

Alberto de Albuquerque Cezar Júnior

Momento Magnético Anômalo no Modelo Padrão Eletrofraco e Além

João Pessoa - PB

2019

Alberto de Albuquerque Cezar Júnior

Momento Magnético Anômalo no Modelo Padrão Eletrofraco e Além

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física, área de concentração Física de Partículas Elementares.

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física

Orientador: Paulo Sérgio Rodrigues da Silva

João Pessoa - PB

2019

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C425m Cezar Júnior, Alberto de Albuquerque.
Momento magnético anômalo no modelo padrão eletrofraco
e além / Alberto de Albuquerque Cezar Júnior. - João
Pessoa, 2019.
72 f. : il.

Orientação: Paulo Sérgio Rodrigues da Silva.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Modelo padrão. 3. Momento magnético
anômalo. 4. $g-2$ do múon. 5. Momento de dipolo
magnético. I. Silva, Paulo Sérgio Rodrigues da. II.
Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)

A meus queridos pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais. A minha mãe, Maria Lúcia, por ser um exemplo de esforço e dedicação, por me proporcionar a vida e todo o amor necessário, me tornando um privilegiado para seguir meus sonhos. A meu pai e melhor amigo, Alberto de Albuquerque, por todo carinho, confiança e suporte, principalmente nos momentos difíceis, sem os quais este trabalho seria impossível. Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior por ter financiado meus estudos e minha pesquisa, ao meu orientador, Paulo Sérgio Rodrigues da Silva, por ter me guiado nesta jornada e por ser um exemplo e uma inspiração como profissional e pessoa, e ao professor, Carlos Antônio de Sousa Pires, pelo aprendizado e dedicação que me foram conferidos nos últimos anos. Por fim, agradeço ao programa de pós-graduação em física da UFPB por ter me proporcionado a oportunidade de estudar e trabalhar com o que amo e ao lado de colegas com quem compartilhei aprendizados que levarei por toda a vida.

The main point was that all of us who put QED together,
including especially Feynman, considered it a jerry-built and
provisional structure which would either collapse or be replaced by
something more permanent within a few years.

So I find it amazing that it has lasted for fifty years and
still agrees with experiments to twelve significant figures.

It seems that Nature is telling us something.
Perhaps she is telling us that she loves sloppiness.

Freeman Dyson

Resumo

Computamos algumas das principais contribuições do Modelo Padrão para o momento magnético anômalo de férmions de Dirac carregados e analisamos trabalhos contabilizando correções de ordens maiores. Comparamos isso com os resultados experimentais que apontam uma discrepância entre a previsão teórica e o experimento, sendo um forte indício de física além do Modelo Padrão. Derivamos as contribuições gerais devido a uma variedade de novas partículas, considerando a possibilidade de troca de sabor e acoplamentos escalar, pseudoescalar, vetorial e axial. A partir dessas expressões gerais recuperamos previsões do Modelo Padrão, além de possibilitarmos o cálculo de um vasto número de alternativas de física nova.

Palavras-chaves: Momento de Dipolo Magnético. Modelo Padrão. Momento Magnético Anômalo. $g-2$. Múon. Elétron.

Abstract

We compute some of the main contributions of the Standard Model to the anomalous magnetic moment of charged Dirac fermions and analyze some works accounting for higher order corrections. We compare this with the experimental results that point out a discrepancy between the theoretical prediction and the experiment, which is a strong evidence of physics beyond the Standard Model. We derive the general contributions due to a variety of new particles, considering the possibility of flavor changing and scalar, pseudo-scalar, vector and axial couplings. From these general expressions we retrieve predictions from the Standard Model and additionally we allow the calculation of a vast number of new physics alternatives.

Key-words: Magnetic Dipole Moment. Standard Model. Anomalous Magnetic Moment. $g-2$. Muon. Electron.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Corrente, I , percorrendo um circuito fechado com trajetória genérica (GRIFFITHS, 1999)	16
Figura 2 – Espalhamento elástico de elétrons devido a um campo externo estático.	19
Figura 3 – Correções radiativas de um loop para o espalhamento devido a um campo externo estático.	20
Figura 4 – Diagrama representativo da função do vértice.	22
Figura 5 – Diagrama da correção do vértice de primeira ordem com os momentos atribuídos.	23
Figura 6 – Diagrama da polarização do vácuo.	26
Figura 7 – Diagramas com dois loops que contribuem para o momento magnético anômalo dos léptons.	27
Figura 8 – Diagramas com dois loops com contribuições dependentes das massas.	28
Figura 9 – Diagramas com três loops com contribuições universais para o momento magnético anômalo (JEGERLEHNER, 2007).	30
Figura 10 – Diagrama exemplo do espalhamento da luz pela luz com três loops e não universal.	31
Figura 11 – Diagramas representando contribuições fracas e do Higgs para o a_μ	37
Figura 12 – Diagrama que exemplifica os diagramas bosônicos com a presença do Higgs que contribuem para $a_{\mu;bos}^{(4)EW}$	39
Figura 13 – Diagrama que exemplifica os diagramas fermiônicos com a presença do Higgs que contribuem para $a_{\mu;ferm}^{(4)EW}$	39
Figura 14 – Diagrama que exemplifica os diagramas fermiônicos com um triângulo férmion- $\gamma\gamma Z$ que contribuem para $a_{\mu;ferm}^{(4)EW}$	40
Figura 15 – Diagrama que exemplifica a contribuição da polarização hadrônica do vácuo para o momento magnético anômalo do múon.	42
Figura 16 – Diagrama que exemplifica a contribuição do espalhamento da luz pela luz para o momento magnético anômalo do múon.	43
Figura 17 – Diagramas de um loop para bósons escalares contribuindo para a_f	47
Figura 18 – Atribuições dos momentos para as diferentes pernas do diagrama para a extração das regras de Feynman.	47
Figura 19 – Diagramas de um loop para bósons vetoriais contribuindo para a_f	53
Figura 20 – Vértice vetor-férmion-férmion.	54
Figura 21 – Diagrama em nível de árvore para o processo $f'_1 + f_4 \rightarrow f_2 + f'_3$, mediado por um bóson vetorial V	54
Figura 22 – Diagrama a nível de árvore para o processo $f'_1 + f_4 \rightarrow f_2 + f'_3$, mediado por um escalar não físico, w	55

Figura 23 – Dois diagramas envolvendo escalares não físicos acoplados com o bóson vetorial, V , e o fóton.	57
Figura 24 – Diagrama de Barr-Zee de dois loops para o momento magnético anômalo do elétron.	60

Lista de tabelas

Tabela 1 – Limites inferiores para as massas de novos estados físicos determinados experimentalmente (TANABASHI et al., 2018).	63
--	----

Sumário

	Lista de ilustrações	8
	Lista de tabelas	10
	Introdução	13
1	O MOMENTO MAGNÉTICO ANÔMALO NA QED	15
1.1	Eletromagnetismo Clássico	15
1.2	Mecânica Quântica	16
1.3	Eletrodinâmica Quântica	18
1.4	Correções Radiativas da QED	20
1.5	Contribuição de um Loop da QED	22
1.6	Contribuições de dois loops	26
1.7	Contribuições de três ou mais loops	29
2	O MOMENTO MAGNÉTICO ANÔMALO NO MODELO PADRÃO	33
2.1	O Modelo Padrão	33
2.2	O Modelo Eletrofraco	33
2.3	O Modelo das Interações Fortes	35
2.4	Contribuição do Modelo Padrão para a_μ	36
2.4.1	Contribuições fracas	37
2.4.2	Contribuições Hadrônicas	42
2.5	Modelo Padrão e os resultados experimentais	43
3	EXPRESSÕES GERAIS PARA O MOMENTO MAGNÉTICO ANÔ-	
	MALO	46
3.1	Bóson Escalar	46
3.1.1	Diagramas 17(a) e 17(b)	46
3.1.2	Diagrama 17(c)	51
3.1.3	Diagramas 17(d) e 17(e)	51
3.2	Bóson Vetorial	53
3.2.1	Diagramas 19(a) e 19(b)	56
3.2.2	Diagrama 19(c)	56
4	MODELOS DE FÍSICA ALÉM DO MODELO PADRÃO E O MO-	
	MENTO MAGNÉTICO ANÔMALO	59

5	CONCLUSÃO	64
	Conclusões	65
	REFERÊNCIAS	65
	APÊNDICES	69
	APÊNDICE A – ALGUMAS MATRIZES IMPORTANTES	70
	APÊNDICE B – ANALISANDO AS CONTRIBUIÇÕES DO MO- DELO PADRÃO ELETROFRACO	72
B.1	Bóson de Higgs	72
B.2	Bóson Z	72
B.3	Bósons $W^{\pm}$	73

Introdução

O spin de férmions carregados, como o múon e o elétron, geram momentos de dipolo magnéticos,

$$\boldsymbol{\mu} = -g \frac{e}{2m} \mathbf{S} .$$

Em 1928, Dirac desenvolveu a equação de onda relativística que leva seu nome (DIRAC, 1928b), tornando o spin do elétron uma parte essencial da sua teoria. A equação de Dirac previu um fator $g = 2$ para uma partícula elementar carregada de spin $1/2$. Porém, esse resultado é obtido sem considerar correções quânticas para a teoria clássica de campos, responsáveis por gerar efeitos de loop nos diagramas de Feynman.

O Modelo Padrão é uma teoria quântica de campos capaz de descrever três das quatro forças fundamentais da natureza (as interações eletromagnética, fraca e forte), sendo extremamente bem sucedido em recuperar os resultados experimentais. Em 1948, Schwinger foi quem primeiro encontrou a previsão de um loop da Eletrodinâmica Quântica para o momento magnético anômalo do elétron (SCHWINGER, 1948), abrindo caminho para que novas contribuições de correções quânticas do modelo padrão fossem calculadas por físicos ao redor do mundo, aumentando ainda mais nossa precisão teórica.

Definindo o momento magnético anômalo como

$$a \equiv \frac{g - 2}{2} ,$$

esse parâmetro tem sido um rigoroso teste do Modelo Padrão. As previsões da teoria podem ser divididas na forma

$$a^{SM} = a^{QED} + a^{EW} + a^{Had} ,$$

onde SM remete ao Modelo Padrão (da sigla em inglês), QED a eletrodinâmica quântica, EW a interação eletrofraca e Had aos efeitos hadrônicos.

A parte da eletrodinâmica quântica, a^{QED} , já é computada de forma aproximada até 5 loops (AOYAMA et al., 2012). Para as interações dos bósons $W^\pm$, Z (interação fraca) e o Higgs H (entrando em a^{EW}) consideramos a contribuição até 2 loops (GNENDIGER et al., 2013), sendo de 3 loops desprezível dentro da atual precisão experimental. Para a interação forte os quarks precisam ser levados em consideração, o problema é o caráter não perturbativo da teoria em baixas energias. As contribuições de loop hadrônicas (partículas compostas por quarks e antiquarks) em a^{Had} trazem a maior incerteza do Modelo Padrão. Felizmente, os principais efeitos hadrônicos advêm da polarização do vácuo, que podem ser avaliados a partir de dados experimentais, além da contribuição do espalhamento da luz

pela luz (DAVIER et al., 2017; PRADES et al., 2009). Somando todas as contribuições computadas do Modelo Padrão para o momento magnético anômalo do múon,

$$a_{\mu}^{SM} = 116\,591\,823(1)(34)(26) \times 10^{-11} .$$

Apesar de todo o sucesso em descrever o momento magnético anômalo das partículas que compõem o Modelo Padrão no passar dos anos, o experimento E821, no Brookhaven National Laboratory, envolvendo os léptons carregados μ^+ e μ^- submetidos a um campo magnético externo constante, encontrou o resultado experimental para os múons (MOHR et al., 2012)

$$a_{\mu}^{exp} = 11\,659\,209,1(5,4)(3,3) \times 10^{-10} .$$

A diferença entre experimento e teoria resulta em (TANABASHI et al., 2018)

$$\Delta a_{\mu} \equiv a_{\mu}^{exp} - a_{\mu}^{SM} = 268(63)(43) \times 10^{-11} .$$

Apesar de não conclusiva (um desvio padrão de cerca de 3,7 (σ) maior que a previsão teórica mais recente) essa discrepância é um forte indício da presença de uma nova física além do Modelo Padrão. Pensando nisso, cálculos na ordem de um loop para interações genéricas contribuindo para o momento magnético anômalo de férmions de Dirac carregados se mostram fundamentais para avaliar as possibilidades de novas partículas, além das já conhecidas, estarem contribuindo para essa discrepância. Com esses cálculos podemos avaliar a possibilidade de novos bósons escalares ou vetoriais além do Modelo Padrão, ajustando as massas e acoplamentos, respeitando os vínculos experimentais.

O experimento E989, no Brookhaven National Laboratory, é um aprimoramento do E821 e tem o potencial de confirmar a discrepância com 7σ (DRIUTTI, 2019). Resultados mais precisos desse e outros experimentos podem surgir em um futuro próximo, motivando estudos mais aprofundados do momento magnético anômalo do múon.

1 O Momento Magnético Anômalo na QED

O conceito de momento de dipolo magnético pode ser bem compreendido partindo da sua abordagem ainda no eletromagnetismo clássico. Quando aplicado para o caso do elétron, por exemplo, o valor previsto depende da teoria física levada em consideração. A teoria quântica de campos relativísticos da eletrodinâmica, ou Eletrodinâmica Quântica (QED, da sigla em inglês), é capaz de realizar previsões extremamente precisas acerca do momento magnético anômalo do elétron, em grande concordância com os resultados experimentais mais modernos, sendo uma das teorias mais bem sucedidas da física. Devido ao seu êxito preditivo, neste capítulo introduziremos a ideia por trás do momento magnético anômalo com a finalidade de calcular analiticamente a contribuição advinda da QED até a primeira correção radiativa. Correções de ordens maiores mostrar-se-ão significativas e complexas, cujos resultados serão comentados, porém, não serão aprofundados. Um adendo precisará ser feito sobre o processo de regularização e renormalização, uma vez que isso foi peça-chave para essas análises.

1.1 Eletromagnetismo Clássico

Começando pela magnetostática clássica, ao aproximarmos o potencial vetorial magnético de uma distribuição de corrente localizada através de uma expansão multipolar, ou seja, uma expansão em uma série de potências $1/r$ (ver [Figura 1](#)), se r for significativamente grande temos os primeiros termos dominando, de modo que podemos desprezar os demais. O primeiro termo (proporcional a $1/r$) é denominado de monopolo, o segundo (proporcional a $1/r^2$) de dipolo, o terceiro (proporcional a $1/r^3$) de quadrupolo, e assim por diante. Porém, ocorre que o termo de monopolo envolve o vetor deslocamento total em torno de um circuito fechado, sempre resultando em zero. Já é algo esperado, uma vez que pela equação de Maxwell, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, não há monopolos magnéticos. O termo seguinte, o dipolo, passa a ser o dominante. O potencial vetorial magnético do dipolo pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{A}_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (1.1)$$

onde é definido o momento de dipolo magnético, $\boldsymbol{\mu}$,

$$\boldsymbol{\mu} \equiv I \int d\mathbf{a} = I\mathbf{a}, \quad (1.2)$$

sendo $\mathbf{a}$ a "área vetorial" do circuito (se o circuito fechado forma uma figura plana, $\mathbf{a}$ aponta na direção usual a partir da regra da mão direita, com os dedos na direção da corrente) e μ_0 a constante de permeabilidade do vácuo.

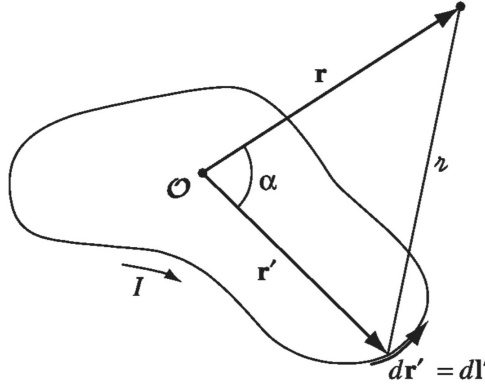


Figura 1 – Corrente, I , percorrendo um circuito fechado com trajetória genérica. Escolhemos O como a origem das coordenadas, a partir da qual r é a distância do ponto em que desejamos calcular $\mathbf{A}_{dip}(\mathbf{r})$. (GRIFFITHS, 1999)

Da mesma forma que um dipolo elétrico sofre um torque, $\mathbf{N}$, na presença de um campo elétrico ($\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$, onde $\mathbf{p}$ é o momento de dipolo elétrico e $\mathbf{E}$ é o campo elétrico), o mesmo ocorre para um dipolo magnético em uma distribuição localizada de corrente na presença de um campo magnético uniforme externo, $\mathbf{B}$, onde

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (1.3)$$

é o torque obtido.

Supondo um elétron girando em torno de um ponto, formando uma órbita circular de raio r , temos que o período para completar uma volta completa será $T = 2\pi r/v$, onde v é a velocidade do elétron (apesar de que a corrente não deva ser constante, pode ser aproximada como tal uma vez que o período é significativamente curto). Logo,

$$\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{a} = \frac{-e}{T}\pi r^2 \mathbf{n} = -\frac{1}{2}evr\mathbf{n}, \quad (1.4)$$

onde e é o módulo da carga elétrica do elétron e $\mathbf{n}$ é o vetor unitário na direção do "vetor área" de acordo com a regra da mão direita a partir da corrente. Por fim,

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{1}{2}\frac{e}{m}\mathbf{L}, \quad (1.5)$$

onde $\mathbf{L} = mrv\mathbf{n}$ é o momento angular orbital em duas dimensões e m é a massa do elétron. A partir dessa expressão que relaciona o momento de dipolo magnético com um momento angular podemos fazer a dedução heurística para o caso quântico.

1.2 Mecânica Quântica

Considerando a mecânica quântica não-relativística, uma vez que o auto-valor do momento angular na direção de um eixo z definida em uma órbita atômica é $L_z = \hbar m_l$,

onde m_l é o número quântico magnético, e definindo o magneton de Bohr, $\mu_B = e\hbar/2m$, temos que o momento de dipolo magnético em termos do momento angular orbital toma a forma

$$\boldsymbol{\mu} = -\mu_B m_l \mathbf{n} . \quad (1.6)$$

Podemos imaginar a mesma abordagem para o caso do spin. Porém, desconhecemos uma possível distribuição de carga interna do elétron. Supomos, analogamente a Eq. (1.5), algo como $\boldsymbol{\mu} \propto -(e/2m)\mathbf{S}$, onde $\mathbf{S}$ é o spin do elétron. Embora o spin do elétron seja análogo a uma rotação sobre um eixo, o elétron é tratado como uma partícula pontual, sendo o spin uma forma intrínseca do momento angular. Então, um fator g , conhecido como razão giromagnética, aparece como devido a uma contribuição distinta do caso clássico, de modo que

$$\boldsymbol{\mu} = -g \frac{e}{2m} \mathbf{S} . \quad (1.7)$$

Quando Dirac introduziu sua equação de onda relativística para o elétron (DIRAC, 1928b; DIRAC, 1928a),

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = -e\gamma^\mu A_\mu \psi , \quad (1.8)$$

a previsão de $g = 2$ surgiu naturalmente (MARCIANO, 2003). Uma vez que este valor estava de acordo com os resultados experimentais da época, a teoria de Dirac se mostrou de certo modo correta, apesar de possuir alguns problemas com estados de energia negativa, que viriam a ser interpretados como a existência de antipartículas (QUINN, 2003).

Considerando as unidades naturais ($\hbar = c = 1$) daqui em diante e tomando $\boldsymbol{\mu}_e$ como o momento de dipolo magnético do elétron, pela teoria quântica relativística de Dirac,

$$\boldsymbol{\mu}_e = -2\mu_B \mathbf{S} . \quad (1.9)$$

Pela teoria relativística, o hamiltoniano de um elétron (com carga elétrica $-e$) submetido a um campo eletromagnético externo, considerando o limite para baixas velocidades, é da forma (RYDER, 1996)

$$H = m + \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 - e\phi - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} , \quad (1.10)$$

onde o primeiro termo é a contribuição da energia de repouso, o segundo termo é o vetor momento, $\mathbf{p}$, incluindo o potencial vetor, $\mathbf{A}$, o terceiro termo advém do potencial escalar, ϕ , e, por fim, o quarto termo é onde se encontra a energia do dipolo magnético na presença de um campo magnético externo.

O operador de spin pode ser escrito como

$$\mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{2} , \quad (1.11)$$

onde $\boldsymbol{\Sigma} = (\Sigma^{23}, \Sigma^{31}, \Sigma^{12})$ são generalizações das matrizes 2x2 de spin de Pauli na forma de matrizes 4x4 para a teoria de Dirac (MANDL, 1984). As matrizes de Dirac e de spin

encontram-se no [Apêndice A](#). Reescrevendo $\boldsymbol{\mu}$,

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{g}{2}\mu_B\boldsymbol{\Sigma}. \quad (1.12)$$

Substituindo na Eq. (1.10),

$$H = m + \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 - e\phi + \frac{g}{2}\mu_B\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}. \quad (1.13)$$

Tomando a Eq. (1.8) encontramos o autovalor para a energia

$$E = m + \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 - e\phi + \mu_B\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}, \quad (1.14)$$

ou seja, comparando com a Eq. (1.13) identificamos que $g = 2$. Essa é a previsão exata da equação de Dirac. Podemos ignorar os outros termos da Eq. (1.14) pois não estarão relacionados ao momento de dipolo magnético.

1.3 Eletrodinâmica Quântica

Com o advento da teoria quântica de campos para a eletrodinâmica, fomos capazes de descrever a interação entre luz e matéria sem que houvesse certos problemas como, por exemplo, a previsão de uma densidade de probabilidade negativa, presente na formulação anterior. Dessa forma, temos uma teoria em completo acordo entre a mecânica quântica e a relatividade especial. A Eletrodinâmica Quântica (QED, da sigla em inglês) é hoje muito bem-sucedida na descrição dos resultados experimentais para o momento magnético anômalo, sendo de longe a principal contribuição. Porém, como veremos, ela não só não é a única contribuição possível que conhecemos, como os experimentos começam a apontar para a necessidade de uma física nova além do modelo padrão.

Weyl ([Weyl, 1929](#)), Yang e Mills ([YANG; MILLS, 1954](#)) perceberam que as interações das partículas elementares eram resultados da presença de simetrias de gauge locais, o que passou a ser adotado como um princípio. A QED é construída sob uma invariância de gauge $U(1)$

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow e^{-e\beta(x)}\psi(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\beta(x), \end{aligned} \quad (1.15)$$

onde $\psi(x)$ e $A_\mu(x)$ são os campos que representam o férmion eletricamente carregado e o fóton, respectivamente, e $\beta(x)$ representa uma função escalar arbitrária. A carga elétrica do pósitron, e , aparece aqui como o acoplamento de gauge. Logo, temos que redefinir $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x)$, onde D_μ denominamos de derivada covariante, na equação de Dirac para um lépton livre $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$, resultando na forma da equação (1.8), porém, agora para campos quânticos. A lagrangeana de interação para esse resultado é

$$\mathcal{L}_{int}^{QED} = ej_{em}^\mu(x)A_\mu(x), \quad (1.16)$$

onde j_{em}^μ é a corrente eletromagnética,

$$j_{em}^\mu = \sum_f Q_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f . \quad (1.17)$$

Aqui consideramos e como a carga elétrica do pósitron e Q_f é a carga do férmion em questão em unidades da carga e . Como estamos interessados em trabalhar com os léptons ($l = e, \mu, \tau$), mais especificamente com o elétron e o múon, consideramos ψ como representando os léptons e $Q_l = -1$.

Como vimos, estamos interessados na interação do elétron com o campo eletromagnético. Assim como a carga elétrica do elétron nos dá uma medida de como o elétron interage com um campo elétrico clássico, o dipolo magnético diz respeito a sua interação com um campo magnético clássico. Consideramos o espalhamento de um elétron por um campo de Coulomb (ver Figura 2), sem quantizar o campo eletromagnético. Ou seja, tratamos o campo como um potencial clássico $A_\mu^{cl}(x)$. Isso reproduz o espalhamento de Rutherford no limite não-relativístico em nível de árvore (menor ordem), onde $A_\mu^{cl}(x)$ representa o campo externo estático nesse espalhamento elástico. A amplitude de transição para o potencial externo estático é

$$S^0 = \langle p' | (-i) \int d^4x_1 N \{ -e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu^{cl}(x) \psi(x) \}_{x_1} | p, q \rangle , \quad (1.18)$$

Após certa análise, podemos deduzir o elemento de matriz desse espalhamento como,

$$\mathcal{M}^0 = ie \bar{u}_{r'}(p') \gamma^\mu u_r(p) \cdot \tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p) , \quad (1.19)$$

onde $\tilde{A}_\mu^{cl}(q)$ é a transformada de Fourier quadrimensional de $A_\mu^{cl}(x)$. O sobrescrito 0 faz referência à contribuição de menor ordem, sem correções radiativas. Aqui, $q^\mu = p'^\mu - p^\mu$. Como vimos na Eq. (1.13), a contribuição do spin, ou seja, do momento magnético, advém

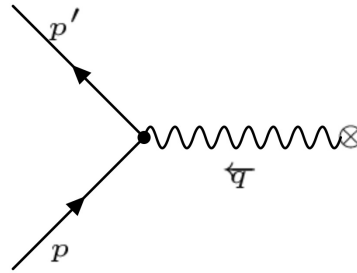


Figura 2 – Espalhamento elástico de elétrons devido a um campo externo estático. Este é o diagrama da contribuição de menor ordem para o cálculo do momento magnético.

do termo com as matrizes de spin Σ , definidas a partir do comutador $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Uma forma de extrair isso da Eq. (1.19) é a partir de decomposição de Gordon (ou identidade de Gordon),

$$\bar{u}_{r'}(p') \gamma^\mu u_r(p) = \bar{u}_{r'}(p') \frac{p^\mu + p'^\mu}{2m} u_r(p) + \bar{u}_{r'}(p') i \sigma^{\mu\nu} \frac{p'_\nu - p_\nu}{2m} u_r(p) . \quad (1.20)$$

Desse modo,

$$\mathcal{M}^0 = ie\bar{u}_{r'}(p') \left[\frac{p^\mu + p'^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right] u_r(p) \tilde{A}_\mu^d(q). \quad (1.21)$$

O primeiro termo é uma interação da forma da interação da QED escalar: o fóton se acopla ao momento do campo. O segundo termo é dependente do spin e dá o momento magnético. A contribuição que estamos interessados aparece no segundo termo da equação acima, então, ignoraremos o primeiro. Podemos demonstrar que todos os termos com $\sigma^{0\nu}$ e $\sigma^{\mu\mu}$ anulam-se. Ao analisarmos $r = 1$ (autoestado de spin na direção $+z$ para o férmion que entra no vértice), só teremos contribuições de σ^{12} e σ^{21} . Repetimos essa mesma análise para o autoestado de spin nas direções $-z$, $+x$, $-x$, $+y$ e $-y$, obtendo resultados análogos.

Considerando a forma da amplitude de transição deduzida a partir da aproximação de Born na mecânica quântica, apresentada na referência (GASIOROWICZ, 1974), e igualando com a amplitude que resulta da nossa análise na QED, onde durante o cálculo precisamos levar em conta a transformada de Fourier, chegamos que o potencial dessa contribuição para o momento magnético, $V(x)$, é

$$V(x) = -\mu_B \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}, \quad (1.22)$$

ou seja, pela Eq. (1.13), $g_e = 2$ (fator g para o elétron). Então, em nível de árvore, a QED recupera o resultado da mecânica quântica relativística da seção anterior.

1.4 Correções Radiativas da QED

Nesta seção, calcularemos a correção de 1-loop para o momento magnético. Correções como esta são conhecidas como correções radiativas.

Os diagramas da Figura 3 são a contribuição em 1-loop da QED para o momento magnético:

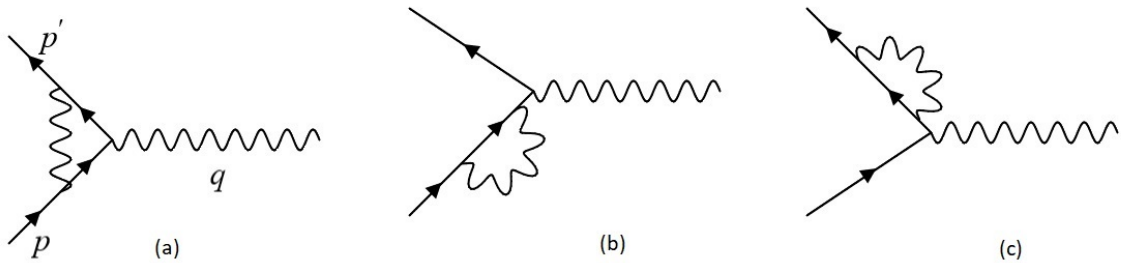


Figura 3 – Correções radiativas de um loop para o espalhamento devido a um campo externo estático.

A expressão mais geral para o elemento de matriz de um elétron sendo espalhado por um campo externo, uma vez que o bilinear que se acopla ao fóton deve ser um vetor

de Lorentz, pode ser escrito na forma

$$\mathcal{M}^n = ie\bar{u}_{r'}(p') (\gamma^\mu \cdot A + (p'^\mu + p^\mu) \cdot B + (p'^\mu - p^\mu) \cdot C) u_r(p) \tilde{A}_\mu^{cl}(q) , \quad (1.23)$$

onde, por conveniência, escolhemos as combinações $p'^\mu + p^\mu$ e $p'^\mu - p^\mu$, e denominamos os coeficientes por A, B e C. Os coeficientes poderiam ser pensados como funções das contrações $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ e $\not{p}' = \gamma^\mu p'_\mu$, mas uma vez que possuímos as identidades $\not{p}u(p) = mu(p)$ e $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m$, esses termos acabariam resultando em fatores numéricos. Da mesma forma que os escalares $p'^2 = p^2 = m^2$. Então, exceto constantes como a massa m , o único escalar restante que podemos esperar que os coeficientes sejam função é o $q^2 = -2p' \cdot p + 2m^2$. Logo, podemos escrever A, B e C como funções de q^2 . Fazendo uso da identidade de Gordon, Eq. (1.20), podemos trocar o termo envolvendo $p'^\mu + p^\mu$ por um envolvendo $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$. Redefinindo os coeficientes, chegamos em uma expressão mais conveniente para abordar o nosso problema,

$$\mathcal{M}^n = ie\bar{u}_{r'}(p') \left(\gamma^\mu F_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2) \right) u_r(p) \tilde{A}_\mu^{cl}(q) . \quad (1.24)$$

Usamos a identidade de Gordon da Eq. (1.20) para decompor o termo com a matriz γ^μ (onde podemos normalizar $F_1(0) = 1$),

$$\mathcal{M}^n = ie\bar{u}_{r'}(p') \left[\frac{p^\mu + p'^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} (1 + F_2(0)) \right] u_r(p) \tilde{A}_\mu^{cl}(q) . \quad (1.25)$$

Comparando com a Eq. (1.21) e considerando novamente a aproximação de Born (GASIOROWICZ, 1974), onde somente o segundo termo da equação acima deve contribuir como momento magnético, vemos que a correção aparece devido ao termo com $F_2(0)$, de modo que

$$g_e = 2 + 2F_2(0) . \quad (1.26)$$

Logo, se descobrirmos $F_2(0)$ conheceremos o fator g . Consideramos o limite $q^2 \rightarrow 0$. É conveniente definirmos o que passaremos a chamar de momento magnético anômalo do elétron como

$$a_e \equiv \frac{g_e - 2}{2} , \quad (1.27)$$

que é equivalente ao fator de forma F_2 para $q^2 = 0$. Aqui, consideraremos as correções de primeira ordem, $n = 1$, apresentadas na Figura 3.

Há três diagramas que podem contribuir para $\mathcal{M}^n$, presentes na Figura 3. Não consideramos uma correção quântica no fóton externo uma vez que estamos considerando um espalhamento a partir de um campo clássico. Os dois últimos diagramas da Figura 3 só podem dar termos proporcionais a γ^μ . Isso ocorre porque esses diagramas apenas corrigem os propagadores para as partículas correspondentes. O primeiro diagrama da Figura 3 corrige o vértice, podendo resultar em termos não proporcionais a γ^μ .

1.5 Contribuição de um Loop da QED

Tendo em mente a discussão no fim da [seção 1.4](#), podemos calcular a contribuição de um loop para a função do vértice da QED, Γ^μ . Pelo diagrama da [Figura 4](#), aplicando as regras de Feynman:

$$\mathcal{M} = \bar{u}_{r'}(p') ie\Gamma^\mu u_r(p) \tilde{A}_\mu^{\text{cl}}(q) \quad (1.28)$$

é o elemento de matriz. Pela Eq. (1.24),

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2) . \quad (1.29)$$

Dessa forma, podemos denominar que

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu . \quad (1.30)$$

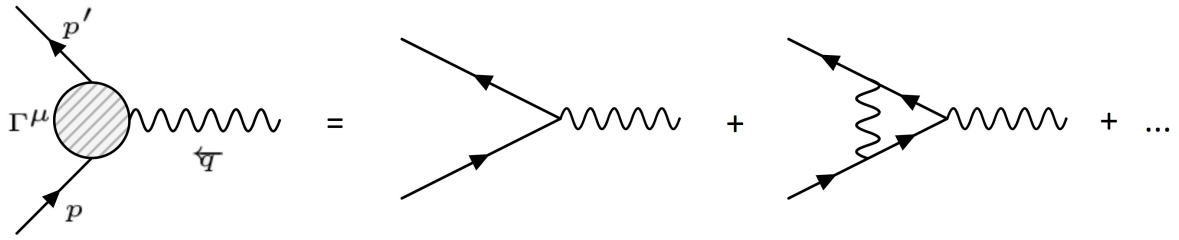


Figura 4 – Diagrama representativo da função do vértice. O círculo hachurado caracteriza a soma do vértice de menor ordem mais todas as correções radiativas em ordens maiores.

Pelas regras de Feynman na [Figura 5](#),

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu &= (ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\nu\alpha}}{(p-k)^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{i(\not{k} + \not{q} + m)}{(k+q)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \\ &= -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-2[\not{k}\gamma^\mu(\not{k} + \not{q}) + m^2\gamma^\mu - 2m(2k^\mu + q^\mu)]}{((p-k)^2 + i\epsilon)((k+q)^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)} . \end{aligned} \quad (1.31)$$

Uma identidade importante é ([PESKIN; SCHROEDER, 1995](#))

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} \cdots A_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 du_1 \cdots \int_0^1 du_n \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n u_i) u_1^{\alpha_1-1} \cdots u_n^{\alpha_n-1}}{(\sum_{i=1}^n u_i A_i)^{\sum_{i=1}^n \alpha_i}} , \quad (1.32)$$

onde $\Gamma(z)$ aqui é a função gama, $A_i^{\alpha_i}$ são os fatores escalares, u_i é denominado de parâmetro de Feynman e α_i é o expoente de quantas vezes os fatores aparecem. Essa identidade nos auxiliará a simplificar o denominador da Eq. (1.31), com três fatores escalares. No nosso caso, a identidade fica

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{[xA + yB + zC]^3} \quad (1.33)$$

e

$$\begin{aligned} A &\equiv k^2 - m^2 + i\epsilon, \\ B &\equiv (k + q)^2 - m^2 + i\epsilon, \\ C &\equiv (p - k)^2 + i\epsilon. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Definindo $D \equiv xA + yB + zC$, podemos ver que

$$D = k^2 + 2k \cdot (yq - zp) + yq^2 + zp^2 - (x + y)m^2 + i\epsilon. \quad (1.35)$$

Completamos quadrado deslocando o momento k , de modo que definimos

$$l \equiv k + yq - zp.$$

Dessa forma,

$$D = l^2 - \Delta + i\epsilon, \quad (1.36)$$

onde

$$\Delta \equiv -xyq^2 + (1 - z)^2m^2. \quad (1.37)$$

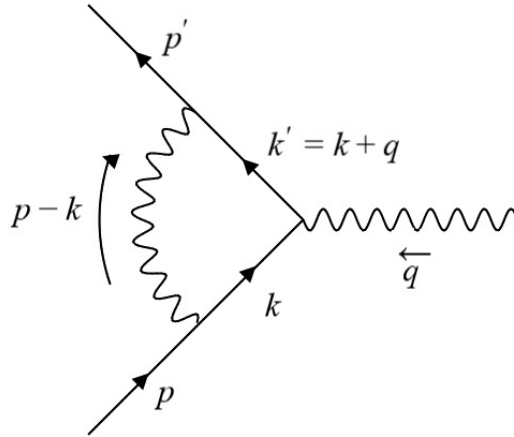


Figura 5 – Diagrama da correção do vértice de primeira ordem com os momentos atribuídos.

Agora, considerando as colocações do parágrafo anterior, analisaremos o numerador, N^μ , da equação (1.31) com o deslocamento l , que resulta em

$$N^\mu = -2[(\not{l} - y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu \not{q} + (\not{l} - y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu (\not{l} - y\not{q} + z\not{p}) + m^2\gamma^\mu - 2m(2l^\mu - 2yq^\mu + 2zp^\mu + q^\mu)].$$

Levando em consideração que N^μ está sendo integrado, utilizamos as identidades

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu}{D^3} = 0 \quad (1.38)$$

e

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu l^\nu}{D^3} = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{4} g^{\mu\nu} l^2}{D^3} \quad (1.39)$$

para reescrever N^μ . Em última análise, também sabemos que N^μ aparecerá entre $\bar{u}_{r'}(p')$ e $u_r(p)$, como vimos pela Eq. (1.28). Então, também fazemos uso das identidades $\not{p}u(p) = mu(p)$ e $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m$. Com certa álgebra, fazendo uso de outras identidades, como a decomposição de Gordon e $x + y + z = 1$, levando em consideração a integração e os espiniores, vemos que N^μ resultará em

$$\begin{aligned} N^\mu \rightarrow & -2 \left[-\frac{1}{2} l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right] \gamma^\mu \\ & - 2imz(1-z)\sigma^{\mu\nu}q_\nu - 2m(z-2)(x-y)q^\mu. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Como vimos, pela nossa análise da Eq. (1.24), o primeiro termo, proporcional a γ^μ , não precisa ser considerado. Pelo último termo, temos

$$\delta\Gamma^\mu \supset -ie^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{-2m(z-2)(x-y)}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3} q^\mu. \quad (1.41)$$

Uma vez que Δ é simétrico na troca $x \leftrightarrow y$, Eq. (1.37), e o integrando acima é antissimétrico, temos que esse termo tem contribuição zero. Logo, só precisamos considerar o segundo termo da equação (1.40). Dessa forma,

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu &= -ie^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{-2imz(1-z)}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3} \sigma^{\mu\nu} q_\nu + \dots \\ &= \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2), \end{aligned} \quad (1.42)$$

onde "...” advém do termo não relevante e a segunda igualdade é deduzida a partir das equações (1.29) e (1.30).

Nossa integral de loop é finita e pode ser avaliada a partir da identidade

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3} = \frac{-i}{32\pi^2 \Delta}. \quad (1.43)$$

Identificando $F_2(q^2)$ na Eq. (1.42) e utilizando a identidade acima,

$$F_2(q^2) = 8ie^2 m^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{-iz(1-z)}{32\pi^2 \Delta}. \quad (1.44)$$

Como vimos na Eq. (1.26), só precisamos conhecer F_2 para $q^2 = 0$. Então,

$$\begin{aligned} F_2(0) &= 8e^2 m^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z(1-z)}{32\pi^2 (1-z)^2 m^2} \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{(1-z)} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

onde $\alpha = e^2/4\pi$ é a constante de estrutura fina em unidades naturais. Pelas equações (1.26) e (1.27), temos que o momento magnético anômalo do elétron devido a contribuição de um loop na QED é (SCHWINGER, 1948; SCHWINGER, 1949),

$$a_e^{(2) QED} = \frac{\alpha}{2\pi} = 0,001161\dots, \quad (1.46)$$

ao passo que em nível de árvore tínhamos $a_e^{(0) QED} = (g_e - 2)/2 = 0$. Os sobrescritos 0 e 2 representam a ordem em termos da carga elétrica, uma vez que $\alpha \propto e^2$. A carga elétrica e a massa são parâmetros da teoria que só podem ser determinados experimentalmente.

Perceba que o cálculo aqui realizado visando o elétron levaria ao mesmo resultado para qualquer outro lépton, uma vez que não surge dependência da massa. Então,

$$\begin{aligned} a_l^{(0) QED} &= 0, \\ a_l^{(2) QED} &= \frac{\alpha}{2\pi}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

onde $l = e, \mu, \tau$.

Felizmente, a integral em 1-loop (1.43) é finita. Porém, correções de ordens superiores acabam por resultar em divergências. Por exemplo, a polarização do vácuo, representada pelo diagrama da Figura 6, resulta em

$$i\mathcal{M} = e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k^\mu - p^\mu}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{2k^\nu - p^\nu}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (1.48)$$

De forma heurística, considerando os limites para $k^\mu \gg p^\mu, m$, podemos aproximar que

$$i\mathcal{M} \sim \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{k^4} \sim \int k dk = \infty. \quad (1.49)$$

Inevitavelmente teremos que tratar divergências como essa quase sempre que considerarmos correções de ordens superiores. Uma vez que os observáveis físicos são finitos, essas divergências devem aparecer apenas em estágios intermediários dos cálculos e em última análise resultariam nos valores observados (seção 2.5). Dada a precisão atual na medição do momento anômalo do elétron e do múon (TANABASHI et al., 2018), se faz necessária a correção para ordens ainda maiores que a primeira aqui considerada. Hoje se estipula correções até a quinta ordem para a QED (seção 1.7). Assim sendo, é preciso resolver o problema das divergências. A solução vem do processo arduamente desenvolvido pelos físicos e denominado de renormalização. Para tal, precisamos regularizar essas divergências, para que possamos trabalhar com valores finitos.

Uma forma de regularização comumente utilizada é a denominada Regularização Dimensional. Transforma-se a integração no momento quadridimensional em uma D-dimensional. Essa regularização tem a vantagem de respeitar a invariância de gauge. A observação crucial é que uma integral da forma

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 - \Delta + i\epsilon]^2}, \quad (1.50)$$

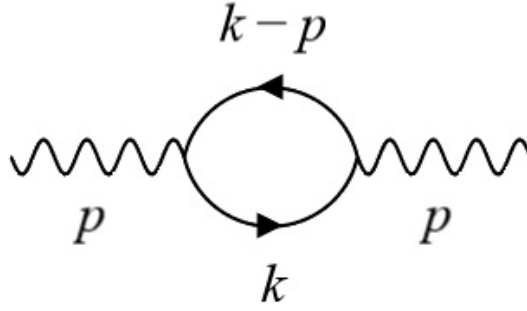


Figura 6 – Diagrama da polarização do vácuo levando em consideração correção de um loop.

é divergente se $D \geq 4$. Se $D < 4$, ela pode convergir (PESKIN; SCHROEDER, 1995).

É importante enfatizar que não calculamos as contribuições de dois ou mais loops. Esses cálculos rendem um árduo trabalho à parte e fogem do nosso escopo. Mas, uma vez que surgem contribuições significativas, apresentaremos nas próximas seções os resultados obtidos pela comunidade científica.

1.6 Contribuições de dois loops

O momento magnético pode ser escrito como uma expansão em potências de α , onde cada termo representará uma ordem de correção. Na seção 1.5, vimos que um loop contribui com $a_e^{(2) QED} = \alpha/2\pi$. Se levarmos em consideração contribuições advindas de todos os três léptons l , teremos contribuições dependentes das razões das suas massas (m_e, m_μ, m_τ). Vamos considerar, por exemplo, o caso do múon, podemos escrever seu momento magnético anômalo da seguinte forma (KINOSHITA et al., 1990),

$$a_\mu^{QED} = A_1 + A_2(m_\mu/m_e) + A_2(m_\mu/m_\tau) + A_3(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau) . \quad (1.51)$$

O termo A_1 exemplifica o que já fizemos até aqui, onde os léptons nos loops são os mesmos que nas pernas externas. O A_2 apenas aparece se considerarmos um loop adicional com um lépton diferente do externo, começando na ordem de dois loops. Já o A_3 advém do caso em que há três ou mais loops, onde três destes loops envolvem léptons distintos. Temos que,

$$A_i = A_i^{(2)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) + A_i^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_i^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + \dots , \quad (1.52)$$

onde $i = 1, 2, 3$. Os sobrescritos representam as ordens das correções quânticas. Aplicando as regras de Feynman para as contribuições, realizando a regularização das integrais

divergentes e a renormalização, chegamos em valores finitos para os coeficientes acima. As mesmas considerações acima podem ser feitas para o elétron e o tau. Os termos de A_1 são independentes da massa para qualquer sabor, são contribuições universais. Como vimos,

$$A_1^{(2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_l^{(2)} = \frac{\alpha}{2\pi} . \quad (1.53)$$

A mesma consideração não pode ser feita para A_2 e A_3 , que dependem da massa do lépton.

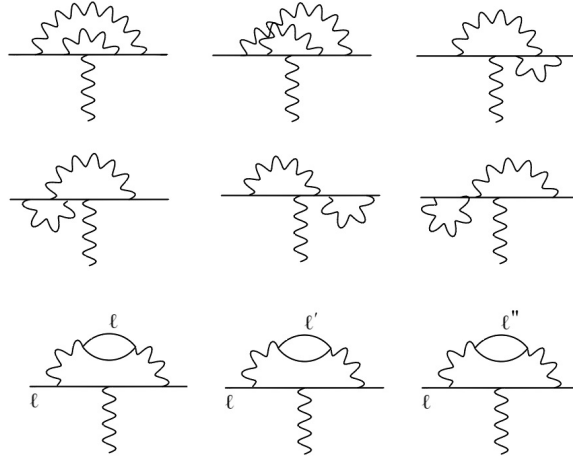


Figura 7 – Diagramas com dois loops que contribuem para o momento magnético anômalo dos léptons.

Prosseguindo com as contribuições universais recaímos nos trabalhos de Karplus e Kroll ([KARPLUS; KROLL, 1950](#)), Petermann ([PETERMANN, 1957](#)) e Sommerfield ([SOMMERFIELD, 1957](#); [SOMMERFIELD, 1958](#)). Os diagramas que contribuem para $A_1^{(4)}$, ou seja, estão relacionados com correções do vértice e envolvem apenas léptons idênticos aos das pernas externas, são os 7 primeiros diagramas da [Figura 7](#). Apesar do sétimo possuir uma polarização do vácuo devido ao loop de léptons no propagador do fóton, as pernas internas e as externas envolvem léptons idênticos e resultam em razões $m_l/m_l = 1$ que tornam a contribuição universal. Então, os resultados para os 7 primeiros diagramas independem do lépton do momento magnético anômalo a ser considerado. Os 6 primeiros diagramas da [Figura 7](#) contribuem com,

$$A_{1[1-6]}^{(4)} = -\frac{279}{144} + \frac{5\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}\zeta(3) , \quad (1.54)$$

onde $\zeta(s)$ é a função zeta de Riemann de variável s . O sétimo diagrama, com polarização do vácuo, resulta em,

$$A_{1[7]}^{(4)} = \frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3} . \quad (1.55)$$

Juntando as contribuições universais para dois loops, temos,

$$A_1^{(4)} = \frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{3}{4}\zeta(3) - \frac{1}{2}\pi^2\ln 2 = -0.328\,478\,965\,579\,193\,78\dots \quad (1.56)$$

As contribuições para $A_2^{(4)}$, não universais e dependentes das massas, advêm dos dois últimos diagramas da Figura 7, onde consideramos $m_{l'} < m_{l''}$ para as massas dos léptons do loop. Aqui, dada a não universalidade, precisamos determinar com qual lépton estamos lidando para o cálculo do momento magnético anômalo. Por exemplo, se estamos lidando com o momento magnético anômalo do elétron, $l = e$, $l' = \mu$ e $l'' = \tau$. Para o caso do múon, $l = \mu$, $l' = e$ e $l'' = \tau$. Analogamente para o caso do tau. Definimos $r \equiv m_{l'(u)}/m_l$. Os resultados para as duas contribuições dos dois últimos diagramas da Figura 7 dependerão das razões das massas (SAMUEL; LI, 1991; SAMUEL; LI, 1992; SAMUEL; LI, 1993; LI et al., 1993). Haverão duas expressões: $A_2^{(4)}(r < 1)$ e $A_2^{(4)}(r > 1)$, de acordo com os diagramas da Figura 8. Desse modo, os resultados obtidos por Li,

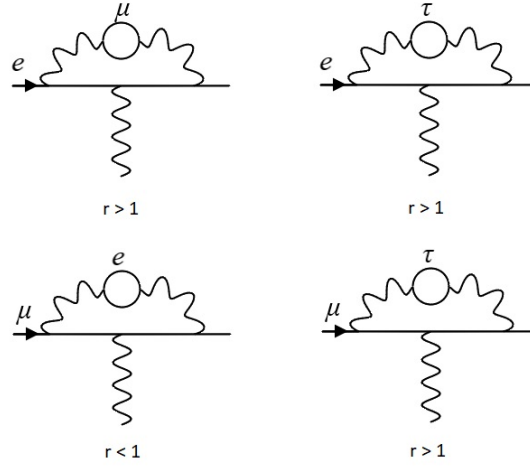


Figura 8 – Diagramas com dois loops com contribuições dependentes das massas.

Mendel e Samuel são:

$$\begin{aligned}
 A_2^{(4)}(r < 1) = & -\frac{25}{36} + \frac{\pi^2}{4}r - \frac{1}{3}\ln r + (3 + 4\ln r)r^2 - \frac{5}{4}\pi^2r^3 \\
 & + \left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{44}{9} - \frac{14}{3}\ln r + 2\ln^2 r \right) r^4 + \frac{8}{15}r^6\ln r - \frac{109}{225}r^6 \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2(n+3)}{n(2n+1)(2n+3)}\ln r - \frac{8n^3 + 44n^2 + 48n + 9}{n^2(2n+1)^2(2n+3)^2} \right) r^{2n+4}
 \end{aligned} \tag{1.57}$$

e, definindo $\lambda \equiv 1/r$,

$$\begin{aligned}
 A_2^{(4)}(r > 1) = & + \frac{\lambda^2}{45} + \frac{\lambda^4 \ln \lambda}{70} + \frac{9}{19\,600}\lambda^4 - \frac{131}{99\,225}\lambda^6 + \frac{4\lambda^6}{315}\ln \lambda \\
 & - \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{8\lambda^3 + 28\lambda^2 - 45}{[(n+3)(2n+3)(2n+5)]^2} \right) \lambda^{2n+2} \\
 & + 2\lambda^2 \ln \lambda \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n\lambda^{2n}}{(n+3)(2n+3)(2n+5)} \right).
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

A partir dessas expressões, pode-se incluir quantos termos forem necessários para se obter a precisão necessária. A Eq. (1.57) representa a contribuição do terceiro diagrama da

Figura 8, uma vez que $m_e < m_\mu$. Já a Eq. (1.58) diz respeito aos diagramas restantes, pois $m_\mu < m_\tau$. Ao calcularmos o caso $r = 1$ para as duas expressões anteriores, recuperamos um resultado idêntico, equivalente a equação universal (1.55), como seria de se esperar.

Pela revisão de física de partículas do Particle Data Group (PDG) de 2018 (TANABASHI et al., 2018), temos os resultados experimentais recentes para as massas dos léptons:

$$\begin{aligned} m_e &= 0,510\,998\,946\,1(31) \text{ MeV} , \\ m_\mu &= 105,658\,374\,5(24) \text{ MeV} , \\ m_\tau &= 1\,776,86(12) \text{ MeV} . \end{aligned} \quad (1.59)$$

A partir daí podemos obter as razões r e λ e calcularmos (1.57) e (1.58) até a precisão que desejarmos. Desse modo, incluindo só até o primeiro termo do somatório em n ,

$$\begin{aligned} A_2^{(4)}\left(r = \frac{m_e}{m_\mu}\right) &= 1,09426 , \\ A_2^{(4)}\left(r = \frac{m_\tau}{m_\mu}\right) &= 7,807\,9 \times 10^{-5} , \\ A_2^{(4)}\left(r = \frac{m_\mu}{m_e}\right) &= 5,197\,39 \times 10^{-7} , \\ A_2^{(4)}\left(r = \frac{m_\tau}{m_e}\right) &= 1,837\,9 \times 10^{-9} . \end{aligned} \quad (1.60)$$

Sendo os dois últimos resultados acima, as contribuições para o momento magnético anômalo do elétron, significativamente menores que os do múon. Como não é possível haver a contribuição de três léptons em dois loops da QED, temos que $A_3^{(4)} = 0$.

Somando as contribuições de todos os diagramas de dois loops para os momentos magnéticos dos diferentes léptons, obtemos,

$$a_e^{QED} = 0,5 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) - 0,328\,478\,444 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + \dots , \quad (1.61)$$

$$a_\mu^{QED} = 0,5 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + 0,765\,859\,113 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + \dots . \quad (1.62)$$

Daqui em diante, dados os processos análogos para diferentes léptons, focaremos apenas no caso do múon, que será favorecido experimentalmente devido as suas massas, como veremos no próximo capítulo. Os resultados são dependentes da precisão calculada nas equações (1.57) e (1.58). Pela revisão do PDG de 2018 (TANABASHI et al., 2018):

$$a_\mu^{QED} = 0,5 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + 0,765\,857\,425(17) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + \dots . \quad (1.63)$$

1.7 Contribuições de três ou mais loops

Quando consideramos correções com três loops o número de diagramas contribuindo somente para a parte universal, sem dependência de massa, cresce para 72 (ver Figura 9).

As contribuições não universais de três loops podem ser vistas substituindo os múons em

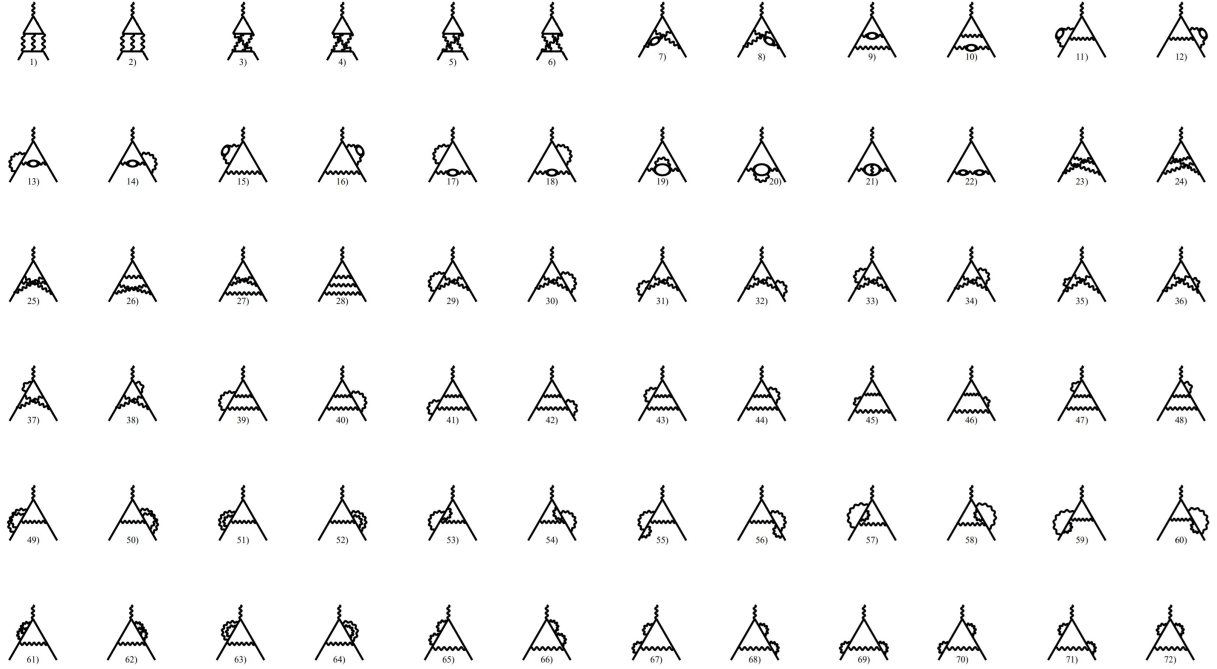


Figura 9 – Diagramas com três loops com contribuições universais para o momento magnético anômalo (JEGERLEHNER, 2007).

um loop fechado da Figura 9 por um loop de elétrons ou taus. As contribuições advêm da polarização do vácuo ou loops de espalhamentos da luz pela luz, tal como na Figura 10. Após muitos anos de trabalho, Laporta e Remiddi nos proporcionaram um resultado analítico (LAPORTA; REMIDDI, 1996),

$$A_1^{(6)} + A_2^{(6)} + A_3^{(6)} = + \frac{28259}{5184} + \frac{17101}{810}\pi^2 - \frac{298}{9}\pi^2 \ln 2 + \frac{139}{18}\zeta(3) - \frac{239}{2160}\pi^4 \\ - \frac{100}{72}\pi^2 \ln^2 2 + \frac{100}{72}\ln^4 2 + \frac{100}{3}a_4 - \frac{215}{24}\zeta(5) + \frac{83}{72}\pi^2 \zeta(3), \quad (1.64)$$

onde $a_4 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{-4}$. Esse resultado confirma a análise numérica de Kinoshita (KINOSHITA, 1995). Porém, agora com o resultado analítico, podemos atribuir a precisão que desejarmos com exatidão.

Para o caso de quatro loops as contribuições chegam a envolver 891 diagramas, cujos termos são avaliados numericamente. Uma versão desses resultados pode ser encontrada no trabalho de Aoyama, Hayakawa, Kinoshita e Nio (AOYAMA et al., 2008). Os mesmos autores trabalham no caso da contribuição dos 12672 diagramas de quinta ordem (AOYAMA et al., 2018).

O momento magnético anômalo do múon, calculado aproximadamente até 5 loops,

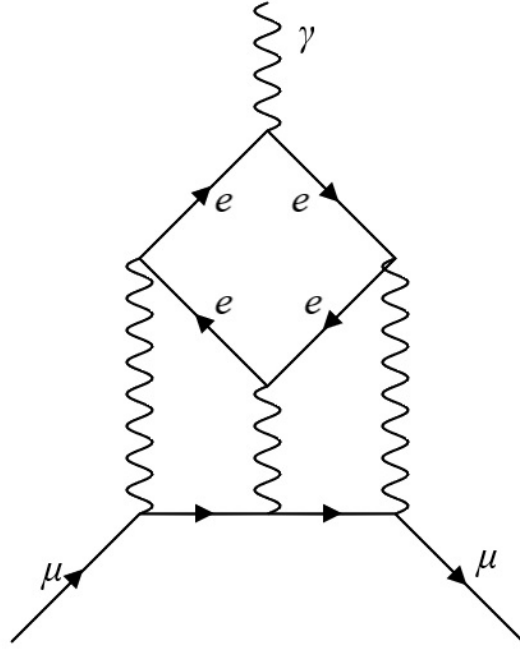


Figura 10 – Diagrama exemplo do espalhamento da luz pela luz com três loops e não universal.

resulta em (TANABASHI et al., 2018)

$$a_{\mu}^{QED} = \frac{\alpha}{2\pi} + 0,765\,857\,425(17) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 24,050\,509\,96(32) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + 130,879\,6(63) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + 753,3(1,0) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 + \dots \quad (1.65)$$

Por intermédio da relação

$$\alpha^2 = \frac{2hR_{\infty}}{cm_e},$$

onde R_{∞} é a constante de Rydberg para átomos pesados, h é constante de Planck e c a velocidade da luz, podemos determinar com grande precisão experimental o valor de α . Através do estudo da velocidade de recuo, $v_r = \hbar k/m_{Rb}$, de um átomo de rubídio (Rb) ao absorver um fóton de momento $\hbar k$, podemos determinar a razão h/m_{Rb} (BOUCHENDIRA et al., 2011), onde m_{Rb} é a massa do átomo de Rb. Através do rearranjo,

$$\alpha^2 = \frac{2R_{\infty}}{c} \frac{m_{Rb}}{m_e} \frac{h}{m_{Rb}}, \quad (1.66)$$

e fazendo uso do resultado determinado no experimento, $h/m_{Rb} = 4,591\,359\,2729(57) \times 10^{-9} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, dos valores previamente conhecidos de R_{∞} , m_e (MOHR et al., 2008) e m_{Rb} (MOUNT et al., 2010), obtêm-se que

$$\alpha^{-1} = 137,035\,999\,037(91). \quad (1.67)$$

A partir desse resultado (TANABASHI et al., 2018) concluimos que

$$a_{\mu}^{QED} = 116\,584\,718,95(0,08) \times 10^{-11}, \quad (1.68)$$

onde o erro advém da incerteza em α . Um resultado mais recente e preciso de α já é conhecido usando o recuo de átomos de césio-133 (PARKER et al., 2018): $\alpha = 1/137,035999046(27)$.

Obviamente, muitas outras colocações poderiam ser feitas acerca das contribuições com mais de um loop advindas da QED, mas isso nos desvia muito do caminho até o propósito final deste trabalho que é avaliar possíveis contribuições de física nova. Quando o fizermos, esperamos que contribuições relevantes para explicar os resultados experimentais possam vir de correções com até dois loops, o que mostraremos muitas vezes ser o caso. Por completeza, uma vez que a QED é a principal contribuição para o momento magnético anômalo dos léptons, não poderíamos ter deixado de abordar a empreitada dos fenomenologistas em analisar as correções para ordens cada vez maiores em α que, como veremos, são de fundamental importância para a precisão experimental atual. Porém, a QED já não é mais a única contribuição significativa para descrever a acurácia dos resultados dos experimentos hoje. Outras teorias de campos bem sucedidas também colaboram para o valor previsto para o momento magnético anômalo e junto com a QED formam o que hoje conhecemos como o Modelo Padrão.

2 O Momento Magnético Anômalo no Modelo Padrão

2.1 O Modelo Padrão

O Modelo Padrão da física de partículas é responsável por descrever três das quatro forças fundamentais conhecidas na natureza: o eletromagnetismo, a interação fraca e forte, não incluindo apenas a força gravitacional. O modelo é construído na abordagem da teoria quântica de campos, que por sua vez trata as partículas como estados excitados dos seus campos subjacentes. A partir disso, ao associar campos de matéria fermiônica, como os léptons aqui abordados, a multipletos de algumas simetrias da lagrangeana, o princípio de gauge, comentado no [Capítulo 1](#), estabelece que as interações das partículas elementares resultam ao promover tais simetrias a simetrias de gauge locais.

O Modelo Padrão é hoje conhecido pela postulação da simetria de gauge local $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, capaz de descrever de forma bem sucedida as forças fundamentais da natureza, implicando na existência dos campos dos bósons vetoriais, responsáveis por intermediar as interações. Impomos, além da invariância da lagrangiana por esse grupo de simetria, a invariância pelo grupo de Poincaré e a renormalizabilidade do modelo. Os índices C , L e Y denotam cor, isospin fraco para os campos de mão esquerda e hipercarga, respectivamente, e estão associados as interações forte e eletrofraca.

Como as observações mostram, somente as interações forte e eletromagnética permanecem intactas após uma quebra espontânea de simetria. Isso resulta na recombinação dos geradores dos grupos $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$, de modo a formar o gerador associado a carga elétrica do grupo $U(1)_{QED}$. Desse modo, podemos tratar separadamente as interações eletrofracas, baseadas no grupo de gauge $SU(2) \times U(1)$, das interações fortes, $SU(3)$. Isso resume anos de desenvolvimentos árduos envolvendo inúmeros físicos, como Yang e Mills, Goldstone, Weinberg, Salam, Glashow, Fermi, Higgs, etc.

2.2 O Modelo Eletrofraco

Os bósons de gauge associados ao grupo eletrofraco, $SU(2) \times U(1)$, são denominados de W_μ^i ($i = 1, 2, 3$) associados ao grupo $SU(2)$ e B_μ ao $U(1)$. Esses bósons atuam como mediadores das interações ao se acoplarem com os campos de matéria, e seus acoplamentos respectivos são dados por g e g' . Essa matéria fermiônica (partículas que seguem a estatística de Fermi-Dirac) aparecem na natureza em três famílias, e podem ser organizados de acordo com sua quiralidade. Os férmions de mão esquerda se transformam como dubletos

de $SU(2)$,

$$\Psi_i = \begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} u_i \\ d'_i \end{pmatrix},$$

onde o índice i representa as diferentes famílias, ν representa os neutrinos, l representa os léptons carregados, u e d' representam os quarks, tal que $d'_i \equiv \sum_j V_{ij} d_j$ e V é a matriz de mistura de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Resultados experimentais atestam (GOLDHABER et al., 1958) que apenas neutrinos de mão esquerda interagem com os bósons de gauge carregados da interação fraca, e a não observação de massa para os neutrinos permitiu escrever a lagrangeana do Modelo Padrão das interações eletrofracas em termos apenas dos neutrinos de mão esquerda. Porém, hoje se sabe que há oscilações de neutrinos (FUKUDA et al., 1999; AHMAD et al., 2002; EGUCHI et al., 2003), o que implica que os mesmos possuem massa, gerando um novo campo de estudos na área. Sendo assim, os férmions de mão direita aparecem como singletos de $SU(2)$, exceto os neutrinos.

O mecanismo de Higgs promove a quebra espontânea de simetria de gauge da interação eletrofraca resultando na simetria do eletromagnetismo, $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{QED}$, onde $U(1)_{QED}$ é o subgrupo de simetria associado. Para tal, um dubleto escalar complexo,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix},$$

denominado de Higgs, é adicionado ao modelo com potencial

$$V(\phi) = M^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (2.1)$$

$V(\phi)$ só possui um mínimo se $\lambda > 0$, e a sua posição depende do sinal de M^2 . Para $M^2 > 0$ o mínimo ocorre em $\phi = 0$, resultando em uma solução simétrica. Para $M^2 < 0$, há toda uma infinidade de mínimos no plano complexo. Qualquer mínimo desses corresponde a uma quebra espontânea da simetria. ϕ desenvolve um valor esperado do vácuo, $v = |M|/\sqrt{\lambda}$, que quebra a simetria de gauge eletrofraca, restando no espectro físico observável apenas um escalar neutro, H .

Após essa quebra espontânea de simetria, a lagrangeana física resultante para os férmions pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & \sum_i \bar{\psi}_i \left(i \not{\partial} - m_i - \frac{m_i H}{v} \right) \psi_i - \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_i \bar{\Psi}_i \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^-) \Psi_i \\ & - e \sum_i Q_i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_i A_\mu - \frac{g}{2\cos\theta_W} \sum_i \bar{\psi}_i \gamma^\mu (g_V^i - g_A^i \gamma^5) \psi_i Z_\mu, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac, ψ_i são os campos dos férmions, m_i suas massas, $T^\pm$ são as matrizes de levantamento e abaixamento do isospin fraco, $W^\pm = (W^1 \mp iW^2)/\sqrt{2}$ e $Z = -B \sin\theta_W + W^3 \cos\theta_W$ são os campos dos bósons de gauge carregados e neutro da interação fraca, respectivamente, $e = g \sin\theta_W$ é o módulo da carga elétrica do elétron

(ou a carga elétrica do pósitron), Q_i é a carga do férmion ψ em unidades de e , $A = B\cos\theta_W + W^3\sin\theta_W$ é o campo do bóson de gauge neutro da interação eletromagnética (fóton), $\theta_W = \tan^{-1}(g'/g)$ é o ângulo de mistura eletrofraco (o ângulo através do qual a quebra espontânea de simetria rotaciona o plano dos bósons originais W^3 e B , produzindo A e Z). Por fim,

$$\begin{aligned} g_V^i &= t_{3L}(\psi_i) - 2Q_i\sin^2\theta_W , \\ g_A^i &= t_{3L}(\psi_i) , \end{aligned} \quad (2.3)$$

são os acoplamentos vetorial e axial dos férmions com o bóson Z , respectivamente, onde $t_{3L}(\psi_i)$ é o isospin fraco do férmion ψ_i , tal que,

$$t_{3L}(u_i) = t_{3L}(\nu_i) = +\frac{1}{2} \quad e \quad t_{3L}(d_i) = t_{3L}(e_i) = -\frac{1}{2} . \quad (2.4)$$

As massas dos bósons de gauge, em nível de árvore, são dadas por,

$$\begin{aligned} M_A &= 0 , \\ M_{W^\pm} &= \frac{1}{2}gv = \frac{ev}{2\sin\theta_W} , \\ M_Z &= \sqrt{\frac{(g^2 + g'^2)v^2}{4}} = \frac{ev}{2\sin\theta_W\cos\theta_W} = \frac{M_W}{\cos\theta_W} , \\ M_H &= \lambda v . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Neste trabalho, estamos interessados no acoplamento dos bósons fracos, como $W^\pm$, com os léptons, como o múon, para o estudo dessa contribuição para o momento magnético anômalo, como a_μ . Por exemplo, o acoplamento em $\mathcal{L}$ do termo da interação fraca de corrente carregada aparece como

$$-\frac{e}{2\sqrt{2}\sin\theta_W} \left(W_\mu^- \bar{\mu}\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_\mu + W_\mu^+ \bar{\nu}_\mu\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \mu \right) , \quad (2.6)$$

onde aqui μ representa o campo do múon e ν_μ seu respectivo neutrino.

2.3 O Modelo das Interações Fortes

A teoria das interações fortes é denominada de Cromodinâmica Quântica (QCD, da sigla em inglês). Os bósons de gauge associados ao grupo forte, $SU(3)_C$, são denominados de glúons. Esses bósons atuam como mediadores das interações ao se acoplarem com os campos de matéria, e seus acoplamentos são dados pela constante de acoplamento g_s . Os férmions que possuem a carga cor (carga associada à interação forte) são denominados de quarks e podem vir em três "cores", além de estarem organizados em três famílias, assim como os léptons, como vimos na seção anterior. Os léptons, por sua vez, não possuem essa carga, logo, não interagem fortemente.

A Lagrangeana da QCD pode ser escrita como

$$\mathcal{L} \supset \sum_q \bar{\psi}_{q,a} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ab} - g_s \gamma^\mu t_{ab}^C \mathcal{A}_\mu^C - m_q \delta_{ab}) \psi_{q,b} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}, \quad (2.7)$$

onde se utiliza a notação de soma dos índices repetidos. $\psi_{q,a}$ representa o campo de um quark de sabor q ($q = u, d, s, c, b, t$) e massa m_q , onde a é o índice de cor que varia de 1 a 3, sendo esses valores denominados de vermelho, verde e azul. $\mathcal{A}_\mu^C$ são os campos dos glúons, havendo 8 tipos de glúons, que são representados pelo índice C . t_{ab}^C são matrizes 3×3 que representam os 8 geradores do grupo $SU(3)$. O tensor $F_{\mu\nu}^A$ é dado por

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^A - g_s f_{ABC} \mathcal{A}_\mu^B \mathcal{A}_\nu^C, \quad (2.8)$$

onde $[t^A, t^B] = if_{ABC} t^C$ e f_{ABC} é a constante de estrutura do grupo $SU(3)$.

A QCD a baixas energias é não perturbativa, isto é, soluções analíticas ou perturbativas são difíceis ou impossíveis de serem obtidas devido a natureza não linear da força forte e a grande valores assumidos pela constante de acoplamento nesses níveis de energia. Mas a QCD possui a propriedade de liberdade assintótica, que significa que a teoria se torna perturbativa para altas energias. Isso dificulta fazer previsões com a QCD para baixas energias.

Os quarks foram propostos a fim de explicar a proliferação de partículas que conhecemos como hádrons (tal como o próton, o nêutron, o pión, etc). Estes seriam compostos de quarks. No entanto, nenhum quark foi observado como partícula livre, sugerindo a hipótese de confinamento. Partículas que carregam cor não podem ser observadas exceto em estados compostos formando um singlete de cor. As contribuições de loop hadrônicas, ou seja, envolvendo quarks e glúons, serão significativas para o momento magnético anômalo do múon.

2.4 Contribuição do Modelo Padrão para a_μ

Há muitas semelhanças entre as previsões para a_μ e a_e , havendo contribuições universais, mas devido à dependência na massa, sendo a massa do múon significativamente maior que a do elétron, as contribuições fracas e hadrônicas trazem uma perceptível distinção. Nesta seção, abordaremos o momento magnético anômalo do múon, sendo o caso do elétron análogo mas, como veremos, com conclusões distintas. Neste trabalho apenas realizamos cálculos de contribuições envolvendo no máximo um loop. Para correções de ordens superiores na interação fraca e para as contribuições hadrônicas, apresentaremos apenas os resultados obtidos nos trabalhos que serão citados, fazendo uma breve análise das abordagens utilizadas.

2.4.1 Contribuições fracas

Como vimos, o mecanismo de Higgs requer a existência de um campo escalar, H , conhecido como campo de Higgs, com um valor esperado do vácuo, v . Este valor v está associado à constante de Fermi. No limite de momentos significativamente menores que a massa do bóson $W^\pm$, $M_{W^\pm}$, recuperamos na Eq. (2.6) a teoria efetiva de Fermi, com quatro férmions interagindo diretamente em um único vértice, resultando na constante de Fermi, G_F , cujo valor determinado pelos experimentos (TANABASHI et al., 2018) é,

$$G_F = \frac{1}{\sqrt{2}v^2} = \frac{g^2\sqrt{2}}{8M_W^2} = 1,166\,378\,7(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}, \quad (2.9)$$

Também pelas relações (2.5), vemos que o observável $\sin^2\theta_W$, assim como $M_{W^\pm}$, pode ser calculado a partir de M_Z e G_F . Pela Eq. (2.5), chegamos que

$$\sin^2\theta_W = 1 - \frac{M_{W^\pm}^2}{M_Z^2}. \quad (2.10)$$

Pelos resultados experimentais (TANABASHI et al., 2018),

$$M_{W^\pm} = 80,379 \pm 0,012 \text{ GeV} \quad e \quad M_Z = 91,1876 \pm 0,0021 \text{ GeV}. \quad (2.11)$$

Logo,

$$\sin^2\theta_W = 0,22301(23). \quad (2.12)$$

O bóson de Higgs possui massa (TANABASHI et al., 2018)

$$M_H = 125,18 \pm 0,16 \text{ GeV}. \quad (2.13)$$

Os resultados para o $a_\mu^{(2)EW}$ (o sobrescrito EW representa as interações fracas, incluindo o Higgs), em nível de um loop, advém dos diagramas mostrados na Figura 11. Aqui estamos tratando de bósons escalares e vetoriais, neutros e carregados. Uma análise

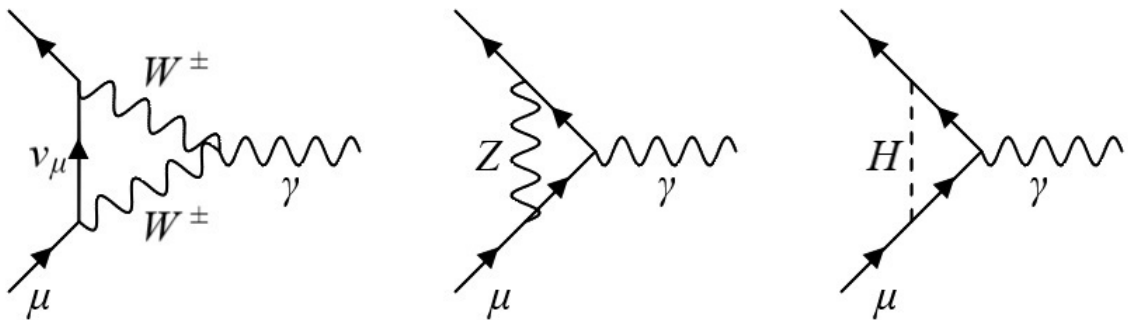


Figura 11 – Diagramas representando contribuições fracas e do Higgs para o a_μ .

do cálculo desses tipos de contribuições com um loop será apresentada no próximo capítulo,

pois será de fundamental importância para estudar possíveis contribuições de física nova. Por ora, só apresentaremos os resultados que podem ser obtidos devido às interações fracas e do Higgs com o múon, deixando os cálculos envolvidos para o próximo capítulo.

As principais contribuições são (BARS; YOSHIMURA, 1972),

$$\begin{aligned} a_\mu^{(2)EW}(W^\pm) &= \frac{G_F m_\mu^2}{8\pi^2 \sqrt{2}} \frac{10}{3} \approx 3,887062(2) \times 10^{-9} , \\ a_\mu^{(2)EW}(Z) &= \frac{G_F m_\mu^2}{8\pi^2 \sqrt{2}} \frac{(-1 + 4\sin^2\theta_W)^2 - 5}{3} \approx -1,93900(8) \times 10^{-9} , \\ a_\mu^{(2)EW}(H) &= \frac{G_F m_\mu^2}{2\pi^2 \sqrt{2}} \frac{m_\mu^2}{M_H^2} \ln \frac{m_\mu^2}{M_H^2} + \dots \approx -4,70(1) \times 10^{-14} , \end{aligned} \quad (2.14)$$

levando em consideração a massa do múon (1.59) e do Higgs (2.13), a constante de Fermi (2.9) e o ângulo de mistura eletrofraco (2.12). Termos de contribuições suprimidos por m_μ^2/M_Z^2 são menores que 10^{-13} e os desprezamos aqui. Mostramos apenas o $a_\mu^{(2)EW}(H)$, apesar de suprimido por m_μ^2/M_H^2 , por completeza do entendimento da participação do Higgs, mas sua contribuição também é desprezível. Combinando os resultados acima temos que a contribuição total das interações fracas para correções de um loop é

$$a_\mu^{(2)EW} = 194,80(1) \times 10^{-11} . \quad (2.15)$$

O erro advém da incerteza nos parâmetros.

Com o aumento das precisões experimentais, as correções de dois loops passam a ser significativas, dando contribuições negativas, e precisam ser consideradas. Essas contribuições são divididas em contribuições bosônicas e fermiônicas,

$$a_\mu^{(4)EW} = a_{\mu,bos}^{(4)EW} + a_{\mu,ferm}^{(4)EW} . \quad (2.16)$$

As contribuições bosônicas não possuem um loop fechado de férmions, e podem ser exemplificadas pelo diagrama da Figura 12, havendo vários diagramas. Tomando $M_H = 125,6 \pm 1,5 \text{ GeV}$, da referência (GNENDIGER et al., 2013), obteve-se o resultado numérico

$$a_{\mu,bos}^{(4)EW} = -19,97(3) \times 10^{-11} . \quad (2.17)$$

As incertezas advém da determinação experimental para os parâmetros M_H e M_W .

As contribuições fermiônicas de dois loops, $a_{\mu,ferm}^{(4)EW}$, advém dos diagramas com um loop de férmions. O bóson de Higgs aparece em diagramas da forma da Figura 13. Denotamos o termo que inclui essas contribuições de $a_{\mu,f-rest,H}^{(4)EW}$. Esse termo, como vemos na Figura 13, pode ser dividido em termos com um bóson Z e aquele com um fóton no vértice do loop de férmions,

$$a_{\mu,f-rest,H}^{(4)EW} = \sum_f \left[a_{\mu,f-rest,H\gamma}^{(4)EW}(f) + a_{\mu,f-rest,HZ}^{(4)EW}(f) \right] . \quad (2.18)$$

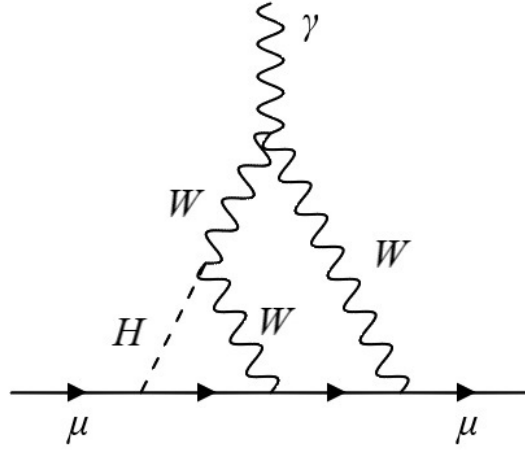


Figura 12 – Diagrama que exemplifica os diagramas bosônicos com a presença do Higgs que contribuem para $a_{\mu;bos}^{(4)EW}$.

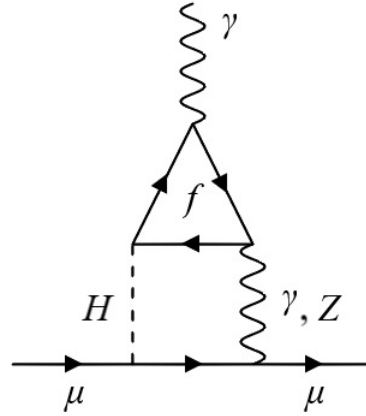


Figura 13 – Diagrama que exemplifica os diagramas fermiônicos com a presença do Higgs que contribuem para $a_{\mu;ferm}^{(4)EW}$.

Contribuições advindas de diagramas do tipo da [Figura 14](#), com um subdiagrama $\gamma\gamma Z$ e o loop de férmions indicados, são divididas em dois termos: $a_{\mu}^{(4)EW}(e, \mu, u, c, d, s)$ e $a_{\mu}^{(4)EW}(\tau, t, b)$.

Todas as contribuições fermiônicas restantes, como por exemplo a da troca de um bóson W, entram no termo que denotamos por $a_{\mu;f-rest,no H}^{(4)EW}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 a_{\mu;ferm}^{(4)EW} = & a_{\mu}^{(4)EW}(e, \mu, u, c, d, s) + a_{\mu}^{(4)EW}(\tau, t, b) \\
 & + a_{\mu;f-rest,H}^{(4)EW} + a_{\mu;f-rest,no H}^{(4)EW} .
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

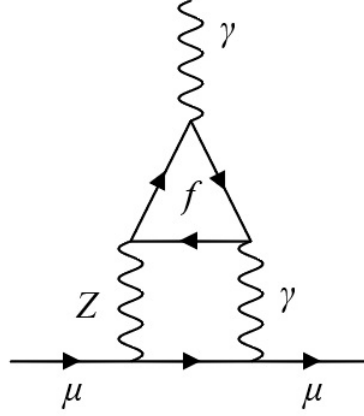


Figura 14 – Diagrama que exemplifica os diagramas fermiônicos com um triângulo férmion- $\gamma\gamma Z$ que contribuem para $a_{\mu;ferm}^{(4)EW}$.

Começando pela parte dependente do Higgs, $a_{\mu;f-rest,H}^{(4)EW}$, Gnendiger, Stöckinger e Stöckinger-Kim computaram (GNENDIGER et al., 2013) de forma exata,

$$a_{\mu;f-rest,H\gamma}^{(4)EW}(f) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{m_\mu^2}{8\pi^2} \frac{\alpha}{\pi} N_C Q_f^2 2 \int_0^1 x_{fH} \frac{2w^2 - 2w + 1}{w^2 - w + x_{fH}} \ln \frac{w(1-w)}{x_{fH}} dw, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} a_{\mu;f-rest,HZ}^{(4)EW}(f) &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{m_\mu^2}{8\pi^2} \frac{\alpha}{\pi} N_C Q_f \frac{t^{3L}(f) - 2\text{sen}^2\theta_W Q_f}{4\text{cos}^2\theta_W \text{sen}^2\theta_W} (1 - 4\text{sen}^2\theta_W) \\ &\times \int_0^1 x_{fH} x_{fZ} \frac{2w^2 - 2w + 1}{w^2 - w + x_{fZ}} \left[\frac{\ln \frac{w(1-w)}{x_{fH}}}{w^2 - w + x_{fH}} + \frac{\ln \frac{x_{fH}}{x_{fZ}}}{x_{fH} - x_{fZ}} \right] dw. \end{aligned} \quad (2.21)$$

N_C é o fator de cor, onde $N_C = 1$ (3) para léptons (quarks). Q_f é a carga elétrica em unidades de e , onde $Q_f = +\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1$ para quarks tipo up, down e léptons carregados, respectivamente. $t^{3L}(f)$ é o isospin fraco do férmion f , tal como vimos na Eq. (2.4). Definimos $x_{fH} \equiv m_f^2/M_H^2$ e $x_{fZ} \equiv m_f^2/M_Z^2$. Inserindo os valores experimentais dos parâmetros, somando sobre os férmions relevantes e somando as equações (2.20) e (2.21),

$$a_{\mu;f-rest,H}^{(4)EW} = -1,50(1) \times 10^{-11}. \quad (2.22)$$

O erro advém dos parâmetros de acordo com os valores considerados na referência (GNENDIGER et al., 2013).

As contribuições para $a_{\mu;f-rest,no H}^{(4)EW}$ advém de diferentes trabalhos (CZARNECKI et al., 1995; CZARNECKI et al., 2003) e podem ser escritas como (GNENDIGER et al.,

2013)

$$\begin{aligned}
a_{\mu;f-rest,no H}^{(4)EW} = & -\frac{G_F m_\mu^2 \alpha}{\sqrt{2} 8\pi^2 \pi} \left[\frac{1}{2\sin^2\theta_W} \left(\frac{5}{8} \frac{m_t^2}{M_W^2} + \ln \frac{m_t^2}{M_W^2} + \frac{7}{3} \right) \right] \\
& -\frac{G_F m_\mu^2 \alpha}{\sqrt{2} \pi^2 \pi} \left[\frac{\cos^2\theta_W}{2\sin^2\theta_W} \frac{m_t^2}{M_W^2} (1 - 4\sin^2\theta_W) \right] \\
& -\frac{G_F m_\mu^2 \alpha}{\sqrt{2} 8\pi^2 \pi} \left[\left(\frac{8}{9} \ln \frac{M_Z}{m_\mu} + \frac{4}{9} \ln \frac{M_Z}{m_\tau} \right) (1 - 4\sin^2\theta_W)^2 \right] \\
& -\frac{G_F m_\mu^2 \alpha}{\sqrt{2} 8\pi^2 \pi} \left[\frac{4}{3} (6, 88) (1 - 4\sin^2\theta_W) \right] .
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Obtém-se

$$a_{\mu;f-rest,no H}^{(4)EW} = -4,64(10) \times 10^{-11} . \tag{2.24}$$

As contribuições dos férmions de terceira geração, $a_\mu^{(4)EW}(\tau, t, b)$, são avaliadas e tem seu erro estimado nos trabalhos (CZARNECKI et al., 1995; PERIS et al., 1995; CZARNECKI et al., 2003), resultando em

$$a_\mu^{(4)EW}(\tau, t, b) = -8,21(10) \times 10^{-11} . \tag{2.25}$$

As contribuições das duas primeiras gerações de férmions, $a_\mu^{(4)EW}(e, \mu, u, c, d, s)$, são avaliadas na referência (GNENDIGER et al., 2013) e resultam em

$$a_\mu^{(4)EW}(e, \mu, u, c, d, s) = -(6,91 \pm 0,20 \pm 0,30) \times 10^{-11} , \tag{2.26}$$

onde as incertezas da primeira e segunda geração são dadas separadamente.

Por fim, levando em consideração todas estas contribuições (TANABASHI et al., 2018),

$$a_\mu^{(4)EW} = -(41,2 \pm 1,0) \times 10^{-11} . \tag{2.27}$$

Estima-se que contribuições considerando três ou mais loops não são relevantes até a precisão de 10^{-11} (GNENDIGER et al., 2013),

$$a_\mu^{(\geq 6)EW} = 0,0(2) \times 10^{-11} . \tag{2.28}$$

Levando em consideração tudo isso, o resultado final obtido é

$$a_\mu^{EW} = (153,6 \pm 1,0) \times 10^{-11} . \tag{2.29}$$

Agora resta apenas analisar a contribuição advinda dos efeitos hadrônicos, para termos uma previsão completa do Modelo Padrão para que possamos comparar com os resultados experimentais.

2.4.2 Contribuições Hadrônicas

As principais incertezas teóricas para o momento magnético anômalo do múon dado pelo modelo padrão, a_μ^{SM} , advém das contribuições de loop hadrônicas, ou seja, envolvendo quarks e glúons. As interações eletromagnéticas entre hádrons possui contribuições envolvendo a polarização hadrônica do vácuo e o espalhamento da luz pela luz.

Felizmente os efeitos hadrônicos de maior contribuição são devidos a polarização hadrônica do vácuo. Esse efeito advém de correções no propagador do fóton, tal como tínhamos com um loop de férmions, mas agora com hádrons, como podemos exemplificar na [Figura 15](#). A contribuição devido aos loops hadrônicos não pode ser calculada precisamente

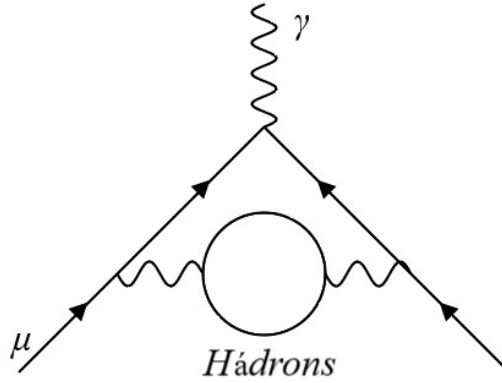


Figura 15 – Diagrama que exemplifica a contribuição da polarização hadrônica do vácuo para o momento magnético anômalo do múon de menor ordem (α^2).

a partir unicamente da teoria, devido ao caráter não perturbativo da QCD a baixas energias. Dessa forma, o propagador é calculado incluindo dependências de dados experimentais, a partir da seção de choque total da produção de hádrons na aniquilação elétron-pósitron, $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hádrons})$. A correção de menor ordem da contribuição da polarização hadrônica do vácuo é apresentada na referência ([DAVIER et al., 2017](#)),

$$a_\mu^{Had}[LO] = 6\,931(33)(7) \times 10^{-11}, \quad (2.30)$$

onde o primeiro erro é experimental e o segundo advém da própria abordagem da QCD. *LO* denota a ordem dominante (leading-order, em inglês). Para ordens maiores as contribuições advém de relações de dispersão a partir dos mesmos dados experimentais tal que, como vemos na referência ([KURZ et al., 2014](#)), resultam em

$$\begin{aligned} a_\mu^{Had,Disp}[NLO] &= -98,7(9) \times 10^{-11}, \\ a_\mu^{Had,Disp}[NNLO] &= 12,4(1) \times 10^{-11}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde *NLO* e *NNLO* advém do inglês Next-to-Leading Order e Next-to-Next-to-Leading Order, respectivamente.

O espalhamento hadrônico da luz pela luz advém de um vértice hadrônico com quatro fótons, tal como exemplificado na [Figura 16](#). Esse caso depende de resultados

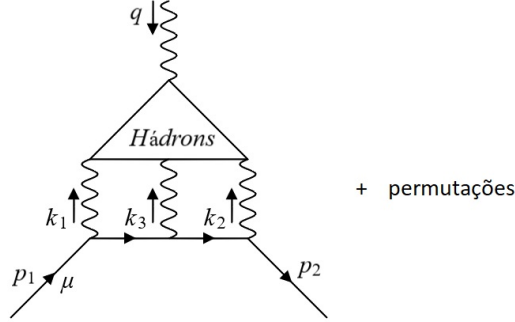


Figura 16 – Diagrama que exemplifica a contribuição do espalhamento da luz pela luz para o momento magnético anômalo do múon.

teóricos, não havendo dados experimentais do espalhamento fóton-fóton que contribuam para os cálculos. O resultado advém do limite onde o número de cores da QCD, N_c , é tomado ser muito grande. A referência ([PRADES et al., 2009](#)) apresenta a contribuição

$$a_{\mu}^{Had,LBL}[NLO] = 105(26) \times 10^{-11} . \quad (2.32)$$

A soma dos termos das equações (2.31) e (2.32) resulta em

$$a_{\mu}^{Had}[N(N)LO] = 19(26) \times 10^{-11} , \quad (2.33)$$

onde o erro é dominado pela incerteza do espalhamento hadrônico da luz pela luz. A QCD na rede é uma área promissora para fornecer estimativas mais precisas a partir de primeiros princípios. Por ora, uma incerteza significativa advém da QCD, que possui uma grande contribuição para o momento magnético anômalo. Apesar disso, temos a precisão necessária para tirarmos conclusões importantes a partir da relação com os resultados experimentais.

2.5 Modelo Padrão e os resultados experimentais

Agora, tendo em mãos todos os resultados teoricamente obtidos (com alguns auxílios de resultados experimentais e^+e^-) para cada uma das três interações fundamentais que compõem o Modelo Padrão da física de partículas elementares, até a ordem de grandeza significativa de acordo com a precisão experimental atual, podemos chegar a uma conclusão sobre o quão bem as teorias vigentes são capazes de descrever a natureza com um grau de

precisão extraordinário. Somando as contribuições da QED na Eq. (1.68), da interação fraca na Eq. (2.29) e da QCD na equações (2.30) e (2.33), obtemos a previsão do Modelo Padrão,

$$a_{\mu}^{SM} = 116\,591\,823(1)(34)(26) \times 10^{-11}, \quad (2.34)$$

onde os erros advêm das contribuições eletrofraca, hadrônica de menor ordem e hadrônicas de ordens maiores, respectivamente.

O experimento E821 no Brookhaven National Laboratory (BNL), com base nos estudos da precessão do múon, μ^{-} , e antimúon, μ^{+} , a partir de um campo magnético externo confinado em um anel, encontrou que (TANABASHI et al., 2018)

$$\begin{aligned} a_{\mu^{+}}^{exp} &= 11\,659\,204(6)(5) \times 10^{-10}, \\ a_{\mu^{-}}^{exp} &= 11\,659\,215(8)(3) \times 10^{-10}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde o primeiro erro é estatístico e o segundo é sistemático.

Assumindo que existe uma simetria CPT (conjugação de carga C, paridade P e reversão temporal T), temos que um universo com todos os objetos com suas posições refletidas (P), todos os momentos revertidos (T) e toda a matéria substituída por antimatéria (C) deve seguir as mesmas leis da física, sendo completamente invariante. Com essa suposição, é possível concluir que os resultados da Eq. (2.35) devem ser idênticos. Então, pela média,

$$a_{\mu}^{exp} = 11\,659\,209,1(5,4)(3,3) \times 10^{-10}. \quad (2.36)$$

A diferença entre a previsão do Modelo Padrão (2.34) e a experimental (2.36) é

$$\Delta a_{\mu} = a_{\mu}^{exp} - a_{\mu}^{SM} = 268(63)(43) \times 10^{-11}, \quad (2.37)$$

onde os erros advêm do experimento e da previsão teórica, respectivamente. Esse resultado representa uma discrepância de $3,5\sigma$ entre experimento e teoria. Apesar desse resultado ainda não ser conclusivo, é um forte indicativo de que apesar do Modelo Padrão conseguir explicar com grande precisão o momento magnético anômalo do múon, ele pode não ser suficiente. Uma interpretação natural poderia ser a existência de física nova. Uma maior precisão experimental é esperada para que possamos concluir se alcançamos o limite do domínio de validade do Modelo Padrão ou se ele ainda é capaz de descrever todo o momento magnético anômalo do múon.

Uma discrepância também é observada quando comparamos a previsão teórica para o momento magnético anômalo do elétron, a_e^{SM} , com seus resultados experimentais, a_e^{exp} , de modo que chegamos que (DAVOUDIASL; MARCIANO, 2018)

$$\Delta a_e = a_e^{exp} - a_e^{SM} = -87(28)(23)(2) \times 10^{-14}, \quad (2.38)$$

onde os erros advêm do experimento, da determinação de α e da teoria, respectivamente. Esse resultado representa uma discrepância de $2,4\sigma$, o que também é um indicativo de

física nova. Porém, desta vez, a contribuição deve possuir um sinal oposto ao observado no caso do Δa_μ .

No próximo capítulo abordaremos a possibilidade de novas interações ainda não observadas, envolvendo novas partículas, e estudar suas contribuições para o momento magnético anômalo, na busca de uma física nova que descreva essas discrepâncias.

3 Expressões Gerais Para o Momento Magnético Anômalo

Neste capítulo, derivaremos as contribuições até a ordem de um loop resultantes de bósons escalares e vetoriais. Inicialmente não descartaremos a possibilidade de troca de sabor em nível de árvore devido a novos acoplamentos. Usaremos a amplitude para o diagrama da [Figura 4](#) como

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p')(ieQ_f\Gamma^\mu(q^2))\tilde{A}_\mu^{cl}(q)u(p) , \quad (3.1)$$

onde Q_f é a carga do férmion em unidades da carga e .

3.1 Bóson Escalar

Consideramos inicialmente o caso de um bóson escalar contribuindo para o momento magnético anômalo do férmion, a_f . Esse escalar pode ser eletricamente neutro, S^0 , simplesmente carregado, $S^\pm$, ou duplamente carregado, $S^{\pm\pm}$. No último caso ou temos uma violação do número leptônico ou atribuímos duas unidades de número leptônico para o escalar ([PIRES; SILVA, 2001](#)). Falamos aqui, para fins práticos, em cargas inteiras em unidades de e , que é o caso dos léptons carregados do Modelo Padrão, mas isso não nos impede de considerarmos outros férmions e escalares com cargas fracionárias, onde a contribuição da carga em unidades de e aparecerá em Q_f . Todos esses casos resultam em cinco possíveis diagramas de um loop que contribuem para a_f , como vemos na [Figura 17](#). Os diagramas da [Figura 17\(a\)](#) e [17\(b\)](#) são análogos e podem ser avaliados em conjunto. O diagrama da [Figura 17\(d\)](#) apesar de semelhante aos dois primeiros possui uma conjugação de carga envolvida que implica em modificações dos cálculos. Os diagramas da [Figura 17\(c\)](#) e [17\(e\)](#) devem ser analisados separadamente. Para uma maior generalização, consideraremos um acoplamento incluindo termos escalar e pseudoescalar, $ig(g_s + g_p\gamma^5)$.

3.1.1 Diagramas [17\(a\)](#) e [17\(b\)](#)

Atribuindo os momentos de acordo com a [Figura 18](#) e extraindo as regras de Feynman, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p', p)\tilde{A}_\mu^{cl}(q)u(p) &= \bar{u}(p') \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p-k)^2 - M_S^2} ig(g_s + g_p\gamma^5) \frac{i(\not{k}' + m_{f'})}{k'^2 - m_{f'}^2} \times \\ &\quad ieQ_{f'}\gamma^\mu \tilde{A}_\mu^{cl}(q) \frac{i(\not{k} + m_{f'})}{k^2 - m_{f'}^2} ig(g_s^\dagger - g_p^\dagger\gamma^5)u(p) , \end{aligned} \quad (3.2)$$

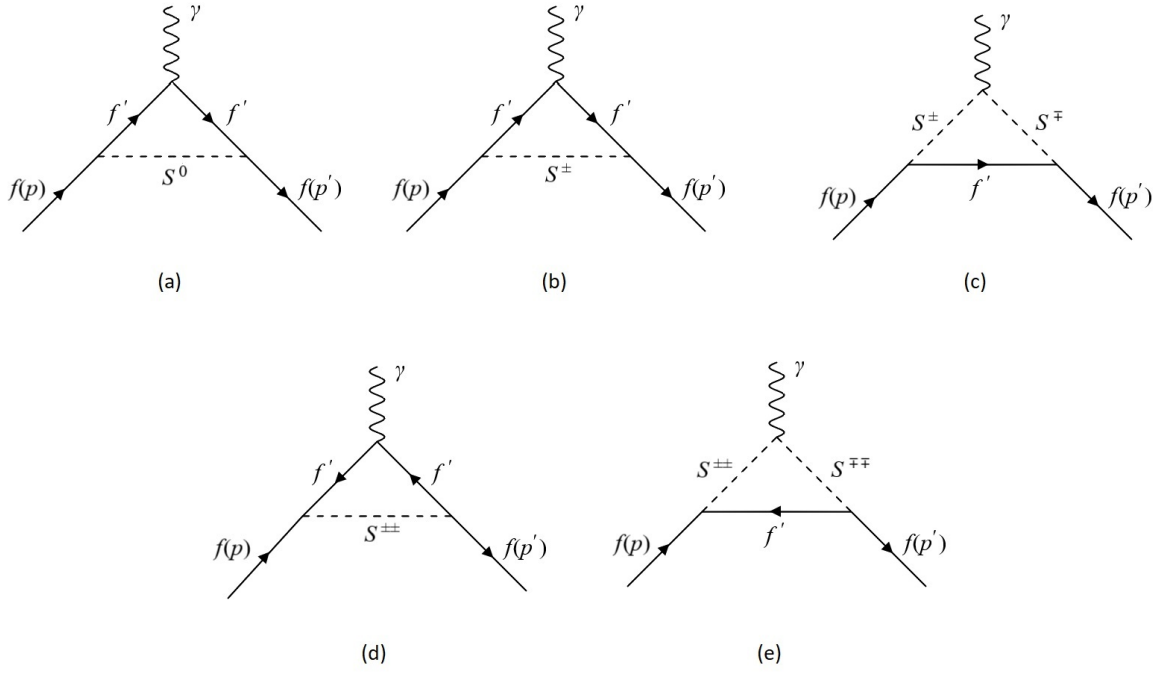


Figura 17 – Diagramas de um loop para bósons escalares contribuindo para a_f .

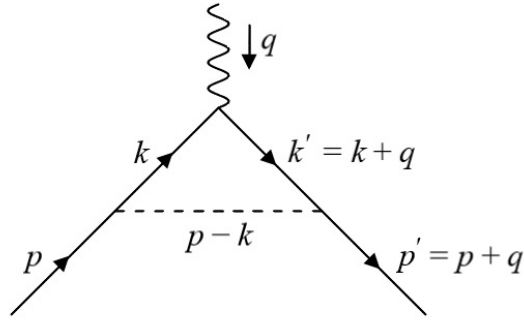


Figura 18 – Atribuições dos momentos para as diferentes pernas do diagrama para a extração das regras de Feynman.

onde M_S é a massa do escalar, $m_{f'}$ é a massa do férmion interno e $Q_{f'}$ a carga do férmion interno em unidades da carga elétrica e . Usamos a parametrização de Feynman da Eq. (1.33),

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{1}{[xA + yB + zC]^3}, \quad (3.3)$$

onde,

$$\begin{aligned} A &\equiv k^2 - m_{f'}^2, \\ B &\equiv k'^2 - m_{f'}^2, \\ C &\equiv (p - k)^2 - M_S^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Definindo $D \equiv xA + yB + zC$, podemos ver que

$$D = x(k^2 - m_{f'}^2) + y(k^2 + q^2 + 2k \cdot q - m_{f'}^2) + z(p^2 + k^2 - 2p \cdot k - M_S^2),$$

onde usamos $k' = k + q$. Uma vez que $p^2 = m^2$, onde m é a massa do férmion externo, para o qual desejamos calcular o momento magnético anômalo, e $x + y + z = 1$, temos

$$D = k^2 - (x + y)m_{f'}^2 + yq^2 + 2k \cdot (yq - zp) + zm^2 - zM_S^2.$$

Completando o quadrado,

$$\begin{aligned} D &= (k + yq - zp)^2 - (yq - zp)^2 - (x + y)m_{f'}^2 + yq^2 + zm^2 - zM_S^2 \\ &= (k + yq - zp)^2 - y^2q^2 + 2yzq \cdot p - z^2p^2 - (x + y)m_{f'}^2 + yq^2 + zm^2 - zM_S^2 \\ &= (k + yq - zp)^2 + xyq^2 - z^2m^2 + zm^2 - zM_S^2 - (x + y)m_{f'}^2, \end{aligned}$$

onde usamos a identidade $q^2 = -2p' \cdot p + 2m^2$. Definimos,

$$\begin{aligned} l &= k + yq - zp, \\ \Delta &= z^2m^2 - zm^2 + zM_S^2 + (x + y)m_{f'}^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Finalmente,

$$D = l^2 - \Delta + xyq^2. \quad (3.6)$$

Para simplificarmos Δ definimos uma nova parametrização,

$$\begin{aligned} u &\equiv x + y, \\ v &\equiv x - y. \end{aligned}$$

Não confundir o parâmetro u com o espinor $u(p)$, que sempre aparecerá com a dependência no momento. Então,

$$\Delta = -(1 - u)um^2 + (1 - u)M_S^2 + um_{f'}^2. \quad (3.7)$$

Uma vez que u é agora o único parâmetro da dependência de Δ , a parametrização de Feynman, Eq. (3.3), fica

$$\begin{aligned} \frac{1}{ABC} &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(1 - x - y - z) \frac{2}{[D(x + y)]^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2}{[D(x + y)]^3} \\ &= \int_0^1 du \int_{-u}^u dv |J(u, v)| \frac{2}{[D(u)]^3}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde

$$x = \frac{u+v}{2} \quad e \quad y = \frac{u-v}{2} .$$

Onde $|J(u, v)|$ é o valor absoluto do determinante do Jacobiano,

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} . \quad (3.9)$$

Por fim,

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 du \frac{2u}{[D(u)]^3} . \quad (3.10)$$

Como vimos, só precisamos identificar $F_2(0)$, ou seja, o coeficiente de $\sigma^{\mu\nu}q_\nu/2m$ na amplitude. Para identificarmos F_2 usamos a decomposição de Gordon da Eq. (1.20) para avaliarmos o numerador, N^μ , da amplitude na Eq. (3.2),

$$\begin{aligned} N^\mu &\equiv \bar{u}(p')(g_s + g_p\gamma^5)(\not{k}' + m_{f'})\gamma^\mu(\not{k} + m_{f'}) (g_s^\dagger - g_p^\dagger\gamma^5)u(p) \\ &= \bar{u}(p') \left[g_s g_s^\dagger (\not{k}' + m_{f'})\gamma^\mu(\not{k} + m_{f'}) + g_p g_p^\dagger (\not{k}' - m_{f'})\gamma^\mu(\not{k} - m_{f'}) \right] u(p) . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Na última igualdade utilizamos as propriedades de anticomutação, $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, e $(\gamma^5)^2 = I$, sendo I a matriz identidade. Expressaremos N^μ em termos de l , depois usamos as identidades das equações (1.38) e (1.39), levando em consideração que N^μ está sendo integrado. Fazendo essa análise, inicialmente só para o primeiro termo com $g_s g_s^\dagger$, chegamos que

$$\begin{aligned} N^\mu &\rightarrow \bar{u}(p')[\not{k}'\gamma^\mu\not{k} + m_{f'}^2\gamma^\mu + m_{f'}(\gamma^\mu\not{k} + \not{k}'\gamma^\mu)]u(p) \\ &\rightarrow \bar{u}(p')\left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2 + ((1-y)\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu(-y\not{q} + z\not{p}) + m_{f'}^2\gamma^\mu \right. \\ &\quad \left. + m_{f'}[\gamma^\mu(-y\not{q} + z\not{p}) + ((1-y)\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu]\right]u(p) . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Podemos descartar os termos com $\gamma^\mu l^2$ e $m_{f'}^2\gamma^\mu$ pois, como comentado na seção 1.4, não contribuirão para F_2 . Usaremos as identidades

$$\not{p}\gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu\not{p} , \quad \not{p}u(p) = mu(p) , \quad \bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m , \quad q^2 = -2p' \cdot p + 2m^2 \quad (3.13)$$

para analisar os termos do numerador (3.12), obtendo,

$$\begin{aligned} &\bar{u}(p')((1-y)\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu(-y\not{q} + z\not{p})u(p) \\ &= \bar{u}(p')[\gamma^\mu(q^2xy - m^2z(z-2)) - 2mz(xp^\mu + yp'^\mu)]u(p) \\ &= \bar{u}(p')[\gamma^\mu(q^2xy - m^2z(z-2)) - mz(p+p')^\mu(x+y) + mzq^\mu(x-y)]u(p) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\bar{u}(p')m_{f'}[\gamma^\mu(-y\not{q} + z\not{p}) + ((1-y)\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu]u(p) \\ &= \bar{u}(p')m_{f'}[2m\gamma^\mu - 2(xp^\mu + yp'^\mu)]u(p) \\ &= \bar{u}(p')m_{f'}[2m\gamma^\mu - (p+p')^\mu(x+y) + q^\mu(x-y)]u(p) , \end{aligned}$$

sendo m a massa do férmion das pernas externas. Os termos proporcionais a γ^μ dos dois resultados anteriores podemos descartar pois não contribuirão para F_2 . Os termos proporcionais a q^μ são ímpares sob a troca de x por y , logo sua integral será zero. Então, resta apenas

$$\begin{aligned} N^\mu &\rightarrow \bar{u}(p')[-mz(p+p')^\mu(x+y) - m_{f'}(p+p')^\mu(x+y)]u(p) \\ &\rightarrow \bar{u}(p')[-(mu(1-u) + m_{f'}u)(p+p')^\mu]u(p) \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde usamos $z = 1 - u$ e $u = x + y$. Usando a decomposição de Gordon da Eq. (1.20) no resultado da Eq. (3.14) e descartando o termo proporcional a γ^μ ,

$$N^\mu \rightarrow \bar{u}(p') \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} 2m[mu(1-u) + m_{f'}u]u(p) .$$

O procedimento aqui realizado será análogo para a análise do segundo termo da Eq. (3.11) com $g_p g_p^\dagger$, a diferença em relação ao resultado acima será basicamente fazer $m_{f'} \rightarrow -m_{f'}$. Dessa forma, o numerador totalizará

$$\bar{u}(p') \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} 2m[mu(1-u)(g_s g_s^\dagger + g_p g_p^\dagger) + m_{f'}u(g_s g_s^\dagger - g_p g_p^\dagger)]u(p) . \quad (3.15)$$

O numerador é independente de l , então nossa integral de loop é finita e pode ser avaliada a partir da identidade da Eq. (1.43).

Identificando o fator que contribui para $F_2(q^2)$ na Eq. (3.15), juntando com o resultado do denominador da Eq. (3.10), fazendo uso da identidade da Eq. (1.43) e, por fim, tomando o limite $q^2 \rightarrow 0$, encontramos que a contribuição para o momento magnético anômalo dos diagramas 17(a) e 17(b) é

$$a_f^{(2)}[17(a) \text{ e } 17(b)] = \frac{Q_{f'}}{Q_f} \frac{mg^2}{8\pi^2} \int_0^1 du \frac{m_{f'}(g_s g_s^\dagger - g_p g_p^\dagger) + m(g_s g_s^\dagger + g_p g_p^\dagger)(1-u)}{(1-u)M_S^2 + um_{f'}^2 + u(u-1)m^2} u^2 . \quad (3.16)$$

Q_f é a carga elétrica do férmion externo em unidades da carga e e advém da amplitude completa da Eq. (3.1), lembrando da definição da Eq. (1.30).

O resultado da Eq. (3.16) sozinho determina a contribuição de um loop para o momento magnético anômalo de um férmion qualquer, f , devido a um escalar neutro, S^0 , permitindo a troca de sabor para um novo férmion, f' . Neste caso, por conservação da carga elétrica, temos que $Q_{f'} = Q_f$. Como consideramos a troca de sabor, não há razão para a contribuição ser apenas devido a f' no loop, todos os outros férmions possíveis devem ser considerados com seus respectivos acoplamentos com f , $g_s^{f'}$ e $g_p^{f'}$. Isso resulta em um somatório,

$$a_f^{(2)}[S^0] = \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{m^2}{M_S^2} \int_0^1 du \sum_{f'} \frac{g_s^{f'} g_s^{f'\dagger}(1-u + \lambda_{f'}) + g_p^{f'} g_p^{f'\dagger}(1-u - \lambda_{f'})}{(1-u)(1-u\lambda_S^2) + u\lambda_{f'}^2 \lambda_S^2} u^2 , \quad (3.17)$$

onde $\lambda_{f'} \equiv m_{f'}/m$ e $\lambda_S \equiv m/M_S$.

Retomamos a Eq. (3.16) para avaliarmos a contribuição do diagrama 17(b). Se considerarmos que f é um lépton do modelo padrão, como o múon ou o elétron, casos de nosso interesse, a conservação de carga implica que f' seja neutro, $Q_{f'} = 0$, ou seja, a contribuição da Eq. (3.16) é nula. Mas a equação pode continuar válida para outras possibilidades de férmions f .

3.1.2 Diagrama 17(c)

Aplicando as regras de Feynman para o diagrama da Figura 17(c),

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p', p)\tilde{A}_\mu^{cl}(q)u(p) = & \bar{u}(p') \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} ig(g_s + g_p\gamma^5) \frac{i(\not{p} - \not{k} + m_{f'})}{((p-k)^2 - m_{f'}^2)} \times \\ & ig(g_s^\dagger - g_p^\dagger\gamma^5) \frac{i}{k^2 - M_S^2} ieQ_S(k+k')^\mu \tilde{A}_\mu^{cl}(q) \frac{i}{k'^2 - M_S^2} u(p), \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde Q_S é a carga elétrica do escalar $S^\pm$ em unidades da carga e . O denominador é idêntico ao caso da subseção 3.1.1, com a diferença que no lugar de $m_{f'}$ temos M_S e vice-versa. Analisamos o numerador,

$$N^\mu \equiv \bar{u}(p')(g_s + g_p\gamma^5)(\not{p} - \not{k} + m_{f'})(g_s^\dagger - g_p^\dagger\gamma^5)(k+k')^\mu u(p). \quad (3.19)$$

O procedimento é análogo ao que fizemos na seção anterior, usando algumas das identidades lá citadas, a principal diferença será devido ao vértice do acoplamento do escalar carregado com o fóton que não mais aparecerá proporcional a matriz γ^μ e sim aos momentos k^μ e k'^μ . Após a aplicação de decomposição de Gordon da Eq. (1.20), obtemos,

$$\bar{u}(p') \frac{-i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} 2m[mu(1-u)(g_s g_s^\dagger + g_p g_p^\dagger) + m_{f'}(1-u)(g_s g_s^\dagger - g_p g_p^\dagger)]u(p). \quad (3.20)$$

Mais uma vez o numerador será independente de l e nossa integral de loop é finita.

Identificando o fator que contribui para $F_2(q^2)$, juntando com o resultado do denominador, fazendo uso da identidade da Eq. (1.43) e, por fim, tomando o limite $q^2 \rightarrow 0$, encontramos que a contribuição para o momento magnético anômalo do diagrama 17(c) é,

$$a_f^{(2)}[S^\pm] = -\frac{Q_S}{Q_f} \frac{mg^2}{8\pi^2} \int_0^1 du \frac{(g_s g_s^\dagger + g_p g_p^\dagger)um + (g_s g_s^\dagger - g_p g_p^\dagger)m_{f'}}{uM_S^2 + u(u-1)m^2 + (1-u)m_{f'}^2} u(1-u). \quad (3.21)$$

3.1.3 Diagramas 17(d) e 17(e)

Agora analisaremos a contribuição de um loop do escalar duplamente carregado, $S^{\pm\pm}$. Começamos avaliando os diagramas 17(d) e 17(e). Estamos interessados no momento magnético anômalo de férmions do modelo padrão, mais precisamente os léptons múon e elétron. Para garantirmos uma conservação de carga do múon, por exemplo, no vértice com f' e $S^{\pm\pm}$, precisamos que haja uma violação do número leptônico (ou então poderíamos

imaginar uma atribuição de número leptônico $L = -2$ para o escalar). De todo modo, o acoplamento de Yukawa toma a forma

$$\mathcal{L} \supset \sum_{f'} g f^T C (g_s + g_p \gamma^5) f' S^{++} + h.c. , \quad (3.22)$$

onde C é a matriz de conjugação de carga, $C^T = C^{-1} = C^\dagger = -C$.

Novas regras de Feynman para a leitura desses diagramas são necessárias e podem ser encontradas na referência (MOORE et al., 1985). Duas direções podem ser definidas a partir de um linha de férmion do diagrama de Feynman. Uma é a direção do fluxo do número fermiônico (ou leptônico, se tratamos de um lépton). Ela equivale à direção do momento para léptons, mas é a direção oposta para antiléptons. A outra direção define-se quando lemos o diagrama na hora de escrevermos a amplitude. Ela é fixada a partir de uma perna externa de um férmion e seguida no decorrer de todo o diagrama. Essa direção é oposta à direção do fluxo do número leptônico quando falamos da sua conservação. Mas isso é inviável se temos uma violação do número leptônico, uma vez que o fluxo do número leptônico pode ser invertido em um vértice. Então, mesmo que a leitura a partir de uma perna externa seja oposta ao fluxo do número leptônico, após passar por um vértice ela pode vir a ser paralela. Nesse trecho precisamos das novas regras. As novas regras são estabelecidas da seguinte forma:

1. Para uma linha de férmion externa, a transposta de uma função de onda espinorial adequada é associada: $u^T(p)$, $\bar{u}^T(p)$, $v^T(p)$, ou $\bar{v}^T(p)$.
2. Para um segmento de linha interna a transposta da negativa do propagador do férmion correspondente é associado.
3. No vértice que viola número leptônico, se os fluxos dos números leptônicos fluem para dentro [fora] do vértice, o fator $ig(n!)C(g_s + g_p \gamma^5)$ [$ig(n!)C(g_s - g_p \gamma^5)$] é associado, onde n é o número de partículas idênticas no vértice.

Após extrair as regras de Feynman dos diagramas 17(d) e 17(e), é preciso utilizar algumas relações com a matriz conjugação de carga para auxiliar os cálculos,

$$\begin{aligned} C\gamma_\mu C^{-1} &= -\gamma_\mu^T, & C\gamma_5 C^{-1} &= \gamma_5^T, \\ C\bar{u}^T(p) &= v(p), & C\bar{v}^T(p) &= u(p), \\ u^T(p)C &= \bar{v}(p), & v^T(p)C &= \bar{u}(p). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Todo o resto do cálculo segue analogamente aos procedimentos desenvolvidos anteriormente, resultando

$$\begin{aligned} a_f^{(2)}[S^{\pm\pm}] &= - (n!)^2 \frac{mg^2}{8\pi^2} \int_0^1 du \frac{m(g_s g_s^\dagger + g_p g_p^\dagger)(1-u) + m_{f'}(g_s g_s^\dagger - g_p g_p^\dagger)u^2}{(1-u)M_S^2 + u(u-1)m^2 + um_{f'}^2} u^2 \\ &+ (n!)^2 \frac{mg^2}{4\pi^2} \int_0^1 du \frac{m(g_s g_s^\dagger + g_p g_p^\dagger)(u-1)u + m_{f'}(g_s g_s^\dagger - g_p g_p^\dagger)(u-1)}{uM_S^2 + u(u-1)m^2 + (1-u)m_{f'}^2} u. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dessa forma, podemos usar a equação acima para analisar uma possível discrepância do momento magnético anômalo do múon. Por conservação de carga, $Q_f = -Q_{f'} = Q_S/2$. Isso resulta em um sinal relativo entre os dois termos acima, representando os diagramas 17(d) e 17(e), respectivamente. A não ser em condições específicas, as integrais acima são melhor resolvidas numericamente.

3.2 Bóson Vetorial

Para um bóson vetorial, V_μ , como mediador da interação, os diagramas para as contribuições de um loop para o momento magnético anômalo são, de forma análoga ao caso escalar, apresentados na Figura 19 no gauge unitário. Consideramos as atribuições dos momentos da Figura 18.

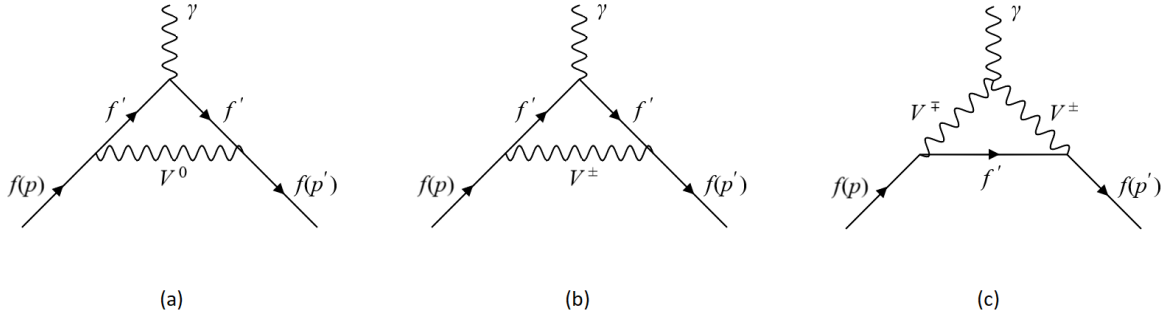


Figura 19 – Diagramas de um loop para bósons vetoriais contribuindo para a_f .

Continuamos considerando o caso geral, agora para acoplamentos vetoriais e axiais, com vértice $ig\gamma^\mu(g_v + g_a\gamma^5)$. O gauge unitário tem desvantagens para estes cálculos com correções de um loop. O propagador de spin 1 não zera para um momento significativamente grande. É conveniente utilizar nestes cálculos o gauge de 't Hooft-Feynman, onde o parâmetro de gauge é $\xi = 1$. Neste caso há regras de Feynman extras envolvendo bósons de Goldstone que devem ser incluídos para cancelar graus de liberdade espúrios. Para os diagramas 19(a) e 19(b) temos o acréscimo de diagramas com bósons de Goldstone tal como nos diagramas 17(a) e 17(b), respectivamente. Felizmente, já calculamos essa contribuição na Eq. (3.16). Mas resta determinar o acoplamento do escalar com o férmion independente do gauge e derivado a partir do acoplamento do vetor com o férmion.

Associamos aos vértices da Figura 20 a forma genérica: $i\lambda_{ij}^\mu$ com $i = 1, 3$ e $j = 2, 4$, onde $f_n^{(i)}$ são férmions de Dirac. Usamos esses vértices para escrever a amplitude do processo $f_1' + f_4 \rightarrow f_2 + f_3'$ em nível de árvore de acordo com a Figura 21,

$$i\mathcal{M}_a = \bar{u}(p_2)i\lambda_{12}^\mu u(p_1)iD_{\mu\nu}^{(V)}(k)\bar{u}(p_3)i\lambda_{34}^\nu u(p_4), \quad (3.25)$$

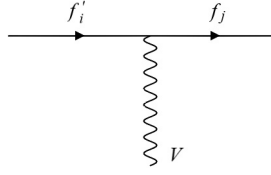
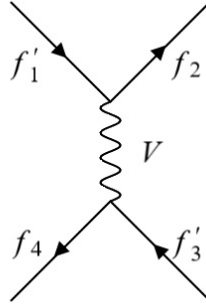


Figura 20 – Vértice vetor-férmion-férmion.

Figura 21 – Diagrama em nível de árvore para o processo $f'_1 + f_4 \rightarrow f_2 + f'_3$, mediado por um bóson vetorial V .

onde p_n são os momentos dos férmions $f_n^{(\prime)}$ e $iD_{\mu\nu}^{(V)}(k)$ é o propagador do bóson vetorial, V , com momento k . Por conservação

$$k = p_1 - p_2 = p_3 - p_4 . \quad (3.26)$$

O propagador em um gauge ξ qualquer tem a forma

$$iD_{\mu\nu}^{(V)}(k) = \frac{i}{k^2 - M_V^2} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M_V^2} \right) - \frac{k_\mu k_\nu}{M_V^2} \left(\frac{i}{k^2 - \xi M_V^2} \right) , \quad (3.27)$$

onde M_V é a massa do bóson V . O primeiro termo do propagador é independente do parâmetro de gauge ξ , enquanto o segundo tem uma dependência. Definimos uma amplitude parcial contendo essa dependência,

$$\mathcal{M}_a^{(\xi)} = \bar{u}(p_2) \lambda_{12}^\mu u(p_1) \frac{k_\mu k_\nu}{M_V^2} \frac{1}{k^2 - \xi M_V^2} \bar{u}(p_3) \lambda_{34}^\nu u(p_4) . \quad (3.28)$$

A dependência do gauge deve obviamente desaparecer no final. O cancelamento advém do mesmo processo da amplitude da Eq. (3.25) mediado por um bósons de Goldstone, w , como mostrado na Figura 22.

O propagador de w é da forma

$$i\Delta^{(w)}(k) = \frac{i}{k^2 - \xi M_V^2} . \quad (3.29)$$

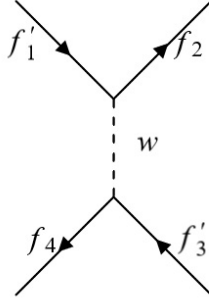


Figura 22 – Diagramas em nível de árvore para o processo $f'_1 + f_4 \rightarrow f_2 + f'_3$, mediado por um bóson de Goldstone, w .

A amplitude para o diagrama da Figura 22 toma a forma

$$\mathcal{M}_b = -\bar{u}(p_2)b_{12}u(p_1)\frac{1}{k^2 - \xi M_V^2}\bar{u}(p_3)b_{34}u(p_4) , \quad (3.30)$$

onde b_{12} e b_{34} são os acoplamentos do w com os espinores. Olhando para essas expressões percebemos que o cancelamento de $\mathcal{M}_a^{(\xi)}$ devido a $\mathcal{M}_b$ ocorre se

$$b_{12} = \frac{k_\mu}{M_V}\lambda_{12}^\mu \quad \text{e} \quad b_{34} = \frac{k_\nu}{M_V}\lambda_{34}^\nu . \quad (3.31)$$

Obviamente a teoria precisa prever a não dependência do gauge. Se partíssemos da lagrangeana, bastaria considerar os bósons de Goldstone presentes na lagrangeana e, a partir das regras de Feynman, chegaríamos na mesma conclusão do procedimento aqui realizado.

O acoplamento do bóson vetorial com os férmions tem a forma $\lambda_{12}^\mu = g\gamma^\mu(g_v + g_a\gamma^5)$. Igualmente para λ_{34}^ν , de modo que todo o procedimento seguirá análogo. Como estou interessado em analisar só o espalhamento do férmion de Dirac, f , devido ao campo externo, posso truncar o diagrama da Figura 22, analisando só a parte superior. Pela Eq. (3.31) chegamos a

$$b_{12} = \frac{k_\mu}{M_V}g\gamma^\mu(g_v + g_a\gamma^5) = \frac{g}{M_V}(\not{p}_1 - \not{p}_2)(g_v + g_a\gamma^5) . \quad (3.32)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2)b_{12}u(p_1) &= \frac{g}{M_V}\bar{u}(p_2)(\not{p}_1 - \not{p}_2)(g_v + g_a\gamma^5)u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2)\left[\frac{g}{M_V}((m_{f'_1} - m_{f_2})g_v - (m_{f'_1} + m_{f_2})g_a\gamma^5)\right]u(p_1) . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Utilizamos as relações $\not{p}u(p) = mu(p)$ e $\bar{u}(p)\not{p} = \bar{u}(p)m$ no cálculo, lembrando que m é a massa do férmion com o momento magnético anômalo que estamos interessados em calcular. Fazendo a identificação $f'_1 = f'$ e $f_2 = f$, temos

$$g(g_s + g_p\gamma^5) = \frac{g}{M_V}((m_{f'} - m)g_v - (m_{f'} + m)g_a\gamma^5) . \quad (3.34)$$

Identificamos

$$g_s = \frac{m_{f'} - m}{M_V} g_v \quad e \quad g_p = -\frac{m_{f'} + m}{M_V} g_a . \quad (3.35)$$

Substituímos esses resultados na Eq. (3.16) para encontrarmos a contribuição do bóson de Goldstone.

3.2.1 Diagramas 19(a) e 19(b)

A amplitude para os diagramas 19(a) e 19(b) é

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \delta \Gamma^\mu(p', p) \tilde{A}_\mu^{cl}(q) u(p) = & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') i g \gamma^\rho (g_v + g_a \gamma^5) \frac{i(\not{k} + m_{f'})}{k'^2 - m_{f'}^2} i e Q_{f'} \gamma^\mu \tilde{A}_\mu^{cl}(q) \times \\ & \frac{i(\not{k} + m_{f'})}{k^2 - m_{f'}^2} i g \gamma^\sigma (g_v^\dagger + g_a^\dagger \gamma^5) \frac{-i g_{\rho\sigma}}{(p - k)^2 - M_V^2} u(p) , \end{aligned} \quad (3.36)$$

No caso de um bóson vetorial sem massa, M_V aparece para regularizar a divergência infravermelha, onde tomamos ao final dos cálculos $M \rightarrow 0$, não havendo bósons de Goldstone associados. Usamos as mesmas técnicas das seções anteriores para analisarmos o numerador e o denominador. Por fim, os cálculos resultam em

$$\begin{aligned} a_f^{(2)}[19(a) \text{ e } 19(b)] = & -\frac{m g^2 Q_{f'}}{4\pi^2 Q_f} \int_0^1 du \frac{m(u-2)(g_v g_v^\dagger + g_a g_a^\dagger) + 2m_{f'}(g_v g_v^\dagger - g_a g_a^\dagger)}{(1-u)M_V^2 + u m_{f'}^2 + u(u-1)m^2} u(u-1) \\ & -\frac{m g^2 Q_{f'}}{8\pi^2 Q_f} \frac{1}{M_V^2} \int_0^1 du \left\{ m_{f'} \frac{(m_{f'} - m)^2 g_v g_v^\dagger - (m_{f'} + m)^2 g_a g_a^\dagger}{(1-u)M_V^2 + u m_{f'}^2 + u(u-1)m^2} \right. \\ & \left. - m(u-1) \frac{(m_{f'} - m)^2 g_v g_v^\dagger + (m_{f'} + m)^2 g_a g_a^\dagger}{(1-u)M_V^2 + u m_{f'}^2 + u(u-1)m^2} \right\} u^2 . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Apesar de nos referirmos apenas aos diagramas 19(a) e 19(b), não podemos esquecer que estamos incluindo a contribuição dos bósons de Goldstone. A primeira linha após a igualdade advém da contribuição do bóson vetorial por si só, as outras linhas são resultados da contribuição do bóson de Goldstone que é adicionado. Como o Modelo Padrão possui bósons vetoriais, neutros e carregados, é fundamental que ele seja um caso particular dessa equação, onde a contribuição advinda do bóson escalar tende a ser suprimida pelos fatores $(m/M_V)^2$. Se o bóson vetorial V não possuir massa teremos somente a primeira linha após a igualdade onde já podemos tomar $M_V = 0$.

3.2.2 Diagrama 19(c)

Continuamos considerando as atribuições dos momentos da Figura 18. Para o vértice do acoplamento entre vetores e o fóton do diagrama 19(c), considerando apenas acoplamentos convencionais com o fóton, tomamos

$$G[g^{\mu\nu}(q - k)^\rho + g^{\nu\rho}(k + k')^\mu + g^{\rho\mu}(-k' - q)^\nu] , \quad (3.38)$$

analogamente ao caso do Modelo Padrão (CHENG; LI, 1984). G é o acoplamento geral, incluindo as constantes de estrutura do grupo, os ângulos de mistura e o acoplamento de gauge.

Assim como no caso anterior, precisamos dos bósons de Goldstone que aparecerão em três novos diagramas além do 19(c). Um deles será da forma do diagrama 17(c), já calculado na Eq. (3.21), só precisando realizar as substituições da Eq. (3.35). Os outros serão da forma dos diagramas da Figura 23. O vértice envolvendo o bóson de Goldstone, w ,

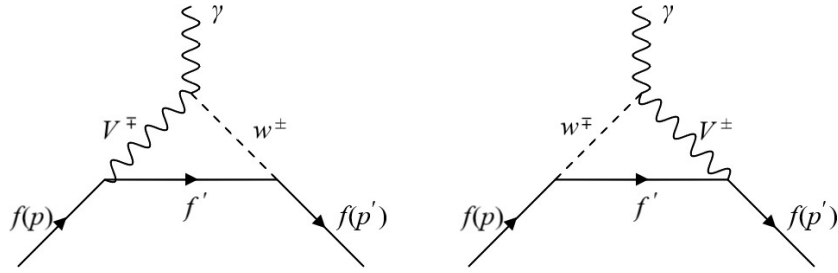


Figura 23 – Dois diagramas envolvendo escalares não físicos acoplados com o bóson vetorial, V , e o fóton.

o bóson vetorial, V , e o fóton, deve ser da forma $iG'g^{\mu\nu}$. Supomos acoplamentos genéricos G e G' que em última análise devem estar relacionados a partir da lagrangeana do modelo considerado. Por exemplo, pelo Modelo Padrão, onde $V^\pm = W^\pm$, temos que $G = -e$ e $G' = eM_W$ (CHENG; LI, 1984).

Analisando todos os quatro diagramas necessários, utilizando técnicas anteriores, obtém-se o resultado

$$\begin{aligned}
 a_f^{(2)}[19(c)] = & \frac{G}{eQ_f} \frac{mg^2}{4\pi^2} \int_0^1 du \frac{m(2u+1)(g_v g_v^\dagger + g_a g_a^\dagger) - 3m_{f'}(g_v g_v^\dagger - g_a g_a^\dagger)}{u(u-1)m^2 + (1-u)m_{f'}^2 + uM_V^2} u^2 \\
 & - \frac{Q_V}{Q_f} \frac{mg^2}{8\pi^2} \frac{1}{M_V^2} \int_0^1 du \left\{ \frac{mu(m_{f'} - m)^2 g_v g_v^\dagger + mu(m_{f'} + m)^2 g_a g_a^\dagger}{u(u-1)m^2 + (1-u)m_{f'}^2 + uM_V^2} \right. \\
 & + \left. \frac{m_{f'}(m_{f'} - m)^2 g_v g_v^\dagger - m_{f'}(m_{f'} + m)^2 g_a g_a^\dagger}{u(u-1)m^2 + (1-u)m_{f'}^2 + uM_V^2} \right\} u(1-u) \\
 & - \frac{Q_V}{Q_f} \frac{mg^2}{8\pi^2} \frac{G'}{eM_V} \int_0^1 du \frac{(m_{f'} - m)g_v g_v^\dagger - (m_{f'} + m)g_a g_a^\dagger}{u(u-1)m^2 + (1-u)m_{f'}^2 + uM_V^2} u^2.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

A primeira linha após a igualdade é da contribuição devido unicamente ao diagrama 19(c), a segunda e terceira linha são devidos à contribuição do diagrama 17(c), a última linha advém dos diagramas 23 com as substituições da Eq. (3.35). Os resultados das equações (3.37) e (3.39) são aplicados nas interações eletromagnética e fraca do Modelo Padrão, sendo este apresentado no Apêndice B.

Uma análise mais completa para outros tipos de mediadores capazes de contribuir para o momento magnético anômalo do múon encontra-se nas referências ([QUEIROZ; SHEPHERD, 2014](#); [LINDNER et al., 2018](#)).

4 Modelos de Física Além do Modelo Padrão e o Momento Magnético Anômalo

O resultado experimental do momento magnético anômalo do múon na Eq. (2.36) é uma das medições físicas de maior precisão já realizada. Por isso é hoje um dos testes mais sensíveis à presença de alguma física nova além das interações do Modelo Padrão. O desvio na Eq. (2.37) é um forte indicativo da existência de física nova e, apesar de ainda não ser uma confirmação, não pode ser ignorado. A razão disso é por ser uma das mais fortes indicações puramente observacionais, que não se caracteriza como uma necessidade teórica preconcebida, por exemplo, como a ideia de uma teoria de grande unificação.

As possibilidades de se especular uma Física Nova, além do Modelo Padrão, são incontáveis e isso é reproduzido em inúmeros trabalhos. Seria inviável tratar de todos, então abordamos no capítulo anterior alguns casos gerais de novas interações que possam estar fugindo das observações dos experimentos e que, em casos particulares, seriam capazes de contribuir para uma discrepância Δa_μ . Análises mais aprofundadas de outras possíveis consequências serão necessárias mas fogem do objetivo deste estudo. Somente os experimentos serão capazes de futuramente determinar o que está além do Modelo Padrão. Mas uma coisa é certa, qualquer proposta de física além do Modelo Padrão que implique em novas interações com os léptons carregados não poderá ignorar os resultados até aqui obtidos.

Uma possibilidade de Física Nova é a extensão do setor de Higgs, onde podemos adicionar singletos escalares, dubletos, tripletos etc. Também podemos considerar a existência de novos bósons de gauge a partir de uma simetria extra, como um novo $U(1)$.

A partir da Eq. (3.17), podemos considerar casos particulares como, por exemplo, desconsiderar a troca de sabor, $m_{f'} = m$, o acoplamento pseudoescalar, $g_p = 0$, e tomarmos g_s real, simplificando tomando $g = 1$, sendo g um fator presente no acoplamento definido. A análise desse caso é feita no trabalho (DAVOUDIASL; MARCIANO, 2018), onde o resultado lá obtido na equação (6) é encontrado fazendo a mudança de variável $z \equiv 1 - u$,

$$a_f^{(2)}[S^0] = \frac{g_s^2}{8\pi^2} \lambda_S^2 \int_0^1 dz \frac{(1+z)(1-z)^2}{\lambda_S^2(1-z)^2 + z}. \quad (4.1)$$

Considerando o caso do múon, $f = \mu$, temos a contribuição positiva da Eq. (2.37) que precisamos. É considerada a seguinte lagrangeana efetiva,

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2} \partial_\mu S^0 \partial^\mu S^0 - \frac{1}{2} M_S^2 S^0 S^0 - g_s^f S^0 \bar{f} f - \frac{\kappa_\gamma}{4} S^0 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

A proposta dos autores é resolver também a discrepância para o momento magnético do elétron da Eq. (2.38). Supondo que S^0 se acopla apenas com múons, com acoplamento

$g_s \doteq g_s^\mu$, temos os seguintes vínculos experimentais (BATELL et al., 2018),

$$2m_\mu \leq M_S \leq 100 \text{ GeV} , \quad g_s^\mu \sim 5 \times 10^{-4} - 0,1 .$$

Para $M_S \leq 200 \text{ MeV}$, a contribuição de um loop se cancela com a de dois loops para o a_e . Por outro lado, para $M_S \gg 1 \text{ GeV}$ há dificuldade em acomodar valores razoáveis para os acoplamentos do elétron, g_s^e , e κ_γ . Então, um intervalo razoável é,

$$2m_\mu \leq M_S \leq \text{alguns GeV} .$$

Para fins de cálculo são escolhidos os valores dentro destes limites,

$$M_S = 250 \text{ MeV} \quad e \quad g_s^\mu = 10^{-3} .$$

Isso implica, pela Eq. (4.1), em

$$a_\mu^{(2)}[S^0] \approx 3 \times 10^{-9} . \quad (4.3)$$

Um valor muito próximo do esperado para explicar a discrepância na Eq. (2.37), com uma magnitude aproximadamente 20% superior ao observado, que pode ser corrigida ao considerar a contribuição de dois loops.

Nesse caso, $M_S \gg m_e$, a contribuição de um loop para $a_e^{(2)}$ é suprimida. Espera-se (CHANG et al., 2001) modificações significativas do resultado de 1-loop quando correções de ordens maiores são incluídas. Então, o trabalho se concentra na contribuição efetiva oriunda do diagrama de Barr-Zee de dois loops (Figura 24) para $a_l^{(4)}[S^0]$, de onde advém a maior contribuição. Os diagramas do tipo Barr-Zee foram inicialmente estudados na literatura há muito tempo (BARR; ZEE, 1990). A contribuição do diagrama de Barr-Zee

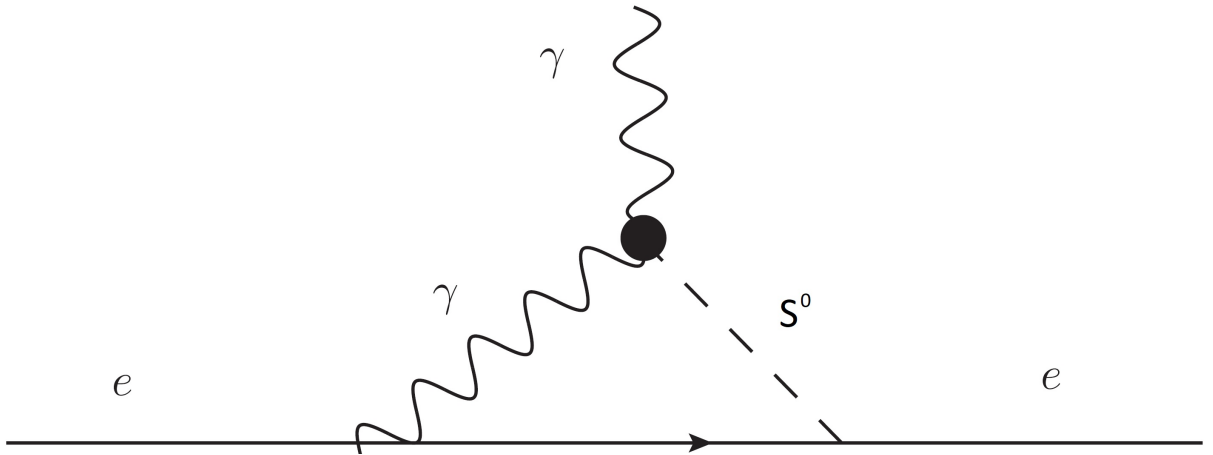


Figura 24 – Diagrama de Barr-Zee de dois loops para o momento magnético anômalo do elétron. O ponto (•) representa um loop de férmions F .

para o momento magnético anômalo de um lépton l envolvendo um loop de férmions F , fica

$$a_l^{(4) BZ}(F) = -\frac{\alpha}{6\pi} \frac{m_l}{m_F} \frac{g_s^l g_s^F}{\pi^2} Q_F^2 N_c^F I(y) , \quad (4.4)$$

onde

$$I(y) = \frac{3}{4} y^2 \int_0^1 dz \frac{1 - 2z(1 - z)}{z(1 - z) - y^2} \ln \frac{z(1 - z)}{y^2} , \quad (4.5)$$

onde $y \equiv m_F/M_S$, Q_F é a carga elétrica do férmion F em unidades da carga e e N_c^F é o número de cores de F , com $N_c^F = 1(3)$ para léptons (quarks) comuns. As contribuições de múltiplos férmions F , podem ser contabilizadas simplesmente ao somar sobre os férmions F .

Para $y^2 \gg 1$,

$$\begin{aligned} a_l^{(4) BZ} &\approx \frac{g_s^l \kappa_\gamma m_l}{4\pi^2} \left(\frac{13}{12} + \ln y \right) , \\ \kappa_\gamma &\approx -\frac{2\alpha}{3\pi} \sum_F \frac{g_s^F Q_F^2 N_c^F}{m_F} . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Supondo $g_s^e = 4 \times 10^{-4}$,

- Para $F = \mu$ temos $a_e^{(4)}[S^0] \approx -5 \times 10^{-14}$, aproximadamente 6% do observado na Eq. (2.38).
- Para $F = \tau$, supondo $g_s^\tau = 0,06$, temos $a_e^{(4)}[S^0] \approx -84 \times 10^{-14}$, muito próximo do observado na Eq. (2.38).
- Para um novo férmion F além do modelo padrão na escala de $m_F = 1 \text{ TeV}$, temos $a_e^{(4)}[S^0] \approx -7,5 g_s^F \times 10^{-14}$. Então, por exemplo, para o caso de 10 novos estados como esse, precisaríamos de um acoplamento da ordem de $g_s^F \approx 1$ para cada, se quisermos que sejam os únicos descrevendo a discrepância (2.38).

Com uma escolha adequada dos parâmetros envolvidos, o diagrama de Barr-Zee também é capaz de dar a correção negativa necessária para subtrair a contribuição de um loop da Eq. (4.3) em aproximadamente -5×10^{-10} , de modo a explicar com boa precisão a discrepância observada para o caso do múon na Eq. (2.38). O trabalho de Davoudiasl e Marciano demonstram como um caso simples e particular da Eq. (3.17), somada a uma contribuição de dois loops, é capaz de descrever, pelo menos em parte, as discrepâncias observadas para os momentos magnéticos anômalos do múon e do elétron, supondo ao menos um novo bóson escalar S^0 ainda não observado.

A descoberta do bóson de Higgs mostrou que já existe pelo menos um escalar na natureza¹. Ocorre que sua contribuição para o momento magnético anômalo é desprezível dentro da atual precisão experimental (ver Apêndice B). Os Modelos de Dois Dubletos de Higgs (2HDM, da sigla em inglês) preveem 4 novos bósons escalares além do observado.

¹ Os dados apontam para o escalar do Modelo Padrão eletrofraco, mas ainda não é possível afirmar se este escalar é fundamental ou composto (TANABASHI et al., 2018).

Além disso, são necessários para extensões Supersimétricas Mínimas do Modelo Padrão (MSSM, da sigla em inglês). Após a quebra de simetria eletrofraca o 2HDM prevê entre as partículas escalares físicas: dois escalares neutros (h e H , sendo um deles o Higgs do Modelo Padrão), um pseudoescalar neutro (A), e dois escalares carregados ($H^\pm$). A Eq. (3.16) é capaz de fornecer a contribuição de um loop para todas as partículas neutras previstas pelo 2HDM tomando $S^0 = h, H, A$ e analisando os acoplamentos, $g_p = 0$ para h e H , $g_s = 0$ para A .

No caso do pseudoescalar A , considerando o momento magnético anômalo do múon sem troca de sabor, $f = f' = \mu$,

$$a_f^{(2)}[A] = \frac{g^2}{8\pi^2} \lambda_A^2 g_p g_p^\dagger \int_0^1 du \frac{-u^3}{1 - u + u^2 \lambda_A^2}, \quad (4.7)$$

onde $\lambda_A \equiv m_\mu/M_A$. Encontramos uma contribuição negativa para o momento magnético anômalo do múon, sinal contrário ao observado, então o ideal é esperar que M_A seja grande o suficiente para suprimir ao máximo essa contribuição do pseudoescalar A .

Para os escalares carregados, $S^\pm = H^\pm$, usamos também a avaliação do diagrama 17(c), resultando na Eq. (3.21). Considerando o momento magnético anômalo do múon, $f = \mu$, temos por conservação de carga que $Q_S = Q_f$, ao passo que f' é um férmion neutro. Se considerarmos f' um neutrino do múon do modelo padrão, $f' = \nu_\mu$, temos conservação do número leptônico no vértice com o múon e o escalar, além disso podemos ver que $m_{\nu_\mu}/m_\mu \ll 1$. Como só observamos neutrinos de mão esquerda (antineutrinos de mão direita), esperamos que o acoplamento de Yukawa de um escalar carregado $S^\pm = H^\pm$ do 2HDM envolva uma projeção de quiralidade, resultando em um termo lagrangeano da forma

$$\mathcal{L}_Y \supset \sqrt{2} H^+ \bar{\nu}_\mu g P_R \mu + h.c.,$$

onde $P_R \equiv \frac{1+\gamma^5}{2}$ é a projeção de mão direita. Isso significa tomarmos $g_s = g_p = \frac{\sqrt{2}}{2}$ no nosso acoplamento. Aplicando essas condições na Eq. (3.21), temos que a contribuição de um loop para o escalar carregado $H^\pm$ do 2HDM é

$$a_\mu^{(2) 2HDM}[H^\pm] = \frac{\lambda_{H^\pm}^2 g^2}{8\pi^2} \int_0^1 du \frac{-u(1-u)}{1 + (u-1)\lambda_{H^\pm}^2}, \quad (4.8)$$

onde $\lambda_{H^\pm}^2 \equiv \frac{m_\mu^2}{M_{H^\pm}^2}$. É interessante notar que o resultado independe do sinal de Q_S devido a razão na Eq. (3.21). A busca por bósons de Higgs carregados nos experimentos do LHC e do LEP (TANABASHI et al., 2018) impõem o vínculo de $M_{H^\pm} > 80.0 \text{ GeV}$, de modo que podemos desprezar potências maiores de $\lambda_{H^\pm}^2$. A integral acima pode ser calculada

$$\int_0^1 du \frac{-u(1-u)}{1 + (u-1)\lambda_{H^\pm}^2} = -\frac{1}{6} + \mathcal{O}(\lambda_{H^\pm}^2), \quad (4.9)$$

resultando em uma contribuição negativa até a ordem considerada. Porém, se o 2HDM representa a realidade dos escalares físicos na natureza, a contribuição de todos os escalares

deve ser levada em conta, incluindo a análise para um escalar neutro além do Higgs do modelo padrão, vista anteriormente. Desse modo, uma contribuição do 2HDM compatível com a discrepância na Eq. (2.37) pode acontecer apenas devido ao escalar neutro além do Modelo Padrão.

Já os escalares duplamente carregados aparecem em Modelos com Tripleto de Higgs (HTM). Porém, no HTM é impossível haver uma contribuição para o momento magnético anômalo do múon com um sinal positivo (FUKUYAMA et al., 2010).

A tabela abaixo apresenta alguns limites inferiores para as massas de estados de Física Nova de acordo com os resultados experimentais. Os resultados apresentados neste trabalho para novas partículas contribuindo para o momento magnético anômalo do múon devem obedecer esses vínculos. As discrepâncias observadas servem como guia para propostas de Física Nova e os resultados aqui obtidos ou apresentados podem ajudar nessa análise.

Novos estados	Limite inferior para a massa
H_1^0 em modelos supersimétricos ($m_{H_1^0} < m_{H_2^0}$)	$M_{H_1^0} > 92,8 \text{ GeV}$ (95% C.L.)
A Higgs pseudoescalar	$M_A > 93,4 \text{ GeV}$ (95% C.L.)
$H^\pm$ Higgs carregado	$M_{H^\pm} > 80,0 \text{ GeV}$ (95% C.L.)
W' com acoplamentos padrão	$M_{W'} > 4,100 \times 10^3 \text{ GeV}$ (95% C.L.)
W_R de mão direita	$M_{W_R} > 715 \text{ GeV}$ (90% C.L.)
Z'_{SM} com acoplamentos padrão	$M_{Z'_{SM}} > 4,500 \times 10^3 \text{ GeV}$ (95% C.L.)
quark t' (4ª família)	$m_{t'} > 1160 \text{ GeV}$ (95% C.L.)
quark b' (4ª família)	$m_{b'} > 755 \text{ GeV}$ (95% C.L.)
ν' neutrino de Majorana	$m_{\nu'}^M > 39,5 \text{ GeV}$ (95% C.L.)
ν' neutrino de Dirac	$m_{\nu'}^M > 45 \text{ GeV}$ (95% C.L.)
$L^\pm$ lépton carregado	$m_{L^\pm} > 102,6 \text{ GeV}$ (95% C.L.)

Tabela 1 – Limites inferiores para as massas de novos estados físicos determinados experimentalmente (TANABASHI et al., 2018).

O experimento E989, no Brookhaven National Laboratory, é um aprimoramento do E821 e tem o potencial de confirmar a discrepância com 7σ (DRIUTTI, 2019). Resultados mais precisos desse e outros experimentos podem surgir em um futuro próximo, motivando estudos mais aprofundados do momento magnético anômalo do múon. Este trabalho poderá nos auxiliar no teste de novos modelos desenvolvidos pelo grupo na pesquisa de fenômenos como inflação, massa de neutrinos, matéria escura, etc.

5 Conclusão

Neste trabalho, calculamos algumas das principais contribuições do Modelo Padrão para o momento magnético anômalo de férmions de Dirac carregados, dando ênfase ao múon e ao elétron, sendo estes de principal importância experimental. Iniciamos apresentando a origem do conceito desde a física clássica até o cálculo da contribuição da Eletrodinâmica Quântica (QED) em nível de árvore e para a correção quântica envolvendo um loop. Analisamos alguns trabalhos que computam correções quânticas de ordens superiores que exigem um elevado nível de complexidade, envolvendo inúmeros diagramas de Feynman representando as mais diversas contribuições. A partir disso apresentamos o recente resultado da QED para o momento magnético anômalo do múon, $a_\mu^{QED} = 116\,584\,718,95(0,08) \times 10^{-11}$.

Analisamos as contribuições dos bósons da interação fraca e o Higgs, levando em consideração correções envolvendo até dois loops, sendo três ou mais loops não relevantes até a precisão de 10^{-11} . O resultado recente para a interação fraca resulta em $a_\mu^{EW} = (153,6 \pm 1,0) \times 10^{-11}$.

Por fim, para o Modelo Padrão, observamos que as principais incertezas teóricas advêm das contribuições de loop hadrônicas, ou seja, envolvendo quarks e glúons. Analisamos os trabalhos acerca das interações eletromagnéticas entre hádrons envolvendo a polarização hadrônica do vácuo e o espalhamento da luz pela luz, onde se obtém $a_\mu^{Had}[N(N)LO] = 19(26) \times 10^{-11}$.

Conclui-se que a previsão do Modelo Padrão é $a_\mu^{SM} = 116\,591\,823(1)(34)(26) \times 10^{-11}$. Comparado com o resultado experimental, $a_\mu^{exp} = 11\,659\,209,1(5,4)(3,3) \times 10^{-10}$, resulta na diferença $\Delta a_\mu = 268(63)(43) \times 10^{-11}$. Essa discrepância de $3,5\sigma$ nos mostra que apesar do Modelo Padrão conseguir explicar com grande precisão o momento magnético anômalo do múon, ele pode não ser suficiente, sendo um forte indicativo de Física Nova.

Calculamos expressões gerais de um loop para o momento magnético anômalo de férmions carregados de Dirac advindas de escalares neutros, simplesmente carregados, duplamente carregados, vetores neutros e vetores simplesmente carregados. A partir desses resultados pudemos recuperar as contribuições das interações fraca e do Higgs do Modelo Padrão, além de abrir inúmeras possibilidades de Física Nova dada a flexibilidade das equações.

Referências

- AHMAD, Q. R. et al. Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the sudbury neutrino observatory. *Physical Review Letters*, v. 89, n. 1, jun. 2002. Citado na página 34.
- AOYAMA, T. et al. Revised value of the eighth-order QED contribution to the anomalous magnetic moment of the electron. *Physical Review D*, v. 77, n. 5, mar. 2008. Citado na página 30.
- AOYAMA, T. et al. Complete tenth-order QED contribution to the muon $g-2$. *Physical Review Letters*, v. 109, n. 11, set. 2012. Citado na página 13.
- AOYAMA, T.; KINOSHITA, T.; NIO, M. Revised and Improved Value of the QED Tenth-Order Electron Anomalous Magnetic Moment. *Phys. Rev.*, D97, n. 3, p. 036001, 2018. Citado na página 30.
- BARR, S. M.; ZEE, A. Electric dipole moment of the electron and of the neutron. *Physical Review Letters*, v. 65, n. 1, p. 21–24, jul. 1990. Citado na página 60.
- BARS, I.; YOSHIMURA, M. Muon magnetic moment in a finite theory of weak and electromagnetic interactions. *Physical Review D*, v. 6, n. 1, p. 374–376, jul. 1972. Citado na página 38.
- BATELL, B. et al. Flavor-specific scalar mediators. *Physical Review D*, v. 98, n. 5, set. 2018. Citado na página 60.
- BOUCHENDIRA, R. et al. New determination of the fine structure constant and test of the quantum electrodynamics. *Physical Review Letters*, v. 106, n. 8, fev. 2011. Citado na página 31.
- CHANG, D. et al. Large two-loop contributions to $g - 2$ from a generic pseudoscalar boson. *Physical Review D*, v. 63, n. 9, abr. 2001. Citado na página 60.
- CHENG, T.; LI, L. Appendix b feynman rules. In: *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. [S.l.]: Clarendon Press, 1984, (Oxford science publications). Citado 2 vezes nas páginas 57 e 73.
- CZARNECKI, A.; KRAUSE, B.; MARCIANO, W. J. Electroweak fermion-loop contributions to the muon anomalous magnetic moment. *Physical Review D*, v. 52, n. 5, p. R2619–R2623, set. 1995. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- CZARNECKI, A.; MARCIANO, W. J.; VAINSHTEIN, A. Refinements in electroweak contributions to the muon anomalous magnetic moment. *Physical Review D*, v. 67, n. 7, abr. 2003. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- DAVIER, M. et al. Reevaluation of the hadronic vacuum polarisation contributions to the standard model predictions of the muon $g - 2$ and $\alpha(m_Z)$ using newest hadronic cross-section data. *The European Physical Journal C*, v. 77, n. 12, dez. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 42.

- DAVOUDIASL, H.; MARCIANO, W. J. Tale of two anomalies. *Physical Review D*, v. 98, n. 7, out. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 59.
- DIRAC, P. A. M. The Quantum theory of electron. 2. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A118, p. 351, 1928. Citado na página 17.
- DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A117, p. 610–624, 1928. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 17.
- DRIUTTI, A. Status of the muon g-2 experiment at fermilab. *SciPost Physics Proceedings*, n. 1, fev. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 63.
- EGUCHI, K. et al. First results from KamLAND: Evidence for reactor antineutrino disappearance. *Physical Review Letters*, v. 90, n. 2, jan. 2003. Citado na página 34.
- FUKUDA, Y. et al. Measurement of the flux and zenith-angle distribution of upward throughgoing muons by super-kamiokande. *Physical Review Letters*, v. 82, n. 13, p. 2644–2648, mar. 1999. Citado na página 34.
- FUKUYAMA, T.; SUGIYAMA, H.; TSUMURA, K. Constraints from lfv processes in the higgs triplet model. *Journal of High Energy Physics*, v. 2010, n. 3, mar. 2010. Citado na página 63.
- GASIOROWICZ, S. Quantum physics. John Wiley & Sons, New York, p. 397–398, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- GNENDIGER, C.; STÖCKINGER, D.; STÖCKINGER-KIM, H. The electroweak contributions to $(g - 2)_\mu$ after the higgs-boson mass measurement. *Physical Review D*, v. 88, n. 5, set. 2013. Citado 4 vezes nas páginas 13, 38, 40 e 41.
- GOLDHABER, M.; GRODZINS, L.; SUNYAR, A. W. Helicity of neutrinos. *Physical Review*, v. 109, n. 3, p. 1015–1017, fev. 1958. Citado na página 34.
- GRIFFITHS, D. Introduction to electrodynamics. Prentice Hall, p. 252, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 16.
- JEGERLEHNER, F. Essentials of the Muon g-2. *Acta Phys. Polon.*, B38, p. 3021, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 30.
- KARPLUS, R.; KROLL, N. M. Fourth-order corrections in quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Physical Review*, v. 77, n. 4, p. 536–549, fev. 1950. Citado na página 27.
- KINOSHITA, T. New value of the α^3 electron anomalous magnetic moment. *Physical Review Letters*, v. 75, n. 26, p. 4728–4731, dez. 1995. Citado na página 30.
- KINOSHITA, T.; NIZIC, B.; OKAMOTO, Y. Eighth-order QED contribution to the anomalous magnetic moment of the muon. *Physical Review D*, v. 41, n. 2, p. 593–610, jan. 1990. Citado na página 26.
- KURZ, A. et al. Hadronic contribution to the muon anomalous magnetic moment to next-to-next-to-leading order. *Physics Letters B*, v. 734, p. 144–147, jun. 2014. Citado na página 42.

- LAPORTA, S.; REMIDDI, E. The analytical value of the electron ($g - 2$) at order α^3 in QED. *Physics Letters B*, v. 379, n. 1-4, p. 283–291, jun. 1996. Citado na página 30.
- LI, G.; MENDEL, R.; SAMUEL, M. A. Precise mass-ratio dependence of fourth-order lepton anomalous magnetic moments: Effect of a new measurement of m_τ . *Physical Review D*, v. 47, n. 4, p. 1723–1725, fev. 1993. Citado na página 28.
- LINDNER, M.; PLATSCHER, M.; QUEIROZ, F. S. A call for new physics: The muon anomalous magnetic moment and lepton flavor violation. *Physics Reports*, v. 731, p. 1–82, fev. 2018. Citado na página 58.
- MANDL, F. Quantum field theory. Wiley, Chichester New York, p. 65, 1984. Citado na página 17.
- MARCIANO, W. J. Anomalous magnetic moments. WORLD SCIENTIFIC, dec 2003. Citado na página 17.
- MOHR, P. J.; TAYLOR, B. N.; NEWELL, D. B. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2006. *Reviews of Modern Physics*, v. 80, n. 2, p. 633–730, jun. 2008. Citado na página 31.
- MOHR, P. J.; TAYLOR, B. N.; NEWELL, D. B. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010. *Reviews of Modern Physics*, v. 84, n. 4, p. 1527–1605, nov. 2012. Citado na página 14.
- MOORE, S. R.; WHISNANT, K.; YOUNG, B.-L. Second-order corrections to the muon anomalous magnetic moment in alternative electroweak models. *Physical Review D*, v. 31, n. 1, p. 105–117, jan. 1985. Citado na página 52.
- MOUNT, B. J.; REDSHAW, M.; MYERS, E. G. Atomic masses ^6Li , ^{23}Na , $^{39,41}\text{K}$, $^{85,87}\text{Rb}$, ^{133}Cs . *Physical Review A*, v. 82, n. 4, out. 2010. Citado na página 31.
- PARKER, R. H. et al. Measurement of the fine-structure constant as a test of the standard model. *Science*, v. 360, n. 6385, p. 191–195, abr. 2018. Citado na página 32.
- PERIS, S.; PERROTTET, M.; RAFAEL, E. de. Two-loop electroweak corrections to the muon $g - 2$: a new class of hadronic contributions. *Physics Letters B*, v. 355, n. 3-4, p. 523–530, ago. 1995. Citado na página 41.
- PESKIN, M.; SCHROEDER, D. An introduction to quantum field theory. Avalon Publishing, p. 190 e 249, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 26.
- PETERMANN, A. Fourth order magnetic moment of the electron. *Helv. Phys. Acta*, v. 30, p. 407–408, 1957. Citado na página 27.
- PIRES, C. A. de S.; SILVA, P. S. R. da. Scalar scenarios contributing to $(g - 2)_\mu$ with enhanced yukawa couplings. *Physical Review D*, v. 64, n. 11, nov. 2001. Citado na página 46.
- PRADES, J.; RAFAEL, E. de; VAINSHTEIN, A. The hadronic light-by-light scattering contribution to the muon and electron anomalous magnetic moments. WORLD SCIENTIFIC, p. 303–317, dez. 2009. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 43.

- QUEIROZ, F. S.; SHEPHERD, W. New physics contributions to the muon anomalous magnetic moment: A numerical code. *Physical Review D*, v. 89, n. 9, maio 2014. Citado na página 58.
- QUINN, H. R. The asymmetry between matter and antimatter. *Physics Today*, v. 56, n. 2, p. 30–35, fev. 2003. Citado na página 17.
- RYDER, L. Quantum field theory. Cambridge University Press, Cambridge New York, p. 52–55, 1996. Citado na página 17.
- SAMUEL, M. A.; LI, G. Improved analytic theory of the muon anomalous magnetic moment. *Physical Review D*, v. 44, n. 12, p. 3935–3942, dez. 1991. Citado na página 28.
- SAMUEL, M. A.; LI, G. Erratum: Improved analytic theory of the muon anomalous magnetic moment. *Physical Review D*, v. 46, n. 10, p. 4782–4782, nov. 1992. Citado na página 28.
- SAMUEL, M. A.; LI, G. Erratum: Improved analytic theory of the muon anomalous magnetic moment. *Physical Review D*, v. 48, n. 4, p. 1879–1881, ago. 1993. Citado na página 28.
- SCHWINGER, J. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Physical Review*, v. 73, n. 4, p. 416–417, fev. 1948. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 25.
- SCHWINGER, J. On radiative corrections to electron scattering. *Physical Review*, v. 75, n. 5, p. 898–899, mar. 1949. Citado na página 25.
- SOMMERFIELD, C. M. Magnetic dipole moment of the electron. *Physical Review*, v. 107, n. 1, p. 328–329, jul. 1957. Citado na página 27.
- SOMMERFIELD, C. M. The magnetic moment of the electron. *Annals of Physics*, v. 5, n. 1, p. 26–57, set. 1958. Citado na página 27.
- TANABASHI, M. et al. Review of particle physics. *Physical Review D*, v. 98, n. 3, ago. 2018. Citado 12 vezes nas páginas 10, 14, 25, 29, 31, 32, 37, 41, 44, 61, 62 e 63.
- Weyl, H. Elektron und Gravitation. I. *Zeitschrift für Physik*, v. 56, p. 330–352, maio 1929. Citado na página 18.
- YANG, C. N.; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical Review*, v. 96, n. 1, p. 191–195, out. 1954. Citado na página 18.

Apêndices

APÊNDICE A – Algumas Matrizes Importantes

Matrizes de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Matrizes gama 4x4 (ou matrizes de Dirac) na representação de Dirac,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

onde I_2 é a matriz identidade 2x2.

Tensor $\sigma^{\mu\nu}$,

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (\text{A.3})$$

Matrizes de spin para a teoria de Dirac, $\Sigma = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$,

$$\Sigma^{23} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^{31} = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^{12} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

A propriedade definidora das matrizes gama é a relação de anticomutação,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_4. \quad (\text{A.5})$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski com assinatura $(+ - - -)$.

A quinta matriz gama é definida,

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{A.6})$$

γ^5 é hermitiana,

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\text{A.7})$$

seus autovalores são ± 1 , pois

$$(\gamma^5)^2 = I_4 \quad (\text{A.8})$$

e anticomuta com as outras matrizes gama,

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Algumas identidades importantes são,

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4I_4 , \quad (\text{A.10})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu , \quad (\text{A.11})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} I_4 \quad (\text{A.12})$$

e

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 . \quad (\text{A.13})$$

APÊNDICE B – Analisando as contribuições do Modelo Padrão Eletrofraco

As partículas características da interação fraca são os bósons $W^\pm$ e Z , bem como o bóson de Higgs, H , que exerce papel fundamental no modelo eletrofraco, como vimos na [seção 2.2](#). As equações (3.39), (3.37) e (3.16), demonstradas no [Capítulo 3](#), podem ser aplicadas para esses casos, respectivamente.

B.1 Bóson de Higgs

O acoplamento do Higgs não envolve troca de sabor, $m_{f'} = m$ e $Q_{f'} = Q_f$. Pela lagrangeana da Eq. (2.2) identificamos o acoplamento como $gg_s = im/v$, onde v é o valor esperado do vácuo do campo do Higgs, sendo um acoplamento puramente escalar, $g_p = 0$. Pela Eq. (3.16) obtivemos,

$$a_f^{(2)}[H] = \frac{m^2}{8\pi^2} \frac{\lambda_H^2}{v^2} \int_0^1 du \frac{u^2(2-u)}{1-u+u^2\lambda_H^2}, \quad (\text{B.1})$$

onde $\lambda_H \equiv m/M_H$ e M_H é a massa do Higgs. Essa integral pode ser analisada numericamente. Para o caso do múon e, principalmente do elétron, temos λ_H^2 significativamente pequeno, suprimindo bastante o resultado e tornando a contribuição do Higgs até então insignificante.

B.2 Bóson Z

Pela lagrangeana da Eq. (2.2) vemos que não há troca de sabor, $m_{f'} = m$ e $Q_{f'} = Q_f$. Como estamos principalmente interessados nos momentos magnéticos anômalos do elétron e do múon, podemos tomar o limite $M_Z \gg m$. Nesse limite, a contribuição do bóson de Goldstone na Eq. (3.37) é suprimida por um fator extra m^2/M_Z^2 . A integral da Eq. (3.37) pode ser aproximada por

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_0^1 du \frac{m(u-2)(g_v g_v^\dagger + g_a g_a^\dagger) + 2m(g_v g_v^\dagger - g_a g_a^\dagger)}{(1-u)M_Z^2 + um^2 + u(u-1)m^2} u(u-1) \\ &\approx -\frac{1}{M_Z^2} \int_0^1 du (m(u-2)(g_v g_v^\dagger + g_a g_a^\dagger) + 2m(g_v g_v^\dagger - g_a g_a^\dagger)) u \\ &= \frac{m}{3M_Z^2} (5g_a g_a^\dagger - g_v g_v^\dagger). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Como estamos interessados principalmente em léptons carregados do Modelo Padrão, utilizaremos a componente de isospin fraco $t_{3L} = -1/2$ da Eq. (2.4). Identificamos o

acoplamento do bóson Z com os férmions na lagrangeana da Eq. (2.2) e definimos

$$g_v \equiv \frac{g_V}{2} = -\frac{1}{4} + \sin^2\theta_W \quad e \quad g_a \equiv -\frac{g_A}{2} = \frac{1}{4},$$

onde g_V e g_A são determinados na Eq. (2.3) e temos que $Q_i = Q_f = -1$. Chegamos a

$$I = \frac{m}{3M_Z^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin^2\theta_W - \sin^4\theta_W \right). \quad (\text{B.3})$$

Retomando a Eq. (3.37),

$$a_f^{(2)}[Z] = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{m^2}{3M_Z^2} g^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin^2\theta_W - \sin^4\theta_W \right). \quad (\text{B.4})$$

Na lagrangeana da Eq. (2.2) identificamos

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos\theta_W} \quad e \quad g^2 \rightarrow \frac{g^2}{\cos^2\theta_W} = 8M_W^2 \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cos^2\theta_W}, \quad (\text{B.5})$$

onde o antigo g é aquele presente na Eq. (3.37) e o novo é o acoplamento presente na lagrangeana da Eq. (2.2), onde há também um fator $\cos^{-2}\theta_W$. Usando isso na Eq. (B.4), chegamos na forma

$$a_f^{(2)}[Z] = \frac{G_F m^2}{8\pi^2 \sqrt{2}} \frac{(-1 + 4\sin^2\theta_W)^2 - 5}{3}, \quad (\text{B.6})$$

como mostramos na Eq. (2.14), onde aqui $a_f^{(2)}[Z]$ é calculado para um lépton carregado do modelo padrão.

B.3 Bósons $W^\pm$

No caso dos bósons $W^\pm$ a contribuição de um loop para o momento magnético anômalo dos férmions é obtida a partir da Eq. (3.39). A segunda e terceira linha após a igualdade da Eq. (3.39) é suprimida e pode ser ignorada. Pelo Modelo Padrão temos que $G = -e$ e $G' = eM_W$ (CHENG; LI, 1984). Dentro do Modelo Padrão, considerando que o férmion f é um lépton carregado, temos que $f' = \nu$. Com as devidas identificações dos fatores restantes na Eq. (3.39) através da lagrangeana da Eq. (2.2), analogamente ao caso do bóson Z chegamos que

$$a_f^{(2)}[W^\pm] = \frac{G_F m^2}{8\pi^2 \sqrt{2}} \frac{10}{3}, \quad (\text{B.7})$$

como mostramos na Eq. (2.14), onde aqui $a_f^{(2)}[W^\pm]$ é calculado para um lépton carregado do Modelo Padrão.