de $k_1(s)$, $k_2(s)$ e $k_3(s)$ ficarão mais claros mais adiante.

3.3 Propriedades das fórmulas de Serret-Frenet

Nesta seção apresentaremos alguns resultados importantes para a teoria das curvas no espaço-tempo de Minkowski. Começaremos pelo teorema fundamental das curvas em M, que foi demosntrado por J. B. Formiga e C. A. Romero Filho em (FORMIGA, 2007).

Teorema fundamental da teoria local das curvas em M. Supondo que $\{k_1, k_2, k_3\}$ constituem um conjunto de funções diferenciáveis, então existe uma curva Γ tal que k_1, k_2 e k_3 são a sua curvatura, torção primeira e segunda, respectivamente. Se porventura existir uma outra curva $\overline{\Gamma}$ tal que k_1, k_2 e k_3 sejam sua curvatura, torção primeira e segunda, respectivamente, então Γ e $\overline{\Gamma}$ diferem apenas por um movimento rígido.

O que esse teorema está nos dizendo é que as curvaturas $k_1(s)$, $k_2(s)$ e $k_3(s)$ nos permitem caracterizar o tipo de curva.

3.4 Consequências do Teorema Fundamental das Curvas

Teorema. A curva pertencerá a um hiperplano se, e somente se, $k_3 = 0$.

Um hiperplano é um volume no espaço-tempo quadridimensional. Portanto, dizer que a curva pertence a um hiperplano significa que essa curva está contida dentro de um volume de algo tridimensional.

Teorema. A primeira torção k_2 será nula se, e somente se, a curva pertence a um plano.

Teorema. A curvatura k_1 será nula se, e somente se, a curva for uma reta.

Por exemplo, se k_1 for zero, a (3.4) combinada com (3.2) implicará $\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = 0$, que tem como solução uma reta.

3.5 Curvas planas

Um caso particular que nos permite extrair a essência de muitas propriedades peculiares à relatividade especial é o caso das curvas planas, que são caracterizadas por $k_2 = k_3 = 0$. Como exemplo, temos os observadores de Rindler, que correspondem a um caso ainda mais particular onde k_1 é constante. (Para maiores detalhes, veja (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973),(FORMIGA; ROMERO, 2006)).

Tomando $k_2 = k_3 = 0$ em (3.4) e (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{de^\mu_{(0)}}{ds} &= k_1 e^\mu_{(1)}, \\ \frac{de^\mu_{(1)}}{ds} &= k_1 e^\mu_{(0)}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde este sistema tem a seguinte solução

$$
\begin{aligned}
e^{\mu}_{(0)} &= a^{\mu}\cosh(\int k_1 ds) + b^{\mu}\sinh(\int k_1 ds),\\
e^{\mu}_{(1)} &= b^{\mu}\cosh(\int k_1 ds) + a^{\mu}\sinh(\int k_1 ds).
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Como esses quadrivetores obedecem a condição de ortoganalidade, a^{μ} e b^{μ} devem satisfazer as condições

$$
\begin{aligned}
b^{\mu}b_{\mu} &= -1,\\
a^{\mu}a_{\mu} &= 1,\\
b^{\mu}a_{\mu} &= 0.
\end{aligned}
$$

Usaremos (3.9) mais na frente para analisar um caso inédito na literatura. Porém, por enquanto, vejamos como fica o caso particular onde k_1 é constante. Tomando k_1 constante, podemos realizar a integral em (3.9) para obter

$$
\begin{aligned}
e^{\mu}_{(0)} &= a^{\mu}\cosh(k_1 s) + b^{\mu}\sinh(k_1 s),\\
e^{\mu}_{(1)} &= b^{\mu}\cosh(k_1 s) + a^{\mu}\sinh(k_1 s).
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Integrando a primeira equação acima para o caso k_1 diferente de zero, obtemos

$$
x^{\mu} = \frac{a^{\mu}}{k_1}\sinh(k_1 s) + \frac{b^{\mu}}{k_1}\cosh(k_1 s) + c^{\mu}, \tag{3.11}
$$

onde c^{μ} é um vetor constante. Observe que a equação acima nada mais é do que a equação de uma hipérbole. Há um conjunto de observadores cujas linhas de universo correspondem a um caso particular destas curvas. Esses observadores são conhecidos na literatura como observadores de Rindler (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973),(FORMIGA; ROMERO, 2006).

3.6 Base de Serret-Frenet nas coordenadas próprias

Voltemos ao caso geral. Agora vamos ver como ficam os vetores de Serret-Frenet quando são escritos em termos das coordenadas próprias de um observador n.

Denotaremos as coordenadas do observador n no referencial inercial por $x^{\mu}_{n}(\tau) = (t_n(\tau), x_n(\tau), y_n(\tau), z_n(\tau))$, onde τ é o tempo próprio desse observador. Por sua vez, podemos transportar paralelamente, ao longo de geodésicas, a tríade da base de Serret-Frenet

${e_j}^{\mu}$, para pontos na vizinhança do observador. Assim, a relação entre as coordenadas do referencial inercial e as coordenadas próprias do observador arbitrário pode ser escrita na forma

$$x^{\mu}(\tau,\xi,\chi,\zeta) = x^{\mu}_{n}(\tau) + r^{j} e^{\mu}_{j}(\tau), \tag{3.12}$$

onde o observador O encontra-se na origem do novo sistema de coordenadas e $r^j = (\xi,\chi,\zeta)$.

Denotando as coordenadas de um evento arbitrário no novo sistema de coordenadas por $x^{\overline{\mu}} = (\tau,\xi,\chi,\zeta)$, usando a regra da cadeia e (3.12), o referencial e_a pode ser obtido para o sistema de coordenadas $x^{\overline{\mu}}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}\partial_\xi =& \frac{\partial t}{\partial \xi}\partial_t + \frac{\partial x}{\partial \xi}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial \xi}\partial_y + \frac{\partial z}{\partial \xi}\partial_z,\\ =& e^{t}_{(1)}\partial_t + e^{x}_{(1)}\partial_x + e^{y}_{(1)}\partial_y + e^{z}_{(1)}\partial_z = e_{(1)}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

O mesmo procedimento poderá ser feito para ∂_χ, ∂_ζ, e ∂_τ. O resultado final é

$$\begin{aligned} e_{(0)} =& f(\tau,\xi)[\partial_\tau + k_2(\tau)(\chi\partial_\xi - \xi\partial_\chi) + k_3(\tau)(\zeta\partial_\chi - \chi\partial_\zeta)],\\ e_{(1)} =& \partial_\xi,\\ e_{(2)} =& \partial_\chi,\ e_{(3)} = \partial_\zeta,\ f(\tau,\xi) = 1/(1+\xi k_1(\tau)).\end{aligned} \tag{3.14}$$

A base dual (coframe) desse observador é

$$\begin{aligned} \theta^{(0)} &= d\tau/f(\tau,\xi),\\ \theta^{(1)} &= -\chi k_2(s)d\tau + d\xi,\\ \theta^{(2)} &= (\xi k_2(s) - \zeta k_3(s))d\tau + d\chi,\\ \theta^{(3)} &= \chi k_3(s)d\tau + d\zeta.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Visto que $ds^2 = \eta_{ab}\theta^a \otimes \theta^b$, a métrica nas novas coordenadas será

$$\begin{aligned} ds^2 = &[(1+k_1\xi)^2 - (k_3^2 + k_2^2)\chi^2 - (k_2\xi - k_3\zeta)^2]d\tau^2\\ &+ 2[k_2(\chi d\xi - \xi d\chi) + k_3(\zeta d\chi - \chi d\zeta)]d\tau\\ &- d\xi^2 - d\chi^2 - d\zeta^2.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Note que ξ, χ e ζ são as distâncias próprias de todos os observadores caracterizados por valores constantes dessas coordenadas. Entretanto, a coordenada temporal τ só coincide com o tempo próprio do observador que está na origem. Para maiores detalhes sobre a construção dessas coordenadas veja (FORMIGA, 2020).

Apesar do observador n tratado aqui ser arbitrário, a base não é, pois ela foi limitada ao caso de Serret-Frenet. Na próxima seção trataremos do caso geral para coordenadas próprias. Por fim, exibiremos a relação entre as curvaturas e as acelerações.

3.7 Referencial próprio em uma base arbitrária

Observe que a tetrada ortonormal (frame) e^μ_a que o nosso observador n carrega pode ser definida da seguinte forma: $e^u_{(0)}$ é idêntico a 4-velocidade u^μ do observador, a tríade espacial e^μ_a é definida para ser ortogonal a $e^\mu_{(0)}$ e rotacionar com rotação própria $\vec{\omega}(\tau)$. Em termos matemáticos, a tetrada e^μ_a é transportada de acordo com a expressão

$$\frac{de^\mu_a}{d\tau} = \Phi^{\mu\nu} e_{a\nu}, \tag{3.17}$$

com

$$\begin{aligned} \Phi^{\mu\nu} &= (a^\mu u^\nu - a^\nu u^\mu)/c^2 + \Omega^{\mu\nu}/c, \\ \Omega^{\mu\nu} &= u_\alpha \omega_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde a^μ é a 4-aceleração do observador, e $\Omega_{\mu\nu} = -\Omega_{\nu\mu}$ age como um operador que a cada instante τ rotaciona a tríade (vetores do tipo espaço) em relação a um eixo definido por $\vec{\omega}(\tau)$. (O caso particular $\vec{\Omega} = 0$ é conhecido como transporte de Fermi-Walker.) O fator $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ denota o tensor de Levi-Civita com $\epsilon_{0123} = 1$. Note que, nesta seção estamos usando $c \neq 1$.

A relação entre as coordenadas do referencial inercial e a do acelerado desta seção pode ser obtida a partir de (3.12). Embora o tempo próprio do observador n continue sendo o mesmo, as coordenadas espaciais não serão, pois a tríade $\bar{e}_j{}^\mu$, agora, aponta em direção arbitrária. Além disso, o novo tempo coordenado não necessariamente coincidirá com τ. Por isso, faremos a seguinte mudança de notação: O tempo próprio de n, que será o novo tempo coordenado, será representado por X^0; já as coordenadas próprias serão representadas por X^j. Assim, podemos reescrever (3.12) na forma $x^\mu(X^0, \vec{X}) = x^\mu_n(X^0) + X^j \bar{e}^\mu_j(X^0)$

O referencial próprio adaptado a um observador que tem aceleração $\vec{a}(X^0)$, cuja tríade tem rotação $\vec{\omega}(X^0)$ pode ser escrito na forma (HEHL; NI, 1990),

$$\begin{aligned} \bar{e}_{(0)} &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{a}\cdot\vec{X}}{c^2}\right)} \left\{ \partial_{X^0} - [\vec{\omega}/c \times \vec{X}]^k \partial_{X^k} \right\}, \\ \bar{e}_{(i)} &= \partial_{X^i}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde $\bar{X} = X^j \partial_{X^j}$, com $j = 1, 2, 3$ e $\vec{\omega} = \omega_j \partial_{X^j}$

A partir de (3.19), a base dual (coframe) é

$$\begin{aligned} \theta^{(0)} &= \left(1 + \frac{\vec{a}\cdot\vec{X}}{c^2}\right) dX^0, \\ \theta^{(l)} &= dX^i + [(\vec{\omega}/c) \times \vec{X}]^i dX^0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Dessa forma, a métrica pode ser obtida como

$$
\begin{aligned}
ds^2 = \theta^{(0)} \otimes \theta^{(0)} - \theta^{(1)} \otimes \theta^{(1)} - \theta^{(2)} \otimes \theta^{(2)} - \theta^{(3)} \otimes \theta^{(3)} &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\
&= (dX^0)^2[1 + 2\vec{a} \cdot \vec{X}/c^2 + (\vec{a} \cdot \vec{X}/c^2)^2 + (\vec{\omega} \cdot \vec{X}/c)^2 \\
-(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}/c^2)(\vec{X} \cdot \vec{X})] - 2dX^0 d\vec{X} \cdot (\vec{\omega}/c) \times \vec{X} &- d\vec{X} \cdot d\vec{X}.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

3.8 Relação entre as acelerações e as curvaturas

A relação entre a 4-velocidade u^μ e o vetor tangente $e^\mu_{(0)}$ é dada por $u^\mu = ce^\mu_{(0)}$. A partir desta relação, e da primeira fórmula de Serret-Frenet, podemos encontrar a relação entre a aceleração $\vec{a}$ e a curvatura k_1, $a^\mu = c^2 k_1 e^\mu_{(1)}$.

Observe que contraindo a relação acima com a_μ, chegamos

$$
k_1 = \frac{|a|}{c^2}. \tag{3.22}
$$

Para vermos qual é a relação de k_2 e k_3 com as rotações da parte espacial do frame, consideramos o seguinte. O vetor velocidade angular da base de Serret-Frenet pode ser escrito na forma (FORMIGA, 2020)

$$
\vec{\Omega} = \Omega_{(1)}\hat{\xi} + \Omega_{(3)}\hat{\zeta}. \tag{3.23}
$$

Observe que estamos fazendo as seguintes identificações $\partial_\xi \longrightarrow \hat{\xi}$, $\partial_\chi \longrightarrow \hat{\chi}$ e $\partial_\zeta \longrightarrow \hat{\zeta}$. Além disso, vamos impor que $\partial_{x^1} = \partial_\xi$, $\partial_{x^2} = \partial_\chi$ e $\partial_{x^3} = \partial_\zeta$ para fazermos a conexão entre (3.19) e o referencial de Serret-Frenet, e isso significa restringir a base arbitrária à base de Serret-Frenet.

Fazendo uso dessas identifições, teremos as igualdades $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$ e $\Omega_{(1)}\hat{\xi} + \Omega_{(3)}\hat{\zeta} = \omega_1\hat{\xi} + \omega_2\hat{\chi} + \omega_3\hat{\zeta}$, de onde concluímos que $\Omega_{(1)} = \omega_1$, $\Omega_{(2)} = 0 = \omega_2$ e $\Omega_{(3)} = \omega_3$, como era de se esperar. Por sua vez, temos que (FORMIGA, 2020) $k_2 = \Omega_{(3)}/c$ e $k_3 = \Omega_{(1)}/c$. Portanto, concluímos que

$$
\begin{aligned}
k_2 &= \frac{\omega_3}{c}, \\
k_3 &= \frac{\omega_1}{c}.
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

Isso nos diz, por exemplo, que k_2 está associada a rotação em torno do eixo definido pela direção de $e_{(3)}$, assim como k_3 está assocciada a uma rotação em torno do eixo definido pela direção de $e_{(1)}$.

3.9 Curvas planas com aceleração inversamente proporcional ao tempo próprio.

Como o caso particular de curvatura constante já é bem conhecido e pode ser encontrado em vários livros(veja, por exemplo o capítulo 6 do (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973)), vamos considerar aqui o caso particular $k_2 = k_3 = 0$ (curvas planas) e $k_1 = \frac{1}{s}$.

Calculando o argumento das funções hiperbólicas em (3.9), obtemos

$$\int k_1 ds = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{s} = \ln\left(\frac{s}{s_0}\right). \tag{3.25}$$

Escrevendo as funções hiperbólicas em termos da função exponencial, vemos que

$$\begin{aligned} \cosh\left[\ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right] &= \frac{1}{2}\left[e^{\ln\left(\frac{s}{s_0}\right)} + e^{-\ln\left(\frac{s}{s_0}\right)}\right], \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_0} + \frac{s_0}{s}\right) \\ \sinh\left[\ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right] &= \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_0} - \frac{s_0}{s}\right). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Dessa forma, (3.9) pode ser reescrita como

$$e^{\mu}_{(0)} = \frac{dx^{\mu}_{n}}{ds} = \frac{1}{2}a^{\mu}\left(\frac{s}{s_0} + \frac{s_0}{s}\right) + \frac{1}{2}b^{\mu}\left(\frac{s}{s_0} - \frac{s_0}{s}\right),$$

integrando, obtemos

$$x^{\mu}_{n} = \frac{1}{2}a^{\mu}\left(\frac{s^2}{2s_0} + s_0 \ln s\right) + \frac{1}{2}b^{\mu}\left(\frac{s^2}{2s_0} - s_0 \ln s\right) + c^{\mu}, \tag{3.27}$$

onde c^{μ} é um vetor constante. (Perceba que o a^{μ} da expressão acima não corresponde à quadriaceleração. Ele é apenas um vetor constante do tipo tempo.)

Por simplicidade, vamos assumir que $a^{\mu} = \delta^{\mu}_{0}$ (tipo tempo), $b^{\mu} = \delta^{\mu}_{1}$ (tipo espaço) e $c^{\mu} = 0$ de forma que a expressão (3.27) possa ser escrita como

$$\begin{aligned} x^{0}_{n} &= \frac{1}{2}\left(\frac{s^2}{2s_0} + s_0 \ln s\right), \\ x^{1}_{n} &= \frac{1}{2}\left(\frac{s^2}{2s_0} - s_0 \ln s\right). \end{aligned} \tag{3.28}$$

A partir dessas expressões, podemos escrever a seguinte relação

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = \frac{1}{2} s^2 \ln s,$$

que lembra a equação de uma hipérbole, exceto pelo fato do lado direito não ser constante.

4 Equação de Dirac

Neste capítulo, vamos apresentar, sem demonstrar, a equação de Dirac para uma partícula em um referencial não inercial, mostraremos também as matrizes de Dirac. Obteremos os coeficientes da conexão afim expandida na base não inercial, em seguida, vamos apresentar a equação de Dirac em um referencial não inercial escrita em termos da curvatura e torção. Por fim, apresentamos uma hamiltoniana relativística, que será essencial para obtermos os resultados do capítulo seguinte.

4.1 Equação de Dirac em referenciais não inerciais

A equação de Dirac em um referencial não inercial é expressa por (SCHWICHTENBERG, 2018)

$$i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + \Gamma_{\mu})\Psi - m\Psi = 0, \tag{4.1}$$

com

$$\Gamma_{\mu} = \frac{1}{8}\omega_{a\mu b}\left[\gamma^{a}, \gamma^{b}\right]. \tag{4.2}$$

onde $\gamma^{\mu} = e^{\mu}_{a}\gamma^{a}$, e^{μ}_{a} são as componentes de e_a no referencial inercial $\mathring{e}_a$, e os γ^a são as matrizes gama. Já Γ_{μ} é a conexão espinorial, que depende da conexão afim expandida na base não inercial, denotada por $\omega_{a\mu b}$. Para maiores detalhes sobre essas duas conexões, veja (HEHL; NI, 1990) e (COLLAS; KLEIN, 2019).

As matrizes γ^a podem ser convenientemente escrita como sendo as matrizes padrão (ou Dirac-Pauli), onde γ^0 é diagonal. As matrizes de Dirac na forma padrão tem a seguinte representação

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix},$$

$$\gamma^{j} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{j} \\ -\sigma_{j} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Contraindo (4.2) com ${e_c}^{\mu}$, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_c &= \frac{1}{8}{e_c}^{\mu}\omega_{a\mu b}(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a), \\ &= \frac{1}{8}(\omega_{acb}\gamma^a\gamma^b - \omega_{abc}\gamma^b\gamma^a), \end{aligned} \tag{4.3}$$

Podemos obter os coeficientes da conexão afim por meio da expressão (FORMIGA, 2020)

$$\omega^a_{bc} = {e^a}_{\bar{\lambda}}{e_b}^{\bar{\mu}}(\partial_{\bar{\mu}}e^{\bar{\lambda}}_c + \Gamma^{\bar{\lambda}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}e^{\bar{\nu}}_c), \tag{4.4}$$

onde $e^{\bar{\lambda}}_a$ e $e^a_{\bar{\lambda}}$ denotam as componentes de e_a na base coordenada do referencial acelerado, e $\Gamma^{\bar{\lambda}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ é o símbolo de Christoffel. Note que estamos usando uma barra sobre o índice para indicar a base coordenada acelerada. Assim, de (3.14), (3.15) e (4.4), obtemos

$$\begin{aligned} \omega_{(0)(0)(1)} &= -\omega_{(1)(0)(0)} = f(\tau,\xi)k_1, \\ \omega_{(1)(0)(2)} &= -\omega_{(2)(0)(1)} = f(\tau,\xi)k_2, \\ \omega_{(2)(0)(3)} &= -\omega_{(3)(0)(2)} = f(\tau,\xi)k_3. \end{aligned} \tag{4.5}$$

A partir de (4.3) e (4.5), obtemos

$$\Gamma_c = \frac{1}{2}f(k_1\gamma^{(0)}\gamma^{(1)} + k_2\gamma^{(1)}\gamma^{(2)} + k_3\gamma^{(2)}\gamma^{(3)})\delta^{(0)}_c. \tag{4.6}$$

Substituindo (4.6) e (3.14) em (4.1), obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} &\Big\{\gamma^{(0)}f[\partial_\tau + k_2(\chi\partial_\xi - \xi\partial_\chi) + k_3(\zeta\partial_\chi - \chi\partial_\zeta)] \\ &\qquad + \gamma^{(1)}\partial_\xi + \gamma^{(2)}\partial_\chi + \gamma^{(3)}\partial_\zeta \\ &+ \frac{1}{2}f(k_1\gamma^{(1)} + k_2\gamma^{(0)}\gamma^{(1)}\gamma^{(2)} + k_3\gamma^{(0)}\gamma^{(2)}\gamma^{(3)}) + im\Big\}\Psi = 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde $f = 1/(1+\xi k_1(\tau))$. Observe que esta equação é válida qualquer que seja a representação das matrizes gama.

Vimos na seção 3.8 que as curvaturas k_2 e k_3 estão intimamente relacionadas as rotações espaciais do referencial em torno de ∂_ζ e ∂_ξ, respectivamente. Consequentemente, podemos usar $a = \sqrt{-a^{\mu}a_{\mu}} = k_1$, e as relações $k_3 = \Omega_{(1)}$ e $k_2 = \Omega_{(3)}$ para reescrever (4.7) como (Veja por exemplo (HEHL; NI, 1990))

$$\left\{\gamma^{(0)}f(\partial_{\tau} + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{\alpha} - i\vec{\Omega}\cdot\vec{J}) + \gamma^{(1)}\partial_{\xi} + \gamma^{(2)}\partial_{\chi} + \gamma^{(3)}\partial_{\zeta} + im\right\}\Psi = 0, \qquad (4.8)$$

onde $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, $\vec{a} = a\hat{\xi}$, $\vec{\alpha} = \alpha^{(1)}\hat{\xi} + \alpha^{(2)}\hat{\chi} + \alpha^{(3)}\hat{\zeta}$, $(\alpha^{i} = \gamma^{(0)}\gamma^{(i)})$, e a tríade $(\hat{\xi}, \hat{\chi}, \hat{\zeta})$.

É possível reescrever a equação acima na forma de uma equação de *Schrödinger*. Fazendo isso, obtém-se (HEHL; NI, 1990)

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi, \qquad (4.9)$$

onde o operador hamiltoniano é expresso por

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \beta mc^2 + O + \varepsilon, \\ O &= c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \frac{1}{2c}\left[(\vec{a}\cdot\vec{x})(\vec{p}\cdot\vec{\alpha}) + (\vec{p}\cdot\vec{\alpha})(\vec{a}\cdot\vec{x})\right], \\ \varepsilon &= \beta m(\vec{a}\cdot\vec{x}) - \vec{\omega}\cdot(\vec{L} + \vec{S}). \end{aligned} \qquad (4.10)$$

sendo O um operador ímpar e ε um operador par. Cada termo da hamiltoniana acima denota um efeito relativística sobre a partícula. Os termos $\beta m(\vec{a}\cdot\vec{x})$ e $\frac{1}{2c}\left[(\vec{a}\cdot\vec{x})(\vec{p}\cdot\vec{\alpha}) + (\vec{p}\cdot\vec{\alpha})(\vec{a}\cdot\vec{x})\right]$ denotam o efeito redshift de energia-momento, os termos $-\vec{\omega}\cdot\vec{L}$ e $-\vec{\omega}\cdot\vec{S}$ denotam os efeitos do tipo Sagnac e o acoplamento spin-rotação, respectivamente.

5 Correções relativísticas em um referencial girante

Nesta seção, vamos trabalhar com um modelo idealizado para um laboratório na Terra. Neste modelo, o laboratório descreve um movimento circular e uniforme e não há gravitação. Faremos isso para analisar a contribuição do tempo próprio do observador na superfície da Terra em comparação com a do observador no centro da Terra, e concluir que a diferença pode ser desprezada.

A Terra tem, basicamente, dois movimentos, rotação e translação, e por causa destes, os laboratórios estacionários na Terra giram e aceleram junta com a Terra. Portanto, qualquer experimento preciso teria que levar em consideração os efeitos devidos à esses dois movimentos. Considere um átomo de Hidrogênio ou qualquer outro sistema quântico em repouso em um laboratório na Terra. As correções relativísticas para esse caso estão muito bem demonstradas por inúmeros experimentos, e a estrutura fina do Hidrogênio é um exemplo dessas correções. Mas, e para o caso não inercial, quais seriam as correções relativísticas?

Calcular de forma exata essas correções do Hidrogênio, embora seja o ideal, é extremamente complicado, pois teríamos um boost misturado com uma rotação. Entretanto, podemos trabalhar de forma aproximada. Para o modelo que usaremos, a origem do referencial tem uma certa aceleração $\vec{a}$, e a tríade tem uma determinada rotação $\vec{\omega}$ em relação a um referencial inercial.

O referencial inercial que consideraremos será o de um observador que está olhando a Terra girar com uma velocidade angular $\vec{\omega}$. É óbvio que o movimento da Terra em relação as estrelas no infinito é muito mais complicado, no entanto, em uma boa aproximação, podemos considerar que a Terra está girando de tal forma que cada ponto seu descreve um movimento circular e uniforme em relação ao nosso referencial inercial.

Assim, as coordenadas do laboratório na origem desse referencial inercial pode ser escrita como

$$\begin{aligned} x_n^0 = ct_n,\ x_n^1 = r_0 \cos\theta,\ x_n^2 = r_0 \sin\theta, \\ x_n^3 = 0,\ \theta = \Omega t_n + \theta_0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde r_0, Ω e θ_0 são constantes.

A relação entre o tempo próprio do observador que está na origem do sistema de coordenadas e o tempo coordenado t_n pode ser obtida da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx_n^\mu dx_n^\nu, \\
d\tau^2 =& \frac{1}{c^2}\left[(cdt_n)^2 - (dx_n^1)^2 - (dx_n^2)^2 - (dx_n^3)^2\right], \\
d\tau^2 =& dt_n^2 \left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx_n^1}{dt_n}\right)^2 + \left(\frac{dx_n^2}{dt_n}\right)^2\right]\right\},
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

onde τ é o tempo próprio do observador n. Usando (5.1), vemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_n^1}{dt_n} &= \frac{d}{dt_n}[r_0\cos(\Omega t_n + \theta_0)] = -\Omega r_0 \sin\theta, \\
\frac{dx_n^2}{dt_n} &= \frac{d}{dt_n}[r_0\sin(\Omega t_n + \theta_0)] = \Omega r_0 \cos\theta,
\end{aligned}
$$

Substituindo em (5.2), teremos

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d\tau}{dt_n}\right)^2 =& 1 - \frac{1}{c^2}[(-\Omega r_0\sin\theta)^2 + (\Omega r_0\cos\theta)^2], \\
=& 1 - \frac{\Omega^2 r_0^2}{c^2}, \\
\frac{d\tau}{dt_n} =& + \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r_0^2}{c^2}}, \\
\frac{dt_n}{d\tau} =& \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r_0^2}{c^2}}} = \lambda,
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

onde λ é o fator de Lorentz.

O vetor tangente à curva escrita na base de Serret-Frenet é

$$
e_{(0)}{}^{\mu} = \frac{dx_n^\mu}{ds},
$$

onde ds é o comprimento de arco. Como $d\tau = \frac{1}{c}ds \longrightarrow ds = cd\tau$, então

$$
e_{(0)}{}^{\mu} = \frac{dx_n^\mu}{ds} = \frac{1}{c}\frac{dx_n^\mu}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{dt_n}{d\tau}\frac{dx_n^\mu}{dt_n} = \frac{1}{c}\lambda\frac{dx_n^\mu}{dt_n}, \tag{5.4}
$$

onde usando (5.1) em (5.4), temos

$$
e_{(0)}{}^{\mu} = \frac{\lambda}{c}(c,\ -\Omega r_0\sin\theta,\ \Omega r_0\cos\theta). \tag{5.5}
$$

Ou expandido na base do referencial inercial

$$
\begin{aligned}
e_{(0)}{}^{\mu}\partial_\mu &= \lambda\partial_0 - \frac{\Omega r_0\lambda}{c}\sin\theta\partial_1 + \frac{\Omega r_0\lambda}{c}\cos\theta\partial_2, \\
e_{(0)} &= \lambda\mathring{e}_{(0)} - \frac{\Omega r_0\lambda}{c}\sin\theta\mathring{e}_{(1)} + \frac{\Omega r_0\lambda}{c}\cos\theta\mathring{e}_{(2)}.
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

onde usamos a definição $e_a = e_a{}^{\mu}\partial_\mu$ e $\mathring{e}_a = \delta_a^{(\mu)}\partial_\mu$

Usando a regra da cadeia e (5.3), teremos

$$\frac{1}{c}\frac{de_{(a)}{}^{\mu}}{d\tau} = \frac{\lambda}{c}\frac{de_{(a)}{}^{\mu}}{dt_n}. \tag{5.7}$$

Fazendo $a = (0)$ e usando (5.5), vemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{de_{(a)}{}^{\mu}}{d\tau} &= \frac{\lambda}{c}\frac{d}{dt_n}\left[\frac{\lambda}{c}(c,\ -\Omega r_0\sin\theta,\ \Omega r_0\cos\theta)\right],\\ &= \frac{\lambda^2}{c^2}(0,\ -\Omega^2 r_0\cos\theta,\ -\Omega^2 r_0\sin\theta).\end{aligned} \tag{5.8}$$

Comparando (5.8) com (3.4), vemos que

$$e_{(1)}{}^{\mu} = (0,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta), \tag{5.9}$$

Com

$$k_1 = \frac{\Omega^2 r_0\lambda^2}{c^2} \tag{5.10}$$

Para $a = (1)$ em (5.7) e usando (5.9), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{de_{(1)}{}^{\mu}}{d\tau} &= \frac{\lambda}{c}\frac{d}{dt_n}(0,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta),\\ &= \frac{\lambda}{c}(0,\ \Omega\sin\theta,\ -\Omega\cos\theta).\end{aligned} \tag{5.11}$$

Comparando (5.11) com (3.5), chegamos a

$$k_1 e_{(0)}{}^{\mu} + k_2 e_{(2)}{}^{\mu} = \frac{\lambda}{c}(0,\ \Omega\sin\theta,\ -\Omega\cos\theta).$$

Usando (5.10) e isolando $k_2 e_{(2)}$ na expressão, obtemos

$$k_2 e_{(2)} = -\frac{\Omega^2 r_0\lambda^2}{c^2}e_{(0)} + \frac{\Omega\lambda}{c}\sin\theta\mathring{e}_{(1)} - \frac{\Omega\lambda}{c}\cos\theta\mathring{e}_{(2)}. \tag{5.12}$$

Assim, substituindo (5.6) em (5.12), obtemos

$$k_2 e_{(2)} = -\frac{\Omega^2 r_0 \lambda^3}{c^2}\mathring{e}_{(0)} + \left(\frac{\Omega^3 r_0^2 \lambda^3}{c^3} + \frac{\Omega\lambda}{c}\right)\sin\theta \mathring{e}_{(1)} - \left(\frac{\Omega^3 r_0^2 \lambda^3}{c^3} + \frac{\Omega\lambda}{c}\right)\cos\theta \mathring{e}_{(2)}. \tag{5.13}$$

Faremos agora a seguinte substituição

$$\left(\frac{\Omega^3 r_0^2 \lambda^3}{c^3} + \frac{\Omega\lambda}{c}\right) = \frac{\Omega\lambda}{c}\left(\frac{\Omega^2 r_0^2 \lambda^2}{c^2} + 1\right) = \frac{\Omega\lambda^3}{c}.$$

Assim, podemos reescrever (5.13) como

$$e_{(2)} = -\frac{\Omega r_0 \lambda}{c}\mathring{e}_{(0)} + \lambda \sin\theta \mathring{e}_{(1)} - \lambda\cos\theta \mathring{e}_{(2)}. \tag{5.14}$$

com $k_2 = \frac{\Omega\lambda^2}{c}$.

Fazendo o mesmo procedimento para $a = (2)$ concluiremos que $e_{(3)} = \mathring{e}_{(3)}$. Assim, os vetores $e_{(0)}$, $e_{(1)}$, $e_{(2)}$ e $e_{(3)}$ escritos em termos dos vetores do referencial inercial, serão

$$\begin{aligned}
e_{(0)} =& \lambda\mathring{e}_{(0)} - \frac{\Omega r_0 \lambda}{c}\sin\theta \mathring{e}_{(1)} + \frac{\Omega r_0\lambda}{c}\cos\theta\mathring{e}_{(2)},\\
e_{(1)} =& -\cos\theta\mathring{e}_{(1)} - \sin\theta\mathring{e}_{(2)},\\
e_{(2)} =& -\frac{\Omega r_0\lambda}{c}\mathring{e}_{(0)} + \lambda\sin\theta\mathring{e}_{(1)} - \lambda\cos\theta\mathring{e}_{(2)},\\
e_{(3)} =& \mathring{e}_{(3)},
\end{aligned} \tag{5.15}$$

onde a curvatura e a torção são

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{\Omega^2 r_0 \lambda^2}{c^2},\\
k_2 &= \frac{\Omega\lambda^2}{c^2},\\
k_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Sabemos que a relação entre o sistema de coordenadas inercial (t, x, y, z) e o sistema de coordenadas acelerado (τ, ξ, χ, ζ) é dada por (3.12). Fazendo $\mu = 0$ em (3.12) e usando as expressões (5.1) e (5.15), obtemos

$$\begin{aligned}
x^0 =& x_n^0 + r^j {e_{(j)}}^0,\\
ct =& ct_n + r^{(1)}{e_{(1)}}^0 + r^{(2)}{e_{(2)}}^0 + r^{(3)}{e_{(3)}}^0,\\
=& ct_n + \xi {e_{(1)}}^0 + \chi {e_{(2)}}^0 + \zeta {e_{(3)}}^0,\\
ct =& ct_n + \chi\left(-\frac{\Omega r_0\lambda}{c}\right),
\end{aligned} \tag{5.17}$$

onde ${e_{(1)}}^0 = {e_{(3)}}^0 = 0$. Precisamos escrever t_n em termos do tempo próprio τ. De (5.3), vemos que

$$t_n = \lambda\tau. \tag{5.18}$$

Sendo assim, usando (5.18) em (5.17), encontramos

$$ct = \lambda\left(c\tau - \frac{\chi\Omega r_0}{c}\right). \tag{5.19}$$

Para $\mu = 1$ na relação (3.12), e usando (5.1) e (5.15), obtemos

$$\begin{aligned}
x^1 =& x_n^1 + r^j e_j^1, \\
=& x_n^1 + \xi {e_{(1)}}^1 + \chi {e_{(2)}}^1 + \zeta {e_{(3)}}^1, \\
=& r_0 \cos\theta - \xi\cos\theta + \chi\lambda\sin\theta, \\
x =& (r_0 - \xi)\cos\theta + \chi\lambda\sin\theta,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

onde ${e_{(3)}}^1 = 0$. Para $\mu = 2$, obtemos

$$\begin{aligned}
x^2 =& x_n^2 + r^j e_{(j)}^2, \\
=& x_n^2 + \xi {e_{(1)}}^2 + \chi {e_{(2)}}^2 + \zeta {e_{(3)}}^2, \\
=& r_0 \sin\theta - \xi\sin\theta - \chi\cos\theta, \\
y =& (r_0 - \xi)\sin\theta - \chi\lambda\cos\theta,
\end{aligned} \tag{5.21}$$

onde ${e_{(1)}}^2 = -\sin\theta$, ${e_{(2)}}^2 = -\lambda\cos\theta$ e ${e_{(3)}}^2 = 0$.

Por último, $\mu = 3$

$$\begin{aligned}
x^3 =& x_n^3 + r^j {e_{(j)}}^3, \\
=& x_n^3 + \xi {e_{(1)}}^3 + \chi {e_{(2)}}^3 + \zeta {e_{(3)}}^3, \\
z =& \zeta,
\end{aligned} \tag{5.22}$$

onde ${e_{(1)}}^3 = {e_{(2)}}^3 = 0$. Portanto, a relação entre o sistema de coordenadas inercial e acelerado é

$$
\begin{aligned}
ct =&\lambda\left(c\tau-\frac{\chi\Omega r_0}{c}\right),\\
x =&(r_0-\xi)\cos\theta+\chi\lambda\sin\theta,\\
y =&(r_0-\xi)\sin\theta-\chi\lambda\cos\theta,\\
z =&\zeta. \qquad (5.23)
\end{aligned}
$$

Vejamos como as quantidades obtidas até agora se relacionam com as acelerações da origem do referencial e da rotação da tríade.

Na origem do referencial acelerado, teremos

$$
\begin{aligned}
\left.{e_{(0)}}^{\mu}\right|_n =&\frac{dx_n^\mu}{ds_n}=\frac{1}{c}\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}=\frac{1}{c}u^\mu,\\
\left.\frac{d{e_{(0)}}^{\mu}}{ds_n}\right|_n =&\frac{1}{c}\frac{d{e_{(0)}}^{\mu}}{d\tau_n}=\frac{1}{c}\frac{d}{d\tau_n}\left(\frac{1}{c}u^\mu\right)=\frac{1}{c^2}a^\mu, \qquad (5.24)
\end{aligned}
$$

onde o campo vetorial está sendo avaliado ao longo da trajetória do observador n.

Observe que pela definição de base de Serret-Frenet (3.4), o lado esquerdo de (5.24) será

$$
\left.k_1{e_{(1)}}^{\mu}\right|_n=\frac{1}{c^2}a^\mu
$$

De (3.14), vemos que $e_{(1)}=\partial_\xi$. Mudando a notação de ∂_ξ para $\hat{\xi}$, e usando a equação acima, vemos que $\vec{a}=a\hat{\xi}$ e de (5.10), chegamos a

$$
\vec{a}=a\hat{\xi}=(c^2k_1)\hat{\xi}=c^2\left(\frac{\Omega^2r_0\lambda^2}{c^2}\right)\hat{\xi}=\Omega^2r_0\lambda^2\hat{\xi}. \qquad (5.25)
$$

Vejamos, agora, como o vetor $\vec{\omega}$ se relaciona com a base girante. De (3.23), (3.24) e (5.16), descobrimos que

$$
\vec{\Omega}=\vec{\omega}=\Omega\lambda^2\hat{\zeta}. \qquad (5.26)
$$

Agora, vamos apresentar a versão simplificada da equação de Dirac em um formato similar ao da equação de *Schrödinger*. É possível aplicar três transformações sucessivas de Foldy-Wouthysen em (4.9) para escrevê-la em uma forma conveniente para aplicar uma aproximação não relativística. O resultado obtido após seguir essas etapas é

$$\hat{H} \simeq \beta mc^2 + \frac{\beta}{2m}\vec{P}^2 + \beta m(\vec{a}\cdot\vec{X}) + \frac{\beta}{2m}\vec{P}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{X}}{c^2}\right)\cdot\vec{P}$$
$$-\vec{\omega}\cdot(\vec{L}+\vec{S}) + \frac{\hbar}{4mc^2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{P}). \quad (5.27)$$

Essa hamiltoniana é uma aproximação para o caso do referencial não ser inercial, ou seja, é uma hamiltoniana relativística de um referencial acelerado qualquer nas coordenadas próprias do observador que está na origem deste referencial. Na próxima seção, usaremos (5.27) para fazermos algumas estimativas.

5.1 Estimativa para o modelo da Terra.

Até agora nós não restringimos nosso referencial girante ao modelo que adotamos para a Terra. (O que foi feito na seção anterior é válido para qualquer referencial girante). Antes de fazermos as devidas aproximações, precisamos primeiro motivar nosso modelo.

Sabemos que a forma mais adequada de tratarmos esse problema seria considerar a equação de Dirac em um espaço curvo nas coordenadas próprias do observador. Entretanto, isso vai além do escopo dessa dissertação. Além disso, como veremos mais adiante, a única diferença é que não seremos capazes de reproduzir o fator g da aceleração gravitacional. Porém, seremos capazes de analisar se tomarmos o tempo próprio do observador que está no laboratório como sendo o mesmo de um observador no centro da Terra, o que normalmente é feito na literatura (WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979), é válida.

Sendo assim, substituindo (5.25) e (5.26) em (5.27), chegamos finalmente a

$$\hat{H} = \beta mc^2 + \frac{\beta}{2m}\vec{P}^2 + \beta m(\Omega^2 r_0\lambda^2\xi) + \frac{\beta}{2m}\vec{P}\left(\frac{\Omega^2 r_0\lambda^2\xi}{c^2}\right)\cdot\vec{P}$$
$$-\Omega\lambda^2\hat{J}_z + \frac{\hbar}{2mc^2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{P}). \quad (5.28)$$

Com o objetivo de simplificar os cálculos, vamos renomear cada termo dessa hamiltoniana

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \beta mc^2 + \frac{\beta}{2m}\vec{P}^2, \\
H_1 &= \beta m(\Omega r_0 \lambda^2 \xi), \\
H_2 &= \frac{\beta}{2m}\vec{P}\left(\frac{\Omega^2 r_0 \lambda^2 \xi}{c^2}\right)\cdot \vec{P}, \\
H_3 &= -\Omega\lambda^2 \hat{J}_z, \\
H_4 &= \frac{\hbar}{2mc^2}\sigma\cdot(\vec{a}\times\vec{P}).
\end{aligned}
$$

O termo H_2 pode ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
H_2 &= \left(\frac{\beta\Omega^2 r_0 \lambda^2}{2mc^2}\right)\vec{P}\xi\cdot\vec{P}, \\
&= \beta\Phi\vec{P}\xi\cdot\vec{P}, \qquad (5.29)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\Phi = \frac{\Omega^2 r_0 \lambda^2}{2mc^2} \qquad (5.30)
$$

Usando a regra de produto para divergentes, isto é, $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = f(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}f)$, (5.29) toma a forma

$$
H_2 = \beta\Phi\left[(\vec{P}\xi)\cdot\vec{P} + \xi(\vec{P}\cdot\vec{P})\right]. \qquad (5.31)
$$

Lembrando que $\vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla} = -i\hbar(\hat{\xi}\partial_\xi + \hat{\chi}\partial_\chi + \hat{\zeta}\partial_\zeta)$, teremos $\vec{P}\xi = -i\hbar(\hat{\xi}\partial_\xi + \hat{\chi}\partial_\chi + \hat{\zeta}\partial_\zeta)\xi = -i\hbar\hat{\xi}$. Assim, o termo H_2 pode ser escrito como

$$
H_2 = \beta\Phi\left[-\hbar^2\partial_\xi + \xi\vec{P}^2\right]. \qquad (5.32)
$$

Consequentemente

$$
\begin{aligned}
H_0 + H_1 + H_2 &= \beta mc^2 + \frac{\beta}{2m}\vec{P}^2 + \beta m\Omega^2 r_0\lambda^2\xi + \beta\Phi\left[-\hbar^2\partial_\xi + \xi\vec{P}^2\right] \\
&= \left(1 + \frac{\Omega^2 r_0\lambda^2\xi}{c^2}\right)\beta mc^2 + \left(1 + \frac{\Omega^2 r_0\lambda^2\xi}{c^2}\right)\frac{\beta}{2m}\vec{P}^2 - \beta\Phi\hbar^2\partial_\xi \\
&= (1+\Phi\xi)\beta mc^2 + (1+\Phi\xi)\frac{\beta}{2m}\vec{P}^2 - \beta\Phi\hbar^2\partial_\xi. \qquad (5.33)
\end{aligned}
$$

Para fazermos uma estimativa de (5.30) considere o seguinte. A velocidade da luz no vácuo é $c = 2.99792458 m/s$, o raio da Terra é $R_T = 6,37\times 10^6 m$ e a velocidade angular da Terra é $\Omega = 2\pi/T = 2\pi/23h56min$. De (5.30), vemos que

$$\Phi \cong 2,4 \times 10^{-12} m.$$

Como $\xi \ll R_T$ e R_T é da ordem de $10^6 m$, podemos fazer a aproximação $1+\Phi\xi \approx 1$. Também desprezaremos o último termo de (5.33). Essa aproximação nos permite obter o seguinte resultado

$$H_0 + H_1 + H_2 = \beta mc^2 + \frac{\beta}{2m}\vec{P}^2.$$

Assim, a hamiltoniana original toma a forma

$$\hat{H} = \beta mc^2 + \frac{\beta}{2m}\vec{P}^2 - \Omega \hat{J}_z + \frac{\hbar}{2mc^2}\sigma \cdot (\vec{a} \times \vec{P}). \tag{5.34}$$

Nosso objetivo, agora, é mostrar que o último termo da hamiltoniana acima é muito pequeno se comparado aos outros termos. Sem perda de informação, vamos usar apenas os últimos termos nos cálculos a seguir. O produto vetorial pode ser calculado como

$$\vec{a} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \hat{\xi} & \hat{\chi} & \hat{\zeta} \\ a_\xi & 0 & 0 \\ P_\xi & P_\chi & P_\zeta \end{vmatrix} = -i\hbar a_\xi (\hat{\zeta}\partial_\chi - \hat{\chi}\partial_\zeta).$$

Calculando, agora, o produto misto, obtemos

$$\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{P}) = -\frac{i\hbar^2 a_\xi}{2mc^2}(\sigma_\zeta \partial_\chi - \sigma_\chi \partial_\zeta). \tag{5.35}$$

O termo contendo $\hat{J}_z$ pode ser calculado da seguinte forma

$$\begin{aligned} -\Omega \hat{J}_z &= -\Omega(\hat{L}_z + \hat{S}_z) \\ &= -\Omega\left[(\hat{\xi}\hat{P}_\chi - \hat{\chi}\hat{P}_\xi) + \frac{1}{2}\hbar\sigma_\zeta\right] \\ &= -\Omega\left[(-i\hbar\hat{\xi}\partial_\chi + i\hbar\hat{\chi}\partial_\xi) + \frac{1}{2}\hbar\sigma_\zeta\right]. \end{aligned} \tag{5.36}$$

A partir de (5.35) e (5.36) definimos o sequinte operador

$$\hat{\Xi} = -\frac{\Omega\hbar}{2}\sigma_\zeta - \frac{i\hbar^2 a_\xi}{2mc^2}(\sigma_\zeta \partial_\chi - \sigma_\chi \partial_\zeta), \tag{5.37}$$

onde consideramos apenas termos contendo σ.

Suponha, agora, uma função de onda plana da seguinte forma

$$\psi \sim e^{(k_2\chi + k_3\zeta)i}, \tag{5.38}$$

de modo que, aplicando (5.37) em (5.38), obtemos

$$\hat{\Xi}\psi = -\frac{\Omega\hbar\sigma_\zeta}{2}\psi + \frac{\hbar^2 a_\xi}{2mc^2}(k_2\sigma_\zeta - k_3\sigma_\chi)\psi. \tag{5.39}$$

Faremos uma estimativa para a hamiltoniana usando a massa do elétron m_e. Para simplificar, assumimos que $c_1 = \frac{\Omega\hbar}{2}$ e $c_2 = \frac{\hbar^2 a_\xi k_2}{2m_e c^2}$, com $a_\xi = \Omega^2 r_0$. Concluímos, que

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(\frac{\hbar\Omega r_0}{m_e c^2}\right) k_2 = 0,6 \times 10^{-18} k_2 \approx 10^{-18} k_2$$

Logo, para valores razoáveis de k_2, $c_2 \ll c_1$ e, portanto, podemos desprezar o último termo de (5.34)

$$\hat{H} = \beta mc^2 + \frac{\beta}{2m}\vec{P}^2 - \Omega\hat{J}_z.$$

Comparando a hamiltoniana acima com (WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979), vemos que o único termo que não fomos capazes de reproduzir foi o termo da aceleração gravitacional, dado por $m\vec{g}\cdot\vec{r}$. (Vale a pena destacar que há outra diferença: em (WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979), a origem do referencial está no centro da Terra. Essa diferença desaparece se tomarmos $r_0 = 0$.) Este resultado era esperado, pois esse termo vem da curvatura do espaço-tempo, que foi desprezada nos nossos cálculos.

Pelo princípio da equivalência, talvez pudêssemos obter o termo $m\vec{g}\cdot\vec{r}$ se colocássemos o referencial girante com uma aceleração constante -$\vec{g}$ ao longo do eixo z (mesmo que ζ); neste caso, reproduziríamos um laboratório montado em um dos polos, por onde passa o eixo de rotação da Terra. (Deixaremos essa análise para o futuro.)

6 Conclusões e perspectivas.

Após realizarmos uma revisão dos conceitos básicos do espaço-tempo de Minkowski e da geometria diferencial de curvas, abordamos o problema de referenciais acelerados tanto na física clássica quanto na mecânica quântica. A partir desses conceitos, fomos capazes de fazer algumas aplicações inéditas na literatura.

Vimos que o espaço-tempo de Minkowski é um espaço quadridimensional e sem curvatura. Estudamos a relação entre esse espaço e a teoria da relatividade especial, onde foi possível ver de forma clara a conexão entre objetos puramente geométricos, como a métrica, por exemplo, e conceitos físicos tais como medidas de tempo, espaço, trajetória de partículas massivas e sem massa etc.

Apresentamos a base de Serret-Frenet e vimos como ela se relaciona com a aceleração do observador e com a rotação da tríade. Vimos que a primeira curvatura está relacionada ao módulo da aceleração, enquanto as torções da curva (k_2 e k_3) estão relacionadas às rotações da tríade.

A partir do caso particular de curvas planas no espaço-tempo de Minkowski, analisamos de forma inédita o caso no qual a aceleração é inversamente proporcional ao tempo próprio (ou comprimento de arco). Obtemos a curva descrita pela partícula acelerada nas coordenadas do referencial inercial, e vimos que essa curva tem uma forma similar à de uma hipérbole.

Finalmente, apresentamos a equação de Dirac em um referencial adaptado às coordenadas próprias de um observador acelerado. Isso foi feito tanto para o caso mais geral possível, onde a tríade pode ter qualquer rotação, quanto para o caso no qual a tríade rotaciona segundo as fórmulas de Serret-Frenet. Por fim, usamos a versão aproximada da equação de Dirac na base de um observador que descreve um movimento circular e uniforme com raio e frequência angular iguais aos da Terra. Como resultado, vimos que o tempo próprio do observador que está na superfície da Terra pode ser aproximado pelo tempo próprio de um observador que está localizado no centro da Terra.

No modelo que adotamos para Terra, desprezamos a curvatura do espaço-tempo. Por essa razão, não foi possível reproduzir a aceleração gravitacional. Uma continuação natural do trabalho apresentado nesta dissertação seria escrever a equação de Dirac nas coordenadas próprias do observador, expandidas até a segunda ordem para podermos contabilizar a curvatura do espaço-tempo.

Referências

LOGUNOV, A. *Henri Poincaré e a Teoria da Relatividade*. [S.l.]: Alrisha, 2020. Citado na página 11.

ISAACSON, W. *Einstein sua vida, seu universo*. São Paulo - SP: Companhia das Letras, 2007. Citado na página 11.

NORTON, J. What was Einstein's principle of equivalence? *Stud. Hist. Phil. Sci.*, v. 16, n. 3, p. 203–246, 1985. ISSN 0039-3681. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0039368185900020>. Citado na página 12.

HEHL, F. W.; NI, W.-T. Inertial effects of a dirac particle. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 42, p. 2045–2048, Sep 1990. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.42.2045>. Citado 4 vezes nas páginas 12, 34, 39 e 41.

FORMIGA, J. B. The Frenet-Serret description of Born rigidity and its application to the Dirac equation. *Rev. Mex. Fis.*, v. 66, n. 2, p. 180, 2020. Citado 4 vezes nas páginas 12, 33, 35 e 40.

NABER, G. L. *Spacetime and Singularities: And introduction*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1988. Citado 4 vezes nas páginas 16, 19, 20 e 22.

CLEBER, G. *A teoria da relatividade de Eisntein - Anotações de um leigo*. [S.l.: s.n.]. Citado na página 17.

SANTOS, J. Minkowski, geometria e relatividade. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 9, 12 2009. Citado na página 18.

FREITAS, A. H. G. Gabriel B.R.L de. Dilatação do tempo, referenciais acelerados e o paradoxo dos gêmeos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 41, n. 3, 2019. Citado na página 25.

TAYLOR, J. R. *Mecânica Clássica*. [S.l.]: Bookman Editora LTDA, 2013. Citado na página 25.

PEREIRA, R. V.; MIZUKOSHI, J. K. *O paradoxo do celeiro*. Disponível em: <https://propg.ufabc.edu.br/mnpef-sites/relatividade-restrita/o-paradoxo-da-vara-e-do-celeiro/> Citado na página 27.

CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro - RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. Citado na página 29.

FORMIGA, J. B. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies no Espaço-tempo de Minkowski com aplicações aos observadores de Rindler*. 2007. Citado na página 30.

MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. New York: W.H. Freeman and Company, 1973. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 36.

FORMIGA, J. B.; ROMERO, C. On the differential geometry of time-like curves in minkowski spacetime. *Am. J. Phys.*, v. 74, n. 11, p. 1012–1016, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

SCHWICHTENBERG, J. *Physics from Symmetry*. [S.l.]: Springer, 2018. Citado na página 39.

COLLAS, P.; KLEIN, D. *The Dirac Equation in Curved Spacetime: A Guide for Calculations*. Switzerland: Springer, 2019. Citado na página 39.

WERNER, S. A.; STAUDENMANN, J. L.; COLELLA, R. Effect of earth's rotation on the quantum mechanical phase of the neutron. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 42, p. 1103–1106, Apr 1979. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.42.1103>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 52.