



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Wagner Oliveira dos Santos

# **Polarização de vácuo e correntes induzidas por uma corda cósmica no espaço-tempo anti-de Sitter**

João Pessoa - PB

Julho de 2021

**Wagner Oliveira dos Santos**

**Polarização de vácuo e correntes induzidas por uma  
corda cósmica no espaço-tempo anti-de Sitter**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFPB (área de concentração: Gravitação e Cosmologia), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello

Coorientador: Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota

Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Departamento de Física - DF

**João Pessoa - PB**

Julho de 2021

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

S237p Santos, Wagner Oliveira dos.

Polarização de vácuo e correntes induzidas por uma corda cósmica no espaço-tempo anti-de Sitter / Wagner Oliveira dos Santos. - João Pessoa, 2021.

211 f. : il.

Orientação: Eugênio Ramos Bezerra de Mello.

Coorientação: Herondy Francisco Santana Mota.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Corda cósmica. 3. Espaço-tempo anti-de Sitter. 4. Dimensões extras. 5. Correntes induzidas no vácuo. 6. Tensor energia-momento. 7. Condensado fermiônico. I. Mello, Eugênio Ramos Bezerra de. II. Mota, Herondy Francisco Santana. III. Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de  
Doutorado do aluno **Wagner Oliveira dos  
Santos**, candidato ao Título de Doutor em Física  
na Área de Concentração Gravitação e  
Cosmologia.

Aos vinte e nove dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e um, às 15:00, reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Gravitação e Cosmologia, **Wagner Oliveira dos Santos**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: **Eugênio Ramos Bezerra de Mello** (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, **Valdir Barbosa Bezerra** (UFPB), **Albert Petrov** (UFPB), **Ilya Shapiro** (UFJF), **Azadeh Mohammadi** (UFPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Eugênio Ramos Bezerra de Mello comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "*Polarização de vácuo e corrente induzidas por uma corda cósmica no espaço tempo anti-de Sitter*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Jose Sérgio Trindade Silva, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **29 de julho de 2021**.

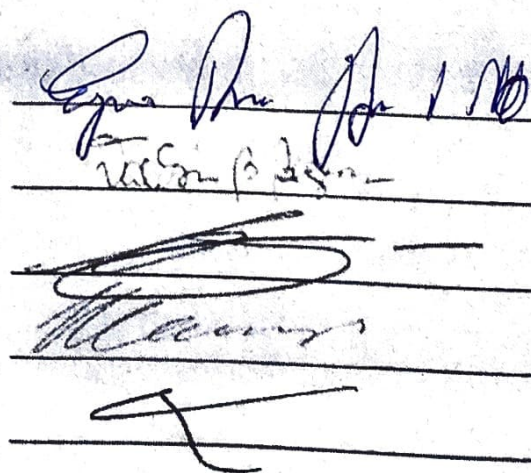
Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello  
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra  
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Albert Petrov  
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Ilya Shapiro  
UFJF

Prof. Dr. Azadeh Mohammadi  
UFPE



Link da reunião [meet.google.com/rks-vmgg-nrj](https://meet.google.com/rks-vmgg-nrj)

# Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

- À Deus pelo dom da vida.
- Aos meus pais, Valdelice Oliveira Dias e Alailson Batista dos Santos, que sempre me deram apoio e incentivo ao longo de toda minha jornada acadêmica.
- Ao meu orientador Eugênio Ramos Bezerra de Mello, por sua dedicada e competente orientação, sempre estando à disposição para sanar qualquer dúvida que eu tivesse. Agradeço ainda pelos seus valorosos conselhos ao longo destes quatro anos de doutoramento, por seu caráter humano e generoso, além de seu profissionalismo brilhante e inspirador.
- Ao meu co-orientador Herondy Francisco Santana Mota, por toda a ajuda e conselhos dados à mim.
- Ao professor Stefano Bellucci, por ter aceitado me orientar durante o período em que estive no Laboratori Nazionali di Frascati na Itália. Sou grato à sua orientação profissional e seus valorosos conselhos. Quero também deixar meus agradecimentos ao professor Aram Saharian pela frutífera colaboração, durante e após a minha estadia na Itália. Por fim, agradeço aos amigos que fiz no laboratório, e na Itália em geral, pelos momentos de lazer e descontração.
- À todos os professores e demais funcionários do departamento de física da UFPB, pelo profissionalismo e toda atenção à mim dispensada. À todos os colegas de departamento e amigos que fiz durante minha estadia em João Pessoa, pelas produtivas discussões e momentos de lazer compartilhados.
- À CAPES pelo apoio financeiro ao longo deste projeto.

*“...when you have eliminated the impossible,  
whatever remains, however improbable, must  
be the truth.” - Sir Arthur Conan Doyle*

# Resumo

Nesta tese, investigamos os efeitos combinados da curvatura do espaço-tempo, da topologia não-trivial, e da presença de campos externos, sobre as flutuações do vácuo quântico associadas a campos bosônicos e fermiônicos, ambos carregados. Analisamos as densidades de corrente bosônicas induzidas por um fluxo magnético ao longo do núcleo de uma corda cósmica ideal em um espaço-tempo anti-de Sitter com  $(D + 1)$  dimensões, admitindo que uma dimensão extra é compactificada e a presença de um fluxo magnético circundado pelo eixo compactificado. Neste contexto, mostramos que, por exemplo, apenas densidades de corrente ao longo das direções azimutal e axial são induzidas. Os valores esperados de vácuo do campo ao quadrado e do tensor energia-momento associados ao campo bosônico também são analisados. Para desenvolver estes cálculos, o conjunto completo de funções de onda normalizadas obedecendo uma condição de quasi-periodicidade ao longo da dimensão extra foi obtido e a função de Wightman de frequência positiva foi construída. Em um segundo estudo, analisamos os valores esperados de vácuo das densidades de corrente, condensado fermiônico e tensor energia-momento gerados no vácuo de um campo fermiônico. Neste caso, a geometria considerada foi o espaço-tempo anti-de Sitter  $(4 + 1)$ -dimensional na presença de um fluxo magnético ao longo do eixo de uma corda cósmica e uma dimensão extra compacta com fluxo magnético circundado pelo eixo compactificado. Para obter os valores esperados de vácuo mencionados acima, a equação de Dirac no espaço-tempo curvo para esta geometria foi resolvida e os modos fermiônicos obtidos. Por fim, no último capítulo desta tese analisamos as densidades de corrente fermiônicas induzidas por um fluxo magnético ao longo de uma corda cósmica e uma brana na geometria do espaço-tempo anti-de Sitter em  $(4 + 1)$  dimensões. Neste caso, a brana é paralela à fronteira anti-de Sitter e a corda cósmica é ortogonal à brana. A brana divide o espaço-tempo em duas regiões com diferentes propriedades do vácuo, e a única componente induzida ao longo da direção azimutal é estudada em cada uma destas

regiões.

Em todas as investigações realizadas, análises dos casos especiais, assintóticos e numéricos foram feitas para os resultados obtidos.

**Palavras-chave:** corda cósmica, espaço-tempo anti-de Sitter, dimensões extras, compactificação, mundo brana, fluxo magnético, correntes induzidas no vácuo, tensor energia-momento, condensado fermiônico.

# Abstract

In this thesis, we investigate the combined effects of the spacetime curvature, the non-trivial topology and the presence of external fields on the quantum vacuum fluctuations associated with bosonic and fermionic charged fields. We analyze the bosonic current densities induced by a magnetic flux along the core of an idealized cosmic string in an anti-de Sitter space-time with  $(D + 1)$  dimensions, assuming that an extra dimension is compactified and the presence of a magnetic flux enclosed by the compactified axis. In this context, we show, for instance, that only azimuthal and axial current densities are induced. The vacuum expectation values of the squared field and the energy-momentum tensor associated with the bosonic field are also analyzed. To develop these calculations, the complete set of normalized wave functions obeying a quasiperiodicity condition along the extra dimension was obtained and the positive frequency Wightman function has been constructed. The vacuum expectation values of the current densities, fermionic condensate and energy-momentum tensor generated in the vacuum of a fermionic field were also analyzed. In this case, the geometry considered was the  $(4 + 1)$ -dimensional anti-de Sitter space-time in the presence of a magnetic flux along the axis of a cosmic string and a compact extra dimension with a magnetic flux enclosed by its compactified axis. To obtain the vacuum expectation values mentioned above, the Dirac equation in curved space-time for this geometry was solved and the fermionic modes were obtained. Finally, in the last chapter of this thesis we analyze the fermionic current densities induced by a magnetic flux along a cosmic string and a brane in the geometry of the anti-de Sitter space-time in  $(4 + 1)$  dimensions. In this case, the brane is parallel to the anti-de Sitter boundary and the cosmic string is orthogonal to the brane. The brane divides the space-time into two regions with different vacuum properties, and the only induced component along the azimuthal direction is studied in each of these regions.

In all investigations performed, analyzes of special, asymptotic and numerical cases were made for the results obtained.

**Keywords:** cosmic strings, anti-de Sitter spacetime, extra dimensions, compactification, braneworld, magnetic fluxes, induced vacuum currents, energy-momentum tensor, fermionic condensate.

# Lista de Figuras

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Potencial “chapéu mexicano” . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 14 |
| 1.2 | Corda cósmica passando pela região transversal delimitada pelo caminho fechado $L$ . O campo $\phi$ desaparece no núcleo da corda, enquanto as setas indicam diferentes valores de $\theta$ . . . . .                                                                                                                                   | 20 |
| 1.3 | Corda cósmica afetando o espaço-tempo ao seu redor, por “remover” uma pequena “fatia” de um plano transversal correspondendo a um déficit angular, $\delta = 8\pi G\mu$ , tendo como resultado uma geometria cônica. . . . .                                                                                                            | 24 |
| 4.1 | A densidade de corrente azimutal sem compactificação na Eq. (4.54) é apresentada, em unidades de “ $ea^{-5}$ ”, em termos de $\varepsilon$ , para $r/w = 1$ , $ma = 1$ , $\xi = 0$ e $q = 1, 1.5$ e $2.5$ . . . . .                                                                                                                     | 72 |
| 4.2 | A densidade de corrente azimutal sem compactificação em unidades de “ $ea^{-5}$ ”, para $D = 4$ na Eq. (4.54), é esboçada em termos da distância própria, $r/w$ , para $\varepsilon = 0.25$ , $\xi = 0$ e $q = 1, 1.5, 2.5$ . O gráfico do lado esquerdo é para $ma = 1$ , enquanto o gráfico do lado direito é para $ma = 5$ . . . . . | 72 |
| 4.3 | A densidade de corrente azimutal induzida pela compactificação, em unidades de “ $ea^{-5}$ ” e para $D = 4$ , é exibida em termos de $\tilde{\beta}$ para $ma = 1$ , $\xi = 0$ , $\varepsilon = 0.25$ e $q = 1, 1.5$ e $2.5$ . . . . .                                                                                                  | 75 |
| 4.4 | A densidade de corrente axial é apresentada para $D = 4$ , em unidades de “ $ea^{-4}$ ”, como função de $\tilde{\beta}$ para $ma = 1$ , $\xi = 0$ , $L/a = 1$ e $q = 1, 1.5$ e $2.5$ . No gráfico do lado esquerdo consideramos $\varepsilon = 0$ , enquanto no gráfico do lado direito nós tomamos $\varepsilon = 0.25$ . . . . .      | 80 |

- 4.5 O VEV do campo ao quadrado induzido pela corda cósmica sem compactificação em unidades de  $a^{-3}$ , para  $D = 4$  na Eq. (4.88), é exibido em termos de  $r/w$ , para  $q = 2.5$  e  $m = 0$ . Os números próximos às curvas correspondem aos valores do parâmetro  $\varepsilon$ . As linhas cheias correspondem ao caso do campo sem massa minimamente acoplado, enquanto as linhas tracejadas correspondem ao caso do campo sem massa conformalmente acoplado. . . . 84
- 4.6 O VEV do campo ao quadrado induzido pela compactificação em unidades de  $a^{-3}$ , para  $D = 4$  na Eq. (4.98), é exibido como uma função de  $L/w$ , para  $q = 2.5$ ,  $r/w = 0.5$  e  $m = 0$ . Os números próximos às curvas correspondem aos valores do parâmetro  $\varepsilon$ . O gráfico do lado esquerdo corresponde a  $\tilde{\beta} = 0$  e o do lado direito a  $\tilde{\beta} = 0.5$ . As linhas cheias correspondem ao caso do campo sem massa minimamente acoplado, enquanto as linhas tracejadas correspondem ao campo sem massa acoplado conformalmente. . . . . 85
- 4.7 O VEV da componente da densidade de energia associado à compactificação é exibido para  $D = 4$ , em unidade de  $a^{-3}$ , como um função de  $r/w$ , para  $q = 3.5$ ,  $L/w = 1$  e  $m = 0$ . Os números próximos às curvas correspondem a valores de parâmetros  $\varepsilon$ . O gráfico do lado esquerdo corresponde a  $\tilde{\beta} = 0$  e o gráfico do lado direito a  $\tilde{\beta} = 0.5$ . As curvas cheias correspondem ao campo sem massa acoplado minimamente, enquanto as linhas tracejadas correspondem ao caso sem massa acoplado conformalmente. . . . . 89
- 4.8 O VEV da densidade de energia na geometria da corda cósmica no espaço-tempo AdS sem compactificação é apresentado para  $D = 4$ , em unidades de  $a^{-3}$ , em termos de  $r/w$ , para  $q = 2.5$  e  $m = 0$ . Os números próximos as curvas referem-se aos valores do parâmetro  $\varepsilon$ . As linhas cheias correspondem ao campo sem massa acoplado minimamente, enquanto as linhas tracejadas correspondem ao caso do campo sem massa acoplado conformalmente. . . . 93
- 5.1 O VEV da densidade de corrente azimutal induzido na ausência de compactificação como função de  $\alpha_0$ , para  $r/w = 1$ ,  $ma = 5$ ,  $q = 1.5, 2.5$  e  $3.5$ . . . . . 106

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |     |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.2 | O VEV da contribuição induzida pela corda cósmica para a densidade de corrente azimutal como uma função de $r/w$ para $\alpha_0 = 0.25$ , $ma = 5$ , $q = 1.5, 2.5$ e $3.5$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 108 |
| 5.3 | A corrente azimutal induzida pela compactificação como função dos parâmetros $\tilde{\beta}$ e $\alpha_0$ , para valores fixos de $r/w = 1$ , $ma = 5$ e $q = 2.5$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 110 |
| 5.4 | O VEV da densidade de corrente axial induzido pela compactificação como função de $\alpha_0$ e $\tilde{\beta}$ , para $q = 2.5$ , $r/w = 1$ e $ma = 5$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 114 |
| 5.5 | A densidade de corrente axial como função de $\tilde{\beta}$ , para $q = 2.5$ , $r/w = 1$ e $ma = 5$ . No gráfico do lado esquerdo é considerado $\alpha_0 = 0$ , enquanto no gráfico do lado direito é assumido $\alpha_0 = 0.35$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                     | 117 |
| 5.6 | O CF $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs}$ como uma função da distância a partir da corda cósmica para campos com massa (gráfico do lado esquerdo) e sem massa (gráfico do lado direito). Os gráficos são apresentados para $\alpha_0 = 0.3$ e para diferentes valores de $q$ (números próximos às curvas). No gráfico do lado esquerdo tomamos $ma = 1$ . . . . .                                                                                                                                               | 123 |
| 5.7 | O condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs}$ como uma função da massa (gráfico à esquerda) e do parâmetro $\alpha_0$ (gráfico à direita) para $r/w = 1.5$ e para diferentes valores de $q$ (números próximos às curvas). Para o gráfico do lado esquerdo consideramos $\alpha_0 = 0.3$ e para o gráfico do lado direito $ma = 0.5$ . . . . .                                                                                                                                                               | 123 |
| 5.8 | A parte no CF induzido pela compactificação como função da distância radial a partir da corda (gráfico à esquerda) e como função da massa (gráfico à direita). Para ambos os gráficos $\alpha_0 = 0.3$ , $\tilde{\beta} = 0.25$ . Os números próximos às curvas são valores do parâmetro $q$ para o gráfico à esquerda e da razão $L/w$ para o gráfico à direita. Os gráficos são esboçados para $ma = 1$ , $L/w = 1$ e para $q = 2.5$ , $r/w = 1$ nos gráficos à esquerda e à direita, respectivamente. . . . . | 126 |

- 5.9 A parte na densidade de energia induzida pela corda cósmica como função da distância radial a partir da corda (gráfico à esquerda) e como função da massa (gráfico à direita). Para ambos os gráficos consideramos  $\alpha_0 = 0.3$ . Os números próximos às curvas em ambos os gráficos são valores do parâmetro  $q$ . Os gráficos são esboçados para  $ma = 1$  e para  $r/w = 0.3$  nos gráficos à esquerda e à direita, respectivamente. . . . . 130
- 5.10 A parte na densidade de energia induzida pela compactificação como função da distância radial a partir da corda (gráfico à esquerda) e como função da massa (gráfico à direita). No gráfico do lado esquerdo foram escolhidos  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $ma = 1$ ,  $L/w = 1$  e  $\tilde{\beta} = 0.25$ , e no gráfico do lado direito foram considerados  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $r/w = 1$ ,  $L/w = 1.5$  e  $\tilde{\beta} = 0.25$ . Os números próximos às curvas em ambos os gráficos são valores do parâmetro  $q$ . . . . 132
- 6.1 A densidade de corrente induzida pela brana como uma função da razão  $w/w_0$ , para valores fixos de  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$  e  $r/w_0 = 0.5$ . Os gráficos à esquerda e à direita correspondem aos campos com  $s = 1$  e  $s = -1$ , respectivamente . . . . . 162
- 6.2 A contribuição induzida pela brana no VEV da densidade de corrente na região R como função da distância a partir da corda para os valores fixos de  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$  e  $w/w_0 = 1.5$ . Os gráficos à esquerda e à direita correspondem a  $s = 1$  e  $s = -1$ , respectivamente. . . . . 162
- 6.3 A dependência da corrente induzida pela brana com a massa do campo para valores fixos de  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $w/w_0 = 1.5$ ,  $r/w_0 = 0.5$  e para campos com  $s = 1$  e  $s = -1$  (gráficos à esquerda e à direita, respectivamente). . . . . 163
- 6.4 A densidade de corrente como uma função da coordenada radial para campos com  $s = 1$  (curvas tracejadas) e  $s = -1$  (curvas cheias). Os gráficos são esboçados para  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $w/w_0 = 1.5$ . . . . . 163
- 6.5 A contribuição da brana na densidade de corrente como função de  $w/w_0$  para  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$  e  $r/w_0 = 0.5$ . . . . . 169
- 6.6 A dependência da densidade de corrente induzida pela brana com a distância a partir da corda para  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$  e  $w/w_0 = 0.8$ . . . . . 170

|     |                                                                                                                                                       |     |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.7 | A densidade de corrente induzida pela brana na região L como função da massa do campo para $\alpha_0 = 0.3$ , $w/w_0 = 0.8$ e $r/w_0 = 0.5$ . . . . . | 170 |
| 6.8 | O mesmo que na Fig. 6.4 para a densidade de corrente total na região L para $w/w_0 = 0.8$ . . . . .                                                   | 171 |

# Lista de Tabelas

|     |                                                                                                                       |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Classificação de defeitos topológicos por dimensão e grupo de homotopia da variedade de vácuo $\mathcal{M}$ . . . . . | 18 |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

# Lista de publicações

1. W. Oliveira dos Santos, H. F. Mota and E. R. Bezerra de Mello, *Induced current in high-dimensional AdS space-time in the presence of a cosmic string and a compactified extra dimension*. Phys. Rev. D **99**, 045005 (2019).
2. W. Oliveira dos Santos, E. R. Bezerra de Mello and H. F. Mota, *Vacuum polarization in high-dimensional AdS space-time in the presence of a cosmic string and a compactified extra dimension*, Eur. Phys. J. Plus **135**, 27 (2020).
3. S. Bellucci, W. Oliveira dos Santos and E. R. Bezerra de Mello, *Induced fermionic current in AdS spacetime in the presence of a cosmic string and a compactified dimension*, Eur. Phys. J. C **80**, 963 (2020).
4. S. Bellucci, W. Oliveira dos Santos, E. R. Bezerra de Mello and A. A. Saharian, *Vacuum fermionic currents in braneworld models on AdS bulk with a cosmic string*, JHEP **02**, 190 (2021).

# Sumário

|                                                                                           |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introdução</b>                                                                         | <b>1</b>  |
| <b>1 Espaço-tempo anti-de Sitter, cordas cósmicas e dimensões extras</b>                  | <b>6</b>  |
| 1.1 Relatividade geral e espaços maximalmente<br>simétricos . . . . .                     | 6         |
| 1.1.1 Relatividade Geral . . . . .                                                        | 7         |
| 1.1.2 Espaços maximalmente simétricos . . . . .                                           | 8         |
| 1.1.3 Espaço AdS em $d$ dimensões . . . . .                                               | 9         |
| 1.2 Transições de fase, quebra espontânea de simetria e defeitos topológicos . .          | 11        |
| 1.2.1 Quebra espontânea de simetria: bóson de Goldstone e mecanismo<br>de Higgs . . . . . | 13        |
| 1.2.2 Formação de defeitos topológicos . . . . .                                          | 18        |
| 1.2.3 Cordas cósmicas locais . . . . .                                                    | 19        |
| 1.2.4 Gravitação de cordas cósmicas . . . . .                                             | 22        |
| 1.3 Dimensões extras . . . . .                                                            | 24        |
| 1.3.1 Dimensões extras do tipo Kaluza-Klein . . . . .                                     | 25        |
| 1.3.2 Modelo ADD . . . . .                                                                | 28        |
| 1.3.3 Modelo RSI . . . . .                                                                | 29        |
| 1.3.4 Modelo RSII . . . . .                                                               | 31        |
| <b>2 Teoria clássica de campos em espaços curvos</b>                                      | <b>33</b> |

|          |                                                                                                |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.1      | Campo escalar complexo na presença de um campo externo . . . . .                               | 33        |
| 2.1.1    | Interação do campo escalar complexo com o campo eletromagnético                                | 34        |
| 2.1.2    | Interação do campo escalar complexo com o campo gravitacional . .                              | 35        |
| 2.1.3    | Interação do campo escalar complexo com os campos eletromagnético<br>e gravitacional . . . . . | 38        |
| 2.2      | Campo espinorial de Dirac na presença de um campo externo . . . . .                            | 39        |
| 2.2.1    | Interação do campo espinorial com o campo eletromagnético . . . .                              | 39        |
| 2.2.2    | Interação do campo fermiônico com o campo gravitacional . . . . .                              | 41        |
| 2.2.3    | Interação do campo fermiônico com os campos eletromagnético e<br>gravitacional . . . . .       | 48        |
| <b>3</b> | <b>Teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo</b>                                         | <b>50</b> |
| 3.1      | Segunda quantização no espaço curvo . . . . .                                                  | 51        |
| 3.2      | Criação de partículas em um espaço-tempo curvo . . . . .                                       | 53        |
| 3.3      | Polarização do vácuo . . . . .                                                                 | 55        |
| 3.4      | Função de Green e o VEV do tensor energia-momento no espaço-tempo curvo                        | 56        |
| <b>4</b> | <b>Correntes induzidas e polarização do vácuo bosônico no espaço AdS</b>                       | <b>59</b> |
| 4.1      | Modos bosônicos e função de Wightman . . . . .                                                 | 59        |
| 4.2      | Corrente bosônica . . . . .                                                                    | 69        |
| 4.2.1    | Componente azimutal da densidade de corrente . . . . .                                         | 69        |
| 4.2.2    | Densidade de corrente ao longo da dimensão extra compactificada .                              | 77        |
| 4.3      | Valor esperado no vácuo do campo ao quadrado . . . . .                                         | 81        |
| 4.4      | VEV do tensor energia-momento . . . . .                                                        | 86        |
| <b>5</b> | <b>Correntes induzidas e polarização do vácuo fermiônico no espaço AdS</b>                     | <b>95</b> |
| 5.1      | Modos fermiônicos . . . . .                                                                    | 95        |
| 5.2      | Densidade de corrente fermiônica . . . . .                                                     | 102       |

|          |                                                                                                |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.2.1    | Densidade de corrente azimutal . . . . .                                                       | 103        |
| 5.2.2    | Corrente induzida ao longo da dimensão extra compactificada . . .                              | 112        |
| 5.3      | Condensado fermiônico . . . . .                                                                | 117        |
| 5.4      | VEV do tensor energia-momento . . . . .                                                        | 127        |
| 5.4.1    | Densidade de energia . . . . .                                                                 | 127        |
| 5.4.2    | Componente radial . . . . .                                                                    | 133        |
| 5.4.3    | Componente azimutal . . . . .                                                                  | 136        |
| 5.4.4    | Componente ao longo da direção $w$ . . . . .                                                   | 139        |
| 5.4.5    | Componente axial . . . . .                                                                     | 141        |
| 5.5      | Propriedades do tensor energia-momento . . . . .                                               | 145        |
| <b>6</b> | <b>Correntes fermiônicas em modelos de mundo brana</b>                                         | <b>150</b> |
| 6.1      | Modos fermiônicos . . . . .                                                                    | 150        |
| 6.2      | Densidade de corrente na região R . . . . .                                                    | 153        |
| 6.2.1    | Fórmula geral . . . . .                                                                        | 153        |
| 6.2.2    | Análise dos regimes assintóticos para a densidade de corrente e resultados numéricos . . . . . | 159        |
| 6.3      | Densidade de corrente na região L . . . . .                                                    | 164        |
| 6.3.1    | Análise assintótica e numérica . . . . .                                                       | 167        |
| 6.4      | Densidades de corrente para um segundo tipo de condição de contorno . .                        | 171        |
| 6.4.1    | Região R . . . . .                                                                             | 171        |
| 6.4.2    | Região L . . . . .                                                                             | 172        |
| 6.5      | Aplicações ao modelo Randall-Sundrum . . . . .                                                 | 173        |
|          | <b>Conclusões e Perspectivas</b>                                                               | <b>176</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                                                              | <b>184</b> |

# Introdução

A física subjacente às flutuações do vácuo quântico surge uma vez que aspectos quânticos de fenômenos relativísticos são levados em conta. Isso significa que um campo relativístico quantizado (escalar, eletromagnético ou fermiônico) apresentará um estado fundamental, ou uma energia de ponto zero, flutuante devido às flutuações quânticas do campo. No espaço-tempo de Minkowski, por exemplo, o valor esperado de vácuo (VEV) de observáveis físicos, como consequência das flutuações de vácuo quântico de campos relativísticos, é zero, a menos que o vácuo seja de alguma forma “perturbado” por influências externas. Essas influências são em geral condições de contorno de algum tipo ou campos externos acoplados. Um observável físico muito conhecido, e que adquire um VEV não nulo sob influências externas, é a densidade de energia que caracteriza o efeito Casimir [1–3]. Temos também outros observáveis físicos importantes que adquirem valores esperados de vácuo não nulos sob essas circunstâncias, tais como a densidade de corrente, bi-lineares dos campos e o tensor energia-momento. Em particular, a densidade de quadri-corrente devido a campos carregados é de especial importância, dado que esta pode fornecer uma melhor compreensão sobre a dinâmica do campo eletromagnético, uma vez que a mesma seja usada como fonte nas equações semiclássicas de Maxwell.

Uma característica adicional relacionada às modificações das flutuações do vácuo quântico dos campos relativísticos é sua ocorrência devido à curvatura do espaço-tempo. Sabe-se que aspectos geométricos e topológicos de um espaço-tempo curvo também induzem um VEV não nulo de observáveis físicos [1–3]. Entre estes espaços curvos, o espaço-tempo anti-de Sitter (AdS) possui propriedades interessantes que fornecem fortes motivações para seu estudo [4–8]. Ao considerar uma constante cosmológica negativa, o espaço-tempo AdS é obtido como uma solução das equações de Einstein e, portanto, é caracterizado por uma curvatura negativa constante. Assim, do ponto de vista teórico e

fundamental, o espaço-tempo AdS torna possível resolver vários problemas de forma exata como consequência de sua máxima simetria, permitindo assim a quantização dos campos com mais facilidade, além de oferecer um melhor entendimento sobre a quantização de campos em outros espaços-tempo curvos. Adicionalmente, o espaço-tempo AdS surge como uma solução de estado fundamental da teoria das cordas e supergravidade, além de estar presente no contexto da correspondência AdS/CFT, um cenário que possibilita a concepção do princípio holográfico, relacionando a teoria de cordas (supergravidade) no espaço-tempo AdS em altas dimensões, com uma teoria de campos conformes construída em sua fronteira [9]. Além disso, a geometria do espaço-tempo AdS é relevante em cenários de mundo brana com grandes dimensões extras, oferecendo uma maneira de resolver o problema da hierarquia entre as escalas de massa gravitacional e eletrofraca [10]. Devido à estas razões, a teoria quântica de campos no espaço-tempo AdS tem sido extensivamente estudada por diversos autores [11–22].

Cordas cósmicas são defeitos topológicos lineares que são previstos nos contextos das teorias de campos de calibre e extensões supersimétricas do Modelo Padrão da física de partículas, bem como no contexto da teoria das cordas [23–28]. O espaço-tempo de uma corda cósmica reta, infinitamente longa e sem estrutura é caracterizado por uma topologia cônica que surge devido ao déficit angular no plano perpendicular à corda [23–25]. Fenomenologicamente, observações recentes da radiação cósmica de fundo sugerem que cordas cósmicas podem contribuir para uma pequena porcentagem das perturbações de densidade primordial [29] no Universo, além de serem candidatas a geração de uma variedade de efeitos físicos interessantes, tais como explosões de raios gama [30], raios cósmicos de alta energia [31] e ondas gravitacionais [32]. A presença de uma corda cósmica no espaço-tempo AdS proporciona fenômenos ainda mais interessantes, uma vez que essa geometria combinada torna possível identificar no VEV de alguns observáveis as contribuições proveniente de ambas as partes, ou seja, da geometria AdS e da topologia das cordas cósmicas.

A estrutura cônica associada a uma corda cósmica é capaz de gerar efeitos relevantes na teoria quântica de campos, induzindo VEVs não nulos para observáveis físicos. De fato, a análise de efeitos de polarização do vácuo associados a campos escalares e fermiônicos foram desenvolvidos em [33–43], para a geometria de um corda cósmica idealizada no espaço-tempo plano. Por outro lado, efeitos adicionais surgem no espaço-tempo curvo. Recentemente, os efeitos combinados da topologia não-trivial e da curvatura do

espaço-tempo nas características locais dos vácuos escalares e fermiônicos foram investigados em [44–47] para uma corda cósmica nos espaços-tempo de de Sitter<sup>1</sup> e anti-de Sitter.

A presença de dimensões extras compactas é um aspecto característico de todas as teorias mencionadas anteriormente, nas quais o espaço-tempo AdS desempenha um papel fundamental e, como dito acima, induzem contribuições não nulas para observáveis físicos, como o tensor energia-momento, que apresenta não somente a componente da densidade de energia, mas também as componentes de tensão (veja Ref. [48] e referências nela). Neste caso, por exemplo, a densidade de energia do vácuo induzida pela dimensão extra oferece uma possível explicação para a observada expansão acelerada do Universo. Em modelos tipo Kaluza-Klein e em cenários de mundo brana, por outro lado, a dependência no tamanho da dimensão extra compacta pela densidade de energia serve como um mecanismo para estabilizar campos conhecidos como campos de moduli [49].

No capítulo 4, apresentamos nossas primeiras contribuições para esta tese, as quais consistem na análise dos VEVs da densidade de corrente e do tensor energia-momento associados a um campo escalar. Investigamos os efeitos que emergem da geometria e topologia do espaço-tempo AdS em altas dimensões na presença de uma corda cósmica possuindo um fluxo magnético ao longo de seu eixo. Além disso, assumimos a compactificação de uma das dimensões extras e a existência de um potencial vetor constante ao longo de seu eixo. Assim, a presença de fluxos magnéticos e uma dimensão extra compactificada também fornecerá contribuições adicionais aos VEVs a serem calculados.

O capítulo 5 também consiste de nossas contribuições para esta tese, onde um estudo similar ao do capítulo 4 é realizado, porém considerando o vácuo de um campo fermiônico e a presença de apenas uma dimensão extra, a qual é compactificada. Densidades correntes induzidas e polarização do vácuo bosônico no espaço-tempo de uma corda cósmica compactificada foram consideradas em [50] e [51], respectivamente. Investigações similares para o campo fermiônico foram conduzidas em [52] e [53].

Ainda sobre cordas cósmicas, inicialmente estas foram consideradas como objetos completamente distintos de supercordas fundamentais. Na teoria das cordas, supercordas fundamentais são considerados como os blocos básicos de construção da matéria. Um

---

<sup>1</sup>Este espaço-tempo é uma solução das equações de Einstein, com constante cosmológica positiva.

tema particularmente interessante nos desenvolvimentos recentes do assunto é a investigação sobre a possibilidade de aparecimento de cordas cósmicas de baixa tensão na teoria das cordas (veja [54] para discussões anteriores). Modelos foram propostos onde, sob certas condições, cordas fundamentais podem chegar a tamanhos macroscópicos com características semelhantes às das cordas cósmicas. Entre os exemplos desse tipo de modelo está o cenário de inflação de branas [55] (para revisões sobre o tema, veja [27, 56–58]). Neste cenário, a inflação cosmológica emerge naturalmente no contexto de mundo brana e é uma concepção específica do paradigma inflacionário no Universo primordial dentro do contexto de mundo brana na teoria das cordas. Entre outras previsões interessantes neste contexto teórico, a produção de cordas cósmicas no final da inflação tem atraído considerável atenção [59]. Foi sugerido que a detecção de cordas cósmicas poderia ser uma maneira possível de verificar o paradigma inflacionário, fornecendo um interessante campo de testes na teoria das cordas, sondando o cenário de mundo brana antes da fase inflacionária [27, 56–58].

No capítulo 6, analisamos o VEV da densidade de corrente fermiônica ao redor de uma corda cósmica possuindo fluxo magnético ao longo de seu eixo e imersa em um espaço-tempo AdS com uma brana paralela à fronteira AdS. A corda cósmica é ortogonal à brana e sobre a brana o campo fermiônico deve obedecer dois tipos de condições de contorno. A primeira delas corresponde à condição de fronteira de sacola do MIT [60] e a segunda é obtida da condição de fronteira de sacola mudando-se o sinal do termo com o vetor normal à fronteira. Nos modelos de mundo brana, estas condições de contorno são ditadas pela simetria  $Z_2$  sob reflexão com respeito à brana. Densidades de corrente do vácuo no espaço-tempo AdS com uma parte das dimensões espaciais compactificadas em um torus e na presença de branas foram investigadas em [7, 8, 61–63].

Esta tese de doutoramento está organizada da seguinte forma: no capítulo 1 revisamos alguns dos elementos teóricos que consideramos fundamentais ao entendimento desta tese e que buscam motivar o estudo desenvolvido na mesma. No capítulo 2 mostramos como o formalismo da teoria clássica de campos para o campo escalar e espinorial no espaço-tempo plano pode ser estendido para o espaço curvo. O capítulo 3 é dedicado a uma breve revisão sobre alguns aspectos importantes do formalismo da teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo. No capítulo 4 analisamos os VEVs da densidade de corrente e do tensor energia-momento associados a um campo escalar car-

regado, e induzidos devido à geometria AdS, em  $(D + 1)$  dimensões, na presença de uma corda cósmica possuindo fluxo magnético ao longo de seu eixo, e uma dimensão extra compactada também possuindo fluxo magnético circundado pelo eixo compactificado. No capítulo 5 consideramos os VEVs da densidade de corrente, condensado fermiônico e do tensor energia-momento associados a um campo fermiônico e induzidos no espaço-tempo AdS em  $(4 + 1)$  dimensões por uma corda cósmica e uma dimensão extra compacta, onde ambos apresentam fluxos magnéticos. No capítulo 6 analisamos os efeitos de uma brana e uma corda cósmica possuindo fluxo magnético sobre o VEV da densidade de corrente para um campo fermiônico na geometria do espaço-tempo AdS  $(4 + 1)$ -dimensional. Por fim, apresentamos nossos resultados mais importantes na seção de conclusões e perspectivas. Com exceção do capítulo 1, ao longo desta tese adotamos o sistema de unidades naturais  $\hbar = G = c = 1$  e a assinatura métrica  $(+, -, -, -)$ .

# Capítulo 1

## Espaço-tempo anti-de Sitter, cordas cósmicas e dimensões extras

O objetivo deste capítulo inicial é fazer uma breve revisão dos elementos teóricos que consideramos fundamentais para o entendimento desta tese por parte do leitor. Em particular, daremos ênfase àqueles que serão utilizados nos desenvolvimentos dos capítulos 4, 5 e 6, nomeadamente, o espaço-tempo AdS, cordas cósmicas e dimensões extras do tipo Kaluza-Klein e mundo brana.

### 1.1 Relatividade geral e espaços maximalmente simétricos

Em 1905, Albert Einstein revolucionou o mundo da física clássica com uma teoria que mudaria a concepção da humanidade sobre espaço e tempo. Na física clássica de Newton, espaço e tempo eram entidades separadas e inertes, sem qualquer influência sobre a realidade física. Na teoria concebida por Einstein, espaço e tempo se tornaram indistinguíveis e maleáveis, influenciando e sendo influenciados pelo conteúdo energético e material do Universo. Nas próximas subseções iremos tentar dar uma ideia geral sobre alguns dos aspectos fundamentais das ideias introduzidas por Einstein, além de tratarmos brevemente sobre espaços maximalmente simétricos, dando ênfase ao espaço-tempo anti-de Sitter. Para uma leitura mais aprofundada deste conteúdo, recomendamos as Refs.

[64, 65].

### 1.1.1 Relatividade Geral

Em seu primeiro trabalho no ano de 1905, Einstein generalizou o grupo de transformações de Galileo que corresponde à classe de referenciais inerciais na mecânica Newtoniana, além de adicionar um elemento novo e revolucionário através de dois postulados fundamentais. Este novo elemento é o primeiro destes postulados e impõe a constância da velocidade da luz para todos os observadores inerciais, rompendo com a ideia de instantaneidade presente na física newtoniana e estabelecendo o conceito de causalidade. O segundo postulado nos diz que as leis da física devem ser as mesmas para todos os referenciais inerciais, implicando na não existência de referenciais privilegiados, *a priori*. Esta teoria ficou conhecida como Relatividade Especial, e é assim chamada por não incluir referenciais não-inerciais.

Mais tarde, em 1915, Einstein generalizou a teoria da Relatividade Especial ao incluir referenciais não-inerciais, sendo a nova teoria chamada de Relatividade Geral. Nesta extensão da Relatividade Especial, Einstein lançou mão de dois novos princípios que são fundamentais na teoria. O primeiro é o princípio da equivalência que, a grosso modo, nos diz que efeitos gravitacionais são localmente indistinguíveis daqueles devido a referenciais inerciais, implicando em certo modo na equivalência entre massa gravitacional e inercial. Além do princípio da equivalência, outro conceito central na Relatividade Geral é o princípio da covariância geral. Este princípio diz que todos os sistemas de coordenadas são igualmente bons para descrever a geometria do espaço-tempo. Em outras palavras, este princípio nos diz que a realidade física é independente do sistema de coordenadas escolhido e que somente quantidades invariantes sob mudança do sistema de coordenadas têm significado físico. Estas ideias constituem o “alicerce” da Relatividade Geral e têm demonstrado ao longo do tempo serem fundamentos extremamente poderosos na descrição da gravidade como um fenômeno puramente geométrico em largas escalas.

O objeto central da teoria da Relatividade Geral é o tensor métrico,  $g_{\mu\nu}(x)$ , definido em uma variedade pseudo-Riemanniana.<sup>1</sup> Em  $(3 + 1)$  dimensões, este tensor é simétrico e

<sup>1</sup>Uma variedade pseudo-Riemanniana é uma generalização de uma variedade Riemanniana, onde formas quadráticas não são necessariamente positivo-definidas. No contexto da Relatividade Geral, esta é uma variedade Lorentziana, onde vetores tangentes podem ser classificados como tipo-tempo, tipo-espaço

possui 10 componentes independentes que são funções das coordenadas no espaço-tempo,  $x^\mu$ , e contém toda a informação geométrica da teoria.

Formalmente, a Relatividade Geral pode ser descrita como a soma da ação de Einstein-Hilbert na presença de uma constante cosmológica<sup>2</sup>,  $\Lambda$ , mais um termo correspondente ao conteúdo de matéria,  $S_M$ , e cuja forma funcional em  $d$  dimensões é dada por:

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^d x |g|^{1/2} (R - 2\Lambda) + S_M , \quad (1.1)$$

onde  $g = \det(g_{\mu\nu})$  é o determinante do tensor métrico,  $R$  é o escalar de curvatura de Ricci e  $G$  é a constante gravitacional de Newton.

Ao variar esta ação com respeito ao campo  $g_{\mu\nu}(x)$ , obtemos a equação de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} , \quad (1.2)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci,  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento da teoria e carrega toda informação sobre a distribuição de matéria e energia no espaço-tempo. Formalmente, o tensor energia-momento é obtido através da relação:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}(x)} . \quad (1.3)$$

Note que este tensor é simétrico com respeito à troca dos índices  $\mu$  e  $\nu$ , o que decorre naturalmente de sua derivação através da variação da ação com respeito ao tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ .

### 1.1.2 Espaços maximalmente simétricos

No espaço-tempo de Minkowski, o tensor energia-momento é uma consequência natural da invariância da ação associada ao conteúdo de matéria,  $S_M$ , por transformações do grupo de Poincaré. Este é um grupo de transformações com número máximo de isometrias do espaço-tempo e que fisicamente implicam na conservação de quantidades físicas importantes para um dado sistema físico, tais como energia, momento linear e angu-

e tipo-luz.

<sup>2</sup>A constante cosmológica,  $\Lambda$ , foi originalmente introduzida por Albert Einstein em 1917 com o intuito de contrabalançar os efeitos gravitacionais da matéria, obtendo assim um universo estático. Atualmente, entretanto, esta constante é associada à expansão acelerada do Universo [66].

lar. Em geral, uma variedade pseudo-Riemanniana representando um espaço-tempo curvo pode não necessariamente apresentar qualquer simetria. Entretanto, existem algumas classes especiais de soluções das equações de Einstein que podem exibir grupos restritos de isometrias, como aquelas por translações e rotações. Existe ainda uma classe especial de soluções que reúne espaços com número máximo de simetrias, tais como os espaços-tempo de Sitter e anti-de Sitter (além do espaço-tempo plano de Minkowski).

No contexto da Relatividade Geral, estas isometrias do espaço-tempo são associadas a vetores de Killing. Formalmente, vetores de Killing,  $\xi^\mu(x)$ , são definidos como soluções da equação de Killing:

$$\nabla_\mu \xi_\nu(x) + \nabla_\nu \xi_\mu(x) = 0 . \quad (1.4)$$

Esta equação decorre fundamentalmente da invariância do tensor métrico sob transformações de coordenadas ou, em outras palavras, do princípio da covariância geral. Espaços com número máximo de vetores de Killing e curvatura constante, chamados de *espaços maximalmente simétricos*, são de grande interesse físico por permitirem a resolução de muitos problemas complexos de forma exata. Em  $d$  dimensões, por exemplo, espaços maximalmente simétricos possuem  $d(d+1)/2$  vetores de Killing, satisfazendo a Eq. (1.4).

### 1.1.3 Espaço AdS em $d$ dimensões

O espaço-tempo de Minkowski é o mais simples dentre os espaços ditos maximalmente simétricos e corresponde à solução das equações de campo de Einstein na ausência de constante cosmológica ( $\Lambda = 0$ ) e curvatura nula ( $R = 0$ ), ou seja, na ausência de matéria ou energia suficientes para curvar a estrutura do espaço-tempo. Outra solução maximalmente simétrica, muito conhecida especialmente por suas aplicações na cosmologia, por exemplo, é a solução do espaço-tempo de Sitter. Esta solução corresponde a um universo em expansão e é obtida pela suposição de um universo vazio e com constante cosmológica positiva ( $\Lambda > 0$ ). Por outro lado, se considerarmos uma constante cosmológica negativa ( $\Lambda < 0$ ) e no vácuo, obteremos o espaço-tempo anti-de Sitter. Esta solução é notoriamente reconhecida por seu papel fundamental no teorema AdS/CFT que relaciona

teorias de gravidade quântica no espaço-tempo AdS em  $d$  dimensões e teorias quânticas de campo conformes não-gravitacionais em  $(d - 1)$  dimensões [67].

O espaço-tempo AdS é uma variedade Lorentziana de curvatura negativa constante e pode ser definida em um número qualquer de dimensões igual ou superior a 2. Em  $d$  dimensões esta variedade é invariante sob o grupo  $SO(2, d - 1)$ , e pode ser representada como um hiperbolóide incorporado em  $(d + 1)$  dimensões através da relação [68]:

$$X_0^2 + X_{d+1}^2 - \sum_{i=1}^{d-1} X_i^2 = a^2 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{2, d-1}, \quad (1.5)$$

onde a constante  $a$  tem dimensão de comprimento e determina a escala de curvatura do espaço AdS. Note que  $X_0$  e  $X_{d+1}$  são dimensões tipo-tempo, enquanto as demais são coordenadas espaciais. A correspondente métrica induzida neste ambiente é dada por

$$ds^2 = dX_0^2 + dX_{d+1}^2 - \sum_{i=1}^{d-1} dX_i^2. \quad (1.6)$$

Esta métrica possui diferentes representações, ou sistema de coordenadas, dentre as quais iremos explorar apenas duas, que são comumente encontradas na literatura: coordenadas globais e coordenadas de Poincaré. As coordenadas globais são obtidas através da solução da Eq. (1.5) por meio da seguinte parametrização:

$$\begin{aligned} X_0 &= a \cos(t/a) \cosh(r/a), & X_{d+1} &= a \cosh(r/a) \sin(t/a), \\ X_i &= a \sinh(r/a) \Omega_i & \text{com} \quad \sum_{i=1}^{d-1} \Omega_i^2 &= 1. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Substituindo (1.7) em (1.6), obtemos a seguinte métrica:

$$ds^2 = \cosh^2(r/a) dt^2 - dr^2 - a^2 \sinh^2(r/a) d\Omega^2. \quad (1.8)$$

Neste sistema de coordenadas,  $(t, r, \Omega_i)$ , o hiperbolóide possui topologia  $S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$ , sendo coberto por inteiro com  $t \in [-\pi a, \pi a]$ ,  $r \geq 0$  e  $\Omega$  varrendo a esfera  $(d - 2)$ -dimensional.

Uma importante característica do espaço AdS é que este espaço-tempo é proporcional ao espaço-tempo de Minkowski através de uma relação conforme. Esta simetria de escala do espaço AdS pode ser explicitamente exibida através das coordenadas de *Poincaré*

$(t, w, \vec{x})$  ( $t \in (-\infty, \infty)$ ,  $w \in (0, \infty)$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^{d-2}$ ), cuja parametrização é dada por:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{2w}(a^2 + w^2 + |\vec{x}|^2 - t^2), & X_i &= a \frac{x_i}{w}, \quad i = 1, \dots, d-2 \\ X_{d-1} &= \frac{1}{2w}(a^2 - w^2 - |\vec{x}|^2 + t^2) & \text{e} & \quad X_{d+1} = a \frac{t}{w}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Levando este conjunto de coordenadas na Eq. (1.6), obtemos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = \frac{a^2}{w^2}(dt^2 - dw^2 - d|\vec{x}|^2). \quad (1.10)$$

Note que neste sistema de coordenadas temos duas hipersuperfícies. De (1.9) podemos observar o vínculo  $X_0 + X_{d-1} = a^2/w > 0$ , o que implica que este sistema de coordenadas cobre apenas metade do espaço  $\text{AdS}_d$ . A outra metade é obtida tomando-se  $w < 0$ .

Do elemento de linha (1.10), o escalar de Ricci e a constante cosmológica negativa são dados por:

$$\Lambda = -\frac{(d-1)(d-2)}{2a^2} \quad R = -\frac{d(d-1)}{a^2}. \quad (1.11)$$

Por meio das coordenadas de Poincaré, também podemos entender o espaço AdS como o espaço-tempo de Minkowski  $(d-1)$ -dimensional multiplicado por um fator exponencial dependente de uma das coordenadas espaciais através da mudança de variável  $w = ae^{y/a}$ :

$$ds^2 = e^{-2y/a} \left( dt^2 - \sum_{i=1}^{d-2} dx_i^2 \right) - dy^2. \quad (1.12)$$

Vale notar que este sistema de coordenadas do espaço AdS surge no contexto da teoria de mundo brana, tópico que será brevemente revisado na seção 1.3 deste capítulo.

## 1.2 Transições de fase, quebra espontânea de simetria e defeitos topológicos

Transições de fase são fenômenos recorrentes na natureza. Na matéria condensada, diversos sistemas apresentam transições de fase com formação de defeitos, tais como cristais líquidos nemáticos, linhas de fluxo magnético do tipo II e linhas de vórtice quantizados em superfluidos  $^4\text{He}$  [24]. Ao serem resfriados, cristais líquidos nemáticos podem apresen-

tar defeitos do tipo linha ou ponto, representando uma quebra de simetria rotacional no material. Tais defeitos são conhecidos na literatura como *disclinações*. Nas vizinhanças de disclinações do tipo linha, por exemplo, moléculas são restringidas a alterar suas orientações por um ângulo  $\pi$  ao redor de eixos ortogonais aos defeitos [24].

No contexto da cosmologia, podemos ter também a formação de defeitos topológicos. De acordo com o modelo cosmológico padrão, o Universo primordial era altamente denso com temperaturas elevadas. À medida que o Universo se expandia, sua temperatura decaía, e talvez neste processo de resfriamento, o mesmo tenha passado por transições de fase cosmológicas ao atingir temperaturas críticas de transição, acompanhadas por quebras espontâneas de simetria, dando origem à diversos tipos de defeitos topológicos.

Uma característica comum entre muitos dos modelos da física de partículas moderna é o fenômeno da quebra espontânea de simetria. Este conceito está baseado na ideia de que a natureza possui simetrias não manifestadas no estado de vácuo. Esta ideia é um elemento central em esquemas teóricos que propõem a unificação das interações fundamentais em regimes de alta energia. Em teorias unificadas de calibre, a exemplo do modelo padrão de partículas, a quebra espontânea de simetria é implementada levando-se em conta a existência de um campo escalar, comumente chamado campo de Higgs. Como veremos adiante, uma consequência da quebra espontânea de simetria nestes modelos é a criação de bósons vetoriais massivos através do mecanismo de Higgs.

Em teorias unificadas de calibre, a quebra espontânea de simetria ocorre durante transições de fase. Em teoria, ao menos três transições de fase com quebra espontânea de simetria ocorreram no Universo primordial [23]:

- Transição GUTs (sigla em inglês para *Grand Unified Theories*): Nestas teorias, a transição de fase ocorre a temperatura crítica  $T_c = 10^{16}$  GeV ( $10^{28}$  Kelvins), e acima desta temperatura, as forças nuclear eletrofraca e nuclear forte são unificadas.
- Transição eletrofraca: Na teoria eletrofraca, o eletromagnético e a interação fraca são unificadas em temperaturas acima de  $T_c = 10^3$  GeV ( $10^{15}$  Kelvins).
- Transição quark-hádron: Em temperaturas superiores a  $T_c = 1$  GeV ( $10^{12}$  Kelvins), a matéria nuclear normal (bárions e mésons) sofre uma transição de fase para o

estado de plasma com quarks e glúons livres.

Uma previsão importante destes modelos de unificação das interações fundamentais, possuindo transições de fase com quebras espontâneas de simetria, é o surgimento de defeitos topológicos estáveis, tais como paredes de domínio, cordas cósmicas e monopolos magnéticos. Nas próximas subseções, iremos fazer uma breve revisão das condições necessárias para formação destes defeitos, dando ênfase à cordas cósmicas e suas propriedades gravitacionais que, por sua vez, geram importantes efeitos observacionais cosmológicos e astrofísicos.

### 1.2.1 Quebra espontânea de simetria: bóson de Goldstone e mecanismo de Higgs

Em geral, as propriedades básicas de defeitos topológicos são independentes do modelo de física de partículas que dá origem aos mesmos, sendo assim possível estudar as propriedades básicas destes objetos através de modelos com grupos de simetria simples, tal como o grupo de calibre  $U(1)$  [24]. Nesta perspectiva, iremos fazer uma breve revisão de um modelo de teoria de campo escalar com quebra de simetria global contínua e outro com simetria local de calibre do grupo  $U(1)$ .

Considere a seguinte densidade de Lagrangiana clássica:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) , \quad (1.13)$$

onde  $\phi$  é um campo escalar complexo e o potencial  $V(\phi)$  tem a seguinte forma funcional:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} \left( |\phi|^2 - \frac{1}{2}\eta^2 \right)^2 , \quad (1.14)$$

sendo  $\lambda$  e  $\eta$  constantes positivas (esta última relacionada a escala de energia onde a simetria é espontaneamente quebrada) e  $|\phi|^2 = \phi^* \phi$ . Este é o potencial “chapéu mexicano” e está representado graficamente na Fig. 1.1. Note que o mínimo deste potencial,  $V = 0$ , se encontra no círculo de raio  $|\phi| = \eta/\sqrt{2}$ , algumas vezes chamado de vácuo verdadeiro da teoria. Por outro lado, este potencial também possui um máximo local em  $|\phi| = 0$ , por vezes chamado de falso vácuo da teoria.

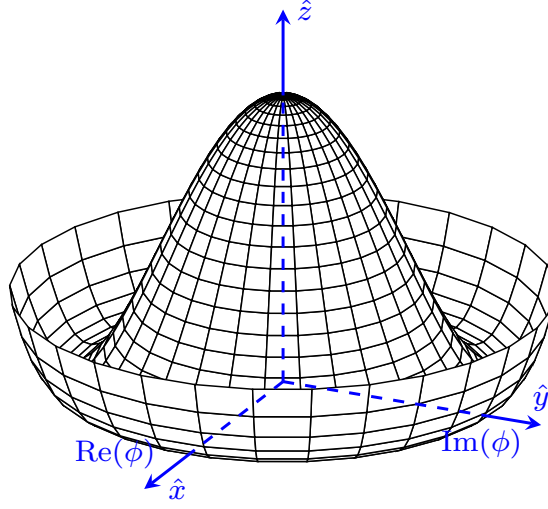


Figura 1.1: Potencial “chapéu mexicano”.

Podemos ver que esta densidade de Lagrangiana é invariante sob a seguinte transformação de fase:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x) , \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.15)$$

onde  $\alpha$  é uma constante arbitrária. Esta é uma transformação global contínua do grupo  $U(1)$ , e representa rotações no plano complexo  $(\phi^*, \phi)$ . Observe que o potencial “chapéu mexicano” ilustrado na Fig. 1.1 é o mesmo em todas as direções no plano  $x$ - $y$ .

A equação de movimento associada à densidade de Lagrangiana (1.13) é dada por

$$\left[ \square + \lambda \left( |\phi|^2 - \frac{1}{2} \eta^2 \right) \right] \phi = 0 , \quad (1.16)$$

onde  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$  é o d'Alembertiano. A solução com o menor nível de energia para esta equação é dada por

$$\phi_0(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2}} e^{i\theta} , \quad (1.17)$$

sendo  $\theta$  uma constante arbitrária. Note que esta é uma solução estável e representa um vácuo infinitamente degenerado com a forma de um círculo de raio  $\frac{\eta}{\sqrt{2}}$  (veja Fig. 1.1). Assim, o campo  $\phi$  adquire valor esperado de vácuo não nulo,

$$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = \phi_0(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2}} e^{i\theta} . \quad (1.18)$$

Podemos notar que o estado de vácuo da teoria não é mais invariante sob a transformação global (1.15). Sob tal transformação, a fase em (1.18) adquire um valor  $\alpha + \theta$  e, portanto, implica na quebra espontânea da simetria global no estado de vácuo da teoria.

Vamos agora avaliar as consequências desta quebra espontânea de simetria no modelo considerado, tomando  $\theta = 0$  (direção real de  $\phi$ ), dado que o estado de vácuo é degenerado e, portanto, independente da escolha de  $\theta$ . Assim, podemos fazer uma perturbação no campo  $\phi$  em torno desta escolha de vácuo:

$$\phi_0 = \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) , \quad (1.19)$$

onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são campos escalares reais, possuindo valores esperados de vácuo nulos,  $\langle 0|\phi_1|0\rangle = \langle 0|\phi_2|0\rangle = 0$ . Substituindo esta representação na densidade de Lagrangiana em (1.13), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) - \frac{1}{2}\lambda\eta^2\phi_1^2 - \frac{\lambda\eta}{2}\phi_1(\phi_1^2 + \phi_2^2) \\ & - \frac{\lambda}{8}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 . \end{aligned} \quad (1.20)$$

Isolando a parte livre desta Lagrangiana, obtemos

$$\mathcal{L}_{livre} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) - \frac{1}{2}\lambda\eta^2\phi_1^2 . \quad (1.21)$$

Logo, concluímos que  $\phi_1$  representa um campo escalar de massa  $m_s = \sqrt{\lambda}\eta$ , enquanto  $\phi_2$  também representa um campo escalar, porém sem massa, chamado de *bóson de Goldstone*. Em geral, nota-se que uma consequência de quebras espontâneas de simetria é o surgimento de bósons de Goldstone. Formalmente, isto é sintetizado pelo teorema de Goldstone:

**Teorema de Goldstone:** Para cada simetria contínua quebrada no estado de vácuo de um dado sistema físico, existe uma partícula sem massa, chamada bóson de Goldstone.

Vamos agora analisar o caso em que  $\alpha$  em (1.15) é uma função das coordenadas do espaço-tempo:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\phi(x) . \quad (1.22)$$

No contexto das teorias abelianas de calibre, o modelo mais simples contemplando este tipo de transformação é o chamado modelo abeliano de Higgs. Este modelo descreve uma eletrodinâmica escalar através da seguinte densidade de Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}_\mu \phi)^* (\mathcal{D}^\mu \phi) - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} , \quad (1.23)$$

onde  $\phi$  é o campo escalar complexo carregado e  $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  é a derivada covariante no sentido eletromagnético. Além disso, o tensor antissimétrico  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor intensidade de campo, com  $A_\mu$  sendo o campo vetorial de calibre,  $e$  a unidade de carga elétrica e  $V(\phi)$  o potencial dado pela Eq. (1.14). Note também que além da transformação de calibre local (1.22) para o campo  $\phi$ , a densidade de Lagrangiana (1.23) também deve ser invariante sob a seguinte transformação de calibre para o campo vetorial  $A_\mu$ :

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - e^{-1} \partial_\mu \alpha(x) . \quad (1.24)$$

Da densidade de Lagrangiana (1.23), as equações de movimento associadas aos campos  $\phi$  e  $A_\mu$  são dadas por:

$$\left[ \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu + \lambda \left( |\phi|^2 - \frac{1}{2} \eta^2 \right) \right] \phi = 0 , \quad (1.25)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu = ie[\phi^* \mathcal{D}^\nu \phi - \phi (\mathcal{D}^\nu \phi)^*] . \quad (1.26)$$

Visto que o potencial  $V(\phi)$  para este modelo continua sendo aquele escrito em (1.14), a simetria desta teoria é espontaneamente quebrada para  $|\phi| = \eta/\sqrt{2}$  e  $A_\mu = 0$ , com  $\phi$  adquirindo valor esperado de vácuo não nulo. Este mínimo tem o formato de um círculo e também representa um vácuo infinitamente degenerado.

Para estudar as propriedades da quebra de simetria no vácuo do modelo abeliano de Higgs, a exemplo do que foi feito para o caso da simetria de calibre global, vamos considerar a seguinte perturbação em torno do estado de vácuo,

$$\phi_0 = \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} . \quad (1.27)$$

Substituindo esta representação na Lagrangiana (1.23), obtemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2\eta^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - \frac{1}{2}\lambda\eta^2\phi_1^2 + e\eta A_\mu\partial^\mu\phi_2 + \dots \quad (1.28)$$

Podemos concluir a partir desta densidade Lagrangiana, que o campo  $A_\mu$  adquire massa após a quebra espontânea de simetria através do termo  $A_\mu A^\mu$ . Além disso, observamos a presença de um campo escalar,  $\phi_1$ , com massa  $m_s = \sqrt{2\lambda}\eta$ , e um segundo campo escalar não massivo,  $\phi_2$ , que identificamos como o bóson de Goldstone.

Note, entretanto, que este resultado contém um detalhe menos evidente relacionado ao número de graus de liberdade da teoria. Inicialmente, antes da quebra espontânea de simetria, tínhamos um campo escalar complexo com dois graus de liberdade e um campo vetorial com dois graus de liberdade associados a dois modos independentes transversais, totalizando, deste modo, quatro graus de liberdade. Após a quebra espontânea de simetria, obtivemos dois campos escalares reais correspondendo a dois graus de liberdade e um campo vetorial massivo possuindo três graus de liberdade, totalizando cinco graus de liberdades. Todavia, este resultado contraditório é aparente, dado que o grau de liberdade devido ao bóson de Goldstone não é físico, e assim, pode ser eliminado através de uma redefinição simples do campo de calibre. Redefinindo o campo de calibre na forma

$$B_\mu = A_\mu + (e\eta)^{-1}\partial_\mu\phi_2, \quad (1.29)$$

podemos reescrever a densidade de Lagrangiana (1.28) como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2\eta^2 B_\mu B^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 - \frac{1}{2}\lambda\eta^2\phi_1^2 + \dots, \quad (1.30)$$

onde também fizemos a redefinição  $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Note que o campo vetorial  $B_\mu$  apresenta massa não nula,  $m_v = e\eta$ . Assim, finalizamos esta subseção mencionando que este é um exemplo do chamado mecanismo de Higgs, no qual um campo de calibre ganha massa após uma quebra espontânea de simetria.

### 1.2.2 Formação de defeitos topológicos

Como dito no início desta seção, a formação de defeitos topológicos é um evento inevitável, se transições de fase acompanhadas de quebras espontâneas de simetria ocorreram no Universo primordial. Entretanto, algumas condições devem ser satisfeitas para que a formação destes defeitos ocorra, sendo estes requisitos dependentes do modelo de teoria de campos que dá origem ao surgimento destes objetos. A seguir faremos uma breve revisão sobre algumas destas condições.

Uma condição necessária, embora não suficiente para a formação de defeitos topológicos é que a variedade de vácuo,  $\mathcal{M}$ , seja degenerada. Nos modelos de campos escalares considerados acima, a topologia do vácuo é  $S^1$  correspondendo ao círculo de raio  $\eta/\sqrt{2}$ , no qual o campo  $\phi$  está no estado de vácuo verdadeiro. Em geral, a topologia de  $\mathcal{M}$  determina se defeitos topológicos podem existir ou não [69]. Se a topologia da variedade de vácuo é não-trivial sob o grupo de homotopia<sup>3</sup>  $\pi_k(\mathcal{M})$ , então defeitos podem ser formados. A formação de cordas cósmicas, por exemplo, requer que o primeiro grupo de homotopia seja não-trivial,  $\pi_1(\mathcal{M}) \neq \mathbf{1}$  ( $\mathbf{1}$  é o grupo contendo somente a identidade). Em outras palavras, uma corda cósmica poderá existir se, e somente se, um dado caminho fechado não pode ser continuamente deformado em  $\mathcal{M}$  a um ponto, ou seja, que a variedade de vácuo seja não simplesmente conexa. Paredes de domínio podem existir se  $\mathcal{M}$  é não conectada, isto é,  $\pi_0(\mathcal{M}) \neq \mathbf{1}$ , enquanto a existência de monopolos é condicionada ao segundo grupo de homotopia ser não-trivial,  $\pi_2(\mathcal{M}) \neq \mathbf{1}$ .

Assim, defeitos topológicos com diferentes dimensionalidades podem ser classificados em termos dos grupos de homotopia não-triviais de uma dada variedade de vácuo degenerado,  $\mathcal{M}$ . De acordo com este critério de classificação, a tabela abaixo pode ser construída:

Tabela 1.1: Classificação de defeitos topológicos por dimensão e grupo de homotopia da variedade de vácuo  $\mathcal{M}$ .

| Defeito topológico | Dimensão | Classificação        |
|--------------------|----------|----------------------|
| Paredes de domínio | 2        | $\pi_0(\mathcal{M})$ |
| Cordas cósmicas    | 1        | $\pi_1(\mathcal{M})$ |
| Monopolos          | 0        | $\pi_2(\mathcal{M})$ |

<sup>3</sup>Um grupo de homotopia é aquele que reúne mapas de uma  $k$ -esfera na variedade de vácuo  $\mathcal{M}$ , sendo dois mapas homotopicamente equivalentes se eles podem ser deformados suavemente um no outro [70].

Em regimes de altas temperaturas, como aquelas do Universo primordial, o campo  $\phi$  pode ter grandes amplitudes de flutuação em torno de  $\langle\phi\rangle = 0$ . À medida que a temperatura do sistema decai atingindo uma temperatura crítica de transição de fase,  $T_c$ , o potencial  $V(\phi)$  vai para o máximo local,  $|\phi| = 0$  (veja Fig. 1.1). Abaixo desta temperatura crítica, o campo  $\phi$  é forçado a escolher um estado de vácuo correspondente a um ponto na variedade de vácuo  $\mathcal{M}$ , adquirindo assim um valor esperado de vácuo não nulo. Estas escolhas pelo campo  $\phi$  podem ocorrer de forma aleatória e independente, desde que regiões do espaço físico com diferentes escolhas de vácuo estejam suficientemente separadas.<sup>4</sup> Assim, a topologia da configuração de campo em escalas do espaço físico maiores que o horizonte causal pode coincidir com defeitos topológicos, tais como paredes de domínio, cordas cósmicas e monopolos [69]. Este processo é conhecido como mecanismo de Kibble, sendo este um requisito necessário para a formação de defeitos topológicos.

### 1.2.3 Cordas cósmicas locais

Vamos assumir que a condição topológica para existência de cordas cósmicas é satisfeita, isto é,  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ , onde  $\mathbb{Z}$  é o conjunto dos números inteiros. Além disso, que o mecanismo de Kibble também ocorre, fornecendo assim as condições necessárias para a existência de defeitos topológicos do tipo corda. Logo, se ao redor de um caminho fechado de comprimento  $L$ , a fase  $\theta$  varia por  $2\pi$ , então em algum lugar dentro da região delimitada por este caminho fechado o campo  $\phi$  deve ser zero e, portanto, a energia presa nesta região de falso vácuo é identificada como um defeito topológico do tipo corda passando pela região delimitada pelo caminho fechado (veja Fig. 1.2).

Para o modelo com quebra de simetria global considerado na subseção 1.2.1, estes defeitos são chamados de vórtices ou cordas globais, possuindo análogos na matéria condensada e na cosmologia de partículas, tais como vórtices em superfluidos  $^4\text{He}$  [71, 72] e cordas axiais [73, 74], respectivamente. Infelizmente, estes defeitos são instáveis e possuem densidade linear de energia infinita [24]. Por outro lado, no modelo abeliano de Higgs podemos ter configurações estáticas de campo obedecendo às equações de movimento (1.25) e (1.26). Estas soluções correspondem à linhas de vórtices estáveis com densidade linear de energia finita, sendo uma generalização relativística das linhas de vórtice ou tubos de

<sup>4</sup>Esta separação deve ser maior do que o horizonte causal, de forma que as diferentes escolhas de vácuo não estejam correlacionadas [69].

fluxo que surgem em supercondutores [75]. Vamos fazer uma breve revisão destas soluções, que foram investigadas pela primeira vez por Nielsen e Olesen [76].

Considere um sistema com simetria cilíndrica e linhas de vórtice estáticas na direção do eixo  $z$ , de modo que as soluções à serem obtidas sejam independentes desta direção espacial. Com a escolha de calibre  $A_\rho = 0$ , temos o seguinte Ansatz:

$$\phi = \frac{\eta}{\sqrt{2}} f(m_s \rho) e^{in\varphi}, \quad \vec{A} = \frac{n}{e\rho} a(m_v \rho) \hat{\varphi}, \quad (1.31)$$

onde  $\{\rho, \varphi, z\}$  são coordenadas cilíndricas e  $n$  é um número inteiro, chamado de número de circulação, ou vorticidade [69]. Levando este Ansatz nas equações de movimento (1.25)

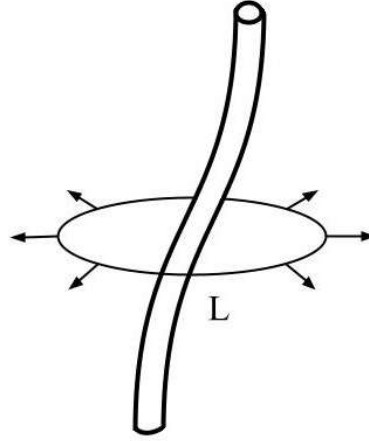


Figura 1.2: Corda cósmica passando pela região transversal delimitada pelo caminho fechado  $L$ . O campo  $\phi$  desaparece no núcleo da corda, enquanto as setas indicam diferentes valores de  $\theta$ .

e (1.26), obtemos um sistema de equações diferenciais acopladas não-lineares e, portanto, inexistem soluções exatas das mesmas em termos de funções conhecidas. Entretanto, é possível analisar o comportamento assintótico destas soluções para pequenas e grandes distâncias do vórtice.

Vamos definir a variável adimensional  $\xi = m_v \rho$ . Para pequenos valores de  $\xi$ , a função  $f$  deve tender suavemente a zero, de modo que o campo  $\phi$  seja regular na origem ao atingir o estado de falso vácuo,  $|\phi| = 0$ . Por outro lado, para grandes valores de  $\xi$ , o campo  $\phi$  deve tender rapidamente ao seu estado de vácuo verdadeiro,  $|\phi| = \eta/\sqrt{2}$ , de

modo que  $f \rightarrow 1$ . Estas condições nos fornecem as seguintes formas assintóticas [24]:

$$f \simeq \begin{cases} f_0 \xi^{|n|} & \text{para } \xi \rightarrow 0 , \\ 1 - f_1 \xi^{-1/2} \exp(-\sqrt{\beta} \xi) & \text{para } \xi \rightarrow \infty , \end{cases} \quad (1.32)$$

onde  $\beta = (m_s/m_v)^2 = e^2/\lambda$ , lembrando que  $m_s = \sqrt{2\lambda}\eta$  e  $m_v = e\eta$  são as massas do campo de Higgs e do campo vetorial, respectivamente.

Similarmente, a função  $a(\xi)$  deve ir suavemente a zero, de modo a garantir a regularidade do potencial vetor na origem. Por outro lado, para que a energia por unidade de comprimento seja finita, devemos impor que  $a \rightarrow 1$  para grandes distâncias a partir do núcleo do vórtice. Logo, a imposição destas condições de contorno assintóticas nos conduz ao seguinte resultado:

$$a \simeq \begin{cases} a_0 \xi^2 - \frac{|n|f_0^2}{4(|n|+1)} \xi^{2|n|+2} & \text{para } \xi \rightarrow 0 , \\ 1 - a_1 \xi^{1/2} \exp(-\xi) & \text{para } \xi \rightarrow \infty . \end{cases} \quad (1.33)$$

Para cordas locais, a energia por unidade de comprimento é igual a tensão da corda,  $\mu$ , e é calculada por

$$\mu = \int d\rho d\varphi \rho \mathcal{E}(\rho) \quad (1.34)$$

onde  $\mathcal{E}(\rho)$  é a densidade de energia associada a Lagrangiana (1.23). É possível mostrar que neste caso a densidade linear de energia tem a seguinte forma [24]:

$$\mu = \pi \eta^2 \epsilon(\beta) , \quad (1.35)$$

onde  $\epsilon(\beta)$  tem crescimento monotonicamente lento e, em particular, para  $\beta = 1$ , mostra-se analiticamente que  $\epsilon(1) = 1$  [77]. Neste caso, temos que  $\mu = \pi \eta^2$  e, portanto, podemos ver que cordas locais possuem densidade linear de energia finita.

Observe que cordas locais também apresentam fluxo de campo magnético:

$$\Phi = \oint_{\mathcal{C}} dx^\mu A_\mu = \int_0^{2\pi} d\varphi \rho A_\varphi = \frac{2\pi n}{e} , \quad (1.36)$$

onde esta integral é avaliada ao longo do contorno  $\mathcal{C}$  englobando o vórtice localizado no plano polar. Note que este fluxo é quantizado com uma quantidade mínima  $2\pi/e$ ,

chamada de *quantum de fluxo*. Além disso, note também que na obtenção deste resultado foi assumido que a corrente  $j_\mu$  é igual a zero ao longo do contorno  $\mathcal{C}$ , o que implica na determinação do potencial vetor em termos das derivadas de  $\phi$ .

Para finalizar esta subseção, note que do ponto de vista topológico, soluções de cordas locais com  $n = 1$  são estáveis. Entretanto, para  $n > 1$  talvez seja energeticamente favorável para esta corda ser decomposta em outras cordas com vorticidade igual a 1 [24]. A estabilidade destes defeitos, de fato, está associada ao parâmetro  $\beta$  definido acima. Se  $\beta < 1$ , então cordas estáveis são possíveis apenas para  $n = \pm 1$ . Por outro lado, se  $\beta > 1$ , cordas são estáveis para qualquer valor de  $n$ .

### 1.2.4 Gravitação de cordas cósmicas

Cordas cósmicas locais são objetos interessantes do ponto de vista cosmológico devido à sua densidade linear de energia finita. Essa característica indica que uma corda cósmica local pode apresentar efeitos gravitacionais importantes. Em 1981, Alexander Vilenkin obteve uma solução na aproximação de campo fraco para uma corda cósmica infinitamente longa, retilínea e sem estrutura interna [78]. Quatro anos mais tarde, a forma exata desta métrica foi obtida para uma corda cósmica possuindo estrutura interna [79–82]. Vale ressaltar que o resultado obtido por Vilenkin é uma boa aproximação da métrica exata para uma corda sem estrutura interna. Assim, a fim de entender o campo gravitacional produzido por uma corda cósmica na região exterior, vamos brevemente revisar a aproximação obtida por Vilenkin.

Em sua investigação, Vilenkin adotou duas simplificações importantes: *i*) as dimensões da seção transversal da corda são muito menores que as demais dimensões relevantes, de modo que a corda pode ser considerada como um objeto unidimensional com uma distribuição de matéria na forma de uma função delta, cuja densidade de energia é igual a pressão negativa ao longo da corda; *ii*) o campo gravitacional produzido pela corda é suficientemente fraco, tal que as equações de campo de Einstein podem ser linearizadas, desde que  $\eta \ll M_{Pl}$ . Estas simplificações permitem a caracterização das propriedades da corda em termos de um único parâmetro, identificado como sua tensão.

Levando em consideração estas simplificações, Vilenkin mostrou que o tensor energia-momento associado a uma corda cósmica estática, sem estrutura interna, infinitamente

longa e retilínea ao longo do eixo  $z$ , tem a seguinte forma [78]:

$$T^\alpha_\beta = \mu \delta(x) \delta(y) \text{diag}(1, 0, 0, 1) , \quad (1.37)$$

onde  $\mu$  é densidade linear de energia da corda. Além disso, a métrica no regime de campo fraco pode ser decomposta na forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \text{com} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 , \quad (1.38)$$

onde o campo  $h_{\mu\nu}$  pode ser entendido como uma perturbação na métrica do espaço-tempo de Minkowski representada pelo tensor métrico  $\eta_{\mu\nu}$ . No calibre harmônico ( $\partial_\mu h^\mu_\nu = \frac{1}{2} \partial_\nu h^\sigma_\sigma$ ), as equações de campo de Einstein assumem a forma [83],

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^\sigma_\sigma) , \quad (1.39)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento. Substituindo (1.37) no lado direito da equação de movimento acima, e levando-se em consideração a simetria cilíndrica exibida pela configuração da corda, o seguinte elemento de linha é obtido [78]:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - (1 - 8G\mu)r^2 d\theta^2 - dz^2 , \quad (1.40)$$

onde  $G\mu$  é uma quantidade adimensional e está associada à escala de energia em que a corda cósmica foi formada (para cordas formadas na transição de fase GUT, este produto é da ordem de  $G\mu \sim 10^{-6}$ , com a enorme densidade linear de massa  $\mu \sim 10^{22}$  g/cm [23]). Redefinindo a coordenada azimutal,

$$\theta' = (1 - 4G\mu)\theta , \quad (1.41)$$

o elemento de linha acima pode ser reescrito como

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta'^2 - dz^2 , \quad (1.42)$$

onde  $0 \leq \theta' \leq 2\pi(1 - 4G\mu)$ . Deste elemento de linha podemos extrair duas conclusões importantes. A primeira é que este elemento de linha é localmente plano, indicando que,

por exemplo, a corda cósmica não exerce força gravitacional sobre uma partícula teste em suas vizinhanças. A segunda é que este espaço-tempo é globalmente não-trivial devido à redefinição do intervalo em que a coordenada angular varia, resultando em um déficit angular na região transversal perpendicular a corda,  $\delta = 8\pi G\mu$ . Uma forma alternativa de ver esta situação, é pensar que uma “fatia” correspondente ao déficit angular,  $\delta = 8\pi G\mu$ , é retirada de um plano transversal perpendicular à corda cósmica, e as bordas internas da superfície remanescente são “coladas”, resultando assim em um objeto com forma cônica, conforme ilustrado na Fig. 1.3. Nesta perspectiva, dizemos que a geometria gerada pela corda cósmica é globalmente cônica.

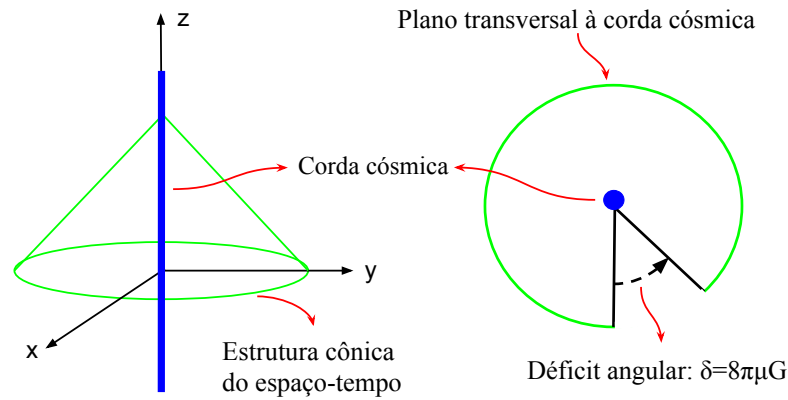


Figura 1.3: Corda cósmica afetando o espaço-tempo ao seu redor, por “remover” uma pequena “fatia” de um plano transversal correspondendo a um déficit angular,  $\delta = 8\pi G\mu$ , tendo como resultado uma geometria cônica.

### 1.3 Dimensões extras

A ideia de que vivemos em um universo com mais de 3 dimensões espaciais é um paradigma comum em esquemas teóricos que buscam unificar de forma consistente as interações fundamentais observadas na natureza. Um forte indício teórico que esta ideia esteja correta, é que teorias que incorporam a interação gravitacional com as demais interações em escalas de alta energia, a exemplo da teoria das cordas e de supergravidade, são melhor formuladas em um espaço-tempo com número de dimensões superior as 4 observadas em escalas de baixa energia. Nesta seção, iremos revisar brevemente as duas principais propostas teóricas que sugerem a existência de dimensões extras: teorias tipo

Kaluza-Klein e mundo brana.

### 1.3.1 Dimensões extras do tipo Kaluza-Klein

A primeira tentativa de unificar as interações gravitacionais e eletromagnéticas foi feita por Theodor Kaluza e Oskar Klein na década de 1920 [84, 85]. Este formalismo é construído a partir do pressuposto da existência de uma dimensão extra. Além disso, é imposto que os campos descrevendo a gravitação e o eletromagnetismo em 4 dimensões são independentes da dimensão adicional. Esta restrição é conhecida como condição de cilindro, e é fisicamente justificável se a dimensão extra é compactificada em um círculo de raio  $r_c$ , sendo este raio suficientemente pequeno de modo que a física em baixas energias seja efetivamente quadridimensional. Assim, esta teoria tem topologia  $R^4 \times S^1$  e é uma extensão mínima da Relatividade Geral para 5 dimensões (a estrutura matemática da teoria é preservada).

Neste contexto, o espaço em 5 dimensões é vazio, contendo apenas a interação gravitacional (isto é, o espaço-tempo em si), enquanto o eletromagnetismo e a gravidade em 4 dimensões são manifestações da geometria do espaço de dimensão superior. A obtenção destas interações em 4 dimensões é realizada através da redução dimensional, procedimento que iremos brevemente revisar a seguir.

A teoria de Kaluza-Klein é descrita pela ação de Einstein-Hilbert em 5 dimensões [86]

$$S = -\frac{1}{16\pi G_5} \int dx^4 dy^{(5)} R \sqrt{-g^{(5)}} , \quad (1.43)$$

onde  $G_5$  e  $^{(5)}R$  são a constante fundamental de Newton e o escalar de Ricci em 5D, respectivamente. Note que a variação desta ação com respeito ao tensor métrico no espaço-tempo de dimensão superior nos fornece a equação de campo:

$$^{(5)}R_{AB} - \frac{^{(5)}R}{2} g_{AB} = 0 , \quad (1.44)$$

onde  $A, B = 0, 1, 2, 3, 4$ .

O tensor métrico de Kaluza-Klein é dado por

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa^2 \phi^2 A_\mu A_\nu & \kappa \phi^2 A_\mu \\ \kappa \phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

onde  $\kappa$  é uma constante. Note que dentre as 15 componentes independentes deste tensor métrico, 10 são identificadas como a métrica no espaço quadridimensional  $g_{\mu\nu}$ , 4 correspondem ao potencial vetor eletromagnético  $A_\mu$ , e uma corresponde a um campo escalar  $\phi$  chamado “radion”.

O elemento de linha associado ao tensor métrico (1.45) é

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \phi^2 (\kappa A_\mu dx^\mu + dy)^2, \quad (1.46)$$

onde  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ . Note que este elemento de linha é invariante sob translações na direção da dimensão extra:

$$y \rightarrow y' = y + \kappa \xi(x). \quad (1.47)$$

É fácil ver que esta invariância sob translação implica na transformação de calibre,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \kappa \partial_\mu \xi(x). \quad (1.48)$$

Logo, a invariância de calibre surge da invariância translacional ao longo da coordenada extra  $y$ , reforçando a ideia de que  $A_\mu$  é o potencial vetor.

Substituindo o tensor métrico (1.45) no escalar de Ricci  ${}^{(5)}R$  presente em (1.43), e integrando sobre a coordenada da dimensão extra, obtemos uma ação efetiva quadridimensional na forma

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \phi \left[ \frac{R}{16\pi G} + \frac{\phi^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{2}{3\kappa^2 \phi^2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) \right], \quad (1.49)$$

onde foi assumido que  $\kappa^2 = 16\pi G$ , sendo  $G$  a constante de Newton usual em 4D definida neste contexto em termos de  $G_5$  através da relação  $G = G_5 / \int dy$ . Além disso, na equação acima,  $R$  é o escalar de Ricci em 4D e  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor campo eletromagnético.

No caso particular em que  $\phi = 1$ , a ação (1.49) é desacoplada e apresenta somente

os termos devido ao eletromagnetismo e a gravidade:

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{16\pi G} + \frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4} \right) . \quad (1.50)$$

Logo, desta ação concluímos que a gravitação de Einstein e o eletromagnetismo de Maxwell no espaço-tempo quadridimensional são unificados em 5 dimensões.

Vamos agora considerar como o campo eletromagnético se acopla com a matéria em 5D. Para isso, consideremos o caso simples de um campo escalar complexo  $\varphi(x^\mu, y)$ , cuja dinâmica é formulada através da ação

$$S_\varphi = - \int dx^4 dy \sqrt{g^{(5)}} (\partial_A \varphi)^* (\partial^A \varphi) . \quad (1.51)$$

Devido à topologia  $S^1$  da dimensão extra, temos a identificação  $\varphi(x^\mu, y + 2\pi r_c) = \varphi(x^\mu, y)$ . Esta condição de contorno periódica juntamente com a condição de cilindro nos permite decompor o campo  $\varphi$  como

$$\varphi(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(x^\mu) e^{iny/r_c} , \quad (1.52)$$

onde  $\varphi_n$  são os modos de Kaluza-Klein. Sabemos que uma translação na direção  $y$  tem como consequência uma transformação de calibre. Explorando este fato, podemos escrever cada um dos modos de Kaluza-Klein tal que

$$\varphi_n \rightarrow \varphi'_n = \varphi_n e^{in\kappa\xi(x)/r_c} , \quad (1.53)$$

de modo que a expansão em (1.52) é reescrita como

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) e^{in(y+\kappa\xi(x))/r_c} . \quad (1.54)$$

Levando esta expansão em (1.51), obtemos

$$S_\varphi = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int dx^4 dy \sqrt{-g} \left[ (\mathcal{D}_\mu \varphi_n)(\mathcal{D}^\mu \varphi_n) - \frac{n^2 \varphi_n^2}{r_c^2} \right] , \quad (1.55)$$

onde  $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{in\kappa}{r_c} A_\mu$  é a derivada covariante no sentido eletromagnético e representa o

acoplamento mínimo do campo  $\varphi$  com o potencial vetor  $A_\mu$ . Comparando esta derivada com o caso usual,  $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ , isso nos permite concluir que o  $n$ -ésimo modo de Kaluza-Klein possui carga

$$q_n = \frac{n\kappa}{r_c} . \quad (1.56)$$

Além disso, note que a massa associada ao  $n$ -ésimo modo de Kaluza-Klein é dada por  $m_n = |n|/r_c$ , como pode ser visto a partir da ação (1.55).

Assumindo que o valor mínimo de carga do campo  $\varphi$  é a carga elementar  $e$ , temos que

$$e = \frac{\kappa}{r_c} = \frac{\sqrt{16\pi G}}{r_c} = \sqrt{4\pi\alpha} \Rightarrow r_c \sim 10^{-33} \text{ m} . \quad (1.57)$$

Portanto, podemos ver que esta escala de comprimento é comparável a de Planck,  $l_{Pl} \sim 10^{-35} \text{ m}$ , de modo que a detecção da dimensão extra se torna quase impossível.

Todavia, ao longo do tempo diversos modelos alternativos foram propostos, incluindo aqueles com dimensões extras grandes compactas e não-compactas, onde nosso mundo quadridimensional está confinado em uma brana. Nas próximas subseções iremos revisar brevemente alguns destes modelos.

### 1.3.2 Modelo ADD

Em 1998, Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali sugeriram a existência de dimensões extras grandes (tipicamente planas) na tentativa de resolver o problema da hierarquia<sup>5</sup> na física de partículas através do modelo de mundo brana ADD [87]. Na teoria ADD, o espaço-tempo é concebido em  $R^4 \times M_d$  para  $d \geq 2$ , onde  $M_d$  é uma variedade compacta  $d$ -dimensional de volume  $L^d$ , sendo  $L$  o comprimento das  $d$ -dimensões extras compactas. A premissa fundamental neste modelo é a de que a escala da interação eletrofraca,  $M_{EF}(\sim 1 \text{ TeV})$ , é a menor escala de comprimento na natureza, fato que solucionaria o problema da hierarquia. Isso é realizado no modelo partindo-se da suposição de que  $M_{Pl(4+d)} \sim M_{EF}$ , onde  $M_{Pl(4+d)}$  é a massa de Planck fundamental no espaço  $(4+d)$ -dimensional e está relacionada com a massa de Planck efetiva em 4 dimensões através da relação  $M_{Pl}^2 = M_{Pl(4+d)}^{d+2} L^d$ ; o volume gerado pelas  $d$  dimensões extras reduz a escala

---

<sup>5</sup>Este problema está relacionado a grande discrepância entre a escala eletrofraca e a escala gravitacional.

fundamental de Planck. É sabido que, entretanto, o Modelo Padrão de partículas foi testado na escala eletrofraca, indicando que as partículas do Modelo Padrão não podem se propagar livremente nas  $d$  dimensões extras, mas devem estar localizadas numa subvariedade quadridimensional, chamada de brana, vivendo nas  $d$  dimensões extras. A gravidade, no entanto, fica livre para propagar-se no volume da variedade  $(4 + d)$ -dimensional. Todavia, embora este modelo resolva o problema da hierarquia entre as escalas eletrofraca e gravitacional, o mesmo também introduz uma nova hierarquia entre a escala de compactificação,  $1/L$ , e a escala eletrofraca  $M_{EF}$ , fato que inspirou a proposição do modelo Randall-Sundrum I (RSI).

### 1.3.3 Modelo RSI

Em 1999, Randall e Sundrum propuseram um novo esquema teórico de mundo brana inspirado no modelo ADD, com a intenção em comum de resolver o problema da hierarquia [88]. Neste modelo é assumido a existência de uma dimensão extra  $y$  perpendicular à duas branas localizadas em suas extremidades:  $y = 0$  e  $y = L$ . Além disso, esta dimensão adicional é compactificada em um orbifold  $S^1/Z_2$ ; isto é, a dimensão extra é compactificada em um círculo, cujas extremidades são identificadas com a simetria  $Z_2$ ,  $(x^\mu, -L) \Leftrightarrow (x^\mu, L)$ , onde  $x^\mu$  corresponde às coordenadas no espaço-tempo quadridimensional. Assim, com a compactificação da dimensão extra em um orbifold, garantimos que as regiões do espaço em cada um dos lados da brana sejam indistinguíveis. A brana localizada em  $y = 0$  é chamada de brana “invisível” (ou brana Planck), e a outra fixada em  $y = L$  é chamada de brana “visível” (ou brana TeV). Nesta configuração, o Modelo Padrão de partículas está confinado na brana visível e a brana invisível tem escala de energia fundamental  $M_5$ .

Uma característica importante do modelo RSI é considerar os efeitos gravitacionais produzidos pelas branas no espaço de dimensão superior. Neste caso, os campos gravitacionais gerados por estes objetos têm como fonte suas densidades de energia.<sup>6</sup> No caso particular em que as espessuras das branas podem ser desprezadas, suas propriedades são caracterizadas por suas tensões [89]. Seja  $\lambda_{vis}$  a tensão na brana visível e  $\lambda_{inv}$  a tensão na brana invisível, a dinâmica gravitacional descrevendo este sistema no volume total da

---

<sup>6</sup>No trabalho original, esta densidade de energia é chamada de “energia do vácuo” [88].

variedade é dada pela equação de Einstein em 5 dimensões:

$$\begin{aligned} {}^{(5)}R_{AB} - \frac{{}^{(5)}R}{2}g_{AB} &= -\frac{1}{4M_5^3} \left[ \Lambda_5 g_{AB} + \frac{\lambda_{vis}}{\sqrt{-g_{yy}}} g_{\mu\nu}^{vis} \delta_A^\mu \delta_B^\nu \delta(y-L) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_{inv}}{\sqrt{-g_{yy}}} g_{\mu\nu}^{inv} \delta_A^\mu \delta_B^\nu \delta(y) \right], \end{aligned} \quad (1.58)$$

onde os índices gregos  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  variam na direção paralela à brana e os índices latinos  $A, B = 0, \dots, 4$  variam sobre todas as coordenadas no espaço de dimensão superior. Além disso,  $\Lambda_5$  é a constante cosmológica em 5 dimensões.

Admitindo-se a existência de um Ansatz invariante sob transformações de Poincaré nas coordenadas quadridimensionais  $x^\mu$ , a solução da equação acima é dada pela métrica

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (1.59)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é o tensor métrico no espaço-tempo de Minkowski em 4 dimensões (preservando a invariância de Poincaré) e o módulo  $|y|$  no argumento da função “deformadora”,  $e^{-2k|y|}$ , é uma consequência da simetria discreta  $Z_2$ . Note que esta métrica corresponde ao espaço  $\text{AdS}_5$  de raio de curvatura  $a = 1/k$  com uma constante cosmológica negativa em 5 dimensões,

$$\Lambda_5 = -24M_5^3 k^2. \quad (1.60)$$

Além disso, as duas branas possuem tensões iguais e de sinais opostos,

$$\lambda_{inv} = -\lambda_{vis} = 24M_5^3 k. \quad (1.61)$$

Note que estas duas relações refletem a suposição de que a métrica (1.59) deve ser invariante sob o grupo de Poincaré ao longo das coordenadas quadridimensionais paralelas às branas. Isto é, a geometria intrínseca das branas é Minkowskiana se houver um ajuste entre as tensões das branas e a constante cosmológica  $\Lambda_5$ , tal que as constantes cosmológicas efetivas nas branas sejam nulas.

Devido à geometria não-fatorizável<sup>7</sup> do modelo RSI, introduzida pela função deformadora, a escala de Planck efetiva na brana do modelo padrão de partículas é relacionada

<sup>7</sup>No presente contexto, a geometria é dita não-fatorizável por não permitir a fatorização da métrica na forma  $R^4 \times S^1$ .

com a escala fundamental de Planck através da expressão

$$M_{Pl}^2 = \frac{M_5^3}{k}(1 - e^{-2Lk}) , \quad (1.62)$$

onde podemos ver que a escala de Planck efetiva depende fracamente no produto  $Lk$ . Logo, a resolução do problema da hierarquia é determinada pela curvatura do espaço de dimensão superior, ou, em última análise, pela tensão da brana.

### 1.3.4 Modelo RSII

Como visto na última subseção, a geometria não-fatorizável do modelo RSI desempenha papel fundamental na resolução do problema da hierarquia, sem recorrer ao volume gerado pelas dimensões extras compactas. Por outro lado, se ignorarmos o problema da hierarquia e assumirmos a existência de uma dimensão extra não-compacta, é possível mostrar que a geometria não-fatorizável permite a localização da gravidade na brana de tensão positiva, recuperando assim a gravitação efetiva no espaço quadridimensional. Este é o caso do modelo Randall-Sundrum II (RSII) [90]. Neste modelo de mundo brana, temos duas modificações com respeito ao modelo RSI: *i*) o Modelo Padrão de partículas está confinado na brana Planck em  $y = 0$ ; *ii*) a brana TeV (localizada em  $y = L$  no modelo RSII) é deslocada para o infinito,  $L \rightarrow \infty$  (embora a simetria  $Z_2$  seja mantida com respeito a brana em  $y = 0$ ). Uma consequência desta última modificação é a existência de modos massivos de Kaluza-Klein contínuos que, por sua vez, devem fornecer uma pequena correção do potencial Newtoniano na brana.

Note que a métrica descrevendo a geometria neste novo cenário é a mesma dada pela Eq. (1.59). Entretanto, a tensão da brana contendo o Modelo Padrão agora é positiva e as escalas de energia agora são relacionadas pela expressão

$$M_{Pl}^2 = \frac{M_5^3}{k} , \quad (1.63)$$

diretamente obtida a partir de (1.62) tomando-se o limite  $L \rightarrow \infty$ .

Como mencionado acima, o foco do modelo RSII está na localização da gravidade na brana. Partindo-se da consideração que o modo zero do gráviton é garantido pela invariância de Poincaré na brana, e que o espaço de dimensão superior  $\text{AdS}_5$  permite a

existência de um “estado ligado” para o gráviton vivendo na dimensão superior, Randall e Sundrum mostraram que o potencial gravitacional entre duas partículas estáticas com massas  $m_1$  e  $m_2$ , separadas por uma distância  $|\vec{x}|$  na brana, é corrigido através da expressão

$$V(|\vec{x}|) \sim \frac{m_1 m_2}{|\vec{x}|} \left( 1 + \frac{1}{|\vec{x}|^2 k^2} \right), \quad (1.64)$$

onde o primeiro termo é o potencial Newtoniano usual devido ao modo zero do gráviton, e o segundo termo é a correção correspondente ao estado ligado dos modos massivos de Kaluza-Klein próximos à brana vivendo em 5 dimensões.

## Capítulo 2

# Teoria clássica de campos em espaços curvos

Neste capítulo iremos ver como o formalismo da teoria clássica de campos no espaço-tempo plano pode ser estendido para o espaço-tempo curvo. Em particular, trataremos do campo escalar complexo e do campo espinorial de Dirac. Iremos ver que, para estendermos os formalismos destes campos ao espaço-tempo curvo, devemos requerer que os mesmos sejam invariantes sob transformações gerais de coordenadas.

### 2.1 Campo escalar complexo na presença de um campo externo

Nesta seção iremos apresentar o formalismo para o campo escalar. Neste caso, iremos considerar um campo escalar complexo, massivo e carregado. Além disso, também consideraremos a interação deste campo com campos externos eletromagnéticos e gravitacionais.

### 2.1.1 Interação do campo escalar complexo com o campo eletromagnético

Como visto no capítulo anterior, o modelo abeliano de Higgs é um exemplo de uma teoria de campo escalar complexo com potencial  $V(\phi)$  interagindo com o campo eletromagnético. Naquele caso,  $A_\mu$  foi tratado como um campo dinâmico devido à presença do termo  $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  na densidade de Lagrangiana (1.23). Entretanto, daqui por diante nesta tese, iremos tratar  $A_\mu$  como um campo externo, de forma que o termo  $\mathcal{L}_M$  deve ser desconsiderado.

Considere a ação descrevendo um campo escalar complexo  $\varphi$ , em um espaço-tempo com  $d$  dimensões,

$$S = \int dx^d \mathcal{L}(x) , \quad (2.1)$$

onde a densidade de Lagrangiana no integrando é dada por

$$\mathcal{L}(x) = g^{ab}(\partial_a \varphi(x))^*(\partial_b \varphi(x)) - m^2 \varphi^*(x)\varphi(x) , \quad (2.2)$$

e os índices latinos  $a, b, \dots$ , denotam o uso de coordenadas Cartesianas no espaço-tempo de Minkowski.

A inclusão do campo eletromagnético externo  $A_a(x)$  à esta teoria é feita através da prescrição de acoplamento mínimo  $\partial_a \rightarrow \mathcal{D}_a = \partial_a + ieA_a$ , onde  $e$  é a carga elétrica do campo carregado  $\varphi$ . Logo, a densidade de Lagrangiana (2.2) é reescrita como

$$\mathcal{L}(x) = g^{ab}(\mathcal{D}_a \varphi(x))^*(\mathcal{D}_b \varphi(x)) - m^2 \varphi^*(x)\varphi(x) . \quad (2.3)$$

Tratando os campos  $\varphi$  e  $\varphi^*$  como independentes, e variando a ação correspondente à densidade de Lagrangiana (2.3) com respeito a  $\varphi^*$ , obtemos a equação de movimento para o campo  $\varphi$ ,

$$(\mathcal{D}_a \mathcal{D}^a + m^2)\varphi(x) = 0 , \quad (2.4)$$

reconhecida como a equação de Klein-Gordon.

Para a obtenção do tensor energia-momento simétrico  $T_{ab}$ , devemos supor que o espaço-tempo que acomoda esta teoria é inicialmente não plano, de forma que é possível

aplicar o princípio variacional à ação correspondente à densidade de Lagrangiana (2.3) com respeito a métrica  $g^{ab}$ . Ao final do cálculo, tomamos  $g^{ab} \rightarrow \eta^{ab}$ , onde  $\eta^{ab}$  é a métrica do espaço-tempo de Minkowski. Seguindo este procedimento, o tensor energia-tempo é o mesmo que aquele obtido através da Eq. (1.3). Logo, para a ação (2.1) com a densidade de Lagrangiana (2.3), temos

$$T_{ab} = (\mathcal{D}_a \varphi(x))^* (\mathcal{D}_b \varphi(x)) + (\mathcal{D}_b \varphi(x))^* (\mathcal{D}_a \varphi(x)) - g_{ab} \mathcal{L}(x) . \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Interação do campo escalar complexo com o campo gravitacional

A teoria da Relatividade Geral de Einstein é uma teoria métrica da gravidade. A gravitação neste contexto emerge como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, sendo a estrutura geométrica deste último determinada univocamente pela distribuição de matéria e energia contida nele. Assim, o campo gravitacional representado pelo tensor métrico pode ser dinâmico ou não. Nesta tese, entretanto, iremos considerar o espaço-tempo como um campo externo estático, nomeadamente o espaço AdS.

No capítulo anterior, mencionamos brevemente que um dos postulados fundamentais da Relatividade Geral é o princípio da covariância geral. Ao construir teorias de campos de matéria interagindo com a gravidade, devemos levar em conta que as equações de movimento dos campos de matéria devem obedecer ao princípio da covariância geral, assim como as equações de campo de Einstein. Isto é, as equações de movimento associadas aos campos de matéria devem ser invariantes sob uma transformação geral de coordenadas.

Para um campo escalar, a forma mais simples de incluir a interação gravitacional é seguir a prescrição de acoplamento mínimo: generaliza-se a definição de derivada usual para derivada covariante através da substituição  $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ <sup>1</sup> no formalismo da teoria. Assim, a equação de movimento descrevendo a dinâmica do campo escalar é independente da escolha do sistema de coordenadas, além de ser compatível com o princípio da equivalência.

---

<sup>1</sup>A derivada covariante,  $\nabla_\mu$ , de um vetor é definida por  $\nabla_\mu B_\nu = \partial_\mu B_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda B_\lambda$ , onde  $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$  são os símbolos de Christoffel, que incorporam a curvatura do espaço-tempo.

Seguindo a prescrição de acoplamento mínimo, a equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo,  $\varphi$ , na presença de um campo gravitacional, é dada por:

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2)\varphi(x) = 0 , \quad (2.6)$$

ou ainda expressa como

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu) + m^2 \right] \varphi(x) = 0 , \quad (2.7)$$

cuja forma é notoriamente invariante sob transformações de coordenadas.

Uma outra importante simetria da ação em espaços curvos é a invariância sob transformações conformes. Estas transformações dilatam e contraem uma dada variedade preservando ângulos entre vetores. Observe, entretanto, que a equação de Klein-Gordon acima não é invariante conforme, mesmo no caso não massivo,  $m = 0$ . Isto é, para um mapeamento conforme de um espaço com métrica  $g_{\mu\nu}$  em outro com métrica  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , dado pela relação [91]

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = e^{-2\lambda(x)} g_{\mu\nu}(x) , \quad (2.8)$$

onde  $\lambda(x)$  é uma função arbitrária e bem comportada das coordenadas do espaço-tempo, inexistente uma transformação  $\varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(x) = F[\lambda(x)]\varphi(x)$  que preserve a forma da equação de Klein-Gordon (2.6).

Uma outra forma de generalizar a equação de Klein-Gordon é incluir na ação o termo  $|g|^{1/2}\xi R\varphi^2$  [92], de modo que a densidade de Lagrangiana correspondente fica:

$$\mathcal{L}(x) = |g|^{1/2} [g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi(x))^* (\partial_\nu \varphi(x)) - (m^2 + \xi R) \varphi^*(x) \varphi(x)] , \quad (2.9)$$

onde  $R$  é o escalar de Ricci. Neste caso, a equação de movimento para o campo  $\varphi$  assume a forma

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2 + \xi R)\varphi(x) = 0 , \quad (2.10)$$

ou ainda

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu) + m^2 + \xi R \right] \varphi(x) = 0 . \quad (2.11)$$

No caso em que o campo  $\varphi$  é não massivo,  $m = 0$ , e  $\xi = \xi_c = (d-2)/[4(d-1)]$  (em

um espaço-tempo curvo  $d$ -dimensional), a ação associada à densidade de Lagrangiana (2.9) é invariante sob transformações conformes, se o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  transforma-se como (2.8) e o campo  $\varphi$  como [91]

$$\varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(x) = e^{\frac{d-2}{2}\lambda(x)}\varphi(x) . \quad (2.12)$$

De fato, sob uma transformação conforme, a equação de Klein-Gordon transforma-se como

$$(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\mu + \xi_c \tilde{R} + m^2 e^{2\lambda(x)})\tilde{\varphi} = 0 , \quad (2.13)$$

onde as derivadas covariantes e o escalar de curvatura são calculados na métrica  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , sendo  $\tilde{R}$  dado pela expressão [93]

$$\tilde{R} = e^{2\lambda} [R + 2(d-1)(\nabla_\mu \nabla^\mu \lambda) - (d-1)(d-2)(\nabla_\mu \lambda)(\nabla^\mu \lambda)] . \quad (2.14)$$

Logo, para  $\xi = \xi_c$  e  $m = 0$ , a equação de movimento (2.13) é, de fato, invariante sob transformações conformes, quando comparada com a equação de Klein-Gordon (2.10) calculada na métrica  $g_{\mu\nu}$ .

Levando a ação correspondente à densidade de Lagrangiana (2.9) na fórmula (1.3), obtemos o seguinte tensor energia-momento

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= (\nabla_\mu \varphi)(\nabla_\nu \varphi)^* + (\nabla_\mu \varphi)^*(\nabla_\nu \varphi) - g_{\mu\nu} [g^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha \varphi)(\nabla_\beta \varphi)^* - (m^2 + \xi R)\varphi^* \varphi] \\ &- 2\xi(R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\nabla_\sigma \nabla^\sigma + \nabla_\mu \nabla_\nu)\varphi^* \varphi . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Realizando algumas manipulações na equação acima, incluindo o uso da equação de movimento associada ao campo  $\varphi$  (2.10), obtemos<sup>2</sup> [94]

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= (\partial_\mu \varphi)(\partial_\nu \varphi)^* + (\partial_\mu \varphi)^*(\partial_\nu \varphi) - 2[\xi R_{\mu\nu} \\ &+ \xi \nabla_\mu \nabla_\nu - (\xi - 1/4)g_{\mu\nu}\nabla_\sigma \nabla^\sigma]\varphi^* \varphi . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Este tensor energia-momento também apresenta duas propriedades importantes. A

---

<sup>2</sup>Esta fórmula é válida apenas na camada de massa. Como será visto, em nossos cálculos do VEV do tensor energia-momento bosônico adotamos o método da soma sobre os modos, justificando assim o uso da Eq. (2.16).

primeira propriedade é que o tensor energia-momento obedece à equação de conservação covariante:

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0 . \quad (2.17)$$

Tomando o traço do tensor energia-momento em (2.16), obtemos

$$T^\mu_\mu = 2[(d-1)(\xi - \xi_c)\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2]\varphi^* \varphi . \quad (2.18)$$

Note que no caso particular de um campo escalar sem massa e acoplado conformalmente ( $\xi = \xi_c$ ), este tensor energia-momento possui traço nulo.

### 2.1.3 Interação do campo escalar complexo com os campos eletromagnético e gravitacional

Como visto nas últimas subseções, ao construir uma teoria de campo escalar interagindo com campos externos, devemos levar em consideração as simetrias presentes nos formalismos destes campos externos. Vimos que a simetria de calibre, presente na teoria eletromagnética, é incorporada ao formalismo do campo escalar complexo através da introdução da derivada covariante eletromagnética, de forma que a equação de movimento para o campo escalar  $\varphi$  seja também invariante de calibre. Por outro lado, a introdução de um campo externo gravitacional requer que a equação de Klein-Gordon seja modificada de forma a satisfazer o princípio da covariância geral através da prescrição do acoplamento mínimo gravitacional, onde fazemos a troca de derivadas usuais,  $\partial_\mu$ , por derivadas covariantes,  $\nabla_\mu$ .

No caso mais geral de um campo escalar interagindo simultaneamente com os campos eletromagnético e gravitacional, a equação de Klein-Gordon para este campo escalar deve ser invariante de calibre e também satisfazer o princípio da covariância geral. Assim, baseado no que foi discutido nas subseções anteriores, a prescrição é efetuar a substituição  $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  na Eq. (2.11), tal que a equação de Klein-Gordon assume a forma:

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{|g|}} \mathcal{D}_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\nu) + m^2 + \xi R \right] \varphi(x) = 0 . \quad (2.19)$$

Similarmente, o tensor energia-momento é obtido usando esta mesma prescrição através da

substituição da definição de derivada ordinária pela derivada covariante eletromagnética na expressão (2.16), tal que o seguinte resultado é obtido [94]:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) = & (\mathcal{D}_\mu\varphi)(\mathcal{D}_\nu\varphi)^* + (\mathcal{D}_\mu\varphi)^*(\mathcal{D}_\nu\varphi) - 2[\xi R_{\mu\nu} \\ & + \xi \nabla_\mu \nabla_\nu - (\xi - 1/4)g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma] \varphi^* \varphi . \end{aligned} \quad (2.20)$$

## 2.2 Campo espinorial de Dirac na presença de um campo externo

Nos contextos das teorias clássicas e quânticas de campo, o campo espinorial de Dirac representa partículas fermiônicas de spin  $1/2$ , tal como o elétron. Este campo obedece a equação de Dirac, tanto no espaço-tempo plano quanto no curvo. Nesta seção, veremos como estender o formalismo do campo espinorial de Dirac do espaço-tempo plano para o espaço-tempo curvo.

Como veremos, a generalização da equação de Dirac do espaço-tempo plano para espaços curvos se torna um problema mais sutil do que aquele no caso do campo escalar de Klein-Gordon. Isto porquê o grupo de transformações gerais de coordenadas  $GL(4)$  (iniciais para “general” e “linear”) não possui representação espinorial. Todavia, esta generalização é possível se o espaço curvo for introduzido ponto a ponto com o espaço-tempo plano, no qual sabemos que espinores podem ser definidos, e isto é feito através do conceito de bases ortonormais locais, chamadas de vielbein.

A interação com um campo eletromagnético externo também será considerada. Iniciemos considerando esta interação.

### 2.2.1 Interação do campo espinorial com o campo eletromagnético

A interação de um campo espinorial com um campo eletromagnético, a exemplo do que ocorre no caso do campo escalar complexo, se dá pela introdução da derivada covariante eletromagnética através da substituição  $\partial_a \rightarrow \mathcal{D}_a = \partial_a + ieA_a$ , o que garante a invariância de calibre da teoria. A densidade de Lagrangiana que descreve esta teoria é

dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}(x)\gamma^a \mathcal{D}_a \psi(x) - (\mathcal{D}_a^* \bar{\psi}(x))\gamma^a \psi(x)] - m\bar{\psi}(x)\psi(x) , \quad (2.21)$$

onde  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  é o adjunto de Dirac. Em  $d$  dimensões,  $\psi(x)$  é um espinor de  $2^{[d/2]}$  componentes (onde  $[d/2]$  representa a parte inteira de  $d/2$ ), e as matrizes de Dirac  $\gamma^a$  são matrizes  $2^{[d/2]} \times 2^{[d/2]}$ . Todavia, nesta tese estaremos interessados no caso particular em que  $d = 5$ , pois iremos considerar a presença de uma dimensão extra, além das 4 dimensões usuais do espaço-tempo, nos capítulos 5 e 6. Neste caso, o espinor  $\psi(x)$  possui 4 componentes,<sup>3</sup> e as matrizes de Dirac continuam sendo matrizes  $4 \times 4$  obedecendo a álgebra de Clifford,

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab} . \quad (2.22)$$

Nesta tese usaremos uma representação das matrizes de Dirac que são obtidas das matrizes dadas em [95] multiplicadas pelo lado esquerdo pela matriz  $i\gamma_5$ , mais uma matriz  $\gamma^4 = i\gamma_5$  associada à quinta dimensão. Nomeadamente, usaremos a seguinte representação [96]

$$\gamma^0 = -i \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = -i \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3), \quad \gamma^4 = si \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

onde  $s = \pm 1$ ,  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$  e  $\sigma_j$  corresponde às matrizes de Pauli. Note que os dois possíveis valores do fator  $s$ , presente na matriz  $\gamma^4$ , correspondem às duas possíveis representações irredutíveis das matrizes de Dirac em espaços de dimensão ímpar [92]. Levando em consideração esta característica das matrizes de Dirac em 5 dimensões, a densidade de Lagrangiana para o campo espinorial é melhor expressa na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(s)} &= \frac{i}{2} [\bar{\psi}_{(s)}(x)\gamma_{(s)}^a \mathcal{D}_a \psi_{(s)}(x) - (\mathcal{D}_a^* \bar{\psi}_{(s)}(x))\gamma_{(s)}^a \psi_{(s)}(x)] \\ &\quad - m\bar{\psi}_{(s)}(x)\psi_{(s)}(x) , \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde esta nova notação indica que tanto o espinor quanto as matrizes de Dirac dependem de  $s$ . Podemos ainda expressar esta densidade de Lagrangiana de uma forma alternativa através do uso das transformações  $\psi_{(+1)} \rightarrow \psi'_{(+1)} = \psi_{(+1)}$  e  $\psi_{(-1)} \rightarrow \psi'_{(-1)} = -\gamma^4 \psi_{(-1)}$ , juntamente com as identidades  $\gamma_{(+1)}^a = \gamma^a$  e  $\gamma^4 \gamma_{(-1)}^a \gamma^4 = \gamma^a$ , tal que o seguinte resultado

---

<sup>3</sup>Note que a representação espinorial do grupo de Lorentz para  $d = 5$  é a mesma que aquela no caso usual em que  $d = 4$ .

é obtido:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(s)} &= \frac{i}{2} [\bar{\psi}'_{(s)}(x) \gamma^a \mathcal{D}_a \psi'_{(s)}(x) - (\mathcal{D}_a^* \bar{\psi}'_{(s)}(x)) \gamma^a \psi'_{(s)}(x)] \\ &\quad - sm \bar{\psi}'_{(s)}(x) \psi'_{(s)}(x) .\end{aligned}\tag{2.25}$$

Variando a ação correspondente à densidade de Lagrangiana (2.25) com respeito ao campo  $\bar{\psi}'_{(s)}$ , tratado como independente de  $\psi'_{(s)}$ , obtemos a equação de Dirac,

$$(i\gamma^a \mathcal{D}_a - sm) \psi'_{(s)}(x) = 0 .\tag{2.26}$$

O tensor energia-momento associado à densidade de Lagrangiana (2.21) é dado pela expressão

$$\begin{aligned}T_{ab} &= \frac{i}{4} [\bar{\psi}'_{(s)}(x) \gamma_a \mathcal{D}_b \psi'_{(s)}(x) + \bar{\psi}'_{(s)}(x) \gamma_b \mathcal{D}_a \psi'_{(s)}(x) \\ &\quad - (\mathcal{D}_a^* \bar{\psi}'_{(s)}(x)) \gamma_b \psi'_{(s)}(x) - (\mathcal{D}_b^* \bar{\psi}'_{(s)}(x)) \gamma_a \psi'_{(s)}(x)] ,\end{aligned}\tag{2.27}$$

cujas forma é simétrica com respeito a troca dos índices  $a$  e  $b$ .

A partir deste momento em diante nesta tese, iremos suprimir a notação  $\psi'_{(s)}(x)$  e seguiremos com  $\psi(x)$  por motivo de simplicidade.

## 2.2.2 Interação do campo fermiônico com o campo gravitacional

Nesta subseção queremos considerar a interação do campo espinorial com um campo gravitacional externo clássico. A exemplo do que foi feito no caso do campo escalar, o princípio da covariância geral deve ser incorporado ao formalismo espinorial de Dirac. Entretanto, nesta generalização encontraremos mais dificuldades, dado que o campo espinorial deve ser compreendido como um objeto construído em um espaço-tempo curvo. Além disso, este espinor deve se transformar sob transformações do grupo de Lorentz, de acordo com sua representação deste grupo, devido à covariância da equação de Dirac localmente.

Pelo princípio da equivalência, a geometria de uma dada variedade na Relatividade Geral é localmente plana. Assim, é possível definir em cada ponto  $x$  desta variedade

um espaço tangente pseudo-Euclidiano, cuja base vetorial é definida pelo conjunto de campos linearmente independentes  $e^{(a)}_{\mu}$  (onde  $a = 0, 1, 2, 3, 4$ ), chamados de vielbein ou, especificamente, fünfbein no caso pentadimensional.<sup>4</sup> Antes de escrevermos a equação de Dirac em espaços curvos, vamos fazer uma breve revisão das propriedades do formalismo vielbein.

Em um espaço-tempo curvo, podemos definir o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (2.28)$$

O produto interno entre dois vetores definidos nesta variedade, representada pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , é

$$U_\mu V^\mu = g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu . \quad (2.29)$$

Dado que o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  é simétrico e não-singular, sua inversa  $g^{\mu\nu}$  é definida através da relação

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = g_{\nu\mu} g^{\sigma\nu} = \delta_\mu^\sigma . \quad (2.30)$$

Assim, podemos diagonalizar o tensor métrico através da transformação [97]:

$$g_{\mu\nu} = \mathcal{O}_{\mu a} D_{ab} (\mathcal{O}^{-1})_{b\nu} , \quad (2.31)$$

onde  $(\mathcal{O}^{-1})_{b\nu} = \mathcal{O}_{\nu b}$ , de modo que devemos ter

$$D_{ab} = \begin{pmatrix} \lambda^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(4)} \end{pmatrix} . \quad (2.32)$$

Note que os autovalores desta matriz são não nulos devido à não-singularidade do tensor métrico. Além disso, estes autovalores são todos positivos definido,  $\lambda^{(a)} > 0$ , de acordo com a assinatura adotada  $(+ - - - -)$ .

De acordo com o princípio da equivalência, um espaço-tempo curvo é localmente

---

<sup>4</sup>O termo “vielbein” vem do idioma alemão, onde “viel” significa “muitos” e “bein” significa “pernas”. Assim, o termo “fünfbein” significa “cinco pernas”.

plano, conectando a física da Relatividade Geral com a física da Relatividade Especial. Assim, localmente é possível definir referenciais de Lorentz locais que podem ser associados a uma dada escolha de base vielbein, tal que o tensor métrico assume a forma daquele no espaço-tempo de Minkowski. Com esta ideia em mente, vamos definir a base vielbein como:

$$e^{(a)}_{\mu}(x) = \sqrt{\lambda^{(a)}} \mathcal{O}_{\mu a} . \quad (2.33)$$

onde o índice  $a$  presente em  $\mathcal{O}_{\mu a}$  não deve ser entendido como um índice de soma. Usando esta definição, podemos escrever o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  em termos de uma dada base vielbein na forma

$$g_{\mu\nu}(x) = e^{(a)}_{\mu}(x) e^{(b)}_{\nu}(x) \eta_{ab} , \quad (2.34)$$

sendo  $\eta_{ab}$  o tensor métrico no espaço-tempo de Minkowski. Agora, supondo que  $e^{(a)}_{\mu}$  possui uma inversa,  $e_{(a)}^{\mu}$ , satisfazendo as relações

$$e_{(a)}^{\mu} e^{(b)}_{\mu} = \delta_a^b , \quad (2.35)$$

$$e_{(a)}^{\mu} e^{(a)}_{\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} , \quad (2.36)$$

é possível mostrar que

$$e_{(a)}^{\mu} = g^{\mu\nu} \eta_{ab} e^{(b)}_{\nu} , \quad (2.37)$$

e

$$\eta_{ab} = e_{(a)}^{\mu} e_{(b)}^{\nu} g_{\mu\nu} . \quad (2.38)$$

Como podemos ver a partir da Eq. (2.37), os índices latinos presentes na base vielbein (referentes ao espaço tangente) são levantados e abaixados através da contração com os tensores métricos  $\eta^{ab}$  e  $\eta_{ab}$ , respectivamente. Por outro lado, observamos que os índices gregos (referentes ao espaço curvo) são levantados e abaixados quando contraídos com os tensores  $g^{\mu\nu}$  e  $g_{\mu\nu}$ , respectivamente.

O uso de bases vielbein também nos permite expandir um vetor definido na base de coordenadas em termos de uma base ortonormal local no espaço tangente em um ponto

$x$  de um dado espaço-tempo, e vice-versa:

$$V^\mu = e_{(a)}^\mu V^{(a)} , \quad (2.39)$$

$$V^{(a)} = e^{(a)}_\mu V^\mu . \quad (2.40)$$

Usando a relação (2.34), podemos reescrever o elemento de linha em (2.28) como

$$ds^2 = \eta_{ab} e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu dx^\mu dx^\nu . \quad (2.41)$$

Podemos ver a partir das relações (2.34) ou (2.38) que uma base vielbein não é unicamente determinada pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}(x)$ . De fato, seja  $e^{(a)}_\mu(x)$  e  $e'^{(a)}_\mu(x)$  após uma transformação local, ambas devem satisfazer (2.34) se, e somente se,

$$e'^{(a)}_\mu(x) = \Lambda^a_b(x) e^{(b)}_\mu(x) , \quad (2.42)$$

com

$$\Lambda^a_c(x) \Lambda^b_d(x) \eta_{ab} = \eta_{cd} , \quad (2.43)$$

onde  $\Lambda^a_b(x)$  é uma matriz que representa uma transformação de Lorentz local. Assim, dado que as bases vielbein  $e^{(a)}_\mu(x)$  e  $e'^{(a)}_\mu(x)$  fornecem a mesma métrica, concluímos que tanto a ação quanto a equação de movimento para um dado campo devem ser independentes da escolha de  $e^{(a)}_\mu$  ou  $e'^{(a)}_\mu$ . Desta forma, a ação para um dado campo deve ser invariante sob uma transformação de Lorentz local.

Vamos agora ver como podemos escrever a equação Dirac em um espaço-tempo curvo. Assumiremos uma estrutura espinorial local e independente em cada ponto da variedade. Como visto anteriormente, em cinco dimensões os espinores de Dirac são objetos com quatro componentes que sob transformações do grupo de Lorentz local, tais como aquela presente em (2.42), transformam-se como suas contrapartes no espaço-tempo plano:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(\Lambda(x))\psi(x) , \quad (2.44)$$

e seu conjugado correspondente como

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda(x)) , \quad (2.45)$$

onde  $S(\Lambda(x))$  é uma matriz  $4 \times 4$  operando no vetor complexo  $\psi(x)$  de quatro componentes e que depende de uma transformação de Lorentz local,  $\Lambda(x)$ . Além disso, esta transformação possui determinante unitário,

$$\det(S) = 1 . \quad (2.46)$$

Escrevendo as equações (2.44) e (2.45) em termos das componentes, temos

$$\psi^a(x) \rightarrow \psi'^a(x) = S^a_b(x) \psi_b(x) , \quad (2.47)$$

$$\bar{\psi}_a(x) \rightarrow \bar{\psi}'_a(x) = \bar{\psi}_b(x) (S^{-1})^b_a(x) . \quad (2.48)$$

Por uma transformação geral de coordenadas, o campo espinorial  $\psi(x)$  transforma-se como um escalar:

$$\psi'(x') = \psi(x) . \quad (2.49)$$

Neste caso, inexistente relação entre o grupo de transformações gerais de coordenadas sobre a variedade e o grupo de transformações de Lorentz locais.

Quanto às matrizes de Dirac no espaço curvo, estas devem satisfazer uma álgebra de Clifford semelhante àquela expressa em (2.22), porém definida em uma variedade curva. Fazendo uso do formalismo vielbein, podemos definir as matrizes de Dirac em um espaço-tempo curvo como

$$\gamma^\mu(x) = e_{(a)}^\mu(x) \gamma^a , \quad (2.50)$$

satisfazendo a álgebra de Clifford associada à métrica  $g^{\mu\nu}$  no espaço curvo,

$$\gamma^\mu(x) \gamma^\nu(x) + \gamma^\nu(x) \gamma^\mu(x) = 2g^{\mu\nu}(x) . \quad (2.51)$$

Sob uma transformação do grupo de Lorentz local, as matrizes  $\gamma^\mu(x)$  se transformam da seguinte forma:

$$(\gamma'^\mu)^a_b = (S(x) \gamma^\mu S^{-1}(x))^a_b . \quad (2.52)$$

Fazendo uso do formalismo vielbein, obtemos

$$(\Lambda^{-1})^a_b(x) \gamma^b = S(x) \gamma^a S^{-1}(x) . \quad (2.53)$$

Note que esta expressão é idêntica ao requerimento no espaço-tempo plano de que a equação de Dirac seja covariante sob transformações de Lorentz [95], exceto que aqui a transformação de Lorentz é local.

Sob uma transformação de coordenadas gerais, as matrizes de Dirac no espaço-tempo curvo se transformam como um vetor contravariante:

$$\gamma'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \gamma^{\nu}(x) . \quad (2.54)$$

Devido ao fato das transformações de Lorentz local serem funções de ponto, a derivada de um espinor não se transforma como um espinor. Desta forma, devemos definir a derivada covariante de um espinor como

$$\nabla_{\mu} \psi^a(x) = \partial_{\mu} \psi^a(x) + (\Gamma_{\mu})^a_b(x) \psi^b(x) , \quad (2.55)$$

tal que, sob uma transformação de Lorentz local (2.47), esta expressão transforme-se como um espinor,

$$\nabla'_{\mu} \psi'^a(x) = S^a_b(x) \nabla_{\mu} \psi^b(x) . \quad (2.56)$$

Desta lei de transformação, segue-se que a matriz  $\Gamma_{\mu}$  transforma-se como

$$(\Gamma'_{\mu})^a_b = S^a_d (\Gamma_{\mu})^d_f (S^{-1})^f_b - (\partial_{\mu} S^a_d) (S^{-1})^d_b , \quad (2.57)$$

ou em notação compacta

$$\Gamma'_{\mu} = S \Gamma_{\mu} S^{-1} - (\partial_{\mu} S) S^{-1} . \quad (2.58)$$

Assim, vemos que esta lei de transformação para  $\Gamma_{\mu}$  garante que a derivada covariante de um espinor se transforme como um espinor sob uma transformação de Lorentz local. Por outro lado, sob transformações de coordenadas gerais,  $\Gamma_{\mu}$  transforma-se como um covetor. As matrizes  $\Gamma_{\mu}$  são conhecidas como conexões espinoriais.

Como é sabido do contexto da Relatividade Geral, a derivada covariante do tensor métrico é igual a zero,  $\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0$ , o que é equivalente ao comprimento do deslocamento paralelo ser preservado. Uma consequência disto, é que tomando-se a derivada covariante

em ambos os lados da Eq. (2.51), temos que

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\gamma_\mu(x)\gamma_\nu(x) + \gamma_\nu(x)\gamma_\mu(x)) = 0 . \quad (2.59)$$

Uma condição para que a expressão acima seja satisfeita, é que

$$\nabla_\lambda \gamma_\mu = \partial_\lambda \gamma_\mu - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \gamma_\sigma + \Gamma_\lambda \gamma_\mu - \gamma_\mu \Gamma_\lambda = 0 . \quad (2.60)$$

Usando a relação (2.50) e as propriedades da álgebra de Dirac geradas pelas matrizes de Dirac no espaço plano,  $\gamma^a$ , é possível verificar que a conexão espinorial é definida como

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{8}[\gamma^\nu(\partial_\mu \gamma_\nu) - (\partial_\mu \gamma_\nu)\gamma^\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma(\gamma^\nu \gamma_\sigma - \gamma_\sigma \gamma^\nu)] . \quad (2.61)$$

Ainda é possível mostrar também que [98]

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{2}\omega_{\mu ab}\Sigma^{ab} , \quad (2.62)$$

onde

$$\omega_{\mu ab} = -e_{b\nu}(\partial_\mu e_a^\nu) - \Gamma_{\nu\mu}^\rho e_a^\nu e_{b\rho} . \quad (2.63)$$

e

$$\Sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b] . \quad (2.64)$$

Definida a derivada covariante em (2.55) e a conexão espinorial em (2.62), a generalização da equação de Dirac no espaço-tempo plano ao espaço-tempo curvo é feita através da prescrição

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu . \quad (2.65)$$

Assim, a equação de Dirac covariante sob o grupo de transformações de Lorentz local e invariante sob o grupo de transformações gerais de coordenada é definida como

$$(i\gamma^\mu(x)\nabla_\mu - sm)\psi(x) = 0 , \quad (2.66)$$

onde  $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$ , e o fator  $s$  no termo de massa, novamente, representa as duas possíveis representações irredutíveis das matrizes de Dirac em espaços de dimensão ímpar, ou em cinco dimensões que é o nosso caso.

A equação de Dirac no espaço-tempo curvo (2.66) é obtida através da seguinte densidade de Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(x)\nabla_\mu\psi(x) - (\nabla_\mu\bar{\psi}(x))\gamma^\mu(x)\psi(x)] - m\bar{\psi}(x)\psi(x) . \quad (2.67)$$

Variando-se a ação associada à esta densidade de Lagrangiana com respeito ao tensor métrico, obtemos o tensor energia-momento<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) &= \frac{i}{4} [\bar{\psi}(x)\gamma_\mu(x)\nabla_\nu\psi(x) + \bar{\psi}(x)\gamma_\nu(x)\nabla_\mu\psi(x) \\ &\quad - (\nabla_\mu\bar{\psi}(x))\gamma_\nu(x)\psi(x) - (\nabla_\nu\bar{\psi}(x))\gamma_\mu(x)\psi(x)] . \end{aligned} \quad (2.68)$$

No caso de um campo espinorial sem massa,  $m = 0$ , a equação de Dirac se reduz trivialmente a

$$\gamma^\mu(x)(\partial_\mu + \Gamma_\mu)\psi(x) = 0 . \quad (2.69)$$

Diferentemente da equação de Klein-Gordon para o campo escalar complexo visto na seção anterior, no caso não massivo a equação de Dirac no espaço curvo (2.69) é conformalmente invariante sem a necessidade de uma modificação adicional, se sob uma transformação conforme do tensor métrico [99],

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = e^{-2\lambda(x)}g_{\mu\nu}(x) , \quad (2.70)$$

também ocorre a transformação conforme do espinor de Dirac na forma

$$\psi(x) \rightarrow \tilde{\psi}(x) = e^{\frac{3}{2}\lambda(x)}\psi(x) . \quad (2.71)$$

### 2.2.3 Interação do campo fermiônico com os campos eletromagnético e gravitacional

Estamos interessados agora em saber como o campo de Dirac interage com um campo eletromagnético e gravitacional externo. Como visto anteriormente nesta seção,

---

<sup>5</sup>Esta notação para o tensor energia-momento está de acordo com a Ref. [91]. Como será visto, em nossos cálculos do VEV do tensor energia-momento fermiônico adotamos o método da soma sobre os modos fermiônicos e, conseqüentemente, o termo extra proporcional a massa anula-se.

a interação de um campo espinorial com um campo eletromagnético externo se dá pela prescrição de acoplamento mínimo através da substituição  $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ , garantindo assim, a invariância de calibre da teoria espinorial de Dirac. Por outro lado, a interação entre o campo espinorial de Dirac e um campo gravitacional se dá pela substituição  $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$ , de forma que a equação de Dirac seja covariante frente à transformações de Lorentz locais e transformações gerais de coordenadas.

Levando em conta todas estas considerações expostas acima, a prescrição para se construir uma teoria de campo espinorial de Dirac interagindo com os campos eletromagnético e gravitacional se dá pela substituição  $\nabla_\mu \rightarrow \nabla_\mu + ieA_\mu$  na equação de Dirac (2.66), tal que a seguinte equação é obtida:

$$[i\gamma^\mu(x)(\nabla_\mu + ieA_\mu) - sm]\psi(x) = 0, \quad (2.72)$$

onde as matrizes  $\gamma^\mu(x)$  são dadas por (2.50).

O tensor energia-momento para esta teoria deverá ser uma generalização das expressões (2.27) e (2.68). Adotando as prescrições acima mencionadas, o tensor energia-momento fica expresso por:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) &= \frac{i}{4} [\bar{\psi}(x)\gamma_\mu(x)D_\nu\psi(x) + \bar{\psi}(x)\gamma_\nu(x)D_\mu\psi(x) \\ &\quad - (D_\mu\bar{\psi}(x))\gamma_\nu(x)\psi(x) - (D_\nu\bar{\psi}(x))\gamma_\mu(x)\psi(x)] , \end{aligned} \quad (2.73)$$

onde  $D_\mu = \nabla_\mu + ieA_\mu$ .

## Capítulo 3

# Teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo

Neste capítulo iremos revisar brevemente alguns dos principais aspectos da teoria quântica de campos em um espaço-tempo curvo. Este formalismo é construído a partir da premissa de que apenas os campos de matéria são quantizados, enquanto o espaço-tempo curvo é tratado como clássico. Por este motivo, é comum muitos autores classificarem este formalismo como semiclássico.

Em um contexto mais amplo, um espaço-tempo curvo representando um campo gravitacional pode ser considerado como um campo externo. Por campo “externo”, queremos nos referir àquele que interage com o campo que desejamos quantizar, sendo este campo externo introduzido em um nível clássico e que, por si só, não é uma variável dinâmica. No decorrer dos próximos capítulos, veremos que o papel de um campo externo pode ser desempenhado por diversos outros objetos, além do campo gravitacional, tais como campos eletromagnéticos, fronteiras geométricas do espaço-tempo ou mesmo variedades com topologias não-triviais sobre as quais os campos são quantizados.

No que segue ainda neste capítulo, veremos que a quantização de campos em um espaço-tempo curvo, sendo este dinâmico ou não, dá origem a muitos efeitos quânticos não-triviais, tais como criação de partículas e polarização do vácuo.

### 3.1 Segunda quantização no espaço curvo

No espaço-tempo plano, a simetria de Lorentz desempenha papel fundamental na quantização de campos, pois nos permite definir um estado de vácuo único da teoria. No espaço-tempo curvo, entretanto, a invariância de Lorentz não está presente e, em geral, o estado de vácuo não pode ser definido univocamente. Como consequência, o conceito de partícula se torna ambíguo e a interpretação de quantidades física se torna mais sutil.

A fim de discutir esta questão de forma mais aprofundada, vamos considerar um campo escalar real massivo, cuja densidade de Lagrangiana é definida por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} [\partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x) - \xi R(x) \varphi^2(x)] . \quad (3.1)$$

A equação de movimento correspondente é

$$[\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2 + \xi R(x)] \varphi(x) = 0 , \quad (3.2)$$

onde  $R(x)$  é o escalar de curvatura de Ricci e  $\xi$  é a constante de acoplamento entre o campo escalar e a geometria do espaço-tempo. Como já mencionado anteriormente, a constante  $\xi$  possui dois valores particulares de interesse físico:  $\xi = 0$  e  $\xi = 1/6$  (válido apenas em 4 dimensões), conhecidos como acoplamento mínimo e conforme, respectivamente.

O produto interno entre um par de soluções da equação de movimento (3.2) é definido por:

$$(f_1, f_2) = -i \int_\Sigma (f_1 \partial_\mu f_2^* - f_2^* \partial_\mu f_1) d\Sigma^\mu , \quad (3.3)$$

onde  $d\Sigma^\mu = d\Sigma n^\mu$ , sendo  $d\Sigma$  o elemento de volume em uma determinada hipersuperfície tipo-espaço, e  $n^\mu$  é um vetor unitário tipo-tempo normal à esta hipersuperfície. Uma propriedade importante do produto interno definido acima é que o mesmo independe do tempo e, conseqüentemente, da escolha da hipersuperfície [91].

A quantização de um campo escalar no espaço curvo pode ser realizada através do método canônico. Neste caso, devemos escolher uma forma de folhear o espaço-tempo em hipersuperfícies tipo-espaço. Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície particular, onde o vetor normal unitário,  $n^\mu$ , é rotulado por um valor constante da coordenada temporal  $t$ . Assim, a

derivada do campo  $\varphi$  na direção normal à hipersuperfície  $\Sigma$  é  $\dot{\varphi} = n^\mu \partial_\mu \varphi$  e, portanto, podemos definir o momento canonicamente conjugado a  $\varphi$  como

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} . \quad (3.4)$$

O passo seguinte na prescrição canônica é promover os campos a operadores e impor a relação de comutação

$$[\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{x}', t)] = i\delta(\vec{x}, \vec{x}') , \quad (3.5)$$

sendo  $\delta(\vec{x}, \vec{x}')$  uma função delta na hipersuperfície, com a propriedade

$$\int \delta(\vec{x}, \vec{x}') d\Sigma = 1 . \quad (3.6)$$

Seja  $\{f_j\}$  um conjunto completo de soluções de norma positiva da equação de movimento (3.2), tal que  $\{f_j^*\}$  seja o conjunto completo de soluções de norma negativa da mesma equação. Assim,  $\{f_j, f_j^*\}$  forma um conjunto completo de soluções da equação de movimento (3.2) em termos das quais podemos expandir uma solução arbitrária. Isso nos permite escrever o operador  $\hat{\varphi}$  em termos dos operadores de criação e aniquilação como

$$\hat{\varphi} = \sum_j (a_j f_j + a_j^\dagger f_j^*) , \quad (3.7)$$

onde os operadores  $a_j$  e  $a_j^\dagger$  obedecem a relação de comutação

$$[a_j, a_{j'}^\dagger] = \delta_{j,j'} . \quad (3.8)$$

Esta expansão nos permite definir o estado de vácuo  $|0\rangle$  como

$$a_j |0\rangle = 0, \quad \text{para qualquer } j . \quad (3.9)$$

No espaço-tempo de Minkowski, em particular, escolhemos as soluções de norma positiva como soluções de frequência positiva,  $f_j \propto e^{-i\omega t}$ . Independente da escolha do referencial de Lorentz, no qual  $t$  é a coordenada temporal, este procedimento define o estado de vácuo de forma única no espaço-tempo plano; isto é, o conjunto de soluções  $\{f_j\}$  é definido de forma unívoca. No espaço-tempo curvo, entretanto, a situação é diferente.

Neste caso, em geral, inexistirá uma única escolha do conjunto  $\{f_j\}$  e, portanto, inexistirá um único estado de vácuo. Isto significa que diferentes conjuntos de soluções  $\{f_j\}$  se tornam igualmente válidos, embora eles conduzam a estados de vácuo distintos e não equivalentes entre si, tornando o conceito de partícula ambíguo. Esta não unicidade do estado de vácuo na teoria de campos em espaços curvos dá origem a efeitos físicos interessantes, tais como a criação de partículas, tópico que discutiremos a seguir.

### 3.2 Criação de partículas em um espaço-tempo curvo

Vamos supor que existam dois conjuntos completos de soluções da Eq. (3.2), tal que o campo  $\hat{\varphi}$  possa ser decomposto de duas formas distintas:

$$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) = \sum_i \left( a_i f_i(t, \vec{x}) + a_i^\dagger f_i^*(t, \vec{x}) \right) \quad (3.10)$$

e

$$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) = \sum_j \left( b_j F_j(t, \vec{x}) + b_j^\dagger F_j^*(t, \vec{x}) \right) , \quad (3.11)$$

onde  $i$  e  $j$  representam o conjunto de quantidades necessárias para rotular os modos deste campo. Estas duas decomposições correspondem a dois estados de vácuo não equivalentes, definidos, respectivamente, por:

$$a_i |0\rangle_f = 0, \quad b_j |0\rangle_F = 0 . \quad (3.12)$$

Dado que os conjuntos de soluções  $\{f_i\}$  e  $\{F_j\}$  são ambos completos, podemos expandir um em termos do outro:

$$f_i = \sum_j (\alpha_{ij} F_j + \beta_{ij} F_j^*) , \quad (3.13)$$

$$F_j = \sum_i (\alpha_{ij}^* f_i - \beta_{ij} f_i^*) . \quad (3.14)$$

Estas equações são chamadas de transformações de Bogoliubov e os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  são chamados de coeficientes de Bogoliubov. Estes coeficientes podem ser calculados usando

o produto interno definido em (3.3) como

$$\alpha_{ij} = -(F_j, f_i), \quad \beta_{ij} = (f_i^*, F_j) . \quad (3.15)$$

Usando o fato de que as expansões em (3.10) e (3.11) são equivalentes, e usando a Eq. (3.13) em conjunto com a condição de ortogonalidade dos modos, é possível mostrar que os operadores de criação e aniquilação são relacionados através das relações

$$a_i = \sum_j (\alpha_{ij}^* b_j - \beta_{ij}^* b_j^\dagger) , \quad (3.16)$$

$$b_j = \sum_i (\alpha_{ij} a_i + \beta_{ij}^* a_i^\dagger) . \quad (3.17)$$

Das expressões acima, podemos mostrar que os coeficientes de Bogoliubov devem satisfazer as seguintes relações:

$$\sum_k (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) = \delta_{i,j} , \quad (3.18)$$

$$\sum_k (\alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk}) = 0 . \quad (3.19)$$

A partir da relação (3.17) entre os operadores de aniquilação nas duas bases, podemos ver que os dois estados de vácuo associados aos modos normais  $\{f_i\}$  e  $\{F_j\}$  são distintos se  $\beta_{ij} \neq 0$ . Em particular, observamos que a aplicação do operador de aniquilação  $a_i$  no vácuo da base  $\{F_j\}$  resulta em

$$a_i |0\rangle_F = - \sum_j \beta_{ij}^* |1_j\rangle_F \neq 0 , \quad (3.20)$$

o que implica que o estado de vácuo  $|0\rangle_F$  não é aniquilado pelo operador de aniquilação associado à base  $\{f_i\}$ . De fato, se calcularmos o valor esperado do operador número de partículas,  $N_i = a_i^\dagger a_i$ , no estado de vácuo da base  $\{F_j\}$ , temos que

$$\langle 0 | N_i | 0 \rangle_F = \sum_j |\beta_{ji}|^2 . \quad (3.21)$$

Este resultado nos diz que o estado de vácuo dos modos  $\{F_j\}$  contém um número não nulo de partículas dos modos  $\{f_i\}$ . Assim, vemos que a ambiguidade na definição do estado de vácuo nos conduz a uma ambiguidade na noção do conceito de partícula.

Vamos agora considerar que os modos normais  $\{f_i\}$  e  $\{F_j\}$  correspondem a dois estados assintóticos no tempo. Por exemplo, consideremos o caso em que um campo gravitacional inicialmente é estático, então se torna dependente do tempo, e por fim volta a ser estático. Neste caso, a relação (3.21) é interpretada como a criação de partículas pelo campo gravitacional. Em outras palavras, se os modos  $\{f_i\}$  são apropriados no passado e os modos  $\{F_j\}$  são adequados no futuro, então podemos dizer que o sistema evoluiu do estado  $|0\rangle_f$  para o estado  $|0\rangle_F$  mais algumas partículas, de acordo com a relação (3.21).

Por fim, mencionamos que uma aplicação imediata da discussão realizada acima é o fenômeno de criação de partículas em um universo em expansão [100].

### 3.3 Polarização do vácuo

Desde os primórdios do desenvolvimento da física como ciência, a noção de vácuo evoluiu ao longo do tempo através do surgimento de diversas teorias. Na física clássica, o vácuo era um meio vazio, desprovido de qualquer propriedade. Na teoria quântica de campos, o conceito de vácuo foi revolucionado e sua natureza difere fundamentalmente daquela presente na física clássica, podendo apresentar propriedades surpreendentes, tal como aquela vista na última seção.

Como é sabido da teoria quântica de campos no espaço-tempo de Minkowski, o estado de vácuo é definido como o autoestado do operador número de partículas, cujo os autovalores são nulos [101]. De maneira geral, entretanto, o estado de vácuo vai depender essencialmente da presença de campos externos. Como consequência, os efeitos devido a estes campos externos se manifestam através do cálculo de valores esperados no vácuo de operadores bilineares nos campos:

$$\langle \hat{O}(x) \rangle = \sum_k O\{\varphi_k^{(+)}(x), \varphi_k^{(-)}(x)\} , \quad (3.22)$$

onde  $O(f, g)$  pode ser um operador diferencial bilinear.

Flutuações quânticas do vácuo devido a campos de matéria quantizados, que surgem na presença de campos externos clássicos, são denominadas polarização do vácuo. Em particular, um campo gravitacional clássico pode dar origem a efeitos de polarização do

vácuo. Neste caso, o cálculo de quantidades locais, tal como o valor esperado no vácuo do tensor energia-momento, tornam-se sensíveis às características globais e locais do campo gravitacional, o que resulta no surgimento de divergências. Todavia, esta dificuldade pode ser superada através da aplicação de técnicas de regularização e renormalização, de modo a obtermos quantidades finitas. Feito tal procedimento, as contribuições espúrias são absorvidas nas redefinições das constantes cosmológica e gravitacional. Um detalhe interessante que emerge neste processo é o surgimento de termos quadráticos nos tensores de Riemann e Ricci e no escalar de curvatura que, a priori, não estariam presentes na teoria da Relatividade Geral [91]. A consistência deste procedimento é notável ao considerarmos o acoplamento do VEV do tensor energia-momento com as equações de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle . \quad (3.23)$$

Além disso, para que o tensor energia-momento renormalizado,  $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle_{\text{Ren}}$ , seja fonte das equações de campo de Einstein, o mesmo deve continuar sendo invariante sob transformações de coordenadas gerais e também deve obedecer à condição de conservação covariante.

### 3.4 Função de Green e o VEV do tensor energia-momento no espaço-tempo curvo

Queremos analisar nesta seção o VEV do tensor energia-momento,  $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$ , associado a um dado campo de matéria em um espaço-tempo curvo qualquer. O cálculo deste VEV pode ser realizado através da função de Green associada ao campo de matéria considerado. Neste caso, o VEV do operador tensorial energia-momento é escrito em termos da função de Green através de uma relação do tipo [102]:

$$\langle 0 | \hat{T}_{\mu\nu} | 0 \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \Delta_{\mu\nu'}(x, x') G(x, x') . \quad (3.24)$$

onde  $G(x, x')$  é a função Green associada ao campo de matéria, e  $\Delta_{\mu\nu'}(x, x')$  é um operador diferencial, cuja forma depende da natureza do campo em questão e o símbolo de primo no índice  $\nu'$  está relacionado às derivadas com respeito a  $x'$ . Note que o procedimento correto

aqui é efetuar as derivadas inicialmente e em seguida tomar o limite de coincidência,  $x \rightarrow x'$ . A quantidade acima expressa é formalmente divergente devido à presença de produtos de operadores de campo e suas derivadas avaliadas no mesmo ponto. Do ponto de vista físico, esta divergência é explicada pelo comportamento ultravioleta das flutuações de vácuo do campo. Em particular, para a componente  $\langle \hat{T}_{00} \rangle$ , este infinito está associado à energia do vácuo.

A fim de obtermos uma quantidade finita e que faça sentido do ponto de vista físico, devemos renormalizar o tensor energia-momento através de um procedimento de regularização. O método que iremos utilizar é o de separação de pontos, que consiste no seguinte: aplicamos o operador diferencial  $\Delta_{\mu\nu'}(x, x')$  na função de Green, e em seguida extraímos as contribuições divergentes antes de tomar o limite de coincidência. Nos próximos parágrafos, vamos mostrar um método pelo qual estas divergências podem ser extraídas, fornecendo resultados finitos e que preservam a condição de conservação covariante.

Divergências ultravioletas são comumente encontradas no contexto da teoria quântica de campos e estão relacionadas ao comportamento de curtas distâncias dos valores esperados do vácuo dos produtos entre operadores de campos. Por simplicidade, vamos apenas considerar campos livres, já que estaremos interessados na função de dois pontos. Para uma dada escolha do estado de vácuo, o comportamento típico de curtas distâncias da função de dois pontos em um espaço-tempo curvo tem a forma [103]

$$G(x, x') \sim \frac{1}{2\pi^2} \left( -\frac{1}{\sigma(x, x')} + \ln \sigma(x, x') + \text{contribuições finitas} \right), \quad x' \rightarrow x, \quad (3.25)$$

onde  $\sigma(x, x')$  é a metade do quadrado da distância geodésica entre os pontos  $x$  e  $x'$ .

Com o objetivo de entendermos melhor o que a relação acima quer nos dizer, vamos considerar a função de dois pontos associada a um campo escalar, definida como

$$G^{(1)}(x, x') \equiv \langle 0 | \varphi(x) \varphi(x') | 0 \rangle, \quad (3.26)$$

onde  $|0\rangle$  corresponde a uma dada escolha de vácuo do campo escalar. Podemos dizer que a função de dois pontos acima tem a forma de Hadamard, se é possível escrevê-la como

$$G^{(1)}(x, x') = \frac{U(x, x')}{\sigma(x, x')} + V(x, x') \ln[\zeta^2 \sigma(x, x')] + W(x, x'), \quad (3.27)$$

sendo  $U$ ,  $V$  e  $W$  funções regulares e finitas para todas as escolhas de  $x$  e  $x'$ , e  $\zeta$  é algum parâmetro arbitrário com escala de massa necessário para tornar o argumento da função logarítmica adimensional. As funções  $U$  e  $V$  são quantidades de natureza puramente geométrica e independem dos detalhes do estado quântico, enquanto apenas a função  $W$  fornece alguma informação sobre este estado. Em muitas situações, esta forma será mantida para todos os estados quânticos, e a contribuição divergente de  $G^{(1)}(x, x')$  no limite de coincidência será independente do estado.

Podemos ver a partir da Eq. (3.27), que a renormalização da função de Green se dá através da subtração da mesma pela função de Hadamard  $G_H$ , cuja forma é

$$G_H(x, x') = \frac{U(x, x')}{\sigma(x, x')} + V(x, x') \ln[\zeta^2 \sigma(x, x')] . \quad (3.28)$$

Assim, fazendo uso deste procedimento em conjunto com a Eq. (3.24), o tensor energia-momento renormalizado é formalmente obtido através da relação:

$$\langle 0 | \hat{T}_{\mu\nu} | 0 \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \Delta_{\mu\nu'}(x, x') [G^{(1)}(x, x') - G_H(x, x')] . \quad (3.29)$$

Como acabamos de ver, os termos divergentes no VEV do tensor energia-momento são quantidades de natureza geométrica e podem ser absorvidos pela redefinição dos parâmetros presentes na ação que descreve a gravitação através do procedimento de renormalização. Isto é, quando realizamos a subtração do termo divergente em (3.29), estamos redefinindo as constantes gravitacional e cosmológica presentes na ação que descreve a gravitação. De fato, no caso de um campo escalar, por exemplo, as contribuições divergentes que surgem no VEV do tensor energia-momento podem ser derivadas a partir de uma ação efetiva associada a uma densidade de Lagrangiana divergente e de natureza puramente geométrica [91]. Estas contribuições divergentes, por sua vez, servem para renormalizar a ação gravitacional, fornecendo assim um formalismo finito e consistente para as equações de campo de Einstein semiclássicas.

## Capítulo 4

# Correntes induzidas e polarização do vácuo bosônico no espaço AdS

Neste capítulo iremos apresentar nossas contribuições para o estudo das correntes bosônicas induzidas e da polarização do vácuo bosônico no espaço AdS com uma corda cósmica. Em particular, iremos analisar os valores esperados de vácuo das densidades de corrente e do tensor energia-momento induzidos por um fluxo magnético ao longo de uma corda cósmica idealizada no espaço-tempo AdS  $(D + 1)$ -dimensional, considerando que uma das dimensões extras é compactificada e que também apresenta um fluxo magnético que é circundado pelo seu eixo [94, 104].

### 4.1 Modos bosônicos e função de Wightman

O principal objetivo desta seção é obter a função de Wightman de frequência positiva associada a um campo escalar em um espaço-tempo AdS  $(D + 1)$ -dimensional, com  $D > 3$ , na presença de uma corda cósmica e uma dimensão extra compactificada. Esta função é importante no cálculo de efeitos de polarização do vácuo. Para fazer isto, vamos primeiro obter o conjunto completo de funções dos modos normalizadas para a equação de Klein-Gordon, admitindo um parâmetro de acoplamento de curvatura arbitrário.

Em coordenadas cilíndricas, a geometria associada a uma corda cósmica ideal e estática (como aquela discutida no capítulo 1) em um espaço-tempo AdS  $(3 + 1)$ -dimensional é dada pelo elemento de linha abaixo (considerando que a corda está lo-

calizada ao longo do eixo  $y$ ),

$$ds^2 = e^{-2y/a} [dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2] - dy^2, \quad (4.1)$$

onde  $r \geq 0$  e  $\phi \in [0, 2\pi/q]$  define as coordenadas na geometria cônica,  $(t, y) \in (-\infty, \infty)$ , e o parâmetro  $a$  determina a escala de curvatura do espaço-tempo AdS. O parâmetro  $q \geq 1$  codifica a presença da corda cósmica e está associado com a massa por unidade de comprimento da corda,  $\mu$ , através da relação  $1/q = 1 - 4G\mu$ , onde  $G$  é a constante gravitacional de Newton. Usando a coordenada de *Poincaré* definida por  $w = ae^{y/a}$ , o elemento de linha acima é escrito na forma conformalmente relacionada com o elemento de linha associado a uma corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski:

$$ds^2 = \left(\frac{a}{w}\right)^2 [dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dw^2]. \quad (4.2)$$

Para a nova coordenada, temos  $w \in [0, \infty)$ . Valores específicos para esta coordenada merecem ser mencionados:  $w = 0$  e  $w = \infty$  correspondem à fronteira e horizonte do espaço AdS, respectivamente.

A generalização de (4.2) para o espaço-tempo AdS  $(D+1)$ -dimensional é feita do modo usual, adicionando dimensões extras Euclidianas [44]:

$$ds^2 = \left(\frac{a}{w}\right)^2 \left[ dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dw^2 - \sum_{i=4}^D (dx^i)^2 \right]. \quad (4.3)$$

A versão Euclidiana deste elemento de linha expressa entre colchetes na equação dada acima foi apresentada na Ref. [105] e chamada de *singularidade linha do tipo cônica* em uma dimensão arbitrária; logo, o elemento de linha entre colchetes em (4.3) corresponde ao elemento de linha associado a uma corda cósmica para dimensões mais altas. Além disso, uma discussão sobre a generalização do espaço-tempo de uma corda cósmica pode ser também encontrada na Ref. [106].

A escala de curvatura  $a$  em (4.3) é relacionada com a constante cosmológica,  $\Lambda$ , e o escalar de Ricci,  $R$ , pelas fórmulas

$$\Lambda = -\frac{D(D-1)}{2a^2}, \quad R = -\frac{D(D+1)}{a^2}. \quad (4.4)$$

A análise da densidade de corrente para um campo escalar massivo no espaço AdS descrito em coordenadas de *Poincaré* com dimensões compactas toroidais foi desenvolvida na Ref. [48]. Nesta mesma análise, supõe-se que, além das dimensões compactas, o campo obedece condições de periodicidade com fases arbitrárias. Além disso, a presença de potenciais vetores constantes também foi considerada.

Neste capítulo, estamos interessados em calcular a densidade de corrente induzida e o VEV do tensor energia-momento associados a um campo escalar quântico carregado,  $\varphi(x)$ , e gerados pela presença de um fluxo magnético ao longo do núcleo de uma corda cósmica no espaço-tempo AdS. Além disso, assumimos também a compactificação ao longo de uma dimensão extra, definida pela coordenada  $z$  na expressão abaixo:

$$ds^2 = \left(\frac{a}{w}\right)^2 \left[ dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dw^2 - dz^2 - \sum_{i=5}^D (dx^i)^2 \right]. \quad (4.5)$$

Note que iremos considerar também a presença de um potencial vetor constante ao longo da dimensão extra compactificada. Esta compactificação é implementada ao assumir que  $z \in [0, L]$ , e o campo de matéria obedece à condição de quasi-periodicidade

$$\varphi(t, r, \phi, w, z + L, x^5, \dots, x^D) = e^{2\pi i \beta} \varphi(t, r, \phi, w, z, x^5, \dots, x^D), \quad (4.6)$$

onde  $0 \leq \beta \leq 1$ . Os casos especiais  $\beta = 0$  e  $\beta = 1/2$  correspondem aos campos “untwisted” e “twisted”<sup>1</sup>, respectivamente, ao longo da direção  $z$ .

A equação de campo que governa a dinâmica quântica de um campo bosônico carregado com massa  $m$ , em um espaço curvo e na presença de um potencial vetor eletromagnético,  $A_\mu$ , é dada por

$$(g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + m^2 + \xi R) \varphi(x) = 0, \quad (4.7)$$

onde  $D_\mu = \nabla_\mu + ieA_\mu$ . Além disso, consideramos a presença de um acoplamento não mínimo,  $\xi$ , entre o campo  $\varphi(x)$  e a geometria representada pelo escalar de Ricci,  $R$ . Dois valores específicos para o acoplamento de curvatura são  $\xi = 0$  e  $\xi_c = \frac{D-1}{4D}$ , que corres-

---

<sup>1</sup>Na literatura, um campo “untwisted” é um campo que obedece condições de contorno periódicas, enquanto um campo “twisted” corresponde a um campo obedecendo condições de contorno anti-periódicas [2].

pondem ao acoplamento mínimo e conforme, respectivamente. Vamos assumir também a existência de potenciais vetores constantes

$$A_\mu = (0, 0, A_\phi, 0, A_z, 0, \dots, 0) , \quad (4.8)$$

com  $A_\phi = -q\Phi_\phi/(2\pi)$  e  $A_z = -\Phi_z/L$ , sendo  $\Phi_\phi$  e  $\Phi_z$  os fluxos magnéticos correspondentes. Na teoria de quântica de campos, a condição (4.6) muda o espectro de flutuações do vácuo quando comparado com o caso de dimensões não-compactas e, como consequência, a densidade de corrente induzida no vácuo também muda.

No espaço-tempo definido por (4.5) e na presença do potencial vetor dado acima, a Eq. (4.7) fica

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} + ieA_\phi \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial z} + ieA_z \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial w^2} - \frac{(1-D)}{w} \frac{\partial}{\partial w} + \frac{M(D, m, \xi)}{w^2} - \sum_{i=5}^D \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} \right] \varphi(x) = 0 , \quad (4.9)$$

onde  $M(D, m, \xi) = a^2 m^2 - \xi D(D+1)$ .<sup>2</sup>

A equação acima é completamente separável, e sua solução de energia positiva, regular na origem, é dada por

$$\varphi(x) = C w^{\frac{D}{2}} J_\nu(pw) J_{q|n+\alpha|}(\lambda r) e^{-iEt + iqn\phi + ik_z z + i\vec{k} \cdot \vec{x}_\parallel} . \quad (4.10)$$

Na expressão acima,  $\vec{x}_\parallel$  representa as coordenadas ao longo das  $(D-4)$  dimensões extras, e  $\vec{k}$  o momento correspondente. Além disso,

$$\begin{aligned} \nu &= \sqrt{\frac{D^2}{4} + a^2 m^2 - \xi D(D+1)}, \\ E &= \sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2 + (k_z + eA_z)^2}, \\ \alpha &= \frac{eA_\phi}{q} = -\frac{\Phi_\phi}{\Phi_0}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

com  $\Phi_0 = \frac{2\pi}{e}$ , o quantum de fluxo. Em (4.10)  $J_\mu(z)$  representa a função de Bessel [107].

---

<sup>2</sup>Na obtenção da Eq. (4.9) foram utilizados os seguintes símbolos de Christoffel:  $\Gamma_{\theta\theta}^r = -r$ ,  $\Gamma_{\theta\theta}^w = \frac{r^2}{w}$ ,  $\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}$ ,  $\Gamma_{tw}^t = \Gamma_{wt}^t = \Gamma_{rw}^r = \Gamma_{wr}^r = \Gamma_{\theta w}^\theta = \Gamma_{w\theta}^\theta = \Gamma_{tt}^w = \Gamma_{ww}^w = -\Gamma_{rr}^w = -\Gamma_{ii}^w = -\Gamma_{iw}^i = -\frac{1}{w}$ , onde  $i = 4, \dots, D$ .

Note que a solução na direção radial é dada em termos de uma função de Bessel, que é a solução padrão em problemas com simetria cilíndrica; isto é, a solução na direção radial,  $J_{q|n+\alpha|}(\lambda r)$ , é uma consequência da simetria cilíndrica ao redor do eixo da corda cósmica.

A condição de quasi-periodicidade (4.6) fornece uma discretização do número quântico  $k_z$  como mostrado abaixo:

$$k_z = k_l = \frac{2\pi}{L}(l + \beta), \quad \text{com} \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.12)$$

Logo,

$$E = E_l = \sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2 + \tilde{k}_l^2}, \quad (4.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{k}_l &= \frac{2\pi}{L}(l + \tilde{\beta}), \\ \tilde{\beta} &= \beta + \frac{eA_z L}{2\pi} = \beta - \frac{\Phi_z}{\Phi_0}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

A constante  $C$  em (4.10) pode ser obtida através da condição de normalização

$$\int d^D x \sqrt{|g|} g^{00} \varphi_{\sigma'}^*(x) \varphi_{\sigma}(x) = \frac{1}{2E} \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad (4.15)$$

onde o símbolo delta no lado direito é entendido como a função delta de Dirac para os números quânticos contínuos,  $\lambda$ ,  $p$  e  $\vec{k}$ , e a delta de Kronecker para os números quânticos discretos,  $n$  e  $k_l$ . De (4.15), obtemos

$$|C| = \sqrt{\frac{qa^{1-D}\lambda p}{2E(2\pi)^{D-3}L}}. \quad (4.16)$$

Assim, a função de onda normalizada é

$$\varphi_{\sigma}(x) = \sqrt{\frac{qa^{1-D}\lambda p}{2E(2\pi)^{D-3}L}} w^{\frac{D}{2}} J_{\nu}(pw) J_{q|n+\alpha|}(\lambda r) e^{-iE_l t + iqn\phi + ik_l z + i\vec{k} \cdot \vec{x}_{\parallel}}. \quad (4.17)$$

As propriedades do estado de vácuo podem ser dadas pela função de Wightman de frequência positiva,  $W(x, x') = \langle 0 | \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}^*(x') | 0 \rangle$ , onde  $|0\rangle$  corresponde ao estado de vácuo

com respeito a um observador em repouso em relação à corda cósmica. Para calcular esta função, usamos a fórmula de soma dos modos

$$W(x, x') = \sum_{\sigma} \varphi_{\sigma}(x) \varphi_{\sigma}^*(x') . \quad (4.18)$$

Substituindo (4.17) em (4.18), obtemos

$$\begin{aligned} W(x, x') = & \frac{qa^{1-D}(ww')^{\frac{D}{2}}}{2(2\pi)^{D-3}L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inq\Delta\phi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d\vec{k} \int_0^{\infty} dp p \int_0^{\infty} d\lambda \lambda \\ & \times J_{q|n+\alpha|}(\lambda r) J_{q|n+\alpha|}(\lambda r') J_{\nu}(pw) J_{\nu}(pw') \frac{e^{-iE_l\Delta t + ik_l\Delta z + i\vec{k}\cdot\Delta\vec{x}_{\parallel}}}{E_l} , \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde  $\Delta t = t - t'$ ,  $\Delta\phi = \phi - \phi'$ ,  $\Delta z = z - z'$  e  $\Delta\vec{x}_{\parallel} = \vec{x}_{\parallel} - \vec{x}'_{\parallel}$ .

Para desenvolver a soma sobre o número quântico  $l$ , vamos aplicar a fórmula de soma de Abel-Plana [108], que é dada por

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l + \tilde{\beta}) f(|l + \tilde{\beta}|) &= \int_0^{\infty} du [g(u) + g(-u)] f(u) \\ &+ i \int_0^{\infty} du [f(iu) - f(-iu)] \sum_{j=\pm 1} \frac{g(iju)}{e^{2\pi(u+ij\tilde{\beta})} - 1} . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para este caso, podemos identificar

$$\begin{aligned} g(u) &= e^{2\pi i u \Delta z / L} \\ f(u) &= \frac{e^{-i\Delta t \sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2 + (2\pi u/L)^2}}}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2 + (2\pi u/L)^2}} , \end{aligned} \quad (4.21)$$

Usando (4.20), podemos escrever a função de Wightman como

$$W(x, x') = W_{\text{cs}}(x, x') + W_{\text{c}}(x, x') . \quad (4.22)$$

O primeiro termo representa a contribuição devido ao espaço AdS sem compactificação, que, para nossa análise, além de apresentar dependência nos fluxos magnéticos, também depende na estrutura cônica induzida pela corda cósmica. Quanto ao segundo termo, este é induzido pela compactificação e contém contribuições devido ao fluxo magnético circundado pelo eixo compactificado. Ambas expressões são explicitamente escritas em

(4.23) e (4.27), respectivamente.

O primeiro termo no lado direito de (4.22), obtido da primeira integral (4.20), pode ser escrito como

$$W_{\text{cs}}(x, x') = \frac{q(ww')^{\frac{D}{2}} e^{-ieA_z \Delta z}}{2(2\pi)^{D-2} a^{D-1}} \int d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}_{\parallel}} \int_0^{\infty} dpp J_{\nu}(pw) J_{\nu}(pw') \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inq\Delta\phi} \\ \times \int_0^{\infty} d\lambda \lambda J_{|n+\alpha|}(\lambda r) J_{|n+\alpha|}(\lambda r') \int dk_z e^{ik_z \Delta z} \frac{e^{-i\Delta t \sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2 + k_z^2}}}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2 + k_z^2}}, \quad (4.23)$$

onde definimos uma nova variável  $k_z = 2\pi u/L$ .<sup>3</sup> Agora, realizando uma rotação de Wick e usando a identidade

$$\frac{e^{-\Delta\tau\omega}}{\omega} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} ds e^{-s^2\omega^2 - \Delta\tau^2/(4s^2)}, \quad (4.24)$$

a integração sobre  $k_z$  pode ser computada, e o resultado é

$$W_{\text{cs}}(x, x') = \frac{q(ww')^{\frac{D}{2}} e^{-ieA_z \Delta z}}{(2\pi)^{D-2} a^{D-1}} \int d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}_{\parallel}} \int_0^{\infty} dpp J_{\nu}(pw) J_{\nu}(pw') \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inq\Delta\phi} \\ \times \int_0^{\infty} d\lambda \lambda J_{|n+\alpha|}(\lambda r) J_{|n+\alpha|}(\lambda r') \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-s^2(\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2) - (\Delta z^2 - \Delta t^2)/4s^2}. \quad (4.25)$$

Agora, vamos nos concentrar no segundo termo em (4.22). Definindo novamente a variável  $k_z = 2\pi u/L$ , a integral sobre esta variável deve ser considerada em dois intervalos distintos; no primeiro intervalo  $[0, \sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2}]$ , a integral desaparece, restando a contribuição advinda do segundo intervalo,  $[\sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2}, \infty)$ . Assim, levando em conta esta análise, obtemos

$$W_c(x, x') = \frac{q(ww')^{\frac{D}{2}} e^{-ieA_z \Delta z}}{(2\pi)^{D-2} a^{D-1}} \int d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}_{\parallel}} \int_0^{\infty} dpp J_{\nu}(pw) J_{\nu}(pw') \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inq\Delta\phi} \\ \times \int_0^{\infty} d\lambda \lambda J_{|n+\alpha|}(\lambda r) J_{|n+\alpha|}(\lambda r') \int_{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2}}^{\infty} dk_z \frac{\cosh(\Delta t \sqrt{k_z^2 - \lambda^2 - p^2 - \vec{k}^2})}{\sqrt{k_z^2 - \lambda^2 - p^2 - \vec{k}^2}} \\ \times \sum_{j=\pm 1}^{\infty} \frac{e^{-jk_z \Delta z}}{e^{Lk_z + 2\pi i j \tilde{\beta}} - 1}. \quad (4.26)$$

<sup>3</sup>Para o caso sem fluxos magnéticos e com corda cósmica ausente, isto é,  $q = 1$ , a expressão (4.23) se reduz à função de Wightman no espaço-tempo AdS puro.

Usando a expansão em série  $(e^y - 1)^{-1} = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-ly}$ , e com a ajuda da Ref. [109], é possível integrar sobre  $k_z$ , obtendo

$$\begin{aligned}
W_c(x, x') &= \frac{q(ww')^{\frac{D}{2}} e^{-ieA_z \Delta z}}{(2\pi)^{D-2} a^{D-1}} \int d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}_{\parallel}} \int_0^{\infty} dp p J_{\nu}(pw) J_{\nu}(pw') \\
&\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inq\Delta\phi} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda J_{q|n+\alpha|}(\lambda r) J_{q|n+\alpha|}(\lambda r') \\
&\times \sum_{j=\pm 1} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-2\pi i \tilde{\beta} j l} K_0 \left( \sqrt{(\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2)[(lL + j\Delta z)^2 - \Delta t^2]} \right).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Claramente, notamos que para  $L \rightarrow \infty$  a função de Wightman acima tende a zero. Usando a representação integral abaixo para a função de Macdonald [110],

$$K_{\nu}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{2} \right)^{\nu} \int_0^{\infty} d\tau \frac{e^{-\tau - x^2/4\tau}}{\tau^{\nu+1}}, \tag{4.28}$$

podemos reescrever a Eq. (4.27) como,

$$\begin{aligned}
W_c(x, x') &= \frac{q(ww')^{\frac{D}{2}} e^{-ieA_z \Delta z}}{(2\pi)^{D-2} a^{D-1}} \int d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}_{\parallel}} \int_0^{\infty} dp p J_{\nu}(pw) J_{\nu}(pw') \\
&\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inq\Delta\phi} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda J_{q|n+\alpha|}(\lambda r) J_{q|n+\alpha|}(\lambda r') \\
&\times \sum_{j=\pm 1} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-2\pi i \tilde{\beta} j l} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-s^2(\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2) - [(lL + j\Delta z)^2 - \Delta t^2]/4s^2}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Substituindo (4.25) e (4.29) em (4.22), e após algumas manipulações, obtemos uma expressão compacta para a função de Wightman total dada abaixo:

$$\begin{aligned}
W(x, x') &= \frac{q(ww')^{\frac{D}{2}} e^{-ieA_z \Delta z}}{(2\pi)^{D-2} a^{D-1}} \int d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}_{\parallel}} \int_0^{\infty} dp p J_{\nu}(pw) J_{\nu}(pw') \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inq\Delta\phi} \\
&\times \int_0^{\infty} d\lambda \lambda J_{q|n+\alpha|}(\lambda r) J_{q|n+\alpha|}(\lambda r') \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \tilde{\beta} l} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-s^2(\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2) - [(lL + j\Delta z)^2 - \Delta t^2]/4s^2}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Agora, usando a integral [110],

$$\int_0^{\infty} d\eta \eta e^{-\eta^2 s^2} J_{\gamma}(\eta \rho) J_{\gamma}(\eta \rho') = \frac{e^{-\frac{(\rho^2 + \rho'^2)}{4s^2}}}{2s^2} I_{\gamma} \left( \frac{\rho \rho'}{2s^2} \right), \tag{4.31}$$

onde  $I_{\gamma}(x)$  representa a função de Bessel modificada [107], podemos integrar sobre  $\lambda$ ,  $p$  e

$\vec{k}$ , obtendo

$$W(x, x') = \frac{qe^{-ieA_z\Delta z}}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}a^{D-1}} \left(\frac{ww'}{rr'}\right)^{\frac{D}{2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\tilde{\beta}l} \int_0^{\infty} d\chi \chi^{\frac{D}{2}-1} e^{-\chi u_l^2/2rr'} I_{\nu}\left(\frac{ww'}{rr'}\chi\right) \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iqn\Delta\phi} I_{q|n+\alpha|}(\chi), \quad (4.32)$$

onde introduzimos uma nova variável,  $\chi = rr'/2s^2$ , e definimos

$$u_l^2 = r^2 + r'^2 + w^2 + w'^2 + (lL + \Delta z)^2 + \Delta\vec{x}_{\parallel}^2 - \Delta t^2. \quad (4.33)$$

O parâmetro  $\alpha$  em (4.11) pode ser escrito na forma

$$\alpha = n_0 + \varepsilon, \text{ com } |\varepsilon| < \frac{1}{2}, \quad (4.34)$$

com  $n_0$  sendo um número inteiro. Isto nos permite somar sobre o número quântico  $n$  em (4.32), usando o resultado obtido na Ref. [111], dado como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iqn\Delta\phi} I_{q|n+\alpha|}(\chi) = \frac{1}{q} \sum_k e^{\chi \cos(2\pi k/q - \Delta\phi)} e^{i\alpha(2\pi k - q\Delta\phi)} \\ - \frac{e^{-iqn_0\Delta\phi}}{2\pi i} \sum_{j=\pm 1} j e^{ji\pi q|\varepsilon|} \int_0^{\infty} dy \frac{\cosh[qy(1 - |\varepsilon|)] - \cosh(|\varepsilon|qy) e^{-iq(\Delta\phi + j\pi)}}{e^{\chi \cosh(y)} [\cosh(qy) - \cos(q(\Delta\phi + j\pi))]}, \quad (4.35)$$

onde

$$-\frac{q}{2} + \frac{\Delta\phi}{\Phi_0} \leq k \leq \frac{q}{2} + \frac{\Delta\phi}{\Phi_0}. \quad (4.36)$$

Em resumo, a obtenção da expressão dada acima se dá pelo uso da representação integral para a função de Bessel modificada [107],

$$I_{q|n+\alpha|}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dy \cos(q|n+\alpha|y) e^{z \cos y} - \frac{\sin(\pi q|n+\alpha|)}{\pi} \int_0^{\infty} dy e^{-z \cosh y - q|n+\alpha|y}, \quad (4.37)$$

seguido pela soma do número quântico  $n$  e alguns passos intermediários adicionais.

Logo, a substituição de (4.35) em (4.32) nos permite integrar sobre  $\chi$  usando a fórmula [110]

$$\int_0^{\infty} dx x^{\mu-1} e^{-ux} I_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-(\mu-1/2)\pi i} Q_{\nu-1/2}^{\mu-1/2}(u)}{(u^2 - 1)^{\mu/2-1/4}}, \quad (4.38)$$

tal que o resultado final obtido é

$$\begin{aligned}
W(x, x') &= \frac{e^{-ieA_z\Delta z}}{(2\pi)^{\frac{D+1}{2}}a^{D-1}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\tilde{\beta}l} \left\{ \sum_k e^{i\alpha(2\pi k - q\Delta\phi)} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u_{lk}) \right. \\
&\quad - q \frac{e^{-iqn_0\Delta\phi}}{2\pi i} \sum_{j=\pm 1} j e^{ji\pi q|\varepsilon|} \int_0^\infty dy \frac{\cosh[(1-|\varepsilon|)qy] - \cosh(|\varepsilon|qy)e^{-iq(\Delta\phi+j\pi)}}{\cosh(qy) - \cos(q(\Delta\phi+j\pi))} \\
&\quad \times F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u_{ly}) \Big\}, \tag{4.39}
\end{aligned}$$

onde introduzimos a notação

$$\begin{aligned}
F_\gamma^\mu(u) &= e^{-i\pi\mu} \frac{Q_\gamma^\mu(u)}{(u^2 - 1)^{\mu/2}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma + \mu + 1)}{2^{\gamma+1}\Gamma(\gamma + 3/2)u^{\gamma+\mu+1}} F\left(\frac{\gamma + \mu}{2} + 1, \frac{\gamma + \mu + 1}{2}; \gamma + \frac{3}{2}; \frac{1}{u^2}\right). \tag{4.40}
\end{aligned}$$

com  $Q_\gamma^\mu(u)$  sendo a função associada de Legendre de segunda espécie e  $F(a, b; c; z)$  a função hipergeométrica [107]. Em (4.39), os argumentos da função  $F_\gamma^\mu$  são dados por

$$\begin{aligned}
u_{lk} &= 1 + \frac{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(2\pi k/q - \Delta\phi) + \Delta w^2 + (lL + \Delta z)^2 + \Delta \vec{x}_\parallel^2 - \Delta t^2}{2ww'} \\
u_{ly} &= 1 + \frac{r^2 + r'^2 + 2rr' \cosh(y) + \Delta w^2 + (lL + \Delta z)^2 + \Delta \vec{x}_\parallel^2 - \Delta t^2}{2ww'}. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Assim, a equação (4.39) é a expressão mais compacta para função de Wightman. Neste formato a função de Wightman pode ser escrita como a soma de diferentes componentes,

$$W(x, x') = W_{\text{AdS}}(x, x') + W_{\text{cs}}(x, x') + W_c(x, x'), \tag{4.42}$$

onde o primeiro termo é uma contribuição induzida puramente pela geometria AdS ( $k = 0$  e  $l = 0$ ), a segunda é devido à corda cósmica ( $k \neq 0$  e  $l = 0$ ) e o terceiro termo está associado à compactificação ( $l \neq 0$ ).

Tendo obtido o resultado acima, estamos em posição de calcular as densidades de corrente induzidas e o VEV do tensor energia-momento. Estes cálculos serão executados nas próximas seções.

## 4.2 Corrente bosônica

O operador densidade de corrente bosônica é dado por

$$\begin{aligned}\hat{j}_\mu(x) &= ie [\hat{\varphi}^*(x) D_\mu \hat{\varphi}(x) - (D_\mu \hat{\varphi})^* \hat{\varphi}(x)] \\ &= ie [\hat{\varphi}^*(x) \partial_\mu \hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}(x) (\partial_\mu \hat{\varphi}(x))^*] - 2e^2 A_\mu(x) |\hat{\varphi}(x)|^2 .\end{aligned}\quad (4.43)$$

Seu VEV pode ser calculado em termos da função de Wightman de frequência positiva como exibido abaixo:

$$\langle j_\mu(x) \rangle = ie \lim_{x' \rightarrow x} \{ (\partial_\mu - \partial'_\mu) W(x, x') + 2ie A_\mu W(x, x') \} . \quad (4.44)$$

Como veremos, este VEV é uma função periódica dos fluxos magnéticos  $\Phi_\phi$  e  $\Phi_z$  com período igual ao quantum de fluxo. Isto pode ser observado escrevendo o parâmetro  $\alpha$  como em (4.34).

No que segue abaixo nesta seção, consideramos apenas as componentes não nulas da densidade de corrente.

### 4.2.1 Componente azimutal da densidade de corrente

O VEV da densidade de corrente azimutal é dado por

$$\langle j_\phi(x) \rangle = ie \lim_{x' \rightarrow x} \{ (\partial_\phi - \partial'_\phi) W(x, x') + 2ie A_\phi W(x, x') \} . \quad (4.45)$$

Substituindo (4.19) na equação acima, podemos formalmente expressar a corrente azimutal como

$$\begin{aligned}\langle j_\phi(x) \rangle &= -\frac{qea^{1-D}w^D}{(2\pi)^{D-3}L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(n+\alpha) \int d\vec{k} \int_0^\infty \lambda J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) d\lambda \\ &\times \int_0^\infty p J_\nu^2(pw) dp \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2 + \tilde{k}_l^2}} .\end{aligned}\quad (4.46)$$

Identificando  $g(u) = 1$  e

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2 + (2\pi u/L)^2}}, \quad (4.47)$$

podemos usar (4.20) para desenvolver a soma sobre o número quântico  $l$ . Fazendo isto, o VEV é decomposto como

$$\langle j_\phi(x) \rangle = \langle j_\phi(x) \rangle_{\text{cs}} + \langle j_\phi(x) \rangle_c, \quad (4.48)$$

onde  $\langle j_\phi(x) \rangle_{\text{cs}}$  corresponde à contribuição induzida pela corda cósmica sem compactificação, que vem da primeira integral no lado direito da Eq. (4.20). Esta componente é

$$\begin{aligned} \langle j_\phi(x) \rangle_{\text{cs}} &= -\frac{2qew^D}{(2\pi)^{D-2}a^{D-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(n+\alpha) \int d\vec{k} \int_0^\infty d\lambda \lambda J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) \\ &\times \int_0^\infty p J_\nu^2(pw) dp \int_0^\infty \frac{dk_z}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2 + k_z^2}}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde definimos  $k_z = 2\pi u/L$ .

Usando a identidade

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2 + k_z^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty ds e^{-s^2(\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2 + k_z^2)}, \quad (4.50)$$

e (4.31) podemos realizar as integrais sobre todas as variáveis, exceto aquela sobre a variável  $s$ , obtendo

$$\begin{aligned} \langle j_\phi(x) \rangle_{\text{cs}} &= -\frac{eq^2w^D}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}a^{D-1}r^D} \int_0^\infty d\chi \chi^{\frac{D}{2}-1} e^{-\chi[1+(w/r)^2]} I_\nu\left(\frac{w^2\chi}{r^2}\right) \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+\varepsilon) I_{q|n+\varepsilon|}(\chi). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Note que escrevemos  $\alpha$  na forma (4.34) e também introduzimos uma variável  $\chi = r^2/2s^2$ . Na Ref. [50], uma expressão compacta para a soma sobre o número quântico  $n$  foi obtida.

Nós reproduzimos este resultado,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n + \varepsilon) I_{q|n+\varepsilon|}(\chi) &= \frac{2\chi}{q^2} \sum_{j=1}^{[q/2]'} \sin(2\pi j/q) \sin(2\pi j\varepsilon) e^{\chi \cos(2\pi j/q)} \\ &+ \frac{\chi}{q\pi} \int_0^{\infty} dy \sinh(y) \frac{e^{-\chi \cosh(y)} g(q, \varepsilon, y)}{\cosh(qy) - \cos(\pi q)}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde  $[q/2]$  representa a parte inteira de  $q/2$  e o primo no sinal de soma significa que no caso  $q = 2p$  o termo  $k = q/2$  deve ser multiplicado por um fator  $1/2$ . Além disso, a função  $g(q, \varepsilon, y)$  é definida como

$$g(q, \varepsilon, y) = \sin(q\pi\varepsilon) \sinh((1 - |\varepsilon|)qy) - \sinh(q\varepsilon y) \sin((1 - |\varepsilon|)\pi q). \quad (4.53)$$

Substituindo o resultado acima em (4.51) e fazendo uso da fórmula (4.38), após alguns passos intermediários, obtemos

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_{\text{cs}} &= \frac{4ea^{-(1+D)}}{(2\pi)^{\frac{D+1}{2}}} \left[ \sum_{j=1}^{[q/2]'} \sin(2\pi j/q) \sin(2\pi j\varepsilon) F_{\nu-1/2}^{(D+1)/2}(u_j) \right. \\ &+ \left. \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{\sinh(2y) g(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(\pi q)} F_{\nu-1/2}^{(D+1)/2}(u_y) \right], \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde os argumentos das funções são dados por

$$\begin{aligned} u_j &= 1 + 2(r/w)^2 \sin^2(\pi j/q), \\ u_y &= 1 + 2(r/w)^2 \cosh^2(y). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Note que a densidade de corrente  $\langle j^\phi \rangle_{\text{cs}}$  depende das coordenadas  $r$  e  $w$  através da razão  $r/w$ , que é a distância própria a partir da corda cósmica,  $r_p = ar/w$ , medida em unidades de  $a$ . Esta propriedade é uma consequência da máxima simetria do espaço-tempo AdS.

De (4.54), podemos ver que  $\langle j^\phi(x) \rangle_{\text{cs}}$  é uma função ímpar de  $\varepsilon$  com um período igual ao quantum de fluxo,  $\Phi_0 = 2\pi/e$ . Note também que, para  $\varepsilon = 0$ , esta contribuição é nula; este é um efeito tipo Ahanorov-Bohm. Além disso, para  $1 \leq q < 2$ , o primeiro termo do lado direito da Eq. (4.54) não está presente. Na Fig. 4.1 apresentamos o comportamento da corrente azimutal como uma função de  $\varepsilon$ , considerando  $D = 4$ , o acoplamento mínimo de curvatura,  $\xi = 0$ , e  $r/w = ma = 1$ . Como podemos ver, a intensidade da corrente

depende fortemente no valor de  $q$ . Aumentando  $q$ , a intensidade da densidade de corrente aumenta.

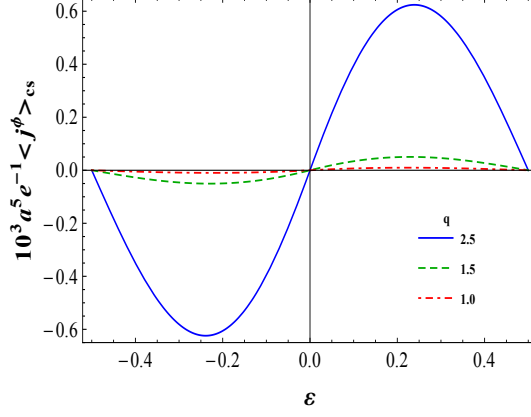


Figura 4.1: A densidade de corrente azimutal sem compactificação na Eq. (4.54) é apresentada, em unidades de “ $ea^{-5}$ ”, em termos de  $\varepsilon$ , para  $r/w = 1$ ,  $ma = 1$ ,  $\xi = 0$  e  $q = 1, 1.5$  e  $2.5$ .

Na Fig. 4.2 é mostrado o comportamento da corrente azimutal,  $\langle j^\phi(x) \rangle_{cs}$ , como função de  $r/w$  para  $D = 4$ , considerando  $\varepsilon = 0.25$  e  $\xi = 0$ , para diferentes valores do parâmetro  $q$ . No gráfico do lado esquerdo, adotamos  $ma = 1$ , e no do lado direito  $ma = 5$ .

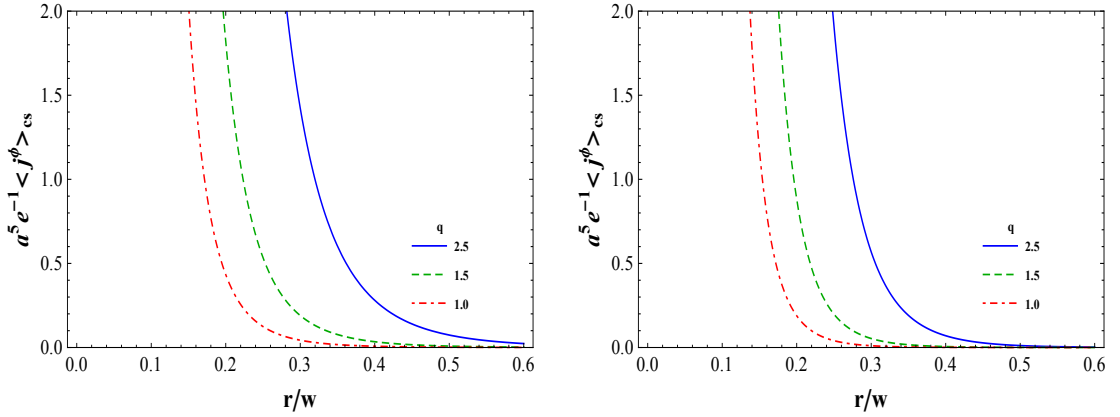


Figura 4.2: A densidade de corrente azimutal sem compactificação em unidades de “ $ea^{-5}$ ”, para  $D = 4$  na Eq. (4.54), é esboçada em termos da distância própria,  $r/w$ , para  $\varepsilon = 0.25$ ,  $\xi = 0$  e  $q = 1, 1.5, 2.5$ . O gráfico do lado esquerdo é para  $ma = 1$ , enquanto o gráfico do lado direito é para  $ma = 5$ .

Após a análise numérica de  $\langle j^\phi(x) \rangle_{cs}$ , vamos desenvolver seu comportamento para alguns regimes específicos das variáveis físicas. Começaremos considerando  $r/w \rightarrow 0$ . Neste limite, podemos usar a fórmula assintótica da função hipergeométrica para pequenos

argumentos [107], de forma que podemos reescrever a Eq. (4.54) como

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_{\text{cs}} &\approx \frac{4e\Gamma(\frac{D+1}{2})}{(4\pi)^{\frac{D+1}{2}}} \left(\frac{w}{ar}\right)^{D+1} \left[ \sum_{j=1}^{[q/2]'} \frac{\cot(\pi j/q) \sin(2\pi j\varepsilon)}{\sin^{D-1}(\pi j/q)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\tanh(y)}{\cosh^{D-1}(y)} \frac{g(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(\pi q)} \right]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

À parte do fator conforme,  $(w/a)^{(D+1)}$ , a expressão acima coincide com aquela correspondente no espaço-tempo de Minkowski para pontos próximos da corda cósmica [50]. Por outro lado, para  $r/w \gg 1$ , temos

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_{\text{cs}} &\approx \frac{2^{1-2\nu} e\Gamma(D/2 + \nu + 1)}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\nu + 1) a^{D+1}} \left(\frac{w}{r}\right)^{D+2\nu+2} \left\{ \sum_{j=1}^{[q/2]'} \frac{\cot(\pi j/q) \sin(2\pi j\varepsilon)}{\sin^{D+2\nu}(\pi j/q)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\tanh(y)}{\cosh^{D+2\nu}(y)} \frac{g(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(\pi q)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Note que este resultado está em contraste com o decaimento exponencial para a densidade de corrente azimutal induzida por uma corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski [50].

Para um campo escalar sem massa e conformalmente acoplado, temos que  $\nu = 1/2$ , e ao expressar a função de Legendre associada em termos da função hipergeométrica [107, 110], podemos escrever uma expressão mais conveniente para  $F_{\nu-1/2}^{(D+1)/2}(u)$  [48], dada por

$$F_0^{(D+1)/2}(u) = -\frac{\Gamma(\frac{D+1}{2})}{2} \left[ (1+u)^{-(D+1)/2} - (u-1)^{-(D+1)/2} \right]. \quad (4.58)$$

Substituindo (4.58) em (4.54), obtemos

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_{\text{cs}} &= \left(\frac{w}{a}\right)^{D+1} \left\{ \frac{4e\Gamma(\frac{D+1}{2})}{(4\pi)^{\frac{D+1}{2}} r^{(D+1)}} \left[ \sum_{j=1}^{[q/2]'} \frac{\cos(\pi j/q) \sin(2\pi j\varepsilon)}{\sin^D(\pi j/q)} \right. \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\sinh(y)}{\cosh(2qy) - \cos(\pi q)} \frac{g(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh^D(y)} \right] \\ &\quad - \frac{2e\Gamma(\frac{D+1}{2})}{(4\pi)^{\frac{D+1}{2}} r^{(D+1)}} \left[ \sum_{j=1}^{[q/2]'} \sin(2\pi j/q) \sin(2\pi j\varepsilon) \left( \frac{w^2}{r^2} + \sin^2(\pi j/q) \right)^{-\frac{D+1}{2}} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\sinh(2y) g(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(\pi q)} \left( \frac{w^2}{r^2} + \cosh^2(y) \right)^{-\frac{D+1}{2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Notamos que dois termos distintos estão presentes na expressão acima. À parte do fator conforme, o primeiro termo coincide com a densidade de corrente azimutal associada a um campo escalar sem massa induzida no espaço-tempo de Minkowski [50]. Esta contribuição é divergente para  $r \rightarrow 0$ . Quanto ao segundo termo, este corresponde a uma contribuição nova, que é induzida pela fronteira localizada em  $w = 0$ . Esta contribuição é finita no núcleo da corda para  $w \neq 0$ . Além disso, para  $r \gg w$ , este segundo termo tende a cancelar o primeiro.

A contribuição induzida pela compactificação para a corrente azimutal,  $\langle j_\phi(x) \rangle_c$ , pode ser obtida usando-se (4.26). Assim, temos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi(x) \rangle_c &= -\frac{2qew^D}{(2\pi)^{D-2}a^{D-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(n+\alpha) \int d\vec{k} \int_0^\infty \lambda J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) d\lambda \\ &\times \int_0^\infty p J_\nu^2(pw) dp \int_{\sqrt{\lambda^2+p^2+\vec{k}^2}}^\infty \frac{dk_z}{\sqrt{k_z^2 - \lambda^2 - p^2 - \vec{k}^2}} \\ &\times \sum_{j=\pm 1} \frac{1}{e^{Lk_z+2\pi i j \tilde{\beta}} - 1}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

A fim de proceder em nossa análise, se faz necessário utilizar a expansão em série  $(e^y - 1)^{-1} = \sum_{l=1}^\infty e^{-ly}$ . Além disso, com a ajuda da Ref. [110], podemos integrar sobre  $k_z$ , obtendo

$$\begin{aligned} \langle j_\phi(x) \rangle_c &= -\frac{4qew^D}{(2\pi)^{D-2}a^{D-1}} \sum_{l=1}^\infty \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \sum_{n=-\infty}^\infty q(n+\alpha) \int d\vec{k} \int_0^\infty d\lambda \lambda J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) \\ &\times \int_0^\infty dp p J_\nu^2(pw) K_0 \left( lL \sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2} \right). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Usando a representação integral para a função de Macdonald dada em (4.28), é possível integrar sobre a variável  $\lambda$ ,  $p$  e  $\vec{k}$ , obtendo

$$\begin{aligned} \langle j_\phi(x) \rangle_c &= -\frac{2q^2ew^D}{(2\pi)^{D/2}a^{D-1}r^D} \sum_{l=1}^\infty \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^\infty d\chi \chi^{(D-2)/2} e^{-\chi[1+(l^2L^2+2w^2)/2r^2]} \\ &\times I_\nu \left( \frac{w^2\chi}{r^2} \right) \sum_{n=-\infty}^\infty (n+\varepsilon) I_{q|n+\varepsilon|}(\chi), \end{aligned} \quad (4.62)$$

onde escrevemos  $\alpha$  na forma (4.34) e definimos a variável,  $\chi = \frac{2tr^2}{(lL)^2}$ . Agora, usando a fórmula de soma dada em (4.52), somos capazes de realizar a integral sobre  $\chi$ , obtendo a

forma final da contribuição para a densidade de corrente azimutal induzida pela compactificação,

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_c &= \frac{8ea^{-(D+1)}}{(2\pi)^{(D+1)/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \left[ \sum_{j=1}^{[q/2]'} \sin(2\pi j/q) \sin(2\pi j \varepsilon) F_{\nu-1/2}^{(D+1)/2}(v_{lj}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\sinh(2y) g(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(\pi q)} F_{\nu-1/2}^{(D+1)/2}(v_{ly}) \right], \end{aligned} \quad (4.63)$$

com

$$\begin{aligned} v_{lj} &= 1 + \frac{(lL)^2 + 4r^2 \sin^2(\pi j/q)}{2w^2} \\ v_{ly} &= 1 + \frac{(lL)^2 + 4r^2 \cosh^2(y)}{2w^2}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Da expressão acima, podemos ver que a contribuição devido à compactificação na densidade de corrente azimutal é uma função par de  $\tilde{\beta}$  e é uma função ímpar do fluxo magnético ao longo do núcleo da corda, com período igual a  $\Phi_0$ . Em particular, no caso do campo bosônico untwisted,  $\langle j^\phi(x) \rangle_c$  é uma função par do fluxo magnético circundado pela dimensão compactificada. Na Fig. 4.3, apresentamos o comportamento do VEV em (4.63) como uma função de  $\tilde{\beta}$ , para  $D = 4$ , considerando  $ma = 1$ ,  $\xi = 0$ ,  $\varepsilon = 0.25$  e valores distintos de  $q$ . Como podemos ver, além de  $\langle j^\phi(x) \rangle_c$  apresentar uma forte dependência do parâmetro  $q$ , sua direção depende do valor de  $\tilde{\beta}$ .

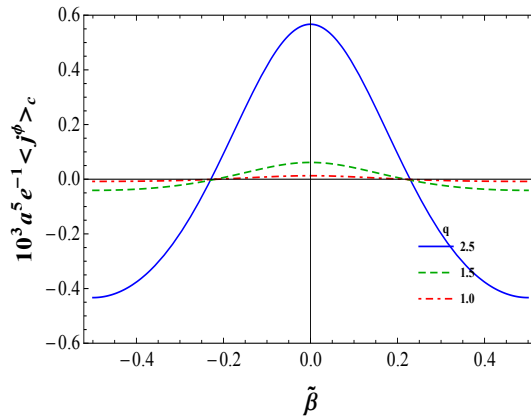


Figura 4.3: A densidade de corrente azimutal induzida pela compactificação, em unidades de “ $ea^{-5}$ ” e para  $D = 4$ , é exibida em termos de  $\tilde{\beta}$  para  $ma = 1$ ,  $\xi = 0$ ,  $\varepsilon = 0.25$  e  $q = 1, 1.5$  e  $2.5$ .

No regime  $L/w \gg 1$ , (4.63) apresenta o seguinte comportamento assintótico:

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_c &\approx \frac{2^{1-2\nu} e \Gamma(D/2 + \nu + 1)}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\nu + 1) a^{D+1}} \left(\frac{w}{L}\right)^{D+2\nu+2} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \\ &\times \left\{ \sum_{j=1}^{[q/2]'} \sin(2\pi j/q) \sin(2\pi j\varepsilon) \left[ \frac{l^2}{4} + \left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin^2(\pi j/q) \right]^{-\frac{D}{2}-\nu-1} \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\sinh(2y) g(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(\pi q)} \left[ \frac{l^2}{4} + \left(\frac{r}{L}\right)^2 \cosh^2(y) \right]^{-\frac{D}{2}-\nu-1} \right\}. \quad (4.65) \end{aligned}$$

Note que este resultado também está em contraste com o caso do espaço-tempo de Minkowski, onde o decaimento para campos massivos é exponencial [50].

Para um campo escalar sem massa conformalmente acoplado  $D = 4$ , uma expressão mais simples pode ser obtida. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \langle j^\phi(x) \rangle_c &= \left(\frac{w}{aL}\right)^5 \frac{3e}{\pi^2} \left\{ \sum_{j=1}^{[q/2]'} \sin(2\pi j/q) \sin(2\pi j\varepsilon) \left[ G_c(\tilde{\beta}, \rho_j) - G_c(\tilde{\beta}, \sigma_j) \right] \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\sinh(2y) g(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(\pi q)} \left[ G_c(\tilde{\beta}, \eta(y)) - G_c(\tilde{\beta}, \tau(y)) \right] \right\}, \quad (4.66) \end{aligned}$$

onde definimos a função

$$G_c(\tilde{\beta}, x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi l \tilde{\beta})}{(l^2 + x^2)^{5/2}}, \quad (4.67)$$

e introduzimos novas variáveis

$$\begin{aligned} \rho_j &= \frac{2r \sin(\pi j/q)}{L}, & \eta(y) &= \frac{2r \cosh(y)}{L} \\ \sigma_j &= \frac{2}{L} \sqrt{w^2 + r^2 \sin^2(\pi j/q)}, & \tau(y) &= \frac{2}{L} \sqrt{w^2 + r^2 \cosh^2(y)}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Similarmente a Eq. (4.59), duas contribuições distintas aparecem em (4.66). A contribuição positiva deve-se apenas à compactificação, e a contribuição negativa é induzida pela fronteira em  $w = 0$ . Podemos observar também que, para  $r \gg w$ , estas contribuições tendem a se cancelar entre si.

### 4.2.2 Densidade de corrente ao longo da dimensão extra compactificada

Nesta subseção, queremos analisar a densidade de corrente ao longo do eixo compactificado, nomeada como corrente axial. Como veremos, devido à compactificação, uma corrente axial será induzida. Esta corrente tende a zero no limite  $L \rightarrow \infty$ . O VEV da corrente axial é calculado por

$$\langle j_z(x) \rangle = ie \lim_{x' \rightarrow x} \{(\partial_z - \partial'_z)W(x, x') + 2ieA_z W(x, x')\}. \quad (4.69)$$

Substituindo a Eq. (4.19) na expressão acima e usando o fato de que  $A_z = -\Phi_z/L$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle j_z(x) \rangle &= -\frac{qea^{1-D}w^D}{(2\pi)^{D-3}L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\vec{k} \int_0^{\infty} \lambda J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) d\lambda \int_0^{\infty} p J_{\nu}^2(pw) dp \\ &\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{k}_l}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2 + \tilde{k}_l^2}}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde  $\tilde{k}_l$  é dado por (4.14).

A soma sobre o número quântico  $l$  é novamente realizada usando a fórmula de Abel-Plana dada em (4.20). Neste caso, identificamos  $g(u) = 2\pi u/L$ , e  $f(u)$  é dada por (4.47). A primeira integral no lado direito é zero, devido ao fato de que  $g(u)$  é uma função ímpar. Logo, ficamos apenas com a segunda integral. Assim, temos

$$\begin{aligned} \langle j_z(x) \rangle &= -\frac{2iqea^{1-D}w^D}{(2\pi)^{D-2}} \int d\vec{k} \int_0^{\infty} p J_{\nu}^2(pw) dp \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) d\lambda \\ &\times \int_{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2}}^{\infty} dk_z \frac{k_z}{\sqrt{k_z^2 - \lambda^2 - p^2 - \vec{k}^2}} \sum_{j=\pm 1} \frac{j}{e^{Lk_z + 2\pi i j \tilde{\beta}} - 1}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

onde definimos a variável  $k_z = 2\pi u/L$ . Novamente, usando a expansão em série  $(e^y - 1) = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-ly}$ , na expressão acima, ficamos com

$$\begin{aligned}
\langle j_z(x) \rangle &= -\frac{4qea^{1-D}w^D}{(2\pi)^{D-2}} \sum_{l=1}^{\infty} \sin(2\pi l\tilde{\beta}) \int d\vec{k} \int_0^{\infty} p J_{\nu}^2(pw) dp \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda J_{q|n+\alpha|}^2(\lambda r) d\lambda \\
&\times \int_{\sqrt{\lambda^2+p^2+\vec{k}^2}}^{\infty} dk_z \frac{k_z e^{-lLk_z}}{\sqrt{k_z^2 - \lambda^2 - p^2 - \vec{k}^2}} .
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Podemos avaliar a integral sobre  $k_z$  com a ajuda da Ref. [110], e o resultado é dado em termos da função de Macdonald de primeira ordem,  $K_1(z)$ . Usando a representação integral (4.28) novamente, e a propriedade  $K_{\nu}(y) = K_{-\nu}(y)$ , obtemos

$$\int_{\sqrt{\lambda^2+p^2+\vec{k}^2}}^{\infty} dk_z \frac{k_z e^{-lLk_z}}{\sqrt{k_z^2 - \lambda^2 - p^2 - \vec{k}^2}} = \frac{1}{lL} \int_0^{\infty} dt e^{-t-(lL)^2(\lambda^2+p^2+\vec{k}^2)/4t} . \tag{4.73}$$

Substituindo (4.73) em (4.72), é possível calcular as integrais sobre  $\lambda$ ,  $p$  e  $\vec{k}$ , obtendo

$$\begin{aligned}
\langle j_z(x) \rangle &= -\frac{2qea^{1-D}w^DL}{(2\pi)^{D/2}r^{D+2}} \sum_{l=1}^{\infty} l \sin(2\pi l\tilde{\beta}) \int_0^{\infty} d\chi \chi^{D/2} e^{-\chi[1+(l^2L^2+2w^2)/2r^2]} \\
&\times I_{\nu}\left(\frac{w^2\chi}{r^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{q|n+\varepsilon|}(\chi) ,
\end{aligned} \tag{4.74}$$

onde introduzimos a variável  $\chi = 2tr^2/(lL)^2$ . A soma sobre  $n$  pode ser encontrada na Ref. [50] e também pode ser obtida a partir de (4.35) tomando-se  $\Delta\varphi = 0$  na mesma. O resultado desta soma é

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{q|n+\varepsilon|}(\chi) &= \frac{e^{\chi}}{q} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{e^{-\chi \cosh(y)} f(q, \varepsilon, y)}{\cosh(qy) - \cos(\pi q)} \\
&+ \frac{2}{q} \sum_{k=1}^{[q/2]'} \cos(2\pi k\varepsilon) e^{\chi \cos(2\pi k/q)} .
\end{aligned} \tag{4.75}$$

A função  $f(q, \varepsilon, y)$  é definida como

$$f(q, \varepsilon, y) = \sin[(1 - |\varepsilon|)q\pi] \cosh(|\varepsilon|qy) + \sin(|\varepsilon|q\pi) \cosh[(1 - |\varepsilon|)qy]. \tag{4.76}$$

Por fim, substituindo (4.75) em (4.74), obtemos

$$\begin{aligned} \langle j_z(x) \rangle = & -\frac{2qea^{1-D}w^DL}{(2\pi)^{D/2}r^{D+2}} \sum_{l=1}^{\infty} l \sin(2\pi l\tilde{\beta}) \int_0^{\infty} d\chi \chi^{D/2} e^{-\chi[1+(l^2L^2+2w^2)/2r^2]} I_{\nu}\left(\frac{w^2\chi}{r^2}\right) \\ & \times \left[ \frac{e^{\chi}}{q} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{e^{-\chi \cosh(y)} f(q, \varepsilon, y)}{\cosh(qy) - \cos(\pi q)} + \frac{2}{q} \sum_{k=1}^{[q/2]'} \cos(2\pi k\varepsilon) e^{\chi \cos(2\pi k/q)} \right]. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Neste ponto, podemos decompor a corrente acima como

$$\langle j_z(x) \rangle = \langle j_z(x) \rangle_c^{(0)} + \langle j_z(x) \rangle_c^{(q,\varepsilon)}. \quad (4.78)$$

onde o primeiro termo do lado direito da expressão acima

$$\langle j^z(x) \rangle_c^{(0)} = \frac{4ea^{-(1+D)}L}{(2\pi)^{\frac{D+1}{2}}} \sum_{l=1}^{\infty} l \sin(2\pi l\tilde{\beta}) F_{\nu-1/2}^{(D+1)/2}(u_{l0}), \quad (4.79)$$

com  $u_{l0}$  dado abaixo por (4.82), é puramente devido à compactificação. Note que esta expressão não depende de  $\varepsilon$  e  $q$ . Para um campo escalar sem massa conformalmente acoplado e tomando  $D = 4$ , esta contribuição fica

$$\langle j^z(x) \rangle_c^{(0)} = \left(\frac{w}{a}\right)^5 \frac{3e}{2\pi^2 L^4} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi\tilde{\beta}l)}{l^4} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l \sin(2\pi\tilde{\beta}l)}{[l^2 + (\frac{2w}{L})^2]^{\frac{5}{2}}} \right\}. \quad (4.80)$$

A segunda contribuição para a corrente axial depende do fluxo magnético e do parâmetro associado à corda cósmica. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \langle j^z(x) \rangle_c^{(q,\varepsilon)} = & \frac{8ea^{-(1+D)}L}{(2\pi)^{\frac{D+1}{2}}} \sum_{l=1}^{\infty} l \sin(2\pi l\tilde{\beta}) \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \cos(2\pi k\varepsilon) F_{\nu-1/2}^{(D+1)/2}(u_{lk}) \right. \\ & \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(\pi q)} F_{\nu-1/2}^{(D+1)/2}(u_{ly}) \right], \end{aligned} \quad (4.81)$$

onde adotamos a seguinte notação

$$\begin{aligned} u_{lk} &= 1 + \frac{(lL)^2 + 4r^2 \sin^2(\pi k/q)}{2w^2} \\ u_{ly} &= 1 + \frac{(lL)^2 + 4r^2 \cosh^2(y)}{2w^2}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Note que este termo depende da distância radial,  $r$ , e é finito no núcleo da corda. Nós

também podemos notar que a densidade de corrente axial desaparece para valores inteiros e semi-inteiros de  $\tilde{\beta}$ . Em particular, para  $\tilde{\beta} = 0$ , este VEV também é nulo, sendo este um efeito tipo Ahanorov-Bohm. Na Fig. 4.4, exibimos o comportamento da densidade de corrente axial, Eq. (4.81), para  $D = 4$  e como função de  $\tilde{\beta}$ , para  $\varepsilon = 0$  e  $\varepsilon = 0.25$ , considerando  $ma = 1$ ,  $\xi = 0$ ,  $L/a = 1$  e valores distintos de  $q$ .

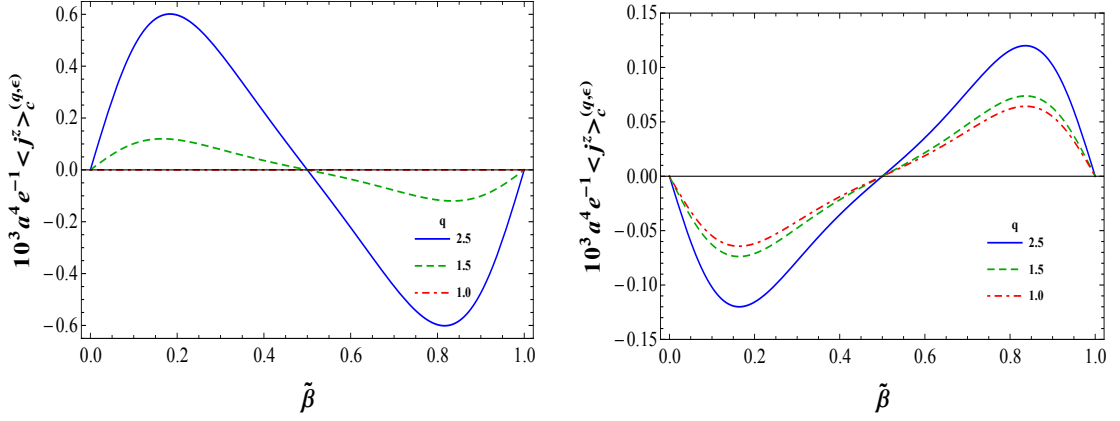


Figura 4.4: A densidade de corrente axial é apresentada para  $D = 4$ , em unidades de “ $ea^{-4}$ ”, como função de  $\tilde{\beta}$  para  $ma = 1$ ,  $\xi = 0$ ,  $L/a = 1$  e  $q = 1, 1.5$  e  $2.5$ . No gráfico do lado esquerdo consideramos  $\varepsilon = 0$ , enquanto no gráfico do lado direito nós tomamos  $\varepsilon = 0.25$ .

Podemos também analisar a corrente axial no regime  $L/w \gg 1$ . Usando o comportamento assintótico da função hipergeométrica para grandes valores dos argumentos, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \langle j^z(x) \rangle_c^{(q, \varepsilon)} &\approx \frac{2^{1-2\nu} e \Gamma(D/2 + \nu + 1) L}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\nu + 1) a^{D+1}} \left( \frac{w}{L} \right)^{D+2\nu+2} \sum_{l=1}^{\infty} l \sin(2\pi l \tilde{\beta}) \\ &\times \left\{ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \cos(2\pi k \varepsilon) \left[ \frac{l^2}{4} + \left( \frac{r}{L} \right)^2 \sin^2(\pi k/q) \right]^{-\frac{D}{2}-\nu-1} \right. \\ &\left. - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(\pi q)} \left[ \frac{l^2}{4} + \left( \frac{r}{L} \right)^2 \cosh^2(y) \right]^{-\frac{D}{2}-\nu-1} \right\}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Por fim, para um campo escalar sem massa acoplado conformalmente e assumindo  $D = 4$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle j^z(x) \rangle_c^{(q, \varepsilon)} &= \left( \frac{w}{a} \right)^5 \frac{3e}{\pi^2 L^4} \left\{ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \cos(2\pi k \varepsilon) \left[ V_c(\tilde{\beta}, \rho_k) - V_c(\tilde{\beta}, \sigma_k) \right] \right. \\ &\left. - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(\pi q)} \left[ V_c(\tilde{\beta}, \eta(y)) - V_c(\tilde{\beta}, \tau(y)) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.84)$$

onde introduzimos a função

$$V_c(\tilde{\beta}, x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l \sin(2\pi\tilde{\beta}l)}{(l^2 + x^2)^{5/2}}, \quad (4.85)$$

nos integrandos de (4.84), com os correspondentes argumentos definidos em (4.68).

### 4.3 Valor esperado no vácuo do campo ao quadrado

O VEV do campo ao quadrado é formalmente obtido por meio da função de Wightman tomando-se o limite de coincidência, como mostrado abaixo:

$$\langle |\varphi|^2 \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} W(x, x'). \quad (4.86)$$

Substituindo (4.42) na equação acima, podemos ver que  $\langle |\varphi|^2 \rangle$  apresenta três contribuições:

$$\langle |\varphi|^2 \rangle = \langle |\varphi|^2 \rangle_{\text{AdS}} + \langle |\varphi|^2 \rangle_{\text{cs}} + \langle |\varphi|^2 \rangle_{\text{c}}. \quad (4.87)$$

Entretanto, a expressão acima fornece um resultado divergente. Devido ao fato de que a presença da corda cósmica não introduz curvatura adicional na região exterior ( $r > 0$ ), esta divergência é proveniente da contribuição induzida apenas pelo espaço-tempo AdS puro. A análise do VEV do campo ao quadrado renormalizado no espaço-tempo AdS foi desenvolvida na literatura [14–18]. Nesta seção, queremos nos concentrar nas contribuições induzidas pela corda cósmica e a compactificação.

Considerando a componente da função de Wightman associada à corda cósmica em (4.39), e subsequentemente tomando o limite de coincidência, obtemos

$$\begin{aligned} \langle |\varphi|^2 \rangle_{\text{cs}} &= \frac{2}{(2\pi)^{\frac{D+1}{2}} a^{D-1}} \left[ \sum'_{k=1}^{[q/2]} \cos(2\pi k\varepsilon) F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(v_k) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(v_y) \right], \end{aligned} \quad (4.88)$$

onde introduzimos as seguinte notações:

$$\begin{aligned} v_k &= 1 + 2(r/w)^2 \sin^2(\pi k/q), \\ v_y &= 1 + 2(r/w)^2 \cosh^2(y), \end{aligned} \quad (4.89)$$

sendo,

$$f(q, \varepsilon, 2y) = \sin(|\varepsilon|q\pi) \cosh((1 - |\varepsilon|)2qy) + \cosh(2|\varepsilon|qy) \sin((1 - |\varepsilon|)q\pi). \quad (4.90)$$

Alguns comportamentos assintóticos para a Eq. (4.88) são apresentados abaixo. Começaremos considerando  $r/w \rightarrow 0$ . Neste caso, podemos usar a fórmula assintótica para a função hipergeométrica para pequenos argumentos [107], de modo que a Eq. (4.88) neste regime fica

$$\langle |\varphi|^2 \rangle_{\text{cs}} \approx \frac{2\Gamma(\frac{D-1}{2})}{(4\pi)^{\frac{D+1}{2}}} \left(\frac{w}{ar}\right)^{D-1} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \frac{\cos(2\pi k\varepsilon)}{\sin^{D-1}(\pi k/q)} - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y) \cosh^{1-D}(y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right]. \quad (4.91)$$

Note que o resultado acima depende do inverso da distância própria a partir da corda, com potência  $(D-1)$ . Isto implica que, para um valor fixo de  $w$ ,  $\langle |\varphi|^2 \rangle_{\text{cs}}$  tende ao infinito para pontos próximos da corda cósmica.

Por outro lado, para  $w \ll r$  e usando a expressão assintótica abaixo [48],

$$F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \approx \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(D/2 + \nu)}{2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)u^{D/2+\nu}}, \quad (4.92)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \langle |\varphi|^2 \rangle_{\text{cs}} &\approx \frac{2^{-2\nu}\Gamma(D/2 + \nu)}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}\Gamma(\nu+1)a^{D-1}} \left(\frac{w}{r}\right)^{D+2\nu} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \frac{\cos(2\pi k\varepsilon)}{\sin^{D+2\nu}(\pi k/q)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y) \cosh^{-D-2\nu}(y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right]. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Da expressão acima, podemos observar que para valores fixos da coordenada radial  $r$ , a contribuição induzida pela corda cósmica tende a zero na vizinhança da fronteira AdS com  $w^{D+2\nu}$ .

Para um campo escalar sem massa acoplado conformalmente, temos  $\nu = 1/2$ , e expressando a função associada de Legendre em termos da função hipergeométrica [107, 110], podemos escrever uma forma mais conveniente para  $F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u)$  [48], dada por

$$F_0^{(D-1)/2}(u) = -\frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2} \left[ (1+u)^{-(D-1)/2} - (u-1)^{-(D-1)/2} \right]. \quad (4.94)$$

Substituindo (4.94) em (4.88), obtemos

$$\langle |\varphi|^2 \rangle_{\text{cs}} = \left( \frac{w}{a} \right)^{D-1} \left[ \langle |\phi|^2 \rangle_{\text{cs}}^{(\text{M})} + \langle |\phi|^2 \rangle_{\text{c,b}}^{(\text{M})} \right], \quad (4.95)$$

onde

$$\langle |\varphi|^2 \rangle_{\text{cs}}^{(\text{M})} = \frac{2\Gamma(\frac{D-1}{2})}{(4\pi)^{\frac{D+1}{2}} r^{D-1}} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \frac{\cos(2\pi k\varepsilon)}{\sin^{D-1}(\pi k/q)} - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y) \cosh^{1-D}(y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \quad (4.96)$$

é o VEV para a geometria da corda cósmica sem fronteira corrigido pela presença do fluxo magnético ao longo do núcleo da corda. O segundo termo em (4.95),

$$\begin{aligned} \langle |\varphi|^2 \rangle_{\text{cs,b}}^{(\text{M})} &= -\frac{2\Gamma(\frac{D-1}{2})}{(4\pi)^{\frac{D+1}{2}}} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \cos(2\pi k\varepsilon) \left( w^2 + r^2 \sin^2(\pi k/q) \right)^{-\frac{(D-1)}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \left( w^2 + r^2 \cosh^2(y) \right)^{-\frac{(D-1)}{2}} \right], \quad (4.97) \end{aligned}$$

é a contribuição induzida pela fronteira localizada em  $w = 0$ . Esta contribuição é finita no núcleo da corda para  $w \neq 0$ . Além disso, para  $r \gg w$  esta contribuição tende a cancelar (4.96), entre colchetes na Eq. (4.95).

Na Fig. 4.5, é exibido o comportamento do VEV do campo ao quadrado associado à corda cósmica, como uma função de  $r/w$  que, novamente, é a distância própria a partir da corda cósmica em unidades do raio de curvatura do espaço-tempo AdS,  $a$ . Notamos a partir desta figura que os parâmetros associados ao fluxo magnético ao longo da corda,  $\varepsilon$ , e o acoplamento de curvatura,  $\xi$ , podem mudar a intensidade e comportamento do campo ao quadrado.

Agora, considerando a componente  $l \neq 0$  em (4.39) e tomando o limite de coin-

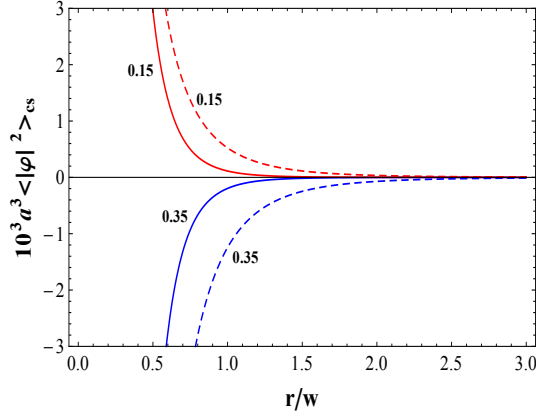


Figura 4.5: O VEV do campo ao quadrado induzido pela corda cósmica sem compactificação em unidades de  $a^{-3}$ , para  $D = 4$  na Eq. (4.88), é exibido em termos de  $r/w$ , para  $q = 2.5$  e  $m = 0$ . Os números próximos às curvas correspondem aos valores do parâmetro  $\varepsilon$ . As linhas cheias correspondem ao caso do campo sem massa minimamente acoplado, enquanto as linhas tracejadas correspondem ao caso do campo sem massa conformalmente acoplado.

cidência, obtemos

$$\langle |\varphi|^2 \rangle_c = \langle |\varphi|^2 \rangle_c^{(0)} + \langle |\varphi|^2 \rangle_c^{(q,\varepsilon)}, \quad (4.98)$$

onde o primeiro termo do lado direito da expressão acima é

$$\langle |\varphi|^2 \rangle_c^{(0)} = \frac{2}{(2\pi)^{\frac{D+1}{2}} a^{D-1}} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi \tilde{\beta} l) F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(v_{l0}), \quad (4.99)$$

com  $v_{l0}$  dado em (4.103) para  $k = 0$ . Note que esta é uma contribuição puramente topológica e não depende dos parâmetros  $q$  e  $\varepsilon$ . Para valores de  $v_{l0}$  próximos da unidade, a expressão acima tem a forma assintótica

$$\langle |\varphi|^2 \rangle_c^{(0)} \approx \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D+1}{2}} a^{D-1}} \left(\frac{w}{L}\right)^{D-1} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi \tilde{\beta} l)}{l^{D-1}}. \quad (4.100)$$

No caso de um campo sem massa acoplado conformalmente, temos

$$\langle |\varphi|^2 \rangle_c^{(0)} = \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{2\pi^{\frac{D+1}{2}} a^{D-1}} \left(\frac{w}{L}\right)^{D-1} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi \tilde{\beta} l) \left\{ \frac{1}{l^{D-1}} - \frac{1}{[l^2 + (\frac{2w}{L})^2]^{\frac{D-1}{2}}} \right\}. \quad (4.101)$$

Note que a expressão acima vai a zero próximo da fronteira AdS. Por outro lado, para pontos próximos do horizonte AdS, (4.101) coincide com a Eq. (4.100).

Quanto ao segundo termo em (4.98), podemos ver que este depende dos fluxos magnéticos e do parâmetro associado à corda cósmica,  $q$ , e é dado por

$$\begin{aligned} \langle |\varphi|^2 \rangle_c^{(q,\varepsilon)} &= \frac{4}{(2\pi)^{\frac{D+1}{2}} a^{D-1}} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi \tilde{\beta} l) \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \cos(2\pi k \varepsilon) F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(v_{lk}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(v_{ly}) \right], \end{aligned} \quad (4.102)$$

onde

$$\begin{aligned} v_{lk} &= 1 + \frac{(lL)^2 + 4r^2 \sin^2(\pi k/q)}{2w^2} \\ v_{ly} &= 1 + \frac{(lL)^2 + 4r^2 \cosh^2(y)}{2w^2}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Na Fig. 4.6, apresentamos graficamente o comportamento de (4.98) como uma função de  $L/w$ , considerando diferentes valores de  $\varepsilon$ . No gráfico do lado esquerdo assumimos  $\tilde{\beta} = 0$ , enquanto no gráfico do lado direito tomamos  $\tilde{\beta} = 0.5$ . Observamos a partir destes gráficos que o VEV do campo ao quadrado depende fortemente do parâmetro  $\tilde{\beta}$ .

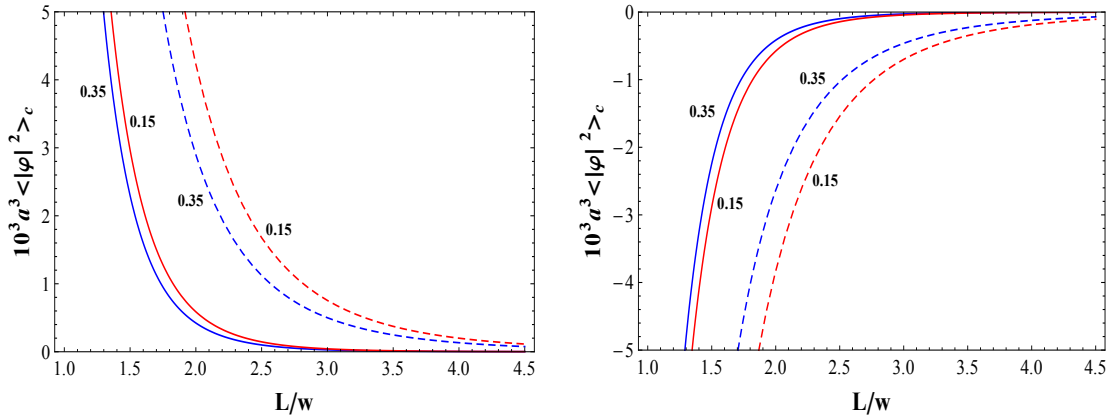


Figura 4.6: O VEV do campo ao quadrado induzido pela compactificação em unidades de  $a^{-3}$ , para  $D = 4$  na Eq. (4.98), é exibido como uma função de  $L/w$ , para  $q = 2.5$ ,  $r/w = 0.5$  e  $m = 0$ . Os números próximos às curvas correspondem aos valores do parâmetro  $\varepsilon$ . O gráfico do lado esquerdo corresponde a  $\tilde{\beta} = 0$  e o do lado direito a  $\tilde{\beta} = 0.5$ . As linhas cheias correspondem ao caso do campo sem massa minimamente acoplado, enquanto as linhas tracejadas correspondem ao campo sem massa acoplado conformalmente.

Podemos notar que  $\langle |\varphi|^2 \rangle_c^{(q,\varepsilon)}$  é finito para  $r = 0$ . No regime  $L/w \gg 1$ , a Eq.

(4.102) assume a seguinte forma assintótica,

$$\begin{aligned} \langle |\varphi|^2 \rangle_c^{(q,\varepsilon)} &\approx \frac{2^{1-2\nu} \Gamma(D/2 + \nu)}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\nu + 1) a^{D-1}} \left(\frac{w}{L}\right)^{D+2\nu} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \\ &\times \left\{ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \cos(2\pi k \varepsilon) \left[ \frac{l^2}{4} + \left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin^2(\pi k/q) \right]^{-\frac{D}{2}-\nu} \right. \\ &\left. - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(\pi q)} \left[ \frac{l^2}{4} + \left(\frac{r}{L}\right)^2 \cosh^2(y) \right]^{-\frac{D}{2}-\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Para um campo sem massa acoplado conformalmente, temos

$$\begin{aligned} \langle |\varphi|^2 \rangle_c^{(q,\varepsilon)} &= \frac{4\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{D+1}{2}} a^{D-1}} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi \tilde{\beta} l) \left\{ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \cos(2\pi k \varepsilon) \left[ \left( \frac{r^2}{w^2} \sin^2(\pi k/q) + \frac{(lL)^2}{4w^2} \right)^{-\frac{D-1}{2}} \right. \right. \\ &- \left. \left( 1 + \frac{r^2}{w^2} \sin^2(\pi k/q) + \frac{(lL)^2}{4w^2} \right)^{-\frac{D-1}{2}} \right] - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \\ &\times \left[ \left( \frac{r^2}{w^2} \cosh^2(y) + \frac{(lL)^2}{4w^2} \right)^{-\frac{D-1}{2}} - \left( 1 + \frac{r^2}{w^2} \cosh^2(y) + \frac{(lL)^2}{4w^2} \right)^{-\frac{D-1}{2}} \right] \Big\}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Assim, podemos ver que a equação acima é expressa em termos de uma soma infinita de funções elementares.

## 4.4 VEV do tensor energia-momento

Tendo calculado a função de Wightman e o VEV do campo ao quadrado, estamos em posição de calcular o VEV do tensor energia-momento fazendo-se uso da fórmula (2.20):

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = (D_\mu D_\nu^\dagger + D_\mu^\dagger D_\nu) W(x, x') - 2[\xi R_{\mu\nu} + \xi \nabla_\mu \nabla_\nu - (\xi - 1/4) g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha] \langle |\varphi|^2 \rangle, \quad (4.106)$$

onde  $D_\mu = \nabla_\mu + ieA_\mu$ , e

$$R_{\mu\nu} = -Dg_{\mu\nu}/a^2, \quad (4.107)$$

é o tensor de Ricci calculado no espaço-tempo AdS  $(D+1)$ -dimensional. Similarmente ao VEV do campo ao quadrado, o VEV do tensor energia-momento pode ser decomposto

como

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{AdS}} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{cs}} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{c}} . \quad (4.108)$$

Como consequência da máxima simetria do espaço-tempo AdS e do estado de vácuo sob consideração, temos  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{AdS}} = \text{const} \cdot g_{\mu\nu}$  [18]. Logo, o VEV correspondente do tensor energia-momento no espaço-tempo AdS puro é completamente determinado pelo seu traço. Nesta seção, estamos interessados nas contribuições induzidas pela corda cósmica e pela compactificação. Por conveniência, iremos desenvolver cada termo separadamente.

O operador  $\nabla_\alpha \nabla^\alpha$  atuando nas quantidades dadas em (4.88) e (4.98), respectivamente, fornecem

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \langle |\varphi|^2 \rangle_{\text{cs}} &= -\frac{8}{(2\pi)^{\frac{D+1}{2}} a^{D+1}} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \cos(2\pi k\varepsilon) g(v_k, \sin(\pi k/q)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y) g(v_y, \cosh(y))}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right] \end{aligned} \quad (4.109)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \langle |\varphi|^2 \rangle_{\text{c}} &= -\frac{16}{(2\pi)^{\frac{D+1}{2}} a^{D+1}} \sum_{l=1}^\infty \cos(2\pi \tilde{\beta} l) \left\{ \sum_{k=0}^{[q/2]'} \cos(2\pi k\varepsilon) \left[ g(v_{lk}, \sin(k\pi/q)) \right. \right. \\ &\quad \left. - \frac{(lL \sin(\pi k/q))^2}{w^2} \frac{d^2}{dv_{lk}^2} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(v_{lk}) \right] - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty \frac{dy f(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \\ &\quad \left. \times \left[ g(v_{ly}, \cosh(y)) - \frac{(lL \cosh(y))^2}{w^2} \frac{d^2}{dv_{ly}^2} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(v_{ly}) \right] \right\} , \end{aligned} \quad (4.110)$$

com a notação

$$g(u, v) = (u-1)(2v^2+u-1) \frac{d^2}{du^2} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) + \left[ 2v^2 + \frac{D+2}{2}(u-1) \right] \frac{d}{du} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) . \quad (4.111)$$

O sinal asterisco na soma sobre  $k$  na equação acima indica que a componente  $k=0$  deve ser multiplicada por um fator  $1/2$ .

Para a geometria do espaço-tempo sob consideração, somente os operadores diferenciais  $\nabla_r \nabla_w$  e  $\nabla_\mu \nabla_\mu$  contribuem quando atuando no VEV do campo ao quadrado. As contribuições remanescentes são provenientes das derivadas covariantes eletromagnéticas atuando na função de Wightman. Quanto ao termo associado à coordenada azimutal, é

mais conveniente atuar o operador  $D_\phi D_\phi^\dagger$  em (4.32), e subsequentemente tomar o limite de coincidência na variável angular. Seguindo este procedimento, obtemos:

$$S(q, \alpha, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^2(n + \alpha)^2 I_{q|n+\alpha|}(\chi) , \quad (4.112)$$

onde  $\chi = rr'/2s^2$ . Esta soma pode ser desenvolvida fazendo-se uso da equação diferencial obedecida pela função de Bessel modificada. Assim, obtemos

$$S(q, \alpha, \chi) = \left( \chi^2 \frac{d^2}{d\chi^2} + \chi \frac{d}{d\chi} - \chi^2 \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{q|n+\alpha|}(\chi) , \quad (4.113)$$

onde a soma sobre  $n$  é dada por,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{q|n+\alpha|}(\chi) &= \frac{2}{q} \sum_{k=0}^{[q/2]'} \cos(2\pi k\alpha) e^{\chi \cos(2\pi k/q)} \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{e^{-\chi \cosh(2y)} f(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} , \end{aligned} \quad (4.114)$$

com a função  $f(q, \varepsilon, y)$  está definida em (4.76).

A contribuição induzida pela compactificação do tensor energia-momento é calculada fazendo-se uso das partes correspondentes na função de Wightman e o VEV do campo ao quadrado. Após longos, porém simples passos, obtemos (sem soma sobre o índice  $\mu$ )

$$\begin{aligned} \langle T_\mu^\mu \rangle_c &= -\frac{8}{(2\pi)^{\frac{D+1}{2}} a^{D+1}} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi \tilde{\beta} l) \left[ \sum_{k=0}^{[q/2]'} \cos(2\pi k\varepsilon) g_\mu^{(l)}(v_{lk}, \sin(\pi k/q)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y) g_\mu^{(l)}(v_{ly}, \cosh(y))}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right] , \end{aligned} \quad (4.115)$$

onde definimos a função

$$\begin{aligned} g_\mu^{(l)}(u, v) &= G_{\mu,l}^\mu(u, v) + (4\xi - 1) \left[ g(u, v) - \frac{(lLv)^2}{w^2} \frac{d^2}{du^2} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \right] \\ &\quad - \xi D F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u). \end{aligned} \quad (4.116)$$

A forma da função  $G_{\mu,l}^\mu$  para as diferentes componentes associadas ao índice  $\mu$  são dadas

pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
G_{0,l}^0(u, v) &= -[1 + 2\xi(u-1)] \frac{d}{du} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \\
G_{1,l}^1(u, v) &= [2v^2(1-2\xi) - 1 - 2\xi(u-1)] \frac{d}{du} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \\
&\quad + 2v^2(1-4\xi) \left[ u - 1 - \frac{(lL)^2}{2w^2} \right] \frac{d^2}{du^2} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \\
G_{2,l}^2(u, v) &= -[1 + 2v^2(2\xi-1) + 2\xi(u-1)] \frac{d}{du} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \\
&\quad - 2(1-v^2) \left[ u - 1 - \frac{(lL)^2}{2w^2} \right] \frac{d^2}{du^2} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \\
G_{3,l}^3(u, v) &= [(1-4\xi)(u-1) - 1] \frac{d}{du} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) + (u-1)^2(1-4\xi) \frac{d^2}{du^2} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \\
G_{4,l}^4(u, v) &= G_{0,l}^0(u, v) - \frac{(lL)^2}{w^2} \frac{d^2}{du^2} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u).
\end{aligned} \tag{4.117}$$

Quanto às componentes  $\mu = 5, \dots, D$ , associadas às dimensões extras não compactificadas, temos (sem soma sobre  $\mu$ )  $\langle T_\mu^\mu \rangle_c = \langle T_0^0 \rangle_c$ . Esta é uma consequência da invariância do problema com respeito às transformações de boost ao longo das dimensões extras não compactificadas.

Na Fig. 4.7, exibimos a componente da densidade de energia induzida pela compactificação para um valor fixo de  $q$  e diferentes valores de  $\varepsilon$ , para o campo escalar quântico sem massa acoplado minimamente e conformalmente.

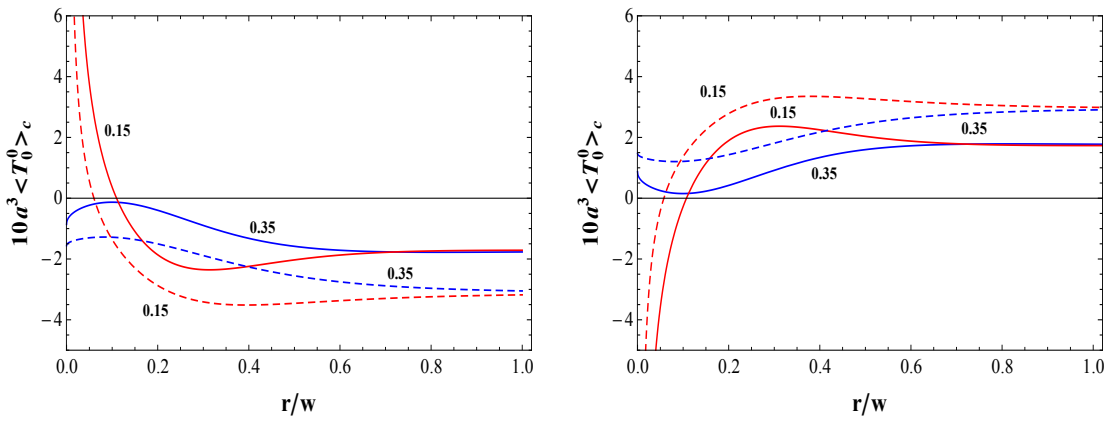


Figura 4.7: O VEV da componente da densidade de energia associada à compactificação é exibido para  $D = 4$ , em unidade de  $a^{-3}$ , como um função de  $r/w$ , para  $q = 3.5$ ,  $L/w = 1$  e  $m = 0$ . Os números próximos às curvas correspondem a valores de parâmetros  $\varepsilon$ . O gráfico do lado esquerdo corresponde a  $\tilde{\beta} = 0$  e o gráfico do lado direito a  $\tilde{\beta} = 0.5$ . As curvas cheias correspondem ao campo sem massa acoplado minimamente, enquanto as linhas tracejadas correspondem ao caso sem massa acoplado conformalmente.

Para as componentes não nulas fora da diagonal, temos

$$\begin{aligned} \langle T_3^1 \rangle_c &= -\frac{8}{(2\pi)^{\frac{D+1}{2}} a^{D+1}} \frac{w}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi \tilde{\beta} l) \left[ \sum_{k=0}^{[q/2]'} \cos(2\pi k \varepsilon) h^{(l)}(v_{lk}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y) h^{(l)}(v_{ly})}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \end{aligned} \quad (4.118)$$

onde definimos a função

$$\begin{aligned} h^{(l)}(u) &= \left( u - 1 - \frac{(lL)^2}{2w^2} \right) \left[ (1 - 2\xi) \frac{d}{du} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) + (u - 1)(1 - 4\xi) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{d^2}{du^2} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \right]. \end{aligned} \quad (4.119)$$

É possível mostrar que o tensor energia-momento induzido pela compactificação,  $\langle T_\mu^\mu \rangle_c$ , satisfaz a seguinte identidade:

$$\langle T_\mu^\mu \rangle_c = 2[D(\xi - \xi_c) \nabla_\mu \nabla^\mu \langle |\varphi|^2 \rangle_c + m^2 \langle |\varphi|^2 \rangle_c]. \quad (4.120)$$

Note que este tensor energia-momento possui traço nulo para o campo escalar quântico sem massa acoplado conformalmente. Além disso, como uma verificação adicional para as expressões em (4.115) e a componente fora da diagonal em (4.118), podemos ver que a equação de conservação covariante  $\nabla_\mu \langle T_\nu^\mu \rangle = 0$  é obedecida. Para a geometria sob consideração, esta equação de conservação é reduzida às seguintes relações:

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \langle T_1^1 \rangle_c) - \frac{1}{r} \langle T_2^2 \rangle_c - \frac{D+1}{w} \langle T_1^3 \rangle_c + \partial_w \langle T_1^3 \rangle_c = 0 \quad (4.121)$$

e

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \langle T_3^1 \rangle_c) + \partial_w \langle T_3^3 \rangle_c - \frac{D+1}{w} \langle T_3^3 \rangle_c + \frac{1}{w} \langle T_\mu^\mu \rangle_c = 0. \quad (4.122)$$

Para um campo escalar sem massa acoplado conformalmente, a componente da densidade

de energia,  $\langle T_0^0 \rangle_c$ , é

$$\begin{aligned} \langle T_0^0 \rangle_c &= \frac{4\Gamma(\frac{D+1}{2})}{(4\pi)^{\frac{D+1}{2}} D a^{D+1}} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi\tilde{\beta}l) \left\{ \sum_{k=0}^{[q/2]'} \cos(2\pi k\varepsilon) \left[ D f^{\frac{D-1}{2}}(\rho_{lk}) \right. \right. \\ &\quad - \left( D + 2s_k^2 + (2D+1)\rho_{lk} \right) f^{\frac{D+1}{2}}(\rho_{lk}) + (D+1) \left( \frac{r^2 s_k^4}{w^2} + \rho_{lk}^2 \right) f^{\frac{D+3}{2}}(\rho_{lk}) \Big] \\ &\quad - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \left[ D f^{\frac{D-1}{2}}(\rho_{ly}) - \left( D + 2s_y^2 + (2D+1)\rho_{ly} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left. f^{\frac{D+1}{2}}(\rho_{ly}) + (D+1) \left( \frac{r^2 s_y^4}{w^2} + \rho_{ly}^2 \right) f^{\frac{D+3}{2}}(\rho_{ly}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.123)$$

onde introduzimos a função

$$f^\alpha(\rho) = \frac{1}{\rho^\alpha} - \frac{1}{(1+\rho)^\alpha} \quad (4.124)$$

e a variável

$$\rho_{l\gamma} = \left( \frac{r s_\gamma}{w} \right)^2 + \left( \frac{lL}{2w} \right)^2, \quad (4.125)$$

com  $s_k = \sin(k\pi/q)$  e  $s_y = \cosh(y)$ .

A componente fora da diagonal no caso do campo escalar quântico sem massa é dada por

$$\begin{aligned} \langle T_3^1 \rangle_c &= -\frac{8\Gamma(\frac{D+3}{2})}{(4\pi)^{\frac{D+1}{2}} D a^{D+1}} \frac{r}{w} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi\tilde{\beta}l) \left\{ \sum_{k=0}^{[q/2]'} \cos(2\pi k\varepsilon) \sin^2(\pi k/q) \right. \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{r^2}{w^2} \sin^2(\pi k/q) + \frac{(lL)^2}{4w^2} \right]^{-\frac{D+3}{2}} - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y) \cosh^2(y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{r^2}{w^2} \cosh^2(y) + \frac{(lL)^2}{4w^2} \right]^{-\frac{D+3}{2}} \Big\}. \end{aligned} \quad (4.126)$$

A contribuição induzida pela corda cósmica no VEV do tensor energia-momento é calculado a partir de (4.106), fazendo-se uso da componente associada à corda cósmica da função de Wightman e do VEV do campo ao quadrado dado em (4.88). Após longos, porém simples passos, para a contribuição induzida pela corda cósmica, temos (sem soma

sobre  $\mu$ )

$$\begin{aligned} \langle T_\mu^\mu \rangle_{\text{cs}} &= -\frac{4}{(2\pi)^{\frac{D+1}{2}} a^{D+1}} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \cos(2\pi k\varepsilon) g_\mu^{(0)}(v_{0k}, \sin(\pi k/q)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y) g_\mu^{(0)}(v_{0y}, \cosh(y))}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \end{aligned} \quad (4.127)$$

onde

$$g_\mu^{(0)}(u, v) = G_{\mu,0}^\mu(u, v) + (4\xi - 1)g(u, v) - \xi D F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u), \quad (4.128)$$

e

$$\begin{aligned} G_{0,0}^0(u, v) &= -[1 + 2\xi(u-1)] \frac{d}{du} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \\ G_{1,0}^1(u, v) &= [2v^2(1-2\xi) - 1 - 2\xi(u-1)] \frac{d}{du} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \\ &\quad + 2v^2(1-4\xi)(u-1) \frac{d^2}{du^2} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \\ G_{2,0}^2(u, v) &= -[1 + 2v^2(2\xi-1) + 2\xi(u-1)] \frac{d}{du} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \\ &\quad - 2(u-1)(1-v^2) \frac{d^2}{du^2} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \\ G_{3,0}^3(u, v) &= [(1-4\xi)(u-1) - 1] \frac{d}{du} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \\ &\quad + (u-1)^2(1-4\xi) \frac{d^2}{du^2} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Quanto às demais componentes com  $\mu = 4, \dots, D$ , temos (sem soma sobre  $\mu$ )  $\langle T_\mu^\mu \rangle_{\text{cs}} = \langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}}$ .

Para a componente fora da diagonal, temos

$$\begin{aligned} \langle T_3^1 \rangle_{\text{cs}} &= -\frac{4}{(2\pi)^{\frac{D+1}{2}} a^{D+1}} \frac{w}{r} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \cos(2\pi k\varepsilon) h^{(0)}(v_k) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y) h^{(0)}(v_y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \end{aligned} \quad (4.130)$$

onde

$$h^{(0)}(u) = (u-1) \left[ (1-2\xi) \frac{d}{du} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) + (u-1)(1-4\xi) \frac{d^2}{du^2} F_{\nu-1/2}^{(D-1)/2}(u) \right]. \quad (4.131)$$

É possível mostrar que as expressões em (4.127) obedecem à condição de traço nulo para um campo escalar sem massa e acoplado conformalmente. As expressões dadas em (4.127) e (4.130) também satisfazem as equações de continuidade como aquelas presentes em (4.121) e (4.122).

Para um campo escalar sem massa acoplado conformalmente, a componente da densidade de energia,  $\langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}}$ , é dada por

$$\begin{aligned} \langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}} = & \frac{2\Gamma(\frac{D+1}{2})}{(4\pi)^{\frac{D+1}{2}} D a^{D+1}} \left\{ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \cos(2\pi k \varepsilon) \left[ D f^{\frac{D-1}{2}}(\rho_{0k}) \right. \right. \\ & - \left( D + 2s_k^2 + (2D+1)\rho_{0k} \right) f^{\frac{D+1}{2}}(\rho_{0k}) + (D+1) \left( \frac{r^2 s_k^4}{w^2} + \rho_{0k}^2 \right) f^{\frac{D+3}{2}}(\rho_{0k}) \left. \right] \\ & - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \left[ D f^{\frac{D-1}{2}}(\rho_{0y}) - \left( D + 2s_y^2 + (2D+1)\rho_{0y} \right) \right. \\ & \times \left. \left. f^{\frac{D+1}{2}}(\rho_{0y}) + (D+1) \left( \frac{r^2 s_y^4}{w^2} + \rho_{0y}^2 \right) f^{\frac{D+3}{2}}(\rho_{0y}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.132)$$

onde  $\rho_{0k}$  e  $\rho_{0y}$  são dados em (4.125) para  $l = 0$ , e a função  $f^\alpha(\rho)$  é definida em (4.124). Na Fig. 4.8, é mostrado o comportamento da densidade de energia na geometria da corda

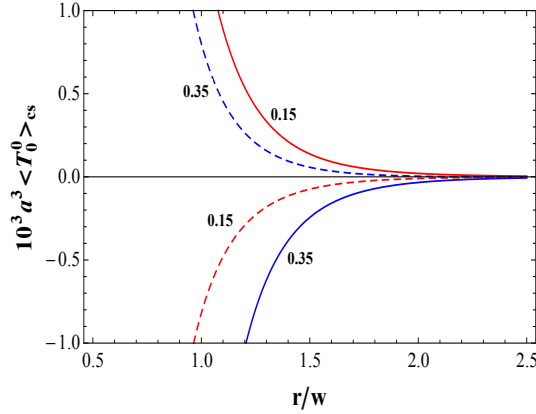


Figura 4.8: O VEV da densidade de energia na geometria da corda cósmica no espaço-tempo AdS sem compactificação é apresentado para  $D = 4$ , em unidades de  $a^{-3}$ , em termos de  $r/w$ , para  $q = 2.5$  e  $m = 0$ . Os números próximos as curvas referem-se aos valores do parâmetro  $\varepsilon$ . As linhas cheias correspondem ao campo sem massa acoplado minimamente, enquanto as linhas tracejadas correspondem ao caso do campo sem massa acoplado conformalmente.

cósmica em AdS sem compactificação,  $\langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}}$ , como função da distância própria da corda cósmica medida em unidades do raio de curvatura do espaço AdS,  $a$ . Podemos notar a partir desta figura que os parâmetros associados ao fluxo magnético ao longo da corda,  $\varepsilon$ , e ao

acoplamento de curvatura,  $\xi$ , podem efetivamente mudar a intensidade e comportamento da densidade de energia.

Para o caso do campo escalar sem massa acoplado conformalmente, a componente fora da diagonal do tensor energia-momento,  $\langle T_3^1 \rangle_{cs}$ , é escrita como

$$\begin{aligned} \langle T_3^1 \rangle_{cs} &= -\frac{4\Gamma(\frac{D+3}{2})}{(4\pi)^{\frac{D+1}{2}} D a^{D+1} w} r \left\{ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \cos(2\pi k \varepsilon) \sin^2(\pi k/q) \right. \\ &\times \left[ 1 + \frac{r^2}{w^2} \sin^2(\pi k/q) \right]^{-\frac{D+3}{2}} - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{f(q, \varepsilon, 2y) \cosh^2(y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \\ &\times \left. \left[ 1 + \frac{r^2}{w^2} \cosh^2(y) \right]^{-\frac{D+3}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.133)$$

Como podemos ver, no caso do campo escalar sem massa acoplado conformalmente, a equação acima é expressa em termos de funções elementares.

## Capítulo 5

# Correntes induzidas e polarização do vácuo fermiônico no espaço AdS

O presente capítulo contém algumas de nossas contribuições para o estudo das correntes induzidas e da polarização do vácuo fermiônico no espaço AdS com uma corda cósmica. Nossa análise consiste na investigação do VEV da densidade de corrente, condensado fermiônico e tensor energia-momento induzidos por um fluxo magnético ao longo de uma corda cósmica idealizada no espaço-tempo AdS em  $(4+1)$  dimensões, admitindo-se que a dimensão extra é compactificada e que também apresenta fluxo magnético circundado pelo seu eixo [96, 112, 113].

### 5.1 Modos fermiônicos

Nesta seção queremos obter os modos fermiônicos do campo espinorial de Dirac,  $\psi(x)$ , no espaço-tempo AdS  $(4+1)$ -dimensional na presença de uma corda cósmica e uma dimensão extra compactificada. O elemento de linha representando a geometria correspondente é dado por

$$ds^2 = e^{-2y/a} [dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2] - dy^2, \quad (5.1)$$

onde  $r \geq 0$  e  $\phi \in [0, 2\pi/q]$  definem as coordenadas na geometria cônica,  $(t, y) \in (-\infty, \infty)$  e o parâmetro  $a$  define o raio de curvatura correspondente e está relacionado à constante

cosmológica  $\Lambda$  e o escalar de Ricci  $R$  pelas fórmulas  $\Lambda = -6/a^2$  e  $R = -20/a^2$ . Assim como no capítulo anterior, é assumido que a corda está localizada ao longo do eixo  $y$ . Relembramos que o parâmetro  $q \geq 1$  define o déficit angular planar na superfície bi-dimensional perpendicular à corda, e que em particular para  $q = 1$  a Eq. (4.2) apresenta o espaço-tempo AdS na ausência de corda cósmica. Em coordenadas de Poincaré, o elemento de linha acima é escrito como

$$ds^2 = \left(\frac{a}{w}\right)^2 (dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dw^2 - dz^2) , \quad (5.2)$$

onde, novamente,  $w \in [0, \infty)$ . Por fim, recordamos que os valores limites da coordenada  $w$ ,  $w = 0$  e  $w = \infty$ , correspondem à fronteira AdS e o horizonte AdS, respectivamente.

Como já discutido no capítulo 2, a dinâmica de um campo espinorial quântico no espaço-tempo curvo acoplado a um campo de gauge,  $A_\mu$ , é dada pela seguinte equação

$$i\gamma^\mu (\nabla_\mu + ieA_\mu)\psi - sm\psi = 0 , \quad \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu, \quad s = \pm 1 , \quad (5.3)$$

onde  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac em um espaço-tempo curvo e  $\Gamma_\mu$  é a conexão espinorial. Além disso, relembramos que os dois possíveis valores de  $s$  correspondem às duas representações irredutíveis das matrizes de Dirac em um espaço-tempo de dimensão ímpar. Em termos das matrizes de Dirac no espaço-tempo plano,  $\gamma^{(a)}$ , as matrizes  $\gamma^\mu$  e  $\Gamma_\mu$  são dadas pelas relações

$$\gamma^\mu = e^\mu_{(a)} \gamma^{(a)}, \quad \Gamma_\mu = \frac{1}{4} \gamma^{(a)} \gamma^{(b)} e^\nu_{(a)} e_{(b)\nu;\mu} . \quad (5.4)$$

As bases vielbein,  $e^\mu_{(a)}$ , satisfazem a relação  $e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)} \eta^{ab} = g^{\mu\nu}$ , com  $\eta^{ab}$  sendo o tensor métrico no espaço-tempo de Minkowski.

Como mencionado acima, iremos assumir que a dimensão extra é compactificada. Esta compactificação é implementada assumindo-se que  $z \in [0, L]$ , e que o campo espinorial obedece à condição de quasi-periodicidade

$$\psi(t, r, \phi, w, z + L) = e^{2\pi i \beta} \psi(t, r, \phi, w, z) , \quad (5.5)$$

onde  $0 \leq \beta \leq 1$ . Novamente, os casos especiais  $\beta = 0$  e  $\beta = 1/2$  correspondem aos campos untwisted e twisted, respectivamente, ao longo da direção  $z$ .

Admitiremos que o conjunto de matrizes de Dirac no espaço-tempo plano é aquele apresentado anteriormente no capítulo 2:

$$\gamma^{(0)} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(a)} = -i \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & -\sigma_a \end{pmatrix}, \quad \text{com } a = 1, 2, 3, \quad \gamma^{(4)} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

onde  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  são as matrizes de Pauli. Como já mencionado, estas matrizes obedecem à álgebra de Clifford,  $\{\gamma^{(a)}, \gamma^{(b)}\} = 2\eta^{ab}$ . Admitiremos a seguinte base fünfbein:

$$e_{(a)}^\mu = \frac{w}{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q\phi) & -\sin(q\phi)/r & 0 & 0 \\ 0 & \sin(q\phi) & \cos(q\phi)/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

onde o índice  $a$  identifica as colunas desta matriz. Com esta escolha, as matrizes de Dirac no espaço-tempo curvo assumem a seguinte forma

$$\gamma^0 = \frac{w}{a} \gamma^{(0)}, \quad \gamma^l = -i \frac{w}{a} \begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & -\sigma^l \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = i \frac{w}{a} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

onde  $l = 1, 2, 3$  correspondem às coordenadas  $r, \phi, w$ . Nas respectivas expressões acima,  $\sigma^l$  são matrizes  $2 \times 2$  definidas como

$$\sigma^r = \begin{pmatrix} 0 & e^{-iq\phi} \\ e^{iq\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\phi = -\frac{i}{r} \begin{pmatrix} 0 & e^{-iq\phi} \\ -e^{iq\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Estas são as matrizes de Pauli no sistema de coordenadas  $(r, \phi, w)$ . Com esta escolha de matrizes, obtemos a seguinte conexão espinorial

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2a} \gamma^{(3)} \gamma_\mu + \frac{(1-q)}{2} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} \delta_\mu^\phi, \quad \Gamma_w = 0. \quad (5.10)$$

Além disso, o produto  $\gamma_\mu \Gamma^\mu$  presente na equação de movimento (5.3) é dado pela expressão

$$\gamma^\mu \Gamma_\mu = -\frac{2}{w} \gamma^w + \frac{1-q}{2r} \gamma^r. \quad (5.11)$$

Assim, substituindo (5.11) em (5.3), a equação de Dirac assume a seguinte forma:

$$\left[ \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - \frac{2}{w} \gamma^w + \frac{1-q}{2r} \gamma^r + ism \right] \psi = 0 . \quad (5.12)$$

Neste capítulo queremos considerar a presença de um fluxo magnético ao longo do núcleo da corda cósmica e outro fluxo magnético circundado pelo eixo compactificado. Assim, iremos considerar o seguinte potencial vetor

$$A_\mu = (0, 0, A_\phi, 0, A_z) . \quad (5.13)$$

Para soluções de energia positiva, assumindo a dependência temporal das autofunções na forma  $e^{-iEt}$  e que a simetria de boost ao longo da coordenada  $z$  implica em autofunções na forma  $e^{ik_z z}$ , podemos decompor o campo espinorial,  $\psi$ , como

$$\begin{aligned} \left( \sigma^l \partial_l - \frac{2}{w} \sigma^w + \frac{1-q}{2r} \sigma^r + ieA_\phi \sigma^\phi - \frac{sma}{w} \right) \varphi - i[E + (k_z + eA_z)] \chi &= 0, \\ \left( \sigma^l \partial_l - \frac{2}{w} \sigma^w + \frac{1-q}{2r} \sigma^r + ieA_\phi \sigma^\phi + \frac{sma}{w} \right) \chi + i[(k_z + eA_z) - E] \varphi &= 0 , \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde  $\varphi$  e  $\chi$  são as componentes superior e inferior do campo espinorial, respectivamente. Agora, resolvendo a segunda das equações acima para  $\chi$  e substituindo o correspondente resultado na primeira equação, obtemos a seguinte equação diferencial para  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} &\left\{ \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \left[ \partial_\phi + ieA_\phi - \frac{i(1-q)}{2} \sigma_w \right]^2 + \partial_w^2 - \frac{4}{w} \partial_w + \frac{6 - (sma)^2 - (-1)^l sma}{w^2} \right. \\ &\left. + [E^2 - \tilde{k}_z^2] \right\} \varphi = 0 , \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde introduzimos a notação  $\tilde{k}_z = k_z + eA_z$ . Para encontrar a solução da Eq. (5.15), adotaremos o seguinte Ansatz, compatível com a simetria cilíndrica do problema:

$$\varphi = \begin{pmatrix} C_1 R_1(r) W_1(w) e^{iqn_1 \phi} \\ C_2 R_2(r) W_2(w) e^{iqn_2 \phi} \end{pmatrix} , \quad (5.16)$$

sendo  $C_1$  e  $C_2$  constantes a serem determinadas. Substituindo o Ansatz acima em (5.15), podemos ver que a solução da equação radial, cuja forma é regular na corda cósmica, é expressa em termos da função de Bessel de primeira espécie,  $R_l(r) = J_{\beta_l}(\lambda r)$ , sendo sua

ordem para  $l = 1, 2$  dada por

$$\beta_1 = |q(n_1 + \alpha) - (1 - q)/2|, \quad \beta_2 = |q(n_2 + \alpha) + (1 - q)/2|, \quad (5.17)$$

com  $n_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Note que foi introduzido nas equações acima a notação  $\alpha = eA_\phi/q = -\Phi_\phi/\Phi_0$ , onde  $\Phi_0 = 2\pi/e$  é o quantum de fluxo. Quanto à equação diferencial associada à coordenada de Poincaré, a solução geral é dada em termos da combinação linear das funções  $w^{5/2}J_{\nu_l}(pw)$  e  $w^{5/2}Y_{\nu_l}(pw)$ , onde  $Y_\nu(x)$  é a função de Neumann e

$$\nu_l = ma + s(-1)^l/2. \quad (5.18)$$

Considerando  $ma \geq 1/2$ , as funções de Neumann devem ser descartadas, de acordo com a condição de normalizabilidade das funções dos modos, e assim devemos adotar a solução

$$W_l(w) = w^{5/2}J_{\nu_l}(pw). \quad (5.19)$$

Por outro lado, para  $ma < 1/2$ , a função de Neumann também é normalizável. A fim de especificar unicamente a solução, a condição de sacola de MIT [60] é imposta ao campo fermiônico próximo à fronteira AdS,  $w = \delta$ , que é subsequentemente levada a zero. Adotando tal procedimento, em [47] é mostrado que somente a função de Bessel pode ser considerada.

Quanto à energia associada à cada modo, esta é dada por

$$E = \sqrt{\lambda^2 + p^2 + \tilde{k}_z^2}. \quad (5.20)$$

Em notação compacta, a solução para a componente superior é escrita como

$$\varphi_l = C_l w^{5/2} J_{\beta_l}(\lambda r) J_{\nu_l}(pw) e^{iqn_l \phi}. \quad (5.21)$$

Substituindo (5.21) na primeira equação em (5.14), e após alguns passos intermediários, obtemos

$$\chi = w^{5/2} \begin{pmatrix} B_1 J_{\beta_1}(\lambda r) J_{\nu_2}(pw) e^{iqn_1 \phi} \\ B_2 J_{\beta_2}(\lambda r) J_{\nu_1}(pw) e^{iqn_2 \phi} \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

com as relações

$$n_2 = n_1 + 1, \quad \beta_2 = \beta_1 + \epsilon_{n_1}, \quad (5.23)$$

onde  $\epsilon_n = 1$  para  $n > -\alpha$  e  $\epsilon_n = -1$  para  $n < -\alpha$ . Os coeficientes  $B_{1,2}$  em (5.22) são dados por

$$B_1 = \frac{i}{E + \tilde{k}_z} (spC_1 - \epsilon_n \lambda C_2), \quad B_2 = \frac{i}{E + \tilde{k}_z} (\epsilon_n \lambda C_1 + spC_2). \quad (5.24)$$

Podemos ver a partir das componentes espinoriais superior e inferior dadas em (5.21) e (5.22), respectivamente, que a função de onda  $\psi$  é uma autofunção do momento angular total projetado ao longo do eixo onde se encontra a corda cósmica:

$$\hat{J}_w \psi = \left( -i\partial_\phi + \frac{q}{2} \Sigma^w \right) \psi = qj\psi, \quad \Sigma^w = \begin{pmatrix} \sigma^w & 0 \\ 0 & \sigma^w \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

onde

$$j = n_1 + 1/2, \quad j = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots \quad (5.26)$$

Note que as componentes da função de onda fermiônica obtida acima têm quatro coeficientes e duas equações relacionando estes coeficientes, explicitamente apresentadas em (5.24). Por outro lado, a condição de normalização da função de onda nos fornece uma relação adicional. Logo, um dos coeficientes permanece indeterminado e, a fim de determiná-lo, devemos impor uma condição adicional. A necessidade de impor esta condição se dá pelo fato de que os números quânticos  $\sigma = (\lambda, p, j, k_z)$  não especificam a função de onda fermiônica unicamente e, portanto, algum número quântico adicional é requerido.

A fim de especificar a segunda constante, vamos requerer que as seguintes relações sejam satisfeitas [114]:

$$B_1 = i\kappa C_1, \quad B_2 = \frac{C_2}{i\kappa}. \quad (5.27)$$

Substituindo as relações em (5.24) na expressão acima, obtemos

$$\kappa = s\kappa_\eta, \quad \text{onde } \kappa_\eta = \frac{-\tilde{k}_z + \eta\sqrt{\tilde{k}_z^2 + p^2}}{p}, \quad (5.28)$$

com  $\eta = \pm 1$ , e a relação

$$C_2 = -\frac{\epsilon_n \kappa_\eta}{\lambda} (E - \eta \sqrt{\tilde{k}_z^2 + p^2}) C_1, \quad (5.29)$$

para os coeficientes em (5.21). Note que agora a função de onda fermiônica é unicamente especificada pelo conjunto de números quânticos  $\sigma = \{\lambda, p, j, k_z, \eta\}$ . Os autovalores do número quântico  $k_z$  são determinados pela condição de quasi-periodicidade (5.5):

$$k_z = k_l = 2\pi(l + \beta)/L, \text{ com } l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.30)$$

Com base em todas as considerações acima, a função de onda fermiônica de energia positiva pode ser expressa como

$$\psi_\sigma^{(+)}(x) = C_\sigma^{(+)} w^{5/2} \begin{pmatrix} J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\nu_1}(pw) \\ -s\epsilon_j \kappa_\eta b_\eta^{(+)} J_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) J_{\nu_2}(pw) e^{iq\phi} \\ i s \kappa_\eta J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\nu_2}(pw) \\ i \epsilon_j b_\eta^{(+)} J_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) J_{\nu_1}(pw) e^{iq\phi} \end{pmatrix} e^{iq(j-1/2)\phi + i k_l z - i E t}, \quad (5.31)$$

onde  $\epsilon_j = 1$  para  $j > -\alpha$  e  $\epsilon_j = -1$  para  $j < -\alpha$ , e a ordem da função de Bessel é definida como:

$$\beta_j = q|j + \alpha| - \epsilon_j/2. \quad (5.32)$$

Note que  $\epsilon_j = \epsilon_n$ . A energia é expressa em termos de  $\lambda$ ,  $p$  e  $\tilde{k}_l$  pela relação

$$E = \sqrt{\lambda^2 + p^2 + \tilde{k}_l^2}, \quad (5.33)$$

onde  $\tilde{k}_l = 2\pi(l + \tilde{\beta})/L$ , com

$$\tilde{\beta} = \beta + e A_z L / (2\pi) = \beta - \Phi_z / \Phi_0. \quad (5.34)$$

Na Eq. (5.31) e no que segue abaixo, utilizamos a notação

$$b_\eta^{(\pm)} = \frac{E \mp \eta \sqrt{\tilde{k}_l^2 + p^2}}{\lambda}. \quad (5.35)$$

Note que os coeficientes acima satisfazem a relação  $b_\eta^{(+)} b_\eta^{(-)} = 1$ .

O coeficiente  $C_\sigma^{(+)}$  em (5.31) é determinado pela condição de normalização

$$\int d^4x \sqrt{\gamma} (\psi_\sigma^{(+)})^\dagger \psi_{\sigma'}^{(+)} = \delta_{\sigma, \sigma'} , \quad (5.36)$$

onde  $\gamma$  é o determinante da parte espacial do tensor métrico. Além disso,  $\delta_{\sigma, \sigma'}$  é entendido como a função delta de Dirac para os números quânticos contínuos  $(\lambda, p)$  e a delta de Kronecker para os números quânticos discretos  $(\eta, j, l)$ . Substituindo os autoespinores (5.31) na condição de normalização (5.36), e usando as integrais padrões envolvendo produtos das funções de Bessel [110], obtemos

$$|C_\sigma^{(+)}|^2 = \frac{\eta q p^2 \lambda^2}{8\pi a^4 L E \kappa_\eta b_\eta^{(+)} \sqrt{\tilde{k}_l^2 + p^2}} . \quad (5.37)$$

A função de onda fermiônica de energia negativa pode ser obtida de maneira similar. O resultado correspondente é dado pela expressão

$$\psi_\sigma^{(-)}(x) = C_\sigma^{(-)} w^{5/2} \begin{pmatrix} J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\nu_1}(pw) \\ s\epsilon_j \kappa_\eta b_\eta^{(-)} J_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) J_{\nu_2}(pw) e^{iq\phi} \\ i s \kappa_\eta J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\nu_2}(pw) \\ -i\epsilon_j b_\eta^{(-)} J_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) J_{\nu_1}(pw) e^{iq\phi} \end{pmatrix} e^{iq(j-1/2)\phi + i k_l z + i E t} , \quad (5.38)$$

e a constante de normalização é dada pela relação

$$|C_\sigma^{(-)}|^2 = \frac{\eta q p^2 \lambda^2}{8\pi a^4 L E \kappa_\eta b_\eta^{(-)} \sqrt{\tilde{k}_l^2 + p^2}} . \quad (5.39)$$

## 5.2 Densidade de corrente fermiônica

Nesta seção estamos interessados no VEV da densidade de corrente fermiônica,  $j^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ , onde  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^{(0)}$  é o adjunto de Dirac e  $\gamma^{(0)}$  a matriz gamma no espaço-tempo plano. Expandindo os operadores de campo em termos do conjunto completo de funções de onda de energia positiva e negativa,  $\{\psi_\sigma^{(+)}, \psi_\sigma^{(-)}\}$ , e usando as relações de anti-comutação para os operadores de aniquilação e criação associados, o VEV  $\langle 0 | j^\mu | 0 \rangle \equiv \langle j^\mu \rangle$

é calculado através da fórmula de soma dos modos,

$$\langle j^\mu \rangle = \frac{e}{2} \sum_{\sigma} [\bar{\psi}_{\sigma}^{(-)} \gamma^{\mu} \psi_{\sigma}^{(-)} - \bar{\psi}_{\sigma}^{(+)} \gamma^{\mu} \psi_{\sigma}^{(+)}] , \quad (5.40)$$

onde  $\sigma$  representa o conjunto de números quânticos que especificam os modos e  $\sum_{\sigma}$  é uma notação compacta para:

$$\sum_{\sigma} = \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} dp \sum_{\eta=\pm 1} \sum_j \sum_{l=-\infty}^{\infty} . \quad (5.41)$$

Aqui e no que segue  $\sum_j = \sum_{j=\pm 1/2, \pm 3/2, \dots}$ .

Como veremos, este VEV é uma função periódica dos fluxos magnéticos  $\Phi_{\phi}$  e  $\Phi_z$ , com períodos iguais ao quantum de fluxo. Em particular, é conveniente expressar o parâmetro  $\alpha$  como

$$\alpha = n_0 + \alpha_0, \quad (5.42)$$

onde  $n_0$  é um número inteiro e  $|\alpha_0| < 1/2$ .

No que segue abaixo nesta seção, iremos apenas considerar as componentes não nulas da densidade de corrente,  $\langle j^\mu \rangle$ .

### 5.2.1 Densidade de corrente azimutal

O VEV da densidade de corrente azimutal é dado por

$$\langle j^{\phi} \rangle = \frac{e}{2} \sum_{\sigma} [\bar{\psi}_{\sigma}^{(-)} \gamma^{\phi} \psi_{\sigma}^{(-)} - \bar{\psi}_{\sigma}^{(+)} \gamma^{\phi} \psi_{\sigma}^{(+)}] . \quad (5.43)$$

Substituindo as funções de energia positiva e negativa na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} \langle j^{\phi} \rangle = & -\frac{qew^6}{2\pi L a^5 r} \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} dp \sum_j \epsilon_j p \lambda^2 J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) \\ & \times [J_{\nu_2}^2(pw) + J_{\nu_1}^2(pw)] \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + [2\pi(l + \tilde{\beta})/L]^2}} , \end{aligned} \quad (5.44)$$

onde a soma sobre  $\eta$  já foi realizada, tendo fornecido um fator multiplicativo 2. Note que a expressão acima é a mesma para os casos em que  $s = +1$  e  $s = -1$ . Assim, para esta componente iremos assumir a representação correspondente a  $s = +1$ , com  $\nu_1 = ma - 1/2$  e  $\nu_2 = ma + 1/2$ .

A fim de realizar a soma sobre o número quântico  $l$ , iremos aplicar a fórmula de Abel-Plana dada em (4.20), identificando  $g(u) = 1$  e

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi u/L)^2 + \lambda^2 + p^2}}. \quad (5.45)$$

Como resultado, podemos decompor a corrente azimutal induzida como

$$\langle j^\phi \rangle = \langle j^\phi \rangle_{cs} + \langle j^\phi \rangle_c, \quad (5.46)$$

onde o primeiro termo,  $\langle j^\phi \rangle_{cs}$ , é proveniente da primeira integral no lado direito de (4.20) e corresponde à densidade de corrente azimutal induzida na geometria de uma corda cósmica sem compactificação. A segunda contribuição,  $\langle j^\phi \rangle_c$ , é induzida pela compactificação. Como veremos, esta última contribuição tende a zero no limite  $L \rightarrow \infty$ .

Combinando (5.44) e (4.20), para a primeira inteira integral no lado direito de (4.20), temos

$$\begin{aligned} \langle j^\phi \rangle_{cs} &= -\frac{qew^6}{2\pi^2 a^5 r} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty dp \sum_j \epsilon_j p \lambda^2 J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) [J_{\nu_2}^2(pw) + J_{\nu_1}^2(pw)] \\ &\times \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + x^2}}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

onde introduzimos a variável  $x = 2\pi u/L$ . A fim de realizar as integrações na expressão acima, iremos considerar a identidade

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + x^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dv e^{-v^2(\lambda^2 + p^2 + x^2)}. \quad (5.48)$$

Para a avaliação da integral sobre  $\lambda$ , usamos a fórmula

$$\int_0^\infty d\lambda \lambda^2 e^{-\lambda^2 v^2} J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) = \epsilon_j \frac{r e^{-r^2/2v^2}}{4v^4} [I_{\beta_j}(r^2/(2v^2)) - I_{\beta_j + \epsilon_j}(r^2/(2v^2))]. \quad (5.49)$$

Quanto às integrais sobre as variáveis  $p$  e  $x$ , estas podem ser realizadas com a ajuda

de [110]. Logo, a densidade de corrente é expressa como

$$\begin{aligned} \langle j^\phi \rangle_{\text{cs}} &= -\frac{qew^6}{4\pi^2 a^5 r^6} \int_0^\infty dy y^2 e^{-(1+w^2/r^2)y} \left[ I_{\nu_2} \left( \frac{w^2}{r^2} y \right) + I_{\nu_1} \left( \frac{w^2}{r^2} y \right) \right] \\ &\times [\mathcal{I}(q, \alpha_0, y) - \mathcal{I}(q, -\alpha_0, y)] , \end{aligned} \quad (5.50)$$

onde introduzimos uma nova variável  $y = r^2/2v^2$  e a notação

$$\mathcal{I}(q, \alpha_0, y) = \sum_j I_{\beta_j}(y) , \quad \mathcal{I}(q, -\alpha_0, y) = \sum_j I_{\beta_j + \epsilon_j}(y) . \quad (5.51)$$

Uma representação integral para a série  $\sum_j I_{\beta_j}(y)$  foi obtida em [115], tendo a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(q, \alpha_0, y) &= \frac{e^y}{q} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{e^{-y \cosh z} f(q, \alpha_0, z)}{\cosh(qz) - \cos(q\pi)} \\ &+ \frac{2}{q} \sum_{k=1}^p (-1)^k \cos[2\pi k(\alpha_0 - 1/2q)] e^{y \cos(2\pi k/q)} , \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde  $2p < q < 2p + 2$  e

$$\begin{aligned} f(q, \alpha_0, z) &= \cos[q\pi(1/2 - \alpha_0)] \cosh[(q\alpha_0 + q/2 - 1/2)z] \\ &- \cos[q\pi(1/2 + \alpha_0)] \cosh[(q\alpha_0 - q/2 - 1/2)z] . \end{aligned} \quad (5.53)$$

Usando a representação (5.52), e realizando a integral sobre  $y$  usando a fórmula (4.38), a Eq. (5.50) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \langle j^\phi \rangle_{\text{cs}} &= -\frac{8e}{(2\pi)^{5/2} a^5} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \sin(\pi k/q) \sin(2\pi \alpha_0 k) \mathcal{Z}_{ma}(u_k) \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\cosh(z) g(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \mathcal{Z}_{ma}(u_z) \right] , \end{aligned} \quad (5.54)$$

onde  $[q/2]$  representa a parte inteira de  $q/2$  e o primo no sinal de soma significa que no caso  $q = 2p$  o termo  $k = q/2$  deve ser tomado com um coeficiente  $1/2$ . Além disso, a função  $g(q, \alpha_0, z)$  é definida como

$$\begin{aligned} g(q, \alpha_0, z) &= \cos[q\pi(1/2 + \alpha_0)] \cosh[q(1/2 - \alpha_0)z] \\ &- \cos[q\pi(1/2 - \alpha_0)] \cosh[q(1/2 + \alpha_0)z] . \end{aligned} \quad (5.55)$$

Note que em (5.54) introduzimos a função

$$\mathcal{Z}_{ma}(u) = \sum_{i=1,2} F_{\nu_i}(u) , \text{ com } F_{\nu_i} = \frac{e^{-i5\pi/2} Q_{\nu_i-1/2}^{5/2}(u)}{(u^2 - 1)^{5/4}} , \quad (5.56)$$

onde  $Q_\mu^\nu(z)$  representa a função associada de Legendre de segundo espécie [110]. Além disso, definimos novas variáveis

$$\begin{aligned} u_k &= 1 + 2\rho^2 \sin^2(\pi k/q) , \\ u_z &= 1 + 2\rho^2 \cosh^2(z) . \end{aligned} \quad (5.57)$$

onde aqui e em outros pontos ao longo deste capítulo, utilizaremos a notação

$$\rho = r/w . \quad (5.58)$$

Na Fig. 5.1 apresentamos o comportamento da contribuição devido à corda cósmica para a densidade de corrente azimutal como função do fluxo magnético ao longo do núcleo da corda para valores de  $q = 1.5, 2.5$  e  $3.5$ . Como podemos observar a partir desta figura,  $\langle j^\phi \rangle_{cs}$  é uma função ímpar de  $\alpha_0$  e sua amplitude depende do déficit angular causado pela presença da corda cósmica.

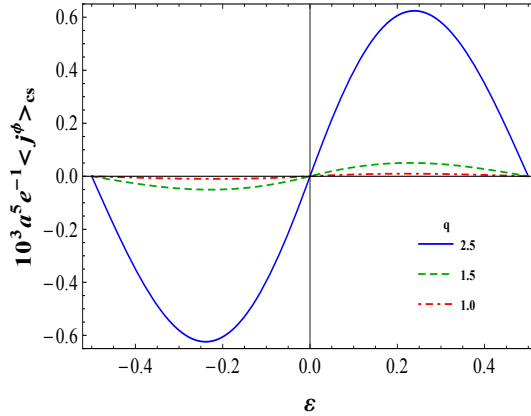


Figura 5.1: O VEV da densidade de corrente azimutal induzido na ausência de compactificação como função de  $\alpha_0$ , para  $r/w = 1$ ,  $ma = 5$ ,  $q = 1.5, 2.5$  e  $3.5$ .

Vamos considerar os comportamentos da função  $\mathcal{Z}_{ma}(u)$  definida em (5.56) para grandes e pequenos valores do argumento, fazendo uso de algumas expressões assintóticas presentes na Ref. [48].

Para pequenos valores do argumento,  $u \ll 1$ , a função  $\mathcal{Z}_{ma}(u)$  assume a forma simplificada

$$\mathcal{Z}_{ma}(u) \approx \frac{3\sqrt{\pi}}{4(u-1)^{5/2}}. \quad (5.59)$$

Por outro lado, para grandes valores do argumento,  $u-1 \gg 1$ , a função  $\mathcal{Z}_{ma}(u)$  é também simplificada e, considerando apenas o termo principal, tem a seguinte forma:

$$\mathcal{Z}_{ma}(u) \approx \frac{\sqrt{2\pi}(1+\nu_2)\nu_2}{2^{\nu_2}u^{\nu_2+2}}. \quad (5.60)$$

Agora, considerando o caso não massivo,  $m = 0$ , implica de (5.18) que  $\nu_1 = -1/2$  e  $\nu_2 = 1/2$ , e neste caso algumas simplificações podem ser realizadas, de modo que a função  $\mathcal{Z}_{ma}(u)$  é expressa como:

$$\mathcal{Z}_0(u) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{(u-1)^{5/2}}. \quad (5.61)$$

Vamos agora analisar o comportamento assintótico do VEV em (5.54) para pequenos e grandes valores da razão  $r/w$ . Para pontos próximos à corda cósmica,  $r/w \ll 1$ , usamos a fórmula assintótica presente em (5.59), obtendo a expressão

$$\langle j^\phi \rangle_{\text{cs}} \approx -\frac{3e}{(4\pi)^2} \left(\frac{w}{ar}\right)^5 \left[ \sum'_{k=1}^{[q/2]} (-1)^k \frac{\sin(2\pi\alpha_0 k)}{\sin^4(\pi k/q)} + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\cosh^{-4}(z)g(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \right]. \quad (5.62)$$

A partir da expressão acima, podemos ver que este VEV diverge como  $(w/r)^5$ . Por outro lado, para pontos distantes da corda cósmica,  $r/w \gg 1$ , substituímos (5.60) em (5.54), obtendo a seguinte expressão assintótica:

$$\begin{aligned} \langle j^\phi \rangle_{\text{cs}} \approx & -\frac{\nu_2(1+\nu_2)e}{2^{2\nu_2+1}\pi^2 a^5} \left(\frac{w}{r}\right)^{2\nu_2+4} \left[ \sum'_{k=1}^{[q/2]} (-1)^k \frac{\sin(2\pi\alpha_0 k)}{\sin^{2\nu_2+3}(\pi k/q)} \right. \\ & \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\cosh^{-(2\nu_2+3)}(z)g(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \right]. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Podemos ver a partir desta expressão, que neste regime a influência da corda cósmica sobre a densidade de corrente azimutal começa a decair e a intensidade deste decaimento depende da massa da partícula. Na Fig. 5.2, é mostrado graficamente o comportamento da contribuição induzida pela corda cósmica na ausência de compactificação, como função

da distância própria em unidades de  $a$ ,  $r/w$ , para diferentes valores de  $q$ . Este gráfico nos mostra que esta contribuição diverge na corda ( $r = 0$ ), bem como tende a zero para pontos distantes, com seu decaimento dependendo do parâmetro  $q$  da corda cósmica.

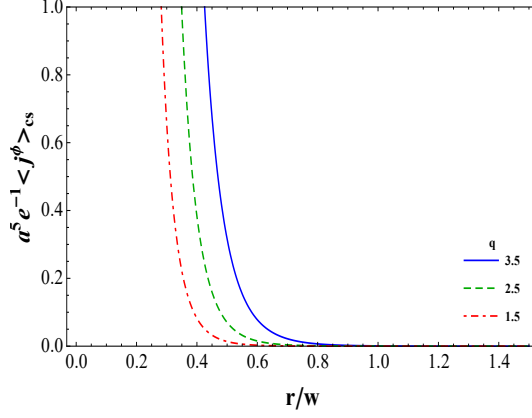


Figura 5.2: O VEV da contribuição induzida pela corda cósmica para a densidade de corrente azimutal como uma função de  $r/w$  para  $\alpha_0 = 0.25$ ,  $ma = 5$ ,  $q = 1.5, 2.5$  e  $3.5$ .

Vamos agora desenvolver a contribuição induzida pela compactificação,  $\langle j^\phi \rangle_c$ . De acordo com a decomposição feita em (5.46), temos:

$$\begin{aligned}
 \langle j^\phi \rangle_c &= -\frac{ieqw^6}{2\pi^2 a^5 r} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty dp \sum_j \epsilon_j p \lambda^2 J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)] \\
 &\times \int_0^\infty dx \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + (ix)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + (-ix)^2}} \right] \\
 &\times \sum_{n=\pm 1} \frac{1}{e^{Lx + 2\pi i n \tilde{\beta}} - 1} .
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

A fim de efetuarmos a integral sobre  $x$  na Eq. (5.100), dividimos o intervalo de integração correspondente em dois segmentos: o primeiro é  $[0, \sqrt{\lambda^2 + p^2}]$ , e o segundo é  $[\sqrt{\lambda^2 + p^2}, \infty)$ . Feito esta divisão, usando a identidade abaixo

$$\sqrt{\sigma^2 + (\pm ix)^2} = \begin{cases} \sqrt{\sigma^2 - x^2}, & \text{se } x < \sigma, \\ \pm i\sqrt{x^2 - \sigma^2}, & \text{se } x > \sigma, \end{cases} \tag{5.65}$$

e inserindo a expansão em série  $(e^u - 1)^{-1} = \sum_{l=1}^\infty e^{-lu}$  na Eq. (5.64), podemos integrar

sobre a variável  $x$  com a ajuda de [110], obtendo o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \langle j^\phi \rangle_c &= -\frac{eqw^6}{\pi^2 a^5 r} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \sum_j \epsilon_j \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) \\ &\times \int_0^\infty dp p [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)] K_0(lL \sqrt{\lambda^2 + p^2}) . \end{aligned} \quad (5.66)$$

Fazendo uso da representação integral da função de Macdonald presente em (4.28), podemos integrar sobre  $\lambda$  e  $p$  em (5.66) com a ajuda de [110], chegando a expressão

$$\begin{aligned} \langle j^\phi \rangle_c &= -\frac{eqw^6}{2\pi^2 a^5 r^6} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^\infty dy y^2 e^{-[1+w^2/r^2+(lL)^2/2r^2]y} \\ &\times \left[ I_{\nu_1}\left(\frac{w^2}{r^2}y\right) + I_{\nu_2}\left(\frac{w^2}{r^2}y\right) \right] [\mathcal{I}(q, \alpha_0, y) - \mathcal{I}(q, -\alpha_0, y)] , \end{aligned} \quad (5.67)$$

onde a variável  $y = 2\tau r^2/(lL)^2$  foi introduzida. Utilizando a representação para a função  $\mathcal{I}(q, \pm\alpha_0, y)$  dada em (5.52), podemos efetuar a integral sobre  $y$ , obtendo a expressão

$$\begin{aligned} \langle j^\phi \rangle_c &= -\frac{16e}{(2\pi)^{5/2} a^5} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \sin(\pi k/q) \sin(2\pi \alpha_0 k) \mathcal{Z}_{ma}(u_{lk}) \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\cosh(z) g(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \mathcal{Z}_{ma}(u_{lz}) \right] , \end{aligned} \quad (5.68)$$

onde definimos as variáveis

$$\begin{aligned} u_{lk} &= 1 + 2\rho^2 \sin^2(\pi k/q) + \frac{(lL)^2}{2w^2} , \\ u_{lz} &= 1 + 2\rho^2 \cosh^2(z) + \frac{(lL)^2}{2w^2} . \end{aligned} \quad (5.69)$$

Note que (5.54) e (5.68) são funções ímpares de  $\alpha_0$ . Isto significa que se fizermos  $\alpha_0 \rightarrow -\alpha_0$ , a densidade de corrente azimutal muda de sinal. De fato, esta mudança de sinal corresponde a inverter a direção do fluxo magnético ao longo da corda, implicando também em uma inversão do sentido da corrente azimutal induzida. Além disso,  $\langle j^\phi \rangle_c$  é uma função par do parâmetro  $\tilde{\beta}$ . A razão para este comportamento se dá pelo fato de não esperarmos a inversão no sentido da corrente azimutal devido a uma mudança na direção do fluxo magnético circundado pela dimensão compactificada.

Na Fig. 5.3,  $\langle j^\phi \rangle_c$  é apresentada como função de  $\alpha_0$  e  $\tilde{\beta}$ , para  $ma = 5$  e  $q = 2.5$ .

Observe que este gráfico exibe as características periódicas da densidade de corrente azimutal induzida mencionadas no parágrafo anterior.

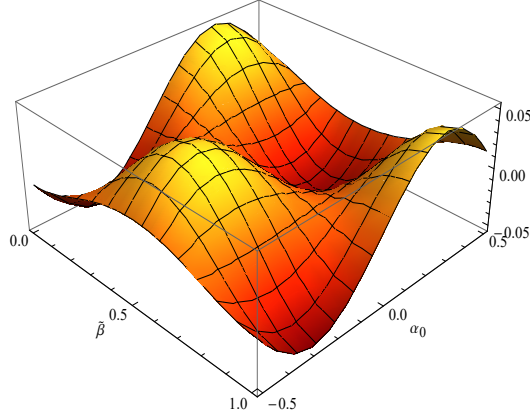


Figura 5.3: A corrente azimutal induzida pela compactificação como função dos parâmetros  $\tilde{\beta}$  e  $\alpha_0$ , para valores fixos de  $r/w = 1$ ,  $ma = 5$  e  $q = 2.5$ .

No núcleo da corda,  $r = 0$ , a densidade de corrente azimutal induzida pela compactificação,  $\langle j^\phi \rangle_c$ , é finita e assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle j^\phi \rangle_c|_{r=0} &= -\frac{16e}{(2\pi)^{5/2}a^5} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \mathcal{Z}_{ma} \left( 1 + \frac{(lL)^2}{2w^2} \right) \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \sin(\pi k/q) \sin(2\pi \alpha_0 k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\cosh(z) g(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \right]. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Combinando (5.54) e (5.68), podemos escrever a densidade de corrente azimutal total como,

$$\begin{aligned} \langle j^\phi \rangle &= -\frac{16e}{(2\pi)^{5/2}a^5} \sum_{l=0}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \sin(\pi k/q) \sin(2\pi \alpha_0 k) \mathcal{Z}_{ma}(u_{lk}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\cosh(z) g(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \mathcal{Z}_{ma}(u_{lz}) \right], \end{aligned} \quad (5.71)$$

onde o asterisco presente no sinal da soma sobre  $l$  em (5.71) indica que o termo  $l = 0$  deve ser tomado com um fator multiplicativo  $1/2$ . Note que, para  $\alpha_0 = 0$ , a densidade de corrente azimutal é nula, sendo este um efeito tipo Ahanorov-Bohm.

Substituindo (5.61) em (5.71), a densidade de corrente azimutal total para um

campo sem massa é expressa em termos de funções elementares e pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \langle j^\phi \rangle &= -\frac{12e}{\pi^2 L^5} \left( \frac{w}{a} \right)^5 \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \sin(\pi k/q) \sin(2\pi \alpha_0 k) V(\tilde{\beta}, \rho_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\cosh(z) g(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} V(\tilde{\beta}, \tau(z)) \right], \end{aligned} \quad (5.72)$$

onde introduzimos a função

$$V(\tilde{\beta}, x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\cos(2\pi \tilde{\beta} l)}{(l^2 + x^2)^{5/2}}, \quad (5.73)$$

nos integrandos de (5.72), com os argumentos correspondentes dados por

$$\rho_k = \frac{2r \sin(\pi k/q)}{L}, \quad \tau(z) = \frac{2r \cosh(z)}{L}. \quad (5.74)$$

A soma sobre a variável  $l$  pode ser desenvolvida com a ajuda de [110]. Assim, após alguns passos intermediários, obtemos

$$V(\tilde{\beta}, x) = \frac{\pi^2 \cosh(2\pi \tilde{\beta} x)}{4x^2 \sinh^2(\pi x)} + \pi \frac{\cosh[\pi(1 - 2\tilde{\beta})x] + 2\pi \tilde{\beta} x \sinh[\pi(1 - 2\tilde{\beta})x]}{4x^3 \sinh(\pi x)}, \quad (5.75)$$

com  $0 \leq \tilde{\beta} \leq 1$ .

Para grandes comprimentos da dimensão extra,  $L/w \gg 1$ , substituímos (5.60) em (5.68), obtendo a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \langle j^\phi \rangle_c &\approx -\frac{16\nu_2(\nu_2 + 1)e}{\pi^2 a^5} \left( \frac{w}{L} \right)^{2\nu_2+4} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \left\{ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \frac{(-1)^k \sin(\pi k/q) \sin(2\pi \alpha_0 k)}{(l^2 + \rho_k^2)^{\nu_2+2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\cosh(z) g(q, \alpha_0, 2z)}{[\cosh(2qz) - \cos(q\pi)] [l^2 + \tau^2(z)]^{\nu_2+2}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

A partir da equação acima, podemos notar que a densidade de corrente azimutal induzida pela compactificação tem um comportamento decrescente para grandes comprimentos da dimensão extra e, portanto, neste regime a corrente azimutal total é dominada pela contribuição induzida pela corda cósmica.

Para finalizar esta subseção, vamos considerar o limite Minkowskiano. Neste caso, consideramos  $a \rightarrow \infty$  para um valor fixo da variável  $y$ . Como consequência  $ma \gg 1$  e a

coordenada  $w$  é aproximada como  $w \approx a + y$ , de modo que a função  $\mathcal{Z}_{ma}(u)$  assume a seguinte forma [61]:

$$\mathcal{Z}_{ma}(u) = 2m^{5/2}a^5 \frac{K_{5/2}(mu)}{u^{5/2}}, \quad (5.77)$$

onde  $K_\nu(x)$  é a função de Macdonald. Substituindo este resultado em (5.71), após algumas simplificações, obtemos

$$\begin{aligned} \langle j^\phi \rangle_M \approx & -e \left( \frac{2m}{\pi L} \right)^{5/2} \sum_{l=0}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \left\{ \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \sin(\pi k/q) \sin(2\pi \alpha_0 k) \frac{K_{5/2}(mL\sqrt{l^2 + \rho_k^2})}{(l^2 + \rho_k^2)^{5/4}} \right. \\ & \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\cosh(z)g(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \frac{K_{5/2}(mL\sqrt{l^2 + \tau^2(z)})}{[l^2 + \tau^2(z)]^{5/4}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

## 5.2.2 Corrente induzida ao longo da dimensão extra compactificada

Nesta subseção, queremos analisar o VEV da densidade de corrente ao longo do eixo compactificado, nomeada densidade de corrente axial. Como veremos, este VEV tende a zero no limite  $L \rightarrow 0$ .

A densidade de corrente induzida na dimensão extra compactificada é calculada por:

$$\langle j^z \rangle = \frac{e}{2} \sum_{\sigma} [\bar{\psi}_{\sigma}^{(-)} \gamma^z \psi_{\sigma}^{(-)} - \bar{\psi}_{\sigma}^{(+)} \gamma^z \psi_{\sigma}^{(+)}]. \quad (5.79)$$

Substituindo (5.31) e (5.38) na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} \langle j^z \rangle = & -\frac{qew^6}{4\pi La^5} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty dp \sum_j \sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda p \left\{ \frac{\tilde{k}_l}{E} [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)] \right. \\ & \left. \times [J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\lambda r)] + [J_{\nu_1}^2(pw) - J_{\nu_2}^2(pw)] [J_{\beta_j}^2(\lambda r) - J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\lambda r)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.80)$$

onde a soma sobre  $\eta$  já foi realizada.

Note que esta expressão é divergente devido ao segundo termo entre chaves e, logo, algum método de regularização deve ser empregado a fim de obter uma quantidade finita. Iremos assumir que uma função “cutoff” é introduzida no termo divergente sem

explicitamente escrevê-la, uma vez que a forma explícita desta função não é relevante para a discussão a seguir. Além disso, usando a fórmula de Abel-Plana dada em (4.20), podemos ver que este termo é nulo.

Quanto ao termo remanescente, por outro lado, tomamos  $g(u) = 2\pi u/L$  e a expressão (5.45) para a função  $f(u)$ . Podemos ver que a primeira integral no lado direito de (4.20) é zero, dado que  $g(u)$  é uma função ímpar. Logo, a única contribuição para a densidade de corrente axial é proveniente da segunda integral em (4.20):

$$\begin{aligned} \langle j^z \rangle &= -\frac{iqew^6}{4\pi^2 a^5} \int_0^\infty dp p [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)] \sum_j \int_0^\infty d\lambda \lambda [J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_{j+\epsilon_j}}^2(\lambda r)] \\ &\times \int_{\sqrt{\lambda^2+p^2}}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-\lambda^2-p^2}} \left( \frac{1}{e^{Lx+2\pi i\tilde{\beta}}-1} - \frac{1}{e^{Lx-2\pi i\tilde{\beta}}-1} \right), \end{aligned} \quad (5.81)$$

onde introduzimos a variável  $x = 2\pi u/L$ . Como já feito anteriormente, o próximo passo é utilizar a expansão em série,  $(e^u - 1)^{-1} = \sum_{l=1}^\infty e^{-lu}$ , na expressão acima, e em seguida integrar sobre  $x$  [110]. Procedendo desta forma, o resultado encontrado é:

$$\begin{aligned} \langle j^z \rangle &= -\frac{qew^6}{2\pi^2 a^5} \sum_{l=1}^\infty \sin(2\pi l\tilde{\beta}) \int_0^\infty dp p [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)] \\ &\times \sum_j \int_0^\infty d\lambda \lambda [J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_{j+\epsilon_j}}^2(\lambda r)] \sqrt{\lambda^2+p^2} K_1(lL\sqrt{\lambda^2+p^2}). \end{aligned} \quad (5.82)$$

Note que a expressão acima é a mesma para  $s = +1$  e  $s = -1$  e, portanto, para esta componente também assumiremos  $s = +1$ . Agora, usando a representação integral para a função de Macdonald fornecida em (4.28) e a propriedade  $K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$ , podemos integrar sobre as variáveis  $\lambda$  e  $p$  com a ajuda dos resultados fornecidos em [110], de modo a obtermos

$$\begin{aligned} \langle j^z \rangle &= -\frac{qew^6 L}{4\pi^2 a^5 r^6} \sum_{l=1}^\infty l \sin(2\pi l\tilde{\beta}) \int_0^\infty dy y^2 e^{-[1+(lL)^2/2r^2+w^2/r^2]y} \\ &\times \left[ I_{\nu_1}\left(\frac{w^2}{r^2}y\right) + I_{\nu_2}\left(\frac{w^2}{r^2}y\right) \right] \mathcal{G}(q, \alpha_0, y), \end{aligned} \quad (5.83)$$

onde introduzimos a nova variável  $y = 2\tau r^2/(lL)^2$ . Além disso, introduzimos na expressão acima a função  $\mathcal{G}(q, \alpha_0, y)$ , definida aqui como

$$\mathcal{G}(q, \alpha_0, y) = \mathcal{I}(q, \alpha_0, y) + \mathcal{I}(q, -\alpha_0, y), \quad (5.84)$$

onde a função  $\mathcal{I}(q, \alpha_0, y)$  já foi definida em (5.51). Assim, usando a representação da função  $\mathcal{I}(q, \alpha_0, y)$ , apresentada em (5.52), na Eq. (5.84), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(q, \alpha_0, y) = & \frac{2}{q} \left\{ e^y + \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{h(q, \alpha_0, 2z) \sinh z}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} e^{-y \cosh 2z} \right. \\ & \left. + 2 \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k \alpha_0) e^{y \cos(2\pi k/q)} \right\}, \end{aligned} \quad (5.85)$$

onde

$$\begin{aligned} h(q, \alpha_0, z) = & \cos[\pi q(1/2 + \alpha_0)] \sinh[(1/2 - \alpha_0)qz] \\ & + \cos[\pi q(1/2 - \alpha_0)] \sinh[(1/2 + \alpha_0)qz]. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Note que as funções  $h(q, \alpha_0, z)$  e  $\mathcal{G}(q, \alpha_0, y)$  são funções pares de  $\alpha_0$ . Agora, substituindo (5.85) em (5.83), podemos realizar a integral sobre  $y$ , obtendo

$$\begin{aligned} \langle j^z \rangle = & -\frac{8eL}{(2\pi)^{5/2}a^5} \sum_{l=1}^{\infty} l \sin(2\pi l \tilde{\beta}) \left[ \sum_{k=0}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi \alpha_0 k) \mathcal{Z}_{ma}(u_{lk}) \right. \\ & \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sinh(z) h(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \mathcal{Z}_{ma}(u_{lz}) \right]. \end{aligned} \quad (5.87)$$

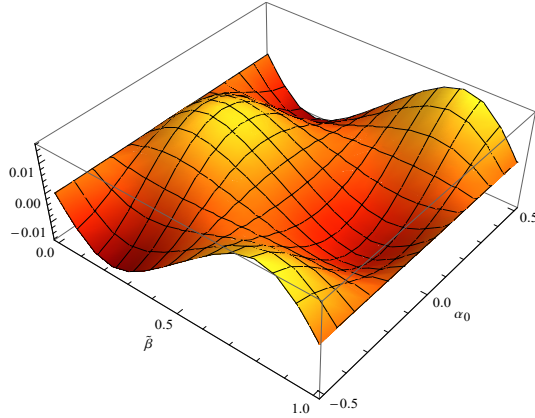


Figura 5.4: O VEV da densidade de corrente axial induzido pela compactificação como função de  $\alpha_0$  e  $\tilde{\beta}$ , para  $q = 2.5$ ,  $r/w = 1$  e  $ma = 5$ .

Note que o primo no sinal de soma indica que o termo  $k = 0$  deve ser dividido por 2. O

VEV na Eq. (5.87) também pode ser apresentado pela decomposição

$$\langle j^z \rangle = \langle j^z \rangle^{(0)} + \langle j^z \rangle^{(q, \alpha_0)} . \quad (5.88)$$

O primeiro termo,  $\langle j^z \rangle^{(0)}$ , não depende nos parâmetros  $\alpha_0$  e  $q$ , e corresponde à densidade de corrente axial induzida somente pela compactificação no espaço-tempo AdS. Para esta contribuição, temos

$$\langle j^z \rangle^{(0)} = -\frac{4qeL}{(2\pi)^{5/2}a^5} \sum_{l=1}^{\infty} l \sin(2\pi l \tilde{\beta}) \mathcal{Z}_{ma}(u_{l0}) , \quad (5.89)$$

onde  $u_{l0}$  é dado na primeira relação em (5.69) para  $k = 0$ .

Quanto ao segundo termo em (5.88), este é dado por

$$\begin{aligned} \langle j^z \rangle^{(q, \alpha_0)} &= -\frac{8eL}{(2\pi)^{5/2}a^5} \sum_{l=1}^{\infty} l \sin(2\pi l \tilde{\beta}) \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi \alpha_0 k) \mathcal{Z}_{ma}(u_{lk}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dz \frac{\sinh(z) h(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \mathcal{Z}_{ma}(u_{lz}) \right] . \end{aligned} \quad (5.90)$$

Note que esta contribuição é nula nos casos especiais em que  $\beta = 0$  (campo untwisted) e  $\beta = 0.5$  (campo twisted), quando na ausência do fluxo magnético  $\Phi_z$ , e em geral para valores semi-inteiros de  $\tilde{\beta}$ . Uma outra característica desta densidade de corrente é que a mesma é uma função ímpar de  $\tilde{\beta}$ . Isto implica que para o caso em que  $\beta = 0$ , por exemplo, a densidade de corrente axial muda de sentido, se o fluxo magnético circundado pela dimensão compactificada tem sua direção invertida.

Na Fig. 5.4, é apresentado o comportamento de  $\langle j^z \rangle^{(q, \alpha_0)}$ , presente na Eq. (5.90), como função de  $\alpha_0$  e  $\tilde{\beta}$ , para valores de  $r/w = 1$ ,  $ma = 5$  e  $q = 2.5$ . Já na Fig. 5.5, é mostrado o comportamento de (5.90) para  $\alpha_0 = 0$  (gráfico à esquerda) e  $\alpha_0 = 0.35$  (gráfico à direita), como função do parâmetro  $\tilde{\beta}$  para diferentes valores de  $q$ . Como podemos observar, o fluxo magnético ao longo da corda cósmica pode inverter o sentido de  $\langle j^z \rangle^{(q, \alpha_0)}$  ao longo do eixo compactificado. Note que esta observação também é válida para o termo de origem puramente topológica,  $\langle j^z \rangle^{(0)}$ , presente em (5.89).

No caso de um campo espinorial sem massa, a densidade de corrente axial em (5.87) é simplificada e pode ser expressa em termos de funções elementares. Assim, substituindo

(5.61) em (5.87), obtemos

$$\begin{aligned} \langle j^z \rangle &= -\frac{6e}{\pi^2 L^4} \left( \frac{w}{a} \right)^5 \left[ \sum_{k=0}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi \alpha_0 k) G(\tilde{\beta}, \rho_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sinh(z) h(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} G(\tilde{\beta}, \tau(z)) \right], \end{aligned} \quad (5.91)$$

onde definimos uma nova função

$$G(\tilde{\beta}, x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l \sin(2\pi l \tilde{\beta})}{(l^2 + x^2)^{5/2}}. \quad (5.92)$$

A soma sobre  $l$  pode ser desenvolvida com a ajuda de [110], e o resultado obtido é:

$$G(\tilde{\beta}, x) = -\frac{\pi^2}{4x} \frac{[\sinh(2\pi \tilde{\beta} x) - 2\tilde{\beta} \sinh(\pi x) \cosh[\pi x(1 - 2\tilde{\beta})]]}{\sinh^2(\pi x)}. \quad (5.93)$$

Note que este resultado é nulo para  $\tilde{\beta} = 0, 1/2, 1$ .

Vamos agora considerar alguns limites assintóticos especiais da densidade de corrente axial dada em (5.87). Tomando a coordenada  $w$  fixa e grandes valores da dimensão extra compacta,  $L/w \gg 1$ , a densidade de corrente axial total é dada por

$$\begin{aligned} \langle j^z \rangle &\approx -\frac{8\nu_2(\nu_2 + 1)eL}{\pi^2 a^5} \left( \frac{w}{L} \right)^{2\nu_2+4} \sum_{l=1}^{\infty} l \sin(2\pi l \tilde{\beta}) \left\{ \sum_{k=0}^{[q/2]'} (-1)^k \frac{\cos(\pi k/q) \cos(2\pi \alpha_0 k)}{(l^2 + \rho_k^2)^{\nu_2+2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sinh(z) h(q, \alpha_0, 2z)}{[\cosh(2qz) - \cos(q\pi)] [l^2 + \tau^2(z)]^{\nu_2+2}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Outro comportamento assintótico interessante é o limite Minkowskiano. Fazendo uso da função  $\mathcal{Z}_{ma}(u)$  neste limite, já apresentada em (5.77), e substituindo-a na Eq. (5.87), a densidade de corrente axial é expressa como

$$\begin{aligned} \langle j^z \rangle_M &\approx -\frac{2^{3/2} m^{5/2} e}{\pi^{5/2} L^{3/2}} \sum_{l=1}^{\infty} l \sin(2\pi l \tilde{\beta}) \left\{ \sum_{k=0}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi \alpha_0 k) \frac{K_{5/2}(mL\sqrt{l^2 + \rho_k^2})}{(l^2 + \rho_k^2)^{5/4}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sinh(z) h(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \frac{K_{5/2}(mL\sqrt{l^2 + \tau^2(z)})}{[l^2 + \tau^2(z)]^{5/4}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

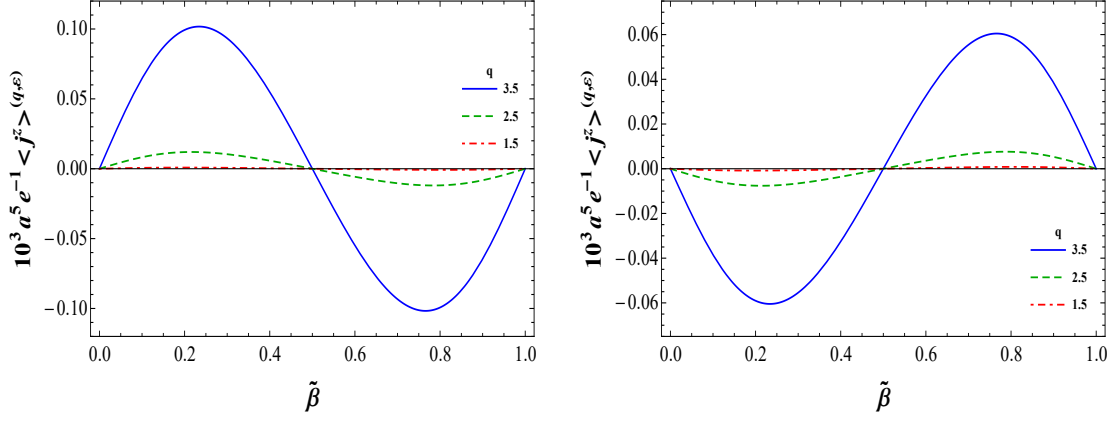


Figura 5.5: A densidade de corrente axial como função de  $\tilde{\beta}$ , para  $q = 2.5$ ,  $r/w = 1$  e  $ma = 5$ . No gráfico do lado esquerdo é considerado  $\alpha_0 = 0$ , enquanto no gráfico do lado direito é assumido  $\alpha_0 = 0.35$ .

### 5.3 Condensado fermiônico

Nesta seção iremos investigar as propriedades locais do condensado fermiônico (CF). Este último é definido como o VEV  $\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle \equiv \langle \bar{\psi} \psi \rangle$ , onde  $|0\rangle$  é o estado de vácuo e  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^{(0)}$  é o adjunto de Dirac. Expandido o operador de campo em termos do conjunto completo  $\{\psi_\sigma^{(-)}, \psi_\sigma^{(+)}\}$  dado por (5.31) e (5.38), e usando as relações de anti-comutação para os operadores de criação e aniquilação, obtemos a seguinte fórmula de soma dos modos para o FC:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} [\bar{\psi}_\sigma^{(-)} \psi_\sigma^{(-)} - \bar{\psi}_\sigma^{(+)} \psi_\sigma^{(+)}], \quad (5.96)$$

onde  $\sum_{\sigma}$  é dado por (5.41). Os operadores na definição do CF são dados no mesmo ponto do espaço-tempo e, portanto, a expressão no lado direito de (5.96) é divergente. Vários esquemas de regularização podem ser empregados para tornar essa expressão finita. Por exemplo, podemos usar a técnica de separação de pontos, ou mesmo uma função cutoff pode ser introduzida. Todavia, a discussão descrita abaixo é independente do método de regularização escolhido.

Substituindo as funções dos modos fornecidas em (5.31) e (5.38) na Eq. (5.96), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \psi \rangle &= -\frac{sqw^5}{2\pi a^4 L} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty dp \sum_j \sum_{l=-\infty}^\infty \frac{\lambda p^2}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + \tilde{k}_l^2}} \\ &\quad \times J_{\nu_1}(pw) J_{\nu_2}(pw) \left[ J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\lambda r) \right], \end{aligned} \quad (5.97)$$

onde a soma sobre  $\eta$  já foi efetuada. Note que o CF acima tem sinais opostos para os casos em que  $s = +1$  e  $s = -1$ . Assim, nesta seção iremos considerar o caso  $s = +1$ , com  $\nu_1 = ma - 1/2$  e  $\nu_2 = ma + 1/2$ .

A fim de separarmos a contribuição no CF induzida pela compactificação na direção  $z$  para a soma sobre  $l$ , vamos utilizar a fórmula de Abel-Plana dada em (4.20). No presente caso, tomando  $g(u) = 1$  e  $f(u) = [\lambda^2 + p^2 + (2\pi u/L)^2]^{-1/2}$ , podemos decompor o CF em duas partes:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{AdS,cs}} + \langle \bar{\psi}\psi \rangle_c, \quad (5.98)$$

onde

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{AdS,cs}} &= -\frac{qw^5}{2\pi^2 a^4} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty dp \sum_j \lambda p^2 J_{\nu_1}(pw) J_{\nu_2}(pw) \\ &\times \left[ J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j+\epsilon_j}^2(\lambda r) \right] \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + x^2}}, \end{aligned} \quad (5.99)$$

é o CF induzido na geometria onde o eixo  $z$  não é compactificado, e

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_c &= -\frac{qw^5}{2\pi^2 a^4} \int_0^\infty d\lambda \lambda \int_0^\infty dp p^2 \sum_j \left[ J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j+\epsilon_j}^2(\lambda r) \right] \\ &\times J_{\nu_1}(pw) J_{\nu_2}(pw) \int_{\sqrt{\lambda^2+p^2}}^\infty dx \sum_{n=\pm 1} \frac{(x^2 - \lambda^2 - p^2)^{-1/2}}{e^{Lx+2\pi i n \tilde{\beta}} - 1}, \end{aligned} \quad (5.100)$$

é a contribuição induzida pela compactificação. Em ambas as expressões acima, introduzimos uma nova variável  $x = 2\pi u/L$ .

Vamos desenvolver cada uma destas contribuições separadamente, começando com a contribuição  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{AdS,cs}}$ . A fim de realizarmos as integrais sobre  $\lambda$ ,  $p$  e  $x$  em (5.99), vamos usar a identidade presente em (5.48). Assim, substituindo (5.48) em (5.99), estas integrais são efetuadas com a ajuda de [110]. Após alguns passos intermediários, introduzindo em vez de  $\tau$  uma nova variável de integração,  $y = r^2/2\tau^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{AdS,cs}} &= -\frac{q(w/r)^6}{4\pi^2 a^4} \int_0^\infty dy y^2 e^{-(1+\rho^{-2})y} \left[ I_{\nu_1}(y/\rho^2) - I_{\nu_2}(y/\rho^2) \right] \\ &\times \mathcal{G}(q, \alpha_0, y), \end{aligned} \quad (5.101)$$

onde usamos a notação  $\rho = r/w$  definida em (5.58), e a função  $\mathcal{G}(q, \alpha_0, y)$  está definida

em (5.85).

Introduzindo uma nova variável de integração,  $x = y/\rho^2$ , a contribuição para o condensado (5.101) proveniente do termo  $e^y$  entre chaves em (5.85) é apresentada como

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{AdS}} = -\frac{1}{2\pi^2 a^4} \int_0^\infty dx x^2 e^{-x} [I_{\nu_1}(x) - I_{\nu_2}(x)]. \quad (5.102)$$

Esta contribuição não depende nos parâmetros  $q$  e  $\alpha_0$ , e corresponde ao CF no espaço-tempo AdS (4+1)-dimensional na ausência de corda cósmica. Como poderíamos esperar da máxima simetria do espaço-tempo AdS, este VEV não depende do ponto no espaço-tempo. A expressão do lado direito da Eq. (5.102) é divergente e necessita de um procedimento de regularização com subsequente renormalização. Nesta seção estamos interessados nos efeitos induzidos pela corda cósmica. A contribuição correspondente para o CF é dada por

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{cs}} = \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{AdS,cs}} - \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{AdS}}. \quad (5.103)$$

Um ponto importante a ser mencionado aqui é que para  $r > 0$  a diferença em (5.103) é finita e a regularização implicitamente assumida antes pode ser removida com segurança. A razão física para a ausência de divergências em  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{cs}}$  é que a geometria local na região  $r > 0$  não é alterada pela corda cósmica e, portanto, novas divergências não surgirão. Substituindo (5.85) em (5.101), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{cs}} &= -\frac{1}{\pi^2 a^4} \int_0^\infty dx x^2 e^{-x} [I_{\nu_1}(x) - I_{\nu_2}(x)] \\ &\times \left\{ \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k\alpha_0) e^{-2x\rho^2 \sin^2(\pi k/q)} \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{h(q, \alpha_0, 2z) \sinh z}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} e^{-2x\rho^2 \cosh^2 z} \right\}. \end{aligned} \quad (5.104)$$

A integral sobre  $x$  é efetuada usando a fórmula (4.38) e, após alguns passos intermediários, o CF induzido pela corda cósmica é dado por

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{cs}} &= -\frac{\sqrt{2}}{\pi^{5/2} a^4} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k\alpha_0) \mathcal{W}_{ma}(u_k) \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{h(q, \alpha_0, 2z) \sinh z}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \mathcal{W}_{ma}(u_z) \right], \end{aligned} \quad (5.105)$$

onde introduzimos a notação

$$\mathcal{W}_{ma}(u) = F_{\nu_1}(u) - F_{\nu_2}(u) \quad \text{com} \quad F_{\nu}(u) = \frac{e^{-i5\pi/2} Q_{\nu-1/2}^{5/2}(u)}{(u^2 - 1)^{5/4}}, \quad (5.106)$$

e as variáveis  $u_k$  e  $u_z$  são as mesmas já definidas em (5.57). Note que o CF  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs}$  depende das coordenadas  $r$  e  $w$  na forma da razão (5.58). Novamente, esta propriedade é uma consequência do espaço-tempo AdS ser maximalmente simétrico.

Para um campo sem massa, a função  $\mathcal{W}_{ma}(u)$  é expressa em termos de funções elementares

$$\mathcal{W}_0(u) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4(1+u)^{5/2}}. \quad (5.107)$$

Substituindo esta expressão em (5.105), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs} = & -\frac{3}{16\pi^2 a^4} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \frac{\cos(\pi k/q) \cos(2\pi k\alpha_0)}{(1 + \rho^2 \sin^2(\pi k/q))^{5/2}} \right. \\ & \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sinh z}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \frac{h(q, \alpha_0, 2z)}{(1 + \rho^2 \cosh^2 z)^{5/2}} \right]. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Para  $2|\alpha_0| < 1 - 1/q$ , o CF (5.108) é finito no núcleo da corda

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs}|_{r=0} = -\frac{3h_0(q, \alpha_0)}{16\pi^2 a^4}. \quad (5.109)$$

Aqui e no que segue a notação

$$h_n(q, \alpha_0) = \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \frac{\cos(\pi k/q) \cos(2\pi k\alpha_0)}{\sin^n(\pi k/q)} + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{h(q, \alpha_0, 2z) \sinh z}{[\cosh(2qz) - \cos(q\pi)] \cosh^n z}, \quad (5.110)$$

é introduzida. Para  $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$ , o condensado (5.108) diverge sobre a corda como  $1/\rho^{(2|\alpha_0|-1)q-1}$ . Esta divergência é proveniente do termo com a integral sobre a variável  $z$  na Eq. (5.108).

Vamos agora analisar algumas propriedades assintóticas do CF induzido pela corda cósmica. No limite assintótico Minkowskiano, novamente, temos  $a \rightarrow \infty$  com  $y$  fixo, implicando em  $w \approx a + y$  e  $ma \gg 1$ . Neste limite precisamos da forma assintótica da função  $Q_{\nu-1/2}^{5/2}(u)$  para  $u - 1 \ll 1$  e  $\nu \gg 1$ . Na literatura poderíamos encontrar apenas o termo principal na expansão assintótica correspondente. Entretanto, o termo principal

é cancelado na função  $\mathcal{W}_{ma}(u)$  e, portanto, se faz necessário considerar o próximo termo na expansão. Em nosso cálculo, usamos a representação (5.101) com a função  $\mathcal{G}(q, \alpha_0, y)$  dada em (5.85) (sem o termo divergente devido ao espaço AdS puro). Assim, usando a expansão assintótica uniforme da função  $I_\nu(x)$  para grandes valores da ordem, podemos ver que no limite  $a \rightarrow \infty$ , para o termo principal, temos

$$\int_0^\infty dx x^2 e^{-(1+2b^2/w^2)x} [I_{ma-1/2}(x) - I_{ma+1/2}(x)] \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} a^4 m^4 f_{3/2}(2mb), \quad (5.111)$$

com a notação

$$f_\nu(x) = \frac{K_\nu(x)}{x^\nu}. \quad (5.112)$$

sendo  $K_\nu(x)$  a função de Macdonald. Assim, o CF induzido pela corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski  $(4+1)$ -dimensional é dado por

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{cs}}^{(\text{M})} = & -\frac{\sqrt{2}m^4}{\pi^{5/2}} \left[ \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{h(q, \alpha_0, 2z) \sinh z}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} f_{3/2}(2mr \cosh z) \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k \alpha_0) f_{3/2}(2mr \sin(\pi k/q)) \right]. \quad (5.113) \end{aligned}$$

Para um campo sem massa,  $m = 0$ , este condensado desaparece. Este resultado também pode ser visto de (5.108) ao tomarmos o limite  $a \rightarrow \infty$  com  $y$  fixo. Assim, a geração do CF para um campo sem massa é um efeito puramente gravitacional.

Para pequenas distâncias próprias a partir da corda, quando comparadas com o raio de curvatura do espaço-tempo AdS, temos  $\rho \ll 1$ . Neste caso, temos

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{cs}} \approx -\frac{mh_3(q, \alpha_0)}{8\pi^2(ar/w)^3}. \quad (5.114)$$

Como podemos ver, neste caso o CF diverge na corda como  $1/r_p^3$ . O termo principal (5.114) coincide com aquele para a corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski, dado por (5.113), substituindo a distância  $r$  pela distância própria  $r_p$  no espaço-tempo AdS. Isto mostra que para um campo massivo os efeitos gravitacionais próximos da corda são fracos. Por outro lado, para distâncias grandes a partir do núcleo da corda,  $\rho \gg 1$ , com

$w$  fixo, usamos a forma assintótica

$$\mathcal{W}_{ma}(u) \approx \frac{\sqrt{\pi}(ma + 1/2)(ma + 3/2)}{2^{ma} u^{ma+5/2}}, \quad (5.115)$$

para  $u \gg 1$ . Substituindo esta expressão em (5.105), para a ordem principal, temos

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs} \approx -\frac{(ma + 1/2)(ma + 3/2)}{2^{2ma+2}\pi^2 a^4 (r/w)^{2ma+5}} h_{2ma+5}(q, \alpha_0). \quad (5.116)$$

Vemos que o decaimento do CF para grandes distâncias a partir da corda cósmica é tipo lei de potências, para ambos os campos sem massa e massivo. Note que, como pode ser visto de (5.113), no comportamento para grandes distâncias a partir da corda no espaço-tempo de Minkowski,  $mr \gg 1$ , o CF decai exponencialmente.

Na Fig. 5.6 apresentamos o comportamento do CF na geometria onde o eixo  $z$  não é compactificado, como uma função da razão  $r/w$ . Os gráficos são exibidos para  $\alpha_0 = 0.3$  e os números próximos às curvas são valores do parâmetro  $q$ . O gráfico do lado esquerdo corresponde a um campo fermiônico massivo com  $ma = 1$ , enquanto o gráfico presente do lado direito resulta de um campo sem massa. Como já explicado em nossa análise assintótica, para um campo massivo o condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs}$  diverge no núcleo da corda como  $(w/r)^3$ . Para um campo sem massa,  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs}$  diverge como  $(w/r)^{(2|\alpha_0|-1)q-1}$  para  $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$  (curvas com  $q = 1, 2$  no gráfico do lado direito) e assume valores finitos (5.109) na corda para  $2|\alpha_0| < 1 - 1/q$  (curva  $q = 3$  no gráfico do lado direito). Note que para o caso  $q = 3$  na figura do lado direito temos  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs}|_{r=0} \approx 0.0095/a^4$ .

O gráfico à esquerda na Fig. 5.7 apresenta a dependência do CF  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs}$  com respeito a massa do campo, em unidades de  $1/a^4$ , para  $r/w = 1.5$ ,  $\alpha_0 = 0.3$ . O gráfico à direita na Fig. 5.7 mostra a dependência do CF induzido pela corda com respeito ao parâmetro  $\alpha_0$  para valores fixos de  $ma = 0.5$ ,  $r/w = 1.5$ . Em ambos os gráficos os números próximos às curvas correspondem aos valores do parâmetro  $q$ .

Vamos agora investigar a contribuição do CF induzida pela compactificação ao longo do eixo  $z$ . Esta é dada pela expressão (5.100). Antes de qualquer coisa, podemos notar que a compactificação não altera a geometria local e, portanto, a contribuição  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_c$  não requer uma renormalização. Dito isto, podemos prosseguir fazendo uso da expansão  $(e^u - 1)^{-1} = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-lu}$  na integral sobre  $x$ . As integrais para um dado  $l$  são expressas em

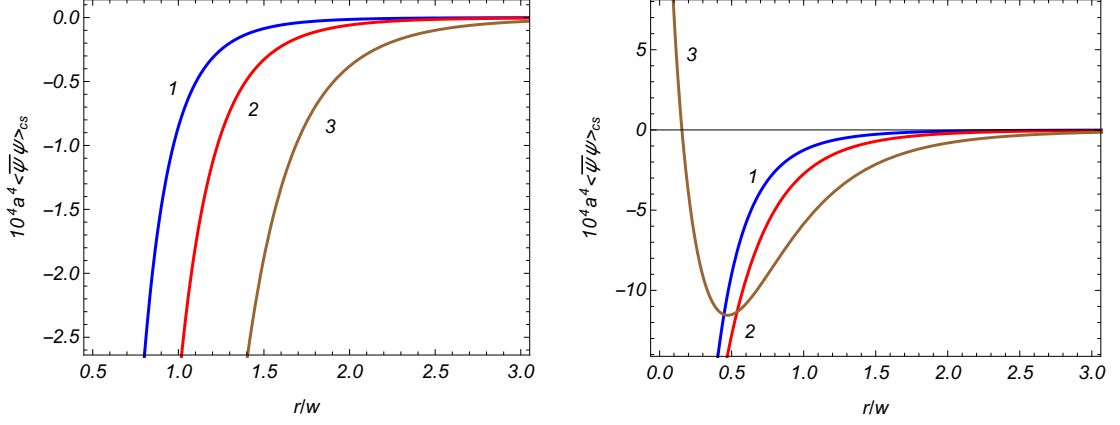


Figura 5.6: O CF  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{cs}$  como uma função da distância a partir da corda cósmica para campos com massa (gráfico do lado esquerdo) e sem massa (gráfico do lado direito). Os gráficos são apresentados para  $\alpha_0 = 0.3$  e para diferentes valores de  $q$  (números próximos às curvas). No gráfico do lado esquerdo tomamos  $ma = 1$ .

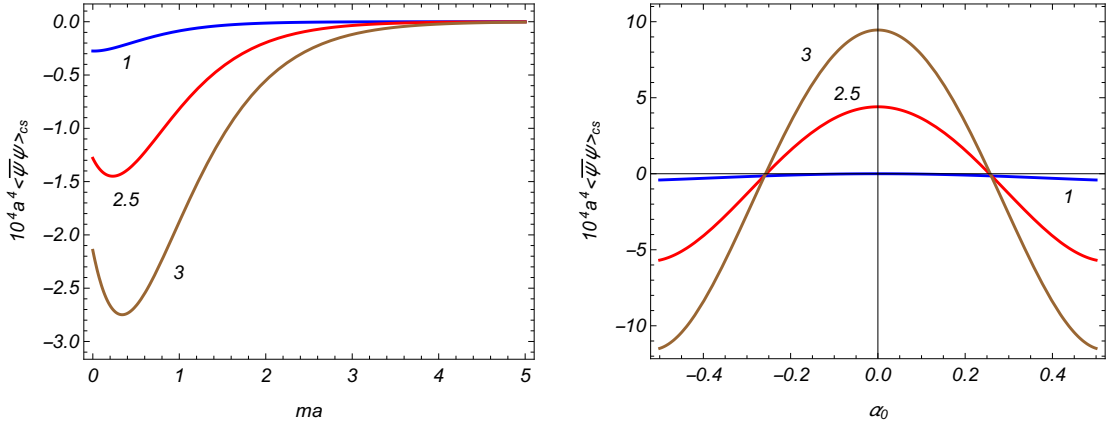


Figura 5.7: O condensado  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{cs}$  como uma função da massa (gráfico à esquerda) e do parâmetro  $\alpha_0$  (gráfico à direita) para  $r/w = 1.5$  e para diferentes valores de  $q$  (números próximos às curvas). Para o gráfico do lado esquerdo consideramos  $\alpha_0 = 0.3$  e para o gráfico do lado direito  $ma = 0.5$ .

termos da função de Macdonald

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_c &= -\frac{qw^5}{\pi^2 a^4} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^{\infty} dp p^2 J_{\nu_1}(pw) J_{\nu_2}(pw) \\ &\times \sum_j \int_0^{\infty} d\lambda \lambda \left[ J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\lambda r) \right] K_0(lL \sqrt{\lambda^2 + p^2}) . \end{aligned} \quad (5.117)$$

Usando a representação integral para a função de Macdonald dada em (4.28), as integrais sobre  $\lambda$  e  $p$  na Eq. (5.117) são expressas através de funções de Bessel  $I_\nu(x)$ . Usando a notação (5.84), a parte induzida pela compactificação no CF é apresentada como

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_c &= -\frac{q}{2\pi^2 a^4} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^{\infty} dy y^2 e^{-[1+\rho^2+(lL)^2/2w^2]y} \\ &\times [I_{\nu_1}(y) - I_{\nu_2}(y)] \mathcal{G}(q, \alpha_0, y\rho^2) . \end{aligned} \quad (5.118)$$

Nesta expressão introduzimos uma nova variável,  $y = 2\tau w^2/(lL)^2$ .

Usando a representação para a função  $\mathcal{G}(q, \alpha_0, y)$  dada em (5.85), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_c &= -\frac{2}{\pi^2 a^4} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^{\infty} dy y^2 e^{-[1+(lL)^2/2w^2]y} [I_{\nu_1}(y) - I_{\nu_2}(y)] \\ &\times \left\{ \sum_{k=0}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k \alpha_0) e^{-2y\rho^2 \sin^2(\pi k/q)} \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dz \frac{h(q, \alpha_0, 2z) \sinh z}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} e^{-2y\rho^2 \cosh^2 z} \right\} , \end{aligned} \quad (5.119)$$

onde, novamente, o asterisco no sinal de soma sobre  $k$ , na Eq. (5.119), indica que o termo  $k = 0$  deve ser dividido por 2. Realizando a integral sobre  $y$  através do uso da fórmula (4.38), obtemos a expressão final

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_c &= -\frac{2^{3/2}}{\pi^{5/2} a^4} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \left[ \sum_{k=0}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k \alpha_0) \mathcal{W}_{ma}(u_{lk}) \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dz \frac{h(q, \alpha_0, 2z) \sinh z}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \mathcal{W}_{ma}(u_{lz}) \right] , \end{aligned} \quad (5.120)$$

onde  $u_{lk}$  e  $u_{lz}$  estão definidas em (5.69), com a função  $\mathcal{W}_{ma}(u)$  definida em (5.106). A contribuição induzida pela compactificação depende de  $r$ ,  $L$ ,  $w$  na forma das razões  $r/w$  e  $L/w$ . Novamente, esta característica é uma consequência da máxima simetria do espaço-

tempo AdS. O termo  $k = 0$  em (5.120) é apresentado como

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_c^{(0)} = -\frac{\sqrt{2}}{\pi^{5/2}a^4} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l\tilde{\beta}) \mathcal{W}_{ma} \left( 1 + \frac{l^2 L^2}{2w^2} \right). \quad (5.121)$$

Para  $q = 1$  e  $\alpha_0 = 0$ , esta contribuição é o único termo não nulo em (5.120) e, portanto, corresponde à contribuição no CF induzida pela compactificação na direção  $z$  no espaço-tempo AdS. A parte remanescente em (5.120),  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_c^{(q,\alpha_0)} = \langle \bar{\psi}\psi \rangle_c - \langle \bar{\psi}\psi \rangle_c^{(0)}$ , é induzida pelo déficit angular planar e o fluxo magnético. Para  $2|\alpha_0| < 1 - 1/q$ , a contribuição topológica (5.120) é finita na corda:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_c|_{r=0} = [1 + 2h_0(q, \alpha_0)] \langle \bar{\psi}\psi \rangle_c^{(0)}. \quad (5.122)$$

Por outro lado, para  $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$  o CF diverge no núcleo da corda como  $1/\rho^{(2|\alpha_0|-1)q-1}$ .

Para um campo sem massa, a expressão (5.120) é expressa em termos de funções elementares. Neste caso, substituindo (5.107) em (5.120), temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_c &= -\frac{3}{8\pi^2 a^4} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l\tilde{\beta}) \left[ \sum_{k=0}^{[q/2]'} \frac{(-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k\alpha_0)}{[1 + \rho^2 \sin^2(\pi k/q) + (lL/w)^2/4]^{5/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dz \frac{\sinh z}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \frac{h(q, \alpha_0, 2z)}{[1 + \rho^2 \cosh^2 z + (lL/w)^2/4]^{5/2}} \right]. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Similarmente àquilo que ocorre no caso da contribuição induzida pela corda cósmica em (5.108), para  $2|\alpha_0| < 1 - 1/q$  a contribuição (5.123) é finita na corda:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_c|_{r=0} = -\frac{3}{16\pi^2 a^4} [1 + 2h_0(q, \alpha_0)] \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi l\tilde{\beta})}{[1 + (lL/2w)^2]^{5/2}}, \quad (5.124)$$

e diverge como  $1/\rho^{(2|\alpha_0|-1)q-1}$  para  $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$ .

Na Fig. 5.8, o comportamento da contribuição no CF, induzido pela compactificação, é mostrado como função da distância a partir da corda (gráfico à esquerda) e da massa do campo (gráfico à direita). Para o gráfico à esquerda consideramos  $ma = 1$ ,  $L/w = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $\tilde{\beta} = 0.25$  e os números próximos às curvas correspondem aos valores de  $q$ . Para o gráfico à direita tomamos  $q = 2.5$ ,  $r/w = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $\tilde{\beta} = 0.25$  e os números próximos às curvas são valores para a razão  $L/w$ . Como explicado acima,

para  $2|\alpha_0| < 1 - 1/q$ , o CF  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_c$  é finito sobre a corda. Isto corresponde à curva com  $q = 3$  no gráfico do lado esquerdo da Fig. 5.8. Para valores dos parâmetros obedecendo à relação  $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$ , o condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_c$  diverge sobre a corda como  $1/r^{(2|\alpha_0|-1)q-1}$  e esta situação é exemplificada pela curva com  $q = 1$  no gráfico do lado esquerdo. Para a curva com  $q = 2.5$ , temos  $2|\alpha_0| = 1 - 1/q$  e a parte topológica é finita sobre a corda. Para grandes distâncias a partir da corda, o condensado tende ao valor limite  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_c^{(0)}$ , que não depende de  $q$  e  $\alpha_0$ . Uma característica interessante sobre a dependência com a massa é que o CF assume valor máximo para algum valor intermediário da massa. Claro, a supressão do condensado para grandes massas é esperada.

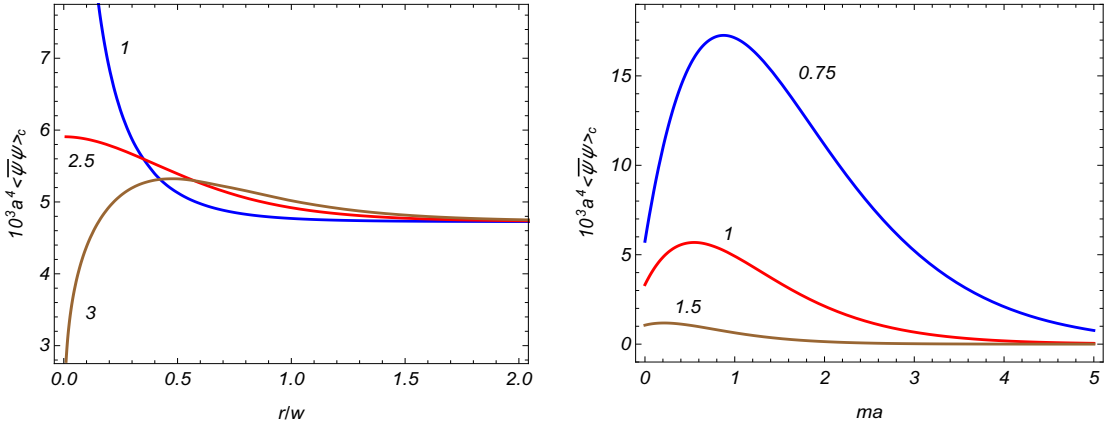


Figura 5.8: A parte no CF induzido pela compactificação como função da distância radial a partir da corda (gráfico à esquerda) e como função da massa (gráfico à direita). Para ambos os gráficos  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $\tilde{\beta} = 0.25$ . Os números próximos às curvas são valores do parâmetro  $q$  para o gráfico à esquerda e da razão  $L/w$  para o gráfico à direita. Os gráficos são esboçados para  $ma = 1$ ,  $L/w = 1$  e para  $q = 2.5$ ,  $r/w = 1$  nos gráficos à esquerda e à direita, respectivamente.

Para  $L/w \gg 1$ , podemos usar a expressão assintótica para a função  $\mathcal{W}_{ma}(u)$  dada em (5.115), obtendo

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_c &\approx -\frac{8(ma + 1/2)(ma + 3/2)}{\pi^2 a^4} \left(\frac{w}{L}\right)^{2(ma+5/2)} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \\ &\times \left[ \sum_{k=0}^{[q/2]'} \frac{(-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k \alpha_0)}{(\rho_k^2 + l^2)^{ma+5/2}} + \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dz \frac{\sinh z}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \right. \\ &\times \left. \frac{h(q, \alpha_0, 2z)}{[\tau(z)^2 + l^2]^{ma+5/2}} \right], \end{aligned} \quad (5.125)$$

onde as variáveis  $\rho_k$  e  $\tau(z)$  estão definidas em (5.74). Como podemos ver, esta contribuição tende a zero no limite  $L \rightarrow \infty$ .

No limite Minkowskiano, correspondendo a  $a \rightarrow \infty$  com  $y$  fixo, usando o resultado (5.111), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_c^{(M)} &= -\frac{2^{3/2}}{\pi^{5/2}} m^4 \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \\ &\times \left\{ \sum_{k=0}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k \alpha_0) f_{3/2} \left( 2m \sqrt{r^2 \sin^2(\pi k/q) + l^2 L^2/4} \right) \right. \\ &+ \left. \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} du \frac{h(q, \alpha_0, 2u) \sinh u}{\cosh(2qu) - \cos(q\pi)} f_{3/2} \left( 2m \sqrt{r^2 \cosh^2 u + l^2 L^2/4} \right) \right\}, \quad (5.126) \end{aligned}$$

onde a função  $f_{3/2}(x)$  é dada por (5.112). Para um campo sem massa, a contribuição topológica é nula. Novamente, vemos que o CF não nulo para um campo sem massa no espaço-tempo AdS é um efeito induzido gravitacionalmente.

## 5.4 VEV do tensor energia-momento

Nesta seção, queremos calcular outra importante característica do vácuo fermiônico, o valor esperado de vácuo do tensor energia-momento. Para um campo fermiônico carregado na presença de um campo eletromagnético, esta quantidade pode ser calculada pela fórmula da soma dos modos:

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle = \langle T_{\mu\nu} \rangle = -\frac{i}{4} \sum_{\sigma} \sum_{\chi=-,+} \chi [\bar{\psi}_{\sigma}^{(\chi)} \gamma_{(\mu} D_{\nu)} \psi_{\sigma}^{(\chi)} - (D_{(\mu} \bar{\psi}_{\sigma}^{(\chi)}) \gamma_{\nu)} \psi_{\sigma}^{(\chi)}], \quad (5.127)$$

onde  $D_{\mu} \bar{\psi} = \partial_{\mu} \bar{\psi} - ie A_{\mu} \bar{\psi} - \bar{\psi} \Gamma_{\mu}$ , e os parênteses envolvendo os índices indicam simetrização.

### 5.4.1 Densidade de energia

Consideremos a densidade de energia,  $\langle T_{00} \rangle$ . Levando em conta que  $A_0 = 0$  e observando que  $\{\gamma_0, \Gamma_0\} = 0$ , temos que a única contribuição é proveniente das derivadas temporais atuando nas funções de onda de energia positiva e negativa. Assim, temos

$$\langle T_{00} \rangle = -\frac{a}{2w} \sum_{\sigma} \sum_{\chi=-,+} E \psi_{\sigma}^{(\chi)\dagger} \psi_{\sigma}^{(\chi)}. \quad (5.128)$$

Substituindo os modos de energia positiva e negativa (5.31) e (5.38), respectivamente, com seus respectivos coeficientes de normalização em (5.128), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle &= -\frac{qw^4}{4\pi a^3 L} \int_0^\infty d\lambda \lambda \int_0^\infty dp p \sum_j \sum_{l=-\infty}^\infty E [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)] \\ &\times \left[ J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j+\epsilon_j}^2(\lambda r) \right], \end{aligned} \quad (5.129)$$

onde as somas sobre  $\chi$  e  $\eta$  já foram efetuadas. Como podemos ver, a densidade de energia é a mesma para os campos em que  $s = +1$  e  $s = -1$ .

A fim de proceder em nosso cálculo, vamos utilizar a fórmula de Abel-Plana (4.20) com

$$g(u) = 1 \text{ e } f(u) = \sqrt{\lambda^2 + p^2 + (2\pi u/L)^2},$$

para desenvolver a soma sobre o número quântico  $l$  na Eq. (5.129). Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle &= -\frac{qw^4}{4\pi a^3 L} \int_0^\infty d\lambda \lambda \int_0^\infty dp p \left\{ 2 \int_0^\infty du \sqrt{\lambda^2 + p^2 + (2\pi u/L)^2} \right. \\ &+ i \int_0^\infty du \left[ \sqrt{\lambda^2 + p^2 + (2\pi i u/L)^2} - \sqrt{\lambda^2 + p^2 + (-2\pi i u/L)^2} \right] \\ &\times \left[ \frac{1}{e^{2\pi(u+i\tilde{\beta})} - 1} + \frac{1}{e^{2\pi(u-i\tilde{\beta})} - 1} \right] \Big\} \sum_j (J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j+\epsilon_j}^2(\lambda r)) \\ &\times [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)]. \end{aligned} \quad (5.130)$$

Similarmente ao que ocorre no CF, a densidade de energia pode ser expressa como a soma de dois termos,

$$\langle T_{00} \rangle = \langle T_{00} \rangle_{\text{AdS,cs}} + \langle T_{00} \rangle_c, \quad (5.131)$$

correspondendo à primeira e segunda integrais em (5.130), respectivamente. Começemos com a primeira parte,

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_{\text{AdS,cs}} &= -\frac{qw^4}{(2\pi)^2 a^3} \int_0^\infty d\lambda \lambda \int_0^\infty dp p \int_0^\infty dy \sqrt{\lambda^2 + p^2 + y^2} \sum_j \left[ J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j+\epsilon_j}^2(\lambda r) \right] \\ &\times [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)], \end{aligned} \quad (5.132)$$

onde introduzimos uma nova variável  $y = 2\pi u/L$ . Entretanto, a expressão acima é divergente, e uma função cutoff regularizadora é necessária. Como feito na última seção,

introduzimos uma função regularizadora sem explicitamente escrevê-la. Agora, a fim de continuar executando nosso cálculo, usamos a identidade

$$\sqrt{\lambda^2 + p^2 + y^2} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\tau \partial_{\tau^2} e^{-(\lambda^2 + p^2 + y^2)\tau^2} . \quad (5.133)$$

Mudando a ordem de integração é possível integrar sobre  $\lambda$ ,  $p$  e  $y$ . Usando as fórmulas fornecidas em [110], e após alguns passos intermediários, chegamos ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_{\text{AdS,cs}} &= \frac{qw^4}{4(2\pi)^2 a^3} \int_0^\infty d\tau \partial_{\tau^2} \left\{ \frac{1}{\tau^5} e^{-\frac{r^2+w^2}{2\tau^2}} [I_{\nu_1}(w^2/(2\tau^2)) + I_{\nu_2}(w^2/(2\tau^2))] \right. \\ &\quad \times \left. \sum_j [I_{\beta_j}(r^2/(2\tau^2)) + I_{\beta_j+\epsilon_j}(r^2/(2\tau^2))] \right\} . \end{aligned} \quad (5.134)$$

Como mencionado anteriormente, a soma sobre o número quântico  $j$  na expressão acima foi definida como a função  $\mathcal{G}(q, \alpha_0, y)$  dada em (5.85). Além disso, a contribuição do termo do  $e^y$  está associada com a densidade de energia fermiônica no espaço-tempo AdS puro. Logo, subtraindo este termo, podemos integrar por partes sobre a variável  $\tau$  na Eq. (5.134). Definindo uma nova variável  $x = w^2/(2\tau^2)$ , obtemos a seguinte expressão

$$\langle T_{00} \rangle_{\text{cs}} = \frac{q}{2(2\pi w)^2 a^3} \int_0^\infty dx x^2 e^{-(1+\rho^2)x} [I_{\nu_1}(x) + I_{\nu_2}(x)] \mathcal{G}_0(q, \alpha_0, \rho^2 x) , \quad (5.135)$$

onde  $\mathcal{G}_0(q, \alpha_0, y)$  é dada por (5.85), sem o termo  $2e^y$  entre chaves.

Usando a fórmula (4.38), e após alguns passos intermediários, incluindo o uso do tensor métrico contravariante,  $g^{00}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}} &= \frac{a^{-5}}{\sqrt{2}\pi^{5/2}} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k \alpha_0) \mathcal{Z}_{ma}(u_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{h(q, \alpha_0, 2z) \sinh z}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \mathcal{Z}_{ma}(u_z) \right] , \end{aligned} \quad (5.136)$$

onde a função  $\mathcal{Z}_{ma}(u)$  já foi definida em (5.56) e as variáveis  $u_k$  e  $u_z$  em (5.57).

Na Fig. 5.9, é mostrado o comportamento da densidade de energia induzida pela corda cósmica na geometria sem compactificação como função da distância a partir da corda (gráfico à esquerda) e da massa do campo (gráfico à direita). Para o gráfico do lado esquerdo consideramos  $\alpha_0 = 0.3$  e  $ma = 1$ . Para o gráfico do lado direito assumimos

$\alpha_0 = 0.3$  e  $r/w = 0.3$ . Como podemos ver pelo gráfico à esquerda, a densidade de energia induzida pela corda tende a zero para pontos distantes, com o seu decaimento dependendo do parâmetro  $q$ . No gráfico do lado direito, vemos que esta densidade de energia tende a zero para grandes valores da massa.

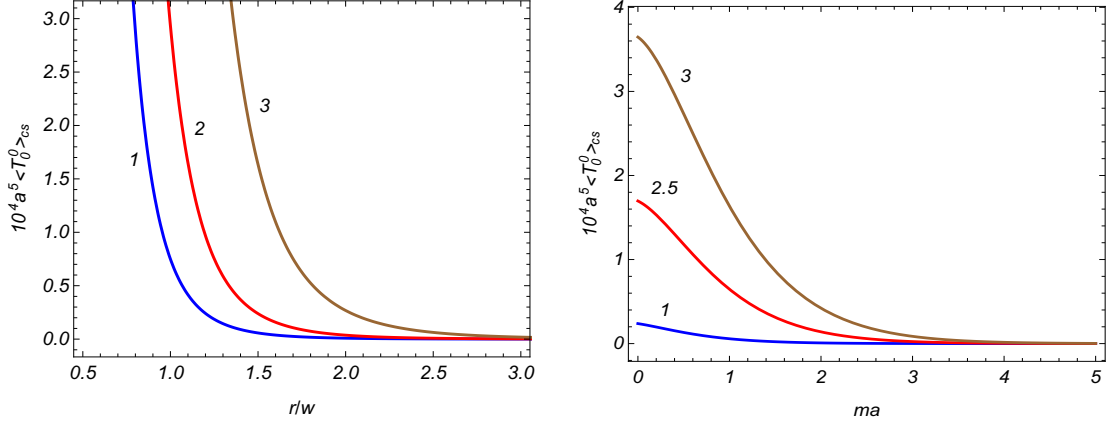


Figura 5.9: A parte na densidade de energia induzida pela corda cósmica como função da distância radial a partir da corda (gráfico à esquerda) e como função da massa (gráfico à direita). Para ambos os gráficos consideramos  $\alpha_0 = 0.3$ . Os números próximos às curvas em ambos os gráficos são valores do parâmetro  $q$ . Os gráficos são esboçados para  $ma = 1$  e para  $r/w = 0.3$  nos gráficos à esquerda e à direita, respectivamente.

Quanto à parte da densidade de energia induzida pela compactificação, esta é identificada como a segunda integral em (5.130):

$$\begin{aligned}
 \langle T_{00} \rangle_c &= -\frac{iqw^4}{8\pi^2 a^3} \int_0^\infty d\lambda \lambda \int_0^\infty dp p \int_0^\infty dy \left[ \sqrt{\lambda^2 + p^2 + (iy)^2} - \sqrt{\lambda^2 + p^2 + (-iy)^2} \right] \\
 &\times \left[ \frac{1}{e^{Ly+2\pi i\tilde{\beta}} - 1} + \frac{1}{e^{Ly-2\pi i\tilde{\beta}} - 1} \right] \sum_j \left[ J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j+\epsilon_j}^2(\lambda r) \right] \\
 &\times \left[ J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw) \right] .
 \end{aligned} \tag{5.137}$$

Levando em consideração os pontos de ramificação na integral sobre  $y$  ao usar a identidade (5.65), e utilizando também a expansão  $(e^x - 1)^{-1} = \sum_{l=1}^\infty e^{-lx}$ , podemos integrar sobre a variável  $y$ , e após alguns passos intermediários, a expressão acima fica

$$\begin{aligned}
 \langle T_{00} \rangle_c &= \frac{qw^4}{2\pi^2 a^3 L} \sum_{l=1}^\infty \frac{\cos(2\pi l\tilde{\beta})}{l} \int_0^\infty d\lambda \lambda \int_0^\infty dp p \sqrt{\lambda^2 + p^2} K_1(lL\sqrt{\lambda^2 + p^2}) \\
 &\times \sum_j \left[ J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j+\epsilon_j}^2(\lambda r) \right] \left[ J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw) \right] .
 \end{aligned} \tag{5.138}$$

Substituindo a representação integral da função de Macdonald dada em (4.28) na

Eq. (5.138), podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_c &= \frac{qw^4}{8\pi^2 a^3} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^{\infty} dt e^{-1/t} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda \int_0^{\infty} dp p (\lambda^2 + p^2) e^{-l^2 L^2 (\lambda^2 + p^2)(t/4)} \\ &\times \sum_j \left[ J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\lambda r) \right] \left[ J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw) \right] . \end{aligned} \quad (5.139)$$

Usando a relação

$$(\lambda^2 + p^2) e^{-l^2 L^2 (\lambda^2 + p^2)(t/4)} = -\frac{4}{l^2 L^2} \partial_t e^{-l^2 L^2 (\lambda^2 + p^2)(t/4)} , \quad (5.140)$$

na Eq. (5.139), e após desenvolver as integrais sobre  $\lambda$  e  $p$  com a ajuda de [110], obtemos

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_c &= -\frac{2qw^4}{\pi^2 a^3 L^6} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi l \tilde{\beta})}{l^6} \int_0^{\infty} dt e^{-1/t} \partial_t \left[ \frac{e^{-2(r^2 + w^2)/(l^2 L^2 t)}}{t^2} \right. \\ &\times \mathcal{G}(q, \alpha_0, 2r^2/(l^2 L^2 t)) [I_{\nu_1}(2w^2/(l^2 L^2 t)) + I_{\nu_2}(2w^2/(l^2 L^2 t))] \left. \right] , \end{aligned} \quad (5.141)$$

onde  $\mathcal{G}(q, \alpha_0, y)$  corresponde à soma completa dada em (5.85).

Integrando por partes sobre  $t$ , após alguns passos intermediários, chegamos ao resultado

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_c &= \frac{q}{(2\pi)^2 a^3 w^2} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^{\infty} dv v^2 e^{-(1+\rho^2 + l^2 L^2/(2w^2))v} \\ &\times \mathcal{G}(q, \alpha_0, \rho^2 v) [I_{\nu_1}(v) + I_{\nu_2}(v)] , \end{aligned} \quad (5.142)$$

onde introduzimos a variável  $v = 2w^2/(l^2 L^2 t)$ . Usando novamente a fórmula (4.38), obtemos

$$\begin{aligned} \langle T_0^0 \rangle_c &= \frac{\sqrt{2}}{\pi^{5/2} a^5} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \left[ \sum_{k=0}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k \alpha_0) \mathcal{Z}_{ma}(u_{lk}) \right. \\ &+ \left. \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dz \frac{h(q, \alpha_0, 2z) \sinh z}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \mathcal{Z}_{ma}(u_{lz}) \right] , \end{aligned} \quad (5.143)$$

sendo os argumentos da função  $\mathcal{Z}_{ma}(u)$  definidos em (5.69).

Na ausência da corda cósmica e do fluxo magnético, temos  $q = 1$  e  $\alpha_0 = 0$ . Sob estas circunstâncias somente o termo  $k = 0$  da Eq. (5.143) é não nulo, sendo este dado

por

$$\langle T_0^0 \rangle_c^{(0)} = \frac{a^{-5}}{\sqrt{2\pi^{5/2}}} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \mathcal{Z}_{ma}(1 + (lL/w)^2/2). \quad (5.144)$$

Esta quantidade corresponde à densidade de energia induzida somente pela compactificação no espaço-tempo AdS. Para  $k > 0$  temos outra componente induzida pela compactificação que tem seu comportamento influenciado pela presença da corda cósmica e pelo fluxo magnético ao longo de seu núcleo. Esta componente é escrita como

$$\begin{aligned} \langle T_0^0 \rangle_c^{(q, \alpha_0)} &= \frac{\sqrt{2}}{\pi^{5/2} a^5} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k \alpha_0) \mathcal{Z}_{ma}(u_{lk}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dz \frac{\sinh(z) h(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \mathcal{Z}_{ma}(u_{lz}) \right]. \end{aligned} \quad (5.145)$$

Na Fig. 5.10, é mostrado o comportamento da densidade de energia induzida pela compactificação como função da distância a partir da corda cósmica (gráfico à esquerda) e da massa do campo (gráfico à direita). Para o gráfico do lado esquerdo foram considerados  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $ma = 1$ ,  $L/w = 1$  e  $\tilde{\beta} = 0.25$ . Para o gráfico do lado direito assumimos  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $r/w = 1$ ,  $L/w = 1.5$  e  $\tilde{\beta} = 0.25$ .

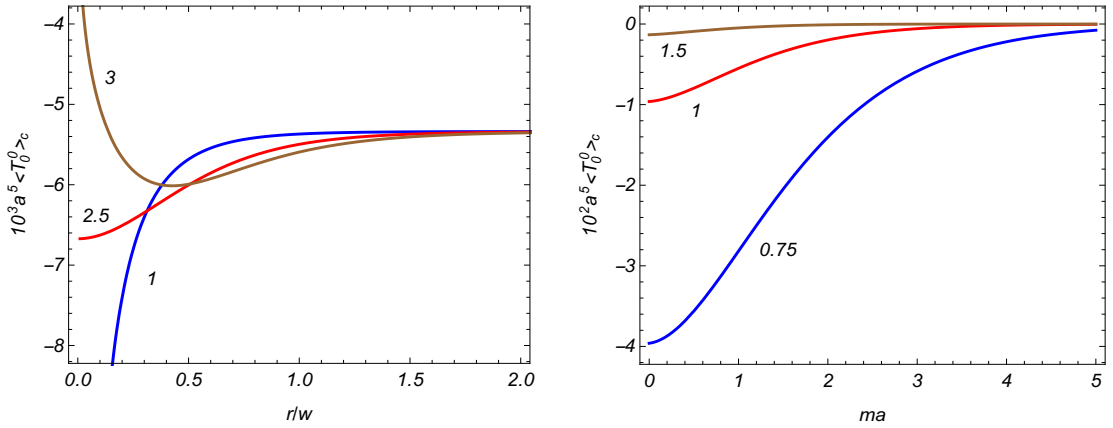


Figura 5.10: A parte na densidade de energia induzida pela compactificação como função da distância radial a partir da corda (gráfico à esquerda) e como função da massa (gráfico à direita). No gráfico do lado esquerdo foram escolhidos  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $ma = 1$ ,  $L/w = 1$  e  $\tilde{\beta} = 0.25$ , e no gráfico do lado direito foram considerados  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $r/w = 1$ ,  $L/w = 1.5$  e  $\tilde{\beta} = 0.25$ . Os números próximos às curvas em ambos os gráficos são valores do parâmetro  $q$ .

### 5.4.2 Componente radial

Vamos agora realizar o cálculo da componente radial do tensor energia-momento. Nesta direção temos que  $A_r = 0$ , e o anti-comutador  $\{\gamma_r, \Gamma_r\} = 0$ . Logo, temos somente contribuições provenientes das derivadas radiais:

$$\langle T_{rr} \rangle = -\frac{i}{4} \sum_{\sigma} \sum_{\chi=-,+} \chi [\bar{\psi}_{\sigma}^{(\chi)} \gamma_r \partial_r \psi_{\sigma}^{(\chi)} - (\partial_r \bar{\psi}_{\sigma}^{(\chi)}) \gamma_r \psi_{\sigma}^{(\chi)}] . \quad (5.146)$$

Substituindo os modos de energia positiva e negativa e a correspondente matriz de Dirac na direção radial (apresentada na seção 5.1) na expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle T_{rr} \rangle &= \frac{qw^4}{4\pi a^3 L} \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} dp \sum_j \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_j p \lambda^3 [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)]}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + [2\pi(l + \tilde{\beta})/L]^2}} \\ &\times \left[ J'_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) - J_{\beta_j}(\lambda r) J'_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) \right] , \end{aligned} \quad (5.147)$$

onde as somas sobre  $\eta$  e  $\chi$  já foram realizadas. Note que as derivadas das funções de Bessel são com respeito ao argumento. Similarmente ao caso da densidade de energia, a componente radial do tensor energia-momento é a mesma para  $s = +1$  e  $s = -1$ .

Usando a fórmula de Abel-Plana dada em (4.20), e considerando  $g(u) = 1$  e  $f(u) = [\lambda^2 + p^2 + (2\pi u/L)^2]^{-1/2}$ , podemos decompor (5.147) de maneira similar ao que foi feito em (5.131). Vamos desenvolver a contribuição induzida pela corda cósmica:

$$\begin{aligned} \langle T_{rr} \rangle_{\text{AdS,cs}} &= \frac{qw^4}{4\pi^2 a^3} \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} dp \sum_j \int_0^{\infty} dx \frac{\epsilon_j p \lambda^3 [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)]}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + x^2}} \\ &\times \left[ J'_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) - J_{\beta_j}(\lambda r) J'_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) \right] , \end{aligned} \quad (5.148)$$

onde introduzimos uma nova variável  $x = 2\pi u/L$ . Usando a identidade dada em (5.48), podemos realizar as integrais sobre  $x$  e  $p$ , obtendo o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \langle T_{rr} \rangle_{\text{AdS,cs}} &= -\frac{qw^4}{8\pi^2 a^3} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^3} e^{-w^2/(2\tau^2)} [I_{\nu_1}(w^2/(2\tau^2)) + I_{\nu_2}(w^2/(2\tau^2))] \\ &\times \sum_j \epsilon_j \int_0^{\infty} d\lambda \lambda^3 e^{-\tau^2 \lambda^2} \left[ J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\lambda r) - \frac{2\beta_j + \epsilon_j}{\lambda r} \right. \\ &\times \left. J_{\beta_j}(x) J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) \right] . \end{aligned} \quad (5.149)$$

Na expressão acima, usamos a seguinte relação de recorrência envolvendo as derivadas da função de Bessel:

$$\begin{aligned} & \epsilon_j(J_{\beta_j}(x)J'_{\beta_j+\epsilon_j}(x) - J'_{\beta_j}(x)J_{\beta_j+\epsilon_j}(x)) \\ &= J_{\beta_j}^2(x) + J_{\beta_j+\epsilon_j}^2(x) - \frac{2\beta_j + \epsilon_j}{x} J_{\beta_j}(x)J_{\beta_j+\epsilon_j}(x) . \end{aligned} \quad (5.150)$$

Para realização das integrais sobre  $\lambda$ , usamos as seguintes fórmulas [53]:

$$\int_0^\infty d\lambda \lambda^3 e^{-\tau^2 \lambda^2} J_\mu^2(\lambda r) = -\frac{\partial}{\partial \tau^2} \left[ \frac{e^{-r^2/(2\tau^2)}}{2\tau^2} I_\mu(r^2/(2\tau^2)) \right] \quad (5.151)$$

e

$$\int_0^\infty d\lambda \lambda^2 e^{-\tau^2 \lambda^2} J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) = \frac{r\epsilon_j e^{-r^2/(2\tau^2)}}{4\tau^4} [I_{\beta_j}(r^2/(2\tau^2)) - I_{\beta_j+\epsilon_j}(r^2/(2\tau^2))] . \quad (5.152)$$

Logo, substituindo estes resultados em (5.149), obtemos

$$\begin{aligned} \langle T_{rr} \rangle_{\text{AdS,cs}} &= \frac{qw^4}{8\pi^2 a^3} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^3} e^{-w^2/(2\tau^2)} (I_{\nu_1}(w^2/(2\tau^2)) + I_{\nu_2}(w^2/(2\tau^2))) \\ &\times \sum_j \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau^2} \left[ \frac{e^{-r^2/(2\tau^2)}}{\tau^2} [I_{\beta_j}(r^2/(2\tau^2)) + I_{\beta_j+\epsilon_j}(r^2/(2\tau^2))] \right] \right. \\ &+ \left. \frac{2\epsilon_j\beta_j + 1}{4\tau^4} e^{-r^2/(2\tau^2)} [I_{\beta_j}(r^2/(2\tau^2)) - I_{\beta_j+\epsilon_j}(r^2/(2\tau^2))] \right\} . \end{aligned} \quad (5.153)$$

Introduzindo uma nova variável,  $y = r^2/(2\tau^2)$ , e usando a relação

$$(2\epsilon_j\beta_j + 1) [I_{\beta_j}(y) - I_{\beta_j+\epsilon_j}(y)] = 2(y\partial_y - y + 1/2) [I_{\beta_j}(y) + I_{\beta_j+\epsilon_j}(y)] , \quad (5.154)$$

a Eq. (5.153) é simplificada e pode ser escrita como

$$\langle T_{rr} \rangle_{\text{AdS,cs}} = -\frac{q\rho^{-6}}{8\pi^2 a^3 w^2} \int_0^\infty dy y^2 e^{-(1+1/\rho^2)y} [I_{\nu_1}(y/\rho^2) + I_{\nu_2}(y/\rho^2)] \mathcal{G}(q, \alpha_0, y) , \quad (5.155)$$

com  $\mathcal{G}(q, \alpha_0, y)$  dada em (5.85). A fim de avaliarmos a contribuição induzida pela corda cósmica, subtraímos da função  $\mathcal{G}(q, \alpha_0, y)$  a quantidade correspondente no espaço-tempo AdS puro,  $2e^y$ . Além disso, introduzindo uma nova variável,  $\chi = y/\rho^2$ , podemos usar (4.38), e após alguns passos intermediários, a contribuição induzida puramente pela corda

é dada por

$$\begin{aligned} \langle T_r^r \rangle_{\text{cs}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\pi^2}} \frac{1}{a^5} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k\alpha_0) \mathcal{Z}_{ma}(u_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{h(q, \alpha_0, 2z) \sinh z}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \mathcal{Z}_{ma}(u_z) \right], \end{aligned} \quad (5.156)$$

que coincide com a expressão para  $\langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}}$ .

Vamos agora desenvolver a contribuição induzida pela compactificação:

$$\begin{aligned} \langle T_{rr} \rangle_c &= \frac{iqw^4}{8\pi^2 a^3} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty dp \sum_j \epsilon_j p \lambda^3 [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)] \\ &\quad \times \left[ J'_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) - J_{\beta_j}(\lambda r) J'_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) \right] \int_0^\infty dx \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + (ix)^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + (-ix)^2}} \right] \sum_{n=\pm 1} \frac{1}{e^{Lx+2\pi i n \tilde{\beta}} - 1}. \end{aligned} \quad (5.157)$$

Levando em conta (5.65) e usando a expansão em série,  $(e^v - 1)^{-1} = \sum_{l=1}^\infty e^{-lv}$ , podemos integrar sobre  $x$ , obtendo o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \langle T_{rr} \rangle_c &= \frac{qw^4}{2\pi^2 a^3} \sum_{l=1}^\infty \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^\infty dpp [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)] \sum_j \epsilon_j \int_0^\infty d\lambda \lambda^3 \\ &\quad \times \left[ J'_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) - J_{\beta_j}(\lambda r) J'_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) \right] K_0(lL\sqrt{\lambda^2 + p^2}). \end{aligned} \quad (5.158)$$

Usando a representação integral da função de Macdonald dada em (4.28), e a relação de recorrência para as funções de Bessel dada em (5.150), podemos integrar sobre  $\lambda$  e  $p$  com a ajuda de [110], obtendo

$$\begin{aligned} \langle T_{rr} \rangle_c &= -\frac{q\rho^{-6}}{4\pi^2 a^3 w^2} \sum_{l=1}^\infty \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^\infty dy y^2 e^{-[(lL)^2/(2r^2)+1/\rho^2]} \\ &\quad \times [I_{\nu_1}(y/\rho^2) + I_{\nu_2}(y/\rho^2)] \sum_j \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ y e^{-y} (I_{\beta_j}(y) + I_{\beta_j+\epsilon_j}(y)) \right] \right. \\ &\quad \left. - (2\epsilon_j \beta_j + 1) e^{-y} (I_{\beta_j}(y) - I_{\beta_j+\epsilon_j}(y)) \right\}, \end{aligned} \quad (5.159)$$

onde introduzimos a variável  $y = 2r^2 t / (2s^2)$ . Usando a identidade dada em (5.154), a expressão para o VEV induzido pela compactificação é simplificada, nos permitindo somar

sobre o número  $j$ , obtendo o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \langle T_{rr} \rangle_c &= -\frac{q\rho^{-6}}{4\pi^2 a^3 w^2} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^{\infty} dy y^2 e^{-[1+(lL)^2/(2r^2)+1/\rho^2]} \\ &\times [I_{\nu_1}(y/\rho^2) + I_{\nu_2}(y/\rho^2)] \mathcal{G}(q, \alpha_0, y) , \end{aligned} \quad (5.160)$$

onde, novamente, a função  $\mathcal{G}(q, \alpha_0, y)$  está definida em (5.85).

Por fim, definindo uma nova variável,  $\chi = y\rho^2$ , podemos realizar a integral sobre a variável  $\chi$  com a ajuda de (4.38), e a expressão final para a contribuição induzida pela compactificação é

$$\begin{aligned} \langle T_r^r \rangle_c &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\pi^2} \frac{1}{a^5} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \left[ \sum_{k=0}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k \alpha_0) \mathcal{Z}_{ma}(u_{lk}) \right. \\ &+ \left. \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dz \frac{\sinh(z) h(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \mathcal{Z}_{ma}(u_{lz}) \right] , \end{aligned} \quad (5.161)$$

que coincide com a expressão para  $\langle T_0^0 \rangle_c$ .

### 5.4.3 Componente azimutal

A componente azimutal do tensor energia-momento,  $\langle T_{\phi\phi} \rangle$ , é calculada usando (5.127), considerando  $A_\phi = q\alpha/e$  e  $\{\gamma_\phi, \Gamma_\phi\} = 0$ . Levando em conta estas considerações, obtemos

$$\langle T_{\phi\phi} \rangle = -\frac{i}{4} \sum_{\sigma} \sum_{\chi=-,+} \chi [\bar{\psi}_\sigma^{(\chi)} \gamma_\phi \partial_\phi \psi_\sigma^{(\chi)} - (\partial_\phi \bar{\psi}_\sigma^{(\chi)}) \gamma_\phi \psi_\sigma^{(\chi)} + 2i\alpha q \bar{\psi}_\sigma^{(\chi)} \gamma_\phi \psi_\sigma^{(\chi)}] . \quad (5.162)$$

Além disso, considerando que os modos fermiônicos são dados pelas autofunções do operador momento angular ao longo da direção  $w$  definido na Eq. (5.25), após alguns passos intermediários, obtemos o seguinte resultado:

$$\langle T_{\phi\phi} \rangle = \frac{q}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\chi=-,+} \chi (j + \alpha) \bar{\psi}_\sigma^{(\chi)} \gamma_\phi \psi_\sigma^{(\chi)} . \quad (5.163)$$

Substituindo as funções de onda de energia positiva e negativa, dadas em (5.31) e (5.38), respectivamente, na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} \langle T_{\phi\phi} \rangle &= -\frac{q^2 w^4 r}{2\pi a^3 L} \sum_j \epsilon_j (j + \alpha) \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty dp \sum_{\eta=\pm 1} \sum_{l=-\infty}^\infty \frac{p\lambda^2}{E} J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) \\ &\times [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)] . \end{aligned} \quad (5.164)$$

Observe que esta componente também é a mesma para ambos os casos em que  $s = +1$  e  $s = -1$ .

A soma sobre o número quântico  $l$  em (5.164) pode ser obtida usando-se a fórmula de Abel-Plana presente em (4.20), com  $g(u) = 1$  e  $f(u) = [\lambda^2 + p^2 + (2\pi u/L)^2]^{-1/2}$ . Procedendo desta forma, podemos novamente decompor a componente azimutal em termos de uma contribuição induzida pela corda cósmica no espaço-tempo AdS sem compactificação,  $\langle T_{\phi\phi} \rangle_{\text{AdS,cs}}$ , e outra induzida pela compactificação,  $\langle T_{\phi\phi} \rangle_c$ .

Começemos por escrever a componente  $\langle T_{\phi\phi} \rangle_{\text{AdS,cs}}$ , expressa por

$$\begin{aligned} \langle T_{\phi\phi} \rangle_{\text{AdS,cs}} &= -\frac{q^2 w^4 r}{2\pi^2 a^3} \sum_j \epsilon_j (j + \alpha) \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \int_0^\infty dp p \int_0^\infty dy \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + y^2}} \\ &\times J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) [J_{\nu_1}^2(pw) + (J_{\nu_2}^2(pw))] , \end{aligned} \quad (5.165)$$

onde definimos uma nova variável  $y = 2\pi u/L$ . Adotando, mais uma vez, a presença implícita de uma função cutoff, com a ajuda da identidade fornecida em (5.48), é possível desenvolver a integral sobre  $\lambda$  usando-se (5.152) e a integral sobre  $p$  com a ajuda de [110]

$$\int_0^\infty dx x e^{-\rho^2 x^2} J_\nu(\beta x) = \frac{1}{2\rho^2} e^{-\beta^2/(2\rho^2)} I_\nu(\beta^2/(2\rho^2)) . \quad (5.166)$$

Assim, após alguns passos intermediários, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle T_{\phi\phi} \rangle_{\text{AdS,cs}} &= -\frac{qr^2}{(2\pi w)^2 a^3} \sum_j q(j + \alpha) \int_0^\infty dx x^2 e^{-x(1+\rho^2)} \\ &\times [I_{\beta_j}(x\rho^2) - I_{\beta_j+\epsilon_j}(x\rho^2)] [I_{\nu_1}(x) + I_{\nu_2}(x)] . \end{aligned} \quad (5.167)$$

No desenvolvimento para obtenção da Eq. (5.167), introduzimos uma nova variável,  $x = w^2/(2\tau^2)$ . A fim de transformar a expressão acima em uma forma mais conveniente, observamos que  $q(j + \alpha) = \epsilon_j \beta_j + 1/2$ , de forma que podemos usar (5.154). O resultado

obtido é

$$\begin{aligned} \langle T_{\phi\phi} \rangle_{\text{AdS,cs}} &= -\frac{qr^2}{(2\pi w)^2 a^3} \int_0^\infty x^2 e^{-x} [I_{\nu_1}(x) + I_{\nu_2}(x)] \\ &\times \left[ (1/2 + x\partial_x) e^{-x\rho^2} \mathcal{G}(q, \alpha_0, x\rho^2) \right] , \end{aligned} \quad (5.168)$$

com  $\mathcal{G}(q, \alpha_0, y)$  definida em (5.85). Para subtrair a contribuição devido ao espaço-tempo AdS puro de  $\langle T_{\phi\phi} \rangle_{\text{AdS,cs}}$ , podemos descartar o termo  $e^y$  entre parênteses na representação da função  $\mathcal{G}(q, \alpha_0, y)$  dada em (5.85), fornecendo a função  $\mathcal{G}_0(q, \alpha_0, y)$  já mencionada em (5.135). Renormalizando a componente azimutal do tensor energia-momento acima, e com o uso do tensor métrico contravariante,  $g^{\phi\phi}$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle T_\phi^\phi \rangle_{\text{cs}} &= \frac{q}{4\pi^2 a^5} \int_0^\infty x^2 e^{-x} \left[ (1/2 + x\partial_x) e^{-x\rho^2} \mathcal{G}_0(q, \alpha_0, x\rho^2) \right] \\ &\times [I_{\nu_1}(x) + I_{\nu_2}(x)] . \end{aligned} \quad (5.169)$$

Comparando esta expressão com (5.135), podemos ver que a seguinte expressão é verificada:

$$\langle T_\phi^\phi \rangle_{\text{cs}} = (1 + r\partial_r) \langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}} . \quad (5.170)$$

Vamos agora desenvolver a contribuição devido à compactificação:

$$\begin{aligned} \langle T_{\phi\phi} \rangle_c &= -\frac{iq^2 w^4 r}{4\pi^2 a^3} \sum_j \epsilon_j (j + \alpha) \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \int_0^\infty dp p \int_0^\infty dy \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + (iy)^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + (iy)^2}} \right] \left( \frac{1}{e^{yL-2\pi i\tilde{\beta}} - 1} + \frac{1}{e^{yL+2\pi i\tilde{\beta}} - 1} \right) J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) \\ &\times (J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)) , \end{aligned} \quad (5.171)$$

onde realizamos uma mudança de variável  $u = \frac{Ly}{2\pi}$ . Utilizando novamente a identidade (5.65) e a relação  $(e^x - 1)^{-1} = \sum_{l=1}^\infty e^{-lx}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle T_{\phi\phi} \rangle_c &= -\frac{4q^2 w^4 r}{(2\pi)^2 a^3} \sum_{l=1}^\infty \cos(2\pi l\tilde{\beta}) \sum_j \epsilon_j (j + \alpha) \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \int_0^\infty dp p \int_{\sqrt{\lambda^2 + p^2}}^\infty \frac{dy e^{-lLy}}{\sqrt{y^2 - \lambda^2 - p^2}} \\ &\times J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j+\epsilon_j}(\lambda r) [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)] . \end{aligned} \quad (5.172)$$

Adotando uma representação específica para a função de Macdonald [107], podemos representar a integral sobre a variável  $y$  por  $K_0(lL\sqrt{\lambda^2 + p^2})$ ; além disso, considerando a repre-

sentação integral (4.28), podemos integrar sobre  $\lambda$  com o uso de (5.152), bem como sobre a variável  $p$  com a fórmula (5.166). Mais uma vez, identificando  $q(j + \alpha) = \epsilon_j \beta_j + 1/2$  e com a ajuda de (5.154), e fazendo uma mudança de variável  $\tau = (lL)^2 x / 2w^2$ , a contribuição induzida pela compactificação para a componente azimutal do tensor energia-momento, é expressa por

$$\begin{aligned} \langle T_{\phi\phi} \rangle_c &= -\frac{qr^2}{2\pi^2 a^3 w^2} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^{\infty} dx x^2 e^{-(1+l^2 L^2/(2w^2))x} \\ &\times \left[ (1/2 + x \partial_x) e^{-x\rho^2} \mathcal{G}(q, \alpha_0, x\rho^2) \right] [I_{\nu_1}(x) + I_{\nu_2}(x)] . \end{aligned} \quad (5.173)$$

Neste ponto, podemos usar os mesmos passos adotados na análise da componente  $\langle T_{\phi}^{\phi} \rangle_{cs}$  para concluir que

$$\langle T_{\phi}^{\phi} \rangle_c = (1 + r \partial_r) \langle T_0^0 \rangle_c . \quad (5.174)$$

#### 5.4.4 Componente ao longo da direção $w$

Vamos agora analisar a componente do tensor energia-momento induzida ao longo da coordenada de Poincaré. Levando em conta que  $A_w = 0$  e  $\{\gamma_w, \Gamma_w\} = 0$ , o tensor energia-momento ao longo da eixo  $w$  tem somente contribuições provenientes das derivadas ordinárias:

$$\langle T_{ww} \rangle = -\frac{i}{4} \sum_{\sigma} \sum_{\chi=-, +} \chi [\bar{\psi}_{\sigma}^{(\chi)} \gamma_w \partial_w \psi_{\sigma}^{(\chi)} - (\partial_w \bar{\psi}_{\sigma}^{(\chi)}) \gamma_w \psi_{\sigma}^{(\chi)}] . \quad (5.175)$$

Substituindo as funções dos modos na expressão acima e subsequentemente realizando as somas sobre  $\eta$  e  $\chi$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \langle T_{ww} \rangle &= \frac{sqw^4}{4\pi a^3 L} \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} dp \sum_j \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda p^3 [J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\lambda r)]}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + [2\pi(l + \tilde{\beta})/L]^2}} \\ &\times [J'_{\nu_1}(pw) J_{\nu_2}(pw) - J_{\nu_1}(pw) J'_{\nu_2}(pw)] , \end{aligned} \quad (5.176)$$

onde as derivadas das funções de Bessel são com respeito ao argumento. A componente (5.176) é a mesma para  $s = +1$  e  $s = -1$ .

Desenvolvendo a soma sobre  $l$  através da fórmula de Abel-Plana dada em (4.20), tomando  $g(u) = 1$  e  $f(u) = [\lambda^2 + p^2 + (2\pi u/L)]^{-1/2}$ , mais uma vez, somos capazes de de-

compor o VEV do tensor energia momento em uma contribuição induzida puramente pela corda cósmica,  $\langle T_{ww} \rangle_{cs}$ , e uma segunda induzida pela compactificação,  $\langle T_{ww} \rangle_c$ . Começamos desenvolvendo o termo induzido pela corda cósmica:

$$\begin{aligned} \langle T_{ww} \rangle_{AdS,cs} &= \frac{qsw^4}{4\pi^2 a^3} \sum_j \int_0^\infty d\lambda \lambda \left[ J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\lambda r) \right] \int_0^\infty dp p^3 \\ &\times \left[ J'_{\nu_1}(pw) J_{\nu_2}(pw) - J_{\nu_1}(pw) J'_{\nu_2}(pw) \right] \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + x^2}}, \quad (5.177) \end{aligned}$$

onde realizamos a mudança de variável  $x = 2\pi u/L$ . Agora, vamos usar a identidade (5.48). De acordo com (5.18), temos  $\nu_2 = \nu_1 + s$ , de forma que podemos adaptar a relação de recorrência envolvendo as derivadas da função de Bessel dada em (5.150) com as substituições  $\epsilon_j \rightarrow s$  e  $\beta_j \rightarrow \nu_1$ . Assim, podemos integrar sobre  $\lambda$ ,  $p$  e  $x$ , de modo que após alguns passos intermediários, obtêm-se

$$\begin{aligned} \langle T_{ww} \rangle_{AdS,cs} &= \frac{qw^4}{8\pi^2 a^3} \int_0^\infty \frac{dt}{t^3} e^{-r^2/(2t^2)} \mathcal{G}(q, \alpha_0, r^2/(2t^2)) \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t^2} \left[ \frac{e^{-w^2/(2t^2)}}{t^2} (I_{\nu_1}(w^2/(2t^2)) + I_{\nu_2}(w^2/(2t^2))) \right] \right. \\ &\left. + \frac{2s\nu_1 + 1}{4t^4} e^{-w^2/(2t^2)} (I_{\nu_1}(w^2/(2t^2)) - I_{\nu_2}(w^2/(2t^2))) \right\}. \quad (5.178) \end{aligned}$$

Realizando a mudança da variável de integração,  $y = w^2/(2t^2)$ , e usando a relação presente em (5.154) com as substituições  $\epsilon_j \rightarrow s$  e  $\beta_j \rightarrow \nu_1$ , a expressão acima é simplificada e é escrita como

$$\langle T_{ww} \rangle_{cs} = -\frac{qw^4}{8\pi^2 a^3 w^2} \int_0^\infty dy y^2 e^{-(1+\rho^2)y} (I_{\nu_1}(y) + I_{\nu_2}(y)) \mathcal{G}(q, \alpha_0, y\rho^2). \quad (5.179)$$

Agora, substituindo a representação da função  $\mathcal{G}(q, \alpha_0, y\rho^2)$ , presente em (5.85), na expressão dada acima e subsequentemente realizando a extração da contribuição induzida pela espaço-tempo AdS puro, podemos realizar a integral sobre  $y$ , obtendo a contribuição induzida pela corda cósmica na geometria sem compactificação, que coincide com a expressão para a densidade de energia também induzida pela corda:

$$\langle T_w^w \rangle_{cs} = \langle T_0^0 \rangle_{cs}. \quad (5.180)$$

Vamos agora dedicar nossa atenção para o cálculo do VEV induzido pela compactificação:

$$\begin{aligned}
 \langle T_{ww} \rangle_c &= \frac{qsw^4}{2\pi^2 a^3} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \sum_j \int_0^{\infty} d\lambda \lambda \left[ J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\lambda r) \right] \\
 &\times \int_0^{\infty} dp p^3 \left[ J'_{\nu_1}(pw) J_{\nu_2}(pw) - J_{\nu_1}(pw) J'_{\nu_2}(pw) \right] \\
 &\times \int_{\sqrt{\lambda^2 + p^2}}^{\infty} \frac{dx e^{-lLx}}{\sqrt{x^2 - \lambda^2 - p^2}}, \quad (5.181)
 \end{aligned}$$

onde introduzimos a variável  $x = 2\pi u/L$ , e levamos em conta a identidade (5.65) e a expansão em série,  $(e^v - 1)^{-1} = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-lv}$ , no desenvolvimento da expressão acima.

Agora, usando a relação de recorrência envolvendo as derivadas das funções de Bessel e integrando sobre  $x$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle T_{ww} \rangle_c &= -\frac{qw^4}{2\pi^2 a^3} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \sum_j \int_0^{\infty} d\lambda \lambda \left[ J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\lambda r) \right] \int_0^{\infty} dp p^3 \\
 &\times \left[ J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw) - \frac{2\nu_1 + s}{pw} J_{\nu_1}(pw) J_{\nu_2}(pw) \right] K_0(lL\sqrt{\lambda^2 + p^2}). \quad (5.182)
 \end{aligned}$$

Usando a representação integral (4.28) para  $K_0(lL\sqrt{\lambda^2 + p^2})$ , podemos integrar sobre  $\lambda$  e  $p$ . Além disso, introduzindo a mudança de variável,  $y = 2tw^2/(lL)^2$ , podemos seguir os mesmos passos adotados no cálculo da contribuição  $\langle T_{ww} \rangle_{cs}$ , obtendo o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
 \langle T_{ww} \rangle_c &= -\frac{qw^4}{4\pi^2 a^3 w^2} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^{\infty} y^2 e^{-(1+\rho^2 + (lL)^2/(2w^2))} \mathcal{G}(q, \alpha_0, y\rho^2) \\
 &\times [I_{\nu_1}(y) + I_{\nu_2}(y)] \, . \quad (5.183)
 \end{aligned}$$

Comparando a expressão acima com aquela dada em (5.142), podemos facilmente concluir que

$$\langle T_w^w \rangle_c = \langle T_0^0 \rangle_c \, . \quad (5.184)$$

### 5.4.5 Componente axial

Vamos analisar a componente do tensor energia-momento ao longo do eixo  $z$ , que daqui em diante é nomeada de componente axial do tensor energia-momento. Levando em consideração que temos um fluxo magnético circundado pelo eixo compactificado e

associado ao campo de calibre constante  $A_z$ , além do anti-comutador  $\{\gamma_z, \Gamma_z\} = 0$ , podemos ver que somente contribuições provenientes das derivadas covariantes,  $\partial_z + ieA_z$ , estão presentes. Logo, ficamos com

$$\langle T_{zz} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\chi=-,+} \chi \tilde{k}_l \bar{\psi}_{\sigma}^{(\chi)} \gamma_z \psi_{\sigma}^{(\chi)} . \quad (5.185)$$

Substituindo as funções de onda de energia positiva e negativa na expressão acima, e subsequentemente somando sobre  $\eta$  e  $\chi$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \langle T_{zz} \rangle &= -\frac{qw^4}{4\pi a^3 L} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda \int_0^{\infty} dp p \sum_j \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{k}_l^2}{E} \\ &\times [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)] [J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j+\epsilon_j}^2(\lambda r)] . \end{aligned} \quad (5.186)$$

Note que a componente axial coincide para os casos em que  $s = +1$  e  $s = -1$ .

A fim de efetuarmos a soma sobre o número quântico  $l$ , usamos a fórmula de Abel-Plana (4.20), com  $g(u) = 1$  e

$$f(u) = \frac{(2\pi u/L)^2}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + (2\pi u/L)^2}} . \quad (5.187)$$

Isto nos permite decompor o VEV como:

$$\langle T_{zz} \rangle = \langle T_{zz} \rangle_{\text{AdS,cs}} + \langle T_{zz} \rangle_c . \quad (5.188)$$

Vamos desenvolver o termo induzido pela corda cósmica:

$$\begin{aligned} \langle T_{zz} \rangle_{\text{AdS,cs}} &= -\frac{qw^4}{4\pi^2 a^3} \int_0^{\infty} dp p (J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)) \sum_j \int_0^{\infty} d\lambda \lambda (J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j+\epsilon_j}^2(\lambda r)) \\ &\times \int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + x^2}} , \end{aligned} \quad (5.189)$$

onde introduzimos a mudança de variável  $x = 2\pi u/L$ . A contribuição para a componente axial do tensor energia-momento também é divergente, como é explicitamente exibido pela integral sobre  $x$ . Usando implicitamente uma função cutoff regularizadora, e a identidade dada em (5.48), podemos desenvolver as integrações sobre  $\lambda$ ,  $p$  e  $x$ , com a ajuda de [107],

obtendo o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \langle T_{zz} \rangle_{\text{AdS,cs}} &= -\frac{qw^4}{2(4\pi)^2 a^3} \int_0^\infty dv \frac{e^{-(r^2+w^2)/(2v^2)}}{v^7} (I_{\nu_1}(w^2/(2v^2)) + I_{\nu_2}(w^2/(2v^2))) \\ &\times \sum_j (I_{\beta_j}(r^2/(2v^2)) + I_{\beta_j+\epsilon_j}(r^2/(2v^2))) . \end{aligned} \quad (5.190)$$

Introduzindo uma nova variável,  $y = r^2/(2v^2)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle T_{zz} \rangle_{\text{AdS,cs}} &= -\frac{q\rho^{-6}}{8\pi^2 a^3 w^2} \int_0^\infty dy y^2 e^{-(1+1/\rho^2)y} (I_{\nu_1}(y/\rho^2) + I_{\nu_2}(y/\rho^2)) \\ &\times \mathcal{G}(q, \alpha_0, y) . \end{aligned} \quad (5.191)$$

Subtraindo a contribuição divergente correspondente devido ao espaço-tempo AdS puro, e efetuando a mudança de variável  $\chi = y/\rho^2$ , a contribuição renormalizada induzida pela corda cósmica na direção axial, fica:

$$\begin{aligned} \langle T_z^z \rangle_{\text{cs}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\pi^2} \frac{1}{a^5} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k\alpha_0) \mathcal{Z}_{ma}(u_k) \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sinh(z)h(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \mathcal{Z}_{ma}(u_z) \right] , \end{aligned} \quad (5.192)$$

que coincide com a expressão para  $\langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}}$ .

Vamos agora desenvolver o VEV induzido pela compactificação proveniente do segundo termo em (5.188):

$$\begin{aligned} \langle T_{zz} \rangle_c &= -\frac{iqw^4}{4\pi a^3 L} \sum_j \int_0^\infty d\lambda \lambda (J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j+\epsilon_j}^2(\lambda r)) \int_0^\infty dp p (J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)) \\ &\times \int_0^\infty du \left[ \frac{(2\pi iu/L)^2}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + (2\pi iu/L)^2}} - \frac{(-2\pi iu/L)^2}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 + (-2\pi iu/L)^2}} \right] \\ &\times \sum_{n=\pm 1} \frac{1}{e^{2\pi(u+in\tilde{\beta})} - 1} . \end{aligned} \quad (5.193)$$

Introduzindo a variável  $x = 2\pi u/L$ , usando a identidade dada em (5.65) e a expansão em

série  $(e^v - 1)^{-1} = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-lv}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle T_{zz} \rangle_c &= \frac{qw^4}{2\pi^2 a^3} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \sum_j \int_0^{\infty} d\lambda \lambda (J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\lambda r)) \\ &\times \int_0^{\infty} dpp (J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)) \int_{\sqrt{\lambda^2 + p^2}}^{\infty} dx \frac{x^2 e^{-lLx}}{\sqrt{x^2 - \lambda^2 - p^2}} . \end{aligned} \quad (5.194)$$

A fim de procedermos com o presente cálculo, notamos que  $xe^{lLx} = -l^{-1} \partial_L e^{-lLx}$ , o que nos permite efetuar a integral sobre  $x$  com ajuda de [110], de modo que o seguinte resultado é obtido:

$$\begin{aligned} \langle T_{zz} \rangle_c &= -\frac{qw^4}{2\pi^2 a^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi l \tilde{\beta})}{l} \sum_j \int_0^{\infty} d\lambda \lambda (J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\lambda r)) \\ &\times \int_0^{\infty} dpp (J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)) \sqrt{\lambda^2 + p^2} \frac{\partial}{\partial L} [K_1(lL \sqrt{\lambda^2 + p^2})] . \end{aligned} \quad (5.195)$$

Usando a representação integral da função de Macdonald dada em (4.28) e usando a propriedade,  $K_1(z) = K_{-1}(z)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle T_{zz} \rangle_c &= -\frac{qw^4}{2\pi^2 a^3} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \frac{\partial}{\partial L} \left\{ L \left[ \frac{1}{(lL)^2} \int_0^{\infty} dt e^{-t} \sum_j \int_0^{\infty} d\lambda \lambda e^{-(lL)\lambda^2/(4t)} \right. \right. \\ &\times \left. \left. (J_{\beta_j}^2(\lambda r) + J_{\beta_j + \epsilon_j}^2(\lambda r)) \int_0^{\infty} dpp e^{-(lL)p^2/(4t)} (J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)) \right] \right\} . \end{aligned} \quad (5.196)$$

Efetuando as integrais sobre  $\lambda$  e  $p$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle T_{zz} \rangle_c &= -\frac{\partial}{\partial L} \left\{ L \left[ \frac{q}{(2\pi)^2 a^3 w^2} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \int_0^{\infty} dy y^2 e^{-[1 + \rho^2 + (lL)^2/(2w^2)]y} \right. \right. \\ &\times \left. \left. \mathcal{G}(q, \alpha_0, y\rho^2) (I_{\nu_1}(y) + I_{\nu_2}(y)) \right] \right\} . \end{aligned} \quad (5.197)$$

onde introduzimos a variável  $y = 2w^2/(lL)^2$ . Comparando a expressão acima com (5.142), podemos concluir que

$$\langle T_z^z \rangle_c = \partial_L [L \langle T_0^0 \rangle_c] . \quad (5.198)$$

## 5.5 Propriedades do tensor energia-momento

Nesta seção iremos analisar as principais propriedades das componentes do tensor energia-momento apresentadas na seção anterior. É possível verificar que os VEVs do tensor energia-momento encontrados na seção anterior satisfazem a propriedade do traço:

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = sm \langle \bar{\psi} \psi \rangle , \quad (5.199)$$

que é satisfeita por ambas as contribuições induzidas pela corda cósmica e compactificação. Além disso, note que este traço é nulo para o campo fermiônico sem massa. Podemos ver também que a equação de conservação covariante,  $\nabla_\mu \langle T^{\mu\nu} \rangle = 0$ , é obedecida. Na geometria sob consideração, esta equação é reduzida às seguintes relações:

$$\partial_r(r \langle T_r^r \rangle) - \langle T_\phi^\phi \rangle = 0 , \quad (5.200)$$

$$\partial_w \langle T_w^w \rangle - \frac{5}{w} \langle T_w^w \rangle + \frac{1}{w} \langle T_\mu^\mu \rangle = 0 , \quad (5.201)$$

que são também válidas para ambas as contribuições induzidas pela corda e pela topologia não-trivial da compactificação. Note que a Eq. (5.200) pode ser verificada através dos resultados em (5.170) e (5.174), encontrados quando estávamos calculando os VEVs do tensor energia-momento ao longo da direção azimutal. Quanto à segunda relação presente na Eq. (5.201), é possível mostrar que a mesma é satisfeita pelas componentes do tensor energia-momento calculadas na seção anterior.

Agora, queremos investigar alguns casos especiais e assintóticos das componentes do tensor energia-momento. Para as análises realizadas abaixo, consideramos  $s = +1$ .

Vamos primeiro analisar alguns limites assintóticos para a contribuição induzida pela corda cósmica. Primeiro, observamos que  $\langle T_0^0 \rangle_{cs} = \langle T_r^r \rangle_{cs} = \langle T_w^w \rangle_{cs} = \langle T_z^z \rangle_{cs}$ , dadas por (5.136), (5.156), (5.180) e (5.192), respectivamente. Logo, de modo a simplificar nossa análise, podemos escrever estas componentes em uma única fórmula:

$$\begin{aligned} \langle T_\mu^\mu \rangle_{cs} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\pi^2} \frac{1}{a^5} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k \alpha_0) \mathcal{Z}_{ma}(u_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sinh(z) h(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \mathcal{Z}_{ma}(u_z) \right] , \end{aligned} \quad (5.202)$$

com  $\mu = 0, r, w, z$  (sem soma sobre  $\mu$ ).

Para pontos do espaço em que  $\rho$  é pequeno, a função  $\mathcal{Z}_{ma}(u)$  assume uma forma simples, sendo esta idêntica àquela dada em (5.59), de modo que podemos escrever (5.202) como

$$\langle T_\mu^\mu \rangle_{cs} \approx \frac{3}{32\pi^2} \left( \frac{w}{ra} \right)^5 h_5(q, \alpha_0) , \quad (5.203)$$

onde a função  $h_\mu(q, \alpha_0)$  está definida em (5.110).

Por outro lado, para regiões do espaço em que  $\rho \gg 1$ , a função  $\mathcal{Z}_{ma}(u)$  é simplificada e tem a mesma forma de (5.60), tal que a substituição desta última em (5.202), resulta em

$$\langle T_\mu^\mu \rangle_{cs} \approx -\frac{1}{2a} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs} , \quad (5.204)$$

onde a expressão assintótica para o CF induzido pela corda é dado pela Eq. (5.116).

Uma análise similar pode ser feita para as contribuições induzidas pela compactificação. Primeiro, notamos que  $\langle T_0^0 \rangle_c = \langle T_r^r \rangle_c = \langle T_w^w \rangle_c$ , dadas por (5.143), (5.161) e (5.184), respectivamente. Isso pode ser sumarizado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \langle T_\mu^\mu \rangle_c &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\pi^2}a^5} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \left[ \sum_{k=0}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k \alpha_0) \mathcal{Z}_{ma}(u_{lk}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sinh(z) h(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} \mathcal{Z}_{ma}(u_{lz}) \right] , \end{aligned} \quad (5.205)$$

com  $\mu = 0, r, w$  (sem soma sobre  $\mu$ ). Agora, a fim de continuarmos com nossa análise, precisamos levar em conta a decomposição

$$\langle T_\mu^\mu \rangle_c = \langle T_\mu^\mu \rangle_c^{(0)} + \langle T_\mu^\mu \rangle_c^{(q, \alpha_0)} , \quad (5.206)$$

onde o primeiro e o segundo termo correspondem as Eqs. (5.144) e (5.145).

O primeiro termo no lado direito de (5.206) é induzido puramente pela topologia não-trivial devido à compactificação, e é independente da coordenada radial,  $r$ , e dos parâmetros  $q$  e  $\alpha_0$ . Para grandes valores de  $L$ , com  $w$  fixo, este termo assintoticamente tende a zero como  $(w/L)^{2\nu_2+4}$ .

Quanto à segunda contribuição em (5.206), analisamos seu comportamento para  $L/w \gg 1$ . Neste caso, considerando apenas a ordem principal, ficamos com

$$\langle T_\mu^\mu \rangle_c^{(q, \alpha_0)} \approx -\frac{1}{2a} \langle \bar{\psi} \psi \rangle_c^{(q, \alpha_0)}, \quad (5.207)$$

onde  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_c^{(q, \alpha_0)}$  na expressão acima tem a forma assintótica dada por (5.125), excluindo o termo puramente topológico,  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_c^{(0)}$ .

Vamos agora analisar as componentes azimutal e axial do tensor energia-momento para o caso do campo sem massa, e também seus respectivos comportamentos assintóticos no limite Minkowskiano. Começemos analisando a componente azimutal. Para um campo sem massa, a contribuição induzida pela corda cósmica é obtida substituindo a expressão correspondente para este caso, apresentada em (5.61), na Eq. (5.170), de modo que o resultado obtido é

$$\langle T_\phi^\phi \rangle_{cs} = -\frac{3}{8\pi^2} \left( \frac{w}{ar} \right)^5 h_5(q, \alpha_0). \quad (5.208)$$

Similarmente, para a contribuição induzida pela compactificação, temos

$$\begin{aligned} \langle T_\phi^\phi \rangle_c &= \frac{6}{\pi^2} \left( \frac{w}{aL} \right)^5 \left[ \sum_{k=0}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k \alpha_0) U(\tilde{\beta}, \rho_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sinh(z) h(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} U(\tilde{\beta}, \tau(z)) \right], \end{aligned} \quad (5.209)$$

onde introduzimos a função

$$U(\tilde{\beta}, x) = \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l \tilde{\beta}) \left[ \frac{1}{(x^2 + l^2)^{5/2}} - \frac{5x^2}{(x^2 + l^2)^{7/2}} \right], \quad (5.210)$$

e os argumentos  $\rho_k$  e  $\tau(z)$  estão definidos em (5.74).

Para o limite Minkowskiano, substituímos (5.77) em (5.170) e (5.174), e após alguns passos intermediários, obtemos os seguintes resultados, respectivamente:

$$\begin{aligned} \langle T_\phi^\phi \rangle_{cs}^{(M)} &= -\frac{\sqrt{2}m^5}{\pi^{5/2}} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k \alpha_0) g_\phi^{(0)}(2mr \sin(\pi k/q)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sinh(z) h(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} g_\phi^{(0)}(2mr \cosh(z)) \right], \end{aligned} \quad (5.211)$$

$$\begin{aligned}
 \langle T_\phi^\phi \rangle_c^{(M)} &= -\frac{2^{3/2}m^5}{\pi^{5/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l\tilde{\beta}) \left[ \sum_{k=0}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k\alpha_0) g_\phi^{(l)} \left( mL\sqrt{l^2 + \rho_k^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sinh(z)h(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} g_\phi^{(l)} \left( mL\sqrt{l^2 + (\tau(z))^2} \right) \right] , \quad (5.212)
 \end{aligned}$$

onde definimos a função

$$g_\phi^{(l)}(x) = \frac{x^2 - (mL)^2}{x^2} f_{3/2}(x) + \frac{4x^2 - 5(mL)^2}{x^2} f_{5/2}(x) , \quad (5.213)$$

com a função  $f_\nu(x)$  definida em (5.112). No caso especial em que o campo fermiônico é não massivo, podemos simplificar ainda mais as expressões (5.211) e (5.212), e, à parte do fator conforme  $(w/a)^5$ , coincidem com as expressões (5.208) e (5.209), respectivamente.

Direcionamos nossa atenção agora para a análise da componente axial induzida pela compactificação,  $\langle T_z^z \rangle_c$ , dada pela Eq. (5.198). Para um campo sem massa, usando novamente (5.61), obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle T_z^z \rangle_c &= \frac{6}{\pi^2} \left( \frac{w}{aL} \right)^5 \left[ \sum_{k=0}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k\alpha_0) H(\rho_k) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sinh(z)h(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} H(\tau(z)) \right] , \quad (5.214)
 \end{aligned}$$

onde definimos a função

$$H(\tilde{\beta}, x) = \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l\tilde{\beta}) \left[ \frac{1}{(x^2 + l^2)^{5/2}} - \frac{5l^2}{(x^2 + l^2)^{7/2}} \right] . \quad (5.215)$$

Para o limite Minkowskiano,  $\langle T_z^z \rangle_c$  assume a forma

$$\begin{aligned}
 \langle T_z^z \rangle_c^{(M)} &= -\frac{2^{3/2}m^5}{\pi^{5/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l\tilde{\beta}) \left[ \sum_{k=0}^{[q/2]'} (-1)^k \cos(\pi k/q) \cos(2\pi k\alpha_0) g_z^{(l)} \left( mL\sqrt{l^2 + \rho_k^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sinh(z)h(q, \alpha_0, 2z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)} g_z^{(l)} \left( mL\sqrt{l^2 + (\tau(z))^2} \right) \right] , \quad (5.216)
 \end{aligned}$$

onde introduzimos a notação

$$g_z^{(l)}(x) = \frac{x^2 - (2mrs_\gamma)^2}{x^2} f_{3/2}(x) + \frac{4x^2 - 5(2mrs_\gamma)^2}{x^2} f_{5/2}(x) , \quad (5.217)$$

com  $s_\gamma = \sin(\pi k/q), \cosh(z)$ . Para o campo sem massa, o VEV acima é ainda mais simplificado e, à parte do fator conforme  $(w/a)^5$ , coincide com a Eq. (5.214).

## Capítulo 6

# Correntes fermiônicas em modelos de mundo brana

Neste capítulo apresentamos nossos resultados para a investigação dos efeitos de uma brana e uma corda cósmica com fluxo magnético sobre o VEV da densidade de corrente para um campo fermiônico carregado na geometria do espaço-tempo AdS  $(4+1)$ -dimensional [116]. A brana é paralela à fronteira AdS e a corda cósmica é ortogonal à brana. Dois tipos de condições de contorno são consideradas na brana: condição de sacola do MIT e condições de contorno em modelos de brana com simetria  $Z_2$ . A brana divide o espaço em duas regiões com diferentes propriedades do estado de vácuo. Como veremos, a única componente não nula da densidade de corrente é induzida ao longo da direção azimutal e, em ambas as regiões, o VEV correspondente é decomposto em uma contribuição induzida na geometria sem brana e outra com brana.

### 6.1 Modos fermiônicos

Vamos considerar um campo fermiônico quântico  $\psi(x)$  em um espaço-tempo AdS  $(4+1)$ -dimensional, com o tensor métrico definido pelo elemento de linha (5.2). Entretanto, enfatizamos que neste capítulo a dimensão extra não será compactificada, mas servirá para acomodar a brana que desejamos considerar. Neste caso, devido a dimensão extra não ser compactificada, e conseqüentemente não haveremos periodicidade ao longo da dimensão extra, novas soluções serão obtidas.

Como já visto no capítulo anterior, a equação de Dirac em um espaço-tempo curvo na presença de um campo de calibre clássico,  $A_\mu$ , é dada por

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + \Gamma_\mu + ieA_\mu) - sm]\psi = 0, \quad (6.1)$$

onde, novamente,  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac no espaço-tempo curvo realizando as duas representações irredutíveis da álgebra de Clifford ( $s = \pm 1$ ), e  $\Gamma_\mu$  é a conexão espinorial. Vamos assumir a presença de uma brana de codimensão 1 paralela à fronteira AdS e localizada em  $w = w_0$ . Na brana, impomos que o operador de campo satisfaz a condição de sacola do MIT [60],

$$(1 + i\gamma^\mu n_\mu)\psi(x) = 0, \quad w = w_0, \quad (6.2)$$

onde  $n_\mu$  é o vetor normal correspondente. A distância física a partir da brana é medida em termos da coordenada  $y$ , definida como  $y = a \ln(w/a)$ ,  $-\infty < y < +\infty$ . Para a coordenada  $y$  da brana, temos  $y_0 = a \ln(w_0/a)$ . A distância da brana a um ponto  $y$  qualquer é expressa como  $|y - y_0|$ . A brana separa o espaço-tempo em duas regiões:  $0 \leq w \leq w_0$  e  $w \geq w_0$ . Iremos nos referir à estas regiões como L (esquerda) e R (direita), respectivamente. No sistema de coordenadas adotado  $x^\mu = (t, r, \phi, w, z)$ , para o vetor normal na condição de contorno (6.2), temos  $n_\mu = \delta_\mu^3 a/w$  na região L e  $n_\mu = -\delta_\mu^3 a/w$  na região R.

Na discussão abaixo, as matrizes gama adotadas são aquelas já utilizadas no capítulo anterior, presentes em (5.8) e (5.9). Além disso, o produto  $\gamma^\mu \Gamma_\mu$  na geometria do presente problema é idêntico àquele presente na Eq. (5.11).

Nosso interesse no presente capítulo é o cálculo do VEV da densidade de corrente fermiônica e, para este fim, iremos considerar novamente a fórmula da soma sobre os modos presente em (5.40),

$$\langle j^\mu \rangle = \frac{e}{2} \sum_\sigma [\bar{\psi}_\sigma^{(-)} \gamma^\mu \psi_\sigma^{(-)} - \bar{\psi}_\sigma^{(+)} \gamma^\mu \psi_\sigma^{(+)}], \quad (6.3)$$

onde o conjunto de números quânticos  $\sigma$  deverá ser completamente definido de forma separada para as regiões R e L.

Para o campo de calibre em (6.1), assumiremos uma configuração simples  $A_\mu = \delta_\mu^2 A_2$ , com  $A_2$  constante. Isto corresponde a um fluxo magnético ao longo do núcleo da corda. Assim, para o cálculo da densidade de corrente do vácuo, precisamos apenas do

conjunto de soluções da Eq. (6.1) para o caso especial do potencial vetor e obedecendo à condição de contorno (6.2).

O procedimento para obtenção do conjunto completo de soluções da equação de Dirac é similar àquele já discutido no capítulo 5. Assim, procedendo de maneira similar ao que foi feito no capítulo anterior, obtemos os seguintes modos fermiônicos de energia positiva e negativa:

$$\psi_{\sigma}^{(\pm)}(x) = C_{\sigma}^{(\pm)} w^{5/2} \begin{pmatrix} J_{\beta_j}(\lambda r) W_{\nu_1}(pw) e^{-iq\phi/2} \\ \mp s \epsilon_j \kappa_{\eta} b_{\eta}^{(\pm)} J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) W_{\nu_2}(pw) e^{iq\phi/2} \\ i s \kappa_{\eta} J_{\beta_j}(\lambda r) W_{\nu_2}(pw) e^{-iq\phi/2} \\ \pm i \epsilon_j b_{\eta}^{(\pm)} J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) W_{\nu_1}(pw) e^{iq\phi/2} \end{pmatrix} e^{iqj\phi + ik_z z \mp iEt}, \quad (6.4)$$

com  $0 \leq \lambda, p < \infty$ ,  $j = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$ , e

$$E = \sqrt{\lambda^2 + p^2 + k_z^2}. \quad (6.5)$$

As ordens da função de Bessel são dadas pela expressões

$$\beta_j = q|j + \alpha| - \epsilon_j/2, \quad \nu_l = ma + (-1)^l s/2, \quad (6.6)$$

onde  $\alpha = eA_2/q$ ,  $\epsilon_j = 1$  para  $j > -\alpha$  e  $\epsilon_j = -1$  for  $j < -\alpha$ . Em (6.4),

$$W_{\nu}(pw) = c_1 J_{\nu}(pw) + c_2 Y_{\nu}(pw), \quad (6.7)$$

onde  $J_{\nu}(x)$  e  $Y_{\nu}(x)$  são as funções de Bessel e Neumann, e introduzimos as notações

$$\kappa_{\eta} = \frac{-k_z + \eta \sqrt{k_z^2 + p^2}}{p}, \quad b_{\eta}^{(\pm)} = \frac{E \mp \eta \sqrt{k_z^2 + p^2}}{\lambda}, \quad \text{com } \eta = \pm 1. \quad (6.8)$$

Note que uma das constantes  $c_1$  e  $c_2$  em (6.7) pode ser absorvida no coeficiente  $C_{\sigma}^{(\pm)}$ . Com as definições dadas acima, o conjunto de números quânticos  $\sigma$  em (6.3) é especificado como  $\sigma = (\lambda, p, j, k_z, \eta)$ . Pode ser mostrado que as funções (6.4) são autofunções do operador momento angular total projetado na direção  $w$  (5.25), com autovalores  $qj$ .

O coeficiente  $C_\sigma^{(\pm)}$  em (6.4) é determinado pela condição de normalização

$$\int_0^\infty dr \int_0^{\phi_0} d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int dw r(a/w)^4 (\psi_\sigma^{(\pm)})^\dagger \psi_{\sigma'}^{(\pm)} = \delta_{\sigma\sigma'} , \quad (6.9)$$

onde, novamente,  $\delta_{\sigma\sigma'}$  é entendido como a função delta de Dirac para os números quânticos contínuos de  $\sigma$  e a delta de Kronecker para os discretos. A integral sobre  $w$  em (6.9) é realizada sobre o intervalo  $[0, w_0]$  na região L e sobre  $[w_0, \infty)$  na região R. O coeficiente remanescente na combinação linear em (6.7) é determinado pela condição de contorno (6.2).

As propriedades do estado de vácuo são diferentes nas regiões L e R e, portanto, devemos considerar a densidade de corrente fermiônica separadamente para cada uma destas regiões. Começaremos pela região R.

## 6.2 Densidade de corrente na região R

Nesta seção iremos considerar a densidade de corrente na região  $w > w_0$  (região R).

### 6.2.1 Fórmula geral

Os modos correspondentes são dados por (6.4), onde a função  $W_\nu(pw)$  é definida em (6.7). Para a região R, o vetor normal é  $n_\mu = -\delta_\mu^3 a/w$ , e da condição de contorno (6.2) temos que os coeficientes na combinação linear correspondente podem ser tomados como  $c_1 = Y_{\nu_2}(pw_0)$  e  $c_2 = -J_{\nu_2}(pw_0)$ . Logo, na região R as funções dos modos têm a forma (6.4), onde

$$W_{\nu_l}(pw) = G_{\nu_2, \nu_l}(pw_0, pw), \quad l = 1, 2. \quad (6.10)$$

Aqui e no que segue, usamos a notação

$$G_{\mu, \nu}(x, y) = Y_\mu(x)J_\nu(y) - J_\mu(x)Y_\nu(y). \quad (6.11)$$

Os autovalores do número quântico  $p$  são contínuos e na condição de normalização (6.9) a parte correspondente do lado direito é entendida como a função delta  $\delta(p - p')$ . No cálculo

da integral de normalização, notamos que para  $p = p'$  a contribuição dominante para a integral sobre  $w$  vem de grandes valores de  $w$  e, portanto, podemos substituir as funções cilíndricas, com os argumentos  $pw$ , pelas expressões assintóticas correspondentes. Deste modo, podemos ver que  $C_{\sigma}^{(\pm)} = C_{(R)\sigma}^{(\pm)}$  com

$$\left| C_{(R)\sigma}^{(\pm)} \right|^{-2} = \frac{16\pi^2 a^4 \eta}{q\lambda^2 p^2} E \sqrt{E^2 - \lambda^2 \kappa_{\eta}} b_{\eta}^{(\pm)} \left[ J_{\nu_2}^2(pw_0) + Y_{\nu_2}^2(pw_0) \right], \quad (6.12)$$

e com as definições de (6.8).

Dadas as funções dos modos, o VEV da densidade de corrente na região R é calculada usando-se a fórmula (6.3), onde

$$\sum_{\sigma} = \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int_0^{\infty} dp \sum_{\eta=\pm 1} \sum_{j=\pm 1/2, \dots}. \quad (6.13)$$

Em primeiro lugar, é possível mostrar que para as funções dos modos (6.4), temos  $\bar{\psi}_{\sigma}^{(\pm)} \gamma^1 \psi_{\sigma}^{(\pm)} = \bar{\psi}_{\sigma}^{(\pm)} \gamma^3 \psi_{\sigma}^{(\pm)} = 0$  e, conseqüentemente,  $\langle j^1 \rangle = \langle j^3 \rangle = 0$ . Para as componentes  $\mu = 0, 4$  podemos ver que o produto  $\bar{\psi}_{\sigma}^{(\pm)} \gamma^{\mu} \psi_{\sigma}^{(\pm)}$  é uma função ímpar de  $k_z$ . Levando em conta que na fórmula para o VEV da densidade de corrente temos a integração  $\int_{-\infty}^{+\infty} dk_z$ , concluímos que  $\langle j^0 \rangle = \langle j^4 \rangle = 0$ . Logo, a única componente não nula corresponde à densidade de corrente ao longo da direção azimutal,  $\langle j^2 \rangle$ . Os termos na soma dos modos com  $\eta = +1$  e  $\eta = -1$  fornecem a mesma contribuição e, após a soma sobre  $\eta$ , a componente física correspondente,  $\langle j_{\phi} \rangle = r \langle j^2 \rangle$ , é expressa como

$$\begin{aligned} \langle j_{\phi} \rangle = & -\frac{eqw^6}{4\pi^2 a^5} \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sum_{j=\pm 1/2, \dots} \epsilon_j \frac{\lambda^2 p}{E} \\ & \times J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) \frac{G_{\nu_2, \nu_1}^2(pw_0, pw) + G_{\nu_2, \nu_2}^2(pw_0, pw)}{J_{\nu_2}^2(pw_0) + Y_{\nu_2}^2(pw_0)}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

onde a energia é dada por (6.5). Assim como no capítulo anterior, vamos também escrever o parâmetro  $\alpha$  na forma de (5.42).

Usando a identidade

$$\frac{1}{E} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dv e^{-v^2(\lambda^2 + p^2 + x^2)}, \quad (6.15)$$

e a fórmula (5.49), podemos realizar as integrais sobre  $\lambda$  e  $k_z$  em (6.14), obtendo a seguinte

expressão

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle &= -\frac{eqw^6}{4\pi^2 a^5 r^3} \int_0^\infty du u e^{-u} \mathcal{J}(q, \alpha_0, u) \int_0^\infty dp p \\ &\quad \times e^{-p^2 r^2/(2u)} \frac{G_{\nu_2, \nu_1}^2(pw_0, pw) + G_{\nu_2, \nu_2}^2(pw_0, pw)}{J_{\nu_2}^2(pw_0) + Y_{\nu_2}^2(pw_0)}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

onde  $u = r^2/(2v^2)$  e introduzimos a notação

$$\mathcal{J}(q, \alpha_0, u) = \mathcal{I}(q, \alpha_0, u) - \mathcal{I}(q, -\alpha_0, u), \quad (6.17)$$

onde a função  $\mathcal{I}(q, \pm\alpha_0, u)$  está definida em (5.51). Substituindo a representação para a função  $\mathcal{I}(q, \pm\alpha_0, u)$  dada em (5.52), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(q, \alpha_0, u) &= \frac{4}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{e^{-u \cosh(2x)} g(q, \alpha_0, 2x) \cosh(x)}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} \\ &\quad + \frac{4}{q} \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k s_k \sin(2\pi k \alpha_0) e^{u \cos(2\pi k/q)}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

onde  $s_k = \sin(\pi k/q)$  e

$$\begin{aligned} g(q, \alpha_0, x) &= \cos[q\pi(1/2 + \alpha_0)] \cosh[(1/2 - \alpha_0)qx] \\ &\quad - \cos[q\pi(1/2 - \alpha_0)] \cosh[(1/2 + \alpha_0)qx]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Com (6.18), após efetuar a integral sobre  $u$ , de (6.16) obtemos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle &= -\frac{ew^6}{2\pi^2 a^5 r} \int_0^\infty dp p^3 \frac{G_{\nu_2, \nu_1}^2(pw_0, pw) + G_{\nu_2, \nu_2}^2(pw_0, pw)}{J_{\nu_2}^2(pw_0) + Y_{\nu_2}^2(pw_0)} \\ &\quad \times \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \frac{(-1)^k}{s_k} \sin(2\pi k \alpha_0) K_2(2pr s_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{g(q, \alpha_0, 2x)/\cosh x}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} K_2(2pr \cosh x) \right], \end{aligned} \quad (6.20)$$

onde  $K_\nu(x)$  é função de Macdonald.

Neste capítulo estamos interessados no efeito induzido pela brana. A fim de separarmos a contribuição correspondente, temos que subtrair de (6.20) a densidade de corrente na ausência da brana. Esta última, por sua vez, é calculada pela fórmula (6.3)

com as funções dos modos  $\psi_{\sigma}^{(\pm)}(x)$  substituídas pelas funções  $\psi_{(0)\sigma}^{(\pm)}(x)$  na geometria sem brana. Estas funções são obtidas de (6.4) com a função  $W_{\nu}(pw) = J_{\nu}(pw)$  e a constante de normalização

$$\left| C_{(0)\sigma}^{(\pm)} \right|^{-2} = \frac{16\pi^2 a^4 \eta}{q\lambda^2 p^2} E \sqrt{E^2 - \lambda^2 \kappa_{\eta}} b_{\eta}^{(\pm)}. \quad (6.21)$$

Para o VEV da densidade de corrente azimutal na geometria sem brana, isto nos fornece

$$\begin{aligned} \langle j_{\phi} \rangle_0 &= -\frac{eqw^6}{4\pi^2 a^5} \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sum_{j=\pm 1/2, \dots} \epsilon_j \frac{\lambda^2 p}{E} \\ &\quad \times J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Por transformações similares àsquelas descritas anteriormente, este VEV é apresentado como

$$\begin{aligned} \langle j_{\phi} \rangle_0 &= -\frac{ew^6}{2\pi^2 a^5 r} \int_0^{\infty} dp p^3 [J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)] \\ &\quad \times \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]} \frac{(-1)^k}{s_k} \sin(2\pi k \alpha_0) K_2(2pr s_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{g(q, \alpha_0, 2x)/\cosh x}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} K_2(2pr \cosh x) \right]. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Note que (6.23) é a mesma para  $s = +1$  e  $s = -1$  e, portanto, a densidade de corrente na geometria sem brana coincide para as duas representações da álgebra de Clifford.

Apresentamos a densidade de corrente na geometria com a brana na forma decomposta

$$\langle j_{\phi} \rangle = \langle j_{\phi} \rangle_0 + \langle j_{\phi} \rangle_b, \quad (6.24)$$

onde a parte  $\langle j_{\phi} \rangle_b$  é induzida pela brana. A representação integral correspondente é obtida subtraindo-se (6.23) de (6.20). Podemos transformar a expressão para a contribuição induzida pela brana ao fazer uso da relação

$$\frac{G_{\nu, \mu}^2(x, y)}{J_{\nu}^2(x) + Y_{\nu}^2(x)} - J_{\mu}^2(y) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1,2} \frac{J_{\nu}(x)}{H_{\nu}^{(n)}(x)} H_{\mu}^{(n)2}(y), \quad (6.25)$$

onde  $H_\nu^{(n)}(x)$ ,  $n = 1, 2$ , são as funções de Hankel [107]. Isto nos conduz à expressão

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle_b &= \frac{ew^6}{4\pi^2 a^5 r} \sum_{l=1,2} \int_0^\infty dp p^3 \sum_{n=1,2} \frac{J_{\nu_2}(pw_0)}{H_{\nu_2}^{(n)}(pw_0)} H_{\nu_l}^{(n)2}(pw) \\ &\times \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \frac{(-1)^k}{s_k} \sin(2\pi k \alpha_0) K_2(2pr s_k) \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{g(q, \alpha_0, 2x)/\cosh x}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} K_2(2pr \cosh x) \right]. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Como próximo passo, rotacionamos o contorno da integração sobre  $p$  pelo ângulo  $\pi/2$  ( $-\pi/2$ ) para o termo com  $n = 1$  ( $n = 2$ ). Introduzindo as funções de Bessel modificadas, temos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle_b &= \frac{ew^6}{2\pi^2 a^5 r} \int_0^\infty dp p^3 \frac{I_{\nu_2}(pw_0)}{K_{\nu_2}(pw_0)} [K_{\nu_1}^2(pw) - K_{\nu_2}^2(pw)] \\ &\times \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \frac{(-1)^k}{s_k} \sin(2\pi k \alpha_0) J_2(2pr s_k) \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{g(q, \alpha_0, 2x)/\cosh x}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} J_2(2pr \cosh x) \right]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

De (6.27) podemos notar que a densidade de corrente é uma função ímpar de  $\alpha_0$ . Além disso notamos que, diferentemente de  $\langle j_\phi \rangle_0$ , a contribuição induzida pela brana depende de  $s$ . Para um campo sem massa, temos que  $\nu_1 = -s/2$ ,  $\nu_2 = s/2$  e a contribuição induzida pela brana na região R é nula. O fluxo de carga através da hipersuperfície  $\phi = \text{const}$  é expressa como  $n_\phi \langle j_\phi \rangle_b$ , onde  $n_\phi = a/w$  é a normal à hipersuperfície. Note que a quantidade  $n_\phi \langle j_\phi \rangle_b$  depende de  $r, w, w_0$  através das razões  $r/w$  e  $w_0/w$ . A primeira, como já mencionado anteriormente, é a distância própria a partir da corda cósmica,  $r_p = ar/w$ , medida em unidades do raio de curvatura AdS, e a segunda determina a distância própria a partir da brana

$$y - y_0 = a \ln(w/w_0). \quad (6.28)$$

Para  $q = 1$ , o déficit angular não está presente, e de (6.26) obtemos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle_b &= -\frac{e \sin(\pi \alpha_0) w^6}{4\pi^3 a^5 r} \int_0^\infty dp p^3 \frac{I_{\nu_2}(pw_0)}{K_{\nu_2}(pw_0)} [K_{\nu_1}^2(pw) - K_{\nu_2}^2(pw)] \\ &\times \int_0^\infty dx \frac{\cosh(2\alpha_0 x)}{\cosh(2x) + 1} J_2(2pr \cosh x). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Esta expressão descreve a contribuição induzida pela brana na densidade de corrente gerada por um tubo de fluxo magnético de espessura nula. Esperamos que este resultado será próximo àquele para a densidade de corrente correspondente para um tubo de fluxo de espessura finita à distâncias do tubo maior que o raio do núcleo.

Note que a integral na expressão (6.23) para a densidade de corrente  $\langle j_\phi \rangle_0$  é avaliada usando-se a fórmula [109] (em [109] há um erro de impressão, em vez de  $(u^2 - 1)^{-(1 \mp 2\nu)/4}$  deve ser  $(u^2 - 1)^{-(1 \pm 2\nu)/4}$ )

$$\int_0^\infty dp p^3 J_{\nu_l}^2(pw) K_2(pc) = \frac{c^2 e^{-5\pi i/2} Q_{\nu_l-1/2}^{5/2}(u)}{\sqrt{2\pi} w^6 (u^2 - 1)^{5/4}}, \quad (6.30)$$

onde  $u = 1 + c^2/(2w^2)$  e  $Q_\nu(u)$  é a função associada de Legendre de segunda espécie. Isto nos fornece

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle_0 = & -\frac{\sqrt{2}er}{\pi^{5/2}a^5} \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} (-1)^k s_k \sin(2\pi k \alpha_0) \mathcal{Z}_{ma}(1 + 2(rs_k/w)^2) \right. \\ & \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{g(q, \alpha_0, 2x) \cosh x}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} \mathcal{Z}_{ma}(1 + 2(r \cosh x/w)^2) \right], \end{aligned} \quad (6.31)$$

com a notação

$$\mathcal{Z}_{ma}(u) = e^{-5i\pi/2} \frac{Q_{ma}^{5/2}(u) + Q_{ma-1}^{5/2}(u)}{(u^2 - 1)^{5/4}}. \quad (6.32)$$

Note que o resultado obtido em (6.31) é idêntico àquele presente na Eq. (5.54) do capítulo anterior<sup>1</sup>. Isto é, a contribuição induzida na geometria sem brana é a mesma que aquela gerada puramente por uma corda cósmica no espaço AdS (4 + 1)-dimensional. Dito isto, encerraremos o estudo da Eq. (6.31) por aqui, dado que as análises para o campo sem massa e regimes assintóticos para a Eq. (5.54) já foram realizadas na subseção 5.2.1 do capítulo anterior.

Façamos a análise dos regimes assintóticos para a contribuição induzida pela brana.

<sup>1</sup>Entretanto, note que no capítulo 5 os resultados não são escritos em termos da componente física e, portanto, para efeitos de comparação, os resultados do capítulo anterior devem ser multiplicados pela variável  $r$ .

### 6.2.2 Análise dos regimes assintóticos para a densidade de corrente e resultados numéricos

Nesta subseção queremos investigar a densidade de corrente para a geometria com uma brana nas regiões assintóticas das variáveis. Próximo à corda cósmica, assumindo que  $r \ll w - w_0$ , obtemos

$$\langle j_\phi \rangle_b \approx \frac{er h_{-1}(q, \alpha_0)}{4\pi^2 a^5} \int_0^\infty dx x^5 \frac{I_{\nu_2}(xw_0/w)}{K_{\nu_2}(xw_0/w)} [K_{\nu_1}^2(x) - K_{\nu_2}^2(x)], \quad (6.33)$$

onde definimos a função

$$h_\mu(q, \alpha_0) = \sum_{k=1}^{[q/2]} (-1)^k s_k^{-\mu} \sin(2\pi k \alpha_0) + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{g(q, \alpha_0, 2z) \cosh^{-\mu}(z)}{\cosh(2qz) - \cos(q\pi)}, \quad (6.34)$$

e podemos ver que o VEV induzido pela brana comporta-se como  $\langle j_\phi \rangle_b \propto r$ . Note que no núcleo da corda a parte induzida na geometria sem brana  $\langle j_\phi \rangle_0$  diverge (veja (5.62)) e, logo, esta contribuição é dominante para pontos próximos à corda. Para a investigação da densidade de corrente para grandes distâncias a partir da corda, é conveniente usar a representação (6.20). Introduzindo uma nova variável  $u = pr$ , e assumindo que  $r \gg w$ , vemos que a contribuição dominante vem da parte do integrando com a função  $G_{\nu_2, \nu_1}(uw_0/r, uw/r)$ . Levando em conta que

$$G_{\nu_2, \nu_1}(uw_0/r, uw/r) \approx -\frac{2sr}{\pi} \frac{(w/w_0)^{s\nu_1}}{uw_0}, \quad (6.35)$$

para a ordem principal, encontramos

$$\langle j_\phi \rangle \approx -4e|\nu_2| (|\nu_2| + 1) h_{2|\nu_2|+3}(q, \alpha_0) \frac{w(w_0/w)^{2|\nu_2|-2s\nu_2}}{\pi^2 a^5 (2r/w)^{2|\nu_2|+3}}. \quad (6.36)$$

Como visto, o decaimento da densidade de corrente total para grandes distâncias a partir da corda é tipo lei de potências para campos massivos e sem massa. Isto está em contraste com o caso do espaço-tempo de Minkowski, onde o decaimento para campos massivos é exponencial. Para  $s = 1$ , o termo principal (6.36) coincide com (5.63) e, portanto, a densidade de corrente para grandes distâncias da corda é dominada pela contribuição induzida na geometria sem brana. Para o campo com  $s = -1$ , e à grandes distâncias da

corda, a densidade de corrente comporta-se como  $\langle j_\phi \rangle \propto (w/r)^{|2ma-1|+3}$  e a contribuição induzida pela brana é dominante.

Consideremos o comportamento da densidade de corrente para grandes distâncias a partir da brana,  $w \gg w_0$ . Introduzindo em (6.27) uma nova variável de integração  $u = pw$ , usamos as expressões assintóticas para as funções de Bessel modificadas com argumento  $uw_0/w$  para pequenos valores desta razão [107]. Pode-se mostrar que, para a ordem dominante, a corrente induzida pela brana é suprimida pelo fator  $(w_0/2w)^{|\nu_2|+\nu_2}$ . Este fator também descreve o comportamento da densidade de corrente para  $w$  fixo, quando a localização da brana tende à fronteira AdS,  $w_0 \rightarrow 0$ .

Para a investigação da densidade de corrente total próxima à brana, é conveniente usar a representação (6.20). Em particular, a densidade de corrente na brana é diretamente obtida colocando no integrando  $w = w_0$ . Levando em conta que  $G_{\nu_2, \nu_1}(x, x) = -2s/(\pi x)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle|_{w=w_0} = & -\frac{2ew_0^2}{\pi^4 a^5 r} \int_0^\infty dp \frac{p}{J_{\nu_2}^2(p) + Y_{\nu_2}^2(p)} \\ & \times \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \frac{(-1)^k}{s_k} \sin(2\pi k \alpha_0) K_2\left(\frac{2pr}{w_0} s_k\right) \right. \\ & \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{g(q, \alpha_0, 2x)/\cosh x}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} K_2\left(\frac{2pr}{w_0} \cosh x\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Por fim, consideramos o limite  $a \rightarrow \infty$  com valor fixo da coordenada  $y$ . Como pode ser visto a partir de (4.2), neste limite a geometria sob consideração é reduzida à geometria de uma corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski  $(4+1)$ -dimensional. Para a coordenada  $w$  nos argumentos da função de Bessel temos que  $w \approx a + y$ . Levando-se em conta que  $\nu_l \gg 1$ , vemos que no limite sob consideração tanto a ordem quanto o argumento das funções de Bessel modificadas em (6.27) são grandes e podemos usar as expansões assintóticas uniformes correspondentes [107]. A partir dessas expansões, para o termo principal, obtemos

$$\frac{I_{\nu_2}(pw_0)}{K_{\nu_2}(pw_0)} \sim \frac{1}{\pi} e^{2\nu_2 \rho(pw_0/\nu_2)}, \quad (6.38)$$

com  $\rho(x) = \sqrt{1+x^2} + \ln[x/(1+\sqrt{1+x^2})]$ , e

$$K_{\nu_1}^2(pw) - K_{\nu_2}^2(pw) \sim \frac{\pi e^{-2\nu_2\rho(pw/\nu_2)}}{\nu_2(pw/\nu_2)^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1+(pw/\nu_2)^2}} - s \right). \quad (6.39)$$

Em todos os termos, exceto os argumentos da função  $\rho(x)$ , podemos substituir  $pw/\nu_2, pw_0/\nu_2 \rightarrow p/m$ . Expandindo as funções nos expoentes, obtemos  $\langle j_\phi \rangle_b \rightarrow \langle j_\phi \rangle_b^{(M)}$ , onde a densidade de corrente no espaço-tempo de Minkowski é dada por

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle_b^{(M)} &= \frac{em}{2\pi^2 r} \int_m^\infty du e^{-2u(y-y_0)} (su - m) \\ &\times \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \frac{(-1)^k}{s_k} \sin(2\pi k \alpha_0) J_2(2r s_k \sqrt{u^2 - m^2}) \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{g(q, \alpha_0, 2x)/\cosh x}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} J_2(2r \cosh x \sqrt{u^2 - m^2}) \right], \quad (6.40) \end{aligned}$$

onde  $y = y_0$  especifica a localização da fronteira planar no espaço-tempo de Minkowski. Para um campo sem massa, a contribuição induzida pela fronteira correspondente é nula.

Como visto nos capítulos anteriores, o comportamento periódico das densidades de corrente induzidas no vácuo é algo recorrente e característico. A densidade de corrente induzida pela brana também é periódica e, deste modo, o comportamento gráfico correspondente não será exibido neste capítulo. Nas figuras abaixo é mostrado o fluxo de cargas através da hipersuperfície  $\phi = \text{const}$ , dado por  $n_\phi \langle j_\phi \rangle_b$ , medido em unidades de  $e/a^4$ . Os números próximos às curvas correspondem aos valores do parâmetro  $q$ .

Na Fig. 6.1 mostramos a dependência da densidade de corrente induzida pela brana na razão  $w/w_0$  para campos com  $s = 1$  (gráfico à esquerda) e  $s = -1$  (gráfico à direita). Para os parâmetros tomamos  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $r/w_0 = 0.5$ . Note que a distância própria a partir da brana,  $y - y_0$ , é expressa como  $y - y_0 = a \ln(w/w_0)$ . Como mostrado pela análise assintótica, para  $w/w_0 \gg 1$  a contribuição induzida pela brana decai como  $(w/w_0)^{2ma+s}$ . O decaimento é mais acentuado para o campo com  $s = 1$ .

A dependência da densidade de corrente induzida pela brana com a distância a partir da corda é exibida na Fig. 6.2, para valores fixos de  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$  e  $w/w_0 = 1.5$ . Como anteriormente, os gráficos do lado esquerdo e do lado direito correspondem a  $s = 1$  e  $s = -1$ , respectivamente. A contribuição induzida pela brana tende a zero linearmente no

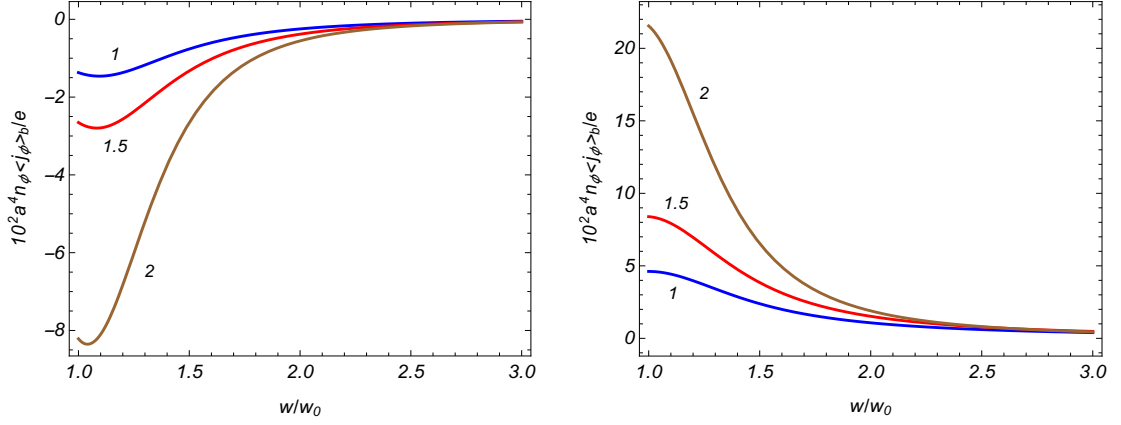


Figura 6.1: A densidade de corrente induzida pela brana como uma função da razão  $w/w_0$ , para valores fixos de  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$  e  $r/w_0 = 0.5$ . Os gráficos à esquerda e à direita correspondem aos campos com  $s = 1$  e  $s = -1$ , respectivamente

núcleo da corda (veja (6.33)). Para grandes distâncias a partir da corda, esta contribuição comporta-se como  $(r/w)^{2ma+3+s}$ . Podemos ver que o decaimento é mais acentuado para o caso  $s = 1$ .

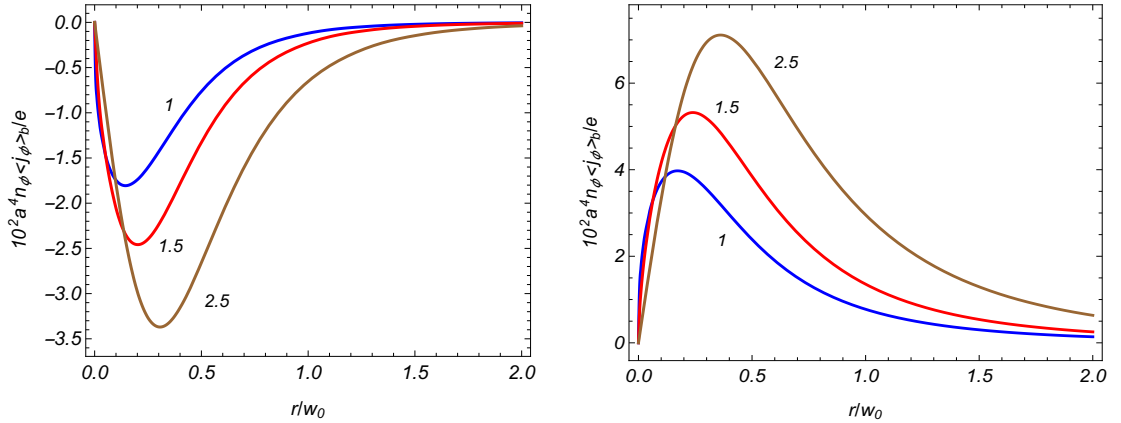


Figura 6.2: A contribuição induzida pela brana no VEV da densidade de corrente na região R como função da distância a partir da corda para os valores fixos de  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$  e  $w/w_0 = 1.5$ . Os gráficos à esquerda e à direita correspondem a  $s = 1$  e  $s = -1$ , respectivamente.

É de interesse considerar também a dependência da densidade de corrente com a massa do campo. A Fig. 6.3 mostra esta dependência para a densidade de corrente gerada pela brana para  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $w/w_0 = 1.5$ ,  $r/w_0 = 0.5$  e para campos com  $s = 1$  (gráfico à esquerda) e  $s = -1$  (gráfico à direita). Como mencionado anteriormente, o VEV induzido pela brana na região R é nulo para um campo sem massa. Também esperamos que para grandes massas o VEV deve tender a zero e, portanto, para algum valor da massa, o valor absoluto da densidade de corrente tem um máximo. Isso é visto nos gráficos.

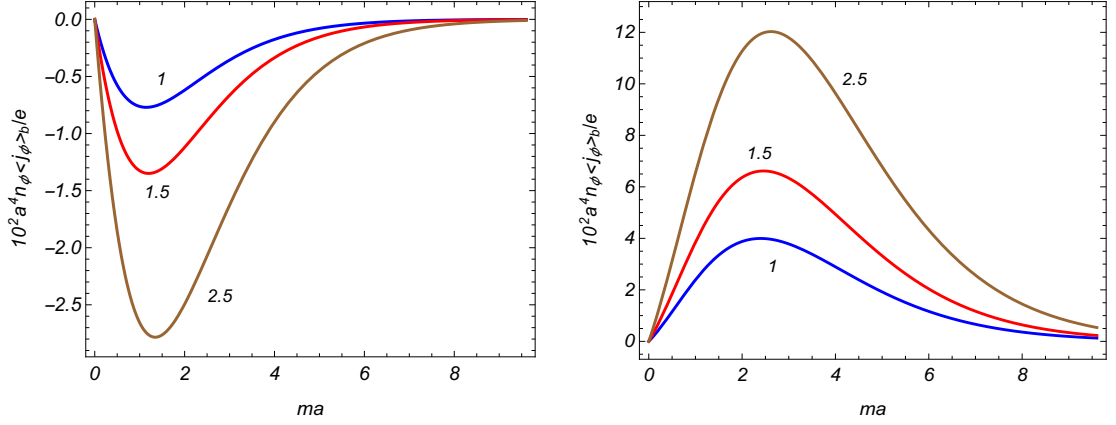


Figura 6.3: A dependência da corrente induzida pela brana com a massa do campo para valores fixos de  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $w/w_0 = 1.5$ ,  $r/w_0 = 0.5$  e para campos com  $s = 1$  e  $s = -1$  (gráficos à esquerda e à direita, respectivamente).

Nos exemplos numéricos acima, consideramos a parte induzida pela brana na densidade de corrente. Para mostrar sua contribuição relativa, na Fig. 6.4 a densidade de corrente total na região R é exibida como função da distância a partir da corda para valores fixos de  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $w/w_0 = 1.5$ . Para estes valores a contribuição induzida na geometria sem brana é positiva e monotonicamente decai com o aumento de  $r$ . Para o campo com  $s = 1$  (curvas tracejadas), embora a parte induzida pela brana seja negativa, a contribuição gerada na geometria sem brana domina para todas as distâncias e a densidade de corrente total é positiva. Para o campo com  $s = -1$  (curvas cheias), ambas as contribuições são positivas. Para  $s = -1$ , a densidade de corrente total próximo à corda é dominada pela parte induzida na geometria sem brana, e à grandes distâncias a parte induzida pela brana é dominante.

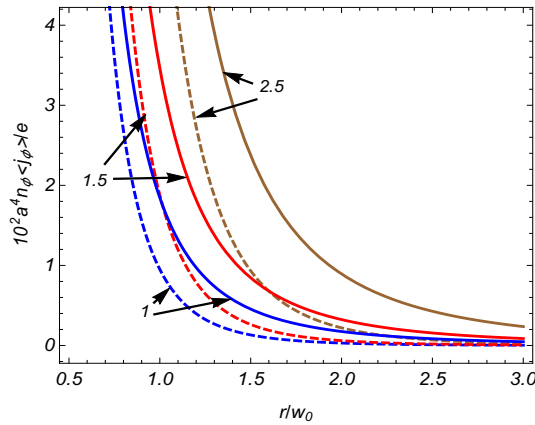


Figura 6.4: A densidade de corrente como uma função da coordenada radial para campos com  $s = 1$  (curvas tracejadas) e  $s = -1$  (curvas cheias). Os gráficos são esboçados para  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $w/w_0 = 1.5$ .

### 6.3 Densidade de corrente na região L

O conjunto completo de modos fermiônicos tem a forma (6.4) com a função  $W_\nu(pw)$  dada por (6.7). Agora, na condição de normalização (6.9) a integração é realizada sobre a região  $w \in [0, w_0]$ . Para  $ma \geq 1/2$  e  $c_2 \neq 0$  a integral de normalização diverge no limite inferior e as funções dos modos correspondentes não são normalizáveis. Logo, neste caso, a condição de normalização implica que  $c_2 = 0$  e  $W_\nu(pw) = J_\nu(pw)$  (a constante  $c_1$  é incluída no coeficiente de normalização). Para  $0 \leq ma < 1/2$  os modos com  $c_2 \neq 0$  são normalizáveis e uma condição de contorno adicional na fronteira AdS é necessária a fim definir unicamente as funções de onda. Aqui iremos assumir uma condição de contorno especial correspondendo a  $c_2 = 0$ . Assim, em nossa consideração as funções dos modos são dadas por (6.4) com  $W_\nu(pw) = J_\nu(pw)$ , para  $ma \geq 0$ .

Da condição de contorno (6.2), temos que os autovalores para o número quântico  $p$  são raízes da equação

$$J_{\nu_1}(pw_0) = 0, \quad (6.41)$$

para ambos os casos  $s = \pm 1$ . Iremos denotar as raízes positivas correspondentes com respeito a  $pw_0$  por  $p_i = p_i(\nu_1) = pw_0$ , com  $i = 1, 2, \dots$ , assumindo que elas são enumerados na ordem ascendente,  $p_{i+1} > p_i$ . Note que as raízes  $p_i$  não dependem na localização da brana. Substituindo as funções dos modos na Eq. (6.9) e usando a integral padrão correspondente envolvendo os produtos das funções de Bessel, para a constante de normalização na região L,  $C_\sigma^{(\pm)} = C_{(L)\sigma}^{(\pm)}$ , obtemos

$$|C_{(L)\sigma}^{(\pm)}|^2 = \frac{\eta q \lambda^2 p_i J_{\nu_2}^{-2}(p_i)}{8\pi^2 a^4 E \kappa_\eta b_\eta^{(\pm)} w_0^2 \sqrt{p_i^2 + w_0^2 k_z^2}}, \quad (6.42)$$

onde a energia é dada por  $E = \sqrt{\lambda^2 + p_i^2/w_0^2 + k_z^2}$ . Como podemos ver, os coeficientes de normalização são independentes da representação adotada,  $s = 1$  ou  $s = -1$ .

Tendo especificado o conjunto completo de modos, podemos iniciar a investigação da densidade de corrente usando a fórmula (6.3). Semelhante à região R, pode-se ver que a única componente não nula corresponde àquela ao longo da direção azimutal. Após a

soma sobre  $\eta$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle &= -\frac{eqw^6}{2\pi^2 a^5 w_0^2 r} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sum_j \sum_{i=1}^\infty \epsilon_j \frac{\lambda^2}{E} \\ &\quad \times \frac{J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r)}{J_{\nu_2}^2(p_i)} [J_{\nu_1}^2(p_i w/w_0) + J_{\nu_2}^2(p_i w/w_0)] . \end{aligned} \quad (6.43)$$

Usando a representação integral (6.15) e fazendo transformações semelhantes às aquelas descritas na seção anterior para a região R, a seguinte expressão é obtida

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle &= -\frac{ew^6}{\pi^2 a^5 r w_0^4} \sum_{i=1}^\infty p_i^2 \frac{J_{\nu_1}^2(pw) + J_{\nu_2}^2(pw)}{J_{\nu_2}^2(p_i)} \\ &\quad \times \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]} (-1)^k \frac{\sin(2\pi k \alpha_0)}{s_k} K_2(2rp s_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{g(q, \alpha_0, 2x)/\cosh x}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} K_2(2rp \cosh x) \right] , \end{aligned} \quad (6.44)$$

onde  $p = p_i/w_0$ .

A fim de obter uma representação mais conveniente para a análise assintótica e numérica, e para extração explícita da contribuição induzida pela brana, aplicamos à soma sobre  $i$  uma variante da fórmula generalizada Abel-Plana [117],

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^\infty \frac{f(p_i)}{p_i J_{\nu_2}^2(p_i)} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty du f(u) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty du \frac{K_{\nu_1}(u)}{I_{\nu_1}(u)} \\ &\quad \times [e^{-\nu_1 \pi i} f(e^{\pi i/2} u) + e^{\nu_1 \pi i} f(e^{-\pi i/2} u)] , \end{aligned} \quad (6.45)$$

válida para uma função  $f(u)$  analítica na metade direita do plano da variável complexa  $u$  (a função  $f(u)$  pode ter pontos de ramificação no eixo imaginário [117]). Para o problema em consideração, a função  $f(u)$  é especificada como

$$f(u) = u^3 [J_{\nu_1}^2(uw/w_0) + J_{\nu_2}^2(uw/w_0)] K_2(2ru\gamma/w_0), \quad (6.46)$$

com  $\gamma = s_k, \cosh x$ . Para esta função, temos

$$e^{-\nu_1 \pi i} f(e^{\pi i/2} u) + e^{\nu_1 \pi i} f(e^{-\pi i/2} u) = \pi u^3 [I_{\nu_1}^2(uw/w_0) - I_{\nu_2}^2(uw/w_0)] J_2(2ru\gamma/w_0). \quad (6.47)$$

A contribuição para a densidade de corrente proveniente do primeiro termo no lado direito de (6.45) coincide com a densidade de corrente na geometria sem brana dada por (6.23). Como resultado, a densidade de corrente na região L é decomposta como (6.24), onde a contribuição induzida pela brana, proveniente do último termo em (6.45), é apresentada como

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle_b &= \frac{ew^6}{2\pi^2 a^5 r} \int_0^\infty dp p^3 \frac{K_{\nu_1}(pw_0)}{I_{\nu_1}(pw_0)} [I_{\nu_1}^2(pw) - I_{\nu_2}^2(pw)] \\ &\times \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \frac{(-1)^k}{s_k} \sin(2\pi k \alpha_0) J_2(2pr s_k) \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{g(q, \alpha_0, 2x)/\cosh x}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} J_2(2pr \cosh x) \right]. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Note que a expressão acima é uma função periódica ímpar do fluxo magnético com período igual ao quantum de fluxo.

Comparando com (6.27), vemos que a contribuição induzida pela brana na região L é obtida da quantidade correspondente para a região R através das substituições  $I \rightarrow K$ ,  $K \rightarrow I$  das funções de Bessel e as substituições  $\nu_{1,2} \rightarrow \nu_{2,1}$  das ordens. O caso especial  $q = 1$  corresponde a um tubo de fluxo magnético no espaço-tempo AdS com uma brana. A expressão correspondente é

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle_b &= \frac{e \sin(\pi \alpha_0) w^6}{4\pi^3 a^5 r} \int_0^\infty dp p^3 \frac{K_{\nu_1}(pw_0)}{I_{\nu_1}(pw_0)} [I_{\nu_2}^2(pw) - I_{\nu_1}^2(pw)] \\ &\times \int_0^\infty dx \frac{\cosh(2\alpha_0 x)}{\cosh(2x) + 1} J_2(2pr \cosh x). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Para um campo sem massa, temos  $K_{\nu_1}(x)/I_{\nu_1}(x) = \pi/(e^{2x} + s)$  e  $I_{\nu_2}^2(x) - I_{\nu_1}^2(x) = -2s/(\pi x)$ . Expandindo  $1/(e^{2x} + s)$  e avaliando a integral sobre  $p$  usando o resultado de [109], de (6.48) encontramos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle_b &= -\frac{3er}{8\pi^2 (aw_0/w)^5} \sum_{l=1}^\infty (-s)^l \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \frac{(-1)^k s_k \sin(2\pi k \alpha_0)}{[l^2 + (rs_k/w_0)^2]^{5/2}} \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{g(q, \alpha_0, 2x)}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} \frac{\cosh x}{[l^2 + (r \cosh x/w_0)^2]^{5/2}} \right]. \end{aligned} \quad (6.50)$$

O campo fermiônico sem massa é conformalmente invariante e a expressão (6.50)

está conformalmente relacionada com o resultado correspondente no espaço-tempo de Minkowski:  $\langle j_\phi \rangle_b = (w/a)^5 \langle j_\phi \rangle_b^{(M)}$ . Aqui,  $\langle j_\phi \rangle_b^{(M)}$  é a densidade de corrente induzida pela condição de fronteira imposta aos campos em  $w = w_0$  na região entre as duas fronteiras localizadas em  $w = 0$  e  $w = w_0$  no espaço-tempo de Minkowski  $(4 + 1)$ -dimensional com uma corda cósmica (o elemento de linha é dado pela expressão entre parênteses em (5.2)). A fronteira  $w = 0$  no problema Minkowskiano é uma imagem conformal da fronteira AdS. Os efeitos de polarização do vácuo induzidos por fronteiras planares ortogonais a uma corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski foram investigados em [118–121].

### 6.3.1 Análise assintótica e numérica

Começamos a análise assintótica considerando os pontos próximos à corda, assumindo que  $r \ll w_0 - w$ . Levando em conta que nesta região o argumento da função de Bessel em (6.48) é pequeno, para o termo de ordem principal, temos

$$\langle j_\phi \rangle_b \approx \frac{erh_{-1}(q, \alpha_0)}{4\pi^2 a^5} \int_0^\infty dx x^5 \frac{K_{\nu_1}(xw_0/w)}{I_{\nu_1}(xw_0/w)} [I_{\nu_1}^2(x) - I_{\nu_2}^2(x)], \quad (6.51)$$

e o VEV induzido pela brana tende a zero linearmente na corda. À grandes distâncias da corda, usamos a representação (6.44). A contribuição dominante é proveniente da autofunção de menor autovalor  $p_i$  e, para  $q \geq 2$ , o VEV da densidade de corrente é suprimida pelo fator exponencial  $\exp[-2rp_1 \sin(\pi/q)/w_0]$ . Para  $q < 2$  a supressão é mais acentuada, sendo esta dada pelo fator  $e^{-2rp_1/w_0}$ . Lembre-se que na região R o decaimento da corrente de vácuo à grandes distâncias da corda é do tipo lei de potências para campos massivos e sem massa.

Para pontos próximos à fronteira AdS,  $w/w_0 \ll 1$ , a contribuição dominante na integral sobre  $p$  dada em (6.48) vem da região de integração onde o argumento da função  $I_{\nu_i}(pw)$  é pequeno. Usando a expressão assintótica correspondente [107], para a ordem

dominante, temos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle_b &\approx \frac{se(w/w_0)^{2ma+5}w_0^2}{2^{2ma}\pi^2a^5\Gamma^2(ma+1/2)r} \int_0^\infty dx x^{2ma+2} \frac{K_{\nu_1}(x)}{I_{\nu_1}(x)} \\ &\times \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \frac{(-1)^k}{s_k} \sin(2\pi k\alpha_0) J_2(2xrs_k/w_0) \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{g(q, \alpha_0, 2x)/\cosh x}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} J_2(2xr \cosh x/w_0) \right]. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Como podemos observar, a corrente induzida pela brana na fronteira AdS tende a zero como  $w^{2ma+5}$ . Note que este fator de supressão não depende do parâmetro  $s$ . A expressão do lado direito de (6.52) também descreve o comportamento da densidade de corrente no limite quando a localização da brana está próxima do horizonte AdS para  $w$  fixo.

Para o cálculo da densidade de corrente na brana, é mais conveniente usar a representação (6.44), diretamente colocando  $w = w_0$ :

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle|_{w=w_0} &= -\frac{ew_0^2}{\pi^2a^5r} \sum_{i=1}^\infty p_i^2 \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]'} \frac{(-1)^k}{s_k} \sin(2\pi k\alpha_0) K_2(2rp_i s_k/w_0) \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{g(q, \alpha_0, 2x)/\cosh x}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} K_2(2rp_i \cosh x/w_0) \right]. \end{aligned} \quad (6.53)$$

A consideração do limite Minkowskiano é similar àquela da região R. O resultado correspondente é dado por (6.40), com  $y - y_0$  substituído por  $y_0 - y$ . Claro, no limite Minkowskiano o VEV é simétrico com respeito à brana. Para o espaço-tempo AdS, embora as características locais sejam as mesmas nas regiões R e L, o tensor de curvatura extrínseco,  $K_{\mu\nu}$ , para a brana em consideração é diferente para essas regiões ( $K_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}/a$  na região R e  $K_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}/a$  na região L). Como consequência, as propriedades físicas do estado de vácuo, em particular, as densidades de corrente, diferem nessas regiões. Os valores limites das densidades de corrente na brana são diferentes para as regiões R e L. A descontinuidade está relacionada ao modelo idealizado para a brana com espessura zero que restringe todos os modos das flutuações de vácuo. Essa idealização conduz, por exemplo, à divergências de superfície no condensado fermiônico e no VEV do tensor energia-momento. Em modelos mais realistas, as flutuações com altas frequências são relativamente insensíveis à presença da brana. Esperamos que as fórmulas para a densidade de corrente dadas acima se aproximem corretamente dos resultados correspondentes em modelos mais realistas

para distâncias da brana maiores que o comprimento de onda de corte. Este último é determinado pelo modelo específico para a brana.

Vamos agora aos resultados das investigações numéricas para a densidade de corrente na região L. Como anteriormente, os números próximos às curvas apresentam os valores do parâmetro  $q$ . Os gráficos à esquerda e à direita nas figuras correspondem aos campos com  $s = 1$  e  $s = -1$ , respectivamente. A Fig. 6.5 mostra a dependência da densidade de corrente na razão  $w/w_0$  para valores fixos de  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$  e  $r/w_0 = 0.5$ . Como já mostrado pela análise assintótica, a densidade de corrente tende a zero na fronteira AdS como  $w^{2ma+5}$  para ambos os casos  $s = 1$  e  $s = -1$ .

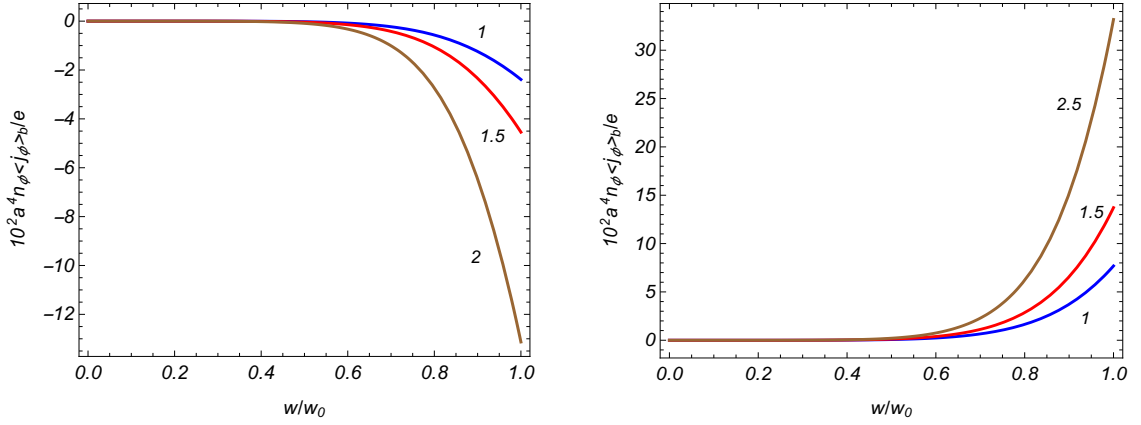


Figura 6.5: A contribuição da brana na densidade de corrente como função de  $w/w_0$  para  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$  e  $r/w_0 = 0.5$ .

A densidade de corrente induzida pela brana como função da distância a partir da corda cósmica é exibida na Fig. 6.6, para  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$  e  $w/w_0 = 0.8$ . Lembre-se que na região L a supressão da densidade de corrente à grandes distâncias da corda é mais acentuada em comparação com o comportamento na região R. Isto é, na região L temos um decaimento exponencial em vez daquele tipo lei de potência para a região R.

A Fig. 6.7 apresenta o comportamento da densidade de corrente induzida pela brana como uma função da massa, para os valores  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $w/w_0 = 0.8$  e  $r/w_0 = 0.5$ . Ao contrário da região R, a densidade de corrente para o campo sem massa não é nula. No caso  $s = 1$  (gráfico à esquerda), os valores correspondentes da combinação  $10^2 a^4 \langle j_\phi \rangle_b / e$ , esboçadas na Fig. 6.7, são iguais  $-0.131$ ,  $-0.201$ ,  $-0.295$  para  $q = 1, 1.5, 2.5$ , respectivamente. Para o campo com  $s = -1$  (gráfico à direita) os respectivos valores são dados por  $0.153, 0.23, 0.323$ . Novamente, vemos que a densidade de corrente não é uma

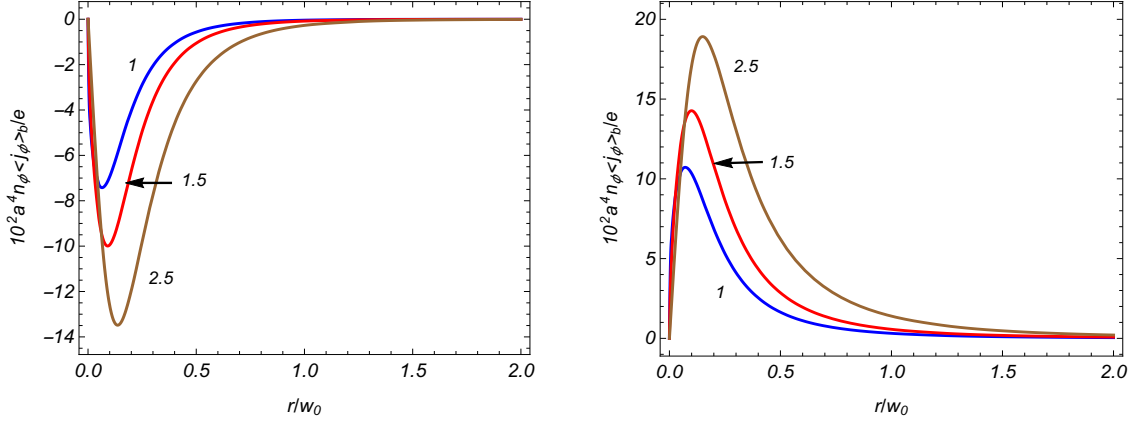


Figura 6.6: A dependência da densidade de corrente induzida pela brana com a distância a partir da corda para  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$  e  $w/w_0 = 0.8$ .

função monotônica da massa. Para alguns valores intermediários da massa, seu valor absoluto assume o valor máximo. Para o exemplo dado na Fig. 6.7, o valor absoluto da densidade de corrente em seu máximo é essencialmente maior em comparação com a densidade para um campo sem massa.

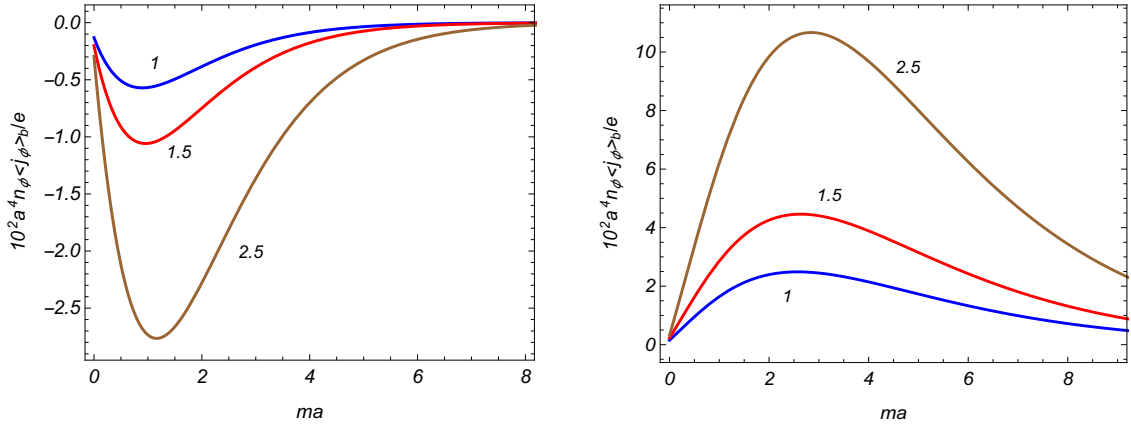


Figura 6.7: A densidade de corrente induzida pela brana na região L como função da massa do campo para  $\alpha_0 = 0.3$ ,  $w/w_0 = 0.8$  e  $r/w_0 = 0.5$ .

Finalmente, na Fig. 6.8, é mostrado a densidade de corrente como função da distância a partir da corda para  $ma = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.3$  e  $w/w_0 = 0.8$ . Curvas cheias e tracejadas correspondem aos campos com  $s = -1$  e  $s = 1$ , respectivamente. Similarmente à região R, à grandes distâncias da corda, a densidade de corrente para o primeiro caso é dominada pela contribuição induzida pela brana.

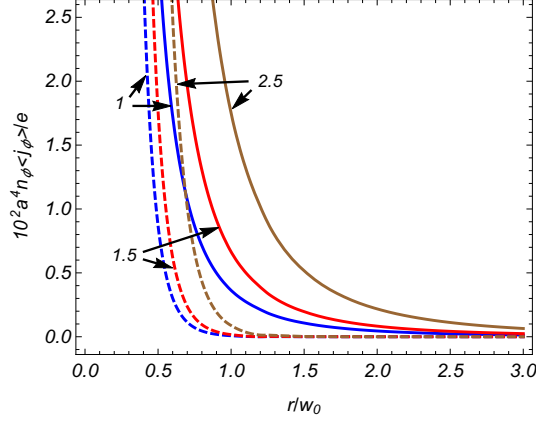


Figura 6.8: O mesmo que na Fig. 6.4 para a densidade de corrente total na região L para  $w/w_0 = 0.8$ .

## 6.4 Densidades de corrente para um segundo tipo de condição de contorno

Nesta seção, consideramos a contribuição induzida pela brana para o VEV da densidade de corrente azimutal para a condição de contorno

$$(1 - i\gamma^\mu n_\mu)\psi(x) = 0, \quad w = w_0. \quad (6.54)$$

Esta condição de contorno difere daquela presente em (6.2) pelo sinal do termo contendo as matrizes de Dirac. Como será visto abaixo, ambas as condições de contorno (6.2) e (6.54) aparecem em modelos do tipo Randall-Sundrum como consequência da simetria  $Z_2$  com respeito à brana. O procedimento para a condição (6.54) é semelhante àquele que descrevemos nas seções anteriores, e assim somente os resultados finais serão apresentados.

### 6.4.1 Região R

Começaremos pela região R. As funções dos modos correspondentes nesta região são dadas por (6.4), onde agora

$$W_{\nu_l}(pw) = G_{\nu_l, \nu_l}(pw_0, pw), \quad l = 1, 2. \quad (6.55)$$

A expressão para o coeficiente de normalização é obtido de (6.12) pela substituição  $\nu_2 \rightarrow \nu_1$  nas ordens das funções de Bessel e Neumann. A soma dos modos para o VEV da densidade

de corrente azimutal é expressa como

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle &= -\frac{eqw^6}{4\pi^2 a^5} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sum_{j=\pm 1/2, \dots} \epsilon_j \frac{\lambda^2 p}{E} \\ &\quad \times J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r) \frac{G_{\nu_1, \nu_1}^2(pw_0, pw) + G_{\nu_1, \nu_2}^2(pw_0, pw)}{J_{\nu_1}^2(pw_0) + Y_{\nu_1}^2(pw_0)}, \end{aligned} \quad (6.56)$$

com  $w \geq w_0$ . Este VEV pode ser decomposto como (6.24), com a contribuição induzida pela brana dada por

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle_b &= \frac{ew^6}{2\pi^2 a^5 r} \int_0^\infty dp p^3 \frac{I_{\nu_1}(pw_0)}{K_{\nu_1}(pw_0)} [K_{\nu_1}^2(pw) - K_{\nu_2}^2(pw)] \\ &\quad \times \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]} \frac{(-1)^k}{s_k} \sin(2\pi k \alpha_0) J_2(2pr s_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{g(q, \alpha_0, 2x)/\cosh x}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} J_2(2pr \cosh x) \right]. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Comparando estas fórmulas com (6.14) e (6.27), vemos que os VEVs da densidade de corrente para  $s = \pm 1$  e para a condição de contorno (6.54) coincidem com os VEVs para a condição (6.2) e para  $s = \mp 1$ .

### 6.4.2 Região L

Na região L as funções dos modos para a condição de contorno (6.54) são dadas por (6.4) com  $W_\nu(pw) = J_\nu(pw)$ . Os autovalores  $p_i$  do número quântico  $p$  são determinados a partir da condição de contorno e são raízes da equação  $J_{\nu_2}(pw_0) = 0$ . O coeficiente de normalização é dado por (6.42) com a substituição  $\nu_2 \rightarrow \nu_1$  na ordem da função de Bessel. Para o VEV da densidade de corrente azimutal, temos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle &= -\frac{eqw^6}{2\pi^2 a^5 w_0^2 r} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sum_j \sum_{i=1}^\infty \epsilon_j \frac{\lambda^2}{E} \\ &\quad \times \frac{J_{\beta_j}(\lambda r) J_{\beta_j + \epsilon_j}(\lambda r)}{J_{\nu_1}^2(p_i)} [J_{\nu_1}^2(p_i w/w_0) + J_{\nu_2}^2(p_i w/w_0)]. \end{aligned} \quad (6.58)$$

De forma semelhante à que usamos na seção 6.3, utilizando a fórmula de soma obtida a partir de (6.45) pelas substituições  $\nu_2 \rightarrow \nu_1$ ,  $\nu_1 \rightarrow \nu_2$ , para a contribuição induzida pela

brana na região L, encontramos

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle_b &= \frac{ew^6}{2\pi^2 a^5 r} \int_0^\infty dp p^3 \frac{K_{\nu_2}(pw_0)}{I_{\nu_2}(pw_0)} [I_{\nu_2}^2(pw) - I_{\nu_1}^2(pw)] \\ &\times \left[ \sum_{k=1}^{[q/2]} \frac{(-1)^k}{s_k} \sin(2\pi k \alpha_0) J_2(2pr s_k) \right. \\ &\left. + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{g(q, \alpha_0, 2x)/\cosh x}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} J_2(2pr \cosh x) \right]. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Para um dado  $s$ , o VEV da densidade de corrente azimutal para a condição de contorno (6.54) coincide com aquele para a condição (6.2) e para  $s$  substituído por  $-s$ .

## 6.5 Aplicações ao modelo Randall-Sundrum

Os resultados encontrados nas seções anteriores podem ser aplicados para a investigação dos efeitos induzidos pela corda cósmica no modelo de Randall-Sundrum com uma única brana (modelo RSII) [88, 90]. Na presença de uma corda cósmica perpendicular à brana, a geometria de fundo correspondente contém duas cópias da região R que são identificadas pela simetria  $Z_2$  com respeito à localização da brana em  $y = 0$  (ou em  $w = w_0 = a$  em termos da coordenada  $w$ ). O elemento de linha correspondente é expresso como

$$ds^2 = e^{-2|y|/a} (dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2) - dy^2, \quad (6.60)$$

onde, como anteriormente,  $-\infty < y < +\infty$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi/q$ . Note que para um observador localizado na brana  $y = 0$ , o elemento de linha (6.60) é reduzido ao elemento de linha usual para uma corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski  $(3 + 1)$ -dimensional. A condição de contorno para o campo  $\psi(x)$  na brana é obtida com base na simetria  $Z_2$  (veja [62, 122]).

Seja  $M$  a matriz que relaciona os campos nas regiões  $-\infty < y < 0$  e  $0 < y < +\infty$ :

$$\psi(t, r, \phi, -y, z) = M\psi(t, r, \phi, y, z). \quad (6.61)$$

Exigimos a invariância da ação do campo fermiônico sob a identificação  $Z_2$  dos pontos

nessas regiões. Este requerimento nos conduz às seguintes condições sobre a matriz  $M$ :

$$\{\gamma^{(0)}, M\} = 0, \quad \{\gamma^{(0)}\gamma^{(3)}, M\} = 0, \quad [\gamma^{(0)}\gamma^{(b)}, M] = 0, \quad (6.62)$$

onde  $b = 1, 2, 4$ . Por substituição direta, pode ser verificado que estas relações são obedecidas pela matriz  $M = \varepsilon\gamma^{(3)}$  com uma constante  $\varepsilon$ . Esta última constante pode ser obtida da relação  $M^2 = 1$ , de modo que encontramos  $\varepsilon = \pm i$  e, logo, a matriz de transformação tem a forma

$$M = \pm \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix}. \quad (6.63)$$

Assim, temos dois tipos de campos fermiônicos com a regra de identificação (6.61) e com os sinais superior e inferior em (6.63).

Na brana em  $y = 0$ , temos a seguinte condição de contorno

$$(1 - M)\psi(x) = 0, \quad w = a. \quad (6.64)$$

Podemos ver que a condição de contorno (6.64) com o sinal superior em (6.63) coincide com a condição (6.2), e a condição de contorno (6.64) com o sinal inferior coincide com a condição (6.54). Portanto, para o campo fermiônico correspondendo ao sinal superior em (6.63), as expressões para o VEV da densidade de corrente induzida por uma corda cósmica no modelo RSII são obtidas das fórmulas na seção 6.2, tomando-se  $w_0 = a$  e adicionando um fator adicional  $1/2$ . Para o campo com sinal inferior em (6.63), o resultado correspondente é obtido da expressão para a densidade de corrente na seção 6.4 para a região R (novamente, com um fator  $1/2$ ). O aparecimento do fator  $1/2$  está relacionado ao fato de que a integração na condição de normalização para as funções dos modos é realizada sobre o intervalo  $-\infty < y < +\infty$ , em vez do intervalo  $0 \leq y < +\infty$  para a região R na discussão acima (com  $y_0 = 0$ ).

A densidade de corrente induzida na brana por flutuações de vácuo do campo fermiônico no volume total da variedade é uma fonte de campos magnéticos ao redor da corda cósmica. Estes campos estão entre as características notáveis de cordas que carregam fluxo magnético. Observe que a densidade de corrente do vácuo também será gerada por flutuações quânticas de campos que vivem na brana (por exemplo, campos do

Modelo Padrão no cenário de mundos brana). No entanto, as propriedades correspondentes são distintas daquelas que discutimos acima (para corrente fermiônicas na geometria de uma corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski  $(3 + 1)$ -dimensional, veja [52, 123, 124]). Como consequência, a estrutura de campos magnéticos ao redor da corda cósmica é sensível à existência de dimensões extras.

## Conclusões e Perspectivas

Nesta tese investigamos a influência de campos externos clássicos sobre as flutuações do vácuo quântico associadas a campos bosônicos e fermiônicos carregados no espaço-tempo anti-de Sitter na presença de uma corda cósmica. A premissa adotada é que esta influência se reflete nos valores esperados de vácuo de observáveis físicos locais importantes. Em particular, consideramos os VEVs da densidade de corrente, bi-lineares dos campos e do tensor energia-momento. Nossas contribuições se encontram nos capítulos 4, 5 e 6. No que segue apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

No capítulo 4, investigamos os VEVs da densidade de corrente e do tensor energia-momento associados a um campo escalar. Iniciamos nossa investigação pela densidade de corrente escalar,  $\langle j^\mu \rangle$ , em um espaço-tempo AdS  $(D + 1)$ -dimensional, com  $D \geq 4$ , admitindo a presença de uma corda cósmica ideal com um fluxo magnético ao longo de seu eixo. Além disso, assumimos a compactificação de apenas uma dimensão extra na forma de um círculo de perímetro  $L$  e a existência de um potencial vetor ao longo desta direção. Esta compactificação foi implementada assumindo-se que o campo de matéria obedece uma condição de quasi-periodicidade ao longo do eixo  $z$ , Eq. (4.6). Para desenvolver esta análise, construímos a função de Wightman de energia positiva, resolvendo a equação Klein-Gordon correspondente. Usando coordenadas de Poincaré e admitindo uma constante de acoplamento de curvatura geral, obtemos as soluções normalizadas dadas em (4.17). A função de Wightman foi calculada somando-se sobre todo o conjunto de soluções normalizadas (4.19). Usando a fórmula de Abel-Plana, Eq. (4.20), a função de Wightman foi decomposta em duas contribuições, sendo uma devido à corda cósmica no espaço-tempo AdS e outra induzida pela compactificação. Felizmente, fomos capazes de expressar esta função em uma forma compacta (4.39).

Em nossa análise, provamos que somente densidades de corrente azimutal e axial

são induzidas. Devido à compactificação, a corrente azimutal foi decomposta em duas partes. A primeira correspondendo à contribuição induzida na geometria de uma corda cósmica no espaço-tempo AdS sem compactificação, e a segunda induzida pela compactificação; ambas apresentadas pelas Eqs. (4.54) e (4.63), respectivamente. Ambas as contribuições são funções ímpares do parâmetro  $\varepsilon$  associado ao fluxo magnético ao longo da corda, com um período igual ao quantum de fluxo  $\Phi_0$ . Neste caso, tomando  $\varepsilon = 0$ , estas contribuições são nulas; este é um efeito tipo Ahanorov-Bohm. Nas Figs. 4.1 e 4.2 apresentamos os comportamentos gráficos da contribuição induzida puramente pela corda como função de  $\varepsilon$  (associado ao fluxo magnético ao longo da corda) e  $r/w$  (distância própria em unidades de  $a$ ), respectivamente. Da Fig. 4.1 é mostrado que a intensidade de  $\langle j^\phi \rangle_{cs}$  aumenta com o parâmetro  $q$ , revelando a importante influência do déficit angular gerado pela corda. Já na Fig. 4.2 vemos que o decaimento deste VEV é mais acentuado à medida que aumentamos os valores de  $q$  e  $ma$ . Algumas expressões assintóticas também foram obtidas para pequenos e grandes valores de  $r/w$ , correspondendo as expressões (4.56) e (4.57), respectivamente. Quanto à parte induzida pela compactificação, Eq. (4.63), podemos observar que é uma função par do parâmetro  $\tilde{\beta}$  e uma função ímpar de  $\varepsilon$ , com período igual a  $\Phi_0$ . Sua dependência com  $\tilde{\beta}$  foi mostrada na Fig. 4.3, considerando o intervalo  $[-0.5, 0.5]$  e diferentes valores de  $q$ . Aqui, observamos que esta componente depende fortemente de  $q$ . Seu comportamento assintótico para grandes valores de  $L/w$  é apresentado em (4.65), onde observamos que esta corrente decai com uma potência específica de  $w/L$ .

Devido à compactificação temos também o surgimento de uma corrente induzida ao longo da dimensão extra apresentada em (4.77). Esta tem origem puramente topológica e é nula quando  $\tilde{\beta} = 0, 1/2$ , e  $1$ . Esta corrente é decomposta como a soma de dois termos. Um deles é dado por (4.79) e explicitamente independe da distância radial  $r$  e dos parâmetros  $q$  e  $\varepsilon$ . A outra contribuição é dada por (4.81) e depende dos fluxos magnéticos e do déficit angular planar, sendo uma função ímpar de  $\tilde{\beta}$  e uma função par do parâmetro  $\varepsilon$ , com período igual ao quantum de fluxo  $\Phi_0$ . Para o caso particular em que  $\beta = 0$ , a Eq. (4.81) se torna uma função ímpar do fluxo magnético circundado pela dimensão extra. Na Fig. 4.4 é apresentado o comportamento de  $\langle j^z \rangle_c^{(q,\varepsilon)}$  como função de  $\tilde{\beta}$  e diferentes valores de  $\varepsilon$ , considerando  $D = 4$ . Daqueles gráficos vemos que a amplitude da corrente aumenta com  $q$  e que o efeito de  $\varepsilon$  é inverter a orientação da corrente.

Ainda no capítulo 4, analisamos o VEV do campo quadrado, sendo este decomposto em contribuições devido à corda cósmica e a compactificação. A parte induzida pela corda é apresentada na forma fechada em (4.88). As formas assintóticas para pequenos e grandes valores de  $r/w$  estão presentes em (4.91) e (4.93), respectivamente. A expressão para o campo sem massa e conformalmente acoplado foi apresentada em (4.95). Na Fig. 4.5 é exibido o gráfico da parte induzida pela corda cósmica como função de  $r/w$ , e é mostrado que o fluxo magnético ao longo do núcleo da corda modifica o comportamento e o valor absoluto de  $\langle |\phi|^2 \rangle_{cs}$ . Quanto ao VEV do campo ao quadrado induzido pela compactificação da dimensão extra, este é apresentado na forma fechada em (4.98). Esta contribuição apresenta duas partes: a primeira, Eq. (4.99), é o termo  $k = 0$  que depende somente dos parâmetros associados à compactificação. Quanto à segunda parte, Eq. (4.102), esta depende de  $q$  e  $\varepsilon$ . Sua expressão assintótica para grandes valores de  $L/w$  é apresentada em (4.104). O caso do campo sem massa e conformalmente acoplado é apresentado em (4.105). Na Fig. 4.6, o comportamento da Eq. (4.98) em função de  $L/w$  é exibido, e nos mostra que o parâmetro  $\tilde{\beta}$  pode aumentar ou diminuir o valor absoluto da contribuição induzida pela compactificação, bem como modificar seu comportamento.

Outra importante análise realizada no capítulo 4 foi o VEV do tensor energia-momento. Este observável também apresenta três contribuições distintas como exibido em (4.108). Neste trabalho focamos apenas nas contribuições devido à corda cósmica e a compactificação, dadas por (4.127) e (4.115), respectivamente. Foi verificado que ambas as contribuições satisfazem a equação de conservação covariante e seus traços estão relacionados aos respectivos VEVs dos campos ao quadrado (4.120). Na Fig. 4.7, é mostrado o comportamento da densidade de energia induzida pela compactificação como função da razão  $r/w$  com diferentes valores de  $\varepsilon$ , onde observamos a influência do parâmetro  $\tilde{\beta}$  sobre este VEV. A componente não diagonal induzida pela dimensão extra compacta é dada pela Eq. (4.118) e sua expressão para o caso do campo sem massa e conformalmente acoplado é dada em (4.126). Quanto à parte induzida pela corda, a densidade de energia para o campo escalar sem massa e conformalmente acoplado é apresentada na Eq. (4.132). A componente não diagonal é dada em (4.130) e sua expressão para o campo sem massa e conformalmente acoplado é apresentada em (4.133). Por fim, na Fig. 4.8 é exibido o comportamento da densidade de energia induzida pela corda como função de  $r/w$ . Desta figura notamos que a influência na intensidade do comportamento de  $\langle T_0^0 \rangle_{cs}$

pelo acoplamento de curvatura,  $\xi$ , e o fluxo magnético ao longo do eixo da corda.

No capítulo 5 consideramos um campo fermiônico carregado e investigamos as densidades de corrente, CF e o VEV do tensor energia-momento no espaço-tempo AdS  $(4 + 1)$ -dimensional, assumindo a presença de uma corda cósmica possuindo um fluxo magnético ao longo do seu eixo. Além disso, admitimos que uma dimensão extra é compactificada em um círculo de perímetro  $L$  e que um fluxo magnético é circundado pelo eixo compactificado. A fim de desenvolver nossa análise, calculamos o conjunto completo de funções de onda fermiônicas de energia positiva e negativa obedecendo à condição de quasi-periodicidade, com uma fase arbitrária,  $\beta$ , ao longo da dimensão extra. Para calcular o VEV da densidade de corrente fermiônica fizemos uso da fórmula da soma dos modos dada em (5.40) e os modos fermiônicos dados em (5.31) e (5.38), respectivamente. Em nossa análise mostramos que, assim como no caso escalar analisado no capítulo 4, somente densidades de corrente azimutal e axial são induzidas. Estes VEVs são funções periódicas do fluxo magnético ao longo da corda  $\alpha_0$ , e do parâmetro  $\tilde{\beta}$ . Além disso, para  $\alpha_0 = 0$  e  $\tilde{\beta} = 0$ , estas contribuições são nulas; este é um efeito tipo Ahanorov-Bohm.

Usando a fórmula de soma de Abel-Plana, a corrente azimutal total (5.71) foi decomposta em uma parte induzida pela corda (5.54) e outra gerada pela compactificação (5.68). Quanto à contribuição induzida pela compactificação, esta depende de  $\alpha_0$ , com seu comportamento periódico exibido em Fig. 5.1. A análise assintótica foi feita para pontos próximos e distantes da corda, sendo estes apresentados em (5.62) e (5.63), respectivamente. Para  $r/w \ll 1$ ,  $\langle j^\phi \rangle_{cs}$  diverge na corda como  $(w/r)^5$ , e para  $r/w \gg 1$  o decaimento é mais acentuado com o aumento da massa da partícula. Estes comportamentos são exibidos graficamente na Fig. 5.2. Quanto à parte induzida pela compactificação, esta é uma função ímpar de  $\alpha_0$  e uma função par de  $\tilde{\beta}$ , com período igual ao quantum de fluxo  $\Phi_0$ . Este comportamento periódico pode ser observado pela Fig. 5.3. Além disso, essa componente é finita sobre a corda, e sua expressão assintótica para grandes comprimentos da dimensão extra é apresentada em (5.76). A corrente azimutal total é calculada para um campo sem massa e dada em (5.72). Em (5.78) apresentamos o limite assintótico Minkowskiano também para a corrente azimutal total.

Assim como no caso escalar, no caso fermiônico a presença da compactificação também dá origem a uma densidade de corrente na direção axial, que é apresentada

em sua forma fechada na Eq. (5.87). Esta contribuição é decomposta em duas partes, sendo uma induzida puramente pela topologia não-trivial da compactificação e independente de  $r$ ,  $q$  e  $\alpha_0$ , e outra parte que depende destes parâmetros. Quanto à esta segunda, a mesma é uma função ímpar de  $\tilde{\beta}$  e par de  $\alpha_0$ , sendo este comportamento graficamente exibido na Fig. 5.4. A expressão para um campo sem massa é apresentada em (5.91). Para grandes comprimentos da dimensão extra temos a expressão assintótica (5.94), que mostra que a densidade de corrente axial desaparece quando  $L \rightarrow \infty$ . Por fim, temos o limite Minkowskiano dado em (5.95).

Ainda no capítulo 5, investigamos o condensado fermiônico induzido pela corda cósmica e pela compactificação. Devido à presença da compactificação, o CF é decomposto em duas partes, sendo uma delas induzida na geometria sem compactificação presente em (5.105) e outra na geometria com compactificação dada por (5.120). Quanto à contribuição induzida pela corda, o caso não massivo é dado por (5.108), sendo este finito sobre a corda para  $2|\alpha_0| < 1 - 1/q$  e divergente para  $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$ . O limite Minkowskiano foi considerado e é apresentado em (5.113), sendo nulo para  $m = 0$ . Diferentes regimes assintóticos para esta contribuição também foram considerados. Para pontos próximos à corda, a expressão obtida é (5.114), onde observamos que o CF diverge na corda como  $(w/ar)^3$ . Para pontos distantes da corda, obtemos (5.116), onde podemos ver que o decaimento do CF é tipo lei de potências para ambos os casos com massa e sem massa. Notamos que este resultado está em contraste com o caso no espaço-tempo de Minkowski, onde o decaimento do CF para grandes distâncias a partir da corda é do tipo exponencial. Quanto à parte do CF induzida pela compactificação (5.120), esta é finita sobre a corda para  $2|\alpha_0| < 1 - 1/q$  e divergente para  $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$ . Para o campo sem massa, o CF gerado pela dimensão compacta é dado por (5.123), sendo finito sobre a corda para  $2|\alpha_0| < 1 - 1/q$  e divergente para  $2|\alpha_0| > 1 - 1/q$ . Consideramos também o caso em que o comprimento da dimensão extra é grande,  $L/w \gg 1$ , e o resultado obtido está presente em (5.125). Esta expressão nos mostra que no limite  $L \rightarrow \infty$  o CF induzido pela compactificação tende a zero. Por fim, o limite Minkowskiano é considerado e a respectiva expressão é dada em (5.126), sendo esta nula no caso sem massa.

Na última seção do capítulo 5, consideramos o VEV do tensor energia-momento. Semelhantemente ao CF, este VEV é decomposto em uma parte induzida na geometria sem compactificação e outra gerada na geometria com compactificação. As componentes

induzidas pela corda estão presentes em (5.136), (5.156), (5.170), (5.180) e (5.192). Por outro lado, as componentes induzidas pela compactificação estão presentes em (5.143), (5.161), (5.174), (5.184) e (5.198). Para ambas as partes induzidas a propriedade do traço é obedecida. Foi verificado também que estas contribuições satisfazem a equação de conservação covariante. Observando que  $\langle T_0^0 \rangle_{cs} = \langle T_r^r \rangle_{cs} = \langle T_w^w \rangle_{cs} = \langle T_z^z \rangle_{cs}$ , calculamos alguns limites assintóticos para estas componentes. Para regiões próximas à corda, o resultado obtido é dado por (5.203). Para pontos distantes da corda a expressão obtida é aquela presente em (5.204). A parte induzida pela compactificação também foi analisada. Observando que  $\langle T_0^0 \rangle_c = \langle T_r^r \rangle_c = \langle T_w^w \rangle_c$  e a decomposição dada pela Eq. (5.206), avaliamos o caso assintótico em que  $L/w \gg 1$ . Neste limite a contribuição puramente topológica,  $\langle T_\mu^\mu \rangle_c^{(0)}$ , tende a zero como  $(w/L)^{2\nu_2+4}$ . Para a contribuição  $\langle T_\mu^\mu \rangle_c^{(q,\alpha_0)}$  o resultado obtido é dado pela Eq. (5.207). Por fim, analisamos as componentes azimutal e axial para o caso do campo sem massa e para o limite Minkowskiano. No caso sem massa, as contribuições induzidas pela corda e pela compactificação, na direção azimutal, são dadas pelas Eqs. (5.208) e (5.209), respectivamente. No limite Minkowskiano as respectivas expressões estão presentes em (5.211) e (5.212). Para a componente axial, analisamos apenas a parte induzida pela compactificação. O limite Minkowskiano e o caso do campo sem massa foram encontrados e estão presentes em (5.214) e (5.216).

No capítulo 6, investigamos os efeitos combinados de uma brana e uma corda cósmica ideal com fluxo magnético ao longo de seu eixo no VEV da densidade de corrente para um campo fermiônico carregado. A fim de termos um problema que pudesse ser exatamente resolvido, consideramos o espaço-tempo AdS e uma brana planar perpendicular à corda cósmica. Dois tipos de condição de fronteira sobre a brana foram consideradas. A primeira corresponde à condição de fronteira de sacola de MIT e a segunda é dada por (6.54). A densidade de corrente para a representação  $s = \pm 1$  e a condição de contorno (6.54) coincide com a densidade de corrente para a representação  $s = \mp 1$  e para a condição de contorno (6.2), e assim descrevemos apenas os passos principais para o cálculo com a condição de sacola de MIT. O VEV da densidade de corrente é expresso na forma da soma sobre o conjunto completo de modos fermiônicos. Estes modos são dados por (6.4). A brana divide o espaço em duas regiões (regiões R e L) com diferentes propriedades fermiônicas. Na região R a função  $W_\nu(pw)$  nas funções dos modos é dada por (6.10) e o espectro do número quântico  $p$  é contínuo. Na região L temos  $W_\nu(pw) = J_\nu(pw)$  e os

autovalores para  $p$  são determinados pelos zeros da função  $J_{\nu_1}(pw_0)$ .

A única componente não nula da densidade de corrente é induzida ao longo da direção azimutal. Esta é decomposta em uma parte induzida na geometria sem brana e outra com brana. As contribuições induzidas pela brana no VEV da densidade de corrente azimutal são dadas pelas expressões (6.27) e (6.48) para as regiões R e L, respectivamente. Para um campo sem massa a contribuição induzida pela brana é nula na região R. A densidade de corrente é uma função ímpar do fluxo magnético ao longo do eixo da corda, com período igual ao quantum de fluxo. No caso especial  $q = 1$  as fórmulas obtidas fornecem expressões para as densidades de corrente induzidas por um tubo de fluxo magnético idealizado com espessura nula. No limite de valores grandes do raio de curvatura do espaço AdS e no termo líder, obtemos a expressão (6.40) para a densidade de corrente fermiônica induzida por uma fronteira plana, perpendicular à corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski  $(4 + 1)$ -dimensional.

A fim de entender o comportamento da densidade de corrente azimutal, consideramos diferentes regiões assintóticas dos parâmetros do problema. Próximo à corda, para pontos não tão próximos à brana, a contribuição induzida pela brana é uma função linear da coordenada radial  $r$  e é nula sobre a corda. O comportamento da contribuição induzida pela brana na região R, à grandes distâncias da corda, é diferente para as duas representações irredutíveis da álgebra de Clifford. Para a representação com  $s = 1$ , a densidade de corrente total é dominada pela contribuição induzida na geometria sem brana. Para a representação  $s = -1$  a contribuição induzida pela brana comporta-se como  $\langle j_\phi \rangle_b \propto (w/r)^{|2ma-1|+3}$  e é dominante no VEV total. Em todos estes casos, o decaimento da densidade de corrente no espaço-tempo AdS, como uma função da distância própria a partir da corda, é tipo lei de potências para ambos os campos sem massa e com massa. Para campos massivos, este comportamento para grandes distâncias na região R está em contraste com aquele para no espaço-tempo de Minkowski, onde o decaimento é exponencial. Para pontos distantes da corda, a densidade de corrente na região L é suprimida pelo fator exponencial  $e^{-2rp_1 \sin(\pi/q)/w_0}$  para  $q \geq 2$ , e pelo fator  $e^{-2rp_1/w_0}$  para  $q < 2$ , com  $p_1/w_0$  sendo o menor autovalor para o número quântico  $p$ . Gostaríamos de salientar que, a densidade de corrente é finita na brana, tanto na região R quanto na região L. Os valores limites correspondentes para as regiões R e L são diretamente obtidos das representações (6.20) e (6.44), e eles são dados por (6.37) e (6.53), respectivamente. Para uma

localização fixa da brana e no limite  $w \rightarrow 0$ , correspondendo a pontos na fronteira AdS, o VEV induzido da corrente pela brana comporta-se como  $w^{2ma+5}$ . O mesmo ocorre para a contribuição induzida na geometria sem brana.

No modelo Randall-Sundrum com apenas uma brana, as condições de contorno sobre um campo fermiônico fora da brana são ditadas pela simetria  $Z_2$ . Dependendo da paridade do campo, duas condições de contorno são obtidas na localização da brana. Elas correspondem às condições (6.2) e (6.54) em nossa discussão. Consequentemente, o VEV da densidade de corrente, associada a um campo fermiônico fora da brana e induzido no modelo RSII com uma corda cósmica possuindo fluxo magnético, é obtido dos resultados nas seções 6.2 e 6.3, com um fator adicional 1/2 relacionado à presença de duas cópias da região R.

Quanto às perspectivas, algumas direções podem ser tomadas no sentido estender os resultados presentes nesta tese. Dentre elas, podemos citar o cálculo do condensado fermiônico e do tensor energia-momento para o sistema estudado no capítulo 6. Outra possibilidade é a extensão dos resultados encontrados no capítulo 6 para o caso de duas branas no modelo RSI.

## Referências Bibliográficas

- [1] V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov, *The Casimir effect and its applications*, (Oxford Univ. Press, 1997).
- [2] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir effect*, (vol. 145. Oxford Univ. Press, 2009).
- [3] K. A. Milton, *The Casimir effect: Physical manifestations of zero-point energy*, (World Scientific, 2001).
- [4] L. M. Sokolowski, *The bizarre anti-de Sitter spacetime*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **13**, 1630016 (2016), [[arXiv:1611.01118](#)].
- [5] A. de Pádua Santos and E. R. Bezerra de Mello, *Non-Abelian cosmic strings in de Sitter and anti-de Sitter space*, Phys. Rev. D **94**, 063524 (2016), [[arXiv:1509.04668](#)].
- [6] E. R. Bezerra de Mello, A. A. Saharian and M. R. Setare, *Vacuum densities for a brane intersecting the AdS boundary*, Phys. Rev. D **92**, 104005 (2015), [[arXiv:1502.05397](#)].
- [7] S. Bellucci, A. A. Saharian and V. Vardanyan, *Vacuum currents in braneworlds on AdS bulk with compact dimensions*, JHEP **11**, 092 (2015), [[arXiv:1508.07255](#)].
- [8] S. Bellucci, A. A. Saharian, and V. Vardanyan, *Hadamard function and the vacuum currents in braneworlds with compact dimensions: Two-brane geometry*, Phys. Rev. D **93**, 084011 (2016), [[arXiv:1512.06569](#)].
- [9] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, *Large N field theories, string theory and gravity*, Phys. Rept. **323**, 183-386 (2000), [[arXiv:hep-th/9905111](#)].

- [10] P. Brax and C. van de Bruck, *Cosmology and brane worlds: A Review*, Class. Quant. Grav. **20**, R201-R232 (2003), [[arXiv:hep-th/0303095](https://arxiv.org/abs/hep-th/0303095)].
- [11] C. Fronsdal, *Elementary particles in a curved space. II*, Phys. Rev. D **10**, 589 (1974).
- [12] C. Fronsdal and R. B. Haugen, *Elementary particles in a curved space. III*, Phys. Rev. D **12**, 3810 (1975).
- [13] S. J. Avis, C. J. Isham and D. Storey, *Quantum field theory in Anti-de Sitter space-time*, Phys. Rev. D **18**, 3565 (1978).
- [14] C. P. Burgess and C. A. Lütken, *Propagators and effective potentials in Anti-de Sitter space*, Phys. Lett. B **153**, 137 (1985).
- [15] R. Camporesi, *Zeta function regularization of one loop effective potentials in Anti-de Sitter space-time*, Phys. Rev. D **43**, 3958 (1991).
- [16] R. Camporesi, *Stress energy tensors in anti-de Sitter space-time*, Phys. Rev. D **45**, 3591 (1992).
- [17] M. Kamela and C. P. Burgess, *Massive-scalar effective actions on Anti-de Sitter spacetime*, Can. J. Phys. **77**, 85 (1999).
- [18] M. M. Caldarelli, *Quantum scalar fields on anti-de Sitter space-time*, Nucl. Phys. B **549**, 499 (1999).
- [19] V. E. Ambruş and E. Winstanley, *Renormalised fermion vacuum expectation values on Anti-de Sitter space-time*, Phys. Lett. B **749**, 597 (2015).
- [20] C. Kent and E. Winstanley, *Hadamard renormalized scalar field theory on Anti-de Sitter spacetime*, Phys. Rev. D **91**, 044044 (2015).
- [21] V. E. Ambruş and E. Winstanley, *Thermal expectation values of fermions on Anti-de Sitter space-time*, Class. Quantum Grav. **34**, 145010 (2017).
- [22] V. E. Ambruş, C. Kent and E. Winstanley, *Analysis of scalar and fermion quantum field theory on Anti-de Sitter spacetime*, Int. J. Mod. Phys. D **27**, 1843014 (2018).
- [23] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic strings and other topological defects*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994).

- [24] M. Hindmarsh and T. Kibble, *Cosmic strings*, Rept. Prog. Phys. **58**, 477-562 (1995), [[hep-ph/9411342](#)].
- [25] J. M. Hyde, A. J. Long, and T. Vachaspati, *Dark Strings and their Couplings to the Standard Model*, Phys. Rev. D **89**, 065031 (2014), [[arXiv:1312.4573](#)].
- [26] B. Allen and E. P. S. Shellard, *On the evolution of cosmic strings*, in *The formation and evolution of cosmic strings: proceedings of a workshop supported by the SERC and held in Cambridge, 3-7 July, 1989* (G. W. Gibbons, S. W. Hawking and T. Vachaspati, eds.), (Cambridge), pp. 421–448, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [27] E. J. Copeland, L. Pogosian and T. Vachaspati, *Seeking String Theory in the Cosmos*, Class. Quant. Grav. **28**, 204009 (2011), [[arXiv:1105.0207](#)].
- [28] M. Hindmarsh, *Signals of Inflationary Models with Cosmic Strings*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **190**, 197-228 (2011), [[arXiv:1106.0391](#)].
- [29] PLANCK collaboration, P. A. R. Ade et al., *Planck 2013 results. XXV. Searches for cosmic strings and other topological defects*, Astron. Astrophys. **571** (2014) A25, [[arXiv:1303.5085](#)].
- [30] V. Berezhinsky, B. Hnatyk and A. Vilenkin, *Gamma-ray bursts from superconducting cosmic strings*, Phys. Rev. D **64**, 043004 (2001).
- [31] P. Bhattacharjee and G. Sigl, *Origin and propagation of extremely high-energy cosmic rays*, Phys. Rept. **327**, 109-247 (2000).
- [32] T. Damour and A. Vilenkin, *Gravitational wave bursts from cosmic strings*, Phys. Rev. Lett. **85**, 3761-3764 (2000).
- [33] B. Linet, *Quantum Field Theory in the Space-time of a Cosmic String*, Phys. Rev. D **35**, 536 (1987).
- [34] P. C. Davies and V. Sahni, *Quantum gravitational effects near cosmic strings*, Class. Quantum Grav. **5**, 1 (1988).
- [35] T. Souradeep and V. Sahni, *Quantum effects near a point mass in (2+1)-Dimensional gravity*, Phys. Rev. D **46**, 1616 (1992).

- [36] M. E. X. Guimarães and B. Linet, *Self-interaction and quantum effects near a point mass in three-dimensional gravitation*, Class. Quantum Grav. **10**, 1665 (1993).
- [37] E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, A. A. Saharian and A. S. Torloyan, *Vacuum polarization induced by a cylindrical boundary in the cosmic string spacetime*, Phys. Rev. D **74**, 025017 (2006).
- [38] Yu. A. Sitenko and N. D. Vlasii, *Induced vacuum energy-momentum tensor in the background of a cosmic string*, Class. Quant. Grav. **29**, 095002 (2012), [[arXiv:1110.0731](#)].
- [39] V. P. Frolov and E. M. Serebriany, *Vacuum polarization in the gravitational field of a cosmic string*, Phys. Rev. D **35**, 3779 (1987).
- [40] B. Linet, *Euclidean spinor Green's functions in the space-time of a straight cosmic string*, J. Math. Phys. **36**, 3694 (1995).
- [41] E. S. Moreira Jnr., *Massive quantum fields in a conical background*, Nucl. Phys. B **451**, 365 (1995).
- [42] V. B. Bezerra and N. R. Khusnutdinov, *The vacuum expectation value of the spinor massive field in the cosmic string spacetime*, Class. Quantum Grav. **23**, 3449 (2006).
- [43] E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, A. A. Saharian and A. S. Tarloyan, *Fermionic vacuum polarization by a cylindrical boundary in the cosmic string spacetime*, Phys. Rev. D **78**, 105007 (2008).
- [44] E. R. B. de Mello and A. A. Saharian, *Vacuum polarization induced by a cosmic string in anti-de Sitter spacetime*, A **45**, 115402 (2012), [[arXiv:1110.2129](#)].
- [45] E. R. Bezerra de Mello and A. A. Saharian, *Vacuum polarization by a cosmic string in de Sitter spacetime*, JHEP **04**, 046 (2009).
- [46] E. R. Bezerra de Mello and A. A. Saharian, *Fermionic vacuum polarization by a cosmic string in de Sitter spacetime*, JHEP **08**, 038 (2010).
- [47] E. R. Bezerra de Mello, E. R. Figueiredo Medeiros and A. A. Saharian, *Fermionic vacuum polarization by a cosmic string in anti-de Sitter spacetime*, Class. Quant. Grav. **30**, 175001 (2013).

- [48] E. R. Bezerra de Mello, A. A. Saharian and V. Vardanyan, *Induced vacuum currents in anti-de Sitter space with toral dimensions*, Phys. Lett. B **741**, 155-162 (2015), [[arXiv:1410.2860](#)].
- [49] P. Kanti, K. A. Olive and M. Pospelov, *On the stabilization of the size of extra dimensions*, Phys. Lett. B **538**, 146-158 (2002).
- [50] E. A. F. Bragança, H. F. Santana Mota and E. R. Bezerra de Mello, *Induced vacuum bosonic current by magnetic flux in a higher dimensional compactified cosmic string spacetime*, Int. J. Mod. Phys. D **24**, 1550055 (2015), [[arXiv:1410.1511](#)].
- [51] E. A. F. Bragança, H. F. Santana Mota and E. R. Bezerra de Mello, *Vacuum expectation value of the energy-momentum tensor in a higher dimensional compactified cosmic string spacetime*, Eur. Phys. J. Plus **134**, 400 (2019).
- [52] E. R. Bezerra de Mello and A. A. Saharian, *Fermionic current induced by magnetic flux in compactified cosmic string spacetime*, Eur. Phys. J. C **73**, 2532 (2013).
- [53] S. Bellucci, E. R. Bezerra de Mello, A. de Pádua and A. A. Saharian, *Fermionic vacuum polarization in compactified cosmic string spacetime*, Eur. Phys. J. C **74**, 2688 (2014).
- [54] E. Witten, *Cosmic superstrings*, Phys. Lett. B **153**, 243 (1985).
- [55] G. Dvali and S. H. Henry Tye, *Brane inflation* Phys. Lett. B **450**, 72 (1999).
- [56] S. H. Henry Tye, *Brane Inflation : String Theory viewed from the Cosmos*, Lect. Notes Phys. **737**, 949 (2008).
- [57] E. J. Copeland and T. W. B. Kibble, *Cosmic strings and superstrings*, Proc. R. Soc. A **466**, 623 (2010).
- [58] D. F. Chernoff and S. H. Henry Tye, *Inflation, string theory and cosmic strings*, Int. J. Mod. Phys. D **24**, 1530010 (2015).
- [59] S. Sarangi and S. H. Henry Tye, *Cosmic string production towards the end of brane inflation*, Phys. Lett. B **536**, 185 (2002).
- [60] K. Johnson, *The M.I.T. Bag Model*, Acta Phys. Polon. B **6**, 865 (1975).

- [61] S. Bellucci, A. A. Saharian and V. Vardanyan, *Fermionic currents in AdS spacetime with compact dimensions* Phys. Rev. D **96**, 065025 (2017).
- [62] S. Bellucci, A. A. Saharian, D. H. Simonyan and V. Vardanyan, *Fermionic currents in topologically nontrivial braneworlds*, Phys. Rev. D **98**, 085020 (2018).
- [63] S. Bellucci, A. A. Saharian, H. G. Sargsyan and V. Vardanyan, *Fermionic vacuum currents in topologically nontrivial braneworlds: Two-brane geometry*, Phys. Rev. D **101**, 045020 (2020).
- [64] M. Carmeli, *Classical Fields: General relativity and Gauge Theory* (1. ed. John Wiley & Sons, Inc., 1982).
- [65] Ray A. d’Inverno, *Introducing Einstein’s relativity*, (1. ed. New York: Oxford Univ. Press, 1998).
- [66] A. G. Riess, et al *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. **116**, 1009-1038 (1998).
- [67] Maldacena, J. *The Large- $N$  Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*. International Journal of Theoretical Physics 38, 1113–1133 (1999).
- [68] H. Năstase, *Introduction to the AdS/CFT Correspondence*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2015).
- [69] T. W. B. Kibble, *Topology of Cosmic Domains and Strings*, J. Phys. A **9**, 1387-1398 (1976).
- [70] W. J. Marciano and H. Pagels, *Quantum Chromodynamics: A Review*, Phys. Rept. **36**, 137 (1978).
- [71] Donnelly, Russell J. *Quantized vortices in helium II*, (Vol. 2. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991).
- [72] R. L. Davis and E. P. S. Shellard, *GLOBAL STRING LIFETIMES: NEVER SAY FOREVER!*, Phys. Rev. Lett. **63**, 2021 (1989).
- [73] A. Vilenkin and A. E. Everett, *Cosmic Strings and Domain Walls in Models with Goldstone and PseudoGoldstone Bosons*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1867-1870 (1982).

- [74] G. Lazarides and Q. Shafi, *Axion Models with No Domain Wall Problem*, Phys. Lett. B **115**, 21-25 (1982).
- [75] A. A. Abrikosov, *On the Magnetic properties of superconductors of the second group*, Sov. Phys. JETP **5**, 1174-1182 (1957).
- [76] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Vortex Line Models for Dual Strings*, Nucl. Phys. B **61**, 45-61 (1973).
- [77] E. B. Bogomolny, *Stability of Classical Solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976).
- [78] A. Vilenkin, *Cosmic Strings*, Phys. Rev. D **24**, 2082-2089 (1981).
- [79] W. A. Hiscock, *Exact Gravitational Field of a String*, Phys. Rev. D **31**, 3288-3290 (1985).
- [80] J. R. Gott, III, *Gravitational lensing effects of vacuum strings: Exact solutions*, Astrophys. J. **288**, 422-427 (1985).
- [81] B. Linet, *The Static Metrics with Cylindrical Symmetry Describing a Model of Cosmic Strings*, Gen. Rel. Grav. **17**, 1109-1115 (1985).
- [82] D. Garfinkle, *General Relativistic Strings*, Phys. Rev. D **32**, 1323-1329 (1985).
- [83] K. S. Thorne, C. W. Misner and J. A. Wheeler, *Gravitation*, (Freeman, 2000).
- [84] T. Kaluza, *Zum Unitätsproblem der Physik*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1921**, 966-972 (1921).
- [85] O. Klein, *Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English)*, Z. Phys. **37**, 895-906 (1926).
- [86] J. M. Overduin and P. S. Wesson, *Kaluza-Klein gravity*, Phys. Rept. **283**, 303-380 (1997).
- [87] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, *The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, Phys. Lett. B **429**, 263-272 (1998).
- [88] L. Randall and R. Sundrum, *A Large mass hierarchy from a small extra dimension*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370-3373 (1999).

- [89] V. A. Rubakov, *Large and infinite extra dimensions: An Introduction*, Phys. Usp. **44**, 871-893 (2001).
- [90] L. Randall and R. Sundrum, *An Alternative to compactification*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690-4693 (1999).
- [91] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982).
- [92] L. Parker and D. Toms, *Quantum field theory in curved spacetime: quantized fields and gravity*. (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009).
- [93] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry* (Oxford Univ. Press, London, 1926).
- [94] W. Oliveira dos Santos, E. R. Bezerra de Mello and H. F. Mota, *Vacuum polarization in high-dimensional AdS space-time in the presence of a cosmic string and a compactified extra dimension*, Eur. Phys. J. Plus **135**, 27 (2020).
- [95] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1964).
- [96] S. Bellucci, W. Oliveira dos Santos and E. R. Bezerra de Mello, *Induced fermionic current in AdS spacetime in the presence of a cosmic string and a compactified dimension*, Eur. Phys. J. C **80**, 963 (2020).
- [97] I. D. Soares, *II Escola de Cosmologia e Gravitação do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas*, editado por M. Novelo (J. Sasson e Cia. Ltda., Rio de Janeiro, Brasil, 1980).
- [98] I. L. Buchbinder and I. Shapiro, *Introduction to Quantum Field Theory with Applications to Quantum Gravity*, (Oxford Univ. Press, 2021).
- [99] A. A. Grib, S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko, *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields*, (Friedmann Laboratory Publishing, St. Petersburg, 1994).
- [100] L. Parker, *Quantized fields and particle creation in expanding universes*, Phys. Rev. **183**, 1057-1068 (1969).
- [101] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum field theory*, (2 ed. Wiley, 2010).

- [102] A. S. Fulling, *Aspects of quantum field theory in curved spacetime*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989).
- [103] L. H. Ford, *Quantum Field Theory in Curved Space-time*, gr-qc/9707062.
- [104] W. Oliveira dos Santos, H. F. Mota and E. R. Bezerra de Mello, *Induced current in high-dimensional AdS space-time in the presence of a cosmic string and a compactified extra dimension*. Phys. Rev. D **99**, 045005 (2019), [[arXiv:1809.00702](#)].
- [105] M. E. X. Guimaraes and B. Linet, *Scalar Green's functions in an Euclidean space with a conical-type line singularity*, Commun. Math. Phys. **165**, 297-310 (1994).
- [106] Y. A. Sitenko and N. D. Vlasii, *Induced vacuum energy-momentum tensor in the background of a cosmic string*, Class. Quant. Grav. **29**, 095002 (2012).
- [107] *Handbook of Mathematical Functions*, edited by M. Abramowitz and I.A. Stegun (Dover, New York, 1972).
- [108] S. Bellucci, A. Saharian, and V. Bardeghyan, *Induced fermionic current in toroidally compactified spacetimes with applications to cylindrical and toroidal nanotubes*, Phys.Rev. D **82**, 065011 (2010), [[arXiv:1002.1391](#)].
- [109] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov and O. I. Marichev, *Integrals and Series* (Gordon and Breach, New York, 1986), Vol. 2.
- [110] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1980).
- [111] E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, A. A. Saharian and H. H. Harutyunyan, *Vacuum currents induced by a magnetic flux around a cosmic string with finite core*, Phys. Rev. D **91**, 064034 (2015), [[arXiv:1411.1258](#)].
- [112] S. Bellucci, W. Oliveira dos Santos, E. R. B. de Mello and A. A. Saharian, *Topological effects in fermion condensate induced by cosmic string and compactification on AdS bulk*, [[arXiv:2105.00829](#)].
- [113] S. Bellucci, W. Oliveira dos Santos, E. R. B. de Mello and A. A. Saharian, *Fermionic vacuum polarization around a cosmic string in compactied AdS spacetime*, (artigo em preparação).

- [114] M. Bordag and N. Khusnutdinov, *A remark on bound states in conical spacetime*, Class. Quantum Grav. **13**, L41 (1996).
- [115] E. R. Bezerra de Mello, V.B. Bezerra, A. A. Saharian and V. M. Bardeghyan, *Fermionic current densities induced by magnetic flux in a conical space with a circular boundary*, Phys. Rev. D **82**, 085033 (2010).
- [116] S. Bellucci, W. Oliveira dos Santos, E. R. Bezerra de Mello and A. A. Saharian, *Vacuum fermionic currents in braneworld models on AdS bulk with a cosmic string*, JHEP **02**, 190 (2021).
- [117] A. A. Saharian, *The generalized Abel-Plana formula with applications to Bessel functions and Casimir effect*, [[arXiv:0708.1187](https://arxiv.org/abs/0708.1187)].
- [118] E. R. Bezerra de Mello and A. A. Saharian, *Vacuum polarization by a flat boundary in cosmic string spacetime* Class. Quantum Grav. **28**, 145008 (2011).
- [119] E. R. B. de Mello, A. A. Saharian and A. K. Grigoryan, *Casimir Effect for Parallel Metallic Plates in Cosmic String Spacetime*, J. Phys. A **45**, 374011 (2012).
- [120] E. R. Bezerra de Mello, A. A. Saharian and S. V. Abajyan, *Fermionic vacuum polarization by a flat boundary in cosmic string spacetime* , Class. Quantum Grav. **30**, 015002 (2013).
- [121] E. R. Bezerra de Mello, A. A. Saharian and S. V. Abajyan, *Scalar Casimir densities and forces for parallel plates in cosmic string spacetime*, Phys. Rev. D **97**, 085023 (2018).
- [122] A. Flachi, I. G. Moss and D. J. Toms, *Quantized bulk fermions in the Randall-Sundrum brane model*, Phys. Rev. D **64**, 105029 (2001).
- [123] A. Mohammadi, E. R. Bezerra de Mello and A. A. Saharian, *Finite temperature fermionic charge and current densities induced by a cosmic string with magnetic flux*, J. Phys. A: Math. Theor. **48**, 185401 (2015).
- [124] E. R. Bezerra de Mello, *Induced fermionic current densities by magnetic flux in higher dimensional cosmic string spacetime*, Class. Quantum Grav. **27**, 095017 (2010).