

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Rigidez e topologia de variedades quase-Einstein com fronteira

Geovane de Souza Ferreira Júnior

JOÃO PESSOA – PB
MAIO DE 2021

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Rigidez e topologia de variedades quase-Einstein com fronteira

por

Geovane de Souza Ferreira Júnior

sob a orientação do

Prof. Dr. Márcio Silva Santos

João Pessoa – PB
Maio de 2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F383r Ferreira Júnior, Geovane de Souza.

Rigidez e topologia de variedades quase-Einstein com
fronteira / Geovane de Souza Ferreira Júnior. - João
Pessoa, 2021.

113 f. : il.

Orientação: Márcio Silva Santos.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Variedades compactas. 2. Variedades (λ ,
 $n+m$) - Einstein. 3. Resultados de rigidez. I. Santos,
Márcio Silva. II. Título.

UFPB/BC

CDU 515.163(043)

Rigidez e topologia de variedades quase-Einstein com fronteira

por

Geovane de Souza Ferreira Júnior 

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria/Topologia

Aprovada em 21 de maio de 2021.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva – UFAL
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista – UFPI
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas - UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

*O Senhor, com sabedoria,
fundou a terra; com inteli-
gência preparou os céus.*

Provérbios 3:19

Agradecimentos

Primeiro agradeço a DEUS, pois Ele é a razão de todas as coisas.

Expresso meus sinceros agradecimentos ao meu orientador, Prof. Dr. Márcio Silva Santos, pois sei do trabalho duro que foi me orientar. Também agradeço pela paciência em tirar todas minhas dúvidas durante este trabalho, enfim, quero agradecer todo conhecimento matemático e não matemático que me concedeu, além da admiração, do carinho e respeito que tenho por ele.

A toda minha família, em especial Neide e Rose (tias), Manoel de Braz (avô), Aparecida (mãe), Zé Dito (padrasto), Jânio (irmão), Geovane (pai) e Wenderson (tio posticho).

Não tenho como deixar de agradecer a meus amigos Marcos Gabriel, Johnatan da Silva Costa ("esse homi") e Renato Bezerra Silvestre ("o serumaninho") que me ajudaram e me deram muitos conselhos durante todo o mestrado. Por isso, agradeço-lhes de modo especial.

Aos professores do Departamento de Matemática da UEPB: Arlandson Matheus, Francisco Sibério, Vilmar Vaz, Tatiana Rocha, Francisco Anderson, muito obrigado por tudo.

Aos meus amigos da UEPB-campus VII: Abmael, Bruno (Salvador), Eugênio, Saullo (Saulinho) e Victor.

Cabe-me ainda agradecer aos professores Alexandre Simas, Márcio Silva Santos, Miriam Pereira, Jacqueline Rojas e Uberlândio Severo, que se dispuseram em ministrar as disciplinas no mestrado. Suas aulas contribuíram de forma significativa para minha formação.

Quero agradecer a alguns alunos dos cursos de mestrado e doutorado em matemática da Universidade Federal da Paraíba (peço desculpas por não poder citá-los nominalmente todos eles): Cláudia, Douglas, Fábio, Felipe, Guilherme, Jaislayne (Lany), José Carlos, Lázaro, Lucas, Pádua, Paulo, Raoní, Milena, Victor Gabriel, Victor Vinícius, Rafael, Tony, João Henrique, Lenin, Maria e Thays Nunes.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro durante todo o mestrado, pois sem a bolsa seria estritamente difícil fazer qualquer coisa.

Resumo

Neste trabalho, estudamos as variedades $(\lambda, n + m)$ –Einstein compactas com bordo, onde $m \geq 1$. Baseado em [10], forneceremos caracterizações topológicas para a fronteira e como consequência de uma fórmula tipo Bochner, apresentaremos um resultado do tipo gap para um espaço-tempo fluido estático perfeito compacto com curvatura escalar constante positiva. Em seguida, baseado em [12], estenderemos para a classe das variedades $(\lambda, n + m)$ –Einstein generalizadas alguns resultados já conhecidos sobre as variedades estáticas compactas com bordo, a saber, os resultados obtidos por Chrúsciel [11] e Boucher, Gibbons e Horowitz [5]. Por fim, segundo [9], forneceremos resultados de rigidez sob condições no tensor de Bach.

Palavras-chave: Variedades compactas, Variedades $(\lambda, n + m)$ –Einstein, Resultados de rigidez.

Abstract

In this work, we study the compact $(\lambda, n + m)$ –Einstein manifolds with boundary, where $m \geq 1$. Based in [10], we provide topological characterizations for the boundary and as consequence of a Bochner type formula, we provide a gap result for compact space-time perfect static fluid with positive constant scalar curvature. In sequel, from [12], we extend for the class of generalized $(\lambda, n + m)$ –Einstein manifold, some classical results about compact static manifolds with boundary, namely, due to Chrúsciel [11] and Boucher, Gibbons and Horowitz [5]. Finally, from [9], we provide some rigidity results for $(\lambda, n + m)$ –Einstein manifolds under some conditions on Bach tensor.

Keywords: Compact manifolds, $(\lambda, n + m)$ –Einstein manifold, Rigidity results.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Conexões e curvatura	5
1.2 Tensores e Curvatura de Ricci	7
1.3 Alguns tensores especiais no estudo da curvatura	12
2 Variedades do tipo espaço-tempo fluido estático perfeito com bordo	26
2.1 Espaço-tempo fluido perfeito com bordo	29
2.2 Variedades Riemannianas em que $f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f$	38
3 Variedades Riemannianas do tipo $(\lambda, n + m)$-Einstein	60
3.1 Estimativa de área e classificação topológica do bordo	60
3.2 Algumas desigualdades integrais	73
3.3 Produto Warped e tensor de Weyl harmônico em variedades Einstein	80
3.3.1 O 3-tensor covariante D	83
Referências Bibliográficas	105

Introdução

Do ponto de vista geométrico, as variedades de Einstein fazem parte de um tipo de classe de variedades com um vasto campo de estudo, onde nesta dissertação desempenha um papel muito importante para toda teoria. Dizemos que uma variedade é de Einstein ou terá métrica de Einstein quando o tensor de Ricci pode ser escrito como um múltiplo de sua métrica. Essas métricas de Einstein aparecem como soluções de equações de campo de Einstein no vácuo com constante cosmológica, a saber,

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g = 8\pi T,$$

onde Λ é a constante cosmológica e T é o tensor de energia-estresse. Nesse sentido, as variedades de Einstein recebem esse nome porque na teoria da relatividade, que foi um trabalho apresentado por Albert Einstein em 1915, o próprio escreveu essa teoria usando o tensor de Ricci.

Em busca de novos exemplos de espaços com métricas de Einstein compactas, A. L. Besse (ver [3]), fez a seguinte pergunta: "*existe um produto warped Einstein compacto com função warping não constante?*" Foi então que [17], buscando modelos warped de Einstein, obteve uma solução parcial para essa pergunta e também deu origem a seguinte equação das variedades $(\lambda, n + m)$ –Einstein:

$$\text{Ric}_f^m = \text{Ric} + \nabla^2 f - \frac{1}{m}df \otimes df = \lambda g. \quad (1)$$

Daí, dizemos que uma variedade Riemanniana completa M é do tipo quase-Einstein ou equivalentemente $(\lambda, n + m)$ –Einstein, se existe uma função suave f definida sobre M satisfazendo a equação (1), em que o tensor Ric_f^m mencionado é conhecido como o tensor m –Bakry-Emery.

Definição 0.1. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita uma variedade $(\lambda, n + m)$ –Einstein, ou simplesmente variedade quase-Einstein, se existirem uma função suave f em M e uma constante λ tal que satisfaz a equação (1).*

Note que se tivermos a função f constante na equação (1), então o Ric_f^m se torna o tensor de Ricci na sua versão clássica, além disso, será escrito como um múltiplo de sua

métrica e, portanto, podemos inferir que as variedades $(\lambda, n + m)$ –Einstein estendem de forma natural as variedades com métricas de Einstein.

É também usual denotar a métrica g de uma variedade que satisfaz as condições da equação (1) como uma métrica m -quase-Einstein. Além disso, se consideramos m suficientemente grande, isto é, se m tender ao infinito, a expressão resultante na equação (1) é justamente a associada a Ricci solitons gradiente.

Nosso trabalho, está subdividido em 3 capítulos: O *Capítulo 1*, tem como objetivo apresentar vários resultados básicos sobre geometria Riemanniana de muita importância para o desenvolvimento da dissertação, inicia-se com a discussão de conexões e curvatura, onde serão vistas noções, definições e resultados que versam sobre tais conteúdos. O capítulo é concluído com a apresentação de alguns tensores especiais no estudo da curvatura.

O *Capítulo 2* é dedicado ao trabalho empregado em [10], em que cita os espaços-tempo estáticos, que são soluções globais especiais para as equações de Einstein na relatividade geral. Recordaremos a definição de um espaço-tempo fluido estático perfeito:

Definição 0.2. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita ser o fator espacial de um espaço-tempo fluido estático perfeito, se existem funções suaves $f > 0$ e ρ em M^n que satisfazem as equações de fluido perfeito:*

$$f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f \quad (2)$$

e

$$\Delta f = \left(\frac{n-2}{2(n-1)} R + \frac{n}{n-1} \rho \right) f, \quad (3)$$

onde $\overset{\circ}{\text{Ric}}$ e $\overset{\circ}{\nabla}^2$ representam os tensores de Ricci e Hessiana sem traço, respectivamente.

Vale salientar que quando M^n tem bordo ∂M , assumiremos que $f^{-1}(0) = \partial M$.

O principal resultado deste capítulo garante que a bola geodésica na esfera S^3 é o único espaço-tempo fluido estático perfeito compacto com bordo e curvatura escalar constante positiva tal que a norma do tensor de Einstein $|\overset{\circ}{\text{Ric}}|$ encontra-se no intervalo $[0, \frac{\sqrt{6}}{24}(R - 6\rho))$. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Corolário 0.1. *Seja (M^3, g, f, ρ) um espaço-tempo fluido estático perfeito compacto com curvatura escalar constante positiva satisfazendo*

$$|\overset{\circ}{\text{Ric}}| < \frac{\sqrt{6}}{24}(R - 6\rho),$$

então M^3 é isométrica a uma bola geodésica na esfera $\mathbb{S}^3$.

Finalmente, no *Capítulo 3*, estudamos os artigos [9, 12] que de certa forma, estudam as variedades $(\lambda, n+m)$ –Einstein e $(\lambda, n+m)$ –Einstein generalizadas compactas. Uma variedade $(\lambda, n+m)$ –Einstein generalizada é uma tripla (M^n, g, f) , onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana, possivelmente com bordo, e f uma função suave em M tal que

$$\nabla^2 f = \frac{f}{m} (\text{Ric} - \lambda g), \quad (4)$$

com $f > 0$ no interior de M e $f = 0$ sobre ∂M . Além disso, λ é uma função suave em M .

Uma observação interessante é que na equação (4) conseguimos inferir a seguinte equação:

$$f \overset{\circ}{\text{Ric}} = m \overset{\circ}{\nabla^2} f.$$

Assim, fazendo $m = 1$ e $\lambda = \frac{1}{n-1} \left(\frac{R}{2} - \rho \right)$, tem-se que um espaço-tempo fluido estático perfeito é um exemplo de uma variedade $(\lambda, n+m)$ –Einstein generalizada.

Por outro lado, quando m é um inteiro positivo, considerando $u = e^{-\frac{f}{m}}$, teremos que

$$\begin{aligned} \nabla u &= -\frac{1}{m} e^{-\frac{f}{m}} \nabla f, \\ \frac{m}{u} \nabla^2 u &= -\nabla^2 f + \frac{1}{m} df \otimes df. \end{aligned}$$

Portanto, a equação (1) pode ser reescrita como

$$\text{Ric} - \frac{m}{u} \nabla^2 u = \lambda g,$$

ou ainda,

$$\nabla^2 u = \frac{u}{m} (\text{Ric} - \lambda g).$$

Daí segue que existe uma relação entre as equações (1) e (4). Portanto, uma variedade $(\lambda, n+m)$ –Einstein é um caso particular de uma variedade $(\lambda, n+m)$ –Einstein generalizada.

A motivação crucial para estudar as variedades $(\lambda, n+m)$ –Einstein é por causa da estrutura produto warped que as variedades de Einstein têm, pois a partir de algumas observações (ver [14, 17]), o estudo de variedades produto warped de Einstein se reduz ao estudo da equação que caracteriza as variedades $(\lambda, n+m)$ –Einstein.

No que se refere a bordo desconexo, no *Capítulo 3* graças a [12], temos um resultado de classificação para variedades $(\lambda, n+m)$ –Einstein com curvatura de Ricci não negativa em dimensão $n = 3$. De forma mais precisa, segue o resultado:

Teorema 0.2. *Seja M^3 uma variedade do tipo $(\lambda, 3 + m)$ –Einstein compacta com $m > 1$, com curvatura escalar constante, curvatura de Ricci não negativa e bordo desconexo. Então M^3 é isométrica a um cilindro $\mathbb{S}^2 \times [0, a]$.*

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, abordaremos alguns conceitos preliminares e elementares referente a geometria Riemanniana, visamos essencialmente estabelecer uma base adequada para desenvolver os capítulos seguintes.

1.1 Conexões e curvatura

Um campo de vetores diferenciável X em uma variedade diferenciável M é uma aplicação suave $X : M \rightarrow TM$, onde para cada carta $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ e $p \in x(U)$,

$$X(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Sendo $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^n$ uma base para $T_p M$, em que cada f_i é uma função diferenciável $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Vamos indicar por $\mathfrak{X}(M)$ o espaço dos campos de vetores diferenciáveis em M e por $C^\infty(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis definidas em M .

Definição 1.1. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

onde indicamos por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que tem as seguintes propriedades

1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
2. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$;
3. $\nabla_{X+Y}(Z) = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$;
4. $\nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X Y$.

para todos os campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$.

Observação 1.1. O símbolo $\nabla_X Y$ deve ser interpretado como a derivada direcional do campo Y na direção do campo X .

Definição 1.2. O tensor curvatura algébrica de uma variedade Riemanniana M associado a um par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ é uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \quad (1.1)$$

em que ∇ é a conexão Riemanniana de M .

A próxima proposição menciona algumas propriedades do tensor curvatura algébrico. Para mais detalhes veja [8].

Proposição 1.1. Dados $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, o tensor curvatura algébrica satisfaz as seguintes propriedades

(a) A propriedade de permutação cíclica chamada primeira identidade de Bianchi:

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

(b) A propriedade de permutação cíclica chamada segunda identidade de Bianchi:

$$(\nabla_Z R)(X, Y)W + (\nabla_X R)(Y, Z)W + (\nabla_Y R)(Z, X)W = 0.$$

Observação 1.2. Poderíamos escrever a segunda identidade de Bianchi da seguinte forma:

$$\nabla R(X, Y, Z, W, T) + \nabla R(X, Y, W, T, Z) + \nabla R(X, Y, T, Z, W) = 0$$

para todo $X, Y, T, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

No decorrer desta dissertação iremos considerar o tensor curvatura de Riemann, que é o tensor dado por

$$\text{Rm}(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)W, Z \rangle, \quad X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.2)$$

As propriedades de simetria pertencentes a este tensor serão úteis e, portanto, serão apresentadas na proposição seguinte (ver [8]):

Proposição 1.2. Dados $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se que

$$(a) \operatorname{Rm}(X, Y, Z, W) + \operatorname{Rm}(Y, W, Z, X) + \operatorname{Rm}(W, X, Z, Y) = 0.$$

$$(b) \operatorname{Rm}(X, Y, Z, W) = -\operatorname{Rm}(Y, X, Z, W).$$

$$(c) \operatorname{Rm}(X, Y, Z, W) = -\operatorname{Rm}(X, Y, W, Z).$$

$$(d) \operatorname{Rm}(X, Y, Z, W) = \operatorname{Rm}(Z, W, X, Y).$$

1.2 Tensores e Curvatura de Ricci

Definição 1.3. *Um tensor, ou k -tensor covariante T é uma aplicação k -linear em $C^\infty(M)$ da forma*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ fatores}} \longrightarrow C^\infty(M).$$

Isto quer dizer que, dados $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, $T(X_1, \dots, X_k)$, é uma aplicação diferenciável em M , e que T é linear em cada argumento, isto é,

$$T(X_1, \dots, fX + gY, \dots, X_k) = fT(X_1, \dots, X, \dots, X_k) + gT(X_1, \dots, Y, \dots, X_k),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$.

É também comum a notação $(1, k)$ -tensor para definir $T(X_1, \dots, X_k)(p) \in \mathbb{R}$, isto é,

$$T : \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{k \text{ fatores}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Definiremos agora o *produto tensorial* que é uma noção muito importante.

Definição 1.4. *Dados T um k -tenso e S um l -tensor covariantes em uma variedade Riemanniana M , o produto tensorial de T por S*

$$T \otimes S : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k+l \text{ fatores}} \longrightarrow C^\infty(M)$$

é dado por

$$T \otimes S(X_1, \dots, X_{k+l}) = T(X_1, \dots, X_k)S(X_{k+1}, \dots, X_{k+l}),$$

sendo assim um $(k+l)$ -tensor.

É possível estabelecer em tensores a noção de derivada covariante. A definição é a seguinte:

Definição 1.5. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, a derivada covariante $\nabla_X T$ do k -tensor T na direção do campo X é o $(k+1)$ -tensor definido como

$$\nabla_X T(X_1, \dots, X_k) = X(T(X_1, \dots, X_k)) - T(\nabla_X X_1, \dots, X_k) - \dots - T(X_1, \dots, \nabla_X X_k).$$

Observação 1.3 (Referencial Geodésico). *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e $p \in M$. Então existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(U)$, ortogonais em cada ponto de U , tais que, em p , $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$. Uma tal família $\{E_i\}_{i=1}^n$, de campos de vetores é chamado de referencial (local) geodésico em p (veja [8], pág 92).*

Observação 1.4. Dado um referencial $E_1, \dots, E_n$, todo campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, pode ser expresso como

$$X = \sum_{i=1}^n x_i E_i,$$

em que $x_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis.

Definição 1.6. A derivada de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ na direção de um campo Y é dada por

$$\nabla_Y f = Y(f) = \langle \nabla f, Y \rangle.$$

Observação 1.5. Se T é um 2-tensor em uma variedade Riemanniana, então podemos associá-lo a um único $(1,1)$ -tensor, que também denotaremos por T , da seguinte forma

$$T(X, Y) = g(T(X), Y) = \langle T(X), Y \rangle. \quad (1.3)$$

De fato, sendo $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$, $Y = \sum_{j=1}^n y_j E_j$, $T(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j T(E_i, E_j)$. Definirmos $T(X) = \sum_{i,j=1}^n x_i T(E_i, E_j) E_j$, teremos

$$\begin{aligned} \langle T(X), Y \rangle &= \left\langle \sum_{i,j=1}^n x_i T(E_i, E_j) E_j, \sum_{k=1}^n y_k E_k \right\rangle \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n x_i y_k T(E_i, E_j) \langle E_j, E_k \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j T(E_i, E_j) \\ &= T(X, Y). \end{aligned}$$

Definição 1.7. Seja M uma variedade Riemanniana. Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definamos

a divergência do campo X como

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle, \quad (1.4)$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial ortogonal.

Definição 1.8. Seja $X = (X_1, \dots, X_{k-1}) \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$, a divergência de um k -tensor T é o $(k-1)$ -tensor

$$(\operatorname{div}(T))(X) = \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i} T(X_1, \dots, X_{k-1}, E_i). \quad (1.5)$$

A partir de (1.3), para um $(1, 2)$ -tensor simétrico e $X \in T_p M$, tem-se

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}(T))(X) &= \operatorname{div}(T(X)) - \sum_{i=1}^n T(E_i, \nabla_{E_i} X). \\ (\operatorname{div}(T))(X) &= \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i} T(X, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n [E_i(T(X, E_i)) - T(\nabla_{E_i} X, E_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n [E_i g(T(X), E_i) - T(E_i, \nabla_{E_i} X)] \\ &= \operatorname{div}(T(X)) - \sum_{i=1}^n T(E_i, \nabla_{E_i} X). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Além do mais a divergência de uma função f multiplicada por um tensor T é dada por

$$(\operatorname{div}(fT))(X) = T(X, \nabla f) + f(\operatorname{div}(T))(X). \quad (1.7)$$

Definição 1.9. Seja M uma variedade Riemanniana. O laplaciano de M é o operador $\Delta : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ dado por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f), \quad f \in C^\infty(M).$$

Definição 1.10. Seja $f \in C^\infty(M)$. A hessiana da função f , denotada por $\operatorname{Hess}(f)$ ou $\nabla^2 f$, é o 2-tensor simétrico

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

A regra do tipo produto nos permite reescrever $\nabla^2 f$ como

$$\nabla^2 f(X, Y) = X(Y(f)) - \nabla_X Y(f).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle &= X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle \\ &= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f). \end{aligned}$$

Seguiremos com a definição do tensor de Ricci

Definição 1.11. *O tensor curvatura de Ricci, ou apenas curvatura de Ricci, é o 2-tensor $\text{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ dado por*

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle R(X, E_i)E_i, Y \rangle. \quad (1.8)$$

Assumiremos que $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial geodésico.

O traço do tensor de Ricci em um ponto $p \in M$ é chamado de curvatura escalar e será denotado por $R(p)$, isto é, $R(p) = \sum_{i=1}^n \text{Ric}(E_i, E_i)$.

Lema 1.3. *Em uma variedade Riemanniana (M^n, g) vale que*

$$\text{div}(\text{Ric}) = \frac{1}{2} \nabla R. \quad (1.9)$$

Demonstração: Tomemos um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$, em $p \in M$, e $X \in T_p M$. Usando as simetrias do tensor curvatura e a segunda identidade de Bianchi (lembrando que $\nabla_X E_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$), temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla R, X \rangle(p) &= X(R)(p) \\ &= X \left(\sum_{i=1}^n \text{Ric}(E_i, E_i) \right) \\ &= X \left(\sum_{i,j=1}^n \langle R(E_i, E_j)E_j, E_i \rangle \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_X R(E_i, E_j)E_j, E_i \rangle. \end{aligned}$$

Daí,

$$\langle \nabla R, X \rangle(p) = \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_X R(E_i, E_j)E_j, E_i \rangle.$$

Usando a segunda Identidade de Bianchi

$$\begin{aligned}
\langle \nabla R, X \rangle (p) &= \sum_{i,j=1}^n \left\langle \nabla_{E_i} R(E_j, X) E_j - \nabla_{E_j} R(X, E_i) E_j, E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left\langle \nabla_{E_i} R(E_j, X) E_j, E_i \right\rangle - \sum_{i,j=1}^n \left\langle \nabla_{E_j} R(X, E_i) E_j, E_i \right\rangle \\
&= - \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} \text{Rm})(E_j, X, E_i, E_j) - \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_j} \text{Rm})(X, E_i, E_i, E_j).
\end{aligned}$$

Agora, trocando i por j na segunda parcela, segue que:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla R, X \rangle (p) &= - \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} \text{Rm})(E_j, X, E_i, E_j) - \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} \text{Rm})(X, E_j, E_j, E_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} \text{Rm})(X, E_j, E_i, E_j) + \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} \text{Rm})(X, E_j, E_i, E_j) \\
&= 2 \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} \text{Rm})(X, E_j, E_i, E_j).
\end{aligned}$$

Como $\text{Ric}(X, Y) = \text{tr}(\text{Rm}(X, E_i, E_i, Y))$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, segue que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla R, X \rangle (p) &= 2 \sum_{i,j=1}^n \nabla_{E_i} \text{Ric}(X, E_i) \\
&= 2(\text{div}(\text{Ric}))(X).
\end{aligned}$$

Portanto concluímos que $(\text{div}(\text{Ric}))(X) = \frac{1}{2} \langle \nabla R, X \rangle (p)$. ■

Observação 1.6. *É muito comum chamar a Equação (1.9) de segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes.*

Lema 1.4. *Dada uma função $f \in C^\infty(M)$, vale a seguinte identidade*

$$\text{div}(\nabla^2 f) = \text{Ric}(\nabla f) + \nabla \Delta f. \quad (1.10)$$

Demonstração: Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, então, pela definição de divergência de tensores,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}(\nabla^2 f))(X) &= \sum_{i=1}^n [E_i \nabla^2 f(X, E_i) - \nabla^2 f(\nabla_{E_i} X, E_i)] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[E_i \langle \nabla_X \nabla f, E_i \rangle - \langle \nabla_{\nabla_{E_i} X} \nabla f, E_i \rangle \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\langle \nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f, E_i \rangle - \langle \nabla_{\nabla_{E_i} X} \nabla f, E_i \rangle \right]. \tag{1.11}
\end{aligned}$$

Uma vez que, $R(E_i, X)\nabla f = \nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f - \nabla_X \nabla_{E_i} \nabla f - \nabla_{[E_i, X]} \nabla f$, tem-se

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f, E_i \rangle = \langle R(E_i, X)\nabla f + \nabla_X \nabla_{E_i} \nabla f + \nabla_{[E_i, X]} \nabla f, E_i \rangle,$$

e, por, $\operatorname{Ric}(X, \nabla f) = \sum_{i=1}^n \langle R(E_i, X)\nabla f, E_i \rangle$, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f, E_i \rangle &= \operatorname{Ric}(X, \nabla f) + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X \nabla_{E_i} \nabla f + \nabla_{[E_i, X]} \nabla f, E_i \rangle \\
&= \operatorname{Ric}(X, \nabla f) + \sum_{i=1}^n X \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[E_i, X]} \nabla f, E_i \rangle \\
&= \operatorname{Ric}(X, \nabla f) + X(\Delta f) + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[E_i, X]} \nabla f, E_i \rangle.
\end{aligned}$$

Note que $X(\Delta f) = X(\nabla^2 f(E_i, E_i))$ que por sua vez é igual a $\langle \nabla \Delta f, X \rangle$. Como $\nabla_X E_i = 0 \implies [E_i, X] = \nabla_{E_i} X$, pois $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$. Portanto, $\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[E_i, X]} \nabla f, E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X \nabla f, E_i \rangle$. Finalmente, concluímos de (1.11) que

$$(\operatorname{div}(\nabla^2 f))(X) = \operatorname{Ric}(X, \nabla f) + \langle \nabla \Delta f, X \rangle.$$

■

1.3 Alguns tensores especiais no estudo da curvatura

É necessário lembrar de alguns tensores especiais no estudo da curvatura para variedades Riemannianas (M^n, g) , com $n \geq 3$. Antes de apresentar o primeiro tensor vamos necessitar da definição do produto tensorial de Kulkarni-Nomizu.

Definição 1.12. *Sejam s e r tensores simétricos de ordem dois. Definimos o produto de Kulkarni-Nomizu $s \odot r$ como o 4-tensor*

$$(s \odot r)(X, Y, Z, W) = \frac{1}{2} \left(s(X, W)r(Y, Z) + s(Y, Z)r(X, W) - s(X, Z)r(Y, W) - s(Y, W)r(X, Z) \right).$$

O primeiro tensor é o tensor de Weyl, que é o 4-tensor W dado por

$$W = -R_m + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g \odot g) - \frac{2}{n-2}(\text{Ric} \odot g) \quad (1.12)$$

Também podemos escrever em coordenadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} W_{ijkl} = & -R_{ijkl} + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) \\ & - \frac{1}{n-2}(R_{il}g_{jk} + R_{jk}g_{il} - R_{ik}g_{jl} - R_{jl}g_{ik}), \end{aligned} \quad (1.13)$$

onde R_{ijkl} são as coordenadas do tensor curvatura de Riemann. O segundo tensor é o tensor de Schouten, dado por

$$S = \frac{1}{n-2}(\text{Ric} - \frac{1}{2(n-1)}Rg). \quad (1.14)$$

Além disso, tem-se o tensor de Cotton, que é um 3-tensor C dado por

$$C(X, Y, Z) = -(n-2) \left((\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z) \right) \quad (1.15)$$

Em coordenadas temos

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)} \left(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik} \right). \quad (1.16)$$

Para prosseguir será muito útil lembrar que

Proposição 1.5. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana com o tensor curvatura de Riemann Rm . Então*

$$g^{im} \nabla_m R_{ijkl} = (\text{div} Rm)_{jkl} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk} \quad (1.17)$$

Demonstração: Pela segunda identidade de Bianchi,

$$\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0.$$

Tomando o traço em relação aos índices i e m , tem-se

$$\begin{aligned}
0 &= g^{im}(\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk}) \\
&= g^{im}\nabla_m R_{ijkl} + g^{im}\nabla_k R_{ijlm} + g^{im}\nabla_l R_{ijmk} \\
&= (\operatorname{div} Rm)_{jkl} + g^{im}\nabla_k R_{ijlm} + g^{im}\nabla_l R_{ijmk}.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Como a métrica é paralela, isto é, a derivada covariante é zero, tem-se a partir de (1.18) que

$$\begin{aligned}
0 &= (\operatorname{div} Rm)_{jkl} + \nabla_k(g^{im} R_{ijlm}) + \nabla_l(g^{im} R_{ijmk}) \\
&= (\operatorname{div} Rm)_{jkl} - \nabla_k(g^{im} R_{jilm}) + \nabla_l(g^{im} R_{jikm}) \\
&= (\operatorname{div} Rm)_{jkl} - \nabla_k R_{jl} + \nabla_l R_{jk}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$(\operatorname{div} Rm)_{jkl} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk}.$$

■

Além disso,

$$\begin{aligned}
\nabla_i \overset{\circ}{R}_{ij} &= \nabla_i \left(R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij} \right) \\
&= \frac{1}{2} \nabla_j R - \frac{1}{n} \nabla_j R \\
&= \frac{n-2}{2n} \nabla_j R
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla_i \overset{\circ}{R}_{ij} = \frac{n-2}{2n} \nabla_j R. \tag{1.19}$$

Observação 1.7. A partir da definição do tensor de Schouten podemos escrever o tensor de Weyl da seguinte forma:

$$W = -R_m - 2(S \odot g). \tag{1.20}$$

Agora, a partir de (1.20), podemos provar o seguinte:

Lema 1.6. *Sejam W e S os tensores de Weyl e Schouten, respectivamente. Então,*

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}(W))(X, Y, Z) &= (\operatorname{div}(-R_m - 2(S \odot g)))(X, Y, Z) \\
&= (\nabla_X \operatorname{Ric})(Y, Z) - (\nabla_Y \operatorname{Ric})(X, Z) \\
&\quad - (\operatorname{div}(S))(X)g(Y, Z) - (\operatorname{div}(S))(Y)g(X, Z) \\
&\quad - (\nabla_X S)(Y, Z) + (\nabla_Y S)(X, Z).
\end{aligned}$$

Demonstração: Com efeito, inicialmente vamos mostrar que

$$\begin{aligned} 2\operatorname{div}((S \odot g))(X, Y, Z) &= (\operatorname{div}(S))(X)g(Y, Z) - (\operatorname{div}(S))(Y)g(X, Z) \\ &\quad + (\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z). \end{aligned} \quad (1.21)$$

De fato, note que tomando um referencial ortogonal $\{E_i\}_{i=1}^n$, tem-se que

$$2\operatorname{div}((S \odot g))(X, Y, Z) = 2 \sum_{l=1}^n \nabla_{E_l}((S \odot g))(X, Y, Z, E_l).$$

Pela definição de divergência de um tensor, temos

$$\begin{aligned} 2\operatorname{div}((S \odot g))(X, Y, Z) &= 2 \sum_{l=1}^n \left(E_l((S \odot g))(X, Y, Z, E_l) - (S \odot g)(\nabla_{E_l} X, Y, Z, E_l) \right. \\ &\quad \left. - (S \odot g)(X, \nabla_{E_l} Y, Z, E_l) - (S \odot g)(X, Y, \nabla_{E_l} Z, E_l) \right). \end{aligned}$$

Agora, pelo produto de Kulkarni-Nomizu,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}((S \odot g))(X, Y, Z) &= \sum_{l=1}^n \left(E_l [S(X, E_l)g(Y, Z) + S(Y, Z)g(X, E_l) \right. \\ &\quad \left. - S(X, Z)g(Y, E_l) - S(Y, E_l)g(X, Z)] \right. \\ &\quad \left. - (S \odot g)(\nabla_{E_l} X, Y, Z, E_l) - (S \odot g)(X, \nabla_{E_l} Y, Z, E_l) \right. \\ &\quad \left. - (S \odot g)(X, Y, \nabla_{E_l} Z, E_l) \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \left([E_l(S_{il})g_{ik} + S_{il}E_l(g_{ik}) + E_l(S_{jk})g_{il} + S_{jk}E_l(g_{il}) \right. \\ &\quad \left. - E_l(S_{ik})g_{jl} - S_{ik}E_l(g_{jl}) - E_l(S_{jl})g_{ik} - S_{jl}E_l(g_{ik})] \right. \\ &\quad \left. - S_{\nabla_{E_l} i l} g_{jk} - S_{jk} g_{\nabla_{E_l} i l} + S_{\nabla_{E_l} i k} g_{jl} + S_{\nabla_{E_l} j l} g_{ik} - S_{il} g_{\nabla_{E_l} j k} \right. \\ &\quad \left. - S_{\nabla_{E_l} j k} g_{il} + S_{ik} g_{\nabla_{E_l} j l} + S_{\nabla_{E_l} j l} g_{ik} - S_{il} g_{j \nabla_{E_l} k} - S_{j \nabla_{E_l} k} g_{il} \right. \\ &\quad \left. + S_{ik} g_{\nabla_{E_l} j l} + S_{\nabla_{E_l} j l} g_{ik} - S_{il} g_{j \nabla_{E_l} k} - S_{j \nabla_{E_l} k} g_{il} \right. \\ &\quad \left. + S_{il} g_{i \nabla_{E_l} k} \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Onde tem-se $S(X, E_l) = S_{il}$, $S(Y, Z) = S_{jk}$, $S(\nabla_{E_l} X, E_l) = S_{\nabla_{E_l} i l}$, $S(\nabla_{E_l} X, Y) = S_{\nabla_{E_l} i j}$, $g(Y, Z) = g_{jk}$ e assim por diante. Agora note que

$$\begin{aligned}
-E_l(S_{ik})g_{jl} + S_{\nabla_l ik}g_{jl} + S_{i\nabla_l k}g_{jl} &= -\sum_l \nabla_{E_l}(S)(X, Z)g(Y, E_l) \\
&= -\sum_l \nabla_l(S)(X, Z)g(Y, E_l) \\
&= -\sum_l \nabla_{Y E_l}S(Y, Z) \\
&= -\nabla_Y S(X, Z).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

De forma similar, tem-se que

$$\begin{aligned}
E_l(S_{jk})g_{il} - S_{\nabla_l jk}g_{il} - S_{j\nabla_l k}g_{il} &= \sum_l \nabla_{E_l}(S)(Y, Z)g(X, E_l) \\
&= \sum_l \nabla_l(S)(Y, Z)g(X, E_l) \\
&= \sum_l \nabla_{X E_l}S(Y, Z) \\
&= \nabla_X S(Y, Z).
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Por outro lado, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
E_l(S_{il})g_{ik} - S_{\nabla_l il}g_{ik} &= \sum_l \nabla_{E_l}S(X, E_l)g(Y, Z) \\
&= (\operatorname{div}(S))(X)g(Y, Z).
\end{aligned} \tag{1.25}$$

De forma análoga, segue que

$$\begin{aligned}
E_l(S_{jl})g_{ik} + S_{\nabla_l jl}g_{ik} &= -\sum_{E_l} \nabla_{E_l}S(Y, E_l)g(X, Z) \\
&= -(\operatorname{div}(S))(Y)g(X, Z).
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Além disso,

$$E_l(g_{jk}) = g_{\nabla_l jk} + g_{j\nabla_l k} \text{ e } E_l(g_{il}) = g_{\nabla_l il} + g_{i\nabla_l l}. \tag{1.27}$$

E, portanto, substituindo (1.23), (1.24), (1.25), (1.26) e (1.27) em (1.22) concluimos

que

$$\begin{aligned} 2\operatorname{div}((S \odot g))(X, Y, Z) &= (\operatorname{div}(S))(X)g(Y, Z) - (\operatorname{div}(S))(Y)g(X, Z) \\ &\quad + (\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z), \end{aligned}$$

provando assim a igualdade (1.21). Por fim, juntando (1.17) com (1.21), concluimos que

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}(-R_m - 2(S \odot g))(X, Y, Z)) &= (\nabla_X \operatorname{Ric})(Y, Z) - (\nabla_Y \operatorname{Ric})(X, Z) \\ &\quad - (\operatorname{div}(S))(X)g(Y, Z) - (\operatorname{div}(S))(Y)g(X, Z) \\ &\quad - (\nabla_X S)(Y, Z) + (\nabla_Y S)(X, Z). \end{aligned}$$

provando assim o Lema (1.6). ■

Afirmção 1.1. $(\operatorname{div}(W))(X, Y, Z) = (n - 3)((\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z)).$

Demonstração: Note inicialmente que

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}(S))(X) &= \frac{1}{n-2}((\operatorname{div}(\operatorname{Ric}))(X) - \frac{1}{2(n-1)}(\operatorname{div}(Rg))(X)) \\ &= \frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{2}g(\nabla R, X) - \frac{1}{2(n-1)}g(\nabla R, X)\right) \\ &= \frac{1}{n-2}g(\nabla R, X). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Analogamente, temos

$$(\operatorname{div}(S))(Y) = \frac{1}{n-2}g(\nabla R, Y). \tag{1.29}$$

Por outro lado, como $S = \frac{1}{n-2}(\operatorname{Ric} - \frac{1}{2(n-1)}Rg)$, segue que

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = \frac{1}{n-2}\left(\nabla_X \operatorname{Ric}(Y, Z) - \frac{1}{2(n-1)}g(\nabla R, X)g(Y, Z)\right),$$

daí segue que

$$(\nabla_X \operatorname{Ric})(Y, Z) = (n-2)(\nabla_X S)(Y, Z) + \frac{1}{2(n-1)}g(\nabla R, X)g(Y, Z). \tag{1.30}$$

De forma similar,

$$(\nabla_Y \operatorname{Ric})(X, Z) = (n-2)(\nabla_Y S)(X, Z) + \frac{1}{2(n-1)}g(\nabla R, Y)g(X, Z). \tag{1.31}$$

Agora, substituindo (1.28) e (1.30) no Lema (1.6),

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}(W))(X, Y, Z) &= (n-2)(\nabla_X S)(Y, Z) + \frac{1}{2(n-1)}g(\nabla R, X)g(Y, Z) \\
&\quad + (\operatorname{div}(S))(Y)g(X, Z) + (\nabla_Y S)(X, Z) - (\nabla_X S)(Y, Z) \\
&\quad - (\nabla_Y \operatorname{Ric})(X, Z) - \frac{1}{2(n-1)}g(\nabla R, X)g(Y, Z) \\
&= (n-3)(\nabla_X S)(Y, Z) + (\operatorname{div}(S))(Y)g(X, Z) \\
&\quad - (\nabla_Y \operatorname{Ric})(X, Z) + (\nabla_Y S)(X, Z).
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Por fim, substituindo (1.29) e (1.31) em (1.32), segue que

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}(W))(X, Y, Z) &= (n-3)(\nabla_X S)(Y, Z) + \frac{1}{(n-2)}g(\nabla R, Y)g(X, Z) \\
&\quad - (n-2)(\nabla_Y S)(X, Z) - \frac{1}{2(n-1)}g(\nabla R, Y)g(X, Z) + (\nabla_Y S)(X, Z) \\
&= (n-3)(\nabla_X S)(Y, Z) - (n-3)(\nabla_Y S)(X, Z) \\
&= (n-3)((\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z)).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\operatorname{div}(W))(X, Y, Z) = (n-3)((\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z)).$$

■

Observação 1.8. A partir da afirmação anterior e de (1.15), tem-se que

$$C = -\frac{(n-2)}{(n-3)}\operatorname{div}(W)$$

ou ainda,

$$C_{ijk} = -\frac{(n-2)}{(n-3)}\nabla_l W_{ijkl}.$$

O tensor de Cotton é anti-simétrico nas duas primeiras entradas, ou seja, temos que $C_{ijk} = -C_{jik}$. Com efeito, basta apenas observar que

$$\begin{aligned}
C_{ijk} &= \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}) \\
&= -\left(\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_j R g_{ik}) - \nabla_i R g_{jk}\right) \\
&= -C_{jik}.
\end{aligned}$$

Além disso, note que C_{ijk} tem traço nulo tomando quaisquer dois índices, isto é,

$$g^{ij}C_{ijk} = g^{ik}C_{ijk} = g^{jk}C_{ijk} = 0. \quad (1.33)$$

O próximo resultado é clássico no que se refere as variedades compactas, desempenha um lugar de destaque nesta dissertação e nessa teoria. Nos próximos capítulos iremos recorrer a estas considerações.

Teorema 1.7 (Teorema da Divergência). *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e X um campo em (M^n, g) , então*

$$\int_M \operatorname{div}(X) dV = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle dS,$$

em que ν é um vetor normal unitário com orientação externa sobre ∂M .

Observação 1.9. *Em particular, se M é compacta com $\partial M = \emptyset$, então tem-se*

$$\int_M \operatorname{div}(X) dV = 0$$

Definição 1.13. *Dados dois n -tensores T, F , o produto interno de Hilbert-Schmidt entre eles é definido como*

$$\langle T, F \rangle = \operatorname{tr}(T^*F) = \sum_{i=1}^n \langle T(E_i), F(E_i) \rangle, \quad (1.34)$$

em que T^* é o operador adjunto de T . Isto posto, se T é um operador autoadjunto, então

$$|T|^2 = \sum_{i=1}^n \langle T(E_i), T(E_i) \rangle,$$

e define-se assim a norma de Hilbert-Schmidt, $|\cdot|$, para operadores.

Uma outra forma de definir o produto interno de Hilbert-Schmidt é

$$\langle T, F \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle T(E_i), E_j \rangle \langle F(E_i), E_j \rangle,$$

porém, sabe-se que $\sum_{j=1}^n \langle F(E_i), E_j \rangle E_j = F(E_i)$ e, deste modo, as duas definições equivalem.

Lema 1.8. *Seja T um $(0, 2)$ – tensor em uma variedade Riemanniana (M^n, g) , então*

$$\operatorname{div}(T(\phi Z)) = \phi(\operatorname{div}T)(Z) + \phi \langle \nabla Z, T \rangle + T(\nabla \phi, Z),$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer função diferenciável ϕ em M .

Demonstração: Usando a linearidade do tensor T , temos para $\phi \in C^\infty(M)$ e $Z \in \mathfrak{X}(M)$ que

$$T(\phi Z) = \phi T(Z).$$

Aplicando o divergente em ambos os lados, segue

$$\operatorname{div}(T(\phi Z)) = \operatorname{div}(\phi T(Z)). \quad (1.35)$$

Agora, utilizando a definição de divergência a $\phi T(Z)$, podemos inferir que

$$\operatorname{div}(\phi T(Z)) = \phi(\operatorname{div}T)(Z) + \phi\langle \nabla Z, T \rangle + T(\nabla\phi, Z), \quad (1.36)$$

portanto, de (1.35), podemos concluir em (1.36) que

$$\operatorname{div}(T(\phi Z)) = \phi(\operatorname{div}T)(Z) + \phi\langle \nabla Z, T \rangle + T(\nabla\phi, Z).$$

■

Recorrendo ao Lema 1.8 temos a seguinte fórmula de divergência.

Lema 1.9. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e f uma função diferenciável tal que f é positiva satisfazendo $f \operatorname{Ric} = \nabla^2 f$. Então,*

$$\operatorname{div} \left[\frac{1}{f} \left(\nabla |\nabla f|^2 - \frac{2\Delta f}{n} \nabla f \right) \right] = 2f |\operatorname{Ric}|^2 + \frac{n-2}{n} \langle \nabla R, \nabla f \rangle \quad (1.37)$$

Demonstração: Para provar este lema, vamos tomar $T = \operatorname{Ric}$, $Z = \nabla f$ e $\phi = 1$ no Lema 1.8 para obter

$$\operatorname{div}(\operatorname{Ric}(\nabla f)) = \operatorname{div} \operatorname{Ric}(\nabla f) + \langle \operatorname{Ric}, \nabla^2 f \rangle,$$

pois $\operatorname{Ric}(\nabla\phi, \nabla f) = \langle \operatorname{Ric} \nabla\phi, \nabla f \rangle = 0$. Agora, como $f \operatorname{Ric} = \nabla^2 f$ e $\operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{1}{2} \nabla R$, temos

$$\operatorname{div}(\operatorname{Ric}(\nabla f)) = f |\operatorname{Ric}|^2 + \frac{n-2}{2n} \langle \nabla R, \nabla f \rangle. \quad (1.38)$$

De fato, por definição $\operatorname{Ric}(\nabla f) = \operatorname{Ric}(\nabla f) - \frac{R}{n} \nabla f$, assim tem-se

$$\operatorname{div}(\operatorname{Ric}(\nabla f)) = \operatorname{div}(\operatorname{Ric}(\nabla f)) - \operatorname{div} \left(\frac{R}{n} \nabla f \right). \quad (1.39)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{Ric}(\nabla f)) &= (\operatorname{div}(\operatorname{Ric}))(\nabla f) + \langle \operatorname{Ric}, \nabla^2 f \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \nabla R, \nabla f \rangle + \langle \operatorname{Ric}, \nabla^2 f \rangle,\end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{Ric}(\nabla f)) = \frac{1}{2} \langle \nabla R, \nabla f \rangle + \langle \operatorname{Ric}, \nabla^2 f \rangle. \quad (1.40)$$

e mais,

$$\operatorname{div}\left(\frac{R}{n}\nabla f\right) = \frac{1}{n} \langle \nabla R, \nabla f \rangle + \frac{R}{n} \Delta f. \quad (1.41)$$

Além disso, observe que

$$f|\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}|^2 = \langle f \overset{\circ}{\operatorname{Ric}}, \overset{\circ}{\operatorname{Ric}} \rangle = \langle \nabla^2 f, \overset{\circ}{\operatorname{Ric}} \rangle = \langle \operatorname{Ric}, \nabla^2 f \rangle - \frac{R}{n} \Delta f.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}\langle \nabla^2 f, \overset{\circ}{\operatorname{Ric}} \rangle &= \left\langle \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g, \operatorname{Ric} - \frac{R}{n} g \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla^2 f, \operatorname{Ric} \right\rangle - \left\langle \frac{\Delta f}{n} g, \operatorname{Ric} \right\rangle - \left\langle \nabla^2 f, \frac{R}{n} g \right\rangle + \left\langle \frac{\Delta f}{n} g, \frac{R}{n} g \right\rangle.\end{aligned}$$

Onde pelo produto interno de Hilbert-Schmidt,

$$\left\langle \frac{\Delta f}{n} g, \operatorname{Ric} \right\rangle = \left\langle \nabla^2 f, \frac{R}{n} g \right\rangle = \left\langle \frac{\Delta f}{n} g, \frac{R}{n} g \right\rangle = \frac{R}{n} \Delta f.$$

Agora, substituindo (1.40) e (1.41) em (1.39), segue

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nabla f)) &= \frac{1}{2} \langle \nabla R, \nabla f \rangle + \langle \operatorname{Ric}, \nabla^2 f \rangle - \frac{1}{n} \langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{R}{n} \Delta f \\ &= \langle \nabla^2 f, \operatorname{Ric} \rangle - \frac{R}{n} \Delta f + \frac{n-2}{2n} \langle \nabla R, \nabla f \rangle.\end{aligned}$$

Como $f|\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}|^2 = \langle \operatorname{Ric}, \nabla^2 f \rangle - \frac{R}{n} \Delta f$, tem-se

$$\operatorname{div}(\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nabla f)) = f|\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}|^2 + \frac{n-2}{2n} \langle \nabla R, \nabla f \rangle.$$

Por conseguinte,

$$f|\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nabla f) = \overset{\circ}{\nabla} f(\nabla f) \implies f|\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nabla f) = \nabla^2 f(\nabla f) - \frac{\nabla f}{n} \nabla f. \quad (1.42)$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\nabla|\nabla f|^2 &= \sum_{i=1}^n E_i \langle \nabla f, \nabla f \rangle \\
&= 2 \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla f \rangle \\
&= 2 \sum_{i=1}^n \nabla^2 f(\nabla f, E_i) \\
&= 2 \nabla^2 f(\nabla f).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla^2 f(\nabla f) = \frac{1}{2} \nabla|\nabla f|^2. \quad (1.43)$$

Substituindo (1.43) em (1.42), temos

$$2 \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f) = \frac{1}{f} \left[\nabla|\nabla^2 f| - \frac{2\nabla f}{n} \nabla f \right]. \quad (1.44)$$

Finalmente, combinando (1.38) e (1.44), temos

$$\begin{aligned}
\text{div} \left[\frac{1}{f} \left(\nabla|\nabla^2 f| - \frac{2\nabla f}{n} \nabla f \right) \right] &= 2 \text{div}(\text{Ric}(\nabla f)) \\
&= 2 \left[f |\text{Ric}|^2 + \frac{n-2}{2n} \langle \nabla R, \nabla f \rangle \right] \\
&= 2f |\text{Ric}|^2 + \frac{n-2}{n} \langle \nabla R, \nabla f \rangle.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\text{div} \left[\frac{1}{f} \left(\nabla|\nabla f|^2 - \frac{2\Delta f}{n} \nabla f \right) \right] = 2f |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{n-2}{n} \langle \nabla R, \nabla f \rangle.$$

■

Lema 1.10 (Fórmula de Bochner). *Para uma função $f \in C^\infty(M)$, temos*

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + |\nabla^2 f|^2 + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

Demonstração: Sabemos que a divergência de um tensor T aplicado ao campo ∇f é

$$\text{div}(T(\nabla f)) = \langle T, \nabla^2 f \rangle + (\text{div} T)(\nabla f).$$

Agora, tome $T = \nabla^2 f$, assim

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f(\nabla f)) = |\nabla^2 f|^2 + (\operatorname{div} \nabla^2 f)(\nabla f). \quad (1.45)$$

Além disso,

$$(\operatorname{div} \nabla^2 f)(\nabla f) = \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f). \quad (1.46)$$

Como por (1.43) temos que $\nabla^2 f(\nabla f) = \frac{1}{2} \nabla |\nabla f|^2$, segue que

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f(\nabla f)) = \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2. \quad (1.47)$$

Substituindo (1.46) e (1.47) em (1.45)

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + |\nabla^2 f|^2 + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

■

O próximo resultado é uma identidade integral muito clássica na geometria no que se refere ao estudo de variedades compactas. Ao longo do texto, esse fato será retomado.

Teorema 1.11. (*Identidade de Pohozaev-Schoen*) Se X é um campo vetorial na variedade compacta (M^n, g) e T é um 2-tensor covariante, então

$$\int_M (\operatorname{div}(T))(X) dV = -\frac{1}{2} \int_M \langle T, \mathcal{L}_X g \rangle dV + \int_{\partial M} T(X, \nu) dS,$$

em que ν é um vetor normal com orientação externa sobre ∂M .

Demonstração: Observe que temos $\mathcal{L}_X(E_i, E_j) = \langle \nabla_{E_i} X, E_j \rangle + \langle \nabla_{E_j} X, E_i \rangle$, daí

$$\begin{aligned} \langle T, \mathcal{L}_X g \rangle &= \sum_{i,j=1}^n T(E_i, E_j) \cdot \mathcal{L}_X(E_i, E_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n [\langle \nabla_{E_i} X, T(E_i) \rangle + \langle \nabla_{E_j} X, T(E_j) \rangle] \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, T(E_i) \rangle. \end{aligned}$$

Agora, pelo teorema da divergência, inferimos que

$$\int_M \operatorname{div}(T(X)) dV = \int_{\partial M} \langle T(X), \nu \rangle dS.$$

Da definição de divergência de um tensor e das considerações anteriores, segue que

$$\int_M \operatorname{div}(T(X)) dV = \int_M (\operatorname{div}(T))(X) dV + \frac{1}{2} \int_M \langle T, \mathcal{L}_X g \rangle dV.$$

Portanto, concluimos que

$$\int_M (\operatorname{div}(T))(X) dV = -\frac{1}{2} \int_M \langle T, \mathcal{L}_X g \rangle dV + \int_{\partial M} T(X, \nu) dS.$$

■

Finalizamos este capítulo enunciando alguns resultados clássicos que desempenham um papel muito importante nesta dissertação.

Teorema 1.12 (Obata). *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n \geq 2$ admitindo uma função suave f não constante tal que*

$$\nabla \nabla f = -c^2 f g,$$

onde c é constante positiva, então M é isométrica a esfera $\mathbb{S}^n$.

Teorema 1.13 (Desigualdade de Okumura). *Seja a_i , $i = 1, 2, \dots, n$ números reais. Se $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ e $\sum_{i=1}^n a_i^2 = k^2$, ($k \geq 0$ constante), então tem-se que*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} k^3 \leq \sum_{i=1}^n a_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} k^3.$$

Demonstração: Para mais detalhes veja [20].

■

O próximo resultado garante que em toda variedade Riemanniana completa M com curvatura de Ricci positiva tem-se que M é compacta. Além disso, temos uma estimativa para o diâmetro de M .

Teorema 1.14 (Bonnet-Myers). *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa. Suponhamos que a curvatura de Ricci de M satisfaz*

$$\operatorname{Ric} \geq \frac{1}{r^2} > 0.$$

Então M é compacta e o diâmetro $\operatorname{diam}(M) \leq \pi r$.

Demonstração: O leitor pode consultar a referência [8].

■

Nosso próximo resultado é um teorema que compara volumes, a saber, o teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov.

Teorema 1.15 (Bishop-Gromov). *Se (M^n, g) é uma variedade Riemanniana completa com $\text{Ric} \geq (n-1)k$ e $p \in M$. Então a função*

$$r \mapsto \frac{\text{vol}(B_r(p))}{\text{vol}(B_r^k)}.$$

É uma função não-crescente que tende para 1 quando $r \rightarrow 0$, onde B_r^k é uma bola geodésica de raio r em M_k^n . Em particular,

$$\text{vol}(B_r(p)) \leq \text{vol}(B_r^k).$$

Demonstração: Podemos ver em [\[4\]](#). ■

Capítulo 2

Variedades do tipo espaço-tempo fluido estático perfeito com bordo

Neste capítulo, vamos abordar o artigo [10] que trata dos espaços-tempo fluido estático perfeito com bordo, que de certa forma, faz generalizações das variedades estáticas. Em geral, vamos denotar os espaços-tempo fluido estático perfeito por (M^n, g, f, ρ) , onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana com f e ρ sendo funções suaves definidas em M . A definição de um espaço-tempo fluido estático perfeito é a seguinte:

Definição 2.1. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita ser o fator espacial de um espaço-tempo fluido estático perfeito, se existem funções suaves $f > 0$ e ρ em M^n que satisfazem as equações de fluido perfeito:*

$$f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f \quad (2.1)$$

e

$$\Delta f = \left(\frac{n-2}{2(n-1)} R + \frac{n}{n-1} \rho \right) f, \quad (2.2)$$

onde $\overset{\circ}{\text{Ric}}$ e $\overset{\circ}{\nabla}^2$ representam os tensores de Ricci e hessiana sem traço, respectivamente.

Vamos salientar, que na definição anterior quando M^n tem bordo ∂M , assumiremos que $f^{-1}(0) = \partial M$.

Um exemplo clássico de um espaço-tempo fluido estático perfeito com bordo não-vazio e conexo é o hemisfério $\mathbb{S}_+^n(c)$. Mais adiante, no capítulo seguinte, vamos mostrar que o hemisfério é um exemplo mais geral que um espaço-tempo fluido estático perfeito com bordo conexo.

Observação 2.1. *Quando $\rho = -\frac{R}{2}$ em uma variedade compacta do tipo espaço-tempo fluido estático perfeito com bordo, concluímos que essa variedade é um espaço estático.*

De fato, substituindo $\rho = -\frac{R}{2}$ em (2.2) temos

$$\Delta f + \frac{R}{n-1}f = 0.$$

Portanto, segue de (2.1) que

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - f\text{Ric} = 0,$$

que é a equação que caracteriza uma variedade estática.

Agora vamos mostrar que as equações estáticas em uma variedade do tipo espaço-tempo fluido estático perfeito não implica, necessariamente, que a curvatura escalar é constante.

Proposição 2.1. *Seja (M^n, g, f, ρ) um espaço-tempo fluido estático perfeito. Então a curvatura escalar R de M^n é constante se, e somente se, $\left(\frac{1}{2}R + \rho\right)f$ é constante.*

Demonstração: Sabemos do capítulo anterior que $\text{div} \nabla^2 f = \text{Ric}(\nabla f) + \Delta \nabla f$, e usando esse fato com $\overset{\circ}{\nabla}^2 f = \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g$, segue

$$\begin{aligned} \text{div} \overset{\circ}{\nabla}^2 f &= \text{div} \nabla^2 f - \text{div} \left(\frac{\Delta f}{n}g \right) \\ &= \text{Ric}(\nabla f) + \nabla \Delta f - \frac{1}{n} \nabla \Delta f \\ &= \frac{n-1}{n} \nabla \Delta f + \text{Ric}(\nabla f), \end{aligned}$$

isto é,

$$\text{div} \overset{\circ}{\nabla}^2 f = \frac{n-1}{n} \nabla \Delta f + \text{Ric}(\nabla f). \quad (2.3)$$

Por outro lado, sabemos que $\text{div}(\text{Ric}) = \frac{1}{2} \nabla R$ e sendo $\overset{\circ}{\text{Ric}} = \text{Ric} - \frac{R}{n}g$, tem-se

$$\begin{aligned} \text{div}(f \overset{\circ}{\text{Ric}}) &= \text{div} \left(f \text{Ric} - f \frac{R}{n}g \right) \\ &= \text{div}(f \text{Ric}) - \frac{1}{n} \text{div}(f R g) \\ &= \text{Ric}(\nabla f) + f \text{div}(\text{Ric}) - \frac{R}{n} \nabla f - \frac{f}{n} \nabla R, \end{aligned}$$

pois $\text{div}(fT) = T(\nabla f) + f \text{div}(T)$, para um tensor T e f uma função diferenciável em

M. Logo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f \overset{\circ}{\operatorname{Ric}}) &= \operatorname{Ric}(\nabla f) + f \operatorname{div}(\operatorname{Ric}) - \frac{R}{n} \nabla f - \frac{f}{n} \nabla R \\
&= \operatorname{Ric}(\nabla f) + f \frac{1}{2} \nabla R - \frac{f}{n} \nabla R - \frac{R}{n} \nabla f \\
&= \operatorname{Ric}(\nabla f) + \frac{n-2}{2n} f \nabla R - \frac{R}{n} \nabla f,
\end{aligned}$$

donde

$$\operatorname{div}(f \overset{\circ}{\operatorname{Ric}}) = \operatorname{Ric}(\nabla f) + \frac{n-2}{2n} f \nabla R - \frac{R}{n} \nabla f. \quad (2.4)$$

Agora, levando em conta (2.1), podemos combinar (2.3) e (2.4) para termos

$$\operatorname{Ric}(\nabla f) + \frac{n-2}{2n} f \nabla R - \frac{R}{n} \nabla f = \frac{n-1}{n} \nabla \Delta f + \operatorname{Ric}(\nabla f),$$

ou ainda,

$$\frac{n-2}{2n} f \nabla R - \frac{R}{n} \nabla f = \frac{n-1}{n} \nabla \Delta f. \quad (2.5)$$

Combinando as expressões (2.5) e (2.2), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{n-2}{2n} f \nabla R &= \frac{n-1}{n} \nabla \Delta f + \frac{R}{n} \nabla f \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{2(n-1)} \nabla(Rf) + \frac{n-1}{n} \frac{n}{(n-1)} \nabla(\rho f) + \frac{R}{n} \nabla f.
\end{aligned}$$

Dai segue que

$$\frac{n-2}{2n} f \nabla R = \frac{n-2}{2n} f \nabla R + \frac{n-2}{2n} R \nabla f + f \nabla \rho + \rho \nabla f + \frac{R}{n} \nabla f.$$

Cancelando os termos simétricos temos

$$\frac{n-2}{2n} R \nabla f + f \nabla \rho + \rho \nabla f + \frac{R}{n} \nabla f = 0.$$

A partir disso, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n-2}{2n} + \frac{1}{n} \right) R \nabla f + f \nabla \rho + \rho \nabla f = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2} R \nabla f + f \nabla \rho + \rho \nabla f = 0 \\
&\Rightarrow \nabla \left[\left(\frac{1}{2} R + \rho \right) f \right] - \frac{1}{2} f \nabla R = 0,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\nabla \left[\left(\frac{1}{2} R + \rho \right) f \right] - \frac{1}{2} f \nabla R = 0.$$

E, portanto,

$$\frac{1}{2}f\nabla R = \nabla \left[\left(\frac{1}{2}R + \rho \right) f \right].$$

Mostrando assim que a curvatura escalar R é constante se, e somente se, $\left(\frac{1}{2}R + \rho \right) f$ também o é. ■

2.1 Espaço-tempo fluido perfeito com bordo

Nesta seção vamos estudar os espaços-tempo fluido estático perfeito com bordo ∂M . Nesse sentido, iremos recorrer ao seguinte fato: sejam M uma variedade diferenciável e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave em M com $a \in \text{img}(f)$ um valor regular de f , então $S := f^{-1}(a)$ é uma hipersuperfície mergulhada de M em que $(\nabla f)(p) \perp T_p S$, para todo $p \in S$, e mais, $p \mapsto (\nabla f)(p)$ é um campo normal à S em M . Por essa razão, vamos ter (M^n, g) uma variedade compacta com bordo ∂M e f uma função não negativa e diferenciável em M satisfazendo $f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f$. Além disso, $f > 0$ no interior de M , $f^{-1}(0) = \partial M$ e ∇f não se anula na fronteira de M . Portanto, podemos inferir que $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ é um vetor normal unitário com orientação externa à variedade M .

Observação 2.2. Como $f^{-1}(0) = \partial M$, segue que f é nula sobre o bordo de M , assim

$$\begin{aligned} f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f &\implies \overset{\circ}{\nabla}^2 f = 0 \\ &\implies \nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n} g, \end{aligned}$$

ou seja, decorre de (2.1) que $\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n} g$ ao longo do bordo ∂M .

Vamos considerar $\{e_1, \dots, e_n = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\}$ uma base ortonormal para ∂M e notar que

$$\begin{aligned} X(|\nabla f|^2) &= X(\langle \nabla f, \nabla f \rangle) \\ &= 2\langle \nabla_X \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= 2\nabla^2 f(X, \nabla f) \\ &= \frac{2\Delta f}{n} g(X, \nabla f) \\ &= \frac{2\Delta f}{n} \langle X, \nabla f \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois ∇f é ortogonal a qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$. Como consequência disso, temos que $|\nabla f|$ é uma constante não nula sobre ∂M . Em seguida, usando (2.2) e o fato de f ser

nula ao longo de ∂M , temos que $\Delta f = 0$ sobre ∂M . Além disso, pela segunda forma fundamental, temos que

$$\begin{aligned}
h_{ij} &= -\langle \nabla_{e_i} v, e_j \rangle \\
&= -\langle \nabla_{e_i} \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, e_j \rangle \\
&= \frac{1}{|\nabla f|} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle \\
&= \frac{1}{|\nabla f|} (\nabla^2 f(e_i, e_j)) \\
&= \frac{\Delta f}{n|\nabla f|} g(e_i, e_j) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

E, portanto, ∂M é totalmente geodésica. Por essa razão, obtemos pela fórmula de Gauss

$$\tilde{R}_{ijkl} = R_{ijkl} \quad (2.6)$$

$$\tilde{R}_{ik} = R_{ik} - R_{inkn} \quad (2.7)$$

$$R_\gamma = R - 2R_{nn}, \quad (2.8)$$

onde $\tilde{R}_{ijkl}$, $\tilde{R}_{ik}$ e R_γ são os tensores curvatura de Riemann, de Ricci e a curvatura escalar do bordo ∂M , respectivamente.

Lema 2.2. *Seja (M^n, g, f, ρ) um espaço-tempo fluido estático perfeito, compacto com bordo ∂M . Então*

$$\int_{\partial M} |\nabla f| R_\gamma dS = 2 \int_M f |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV - \frac{n-2}{n} \int_M R \Delta f dV. \quad (2.9)$$

Demonstração: Ao integrar sobre M a equação (1.38), tem-se

$$\int_M \text{div}(\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f)) dV = \int_M f |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV + \frac{n-2}{2n} \int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle dV.$$

Como $\text{div}\left(\frac{R}{n}\nabla f\right) = \frac{1}{n}\langle \nabla R, \nabla f \rangle + \frac{R}{n}\Delta f$, segue que

$$\langle \nabla R, \nabla f \rangle = \text{div}(R\nabla f) - R\Delta f.$$

Donde segue que

$$\int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle dV = \int_M \operatorname{div}(R \nabla f) dV - \int_M R \Delta f dV.$$

Pelo teorema da divergência, temos que

$$\int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle dV = \int_{\partial M} R \langle \nabla f, \nu \rangle dS - \int_M R \Delta f dV.$$

Logo,

$$\int_M \operatorname{div}(\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nabla f)) dV = \int_M f |\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}|^2 dV + \frac{n-2}{2n} \left(\int_{\partial M} R \langle \nabla f, \nu \rangle dS - \int_M R \Delta f dV \right).$$

Ora,

$$\begin{aligned} R \langle \nabla f, \nu \rangle &= R \left(\langle \nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \rangle \right) \\ &= -R \left(\frac{|\nabla f|^2}{|\nabla f|} \right) \\ &= -R |\nabla f|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_M \operatorname{div}(\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nabla f)) dV = \int_M f |\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}|^2 dV - \frac{n-2}{2n} \left(\int_{\partial M} R |\nabla f| dS + \int_M R \Delta f dV \right). \quad (2.10)$$

Ao mesmo tempo aplicando novamente o teorema da divergência,

$$\begin{aligned} \int_M \operatorname{div}(\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nabla f)) dV &= \int_{\partial M} \langle \overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nabla f), \nu \rangle dS \\ &= - \int_{\partial M} |\nabla f| \overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nu, \nu) dS \\ &= - \int_{\partial M} |\nabla f| \left(\operatorname{Ric}(\nu, \nu) - \frac{R}{n} \right) dS. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De (2.10) e (2.11), temos que

$$- \int_{\partial M} |\nabla f| \left(\operatorname{Ric}(\nu, \nu) - \frac{R}{n} \right) dS = \int_M f |\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}|^2 dV - \frac{n-2}{2n} \int_{\partial M} R |\nabla f| dS - \frac{n-2}{2n} \int_M R \Delta f dV.$$

Agora, de (2.8)

$$R_\gamma = R - 2\operatorname{Ric}(\nu, \nu) \Rightarrow \operatorname{Ric}(\nu, \nu) = \frac{R - R_\gamma}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_M f |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV - \frac{n-2}{2n} \int_M R \Delta f dV &= \int_{\partial M} \left(\frac{R - R_\gamma}{2} - \frac{R}{n} \right) |\nabla f| dS + \frac{n-2}{2n} \int_{\partial M} R |\Delta f| dS \\
&= - \int_{\partial M} \left(\frac{n-2}{2n} R - \frac{R_\gamma}{2} + \frac{R}{2} - \frac{R}{n} \right) |\nabla f| dS \\
&= - \int_{\partial M} \left(\frac{n-2}{2n} R - \frac{R_\gamma}{2} - \frac{n-2}{2n} R \right) |\nabla f| dS \\
&= - \int_{\partial M} -|\nabla f| \frac{R_\gamma}{2} dS \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial M} |\nabla f| R_\gamma dS,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \int_{\partial M} |\nabla f| R_\gamma dS = \int_M f |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV - \frac{(n-2)}{2n} \int_M R \Delta f dV.$$

E, portanto,

$$\int_{\partial M} |\nabla f| R_\gamma dS = 2 \int_M f |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV - \frac{(n-2)}{2n} \int_M R \Delta f dV.$$

■

Por conseguinte, iremos usar o Lema [2.2](#) para obter a proposição seguinte que será muito útil na demonstração do principal resultado desta seção.

Proposição 2.3. *Seja (M^n, g, f, ρ) um espaço-tempo fluido estático perfeito, compacto, orientável e com bordo ∂M . Suponha que*

- (1) *a curvatura escalar R é constante, ou*
- (2) $\rho \leq -\frac{n-2}{2n} R$.

Então temos

$$\int_{\partial M} R_\gamma dS \geq \frac{2}{k} \int_M f |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV + C(R) |\partial M|, \quad (2.12)$$

onde $k = |\nabla f|$ em ∂M , $C(R) = \frac{n-2}{n} R_{\min}$, $R_{\min}$ é o valor mínimo de R em M^n e $|\partial M|$ representa a área de ∂M . Em particular,

$$\int_{\partial M} R_\gamma ds \geq \frac{(n-2)}{n} R_{\min} |\partial M|. \quad (2.13)$$

A igualdade vale se, e somente se, (M^n, g) for uma variedade de Einstein.

Demonstração: Suponha que a curvatura escalar R seja constante, assim pelo teo-

rema da divergência,

$$\begin{aligned}
\int_M R \Delta f \, dV &= R \int_M \operatorname{div}(\nabla f) \, dV \\
&= R \int_{\partial M} \langle \nabla f, \nu \rangle \, dS \\
&= -R \int_{\partial M} |\nabla f| \, dS,
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f, \nu \rangle &= \left\langle \nabla f, -\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right\rangle \\
&= -\frac{1}{|\nabla f|} \langle \nabla f, \nabla f \rangle \\
&= -|\nabla f|.
\end{aligned}$$

Ora, como $|\nabla f|$ é constante não negativa ao longo de ∂M , tem-se

$$\int_M R \Delta f \, dV = -R |\nabla f| \int_{\partial M} dS = -kR |\partial M|. \quad (2.14)$$

Combinando o Lema [2.2](#) com [\(2.14\)](#), temos

$$\int_{\partial M} |\nabla f| R_\gamma \, dS = 2 \int_M f |\operatorname{Ric}|^2 \, dV - \frac{(n-2)}{n} \int_M R \Delta f \, dV.$$

Assim,

$$\int_{\partial M} |\nabla f| R_\gamma \, dS = 2 \int_M f |\operatorname{Ric}|^2 \, dV + \frac{(n-2)}{n} kR |\partial M|,$$

isto é,

$$k \int_{\partial M} R_\gamma \, dS = 2 \int_M f |\operatorname{Ric}|^2 \, dV + \frac{(n-2)}{n} kR |\partial M|. \quad (2.15)$$

Como por hipótese, $\rho \leq -\frac{n-2}{2n}R$,

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n-1} \rho &\leq -\frac{(n-2)}{2n} R \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= -\frac{(n-2)}{2(n-1)} R,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{n}{n-1} \rho \leq -\frac{(n-2)}{2(n-1)} R \Rightarrow \frac{(n-2)}{2(n-1)} R + \frac{n}{n-1} \rho \leq 0.$$

Donde usando [\(2.2\)](#), concluimos que $\Delta f \leq 0$, logo $R \Delta f \leq R_{\min} \Delta f$. Daí, ao integrar

sobre M^n e usando o teorema da divergência,

$$\begin{aligned}
\int_M R \Delta f \, dV &\leq \int_M R_{\min} \Delta f \, dV \\
&= R_{\min} \int_M \operatorname{div}(\nabla f) \, dV \\
&= R_{\min} \int_{\partial M} \langle \nabla f, \nu \rangle \, dS \\
&= -R_{\min} |\nabla f| \cdot |\partial M| \\
&= -k R_{\min} |\partial M|,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_M R \Delta f \, dV = -k R_{\min} |\partial M|. \quad (2.16)$$

Agora, usando o Lema 2.2 e (2.16),

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} R_\gamma \, dS &\geq \frac{2}{|\nabla f|} \int_M f |\operatorname{Ric}|^2 \, dV + \frac{(n-2)}{nk} R_{\min} k |\partial M| \\
&= \frac{2}{k} \int_M f |\operatorname{Ric}|^2 \, dV + C(R) |\partial M|,
\end{aligned}$$

para $k = |\nabla f|$ e $C(R) = \frac{(n-2)}{n} R_{\min}$. ■

Como consequência da Proposição 2.3 e do teorema de Gauss-Bonnet temos o seguinte resultado:

Corolário 2.4. *Seja (M^3, g, f, ρ) um espaço-tempo fluido estático perfeito, tridimensional, compacto, orientável e com bordo. Supondo que*

- (1) *a curvatura escalar R é constante, ou*
- (2) $\rho \leq -\frac{R}{6}$.

Então temos

$$\chi(\partial M) \geq \frac{R_{\min}}{12\pi} |\partial M|, \quad (2.17)$$

onde $\chi(\partial M)$ é a característica de Euler de ∂M . Além disso, a igualdade vale se, e somente se, (M^n, g) é uma variedade de Einstein. Em particular, se $R_{\min} > 0$, então ∂M é homeomorfa a uma esfera.

Demonstração: Note que pelo teorema de Gauss-Bonnet, podemos inferir que

$$\int_{\partial M} K_\gamma \, dS = 2\pi \chi(\partial M).$$

Agora, usando o fato que a curvatura escalar é duas vezes a curvatura Gaussiana, isto

é, $R_\gamma = 2K_\gamma$, temos

$$\int_{\partial M} R_\gamma dS = 4\pi\chi(\partial M). \quad (2.18)$$

Por outro lado, pela Proposição 2.3,

$$\int_{\partial M} R_\gamma dS \geq \frac{R_{\min}}{3} |\partial M|. \quad (2.19)$$

Juntando (2.18) e (2.19) segue que

$$4\pi\chi(\partial M) \geq \frac{R_{\min}}{3} |\partial M|.$$

Ou seja,

$$\chi(\partial M) \geq \frac{R_{\min}}{12\pi} |\partial M|.$$

Além disso, pela Proposição 2.3 temos que a igualdade ocorre se, e somente se, (M^n, g) é uma variedade de Einstein. Para provar o caso particular, basta observar que sendo $R_{\min} > 0$, temos por (2.17) que

$$\chi(\partial M) \geq \frac{R_{\min}}{12\pi} |\partial M| > 0.$$

Assim, como M é compacta, daí segue que ∂M é compacta, portanto, ∂M será homeomorfa a uma esfera. ■

O próximo resultado fornece uma outra expressão muito útil para $\int_{\partial M} R_\gamma dS$ em um espaço-tempo fluido estático perfeito compacto, orientável e com bordo.

Proposição 2.5. *Seja (M^n, g, f, ρ) um espaço-tempo fluido estático perfeito compacto, orientável e com bordo. Então,*

$$\int_{\partial M} R_\gamma dS = \frac{n-3}{n-1} \int_{\partial M} R dS - \frac{1}{k^2} \int_{\partial M} \Delta |\nabla f|^2 dS,$$

onde $k = |\nabla f|$ ao longo de ∂M .

Demonstração: Note que

$$|\nabla^2 f|^2 = f^2 |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{(\Delta f)^2}{n} = 0, \quad (2.20)$$

ao longo de ∂M , pois temos que $f = 0$ sobre ∂M . Daí, $f \overset{\circ}{\text{Ric}} = 0$ e por (2.2), temos

$\Delta f = 0$. Além disso, por (2.5) segue que

$$\nabla \Delta f = -\frac{R}{(n-1)} \nabla f, \quad (2.21)$$

ao longo de ∂M . Agora, substituindo (2.20), (2.21) e (2.8) na fórmula de Bochner, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 &= \left\langle -\frac{R}{n-1} \nabla f, \nabla f \right\rangle + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \\ &= -\frac{R}{n-1} \langle \nabla f, \nabla f \rangle + |\nabla f|^2 \text{Ric}(\nu, \nu) \\ &= -\frac{R}{n-1} |\nabla f|^2 + |\nabla f|^2 \left(\frac{1}{2} R - \frac{1}{2} R_\gamma \right), \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = -\frac{R}{n-1} |\nabla f|^2 + |\nabla f|^2 \left(\frac{1}{2} R - \frac{1}{2} R_\gamma \right),$$

ou melhor,

$$\frac{\Delta |\nabla f|^2}{|\nabla f|^2} = R - R_\gamma - \frac{2}{n-1} R,$$

ao longo do bordo. Portanto, ao integrar a expressão sobre ∂M tem-se

$$\int_{\partial M} \Delta |\nabla f|^2 dS = \frac{n-3}{n-1} \int_{\partial M} R dS - \int_{\partial M} R_\gamma dS,$$

ou seja

$$\int_{\partial M} R_\gamma dS = \frac{n-3}{n-1} \int_{\partial M} R dS - \frac{1}{k^2} \int_{\partial M} \Delta |\nabla f|^2 dS.$$

■

O próximo resultado afirma que sobre certas condições a área do bordo de um hemisfério é o máximo possível entre todos os espaços-tempo fluidos estáticos perfeitos com bordo conexo. O resultado é o seguinte:

Teorema 2.6. *Seja (M^n, g, f, ρ) um espaço-tempo fluido estático perfeito compacto, orientável e com bordo ∂M tal que $\widetilde{\text{Ric}} \geq \frac{R_\gamma}{n-1} g_{\partial M}$ com $\inf R_\gamma > 0$, em que $\widetilde{\text{Ric}}$ é o tensor de Ricci sobre ∂M e R_γ é a curvatura escalar sobre ∂M . Suponha que*

- (1) *A curvatura escalar R é constante positiva, ou*
- (2) *$\rho \leq -\frac{(n-2)}{2n} R$ e $R_{\min} > 0$.*

Então temos

$$|\partial M| \leq \left(\frac{n(n-1)}{R_{\min}} \right)^{\frac{n-1}{2}} \omega_{n-1},$$

onde ω_{n-1} denota o volume da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$. Além disso, a igualdade ocorre se,

e somente se, (M^n, g) é isométrica ao hemisfério $\mathbb{S}_+^n$.

Demonstração: Em primeiro lugar, observe que o valor de mínimo do conjunto dado por $\{\widetilde{\text{Ric}}(u, u); u \in TM; |u| = 1\}$ é atingido, assim considere esse valor igual a $(n-2)\varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$. Então temos que

$$\widetilde{\text{Ric}} \geq (n-2)\varepsilon.$$

E, portanto, pelo Teorema de Bonnet-Myers, tem-se que

$$\text{diam}(\partial M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Ao mesmo tempo, pelo Teorema de Bishop-Gromov

$$\left| B_{\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}}^{\partial M} \right| \leq \left| S_{g_\varepsilon}^{n-1} \right|,$$

onde $g_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}g_{\text{can}}$ em que g_{can} é a métrica canônica de $\mathbb{S}^{n-1}$. Como temos que

$$|\partial M| \leq \left| B_{\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}}^{\partial M}(p) \right|,$$

para todo $p \in \partial M$, obtemos que

$$|\partial M| \leq \left| S_{g_\varepsilon}^{n-1} \right|. \quad (2.22)$$

Como $g_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}g_{\text{can}}$, temos que $\det(g_\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} \det(g_{\text{can}})$. Assim,

$$\sqrt{\det(g_\varepsilon)} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\det(g_{\text{can}})}.$$

Agora levando em consideração a definição de volume, temos ao integrar a última igualdade sobre a esfera

$$\left| S_{g_\varepsilon}^{n-1} \right|^{\frac{2}{n-1}} = \frac{1}{\varepsilon} (\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}}, \quad (2.23)$$

onde ω_{n-1} denota o volume da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$. De (2.22) e de (2.23), tem-se que

$$|\partial M|^{\frac{2}{n-1}} \leq \frac{1}{\varepsilon} (\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}}. \quad (2.24)$$

Por hipótese, $\widetilde{\text{Ric}} \geq \frac{R_\gamma}{n-1}$, daí

$$R_\gamma \leq (n-1)\widetilde{\text{Ric}} \Rightarrow R_\gamma \leq (n-1)(n-2)\varepsilon.$$

Assim,

$$(n-1)(n-2)\varepsilon \geq R_\gamma.$$

Dai segue de (2.24) que

$$(n-1)(n-2)(\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}} \geq R_\gamma |\partial M|^{\frac{2}{n-1}}.$$

Integrando sobre ∂M

$$(n-1)(n-2)(\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}} |\partial M| \geq |\partial M|^{\frac{2}{n-1}} \int_{\partial M} R_\gamma dS,$$

donde

$$(n-1)(n-2)(\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}} \geq |\partial M|^{-\frac{n-3}{n-1}} \int_{\partial M} R_\gamma dS.$$

Agora usando a Proposição 2.3, obtemos

$$(n-1)(n-2)(\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}} \geq |\partial M|^{\frac{2}{n-1}} \frac{(n-2)}{n} R_{\min} \quad (2.25)$$

Lembrando que $R_{\min} > 0$, temos

$$|\partial M|^{\frac{2}{n-1}} \leq \frac{n}{(n-2)R_{\min}} (n-1)(n-2)(\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}}$$

isto é,

$$|\partial M| \leq \left(\frac{n(n-1)}{R_{\min}} \right)^{\frac{n-1}{2}} \omega_{n-1}.$$

Por fim, note que a igualdade ocorre se, e somente se, (M^n, g) é uma variedade de Einstein e, portanto, pelo Teorema B de [22] concluímos que (M^n, g) é isométrica ao hemisfério $\mathbb{S}_+^n$. ■

2.2 Variedades Riemannianas em que $f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f$

Estamos diante da última seção deste capítulo, vamos considerar variedades Riemannianas (M^n, g) com uma função suave f satisfazendo

$$f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f.$$

Ao longo da seção serão abordados alguns lemas importantes para demonstração do resultado mais importante deste capítulo que é o Corolário 2.14.

Agora, se considerarmos (M, g) uma variedade Riemanniana e um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em $p \in M$, tem-se para $f \in C^3(M)$ a seguinte equação, conhecida como

identidade de Ricci

$$\nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f = R_{ijkl} \nabla_l f. \quad (2.26)$$

De fato, note que

$$\nabla_i \nabla_j \nabla_k f = \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} \nabla_{E_k} f = \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} \nabla f, E_k \rangle$$

e

$$\nabla_j \nabla_i \nabla_k f = \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} \nabla_{E_k} f = \langle \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} \nabla f, E_k \rangle,$$

donde,

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f &= \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} \nabla_{E_k} f - \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} \nabla_{E_k} f \\ &= \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} \nabla f - \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} \nabla f, E_k \rangle \\ &= \langle R(E_i, E_j) \nabla f, E_k \rangle \\ &= Rm(E_i, E_j, E_k, \nabla f) \\ &= R_{ijkl} \nabla_l f. \end{aligned}$$

Lema 2.7. *Seja (M^n, g) uma variedade e $f \in C^3(M)$ tal que $f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f$, então*

$$f(\nabla_i \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik}) = R_{ijkl} \nabla_l f - (\nabla_i f \nabla_j \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ik}) - \frac{1}{n} (\nabla_i (\Delta f) g_{jk} - \nabla_j (\Delta f) g_{ik})$$

Demonstração: Para provar o lema, vamos tomar as derivadas de $f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f$, ou seja,

$$\nabla_i (f \overset{\circ}{\text{Ric}}) = \nabla_i (\overset{\circ}{\nabla}^2 f) \quad \text{e} \quad \nabla_j (f \overset{\circ}{\text{Ric}}) = \nabla_j (\overset{\circ}{\nabla}^2 f),$$

isto é,

$$\begin{aligned} \nabla_i f \overset{\circ}{R}_{jk} + f \nabla_i \overset{\circ}{R}_{jk} &= \nabla_i (\nabla_j \nabla_k f - \frac{1}{n} \Delta f g_{jk}) \\ &= \nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \frac{1}{n} \nabla_i \Delta f g_{jk}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Analogamente, tem-se

$$\nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ik} + f \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} = \nabla_j \nabla_i \nabla_k f - \frac{1}{n} \nabla_j \Delta f g_{ik}. \quad (2.28)$$

Combinando (2.27) e (2.28)

$$\begin{aligned}
f \nabla_i \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} &= \nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f \\
&= -\frac{1}{n} (\nabla_i (\Delta f) g_{jk} - \nabla_j (\Delta f) g_{ik}) \\
&\quad - (\overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f - \overset{\circ}{R}_{ik} \nabla_j f).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Por fim, usando a identidade de Ricci em (2.29),

$$\begin{aligned}
f \nabla_i \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} &= R_{ijkl} \nabla_l f - \frac{1}{n} (\nabla_i (\Delta f) g_{jk} - \nabla_j (\Delta f) g_{ik}) \\
&\quad - (\overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f - \overset{\circ}{R}_{ik} \nabla_j f),
\end{aligned}$$

que termina a prova do lema. ■

Observe que fazendo $i = k$ no lema anterior,

$$f(\nabla_i \overset{\circ}{R}_{ij} - \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ii}) = R_{ijil} \nabla_l f - (\nabla_i f \nabla_i \overset{\circ}{R}_{ji} - \nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ii}) - \frac{1}{n} (\nabla_i (\Delta f) g_{ji} - \nabla_j (\Delta f) g_{ii}),$$

isto é,

$$f \nabla_i \overset{\circ}{R}_{ij} = R_{jl} \nabla_l f - \nabla_i f \overset{\circ}{R}_{ij} - \frac{1}{n} (\nabla_j \Delta f - n \nabla_j \Delta f).$$

Combinando a última igualdade com (1.19) tem-se

$$\frac{n-2}{2n} f \nabla_j R = R_{jl} \nabla_l f - \frac{1}{n} (\nabla_j \Delta f - n \nabla_j \Delta f) - \overset{\circ}{R}_{ij} \nabla_i f. \tag{2.30}$$

Em particular, podemos deduzir

$$\nabla_j \Delta f = \frac{n-2}{2(n-1)} f \nabla_j R - \frac{R}{n-1} \nabla_j f. \tag{2.31}$$

Com efeito, substituindo $\overset{\circ}{R}_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}$ em (2.30), temos

$$\begin{aligned}
\frac{n-2}{2n} f \nabla_j R &= R_{jl} \nabla_l f - \frac{1}{n} (\nabla_j \Delta f - n \nabla_j \Delta f) - (R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}) \nabla_i f \\
&= R_{jl} \nabla_l f - \frac{1}{n} \nabla_j \Delta f + \nabla_j \Delta f - R_{ij} \nabla_i f + \frac{R}{n} \nabla_j f \\
&= R_{jl} \nabla_l f + \frac{n-1}{n} \nabla_j \Delta f - R_{ji} \nabla_i f + \frac{R}{n} \nabla_j f,
\end{aligned}$$

onde para $l = i$,

$$\frac{n}{n-1} \nabla_j \Delta f = \frac{n-2}{2n} f \nabla_j R - \frac{R}{n} \nabla_j f,$$

portanto,

$$\nabla_j \Delta f = \frac{n-2}{2(n-1)} f \nabla_j R - \frac{R}{n-1} \nabla_j f.$$

Agora, temos o seguinte lema

Lema 2.8. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e f uma função suave em M^n satisfazendo $f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \nabla^2 f$. Então,*

$$\begin{aligned} f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) &= R_{ijkl} \nabla_l f - (\nabla_i f \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ik}) \\ &\quad - \frac{R}{n(n-1)} (\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) + \frac{f}{2(n-1)} (\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}). \end{aligned}$$

Demonstração: Considerando o Lema 2.7 e o fato que $\nabla_i \overset{\circ}{R}_{jk} = \nabla_i R_{jk} - \frac{1}{n} \nabla_i R g_{jk}$ temos

$$\begin{aligned} f(\nabla_i R_{jk} - \frac{1}{n} \nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R_{ik} + \frac{1}{n} \nabla_j R g_{ik}) &= R_{ijkl} \nabla_l f - (\nabla_i f \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ik}) \\ &\quad - \frac{1}{n} (\nabla_i (\Delta f) g_{jk} - \nabla_j (\Delta f) g_{ik}). \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned} f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) &= R_{ijkl} \nabla_l f - (\nabla_i f \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ik}) \\ &\quad + \frac{f}{n} (\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}) - \frac{1}{n} (\nabla_i (\Delta f) g_{jk} - \nabla_j (\Delta f) g_{ik}). \end{aligned}$$

Agora, por (2.31) temos

$$\begin{aligned} f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) &= R_{ijkl} \nabla_l f - (\nabla_i f \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ik}) + \frac{f}{n} (\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}) \\ &\quad - \frac{1}{n} \left(\frac{n-2}{2(n-1)} f \nabla_i R g_{jk} - \frac{R}{n-1} \nabla_i f g_{jk} - \frac{n-2}{2(n-1)} f \nabla_j R g_{ik} \right. \\ &\quad \left. + \frac{R}{n-1} \nabla_j f g_{ik} \right). \end{aligned}$$

E, portanto, resolvendo os termos semelhantes

$$\begin{aligned} f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) &= R_{ijkl} \nabla_l f - (\nabla_i f \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ik}) \\ &\quad - \frac{R}{n(n-1)} (\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) + \frac{f}{2(n-1)} (\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}). \end{aligned}$$

Provando o lema. ■

Por conseguinte, apresentaremos a prova de uma proposição, que é uma consequência do trabalho de Obata e do teorema de Rielly [22].

Proposição 2.9. *Seja (M^n, g) , com $n \geq 3$, uma variedade de Einstein compacta, curvatura escalar positiva e f uma função suave em M^n satisfazendo $f \operatorname{Ric} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f$.*

(1) *Se $\partial M = \emptyset$, então M^n é isométrica a esfera $\mathbb{S}^n$.*

(2) *Se $\partial M \neq \emptyset$ e $f|_{\partial M}$ é constante, então M^n é isométrica a uma bola geodésica na esfera $\mathbb{S}^n$.*

Demonstração: Como M^n é uma variedade de Einstein, deduzimos que

$$\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n} g. \quad (2.32)$$

Ao mesmo tempo, tomando a derivada covariante em (2.31),

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j \Delta f &= \nabla_i \left(\frac{n-2}{2(n-1)} f \nabla_j R - \frac{R}{n-1} \nabla_j f \right) \\ &= \frac{n-2}{2(n-1)} (\nabla_i f \nabla_j R + f \nabla_i \nabla_j R) - \frac{1}{n-1} (\nabla_i R \nabla_j f + R \nabla_i \nabla_j f), \end{aligned}$$

donde

$$\nabla_i \nabla_j \Delta f = -\frac{R}{n-1} \nabla_i \nabla_j f, \quad (2.33)$$

onde usamos o fato que M^n tem curvatura escalar constante. Agora, como temos que

$$\nabla_{E_i} \nabla_{E_j} f = \nabla^2 f(E_i, E_j),$$

segue que em (2.33), com a ajuda de (2.32),

$$\nabla_i \nabla_j \Delta f = -\frac{R}{n(n-1)} \Delta f g_{ij}.$$

Agora, supondo que $\partial M = \emptyset$, segue do Teorema 4.1 de ([23], pag 54) que M^n é isométrica a esfera. Por outro lado, se $\partial M \neq \emptyset$, por (2.31) temos

$$\nabla_j \left(\Delta f + \frac{R}{n-1} f \right) = 0,$$

donde segue que $\Delta f + \frac{R}{n-1} f$ é uma constante. Assim, Δf é constante ao longo de ∂M . Portanto, o resultado segue do teorema de Obata devido a Reilly. ■

Observação 2.3. *A condição de ser uma variedade de Einstein considerada na proposição anterior implica que a curvatura escalar é constante, o que é essencial para obter o resultado.*

De fato, a constância da curvatura escalar foi usada para concluir que

$$\Delta f + \frac{R}{n-1}f$$

é constante. Usando esse fato, obtemos a proposição seguinte, no entanto, antes de apresentar a próxima proposição vamos fazer uso da seguinte definição:

Definição 2.2. *Uma métrica V -estática é uma tripla (M^n, g, f) , onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana e f é uma função suave em M que satisfaz a seguinte equação:*

$$-\Delta f g + \nabla^2 f - f \text{Ric} = k g,$$

onde k é uma constante.

Proposição 2.10. *Seja (M^n, g) com $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana e f uma função suave em M^n satisfazendo*

$$f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla^2} f.$$

Então, (M^n, g, f) satisfaz a equação que caracteriza uma variedade V -estática,

$$-\Delta f g + \nabla^2 f - f \text{Ric} = k g,$$

para alguma constante k .

Demonstração: Por hipótese, $f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla^2} f$, isto é,

$$f(\text{Ric} - \frac{R}{n}g) = \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g,$$

donde,

$$-\frac{\Delta f}{n}g + \nabla^2 f - f \text{Ric} + f \frac{R}{n}g = 0. \quad (2.34)$$

Ora, temos que

$$-\frac{\Delta f}{n}g = -\frac{\Delta f}{n}g + \Delta f g - \Delta f g.$$

Agora substituindo a última equação em (2.34), segue que

$$-\Delta f g + \nabla^2 f - f \text{Ric} + \left(\Delta f - \frac{\Delta f}{n} + \frac{R}{n} \right) g = 0,$$

ou seja,

$$-\Delta f g + \nabla^2 f - f \text{Ric} + \left(\frac{n-1}{n} \Delta f + \frac{R}{n} \right) g = 0.$$

E, portanto,

$$-\Delta f g + \nabla^2 f - f \text{Ric} = k g,$$

onde $k = -\frac{n-1}{n} \left(\Delta f + f \frac{R}{n-1} \right)$ é uma constante. $\blacksquare$

Observação 2.4. *Métricas V -estáticas são importantes para entender a relação entre volume e curvatura escalar, além disso, desempenham um papel muito importante na Física. Para mais informações sobre essas variedades indicamos (Miao e Tam (2012), ver [18]).*

Na sequência, definiremos o 3-tensor T_{ijk} dado por

$$T_{ijk} = \frac{n-1}{n-2} \left(\overset{\circ}{R}_{ik} \nabla_j f - \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f \right) + \frac{1}{n-2} \left(\overset{\circ}{R}_{jl} \nabla_l f g_{ik} - \overset{\circ}{R}_{il} \nabla_l f g_{jk} \right). \quad (2.35)$$

Observe que este tensor é anti-simétrico nos dois primeiros índices, ou seja, $T_{ijk} = -T_{jik}$. Com efeito,

$$\begin{aligned} T_{jik} &= \frac{n-1}{n-2} \left(\overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f - \overset{\circ}{R}_{ik} \nabla_j f \right) + \frac{1}{n-2} \left(\overset{\circ}{R}_{il} \nabla_l f g_{jk} - \overset{\circ}{R}_{jl} \nabla_l f g_{ik} \right) \\ &= - \left(\frac{n-1}{n-2} \left(\overset{\circ}{R}_{ik} \nabla_j f - \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f \right) + \frac{1}{n-2} \left(\overset{\circ}{R}_{jl} \nabla_l f g_{ik} - \overset{\circ}{R}_{il} \nabla_l f g_{jk} \right) \right) \\ &= -T_{ijk}. \end{aligned}$$

Além disso, T_{ijk} tem traço nulo tomando quaisquer dois índices.

Com a ajuda desse tensor e essa notação, temos o próximo lema.

Lema 2.11. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e f uma função suave em M^n satisfazendo $f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \nabla^2 f$. Então,*

$$f C_{ijk} = T_{ijk} + W_{ijkl} \nabla_l f.$$

Demonstração: Considerando (1.16), temos

$$f C_{ijk} = f (\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) - \frac{f}{2(n-1)} (\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}).$$

Agora, pelo Lema 2.8,

$$\begin{aligned} f C_{ijk} &= R_{ijkl} \nabla_l f - (\nabla_i f \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ik}) + \frac{R}{n(n-1)} (\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) \\ &\quad + \frac{f}{2(n-1)} (\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}) - \frac{f}{2(n-1)} (\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}) \\ &= R_{ijkl} \nabla_l f - (\nabla_i f \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ik}) + \frac{R}{n(n-1)} (\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}). \end{aligned}$$

Ou seja

$$fC_{ijk} = R_{ijkl}\nabla_l f - (\nabla_i f \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ik}) + \frac{R}{n(n-1)}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}). \quad (2.36)$$

Ora, como

$$\begin{aligned} R_{ijkl}\nabla_l f &= W_{ijkl}\nabla_l f - 2(S \odot g)_{ijkl}\nabla_l f \\ &= W_{ijkl}\nabla_l f - S_{il}\nabla_l f g_{jk} - S_{jk}\nabla_i f + S_{ik}\nabla_j f + S_{jl}\nabla_l f g_{ik}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

temos ao substituir (2.37) em (2.36)

$$\begin{aligned} fC_{ijk} &= W_{ijkl}\nabla_l f - S_{il}\nabla_l f g_{jk} - S_{jk}\nabla_i f + S_{ik}\nabla_j f + S_{jl}\nabla_l f g_{ik} \\ &\quad - (\nabla_i f \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ik}) + \frac{R}{n(n-1)}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Agora, como $S = \frac{1}{n-2}(\text{Ric} - \frac{1}{2(n-1)}Rg)$, segue que

$$\begin{aligned} -S_{il}\nabla_l f g_{jk} &= -\frac{1}{n-2}R_{il}\nabla_l f g_{jk} + \frac{R}{2(n-2)(n-1)}g_{il}\nabla_l f g_{jk} \\ -S_{jl}\nabla_l f g_{ik} &= -\frac{1}{n-2}R_{jl}\nabla_l f g_{ik} + \frac{R}{2(n-2)(n-1)}g_{jl}\nabla_l f g_{ik} \\ S_{ik}\nabla_j f &= \frac{1}{n-2}R_{ik}\nabla_j f - \frac{R}{2(n-2)(n-1)}g_{ik}\nabla_j f \\ S_{jl}\nabla_l f g_{ik} &= \frac{1}{n-2}R_{jl}\nabla_l f g_{ik} - \frac{R}{2(n-2)(n-1)}g_{jl}\nabla_l f g_{ik} \end{aligned}$$

Assim, retornando a (2.38), tem-se que

$$\begin{aligned} fC_{ijk} &= W_{ijkl}\nabla_l f + \frac{1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f + R_{jl}\nabla_l f g_{ik} - R_{il}\nabla_l f g_{jk} - R_{jk}\nabla_i f) \\ &\quad - \frac{R}{2(n-2)(n-1)}(\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk}) - (\nabla_i f \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ik}) \\ &\quad - \frac{R}{n(n-1)}(\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk}). \end{aligned}$$

Consequentemente, podemos inferir que

$$\begin{aligned} fC_{ijk} &= W_{ijkl}\nabla_l f + \frac{1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f) + \frac{1}{n-2}(R_{jl}\nabla_l f g_{ik} - R_{il}\nabla_l f g_{jk}) \\ &\quad - \frac{2R}{n(n-2)}(\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk}) - (\nabla_i f \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ik}). \end{aligned}$$

Em seguida, usando o fato que $R_{ij} = \overset{\circ}{R}_{ij} + \frac{R}{n}g_{ij}$,

$$\begin{aligned}
fC_{ijk} &= W_{ijkl}\nabla_l f + \frac{1}{n-2}(\overset{\circ}{R}_{ik}\nabla_j f + \frac{R}{n}g_{ik}\nabla_j f - \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i f - \frac{R}{n}g_{jk}\nabla_i f) \\
&\quad + \frac{1}{n-2}(\overset{\circ}{R}_{jl}\nabla_l f g_{ik} + \frac{R}{n}g_{jl}\nabla_l f g_{ik} - \overset{\circ}{R}_{il}\nabla_l f g_{jk} - \frac{R}{n}g_{il}\nabla_l f g_{jk}) \\
&\quad - \frac{2R}{n(n-2)}(\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk}) - (\nabla_i f \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ik}) \\
&= W_{ijkl}\nabla_l f + \frac{1}{n-2}(\overset{\circ}{R}_{ik}\nabla_j f - \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i f) + \frac{R}{n(n-2)}(\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk}) \\
&\quad + \frac{1}{n-2}(\overset{\circ}{R}_{jl}\nabla_l f g_{ik} - \overset{\circ}{R}_{il}\nabla_l f g_{jk}) + \frac{R}{n(n-2)}(\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk}) \\
&\quad - \frac{2R}{n(n-2)}(\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk}) - (\nabla_i f \overset{\circ}{R}_{jk} - \nabla_j f \overset{\circ}{R}_{ik}),
\end{aligned}$$

isto é, inferimos que

$$\begin{aligned}
fC_{ijk} &= W_{ijkl}\nabla_l f + \frac{1}{n-2}(\overset{\circ}{R}_{ik}\nabla_j f - \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i f) + (\overset{\circ}{R}_{ik}\nabla_j f - \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i f) \\
&\quad + \frac{1}{n-2}(\overset{\circ}{R}_{jl}\nabla_l f g_{ik} - \overset{\circ}{R}_{il}\nabla_l f g_{jk}) \\
&= W_{ijkl}\nabla_l f + \frac{n-1}{n-2}(\overset{\circ}{R}_{ik}\nabla_j f - \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i f) + \frac{1}{n-2}(\overset{\circ}{R}_{jl}\nabla_l f g_{ik} - \overset{\circ}{R}_{il}\nabla_l f g_{jk}) \\
&= T_{ijk} + W_{ijkl}\nabla_l f.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$fC_{ijk} = T_{ijk} + W_{ijkl}\nabla_l f.$$

■

Em seguida, para demonstrar o próximo lema é necessário lembrar que para $(0, 2)$ -tensor α , tem-se que

$$\nabla_i \nabla_j \alpha_{kl} - \nabla_j \nabla_i \alpha_{kl} = R_{ijks} \alpha_{sl} + R_{ijls} \alpha_{ks}. \quad (2.39)$$

Lema 2.12. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e f uma função suave em M^n satisfazendo $f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f$. Então,*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{div}(f \nabla |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2) &= f \nabla |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{n-2}{2n} f \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 R \rangle + \frac{1}{n} \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 \Delta f \rangle \\
&\quad - \frac{1}{2} \langle \nabla |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2, \nabla f \rangle + \frac{n^2 - 2n + 2}{2n(n-1)} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla R, \nabla f) \\
&\quad + \frac{n-2}{2(n-1)} f |C|^2 - \frac{n-2}{2(n-1)} C_{klj} W_{klji} \nabla_i f + |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 \left(\frac{Rf}{n} - \Delta f \right) \\
&\quad + 2f \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{lk} \overset{\circ}{R}_{jl} - 2f R_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} + \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f.
\end{aligned}$$

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\text{div}(f\nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2) &= \frac{1}{2}\nabla_i[f\nabla_i(\overset{\circ}{R}_{jk}\overset{\circ}{R}_{jk})] \\
&= \frac{1}{2}\nabla_i(f(2\overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk})) \\
&= \nabla_i(f\overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk}) \\
&= \nabla_i(f\overset{\circ}{R}_{jk})\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk} + f\overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i(\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk}) \\
&= \nabla_i f\overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk} + f\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk} + f\overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i(\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk}) \\
&= f|\nabla\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i(f\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk}),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\text{div}(f\nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2) = f|\nabla\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i(f\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk}). \quad (2.40)$$

Por outro lado, usando o fato que $f\overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f$ e a identidade de Ricci,

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i(f\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk}) &= \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i[\nabla_i(f\overset{\circ}{R}_{jk}) - \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i f] \\
&= \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i\left[\nabla_i(\nabla_j\nabla_k f - \frac{\Delta f}{n}g_{jk}) - \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i f\right] \\
&= \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i\nabla_i(\nabla_j\nabla_k f - \frac{\Delta f}{n}g_{jk}) - \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i(\overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i f) \\
&= \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i\nabla_i(\nabla_j\nabla_k f - \frac{\Delta f}{n}g_{jk}) - \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i f - \overset{\circ}{R}_{jk}\overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i\nabla_i f \\
&= \overset{\circ}{R}_{jk}(\nabla_i\nabla_i\nabla_j\nabla_k - \frac{1}{n}\Delta(\Delta f)g_{jk}) - \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i f - |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2\Delta f \\
&= \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i(\nabla_i\nabla_j\nabla_k f + R_{ijkl}\nabla_l f) - \frac{1}{n}\Delta(\Delta f)\overset{\circ}{R}_{jk}g_{jk} \\
&\quad - \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i f - |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2\Delta f \\
&= \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i\nabla_j\nabla_i\nabla_k f + \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i R_{ijkl}\nabla_l f + \overset{\circ}{R}_{jk}R_{ijkl}\nabla_i\nabla_l f \\
&\quad - \frac{1}{2}\langle\nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2, \nabla f\rangle - |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2\Delta f,
\end{aligned}$$

pois $\nabla_i(\overset{\circ}{R}_{jk}\overset{\circ}{R}_{jk}) = 2\overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk}$, daí segue que $\overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk} = \frac{1}{2}\nabla_i(\overset{\circ}{R}_{jk}\overset{\circ}{R}_{jk})$. Em seguida, usando novamente a identidade de Ricci, (1.17), (1.16) e o fato de $f\overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i(f\nabla_i\overset{\circ}{R}_{jk}) &= \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i\nabla_j(\nabla_k\nabla_i f) + \overset{\circ}{R}_{jk}\nabla_i R_{ijkl}\nabla_l f + \overset{\circ}{R}_{jk}R_{ijkl}\nabla_i\nabla_l f \\
&\quad - \frac{1}{2}\langle\nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2, \nabla f\rangle - |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2\Delta f,
\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i (f \nabla_i \overset{\circ}{R}_{jk}) &= \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i \nabla_j (f \overset{\circ}{R}_{jk} + \frac{\Delta f}{n} g_{ik}) + \overset{\circ}{R}_{jk} (\nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk}) \nabla_l f \\
&\quad + \overset{\circ}{R}_{jk} R_{ijkl} (f \overset{\circ}{R}_{il} + \frac{\Delta f}{n} g_{il}) - \frac{1}{2} \langle \nabla | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2, \nabla f \rangle - | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2 \Delta f \\
&= \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i (f \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} + \overset{\circ}{R}_{ik} \nabla_j f + \frac{1}{n} \nabla_j \Delta f g_{ik}) + \overset{\circ}{R}_{jk} C_{klj} \nabla_l f \\
&\quad + \frac{1}{2(n-1)} \overset{\circ}{R}_{jk} [\nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{kj}] \nabla_l f + f R_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{il} \\
&\quad - \frac{\Delta f}{n} \overset{\circ}{R}_{jk} R_{ijkl} g_{il} - \frac{1}{2} \langle \nabla | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2, \nabla f \rangle - | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2 \Delta f.
\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i (f \nabla_i \overset{\circ}{R}_{jk}) &= \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i (f \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} + \overset{\circ}{R}_{ik} \nabla_j f + \frac{1}{n} \nabla_j \Delta f g_{ik}) + \overset{\circ}{R}_{jk} C_{klj} \nabla_l f \\
&\quad + \frac{1}{2(n-1)} \overset{\circ}{R}_{jk} [\nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{kj}] \nabla_l f + f R_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{il} \\
&\quad - \frac{\Delta f}{n} \overset{\circ}{R}_{jk} R_{jk} - \frac{1}{2} \langle \nabla | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2, \nabla f \rangle - | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2 \Delta f \\
&= f \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} + \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} \nabla_i f + \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i \overset{\circ}{R}_{ik} \nabla_j f \\
&\quad + \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{ik} \nabla_i \nabla_j f + \frac{1}{n} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i \nabla_j \Delta f g_{ik} + C_{klj} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_l f \\
&\quad + \frac{1}{2(n-1)} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_k R_{jl} \nabla_l f - \frac{1}{2(n-1)} \overset{\circ}{R}_{ik} \nabla_l R_{kj} \nabla_l f \\
&\quad - f R_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} - \frac{\Delta f}{n} | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2 - \frac{1}{2} \langle \nabla | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2, \nabla f \rangle - | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2 \Delta f \\
&= f \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} + \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} \nabla_i f + \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i \overset{\circ}{R}_{ik} \nabla_j f \\
&\quad + \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{ik} \nabla_i \nabla_j f + \frac{1}{n} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i \nabla_j \Delta f g_{ik} + C_{klj} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_l f \\
&\quad + \frac{1}{2(n-1)} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_k R \nabla_j f - f R_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} \\
&\quad - \frac{n+1}{n} | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2 \Delta f - \frac{1}{2} \langle \nabla | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2, \nabla f \rangle. \tag{2.41}
\end{aligned}$$

Agora, tomando $\alpha = \overset{\circ}{\text{Ric}}$ em (2.39) tem-se

$$\nabla_i \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} - \nabla_j \nabla_i \overset{\circ}{R}_{ik} = R_{ijks} \overset{\circ}{R}_{il} + R_{ijls} \overset{\circ}{R}_{il}. \tag{2.42}$$

Combinando (2.42) com (1.19) e a anti-simetria do tensor de Cotton, segue que

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i (f \nabla_i \overset{\circ}{R}_{jk}) &= f \overset{\circ}{R}_{jk} [\nabla_j \nabla_i \overset{\circ}{R}_{ik} + R_{ijil} \overset{\circ}{R}_{il}] + \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f \\
&+ \frac{n-2}{2n} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_k R \nabla_j f + \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{ik} [f \overset{\circ}{R}_{ij} + \frac{\Delta f}{n} g_{ik}] \\
&+ \frac{1}{n} \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \nabla^2 \Delta f \rangle + \frac{1}{2} C_{klj} [\overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_l f - \overset{\circ}{R}_{jl} \nabla_k f] \\
&+ \frac{1}{2(n-1)} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_k R \nabla_j f - f R_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} \\
&- \frac{n+1}{n} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 \Delta f - \frac{1}{2} \langle \nabla |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2, \nabla f \rangle
\end{aligned}$$

Substituindo (1.19) e (2.35) chegamos a

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i (f \nabla_i \overset{\circ}{R}_{jk}) &= \frac{n-2}{2n} f \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_j \nabla_k R + f \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{lk} \overset{\circ}{R}_{jl} \\
&- f R_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} + \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f \\
&+ \frac{n^2 - 2n + 2}{2n(n-1)} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_k R \nabla_j f + f \overset{\circ}{R}_{ij} \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{ik} \\
&+ \frac{\Delta f}{n} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{1}{n} \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \nabla^2 \Delta f \rangle \\
&+ \frac{n-2}{2(n-1)} C_{klj} T_{klj} - f R_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} \\
&- \frac{n+1}{n} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 \Delta f - \frac{1}{2} \langle \nabla |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2, \nabla f \rangle,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i (f \nabla_i \overset{\circ}{R}_{jk}) &= \frac{n-2}{2n} f \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \nabla^2 R \rangle + f \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{lk} (\overset{\circ}{R}_{jl} + \frac{R}{n} g_{jl}) \\
&- 2f R_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} + \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f \\
&+ \frac{n^2 - 2n + 2}{2n(n-1)} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_k R \nabla_j f + f \overset{\circ}{R}_{ij} \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{ik} \\
&- |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 \nabla f + \frac{1}{n} \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \nabla^2 \Delta f \rangle \\
&+ \frac{n-2}{2(n-1)} C_{klj} T_{klj} - \frac{1}{2} \langle \nabla |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2, \nabla f \rangle,
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned}
\mathring{R}_{jk} \nabla_i (f \nabla_i \mathring{R}_{jk}) &= \frac{n-2}{2n} f \langle \mathring{\text{Ric}}, \mathring{\nabla}^2 R \rangle + f \mathring{R}_{jk} \mathring{R}_{lk} \mathring{R}_{jl} \\
&\quad + \frac{fR}{n} |\mathring{\text{Ric}}|^2 - 2f R_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} \\
&\quad + \nabla_j \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jk} \nabla_i f + \frac{n^2 - 2n + 2}{2n(n-1)} \mathring{R}_{jk} \nabla_k R \nabla_j f \\
&\quad + f \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{ij} \mathring{R}_{jk} - |\mathring{\text{Ric}}|^2 \Delta f + \frac{1}{n} \langle \mathring{\text{Ric}}, \mathring{\nabla}^2 \Delta f \rangle \\
&\quad + \frac{n-2}{2(n-1)} C_{klj} T_{klj} - \frac{1}{2} \langle \nabla |\mathring{\text{Ric}}|^2, \nabla f \rangle.
\end{aligned}$$

Dáí, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathring{R}_{jk} \nabla_i (f \nabla_i \mathring{R}_{jk}) &= \frac{n-2}{2n} f \langle \mathring{\text{Ric}}, \mathring{\nabla}^2 R \rangle + 2f \mathring{R}_{jk} \mathring{R}_{lk} \mathring{R}_{jl} - 2f R_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} \\
&\quad + \nabla_j \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} \nabla_i f + \frac{n^2 - 2n + 2}{2n(n-1)} \mathring{R}_{jk} \nabla_k R \nabla_j f |\mathring{\text{Ric}}|^2 \left(\frac{Rf}{n} - \Delta f \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \langle \nabla |\mathring{\text{Ric}}|^2, \nabla f \rangle + \frac{n-2}{2(n-1)} C_{klj} T_{klj}.
\end{aligned}$$

Agora, usando o Lema [2.11](#) na igualdade anterior, tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathring{R}_{jk} \nabla_i (f \nabla_i \mathring{R}_{jk}) &= \frac{n-2}{2n} f \langle \mathring{\text{Ric}}, \mathring{\nabla}^2 R \rangle + 2f \mathring{R}_{jk} \mathring{R}_{lk} \mathring{R}_{jl} - 2f R_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} \\
&\quad + \nabla_j \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jk} \nabla_i f + \frac{n^2 - 2n + 2}{2n(n-1)} \mathring{R}_{jk} \nabla_k R \nabla_j f + |\mathring{\text{Ric}}|^2 \left(\frac{Rf}{n} - \Delta f \right) \\
&\quad + \frac{1}{n} \langle \mathring{\text{Ric}}, \mathring{\nabla}^2 \Delta f \rangle - \frac{1}{2} \langle \nabla |\mathring{\text{Ric}}|^2, \nabla f \rangle + \frac{n-2}{2(n-1)} C_{klj} [f C_{klj} - W_{klj} \nabla_i f] \\
&= \frac{n-2}{2n} f \langle \mathring{\text{Ric}}, \mathring{\nabla}^2 R \rangle + \frac{1}{n} \langle \mathring{\text{Ric}}, \mathring{\nabla}^2 \Delta f \rangle - \frac{1}{2} \langle \nabla |\mathring{\text{Ric}}|^2, \nabla f \rangle \\
&\quad + |\mathring{\text{Ric}}|^2 \left(\frac{Rf}{n} - \Delta f \right) + \frac{n^2 - 2n + 2}{2n(n-1)} \mathring{\text{Ric}} (\nabla R, \nabla f) + \frac{n-2}{2(n-1)} C_{klj} W_{klj} \nabla_i f \\
&\quad + 2f \mathring{R}_{jk} \mathring{R}_{lk} \mathring{R}_{jl} - 2f R_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} + \nabla_j \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jk} \nabla_i f. \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Por fim, juntando [\(2.43\)](#) com [\(2.40\)](#)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{div}(f \nabla |\mathring{\text{Ric}}|^2) &= f \nabla |\mathring{\text{Ric}}|^2 + \frac{n-2}{2n} f \langle \mathring{\text{Ric}}, \mathring{\nabla}^2 R \rangle + \frac{1}{n} \langle \mathring{\text{Ric}}, \mathring{\nabla}^2 \Delta f \rangle \\
&\quad - \frac{1}{2} \langle \nabla |\mathring{\text{Ric}}|^2, \nabla f \rangle + \frac{n^2 - 2n + 2}{2n(n-1)} \mathring{\text{Ric}} (\nabla R, \nabla f) \\
&\quad + \frac{n-2}{2(n-1)} f |C|^2 - \frac{n-2}{2(n-1)} C_{klj} W_{klji} \nabla_i f + |\mathring{\text{Ric}}|^2 \left(\frac{Rf}{n} - \Delta f \right) \\
&\quad + 2f \mathring{R}_{jk} \mathring{R}_{lk} \mathring{R}_{jl} - 2f R_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} + \nabla_j \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jk} \nabla_i f,
\end{aligned}$$

terminando assim a demonstração do lema. ■

Agora, temos condições de provar o próximo teorema, um resultado que estabelece uma fórmula do tipo Bochner para variedades Riemannianas satisfazendo $f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f$.

Teorema 2.13. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e f uma função suave em M^n satisfazendo $f \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f$. Então,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{div} \left(f \nabla |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 - \frac{n-2}{n-1} f \overset{\circ}{\text{Ric}} (\nabla R) \right) &= f |\nabla \overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 - \frac{(n-2)^2}{4n(n-1)} f |\nabla R|^2 + \frac{n-2}{n-1} f |C|^2 \\ &\quad + \left(\frac{Rf}{n-1} - \Delta f \right) |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 - \frac{n-2}{n-1} C_{klj} W_{klji} \nabla_i f \\ &\quad + \frac{2n}{n-2} f \cdot \text{tr}(\overset{\circ}{\text{Ric}}^3) - 2f W_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl}, \end{aligned}$$

onde W_{ijkl} e C_{ijk} representam os tensores de Weyl e Cotton, respectivamente.

Demonstração: Inicialmente, observe que

$$\nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} = \nabla_i \overset{\circ}{R}_{jk} - C_{ijk} + \frac{n-2}{2n(n-1)} (\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}). \quad (2.44)$$

De fato, por definição, $C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)} (\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik})$. Daí,

$$\nabla_j R_{ik} = \nabla_i R_{jk} - C_{ijk} - \frac{1}{2(n-1)} (\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik})$$

isso implica que

$$\nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} + \frac{1}{n} \nabla_j R g_{ik} = \nabla_i \overset{\circ}{R}_{jk} + \frac{1}{n} \nabla_i R g_{ik} - \frac{1}{2(n-1)} \nabla_i R g_{ik} + \frac{1}{2(n-1)} \nabla_j R g_{ik} - C_{ijk},$$

ou ainda

$$\nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} = \nabla_i \overset{\circ}{R}_{jk} - C_{ijk} + \frac{n-2}{2n(n-1)} (\nabla_i R g_{ik} - \nabla_j R g_{ik})$$

isso nos permite inferir

$$\begin{aligned} \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} (\nabla_j \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f) &= \nabla_i \overset{\circ}{R}_{jk} (\nabla_j \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f) - C_{ijk} (\nabla_j \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f) \\ &\quad + \frac{n-2}{2n(n-1)} (\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}) (\nabla_i R g_{jk} \nabla_i f), \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} (\nabla_j \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f) &= \nabla_i \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_j \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f - C_{ijk} \nabla_j \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f \\
&\quad + \frac{n-2}{2n(n-1)} (\nabla_i R g_{jk} \nabla_i R g_{jk} \nabla_i f - \nabla_j R g_{ik} \nabla_i R g_{jk} \nabla_i f) \\
&= \frac{1}{2} \langle \nabla | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2, \nabla f \rangle - \frac{1}{2} C_{ijk} (\overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f - \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_j f) \\
&\quad - \frac{n-2}{2n(n-1)} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_j R \nabla_i f,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f = \frac{1}{2} \langle \nabla | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2, \nabla f \rangle - \frac{1}{2} C_{ijk} (\overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f - \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_j f) - \frac{n-2}{2n(n-1)} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_j R \nabla_i f,$$

onde usamos as propriedades de anti-simetria do tensor de Cotton. Em seguida, usando

(2.35) em conjunto com o Lema 2.11

$$\begin{aligned}
\nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f &= \frac{1}{2} \langle \nabla | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2, \nabla f \rangle - \frac{1}{2} C_{ijk} (\overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f - \overset{\circ}{R}_{ik} \nabla_j f) \\
&\quad - \frac{n-2}{2n(n-1)} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_j R \nabla_i f \\
&= \frac{1}{2} \langle \nabla | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2, \nabla f \rangle + \frac{n-2}{2(n-1)} C_{ijk} T_{ijk} - \frac{n-2}{2n(n-1)} \overset{\circ}{R}_{ij} \nabla_j R \nabla_i f \\
&= \frac{1}{2} \langle \nabla | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2, \nabla f \rangle + \frac{n-2}{2(n-1)} C_{ijk} (f C_{ijk} - W_{ijkl} \nabla_l f) \\
&\quad - \frac{n-2}{2n(n-1)} \overset{\circ}{R}_{ij} \nabla_j R \nabla_i f \\
&= \frac{1}{2} \langle \nabla | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2, \nabla f \rangle + \frac{n-2}{2(n-1)} f |C|^2 - \frac{n-2}{2(n-1)} C_{ijk} W_{ijkl} \nabla_l f \\
&\quad - \frac{n-2}{2n(n-1)} \overset{\circ}{R}_{ij} \nabla_j R \nabla_i f,
\end{aligned} \tag{2.45}$$

donde, substituindo (2.45) no Lema 2.12 produz

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{div} \left(f \nabla | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2 \right) &= f | \nabla \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2 + \frac{n-2}{2n} f \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 R \rangle + \frac{1}{n} \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 \Delta f \rangle \\
&\quad - \frac{1}{2} \langle \nabla | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2, \nabla f \rangle + \frac{n^2 - 2n + 2}{2n(n-1)} \overset{\circ}{\text{Ric}} (\nabla R, \nabla f) + \frac{n-2}{2(n-1)} f |C|^2 \\
&\quad - \frac{n-2}{2(n-1)} C_{klj} W_{klji} \nabla_i f + | \overset{\circ}{\text{Ric}} |^2 \left(\frac{Rf}{n} - \Delta f \right) + 2f \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{jl} \overset{\circ}{R}_{lk} \\
&\quad - 2f R_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} + \nabla_j \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jk} \nabla_i f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f|\nabla \overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{n-2}{2n}f\langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 R \rangle + \frac{1}{n}\langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 \Delta f \rangle \\
&\quad - \frac{1}{2}\langle \nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2, \nabla f \rangle + \frac{n^2-2n+2}{2n(n-1)}\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla R, \nabla f) + \frac{n-2}{2(n-1)}f|C|^2 \\
&\quad - \frac{n-2}{2(n-1)}C_{klj}W_{klji}\nabla_i f + |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2\left(\frac{Rf}{n} - \Delta f\right) + 2f\overset{\circ}{R}_{jk}\overset{\circ}{R}_{jl}\overset{\circ}{R}_{lk} \\
&\quad - 2fR_{ijkl}\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl} + \frac{1}{2}\langle \nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2, \nabla f \rangle + \frac{n-2}{2(n-1)}f|C|^2 \\
&\quad - \frac{n-2}{2(n-1)}C_{ijk}W_{ijkl}\nabla_l f - \frac{n-2}{2n(n-1)}\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla R, \nabla f),
\end{aligned}$$

que pode ser reescrito

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\text{div}(f\nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2) &= f|\nabla \overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{n-2}{2n}f\langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 R \rangle + \frac{1}{n}\langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 \Delta f \rangle \\
&\quad + \frac{n-2}{2(n-1)}f|C|^2 + \frac{n^2-3n+4}{2n(n-1)}\overset{\circ}{R}(\nabla R, \nabla f) \\
&\quad + |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2\left(\frac{Rf}{n} - \Delta f\right) - \frac{n-2}{n-1}C_{klj}W_{klji}\nabla_i f \\
&\quad + 2f\overset{\circ}{R}_{jk}\overset{\circ}{R}_{lk}\overset{\circ}{R}_{jl} - 2fR_{ijkl}\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl}, \tag{2.46}
\end{aligned}$$

onde foi usado a anti-simetria dos tensores de Cotton e Weyl. Por outro lado, usando (2.31) tem-se

$$\begin{aligned}
\nabla_i \nabla_j \Delta f &= \nabla_i \left(\frac{n-2}{2(n-1)}f\nabla_j R - \frac{R}{n-1}\nabla_j f \right) \\
&= \frac{n-2}{2(n-1)}f\nabla_i \nabla_j R + \frac{n-2}{2(n-1)}\nabla_i f \nabla_j R \\
&\quad - \frac{1}{n-1}R\nabla_i \nabla_j f - \frac{1}{n-1}\nabla_i R \nabla_j f.
\end{aligned}$$

Usando esta expressão deduzimos

$$\begin{aligned}
\langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 \Delta f \rangle &= \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \nabla \Delta f \rangle = \overset{\circ}{R}_{ij} \nabla_i \nabla_j \Delta f \\
&= \frac{n-2}{2(n-1)}f\overset{\circ}{R}_{ij}\nabla_i \nabla_j R + \frac{n-2}{2(n-1)}\overset{\circ}{R}_{ij}\nabla_i f \nabla_j R - \frac{R}{n-1}\overset{\circ}{R}_{ij}\nabla_i \nabla_j f \\
&\quad - \frac{1}{n-1}\overset{\circ}{R}_{ij}\nabla_i R \nabla_j f,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 \Delta f \rangle &= \frac{n-2}{2(n-1)} f \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 R \rangle + \frac{n-2}{2(n-1)} \overset{\circ}{\text{Ric}} (\nabla f, \nabla R) - \frac{R}{n-1} \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 f \rangle \\
&\quad - \frac{1}{n-1} \overset{\circ}{\text{Ric}} (\nabla R, \nabla f) \\
&= \frac{n-2}{2(n-1)} f \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 R \rangle + \frac{n-2}{2(n-1)} \overset{\circ}{\text{Ric}} (\nabla f, \nabla R) - \frac{R}{n-1} \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 f \rangle \\
&\quad - \frac{1}{n-1} \overset{\circ}{\text{Ric}} (\nabla R, \nabla f) \\
&= \frac{n-2}{2(n-1)} f \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 R \rangle + \frac{n-4}{2(n-1)} \overset{\circ}{\text{Ric}} (\nabla f, \nabla R) - \frac{R}{n-1} \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 f \rangle \\
&= \frac{n-2}{2(n-1)} f \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 R \rangle + \frac{n-4}{2(n-1)} \overset{\circ}{\text{Ric}} (\nabla f, \nabla R) - \frac{R}{n-1} \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, f \overset{\circ}{\text{Ric}} \rangle \\
&= \frac{n-2}{2(n-1)} f \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 R \rangle - \frac{fR}{n-1} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{n-4}{2(n-1)} \overset{\circ}{\text{Ric}} (\nabla R, \nabla f)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 \Delta f \rangle &= \frac{n-2}{2(n-1)} f \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 R \rangle - \frac{fR}{n-1} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 \\
&\quad + \frac{n-4}{2(n-1)} \overset{\circ}{\text{Ric}} (\nabla R, \nabla f).
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Substituindo (2.47) em (2.46)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{div}(f \nabla |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2) &= f |\nabla \overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{n-2}{2(n-1)} f \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 R \rangle + \frac{1}{n} \left(\frac{n-2}{2(n-1)} f \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 R \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{fR}{n-1} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{n-4}{2(n-1)} \overset{\circ}{\text{Ric}} (\nabla R, \nabla f) \right) \\
&\quad + \frac{n-2}{2(n-1)} f |C|^2 + \frac{n^2-3n+4}{2n(n-1)} \overset{\circ}{R} (\nabla R, \nabla f) \\
&\quad + |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 \left(\frac{Rf}{n} - \Delta f \right) - \frac{n-2}{n-1} C_{klj} W_{klji} \nabla_i f \\
&\quad + 2f \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{lk} \overset{\circ}{R}_{jl} - 2f R_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl},
\end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\text{div}(f\nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2) &= f|\nabla\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{n-2}{2(n-1)}f\langle\overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 R\rangle + \frac{n-2}{2n(n-1)}f\langle\overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 R\rangle \\
&\quad - \frac{fR}{n(n-1)}|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{n-4}{2n(n-1)}\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla R, \nabla f) \\
&\quad + \frac{n-2}{2(n-1)}f|C|^2 + \frac{n^2-3n+4}{2n(n-1)}\overset{\circ}{R}(\nabla R, \nabla f) \\
&\quad + |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2\left(\frac{Rf}{n} - \Delta f\right) - \frac{n-2}{n-1}C_{klj}W_{klji}\nabla_i f \\
&\quad + 2f\overset{\circ}{R}_{jk}\overset{\circ}{R}_{lk}\overset{\circ}{R}_{jl} - 2fR_{ijkl}\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl}.
\end{aligned}$$

A partir do qual se segue

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\text{div}(f\nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2) &= f|\nabla\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{n-2}{2(n-1)}f\langle\overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla}^2 R\rangle \\
&\quad + |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2\left(\frac{n-2}{n(n-1)}Rf - \Delta f\right) + \frac{n-2}{2(n-1)}\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla R, \nabla f) + \frac{n-2}{n-1}f|C|^2 \\
&\quad - \frac{n-2}{n-1}C_{klj}W_{klji}\nabla_i f + 2f\overset{\circ}{R}_{jk}\overset{\circ}{R}_{lk}\overset{\circ}{R}_{jl} - 2fR_{ijkl}\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl}. \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Além disso, de (1.13) tem-se

$$\begin{aligned}
R_{ijkl}\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl} &= \left(W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(R_{il}g_{jk} + R_{jk}g_{il} - R_{ik}g_{jl} - R_{jl}g_{ik})\right) \\
&\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl} \\
&= W_{ijkl}\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl} + \frac{1}{n-2}(-R_{il}g_{jk}\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl} - R_{jk}g_{il}\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl}) \\
&\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}g_{il}g_{jk}\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl}.
\end{aligned}$$

Agora, depois de fazer os cálculos dos termos semelhantes, podemos inferir que

$$\begin{aligned}
&= W_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} - \frac{1}{n-2} (R_{il} \overset{\circ}{R}_{ij} \overset{\circ}{R}_{jl} + R_{jk} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{ji}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)} \overset{\circ}{R}_{ij} \overset{\circ}{R}_{ji} \\
&= W_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} - \frac{1}{n-2} (R_{il} \overset{\circ}{R}_{ij} \overset{\circ}{R}_{jl} + R_{jk} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{ji}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)} \overset{\circ}{R}_{ij} \overset{\circ}{R}_{ji} \\
&= W_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} - \frac{1}{n-2} (\overset{\circ}{R}_{il} \overset{\circ}{R}_{ij} \overset{\circ}{R}_{jl} + \frac{R}{n} \overset{\circ}{R}_{ij} \overset{\circ}{R}_{ij} + \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{ji} + \frac{R}{n} \overset{\circ}{R}_{ij} \overset{\circ}{R}_{ji}) \\
&\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)} \overset{\circ}{R}_{ij} \overset{\circ}{R}_{ij} \\
&= W_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} - \frac{1}{n-2} (2 \overset{\circ}{R}_{ij} \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{ik} + 2 \frac{R}{n} \overset{\circ}{R}_{ij} \overset{\circ}{R}_{ij}) \\
&\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 \\
&= W_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} - \frac{2}{n-2} \overset{\circ}{R}_{ij} \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{ik} - \frac{2R}{n(n-2)} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 \\
&\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 \\
&= W_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} - \frac{2}{n-2} \overset{\circ}{R}_{ij} \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{ik} - \frac{R}{n(n-1)} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$R_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} = W_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{R}_{jl} - \frac{2}{n-2} \overset{\circ}{R}_{ij} \overset{\circ}{R}_{jk} \overset{\circ}{R}_{ik} - \frac{R}{n(n-1)} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2. \quad (2.49)$$

Agora, tomando $\phi = f$, $T = \overset{\circ}{\text{Ric}}$ e $Z = \nabla f$ no Lema 1.8, inferimos que

$$\begin{aligned}
\text{div}(\overset{\circ}{\text{Ric}}(f \nabla R)) &= f(\text{div} \overset{\circ}{\text{Ric}})(\nabla R) + f \langle \nabla^2 R, \overset{\circ}{\text{Ric}} \rangle + \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nabla R) \\
&= f \frac{n-2}{2n} \nabla R \nabla R + f \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla^2} R \rangle + \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla R, \nabla f),
\end{aligned}$$

consequentemente,

$$f \langle \overset{\circ}{\text{Ric}}, \overset{\circ}{\nabla^2} R \rangle + \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla R, \nabla f) = \text{div}(f \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla R)) - \frac{n-2}{2n} f |\nabla R|^2 \quad (2.50)$$

Agora, substituindo (2.49) e (2.50) em (2.48), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\text{div}(f\nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2) &= f|\nabla\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{n-2}{2(n-1)}f\langle\overset{\circ}{\text{Ric}},\overset{\circ}{\nabla}^2R\rangle \\
&\quad + |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2\left(\frac{n-2}{n(n-1)}Rf - \Delta f\right) + \frac{n-2}{2(n-1)}\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla R, \nabla f) + \frac{n-2}{n-1}f|C|^2 \\
&\quad - \frac{n-2}{n-1}C_{klj}W_{klji}\nabla_i f + 2f\overset{\circ}{R}_{jk}\overset{\circ}{R}_{lk}\overset{\circ}{R}_{jl} - 2fR_{ijkl}\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl} \\
&= f|\nabla\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{n-2}{2(n-1)}\left(\text{div}(f\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla R) - \frac{n-2}{2n}f|\nabla R|^2)\right) \\
&\quad + \frac{n-2}{n-1}f|C|^2 + |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2\left(\frac{n-2}{n(n-1)}Rf - \Delta f\right) \\
&\quad - \frac{n-2}{n-1}C_{klj}W_{klji}\nabla_i f + 2f\overset{\circ}{R}_{jk}\overset{\circ}{R}_{lk}\overset{\circ}{R}_{jl} - 2fW_{ijkl}\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl} \\
&\quad + \frac{4}{n-2}f\overset{\circ}{R}_{ji}\overset{\circ}{R}_{jk}\overset{\circ}{R}_{ik} + \frac{2R}{n(n-1)}f|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2.
\end{aligned}$$

E, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\text{div}\left(f\nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 - \frac{n-2}{n-1}f\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla R)\right) &= f|\nabla\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 - \frac{(n-2)^2}{4n(n-1)}f|\nabla R|^2 + \frac{n-2}{n-1}f|C|^2 \\
&\quad + \left(\frac{Rf}{n-1} - \Delta f\right)|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 - \frac{n-2}{n-1}C_{klj}W_{klji}\nabla_i f \\
&\quad + \frac{2n}{n-2}f\overset{\circ}{R}_{ij}\overset{\circ}{R}_{jk}\overset{\circ}{R}_{ik} - 2fW_{ijkl}\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl}.
\end{aligned}$$

Finalizando a prova do teorema. ■

Finalmente, como consequência imediata do teorema anterior, vamos apresentar o resultado mais importante desta seção

Corolário 2.14. *Seja (M^3, g, f, ρ) um espaço-tempo fluido estático perfeito compacto com curvatura escalar constante positiva satisfazendo*

$$|\overset{\circ}{\text{Ric}}| < \frac{\sqrt{6}}{24}(R - 6\rho),$$

então M^3 é isométrica a uma bola geodésica na esfera $\mathbb{S}^3$.

Demonstração: Considere $n = 3$ e R constante no teorema anterior

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\text{div}(f\nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2) &= f|\nabla\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{1}{2}f|C|^2 \\
&\quad + \left(\frac{Rf}{2} - \Delta f\right)|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + 6f \cdot \text{tr}(\overset{\circ}{\text{Ric}}^3).
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Okumura (Lema 2.1 em [20]), inferimos que

$$6\text{tr}(\overset{\circ}{\text{Ric}}^3) \geq -\sqrt{6}|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^3. \quad (2.51)$$

Daí, da desigualdade (2.51) e de (2.2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\text{div}(f\nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2) &\geq f|\nabla\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{1}{2}f|C|^2 \\ &\quad + \left(\frac{Rf}{2} - \frac{Rf}{4} - \frac{3\rho}{2}f\right)|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 - \sqrt{6}f|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^3 \\ &= f|\nabla\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{1}{2}f|C|^2 \\ &\quad + \left(\frac{R}{2} - \frac{R}{4} - \frac{3\rho}{2}\right)f|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 - \sqrt{6}f|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^3, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\text{div}(f\nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2) \geq f|\nabla\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{1}{2}f|C|^2 + f\left(\frac{R}{4} - \frac{3}{2}\rho - \sqrt{6}|\overset{\circ}{\text{Ric}}|\right)|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2.$$

Ao integrar esta expressão sobre M , tem-se

$$0 \geq \int_M \left[f|\nabla\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{1}{2}f|C|^2 + f\left(\frac{R}{4} - \frac{3}{2}\rho - \sqrt{6}|\overset{\circ}{\text{Ric}}|\right)|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 \right] dV \geq 0,$$

isto é,

$$\int_M \left[f|\nabla\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + \frac{1}{2}f|C|^2 + f\left(\frac{R}{4} - \frac{3}{2}\rho - \sqrt{6}|\overset{\circ}{\text{Ric}}|\right)|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 \right] dV = 0,$$

pois como f é nula sobre o bordo de M , segue do teorema da divergência que

$$\int_M \frac{1}{2}\text{div}(f\nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2) dV = \frac{1}{2} \int_{\partial M} \langle f\nabla|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2, \nu \rangle dS = 0.$$

Dai segue que $\left(\frac{R}{4} - \frac{3}{2}\rho - \sqrt{6}|\overset{\circ}{\text{Ric}}|\right) = 0$ ou $|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 = 0$. Ora, por hipótese, temos que $|\overset{\circ}{\text{Ric}}| < \frac{\sqrt{6}}{24}(R - 6\rho)$, logo devemos ter $|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 = 0$, dai segue que (M^3, g) deve ser uma variedade de Einstein e, portanto, pela Proposição 2.9 (item 2), segue que M^3 é isométrica a uma bola geodésica na esfera $\mathbb{S}^3$. ■

O Corolário 2.14 é conhecido como resultado do tipo gap, ele garante que a bola geodésica na esfera $\mathbb{S}^3$ é o único espaço-tempo fluido estático perfeito compacto com curvatura escalar constante e positiva tal que a norma do tensor de Einstein $|\overset{\circ}{\text{Ric}}|$ encontra-se no intervalo $[0, \frac{\sqrt{6}}{24}(R - 6\rho)]$.

Observação 2.5. Note que no resultado anterior a curvatura escalar é constante, então

pela Proposição 2.1, tem-se que $\left(\frac{1}{2}R + \rho\right)f$ também será constante. Agora observe que $\left(\frac{1}{2}R + \rho\right)f = 0$ sobre ∂M , em particular, também vale a igualdade para o interior de M . Ora, como $f > 0$ no interior de M , inferimos que $\frac{1}{2}R + \rho = 0$, assim segue que $\rho = -\frac{1}{2}R$. Daí,

$$|\overset{\circ}{\text{Ric}}| < \frac{\sqrt{6}}{24}(R - 6\rho) = \frac{4\sqrt{6}}{24}R = \frac{\sqrt{6}}{6}R,$$

isto é,

$$|\overset{\circ}{\text{Ric}}| < \frac{\sqrt{6}}{6}R.$$

Por outro lado, fazendo $n = 3$ no Lema 2.2 de [13], inferimos que

$$|\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 \leq \frac{R^2}{6} \Rightarrow |\overset{\circ}{\text{Ric}}| \leq \frac{R}{\sqrt{6}},$$

ou seja,

$$|\overset{\circ}{\text{Ric}}| \leq \frac{\sqrt{6}}{6}R.$$

Portanto, pelo Lema 2.2 de [13], temos que a curvatura de Ricci da variedade (M^3, g, f, ρ) é não negativa.

A Observação 2.5 afirma que no Lema 2.2 de [13], a condição $|\overset{\circ}{\text{Ric}}| < \frac{\sqrt{6}}{24}(R - 6\rho)$ imposta no Corolário 2.14, implica que o tensor de Ricci é não negativo.

Capítulo 3

Variedades Riemannianas do tipo $(\lambda, n + m)$ –Einstein

O objetivo deste capítulo é estudar os artigos [9] e [12] que, de modo geral, tratam de variedades compactas com métricas $(\lambda, n + m)$ –Einstein. Primeiro, seguiremos a abordagem usada por Freitas e Santos [12] sobre as variedades $(\lambda, n + m)$ –Einstein generalizadas, compactas e com bordo, onde vamos fornecer alguns resultados de classificação topológica para a fronteira e alguns resultados de caracterizações para o hemisfério. Por conseguinte, a última parte deste trabalho refere-se ao artigo [9], em que serão vistos resultados para produtos warped Einstein compactos sem bordo, onde podem ser estendidos para produtos warped em variedades Einstein com bordo não vazio.

3.1 Estimativa de área e classificação topológica do bordo

Com o objetivo de retificar as notações, vamos considerar a seguinte definição de variedades $(\lambda, n + m)$ –Einstein generalizada (ver [12]).

Definição 3.1. *Uma variedade $(\lambda, n + m)$ –Einstein generalizada é uma tripla (M^n, g, f) , onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana, possivelmente com bordo, e f uma função suave em M tal que*

$$\nabla^2 f = \frac{f}{m} (\text{Ric} - \lambda g), \quad (3.1)$$

com $f > 0$ no interior de M e $f = 0$ sobre ∂M . Além disso, λ é uma função suave em M , em particular, (M^n, g, f) será chamada variedade $(\lambda, n + m)$ –Einstein se λ for constante.

Observação 3.1. Na equação (3.1) conseguimos inferir a seguinte equação

$$f \overset{\circ}{\text{Ric}} = m \overset{\circ}{\nabla}^2 f. \quad (3.2)$$

Assim, fazendo $m = 1$ e $\lambda = \frac{1}{n-1} \left(\frac{R}{2} - \rho \right)$, tem-se que um espaço-tempo fluido estático perfeito é um exemplo de uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizada.

Um exemplo clássico de variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein com bordo não-vazio e conexo é o hemisfério $\mathbb{S}_+^n$.

Exemplo 3.1 (O hemisfério). Considere o hemisfério $\mathbb{S}_+^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ dotado da métrica euclidiana. Seja $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ em que $|v| = 1$ e $f(x) = \langle x, v \rangle$ a função altura sobre $\mathbb{S}_+^n$. Agora, tomando $m \geq 1$ constante finita e $\lambda = m + n - 1$, temos que o hemisfério é compacto, orientável e uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein com bordo $\mathbb{S}^{n-1}$. De fato, considerando $\{e_i\}$ uma base de $T\mathbb{S}_+^n$, tem-se que

$$\begin{aligned} \langle e_i, \nabla f \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} x, v \rangle + \langle x, \bar{\nabla}_{e_i} v \rangle \\ &= \langle e_i, v \rangle + \langle x, 0 \rangle \\ &= \langle e_i, v \rangle. \end{aligned}$$

Logo, temos que $\nabla f = v^T$. Daí,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle &= \langle \bar{\nabla}_X v^T, Y \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X (v - \langle v, N \rangle N), Y \rangle \\ &= -\langle v, N \rangle \langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle \\ &= \langle v, N \rangle \langle A_N(X), Y \rangle. \end{aligned}$$

Assim $\nabla^2 f(X, Y) = \langle v, N \rangle \langle A_N(X), Y \rangle$. Se $N = x$ (vetor posição), segue que

$$A_N(X) = -X^T$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X, Y) &= \langle v, N \rangle \langle A_N(X), Y \rangle \\ &= \langle v, x \rangle \langle -X^T, Y \rangle \\ &= \langle v, x \rangle \langle X, Y \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla^2 f = -fg \quad (3.3)$$

Ora, como temos $\text{Ric} = (n-1)g$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{f}{m}(\text{Ric} - \lambda g) &= \frac{f}{m}((n-1)g - (m+n-1)g) \\ &= \frac{f}{m}((n-1-m-n+1)g) \\ &= -fg. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Portanto, de (3.3) e (3.4), segue que

$$\nabla^2 f = \frac{f}{m}(\text{Ric} - \lambda g).$$

Como queríamos mostrar.

No contexto de bordo desconexo, temos o cilindro $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, a]$ como exemplo de uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein com bordo não-vazio e desconexo.

Exemplo 3.2 (O cilindro). *Considere o cilindro $M = \mathbb{S}^{n-1} \times [0, a]$, com $a = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\lambda}}\pi$. Mostraremos que com a métrica $g = dt^2 + (\frac{n-2}{\lambda})g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ e a função potencial $f(t) = \text{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}}t\right)$, temos que M é uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein, compacta, orientável e com bordo não conexo (o bordo de M é a união de duas cópias de $\mathbb{S}^{n-1}$). Para provar isso, considere $\lambda > 0$ um número real e notar que $f > 0$ no interior de M e levar em conta que*

$$\partial M = \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\} \cup \mathbb{S}^{n-1} \times \left\{ \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\lambda}}\pi \right\} = \partial M_1 \cup \partial M_2.$$

Note que

$$\begin{cases} f = \text{sen}(0) = 0 & \text{sobre } \partial M_1, \\ f = \text{sen}(\pi) = 0 & \text{sobre } \partial M_2. \end{cases}.$$

Portanto, $f = 0$ sobre ∂M . Ora, como $f(t) = \text{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}}t\right)$, tem-se

$$\nabla f = \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}}t\right) \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}} \partial t.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla f &= X \left(\cos \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}} t \right) \right) \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}} \partial t \\
&= -\operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}} t \right) \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m}} \right)^2 \langle \partial t, X \rangle \partial t \\
&= -f(t) \left(\frac{\lambda}{m} \right) \langle \partial t, X \rangle \partial t.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\nabla^2 f(X, Y) = -f(t) \left(\frac{\lambda}{m} \right) \langle \partial t, X \rangle \langle \partial t, Y \rangle. \quad (3.5)$$

Agora, note que $g = dt^2 + \left(\frac{n-2}{\lambda}\right) g_{\mathbb{S}^{n-1}} = dt^2 + g_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}$, onde $r = \sqrt{\frac{n-2}{\lambda}}$. Além disso, como g é uma métrica produto, tem-se que $\operatorname{Ric}_M = \operatorname{Ric}_{\mathbb{R}} + \operatorname{Ric}_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}$. Dai segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}_M &= \operatorname{Ric}_{\mathbb{R}} + \operatorname{Ric}_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} \\
&= 0 + (n-2) \frac{\lambda}{n-2} g_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} \\
&= \lambda g_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{f}{m} (\operatorname{Ric} - \lambda g) &= \frac{f}{m} \left(\lambda g_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} - \lambda (dt^2 + g_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}) \right) \\
&= \frac{f}{m} (-\lambda dt^2) \\
&= -f \left(\frac{\lambda}{m} \right) dt^2.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{f}{m} (\operatorname{Ric} - \lambda g)(X, Y) = -f \left(\frac{\lambda}{m} \right) \langle \partial t, X \rangle \langle \partial t, Y \rangle. \quad (3.6)$$

Portanto, de (3.5) e (3.6), segue que

$$\nabla^2 f = \frac{f}{m} (\operatorname{Ric} - \lambda g).$$

Antes de mostrar e demonstrar o primeiro resultado desta seção e de [12], vamos apresentar duas proposições de muita importância para obter os principais resultados das próximas seções. A proposição seguinte é uma consequência imediata do Teorema 1.11.

Proposição 3.1. *Seja M uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizada compacta.*

Então,

$$\int_M \frac{f}{m} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV = \int_{\partial M} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nu) dS + \frac{2-n}{2n} \int_M \mathcal{L}_{\nabla f} R dV,$$

onde ν é um vetor normal com orientação externa em ∂M .

Demonstração: O resultado segue tomando $T = \overset{\circ}{\text{Ric}}$ e $X = \nabla f$ no Teorema 1.11. ■

É usual também chamar a Proposição 3.1 de *Identidade Integral de Pohozaev-Schoen*.

Proposição 3.2. *Seja M uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizada, compacta e com bordo conexo. Se M for uma variedade Einstein, então M é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$. Além disso, λ é constante e f é uma função altura no hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.*

Demonstração: Sendo M uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizada, temos de (3.1) que ∇f é um campo conforme ao longo de M . Portanto,

$$\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n} g. \quad (3.7)$$

Lembrando que $\text{div}(\nabla^2 f) = \nabla \Delta f + \text{Ric}(\nabla f)$ e considerando a divergência em (3.7) obtemos

$$\nabla \Delta f = -\frac{R}{n-1} \nabla f. \quad (3.8)$$

Com efeito, note que $\text{div}(\nabla^2 f) = \text{div}\left(\frac{\Delta f}{n} g\right)$. Daí,

$$\begin{aligned} \nabla \Delta f &= -\text{Ric}(\nabla f) + \frac{\nabla \Delta f}{n} \Rightarrow \frac{\nabla \Delta f}{n} - \nabla \Delta f = \text{Ric}(\nabla f) \\ &\Rightarrow \frac{1-n}{n} \nabla \Delta f = \text{Ric}(\nabla f), \end{aligned}$$

como $\overset{\circ}{\nabla}^2 f = 0$ temos que $\overset{\circ}{\text{Ric}} = 0$, logo $\text{Ric}(\nabla f) = \frac{R}{n} \nabla f$. Donde temos

$$\nabla \Delta f = -\frac{R}{n-1} \nabla f.$$

Agora, de (3.7) e (3.8), concluimos que

$$\nabla^2(\Delta f) = -\frac{R}{(n-1)n} \Delta f g.$$

Como Δf é não constante, temos que R é um autovalor diferente de zero de Δ com condição de contorno de Dirichlet e, portanto, $R > 0$. Levando em conta que $\Delta = 0$ ao longo de M , por [22], concluimos que M é o hemisfério de $\mathbb{S}^n$, com curvatura seccional

$c = \frac{R}{(n-1)n}$. Para mostrar que λ é constante, basta observar que segue do Lema 3 de [2]. Por fim, como $\frac{R}{n-1}$ é o primeiro autovalor de Δ com condição de contorno de Dirichlet e

$$\Delta f = -\frac{R}{n-1}f,$$

segue que f é uma função altura no hemisfério de $\mathbb{S}^n$. ■

Teorema 3.3. *Seja M uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizada, compacta e com bordo tal que $\mathcal{L}_{\nabla f}R \geq 0$. Então*

$$\sum_{\alpha} k_{\alpha} \int_{\partial M_{\alpha}} (nR_{\gamma}^{\alpha} + R(2-n)) dS \geq 0, \quad (3.9)$$

onde ∂M_{α} denota as componentes conexas de ∂M , R_{γ}^{α} é a curvatura escalar de ∂M_{α} , R é a curvatura escalar de M e $k_{\alpha} = |\nabla f|$ é constante ao longo de ∂M_{α} . Além disso, supondo que M tem fronteira conexa, a igualdade vale se, e somente se, M é isométrica a um hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.

Demonstração: Como, por hipótese, estamos supondo que $\mathcal{L}_{\nabla f}R \geq 0$, então pela Proposição 3.1 obtemos

$$\int_M \frac{f}{m} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV = \int_{\partial M} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nu) dS + \frac{2-n}{2n} \int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle dV.$$

Além disso, segue que

$$\int_M \frac{f}{m} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV \leq \int_{\partial M} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nu) dS. \quad (3.10)$$

Agora, tomando o vetor normal unitário com orientação externa sobre o bordo dado por $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, concluímos que ∂M é totalmente geodésica. Assim, pela equação de Gauss, constatamos que

$$R - 2\text{Ric}(\nu, \nu) = R_{\gamma}^{\alpha}$$

ao longo de cada componente conexa ∂M_{α} do bordo. Observe que temos $\nabla f = -\nu|\nabla f|$. Daí,

$$\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nu) = -|\nabla f| \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nu, \nu) = -|\nabla f| \left(\text{Ric}(\nu, \nu) - \frac{R}{n}g \right).$$

Da desigualdade (3.10) concluimos que

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_M \frac{f}{m} \left| \text{Ric} - \frac{R}{n} g \right| dV &\leq \int_{\partial M} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nu) dS \\
&= - \int_{\partial M} |\nabla f| \text{Ric}(\nu, \nu) dS + \frac{R}{n} \int_{\partial M} |\nabla f| dS \\
&= |\nabla f| \int_{\partial M} \left(\frac{R}{n} - \text{Ric}(\nu, \nu) \right) dS \\
&\leq \sum_{\alpha} k_{\alpha} \int_{\partial M_{\alpha}} \left(\frac{R}{n} - \text{Ric}(\nu, \nu) \right) dS.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
R - 2\text{Ric}(\nu, \nu) = R_{\gamma}^{\alpha} &\Rightarrow \text{Ric}(\nu, \nu) = \frac{R}{2} - \frac{R_{\gamma}^{\alpha}}{2} \\
&\Rightarrow -\text{Ric}(\nu, \nu) = \frac{R_{\gamma}^{\alpha}}{2} - \frac{R}{2},
\end{aligned}$$

segue que

$$0 \leq \int_M \frac{f}{m} \left| \text{Ric} - \frac{R}{n} g \right| dV \leq \sum_{\alpha} k_{\alpha} \int_{\partial M_{\alpha}} \frac{1}{2n} \left(nR_{\gamma}^{\alpha} + R(2-n) \right) dS, \quad (3.11)$$

onde $k_{\alpha} = |\nabla f|$ é constante ao longo de ∂M_{α} . Assim, da desigualdade (3.11), inferimos que

$$\sum_{\alpha} k_{\alpha} \int_{\partial M_{\alpha}} \left(nR_{\gamma}^{\alpha} + R(2-n) \right) dS \geq 0.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,

$$\int_M \frac{f}{m} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV = 0,$$

isto é, deve-se ter $\overset{\circ}{\text{Ric}} = 0$, ou seja, M é uma variedade de Einstein e, portanto, pela Proposição 3.2 tem-se que M é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$. ■

Observação 3.2. No teorema anterior, na desigualdade (3.9), temos um resultado muito interessante, pois fornece uma informação integral sobre a curvatura escalar intrínseca da fronteira ∂M . Além disso, nos permite ter o seguinte resultado de rigidez para o bordo de uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein:

Corolário 3.4. Seja M uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein, compacta, curvatura escalar contante $n(n-1)$, com bordo conexo. Se ∂M é isométrica a esfera $(n-1)$ dimensional, então M é um hemisfério de $\mathbb{S}^n$.

Demonstração: Suponhamos que ∂M é isométrica a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. Agora, considerando

$R_\gamma = (n-1)(n-2)$ e $R = n(n-1)$ no teorema anterior, temos que

$$\begin{aligned} |\nabla f| \int_{\partial M} (nR_\gamma + R(2-n)) dS &= |\nabla f| \int_{\partial M} (n(n-1)(n-2) + n(n-1)(2-n)) dS \\ &= |\nabla f| \int_{\partial M} (n(n-1)(n-2) - n(n-1)(n-2)) dS \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.3 segue que M é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$. ■

Observação 3.3. *Se considerarmos uma variedade Riemanniana M compacta cuja fronteira é totalmente geodésica e isométrica a esfera S^{n-1} , a conjectura de Min-Oo afirma que sendo a curvatura escalar de M constante igual a $n(n-1)$, tem-se que M é isométrica ao hemisfério S_+^n com sua métrica canônica. No entanto, em [6] é construído um contra-exemplo para essa conjectura em dimensão $n \geq 3$.*

Outra aplicação interessante do Teorema 3.3 é a seguinte caracterização topológica em dimensão $n = 3$ para o bordo em variedades $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizadas:

Corolário 3.5. *Se M^3 é uma variedade do tipo $(\lambda, 3+m)$ -Einstein generalizada, compacta com bordo conexo tal que $\mathcal{L}_{\nabla f} R \geq 0$ e curvatura escalar positiva. Então, ∂M é difeomorfa a uma esfera $\mathbb{S}^2$.*

Demonstração: Fazendo $n = 3$ no Teorema 3.3 e levando em conta que o bordo de M é conexo, temos que

$$\int_{\partial M} (3R_\gamma - R) dS \geq 0 \implies \int_{\partial M} 3R_\gamma dS \geq \int_{\partial M} R dS > 0. \quad (3.12)$$

Pelo teorema de Gauss-Bonnet, tem-se

$$\int_{\partial M} K_\gamma dS = 2\pi\chi(\partial M).$$

Agora usando o fato que a curvatura escalar $R_\gamma = 2K_\gamma$, temos que

$$\int_{\partial M} 3R_\gamma dS = 12\pi\chi(\partial M). \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) em (3.12) segue que

$$12\pi\chi(\partial M) \geq \int_{\partial M} R dS > 0.$$

Portanto, ∂M é difeomorfa a esfera. ■

Teorema 3.6. *Seja M uma variedade $(\lambda, n + m)$ -Einstein generalizada, compacta com bordo tal que $\mathcal{L}_{\nabla f} R \geq 0$ e $\inf R_\gamma > 0$ e $\widetilde{\text{Ric}} \geq \frac{R_\gamma}{(n-1)} g_{\partial M}$, onde $\widetilde{\text{Ric}}$ é o tensor de Ricci sobre ∂M e R_γ é a curvatura escalar sobre ∂M . Então,*

$$|\partial M|^\alpha (\inf R) \leq n(n-1) \omega_{n-1}^\alpha, \quad (3.14)$$

onde $\alpha = \frac{2}{n-1}$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M é isométrica a um hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.

Demonstração: Em primeiro lugar, observe que o valor de mínimo do conjunto dado por $\{\widetilde{\text{Ric}}(u, u); u \in TM; |u| = 1\}$ é atingido, considere esse valor igual a $(n-2)\delta$, para algum $\delta > 0$. Então temos que

$$\widetilde{\text{Ric}} \geq (n-2)\delta.$$

Pelo teorema de Bonnet-Myers, tem-se que

$$\text{diam}(\partial M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Ao mesmo tempo, pelo teorema de Bishop-Gromov

$$\left| B_{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}}^{\partial M} \right| \leq \left| \mathbb{S}_{g_\delta}^{n-1} \right|,$$

onde $g_\delta = \frac{1}{\delta} g_{\text{can}}$ em que g_{can} é a métrica canônica de $\mathbb{S}^{n-1}$. Como temos que

$$|\partial M| \leq \left| B_{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}}^{\partial M}(p) \right|$$

para todo $p \in \partial M$, inferimos que

$$|\partial M| \leq \left| \mathbb{S}_{g_\delta}^{n-1} \right|. \quad (3.15)$$

Além disso, como $g_\delta = \frac{1}{\delta} g_{\text{can}}$, temos que $\det(g_\delta) = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{n-1} \det(g_{\text{can}})$. Daí,

$$\sqrt{\det(g_\delta)} = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\det(g_{\text{can}})}.$$

Agora levando em consideração a definição de volume, temos ao integrar a última igualdade sobre a esfera

$$\text{vol}(\mathbb{S}_{g_\delta}^{n-1})^{\frac{2}{n-1}} = \left| \mathbb{S}_{g_\delta}^{n-1} \right|^{\frac{2}{n-1}} = \frac{1}{\delta} (\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}}, \quad (3.16)$$

onde ω_{n-1} denota o volume da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$. De (3.15) e (3.16), tem-se

$$|\partial M| \leq \delta^{-\frac{n-1}{2}} \omega_{n-1}. \quad (3.17)$$

Observe que existe v unitário tal que $\widetilde{\text{Ric}}(v, v) = (n-2)\delta$, como por hipótese $\widetilde{\text{Ric}} \geq \frac{R_\gamma}{n-1}$, tem-se

$$\delta \geq \frac{R_\gamma}{(n-2)(n-1)}. \quad (3.18)$$

Por outro lado, como $\mathcal{L}_{\nabla f} R \geq 0$, obtemos do Teorema 3.3

$$\int_M \frac{f}{m} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV \leq \int_{\partial M} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nu) dS. \quad (3.19)$$

Portanto,

$$\int_M \frac{f}{m} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 dV \leq \frac{1}{2} \int_{\partial M} R_\gamma |\nabla f| dS - \frac{n-2}{2n} \int_{\partial M} R |\nabla f| dS, \quad (3.20)$$

pois $\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nu) = -|\nabla f| \left(\text{Ric}(\nu, \nu) - \frac{R}{n} g \right)$ e pela equação de Gauss, $\text{Ric}(\nu, \nu) = \frac{R}{2} - \frac{R_\gamma}{2}$. Daí,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f, \nu) &= -|\nabla f| \left(\frac{R}{2} - \frac{R_\gamma}{2} - \frac{R}{n} \right) \\ &= -|\nabla f| \left(\frac{nR - 2R}{2} - \frac{R_\gamma}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} R_\gamma |\nabla f| - \frac{n-2}{2n} R |\nabla f|. \end{aligned}$$

De (3.20) e (3.18), segue que

$$\delta \geq \frac{\inf_{\partial M} R}{n(n-1)}. \quad (3.21)$$

Assim, de (3.17) e (3.21)

$$|\partial M| \leq \left(\frac{\inf_{\partial M} R}{n(n-1)} \right)^{-\frac{n-1}{2}} \omega_{n-1}.$$

ou melhor,

$$|\partial M| \leq \left(\frac{n(n-1)}{\inf_{\partial M} R} \right)^\alpha \omega_{n-1},$$

para $\alpha = \frac{2}{n-1}$. Daí,

$$|\partial M|^{\alpha \inf_{\partial M} R} \leq n(n-1) \omega_{n-1}^\alpha.$$

Observe que a igualdade vale se, e somente se, M é uma variedade Einstein. Em

particular, da Proposição 3.1, concluímos que a igualdade se mantém se, e somente se, M é isométrica ao hemisfério $\mathbb{S}^n(c)$. ■

Teorema 3.7. *Seja M^3 uma variedade do tipo $(\lambda, 3 + m)$ -Einstein compacta com $m > 1$, com curvatura escalar constante, curvatura de Ricci não negativa e bordo desconexo. Então M^3 é isométrica a um cilindro $\mathbb{S}^2 \times [0, a]$.*

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que as componentes conexas do bordo são duas esferas topológicas. De fato, pela Proposição 4.1 de [24], tem-se

$$\text{Ric}(\nabla f) = -\frac{1}{m-1} \left[R - (n-1)\lambda \right] (\nabla f), \quad (3.22)$$

assim,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nabla f) &= \left[\frac{(n-1)\lambda - R}{m-1} - \frac{R}{n} \right] (\nabla f) \\ &= \left[\frac{(n-1)\lambda}{m-1} - \frac{R}{m-1} - \frac{R}{n} \right] (\nabla f) \\ &= \left[\frac{(n-1)\lambda}{m-1} - \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{n} \right) R \right] (\nabla f) \\ &= \left[\frac{(n-1)\lambda}{m-1} - \left(\frac{n+m-1}{n(m-1)} \right) R \right] (\nabla f) \\ &= \left[\frac{-R}{(m-1)n} (m+n-1) + \frac{n-1}{m-1} \lambda \right] (\nabla f). \end{aligned}$$

Dai, para $n = 3$ e levando em conta que o campo externo ao bordo é $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, tem-se

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nu, \nu) &= \frac{2+m}{3(m-1)} \left(-R + \frac{6\lambda}{m+2} \right) \\ &= \frac{2+m}{3(1-m)} \left(-\frac{6\lambda}{m+2} + R \right), \end{aligned}$$

isto é

$$\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nu, \nu) = \frac{2+m}{3(1-m)} \left(-\frac{6\lambda}{m+2} + R \right). \quad (3.23)$$

Ao longo do bordo. Como M é compacta, a partir do Teorema 4.1 de [14], $\lambda > 0$ e, portanto, inferimos da Observação 4.5 de [24] que

$$R \geq \frac{n(n-1)}{m+n-1} \lambda = \frac{6\lambda}{2+m} > 0.$$

Assim, voltando para (3.23), temos

$$\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nu, \nu) = \frac{2+m}{3(1-m)} \left(-\frac{6\lambda}{m+2} + R \right) \leq 0. \quad (3.24)$$

Ao longo do bordo. Agora, por (3.24), temos

$$\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nu, \nu) = \text{Ric}(\nu, \nu) - \frac{R}{3}g \leq 0.$$

Daí,

$$\text{Ric}(\nu, \nu) \leq \frac{R}{3}g \quad (3.25)$$

Agora, pela equação de Gauss, $R - 2\text{Ric}(\nu, \nu) = R_\gamma^\alpha$. Daí,

$$\begin{aligned} R - R_\gamma^\alpha = 2\text{Ric}(\nu, \nu) &\Rightarrow \text{Ric}(\nu, \nu) = \frac{R}{2} - \frac{R_\gamma^\alpha}{2} \\ &\stackrel{(3.25)}{\Rightarrow} \frac{R}{2} - \frac{R_\gamma^\alpha}{2} \leq \frac{R}{3}. \end{aligned}$$

Donde,

$$R_\gamma^\alpha \geq \frac{R}{3} > 0,$$

em que ∂M_α denota as componentes conexas de ∂M . Além disso,

$$\text{Ric}(\nu, \nu) \stackrel{(3.22)}{=} -\frac{1}{m-1}(R-2\lambda),$$

e, portanto, ∂M_α possui curvatura Gaussiana constante positiva. Então, ∂M_α é isométrica a uma esfera. Agora, usando a hipótese que $\text{Ric} \geq 0$, pelo Teorema B de [16], a fronteira tem exatamente duas componentes conexas. Daí segue que (M^3, g) é isométrica ao cilindro $(\mathbb{S}^2 \times [0, a], g_0)$, onde g_0 é uma métrica produto. ■

Na sequência, vamos usar a fórmula de Gauss-Bonnet-Chern, para obter uma estimativa da característica do bordo de uma variedade $(\lambda, 5+m)$ -Einstein generalizada.

Teorema 3.8. *Seja (M^5, g) uma variedade $(\lambda, 5+m)$ -Einstein generalizada, conexa, com bordo ∂M , $\mathcal{L}_{\nabla f} R \geq 0$ e $\min_{\partial M} R > 0$. Suponha também que ∂M é Einstein, então*

$$8\pi^2 \chi(\partial M) \geq \frac{3}{200} \left(\min_{\partial M} R \right)^2 |\partial M|,$$

onde vale a igualdade se, e somente se, M é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^5(c)$.

Demonstração: Do Teorema 3.3, temos que

$$\int_{\partial M} 5R_\gamma + R(2 - 5) dS \geq 0,$$

assim,

$$\begin{aligned} 5 \int_{\partial M} R_\gamma dS \geq 3 \int_{\partial M} R dS &\Rightarrow \int_{\partial M} R_\gamma dS \geq \frac{3}{5} R \int_{\partial M} dS \\ &\Rightarrow \int_{\partial M} R_\gamma dS \geq \frac{3}{5} R |\partial M|, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{3}{5} \min_{\partial M} R |\partial M| \leq \int_{\partial M} R_\gamma dS.$$

Daí,

$$\left(\frac{3}{5} \min_{\partial M} R |\partial M| \right)^2 \leq \left(\int_{\partial M} R_\gamma d\sigma \right)^2. \quad (3.26)$$

Pela desigualdade de Schwarz, tem-se

$$\left(\int_{\partial M} R_\gamma dS \right)^2 \leq \int_{\partial M} R_\gamma^2 dS |\partial M|. \quad (3.27)$$

De (3.26) e (3.27), temos

$$\frac{9}{25} \left(\min_{\partial M} R \right)^2 |\partial M| \leq \int_{\partial M} R_\gamma^2 dS \quad (3.28)$$

Agora lembrando que a fórmula de Gauss-Bonnet-Chern é dada por

$$8\pi^2 \chi(\partial M) = \frac{1}{4} \int_{\partial M} |W_\gamma|^2 dS + \frac{1}{24} \int_{\partial M} R_\gamma^2 dS - \frac{1}{2} \int_{\partial M} |\overset{\circ}{\text{Ric}}_\gamma|^2 dS,$$

onde W é o tensor de Weyl. Daí, das suposições mencionadas

$$8\pi^2 \chi(\partial M) = \frac{1}{4} \int_{\partial M} |W_\gamma|^2 dS + \frac{1}{24} \int_{\partial M} R_\gamma^2 dS.$$

Assim,

$$8\pi^2 \chi(\partial M) \geq \frac{1}{24} \int_{\partial M} R_\gamma^2 dS.$$

Por (3.28), tem-se

$$8\pi^2 \chi(\partial M) \geq \frac{1}{24} \frac{9}{25} \left(\min_{\partial M} R \right)^2 |\partial M|,$$

donde

$$8\pi^2 \chi(\partial M) \geq \frac{3}{200} \left(\min_{\partial M} R \right)^2 |\partial M|.$$

Observe que a igualdade ocorre se, e somente se, vale a igualdade

$$\int_{\partial M} 5R_\gamma + R(2 - 5) dS = 0.$$

E, portanto, pelo Teorema [3.3](#), vale a igualdade se, e somente se, M é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^5(c)$. ■

3.2 Algumas desigualdades integrais

Nesta seção lidamos com algumas fórmulas integrais nas variedades $(\lambda, n+m)$ -Einstein. Iremos considerar a função $\rho = \frac{(n-1)\lambda - R}{m-1}$ sobre M e o tensor $P = \text{Ric} - \rho g$ (para mais detalhes ver [\[21\]](#)). Nesse sentido, temos a desigualdade integral e como consequência uma caracterização para o hemisfério.

Teorema 3.9. *Seja M uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizada compacta com $m > 1$. Então,*

$$\int_{\partial M} f^{m+2} \text{tr}(P)(\rho - \lambda) dV + \frac{(n-1)m^2}{m-1} \int_M \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle dV \leq 0.$$

Em particular, supondo que M tem bordo conexo, a igualdade ocorre se, e somente se, M é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.

Demonstração: Em primeiro lugar, tomando a divergência em $\nabla^2 f = \frac{f}{m}(\text{Ric} - \lambda g)$ temos

$$\begin{aligned} \nabla \Delta f + \text{Ric}(\nabla f) &= \frac{1}{m} [\text{div}(f \text{Ric}) - \text{div}(f \lambda g)] \\ &= \frac{1}{m} \left[\text{Ric}(\nabla f) + \frac{f \nabla R}{2} - \nabla f \lambda - f \nabla \lambda \right] \\ &= \frac{\text{Ric}(\nabla f)}{m} + \frac{f \nabla R}{2m} - \frac{\nabla f \lambda}{m} - \frac{f \nabla \lambda}{m} \end{aligned}$$

donde,

$$\text{Ric}(\nabla f) - \frac{\text{Ric}(\nabla f)}{m} + \nabla \Delta f + \frac{f \nabla \lambda}{m} - \frac{f \nabla R}{2m} + \frac{\nabla f \lambda}{m} = 0.$$

Daí,

$$\text{Ric}(\nabla f) \left(\frac{m-1}{m} \right) + \nabla \Delta f + \frac{f \nabla \lambda}{m} - \frac{f \nabla R}{2m} + \frac{\nabla f \lambda}{m} = 0,$$

Agora, multiplicando os dois membros da última igualdade por $\frac{m}{m-1}$, tem-se que

$$\frac{f \nabla R}{2(m-1)} - \frac{f \nabla \lambda}{m-1} - \frac{\nabla f \lambda}{m-1} - \text{Ric}(\nabla f) - \left(\frac{m}{m-1} \right) \frac{R}{n-1} \nabla f = 0,$$

isto é,

$$\frac{f\nabla R}{2(m-1)} - \frac{f\nabla\lambda}{m-1} - \frac{\nabla f\lambda}{m-1} - \text{Ric}(\nabla f) - \left(\frac{(n-1)\lambda + mR}{(n-1)(m-1)}\right)\nabla f = 0.$$

E, portanto,

$$\frac{f\nabla R}{2(m-1)} - \frac{(n-1)f\nabla\lambda}{m-1} + P(\nabla f) = 0. \quad (3.29)$$

Em particular, $P(\nabla f) = 0$ ao longo do bordo, uma vez que $f = 0$ sobre ∂M . Além disso,

$$P(\nabla f^{m+1}) = (m+1)f^m P(\nabla f). \quad (3.30)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} P(\nabla f^{m+1}) &= \text{Ric}(\nabla f^{m+1}) - \left[\left(\frac{(n-1)\lambda - R}{m-1} \right) g \right] (\nabla f^{m+1}) \\ &= (m+1)f^m \text{Ric}(\nabla f) - (m+1)f^m \left[\left(\frac{(n-1)\lambda - R}{m-1} \right) g \right] (\nabla f) \\ &= (m+1)f^m \left[\text{Ric}(\nabla f) - \left[\left(\frac{(n-1)\lambda - R}{m-1} \right) g \right] (\nabla f) \right] \\ &= (m+1)f^m P(\nabla f). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{div}(f^{m+1}P) &= f^{m+1}\text{div}(P) + P(\nabla f^{m+1}) \\ &= f^{m+1}\text{div}\left(\left[\text{Ric} - \frac{(n-1)\lambda}{m-1} - \frac{R}{m-1}\right]g\right) + P(\nabla f^{m+1}) \\ &\stackrel{(3.30)}{=} f^{m+1}\left(\frac{\nabla R}{2} - \frac{(n-1)\nabla\lambda - \nabla R}{m-1}\right) + (m+1)f^m P(\nabla f), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \text{div}(f^{m+1}P) &= f^{m+1}\left(\frac{\nabla R}{2} + \frac{\nabla R}{m-1} - \frac{(n-1)\nabla\lambda}{m-1}\right) + (m+1)f^m P(\nabla f) \\ &= f^{m+1}\left(\frac{(m+1)\nabla R}{2(m-1)} - \frac{(n-1)\nabla\lambda}{m-1}\right) + (m+1)f^m P(\nabla f) \\ &= f^m\left(\frac{(m+1)f\nabla R}{2(m-1)} - \frac{(n-1)f\nabla\lambda}{m-1}\right) + (m+1)f^m P(\nabla f). \end{aligned}$$

Substituindo (3.29) na equação anterior

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f^{m+1}P) &= f^m \left(\frac{(n-1)(m+1)f\nabla\lambda}{m-1} - \frac{(n-1)f\nabla\lambda}{m-1} - (m+1)P(\nabla f) \right) \\
&\quad + (m+1)f^m P(\nabla f) \\
&= f^m \left(\frac{f\nabla\lambda(n-1)m}{m-1} \right) - (m+1)f^m P(\nabla f) + (m+1)f^m P(\nabla f) \\
&= f^{m+1} \left(\frac{\nabla\lambda(n-1)m}{m-1} \right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{div}(f^{m+1}P) = f^{m+1} \left(\frac{\nabla\lambda(n-1)m}{m-1} \right). \quad (3.31)$$

Sabemos que para T um $(1, 2)$ tensor simétrico e X um campo, tem-se que

$$\operatorname{div}(T)(X) = \operatorname{div}(T(X)) - \sum_i T(E_i, \nabla_{E_i} \nabla X).$$

Então para $T = f^{m+1}P$ e $X = \nabla f$, temos que

$$\operatorname{div}(f^{m+1}P)(\nabla f) = \operatorname{div}(f^{m+1}P(\nabla f)) - f^{m+1}\langle P, \nabla^2 f \rangle.$$

Dai,

$$\int_M \operatorname{div}(f^{m+1}P(\nabla f)) dV = \int_M \operatorname{div}(f^{m+1}P)(\nabla f) dV + \int_M f^{m+1}\langle P, \nabla^2 f \rangle dV. \quad (3.32)$$

Como $P(\nabla f) = 0$ ao longo do bordo, temos pelo teorema da divergência que

$$\int_M \operatorname{div}(f^{m+1}P(\nabla f)) dV = \int_{\partial M} f^{m+1}\langle P(\nabla f), \nu \rangle dS = 0,$$

onde ν é um vetor normal unitário com orientação externa sobre ∂M . Assim, em (3.32), temos

$$\int_M f^{m+1}\langle P, \nabla^2 f \rangle dV + \int_M \operatorname{div}(f^{m+1}P)(\nabla f) dV = 0,$$

donde temos

$$\int_M f^{m+1}\langle P, \nabla^2 f \rangle dV + \frac{(n-1)m}{m-1} \int_M f^{m+1}\langle \nabla\lambda, \nabla f \rangle dV = 0. \quad (3.33)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle P, \nabla^2 f \rangle &= \left\langle \overset{\circ}{P} + \frac{\text{tr}(P)}{n}g, \nabla^2 f + \frac{\text{tr}(\nabla^2 f)}{n}g \right\rangle \\
&= \left\langle \overset{\circ}{P} + \frac{R-nP}{n}g, \overset{\circ}{P} + \frac{R-n\lambda}{n}g \right\rangle \frac{f}{m} \\
&= \left(|\overset{\circ}{P}|^2 + \frac{R-nP}{n}\langle g, \overset{\circ}{P} \rangle + \frac{R-n\lambda}{n}\langle g, \overset{\circ}{P} \rangle + \frac{R-n\rho}{n} \cdot \frac{R-n\lambda}{n}\langle g, g \rangle \right) \frac{f}{m} \\
&= \left(|\overset{\circ}{P}|^2 + \frac{R-nP}{n} \cdot 0 + \frac{R-n\lambda}{n} \cdot 0 + \frac{R-n\rho}{n} \cdot \frac{R-n\lambda}{n}n \right) \frac{f}{m} \\
&= \left(|\overset{\circ}{P}|^2 + R-n\rho \cdot \frac{R-n\lambda}{n} \right) \frac{f}{m} \\
&= \left[|\overset{\circ}{P}|^2 + \text{tr}(P) \left(\frac{R-n\lambda}{n} \right) \right] \frac{f}{m},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle P, \nabla^2 f \rangle = \left[|\overset{\circ}{P}|^2 + \text{tr}(P) \left(\frac{R-n\lambda}{n} \right) \right] \frac{f}{m}. \quad (3.34)$$

Note que

$$\begin{aligned}
|\overset{\circ}{P}|^2 = \langle \overset{\circ}{P}, \overset{\circ}{P} \rangle &= \left\langle P - \frac{R-n\rho}{n}g, P - \frac{R-n\rho}{n}g \right\rangle \\
&= |P|^2 - 2\frac{R-n\rho}{n}\langle g, P \rangle + \left(\frac{R-n\rho}{n} \right)^2 \langle g, g \rangle \\
&= |P|^2 - 2\frac{(\text{tr}(P))^2}{n} + \frac{(\text{tr}(P))^2}{n^2}n \\
&= |P|^2 - \frac{(\text{tr}(P))^2}{n}.
\end{aligned}$$

E, portanto,

$$|\overset{\circ}{P}|^2 = |P|^2 - \frac{(\text{tr}(P))^2}{n}.$$

Daí, voltando para (3.34), temos

$$\begin{aligned}
\langle P, \nabla^2 f \rangle &= \left[|\overset{\circ}{P}|^2 + \text{tr}(P) \left(\frac{R-n\lambda}{n} \right) \right] \frac{f}{m} \\
&= \left[|P|^2 - \frac{(\text{tr}(P))^2}{n} + \text{tr}(P) \left(\frac{R-n\lambda}{n} \right) \right] \frac{f}{m} \\
&= \left[|P|^2 + \text{tr}(P)(\rho - \lambda) \right] \frac{f}{m},
\end{aligned}$$

pois $-\frac{(\text{tr}(P))^2}{n} + \text{tr}(P)\left(\frac{R-n\lambda}{n}\right) = \text{tr}(P)(\rho - \lambda)$, logo inferimos que

$$\langle P, \nabla^2 f \rangle = \left[|P|^2 + \text{tr}(P)(\rho - \lambda) \right] \frac{f}{m}.$$

Agora, a partir da equação (3.33) e da equação anterior,

$$\int_M f^{m+1} \left(|P|^2 + \text{tr}(P)(\rho - \lambda) \right) \frac{f}{m} dV + \frac{(n-1)m}{m-1} \int_M f^{m+1} \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle dV = 0.$$

ou ainda,

$$\int_M f^{m+2} \text{tr}(P)(\rho - \lambda) dV + \frac{(n-1)m^2}{m-1} \int_M f^{m+1} \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle dV \leq 0,$$

valendo a igualdade se, e somente se, $|P|^2 = 0$. Daí segue que

$$|P|^2 = 0 \Leftrightarrow \text{Ric} = \rho g \Leftrightarrow M \text{ é Einstein.}$$

Daí, pela Proposição 3.2, M é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$. ■

Por conseguinte, usando as propriedades do bordo de uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein com $m > 1$, obtemos o seguinte resultado de rigidez.

Teorema 3.10. *Seja M uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizada compacta com $m > 1$. Suponha que $\mathcal{L}_{\nabla f} R \geq 0$. Então*

$$\int_{\partial M} \text{tr}(P) dS \geq 0.$$

Em particular, supondo que M tenha bordo conexo, a igualdade se mantém se, e somente se, M é isométrica a um hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.

Demonstração: Levando em consideração a equação (3.29), temos

$$P(\nabla f) = (\text{Ric} - \rho g)(\nabla f) = 0 \tag{3.35}$$

ao longo do bordo. Note que temos que $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ é um campo vetorial normal unitário com orientação externa em ∂M . Então,

$$\overset{\circ}{\text{Ric}}(\nu, \nu) = -\frac{\text{tr}(P)}{n}. \tag{3.36}$$

Pela equação de Gauss, $R - 2\text{Ric}(\nu, \nu) = R_\gamma^\alpha$, ou ainda,

$$\text{Ric}(\nu, \nu) = \frac{R}{2} - \frac{R_\gamma^\alpha}{2} \Rightarrow \overset{\circ}{\text{Ric}}(\nu, \nu) = \frac{(n-2)R}{2n} - \frac{R_\gamma^\alpha}{2},$$

donde por (3.36) inferimos que

$$-\frac{\text{tr}(P)}{n} = \frac{(n-2)R}{2n} - \frac{R_\gamma^\alpha}{2},$$

isto é,

$$\text{tr}(P) = \frac{1}{2} \left(nR_\gamma^\alpha + (2-n)R \right).$$

E, portanto, pelo Teorema 3.3,

$$\int_{\partial M} \text{tr}(P) dS \geq 0.$$

Além disso, supondo que M tenha bordo conexo, pelo Teorema 3.3, a igualdade se mantém se, e somente se, M é isométrica a um hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$. ■

Observação 3.4. *Em uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein compacta com curvatura escalar constante tem-se $\text{tr}(P) \geq 0$. Na verdade, esta desigualdade é equivalente a dizer que $R \geq \frac{n(n-1)\lambda}{m+n-1}$.*

Teorema 3.11. *Seja M uma variedade do tipo $(\lambda, n+m)$ -Einstein generalizada, compacta e com bordo conexo. Se*

$$\int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) dV \geq \frac{(n-1)}{n} \int_M (\Delta f)^2 dV,$$

então M é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$.

Demonstração: Lembrando que a fórmula de Bochner é dada por

$$\frac{\Delta |\nabla f|^2}{2} = \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + |\nabla^2 f|^2.$$

Assim,

$$\int_M |\nabla^2 f|^2 dV + \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) dV + \int_M \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle dV = \frac{1}{2} \int_M \Delta |\nabla f|^2 dV, \quad (3.37)$$

pelo teorema da divergência,

$$\frac{1}{2} \int_M \Delta |\nabla f|^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\partial M} \langle \nu, \nabla |\nabla f|^2 \rangle dS, \quad (3.38)$$

onde $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ é um vetor unitário com orientação externa em ∂M . Como temos que $|\nabla^2 f|^2 = |\overset{\circ}{\nabla}^2 f + \frac{\Delta f}{n}g|^2 = |\overset{\circ}{\nabla}^2 f|^2 + \frac{1}{n}(\Delta f)^2$, segue que

$$\int_M |\nabla^2 f|^2 dV = \int_M |\overset{\circ}{\nabla}^2 f|^2 dV + \frac{1}{2} \int_M (\Delta f)^2 dV. \quad (3.39)$$

Substituindo (3.38) e (3.39) em (3.37), tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial M} \langle \nu, \nabla |\nabla f|^2 \rangle dS &= \int_M |\overset{\circ}{\nabla}^2 f|^2 dV + \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) dV \\ &\quad + \frac{1}{n} \int_M (\Delta f)^2 dV + \int_M \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle dV \end{aligned} \quad (3.40)$$

Além disso, fazendo $T = (\Delta f)g$ na identidade de Pohozaev-Schoen, Proposição 3.1,

$$\int_M \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle dV = \frac{1}{2} \int_M \langle \Delta f g, \mathcal{L}_{\nabla f} g \rangle dV + \int_{\partial M} \langle \Delta f \nabla f, \nu \rangle dS.$$

Note que $\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2\nabla^2 f$, e portanto,

$$\int_M \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle dV = \int_M (\Delta f)^2 dV + \int_{\partial M} \Delta f \langle \nu, \nabla f \rangle dS. \quad (3.41)$$

De (3.40) e (3.41), segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial M} \langle \nu, \nabla |\nabla f|^2 \rangle dS &= \int_M |\overset{\circ}{\nabla}^2 f|^2 dV + \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) dV + \frac{1}{n} \int_M (\Delta f)^2 dV \\ &\quad + \int_M (\Delta f)^2 dV + \int_{\partial M} \Delta f \langle \nu, \nabla f \rangle dS, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \int_M |\overset{\circ}{\nabla}^2 f|^2 dV &= - \left(\int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) dV + \frac{n+1}{n} \int_M (\Delta f)^2 dV \right) \\ &\quad - \int_{\partial M} \Delta f \langle \nu, \nabla f \rangle dS + \frac{1}{2} \int_{\partial M} \langle \nu, \nabla |\nabla f|^2 \rangle dS. \end{aligned}$$

Como por hipótese, $\int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) dV \geq \frac{n+1}{n} \int_M (\Delta f)^2 dV$, segue que

$$\int_M |\overset{\circ}{\nabla}^2 f|^2 dV \leq - \int_{\partial M} \Delta f \langle \nu, \nabla f \rangle dS + \frac{1}{2} \int_{\partial M} \langle \nu, \nabla |\nabla f|^2 \rangle dS. \quad (3.42)$$

Agora, note que

$$-\Delta f \langle \nu, \nabla f \rangle = -\Delta f \left\langle -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \nabla f \right\rangle = |\nabla f| \Delta f.$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \langle \nu, \nabla |\nabla f|^2 \rangle &= -\frac{1}{2|\nabla f|} \langle \nabla f, \nabla (|\nabla f|^2) \rangle \\
&= -\frac{1}{2|\nabla f|} \left(\nabla f (|\nabla f|^2) \right) \\
&= -\frac{1}{2|\nabla f|} \left(2 \langle \nabla \nabla f, \nabla f \rangle \right) \\
&= -\frac{1}{|\nabla f|} \nabla^2 f (\nabla f, \nabla f),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$-\int_{\partial M} \Delta f \langle \nu, \nabla f \rangle dS + \frac{1}{2} \int_{\partial M} \langle \nu, \nabla |\nabla f|^2 \rangle dS = -\frac{1}{|\nabla f|} \int_{\partial M} \nabla^2 f (\nabla f, \nabla f) dS + |\nabla f| \int_{\partial M} \Delta f dS.$$

Substituindo a ultima igualdade em (3.42)

$$\int_M |\overset{\circ}{\nabla}^2 f|^2 dV \leq -\frac{1}{|\nabla f|} \int_{\partial M} \nabla^2 f (\nabla f, \nabla f) dS + |\nabla f| \int_{\partial M} \Delta f dS = 0,$$

isto é,

$$\int_M |\overset{\circ}{\nabla}^2 f|^2 dV = 0 \Leftrightarrow \overset{\circ}{\nabla}^2 f = 0 \Leftrightarrow M \text{ é Einstein.}$$

Da Proposição 3.2, concluímos que M é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$. ■

3.3 Produto Warped e tensor de Weyl harmônico em variedades Einstein

Nesta seção iremos estudar o artigo [9]. A convenção é de que o tensor curvatura de Riemann tem mesmo sinal que a curvatura seccional. Definamos o 2-tensor de Bach B simétrico dado por

$$\begin{aligned}
B(X, Y) &= \frac{1}{n-3} \sum_{i,j} \left(\nabla_{E_i, E_j}^2 W \right) (X, E_i, E_j, Y) \\
&\quad + \frac{1}{n-2} \sum_{i,j} \text{Ric}(E_i, E_j) W(X, E_i, E_j, Y),
\end{aligned} \tag{3.43}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal e $\nabla_{E_i, E_j}^2 W$ é a derivada covariante do tensor de Weyl. Agora, usando o fato que $(\text{div Rm})(X, Y, Z) = (\nabla_X \text{Ric})(Y, Z) - (\nabla_Y \text{Ric})(X, Z)$ em conjunto com (1.14) e (1.15)

$$C(X, Y, Z) = (\operatorname{div} \operatorname{Rm})(X, Y, Z) - \frac{1}{2(n-1)}((\nabla_X R)g(Y, Z) - (\nabla_Y R)g(X, Z)) \quad (3.44)$$

Definição 3.2. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) tem tensor de Weyl harmônico se o tensor de Cotton é zero.*

Lembrando que para $n \geq 4$ o tensor de Cotton é um múltiplo do tensor de Weyl, isto é,

$$C(X, Y, Z) = \frac{n-2}{n-3}(\operatorname{div} W)(X, Y, Z), \quad \forall X, Y, Z \in TM. \quad (3.45)$$

Daí, podemos reescrever o tensor de Bach por:

$$B(X, Y) = \frac{1}{n-2} \left(\sum_i (\nabla_{E_i} C)(E_i, X, Y) + \sum_{i,j} \operatorname{Ric}(E_i, E_j) W(X, E_i, E_j, Y) \right), \quad (3.46)$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal. De fato, note que

$$\begin{aligned} \sum_i (\nabla_{E_i} C)(E_i, X, Y) &= \frac{n-2}{n-3} \sum_{i,j} (\nabla_{E_i} \nabla_{E_j} W)(X, E_i, E_j, Y) \\ &= \frac{n-2}{n-3} \sum_{i,j} (\nabla_{E_i, E_j}^2 W)(X, E_i, E_j, Y) \end{aligned} \quad (3.47)$$

e, portanto, de (3.43) e (3.47), inferimos que

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \frac{1}{n-3} \sum_{i,j} (\nabla_{E_i, E_j}^2 W)(X, E_i, E_j, Y) \\ &\quad + \frac{1}{n-2} \sum_{i,j} \operatorname{Ric}(E_i, E_j) W(X, E_i, E_j, Y) \\ &= \frac{1}{n-3} \cdot \left(\frac{n-3}{n-2} \right) \sum_i (\nabla_{E_i} C)(E_i, X, Y) \\ &\quad + \frac{1}{n-2} \sum_{i,j} \operatorname{Ric}(E_i, E_j) W(X, E_i, E_j, Y) \\ &= \frac{1}{n-2} \left(\sum_i (\nabla_{E_i} C)(E_i, X, Y) + \sum_{i,j} \operatorname{Ric}(E_i, E_j) W(X, E_i, E_j, Y) \right). \end{aligned}$$

Se $n \geq 4$, então M tem tensor de Weyl harmônico se, e somente se, $\operatorname{div} W = 0$ e M será localmente conformemente plana se, e somente se, $W = 0$. Em uma variedade

$(\lambda, n + m)$ –Einstein, definimos o tensor 3–tensor D por

$$\begin{aligned} D(X, Y, Z) = & \frac{1}{(n-1)(n-2)} (\text{Ric}(X, \nabla f)g(Y, Z) - \text{Ric}(Y, \nabla f)g(X, Z)) \\ & + \frac{1}{n-2} (\text{Ric}(Y, Z)g(X, \nabla f) - \text{Ric}(X, Z)g(Y, \nabla f)) \\ & - \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g(X, \nabla f)g(Y, Z) - g(Y, \nabla f)g(X, Z)), \end{aligned} \quad (3.48)$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Note que o tensor D é anti-simétrico em seus dois primeiros índices, e mais,

$$\sum_i D(E_i, E_i, X) = 0.$$

Agora vamos lembrar de algumas propriedades sobre produtos warped Einstein. Primeiro temos a função ρ definida por

$$R = (n-1)\lambda - (m-1)\rho; \quad \rho = \frac{(n-1)\lambda - R}{m-1}.$$

Note que a curvatura da variedade $(\lambda, n+1)$ –Einstein é constante igual a $(n-1)\lambda$. Além disso, temos os seguintes tensores

$$P = \text{Ric} + \rho g$$

$$Q = \text{Rm} + \frac{2}{m} \text{Ric} \odot g - \frac{\lambda + \rho}{m} g \odot g = R + \frac{2}{m} P \odot g + \frac{\rho - \lambda}{m} g \odot g.$$

Proposição 3.12. *Seja (M, g, f) uma variedade Riemanniana $(\lambda, n + m)$ –Einstein com $m \neq 1$. Então,*

$$P(\nabla f) = -\frac{m}{2} \nabla \rho, \text{ ou equivalente } \text{Ric}(\nabla f) = -\frac{m}{2} \nabla \rho + \rho \nabla f. \quad (3.49)$$

$$(\text{div Rm}) = Q(X, Y, Z, \nabla f) - \frac{1}{m} (g \odot g)(X, Y, Z, P(\nabla f)). \quad (3.50)$$

Considerando o produto warped $M = B \times_f F$, em que $B \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, F é uma variedade μ –Einstein e M é λ –Einstein. A métrica em questão é dada por $g = dt^2 + f^2 g_L$. Além disso, considerando que $R(X, Y)Z = R_{XY}Z$, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.13 (O’Neil). *Seja $M = B \times_f F$ um produto warped. Se $X, Y, Z \in \mathcal{L}(B)$ e $U, V, W \in \mathcal{L}(F)$, então*

1. $R_{XY}Z \in \mathcal{L}(B)$ é o levantamento de $R_{XY}^B Z$ em B ;
2. $R_{VX}Y = -\frac{\nabla^2 f}{f} V$;

$$3. R_{XY}V = R_{VW}X = 0;$$

$$4. R_{XV}W = -\frac{\langle V, W \rangle}{f} \nabla_X \nabla f;$$

$$5. R_{VW}U = R_{VW}^F U + \frac{|\nabla f|}{f^2} [\langle V, U \rangle W - \langle W, U \rangle V].$$

Esse resultado encontra-se demonstrado em O'Neil (ver [19]).

3.3.1 O 3-tensor covariante D

Nesta seção, veremos alguns resultados sobre o 3-tensor D . Para o solitons de Ricci gradiente, o tensor D relaciona o tensor de Cotton e Weyl da seguinte forma (ver [7], Lema 3.1):

$$C(X, Y, Z) = D(X, Y, Z) + W(X, Y, Z, \nabla f), \quad \forall X, Y, Z \in TM.$$

Para variedades com produto warped, temos uma relação semelhante, a relação é a seguinte:

Lema 3.14. *Suponha que (M^n, g, f) é uma variedade do tipo $(\lambda, n + m)$ -Einstein. Então, o tensor C , tensor D e o tensor de Weyl satisfazem*

$$C(X, Y, Z) = W(X, Y, Z, \nabla f) + \frac{m + n - 2}{m} D(X, Y, Z), \quad \forall X, Y, Z \in TM. \quad (3.51)$$

Demonstração: Pela fórmula (3.50) da Proposição 3.12 e a definição do tensor Q , temos

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \operatorname{Rm})(X, Y, Z) &= Q(X, Y, Z, \nabla f) - \frac{1}{m} (g \odot g)(X, Y, Z, P(\nabla f)) \\ &= \operatorname{Rm}(X, Y, Z, \nabla f) + \frac{2}{m} (\operatorname{Ric} \odot g)(X, Y, Z, \nabla f) \\ &\quad - \frac{\lambda + \rho}{m} (g \odot g)(X, Y, Z, \nabla f) - \frac{1}{m} (g \odot g)(X, Y, Z, P(\nabla f)). \end{aligned}$$

Agora, pela decomposição do tensor curvatura de Riemann, segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{divRm}(-) &= W(-, \nabla f) + \frac{2}{m-2}(\operatorname{Ric} \odot g)(-, \nabla f) - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g \odot g)(-, \nabla f) \\
&\quad + \frac{2}{m}(\operatorname{Ric} \odot g)(-, \nabla f) - \frac{\lambda + \rho}{m}(g \odot g)(-, \nabla f) - \frac{1}{m}(g \odot g)(-, P(\nabla f)) \\
&= W(-, \nabla f) + \frac{2}{m-2}(\operatorname{Ric} \odot g)(-, \nabla f) - \frac{(n-1)\lambda - (m-1)\rho}{(n-1)(n-2)}(g \odot g)(-, \nabla f) \\
&\quad + \frac{2}{m}(g \odot g)(-, \nabla f) - \frac{\lambda + \rho}{m}(g \odot g)(-, \nabla f) - \frac{1}{m}(g \odot g)(-, P(\nabla f)) \\
&= W(-, \nabla f) - \frac{1}{m}(g \odot g)(-, P(\nabla f)) + \frac{2(m+n-2)}{m(m-2)}(\operatorname{Ric} \odot g)(-, \nabla f) \\
&\quad - \frac{(n-1)(m+n-2)\lambda + ((n-1)(n-2) - m(m-1))\rho}{m(n-1)(n-2)}(g \odot g)(-, \nabla f).
\end{aligned}$$

Usando o fato que $P = \operatorname{Ric} - \rho g$, tem-se que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{m}(g \odot g)(X, Y, Z, P(\nabla f)) &= -\frac{1}{m}(g(X, P(\nabla f))g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, P(\nabla f))) \\
&= -\frac{1}{m}(g(X, \operatorname{Ric}(\nabla f))g(Y, Z) - g(Y, \operatorname{Ric}(\nabla f))g(X, Z)) \\
&\quad - \frac{1}{m}(g(X, P(\nabla f))g(Y, Z) - g(Y, P(\nabla f))g(X, Z)).
\end{aligned}$$

Assim, inferimos que

$$\begin{aligned}
(\operatorname{divRm})(-) &= W(-, \nabla f) - \frac{1}{m}(\operatorname{Ric}(X, \nabla f)g(Y, Z) - \operatorname{Ric}(Y, \nabla f)g(X, Z)) \\
&\quad - \frac{\rho}{m}(g(X, \nabla f)g(Y, Z) - g(Y, \nabla f)g(X, Z)) \\
&\quad + \frac{2(m+n-2)}{2m(n-2)}\left(\operatorname{Ric}(Y, Z)g(X, \nabla f) + \operatorname{Ric}(X, \nabla f)g(Y, Z) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{Ric}(Y, \nabla f)g(X, Z) - \operatorname{Ric}(X, Z)g(Y, \nabla f)\right) \\
&\quad - \frac{(n-1)(m+n-2)\lambda + ((n-1)(n-2) - m(m-1))\rho}{m(n-1)(n-2)}\left(g(X, \nabla f)g(Y, Z) \right. \\
&\quad \left. - g(X, Z)g(Y, \nabla f)\right),
\end{aligned}$$

ou ainda, temos que

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} \operatorname{Rm})(-) &= W(-, \nabla f) - \frac{1}{m} (\operatorname{Ric}(X, \nabla f)g(Y, Z) - \operatorname{Ric}(Y, \nabla f)g(X, Z)) \\
&\quad - \frac{\rho}{m} (g(X, \nabla f)g(Y, Z) - g(Y, \nabla f)g(X, Z)) \\
&\quad + \frac{(m+n-2)}{m(n-2)} (\operatorname{Ric}(X, \nabla f)g(Y, Z) - \operatorname{Ric}(Y, \nabla f)g(X, Z)) \\
&\quad + \frac{m+n-2}{m(n-2)} (\operatorname{Ric}(Y, Z)g(X, \nabla f) - \operatorname{Ric}(X, Z)g(Y, \nabla f)) \\
&\quad - \frac{(n-1)(m+n-2)\lambda + ((n-1)(n-2) - m(m-1))\rho}{m(n-1)(n-2)} (g(X, \nabla f)g(Y, Z) \\
&\quad - g(X, Z)g(Y, \nabla f)).
\end{aligned}$$

Resolvendo os termos semelhantes, temos

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} \operatorname{Rm})(-) &= W(-, \nabla f) + \frac{1}{n-2} (\operatorname{Ric}(X, \nabla f)g(Y, Z) - \operatorname{Ric}(Y, \nabla f)g(X, Z)) \\
&\quad + \frac{m+n-2}{m(n-2)} (\operatorname{Ric}(Y, Z)g(X, \nabla f) - \operatorname{Ric}(X, Z)g(Y, \nabla f)) \\
&\quad - \frac{(n-1)(m+n-2)\lambda - m(m-1)\rho}{m(n-1)(n-2)} (g(X, \nabla f)g(Y, Z) \\
&\quad - g(X, Z)g(Y, \nabla f)). \tag{3.52}
\end{aligned}$$

Da fórmula (3.49) temos $\operatorname{Ric}(\nabla f) = -\frac{m}{2}\nabla\rho + \rho\nabla f$, daí segue que

$$\operatorname{Ric}(\nabla f, X) = g(\operatorname{Ric}(\nabla f), X) = \langle X, -\frac{m}{2}\nabla\rho + \rho\nabla f \rangle,$$

donde,

$$\operatorname{Ric}(\nabla f, X) = -\frac{m}{2}\nabla_X\rho + \rho g(X, \nabla f)$$

e

$$\operatorname{Ric}(\nabla f, Y) = -\frac{m}{2}\nabla_Y\rho + \rho g(Y, \nabla f).$$

Substituindo em (3.52), tem-se

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} \operatorname{Rm})(-, \nabla f) &= W(-, \nabla f) - \frac{m}{2(n-1)} ((\nabla_X \rho)g(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)g(X, Z)) \\
&\quad + \frac{\rho}{n-2} (g(X, \nabla f)g(Y, Z) - g(Y, \nabla f)g(X, Z)) \\
&\quad + \frac{m+n-2}{m(n-2)} (\operatorname{Ric}(Y, Z)g(X, \nabla f) - \operatorname{Ric}(X, Z)g(Y, \nabla f)) \\
&\quad - \frac{(n-1)(m+n-2)\lambda - m(m-1)\rho}{m(n-1)(n-2)} \rho (g(X, \nabla f)g(Y, Z) \\
&\quad - g(X, Z)g(Y, \nabla f)).
\end{aligned}$$

Que podemos inferir que

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} \operatorname{Rm})(-, \nabla f) &= W(-, \nabla f) - \frac{m}{2(n-1)} ((\nabla_X \rho)g(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)g(X, Z)) \\
&\quad + \frac{m+n-2}{m(n-2)} (\operatorname{Ric}(Y, Z)g(X, \nabla f) - \operatorname{Ric}(X, Z)g(Y, \nabla f)) \\
&\quad - \frac{(n-1)(m+n-2)\lambda - m(m+n-2)\rho}{m(n-1)(n-2)} (g(X, \nabla f)g(Y, Z) \\
&\quad - g(X, Z)g(Y, \nabla f)) \\
&= W(-, \nabla f) - \frac{m}{2(n-1)} ((\nabla_X \rho)g(X, Z)) \\
&\quad + \frac{m+n-2}{m(n-2)} (\operatorname{Ric}(Y, Z)g(X, \nabla f) - \operatorname{Ric}(X, Z)g(Y, \nabla f)) \\
&\quad - \frac{m+n-2}{m(n-1)(n-2)} (\operatorname{Ric}(Y, Z)g(X, \nabla f) - \operatorname{Ric}(X, Z)g(Y, Z)g(Y, \nabla f)) \\
&\quad - \frac{(m+n-2)}{m(n-1)(n-2)} ((n-1)\lambda - m\rho) (g(X, \nabla f)g(Y, Z) \\
&\quad - g(X, Z)g(Y, \nabla f)). \tag{3.53}
\end{aligned}$$

A partir de (3.44) e usando o fato que $R = (n-1)\lambda - (m-1)\rho$,

$$\begin{aligned}
C(X, Y, Z) &= (\operatorname{div} \operatorname{Rm})(X, Y, Z) - \frac{1}{2(n-1)} ((\nabla_X R)g(Y, Z) - (\nabla_Y R)g(X, Z)) \\
&= (\operatorname{div} \operatorname{Rm})(X, Y, Z) + \frac{m-1}{2(n-1)} ((\nabla_X \rho)g(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)g(X, Z)) \\
&= (\operatorname{div} \operatorname{Rm})(X, Y, Z) + \frac{m}{2(n-1)} ((\nabla_X \rho)g(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)g(X, Z)) \\
&\quad - \frac{1}{2(n-1)} ((\nabla_X \rho)g(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)g(X, Z)).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} \operatorname{Rm})(-, \nabla f) &= C(X, Y, Z) - \frac{m}{2(n-1)} ((\nabla_X \rho)g(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)g(X, Z)) \\
&\quad + \frac{1}{2(n-1)} ((\nabla_X \rho)g(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)g(X, Z)). \tag{3.54}
\end{aligned}$$

Substituindo a equação (3.54) em (3.53), inferimos que

$$\begin{aligned}
C(X, Y, Z) - W(X, Y, Z, \nabla f) &= \frac{m}{2(n-1)} ((\nabla_X \rho)g(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)g(X, Z)) \\
&\quad - \frac{1}{2(n-1)} ((\nabla_X \rho)g(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)g(X, Z)) \\
&\quad - \frac{m}{2(n-1)} ((\nabla_X \rho)g(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)g(X, Z)) \\
&\quad + \frac{m+n-2}{m(n-1)(n-2)} (\operatorname{Ric}(Y, Z)g(X, \nabla f) - \operatorname{Ric}(X, Z)g(Y, \nabla f)) \\
&\quad - \frac{m+n-2}{m(n-1)(n-2)} ((n-1)\lambda - m\rho) (g(X, \nabla f)g(Y, Z) \\
&\quad - g(X, Z)g(Y, \nabla f)).
\end{aligned}$$

Dai segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{m+n-2} (C(X, Y, Z) - W(X, Y, Z, \nabla f)) \\
&= -\frac{m}{2(n-1)(n-2)} ((\nabla_X \rho)g(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)g(X, Z)) \\
&\quad + \frac{1}{n-2} (\operatorname{Ric}(Y, Z)g(X, \nabla f) - \operatorname{Ric}(X, Z)g(Y, \nabla f)) \\
&\quad - \frac{(n-1)\lambda - m\rho}{(n-1)(n-2)} (g(X, \nabla f)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, \nabla f)). \tag{3.55}
\end{aligned}$$

Ora, como

$$\nabla_X \rho = -\frac{2}{m} \operatorname{Ric}(\nabla f, X) + \frac{m}{2} \rho g(\nabla f, X) \quad \text{e} \quad \nabla_Y \rho = -\frac{2}{m} \operatorname{Ric}(\nabla f, Y) + \frac{m}{2} \rho g(\nabla f, Y),$$

podemos inferir que

$$\begin{aligned}
& \frac{m}{m+n-2} (C(X, Y, Z) - W(X, Y, Z, \nabla f)) \\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)} (\text{Ric}(\nabla f, X)g(Y, Z) - \text{Ric}(\nabla f, Y)g(X, Z)) \\
&\quad - \frac{\rho}{(n-1)(n-2)} (g(X, \nabla f)g(Y, \nabla f) - g(Y, \nabla f)g(X, Z)) \\
&\quad + \frac{1}{n-2} (\text{Ric}(Y, Z)g(X, \nabla f) - \text{Ric}(X, Z)g(Y, \nabla f)) \\
&\quad - \frac{(n-1)\lambda - m\rho}{(n-1)(n-2)} (g(X, \nabla f)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, \nabla f)),
\end{aligned}$$

onde tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{m}{m+n-2} (C(X, Y, Z) - W(X, Y, Z, \nabla f)) \\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)} (\text{Ric}(X, \nabla f)g(Y, Z) - \text{Ric}(Y, \nabla f)g(X, Z)) \\
&\quad + \frac{1}{n-2} (\text{Ric}(Y, Z)g(X, \nabla f) - \text{Ric}(X, Z)g(Y, \nabla f)) \\
&\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g(X, \nabla f)g(Y, Z) - g(Y, \nabla f)g(X, Z)) \\
&= D(X, Y, Z).
\end{aligned}$$

E, portanto,

$$C(X, Y, Z) = W(X, Y, Z, \nabla f) + \frac{m+n-2}{m} D(X, Y, Z).$$

■

Lema 3.15. *Suponha que (M^n, g, f) seja uma variedade do tipo $(\lambda, n+m)$ -Einstein. Se $\sum^{n-1}$ é um conjunto de nível de f com $\nabla f(p) \neq 0$, e seja h_{ab} ($a, b = 1, \dots, n$) e $H = (n-1)\sigma$, a segunda forma fundamental e a curvatura média, respectivamente. Então,*

$$|D|^2 = \frac{2|\nabla f|^4}{(n-2)^2} \sum_{a,b=2}^n |h_{ab} - \sigma g_{ab}|^2 + \frac{m^2}{2(n-1)(n-2)(m-1)^2} |\nabla^\Sigma R|^2, \quad (3.56)$$

onde $|\nabla^\Sigma R|^2 = |\nabla R|^2 - \left(\nabla R \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) \right)^2$.

Demonstração: Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal, onde $e_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, no ponto em que $\nabla f \neq 0$. A segunda forma fundamental h_{ab} e a curvatura média H do nível da

hipersuperfície Σ são dados por

$$\begin{aligned} h_{ab} &= \left\langle \nabla_{e_a} \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, e_b \right\rangle = \frac{1}{|\nabla f|} \left\langle \nabla_{e_a} \nabla f, e_b \right\rangle = \frac{1}{|\nabla f|} \nabla^2 f(e_a, e_b) \\ &= \frac{1}{|\nabla f|} (\lambda g(e_a, e_b) - \text{Ric}(e_a, e_b)). \end{aligned}$$

Logo,

$$h_{ab} = \frac{1}{|\nabla f|} (\lambda g(e_a, e_b) - \text{Ric}(e_a, e_b))$$

e

$$H = \text{tr}(h_{ab}) = \frac{1}{|\nabla f|} (\lambda(n-1) - R + \text{Ric}(e_1, e_2)).$$

Então, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{a,b=2}^n |h_{ab}|^2 &= \frac{1}{|\nabla f|^2} \sum_{a,b=2}^n |\lambda g(e_a, e_b) - \text{Ric}(e_a, e_b)|^2 \\ &= \frac{1}{|\nabla f|^2} \left[\left(\sum_{a,b=2}^n \lambda g(e_a, e_b) \right)^2 - 2 \sum_{a,b=2}^n \lambda (g(e_a, e_b) \text{Ric}(e_a, e_b)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{a,b=2}^n |\text{Ric}(e_a, e_b)|^2 \right] \\ &= \frac{1}{|\nabla f|^2} \left((n-1)\lambda^2 - 2\lambda(R - \text{Ric}(e_1, e_1)) + \sum_{a,b=2}^n |\text{Ric}(e_a, e_b)|^2 \right). \end{aligned}$$

Dai segue que

$$\sum_{a,b=2}^n |h_{ab}|^2 = \frac{1}{|\nabla f|^2} \left((n-1)\lambda^2 - 2\lambda(R - R_{11}) + \sum_{a,b=2}^n |R_{ab}|^2 \right)$$

e

$$H^2 = \frac{1}{|\nabla f|^2} ((n-1)^2 \lambda^2 - 2(n-1)\lambda(R - R_{11}) + (R - R_{11})^2),$$

como $\text{Ric}(\nabla f) = \rho \nabla \rho - \frac{m}{2}$, tem-se que

$$R_{11} = \text{Ric}(e_1, e_1) = \rho - \frac{m}{2|\nabla f|^2} \nabla \rho \nabla f \quad \text{e} \quad R_{1a} = -\frac{m}{2|\nabla f|} \nabla_a \rho.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\text{Ric}(e_1, e_1) &= \text{Ric}\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right) \\
&= \frac{1}{|\nabla f|^2} (\text{Ric}(\nabla f, \nabla f)) \\
&= \frac{1}{|\nabla f|^2} \langle \text{Ric}(\nabla f), \nabla f \rangle \\
&= \rho - \frac{m}{2|\nabla f|^2} \nabla \rho \nabla f
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Ric}(e_1, e_a) &= \frac{1}{|\nabla f|} \text{Ric}(\nabla f, e_a) \\
&= \frac{1}{|\nabla f|} \left\langle \rho \nabla f - \frac{m}{2} \nabla \rho, e_a \right\rangle \\
&= \frac{1}{|\nabla f|} \left(\rho \langle \nabla f, e_a \rangle - \frac{m}{2} \langle \nabla \rho, e_a \rangle \right) \\
&= -\frac{m}{2|\nabla f|} \nabla_a \rho.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b=2}^n |h_{ab} - \sigma g_{ab}|^2 &= \sum_{a,b=2}^n (|h_{ab}|^2 - 2\sigma h_{ab} g_{ab} + \sigma^2 g_{ab}^2) \\
&= \sum_{ab}^n |h_{a,b=2}|^2 - 2\sigma H + (n-1)\sigma^2 \\
&= \sum_{ab}^n |h_{a,b=2}|^2 - 2\sigma H + \sigma H \\
&= \frac{1}{|\nabla f|^2} \left((n-1)\lambda^2 - 2\lambda(R - R_{11}) + \sum_{a,b=2}^n |R_{ab}|^2 \right) - \frac{H^2}{n-1} \\
&= \frac{1}{|\nabla f|^2} \left((n-1)\lambda^2 - 2\lambda(R - R_{11}) + \sum_{a,b=2}^n |R_{ab}|^2 \right) \\
&\quad - \frac{1}{(n-1)|\nabla f|^2} \left((n-1)^2 \lambda^2 - 2(n-1)\lambda(R - R_{11}) + (R - R_{11})^2 \right).
\end{aligned}$$

Donde temos que

$$\sum_{a,b=2}^n |h_{ab} - \sigma g_{ab}|^2 = \frac{1}{|\nabla f|^2} \sum_{a,b=2}^n |R_{ab}|^2 - \frac{(R - R_{11})^2}{(n-1)|\nabla f|^2}. \quad (3.57)$$

Agora, pelo produto interno de Hilbert-Schmidt, tem-se que

$$\begin{aligned}
|\text{Ric}|^2 &= \sum_{i,j=1}^n \langle R_{ij}, R_{ij} \rangle = \sum_{i,j=1}^n R_{ij}^2 \\
&= \sum_{a,b=2}^n R_{ab}^2 + 2R_{1a}^2 + R_{11}^2,
\end{aligned}$$

já que $R_{1a} = R_{a1}$. Portanto,

$$\sum_{a,b=2}^n R_{ab}^2 = |\text{Ric}|^2 - 2R_{1a}^2 - R_{11}^2.$$

Deste modo, podemos reescrever (3.57) como

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b=2}^n |h_{ab} - \sigma g_{ab}|^2 &= \frac{1}{|\nabla f|^2} |\text{Ric}|^2 - \frac{2}{|\nabla f|^2} \sum_{a=2}^n R_{1a}^2 \\
&\quad - \frac{1}{|\nabla f|^2} R_{11}^2 - \frac{1}{(n-1)|\nabla f|^2} (R - R_{11})^2, \tag{3.58}
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{|\nabla f|^2} R_{11}^2 &= -\frac{1}{|\nabla f|^2} (\rho^2 - \frac{2\rho m}{|\nabla f|^2} \nabla \rho \nabla f + \frac{m^2}{4|\nabla f|^4} (\nabla \rho \nabla f)^2) \\
&= -\frac{1}{|\nabla f|^2} \rho^2 + \frac{m\rho}{|\nabla f|^4} \nabla \rho \nabla f - \frac{m^2}{4|\nabla f|^6} (\nabla \rho \nabla f)^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
R - R_{11} &= R - (\rho - \frac{m}{2|\nabla f|^2} \nabla \rho \nabla f) \\
&= (n-1)\lambda - (m-1)\rho - \rho + \frac{m}{2|\nabla f|^2} \nabla \rho \nabla f \\
&= (n-1)\lambda - m\rho + \frac{m}{2|\nabla f|^2} \nabla \rho \nabla f + \frac{m^2(\nabla f \nabla \rho)^2}{4|\nabla f|^4}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
(R - R_{11})^2 &= \left((n-1)\lambda - m\rho + \frac{m}{2|\nabla f|^2} \nabla \rho \nabla f \right)^2 \\
&= \left((n-1)\lambda + m\rho \right)^2 + 2 \left(((n-1)\lambda - m\rho) \frac{m}{2|\nabla f|^2} \nabla \rho \nabla f \right) \\
&\quad + \frac{m^2}{4|\nabla f|^2} (\nabla \rho \nabla f)^2 \\
&= (n-1)^2 \lambda^2 - 2(n-1)\lambda m\rho + \frac{m^2 \rho^2 + m(n-1)\lambda \nabla \rho \nabla f}{|\nabla f|^2} \\
&\quad - \frac{m^2 \rho \nabla \rho \nabla \rho}{|\nabla f|^2} + \frac{m^2 (\nabla f \nabla \rho)^2}{4|\nabla f|^4}.
\end{aligned}$$

Daí, inferimos que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{(n-1)|\nabla f|^2} (R - R_{11})^2 &= -\frac{(n-1)\lambda^2}{|\nabla f|^2} + \frac{2m\lambda\rho}{|\nabla f|^2} - \frac{m^2 \rho^2}{(n-1)|\nabla f|^2} \\
&\quad - \frac{m\lambda \nabla f \nabla \rho}{|\nabla f|^4} + \frac{m^2 \rho \nabla f \nabla \rho \nabla f}{(n-1)|\nabla f|^4} - \frac{m^2 (\nabla f \nabla \rho)^2}{4(n-1)|\nabla f|^6} \\
&= -\frac{(n-1)\lambda^2}{|\nabla f|^2} - \frac{m^2 \rho^2}{(n-1)|\nabla f|^2} + \frac{2m\lambda\rho}{|\nabla f|^2} - \frac{m^2}{4(n-1)|\nabla f|} (\nabla f \rho)^2 \\
&\quad + \frac{m(m\rho - (n-1)\lambda)}{(n-1)|\nabla f|^4} \nabla \rho \nabla f,
\end{aligned}$$

e mais ainda,

$$-\frac{2}{|\nabla f|^2} \sum_{a=2}^n R_{1a}^2 = -\frac{m^2}{2|\nabla f|^4} |\nabla \rho|^2 + \frac{m^2}{2|\nabla f|^6} (\nabla \rho \nabla f)^2,$$

pois,

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{|\nabla f|^2} \sum_{a=2}^n R_{1a}^2 &= -\frac{2}{|\nabla f|^2} \left(\frac{m^2}{4|\nabla f|^2} |\nabla \rho|^2 - \frac{m^2}{4|\nabla f|^4} (\nabla \rho \nabla f)^2 \right) \\
&= -\frac{m^2}{2|\nabla f|^4} |\nabla \rho|^2 + \frac{m^2}{2|\nabla f|^4} (\nabla \rho \nabla f)^2.
\end{aligned}$$

Assim, voltando para 3.58,

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b=2}^n |h_{ab} - \sigma g_{ab}|^2 &= \frac{1}{|\nabla f|^2} |\text{Ric}|^2 - \frac{m^2}{2|\nabla f|^4} |\nabla \rho|^2 + \frac{m^2}{4|\nabla f|^6} (\nabla \rho \nabla f)^2 \\
&\quad - \frac{1}{|\nabla f|^2} \rho^2 + \frac{m\rho}{|\nabla f|^4} \nabla \rho \nabla f - \frac{m^2}{4|\nabla f|^6} (\nabla \rho \nabla f)^2 - \frac{(n-1)}{|\nabla f|^2} \\
&\quad - \frac{m^2 \rho^2}{(n-1)|\nabla f|^2} + \frac{2m\lambda\rho}{|\nabla f|^2} - \frac{m^2}{4(n-1)|\nabla f|^6} (\nabla \rho \nabla f)^2 \\
&\quad + \frac{m(m\rho - (n-1)\lambda)}{(n-1)|\nabla f|^4} \nabla \rho \nabla f \\
&= \frac{1}{|\nabla f|^2} |\text{Ric}|^2 - \frac{m^2}{2|\nabla f|^4} |\nabla \rho|^2 + \frac{m^2(n-2)}{4(n-1)|\nabla f|^6} (\nabla \rho \nabla f)^2 \\
&\quad + \frac{m((m+n-1)\rho - (n-1)\lambda)}{(n-1)|\nabla f|^4} \nabla \rho \nabla f - \frac{m^2+n-1}{(n-1)|\nabla f|^2} \rho^2 \\
&\quad + \frac{2m\lambda\rho}{|\nabla f|^2} - \frac{(n-1)}{|\nabla f|^2} \lambda^2.
\end{aligned}$$

Agora, seja $D_{ijk} = D(e_i, e_j, e_k)$. Daí, segue de (3.55) que

$$\begin{aligned}
D(X, Y, Z) &= -\frac{m}{2(n-1)(n-2)} ((\nabla_X \rho)g(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)g(X, Z)) \\
&\quad + \frac{1}{n-2} (\text{Ric}(Y, Z)g(X, \nabla f) - \text{Ric}(X, Z)g(Y, \nabla f)) \\
&\quad - \frac{(n-1)\lambda - m\rho}{(n-1)(n-2)} (g(X, \nabla f)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, \nabla f)),
\end{aligned}$$

assim,

$$D_{ijk} = b_1((\nabla_i \rho)\delta_{jk} - (\nabla_j \rho)\delta_{ik}) + b_2(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}) - b_3(\nabla_i f \delta_{jk} - \nabla_j f \delta_{ik}),$$

onde tem-se

$$b_1 = -\frac{m}{2(n-1)(n-2)}, \quad b_2 = \frac{1}{n-2} \quad \text{e} \quad b_3 = -\frac{(n-1)\lambda - m\rho}{(n-1)(n-2)}.$$

Dai segue que

$$\begin{aligned}
|D|^2 &= b_1^2((\nabla_i \rho \delta_{jk} - \nabla_j \rho \delta_{ik})^2) + b_1 b_2 (\nabla_i \rho \delta_{jk} - \nabla_j \rho \delta_{ik})(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}) \\
&\quad - b_1 b_3 ((\nabla_i \rho \delta_{jk} - \nabla_j \rho \delta_{ik})(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik})) + b_1 b_2 ((\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}) \\
&\quad (\nabla_i \rho \delta_{jk} - \nabla_j \rho \delta_{ik})) + b_2^2 ((\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik})^2) - b_2 b_3 ((\nabla_i f \delta_{jk} - \nabla_j f \delta_{ik}) \\
&\quad (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik})) - b_1 b_3 ((\nabla_i f \delta_{jk} - \nabla_j f \delta_{ik})(\nabla_i \rho \delta_{jk} - \nabla_j \rho \delta_{ik})) + b_3^2 ((\nabla_i f \delta_{jk} \\
&\quad - \nabla_j f \delta_{ik})^2) - b_2 b_3 (\nabla_i f \delta_{ik} - \nabla_j f \delta_{ik})(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}). \tag{3.59}
\end{aligned}$$

Note agora que

$$\begin{aligned}
b_1^2((\nabla_i \rho \delta_{jk} - \nabla_j \rho \delta_{ik})^2) &= b_1^2(\langle \nabla_i \rho \delta_{jk} - \nabla_j \rho \delta_{ik}, \nabla_i \rho \delta_{jk} - \nabla_j \rho \delta_{ik} \rangle) \\
&= b_1^2(\nabla_i \rho \nabla_i \rho \delta_{jk} \delta_{jk} - \nabla_i \rho \delta_{jk} \nabla_j \rho \delta_{ik} - \nabla_j \rho \nabla_i \rho \delta_{ik} \delta_{jk} \\
&\quad + \nabla_j \rho \nabla_j \rho \delta_{ik} \delta_{ik}) \\
&= b_1^2((n-1)|\nabla \rho|^2 + (n-1)|\nabla \rho|^2) \\
&= b_1^2(2(n-1)|\nabla \rho|^2).
\end{aligned}$$

Observe também que

$$\begin{aligned}
&b_1 b_2 ((\nabla_i \rho \delta_{jk} - \nabla_j \rho \delta_{ik})(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik})) \\
&= b_1 b_2 \langle \nabla_i \rho \delta_{jk} - \nabla_j \rho \delta_{ik}, \nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik} \rangle \\
&= b_1 b_2 (\nabla_i \rho \delta_{jk} \nabla_i f R_{jk} - \nabla_i \rho \delta_{jk} \nabla_j f R_{ik} - \nabla_j \rho \delta_{ik} \nabla_i f R_{jk} + \nabla_j \rho \delta_{ik} \nabla_j f R_{ik}) \\
&= b_1 b_2 ((\delta_{jk} R_{jk}) \nabla_i \rho \nabla_i f - R_{ik} \delta_{jk} \nabla_i \rho \nabla_j f - (R_{jk} \delta_{ik}) \nabla_j \rho \nabla_i f + (\delta_{ik} R_{ik}) \nabla_j \rho \nabla_j f) \\
&= b_1 b_2 (2R \nabla f \nabla \rho - 2\text{Ric}(\nabla f, \nabla \rho)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&b_1 b_3 ((\nabla_i f \delta_{jk} - \nabla_j f \delta_{ik})(\nabla_i \rho \delta_{jk} - \nabla_j \rho \delta_{ik})) \\
&= b_1 b_3 (\langle \nabla_i f \delta_{jk} - \nabla_j f \delta_{ik}, \nabla_i \rho \delta_{jk} - \nabla_j \rho \delta_{ik} \rangle) \\
&= b_1 b_3 (\nabla_i f \nabla_i \rho (\delta_{jk} \delta_{jk}) - \nabla_i f \delta_{jk} \nabla_j \rho \delta_{ik} - \nabla_j f \delta_{ik} \nabla_i \rho \delta_{jk} + \nabla_j f \delta_{ik} \nabla_j \rho \delta_{ik}) \\
&= b_1 b_3 ((n-1) \nabla f \nabla \rho + (n-1) \nabla f \nabla \rho) \\
&= b_1 b_3 (2(n-1) \nabla f \nabla \rho).
\end{aligned}$$

Seguindo com os cálculos, temos que (3.59) terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
|D|^2 &= b_1^2(2(n-1)|\nabla\rho|^2) + b_2^2(2|\nabla f||\text{Ric}|^2 - 2\text{Ric}^2(\nabla f, \nabla f)) \\
&\quad b_3^2(2(n-1)|\nabla f|^2) + 2b_1b_2(2R\nabla\rho\nabla f - 2\text{Ric}(\nabla f, \nabla\rho)) \\
&\quad + 2b_1b_3(2(n-1)\nabla\rho\nabla f) + 2b_2b_3(2|\nabla f|^2R - 2\text{Ric}(\nabla f, \nabla f)) \\
&= \frac{1}{2(n-1)(n-2)^2}(4(n-1)|\nabla f|^2|\text{Ric}|^2 - m^2n|\nabla\rho|^2 \\
&\quad + \frac{4m((m+n-1)\rho - (n-1)\lambda)}{2(n-1)(n-2)^2}(\nabla\rho\nabla f) \\
&\quad - \frac{4((n-1)\lambda - m\rho)^2 + (n-1)\rho^2}{2(n-1)(n-2)^2}|\nabla f|^2).
\end{aligned}$$

Fazendo alguns cálculos, tem-se

$$|D|^2 = \frac{2|\nabla f|^4}{(n-2)^2} \sum_{a,b=2}^n |h_{ab} - \sigma g_{ab}|^2 + \frac{m^2}{2(n-1)(n-2)} |\nabla^\Sigma \rho|^2. \quad (3.60)$$

Como $R = (n-1)\lambda - (m-1)\rho$, segue que $\nabla^\Sigma \rho = -\frac{1}{m-1}\nabla^\Sigma R$. Daí, substituindo em (3.60), segue que

$$|D|^2 = \frac{2|\nabla f|^4}{(n-2)^2} \sum_{a,b=2}^n |h_{ab} - \sigma g_{ab}|^2 + \frac{m^2}{2(n-1)(n-2)(m-1)^2} |\nabla^\Sigma R|^2,$$

o que prova o lema. ■

Se o tensor D for identicamente nulo, então temos propriedades interessantes sobre as variedades $(\lambda, n+m)$ -Einstein. A título de exemplo, estabelecemos algumas delas na seguinte proposição:

Proposição 3.16. *Suponha que (M^n, g, f) , com $n \geq 3$, seja uma variedade do tipo $(\lambda, n+m)$ -Einstein com $m \neq 1$ e $D = 0$. Considerando c um valor regular de f e $\sum_c = \{x \in M; f(x) = c\}$ o conjunto de nível da hipersuperfície de f . Então,*

- (1) $R(\nabla f, X, Y, Z) = 0$ para quaisquer vetores X, Y, Z tangentes a $\sum_c$;
- (2) Tanto a curvatura escalar quanto $|\nabla f|^2$ são constantes ao longo de $\sum_c$;
- (3) A segunda forma fundamental h_{ab} em $\sum_c$ é da forma $h_{ab} = \frac{H}{(n-1)}g_{ab}$;
- (4) A curvatura média H é constante em $\sum_c$;
- (5) Em $\sum_c$ o tensor de Ricci tem um autovalor μ_1 ou dois autovalores μ_1 e μ_2 distintos com multiplicidade 1 e $(n-1)$, respectivamente. Além disso, o autovalor com multiplicidade 1 está na direção de ∇f .

Demonstração: (1) : Sabemos do item (3) que $h_{ac} = \frac{H}{n-1}g_{ac}$ e $h_{ab} = \frac{H}{n-1}g_{ab}$. Daí, pelo item (4), inferimos que $\nabla_a^\Sigma h_{ac} = \nabla_a^\Sigma h_{ab} = 0$, e portanto, segue da equação de Codazzi que $R_{1cab} = \nabla_a^\Sigma h_{ac} - \nabla_a^\Sigma h_{ab} = 0$.

(2) : Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal em que $e_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ e $e_2, \dots, e_n$ são tangentes à Σ_c . Daí,

$$\begin{aligned}\nabla_a(|\nabla f|^2) &= 2\langle \nabla_a \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= 2\nabla^2 f(e_a, \nabla f) \\ &= 2(\lambda g(e_a, \nabla f) - \text{Ric}(e_a, \nabla f) + \frac{1}{m}df \otimes df(e_a, \nabla f)) \\ &= -2\text{Ric}(e_a, \nabla f) \\ &= 0,\end{aligned}$$

pois pelo item (1), concluímos que $\text{Ric}(e_a, \nabla f) = \text{tr}(R(\nabla f, X, e_a, Z)) = 0$. Além disso, a curvatura escalar R será constante ao longo de Σ_c , pois fazendo $D = 0$ no Lema 3.15 tem-se $|\nabla^\Sigma R| = 0$, daí segue que $\nabla^\Sigma R = 0$.

(3) : Basta observar que fazendo $D = 0$ no Lema 3.15 tem-se

$$\sum_{a,b=2}^n |h_{ab} - \sigma g_{ab}| = 0, \text{ isto é, } h_{ab} = \sigma g_{ab}.$$

Ora, como $H = (n-1)\sigma$, temos $\sigma = \frac{H}{n-1}$. Assim,

$$h_{ab} = \frac{H}{n-1}g_{ab}.$$

(4) : Sabemos que $R_{1a} = -\frac{m}{2|\nabla f|}\nabla_a \rho$. Como a curvatura escalar ao longo de Σ_c é constante, temos que $\nabla_a R = 0$, em particular, $\nabla_a \rho = 0$. Assim, $R_{1a} = 0$ ao longo de Σ_c . Agora, pela equação de Codazzi,

$$R_{1cab} = \nabla_a^\Sigma h_{ac} - \nabla_b^\Sigma h_{ab}, \quad a, b, c = 2, \dots, n. \quad (3.61)$$

tomando o traço sobre (3.61), com respeito a a e b e usando o item (3), temos

$$R_{1a} = \nabla_a^\Sigma H - \nabla_b \left(\frac{H}{n-1} g_{ab} \right) \quad (3.62)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n-1} \right) \nabla_a^\Sigma H, \quad (3.63)$$

isto é,

$$R_{1a} = \left(1 - \frac{1}{n-1} \right) \nabla_a^\Sigma H.$$

Como $R_{1a} = 0$ ao longo de $\sum_c$, segue

$$\frac{n-2}{n-1} \nabla_a^\Sigma H = 0.$$

Portanto, H é constante em $\sum_c$.

(5) : Vamos mostrar que o tensor de Ricci tem um único autovalor μ_1 ou dois autovalores distintos μ_1 e μ_2 de multiplicidade 1 e $(n-1)$, respectivamente. De fato, temos que

$$h_{ab} = \frac{1}{|\nabla f|} \nabla^2 f(e_a, e_b) = \frac{\lambda g(e_a, e_b) - R_{ab}}{|\nabla f|}$$

ao longo de $\sum_c$. Usando o fato que $h_{ab} = \frac{H}{n-1} g_{ab}$, segue que

$$\frac{H}{n-1} g_{ab} = \frac{\lambda g_{ab} - R_{ab}}{|\nabla f|} \Rightarrow |\nabla f| H g_{ab} = (n-1) \rho g_{ab} - (n-1) R_{ab},$$

donde

$$R_{ab} = \lambda g_{ab} - \frac{H}{n-1} |\nabla f| g_{ab} = \left(\lambda - \frac{H |\nabla f|}{n-1} \right) g_{ab}.$$

Sendo H e $|\nabla f|$ constantes em $\sum_c$, segue que o tensor de Ricci terá um único autovalor

$$\mu_2 = R_{aa} = \lambda - \frac{H}{n-1} |\nabla f|, \quad a = 2, \dots, n.$$

Que é constante ao longo de $\sum_c$. Além disso,

$$\begin{aligned} \mu_1 &= R_{11} = R - \sum_{a=2}^n R_{aa} \\ &= R - (n-1) \left(\lambda - \frac{H}{n-1} |\nabla f| \right) \\ &= R - (n-1) \lambda + H |\nabla f| \end{aligned}$$

que é constante ao longo de $\sum_c$.

■

Observação 3.5. *Seja (M^n, g, f) uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein com $m \neq 2-n$ e tem um tensor de Weyl harmônico $W(\nabla f, \cdot, \cdot, \cdot)$, daí temos que o tensor D será zero pelo Lema [3.14](#).*

O próximo resultado diz que em uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein compacta com tensor de Bach flat terá tensor de Weyl harmônico e $W(X, Y, Z, \nabla f) = 0$, para quaisquer $X, Y, Z \in TM$.

Teorema 3.17. *Suponha que (M^n, g, f) ($n \geq 4$) seja uma variedade $(\lambda, n+m)$ -Einstein compacta com $m \neq 0, 1$ ou $2-n$. Se o tensor de Bach B é zero, então M tem um tensor de Weyl harmônico e $W(X, Y, Z, \nabla f) = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demonstração: Fixe um ponto $p \in M$ e considere que $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ seja uma base ortonormal com $\nabla_{E_i} E_i(p) = 0$. Usando [\(3.45\)](#), a equação do tensor de Bach [\(3.46\)](#) e o Lema [3.14](#),

$$\begin{aligned} (n-2)B(X, Y) &= \sum_i (\nabla_{E_i} C)(E_i, X, Y) + \sum_{i,j} \text{Ric}(E_i, E_j) W(X, E_i, E_j, Y) \\ &= \sum_i (\nabla_{E_i} W)(E_i, X, Y, \nabla f) + W(E_i, X, Y, \nabla_{E_i} \nabla f) \\ &\quad + \frac{m+n-2}{m} \sum_i (\nabla_{E_i} D)(E_i, X, Y) + \sum_{i,j} \text{Ric}(E_i, E_j) W(X, E_i, E_j, Y). \end{aligned}$$

Agora, escrevendo $\nabla_{E_i} \nabla f = \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_j \rangle E_j$

$$\begin{aligned} (n-2)B(X, Y) &= (\text{div} W)(\nabla f, Y, X) + W(E_i, X, Y, E_j) \nabla^2 f(E_i, E_j) \\ &\quad + \frac{m+n-2}{m} (\nabla_{E_i} D)(E_i, X, Y) + \text{Ric}(E_i, E_j) W(X, E_i, E_j, Y) \\ &= (\text{div} W)(\nabla f, Y, X) + \frac{m+n-2}{m} (\nabla_{E_i} D)(E_i, X, Y) \\ &\quad + W(X, E_i, E_j, Y) (\text{Ric}(E_i, E_j) + \nabla^2 f(E_i, E_j)) \\ &= \frac{n-3}{n-2} C(\nabla f, Y, X) + \frac{m+n-2}{m} (\nabla_{E_i} D)(E_i, X, Y) \\ &\quad + W(X, E_i, E_j, Y) \left(\frac{1}{m} df \otimes df(E_i, E_j) + \lambda g(E_i, E_j) \right) \\ &= \frac{n-3}{n-2} C(\nabla f, Y, X) + \frac{m+n-2}{m} (\nabla_{E_i} D)(E_i, X, Y) \\ &\quad + W(X, E_i, E_j, Y) \left(\frac{1}{m} \langle \nabla f, E_i \rangle \langle \nabla f, E_j \rangle \right) \\ &= \frac{n-3}{n-2} C(\nabla f, Y, X) + \frac{m+n-2}{m} (\nabla_{E_i} D)(E_i, X, Y) \\ &\quad + \frac{1}{m} W(\nabla f, X, Y, \nabla f). \end{aligned}$$

Dai, tem-se

$$(n-2)B(X, Y) = \frac{n-3}{n-2}C(\nabla f, Y, X) + \frac{m+n-2}{m}(\nabla_{E_i}D)(E_i, X, Y) + \frac{1}{m}W(\nabla f, X, Y, \nabla f).$$

Fazendo $X = Y = \nabla f$ e integrando sobre M , temos

$$\begin{aligned} (n-2) \int_M B(\nabla f, \nabla f) dV &= \frac{m+n-2}{m} \int_M \sum_i (\nabla_{E_i}D)(E_i, \nabla f, \nabla f) dV \\ &= -\frac{m+n-2}{m} \int_M \sum_i D(E_i, \nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f) dV, \end{aligned}$$

isto é,

$$(n-2) \int_M B(\nabla f, \nabla f) dV = -\frac{m+n-2}{m} \int_M \sum_i D(E_i, \nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f) dV. \quad (3.64)$$

Com efeito, inicialmente vamos mostrar que

$$\int_M (\operatorname{div} D)(\nabla f, \nabla f) dV = - \int_M D(E_i, \nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f) dV.$$

Para provar esta igualdade iremos considerar a 1-forma $\omega(X) = D(X, \nabla f, \nabla f)$.

Daí, lembre que

$$\operatorname{div}(\omega) = \nabla_{E_i}(\omega(E_i)) - \omega(\nabla_{E_i}E_i),$$

assim

$$\operatorname{div}(\omega) = E_i(D(E_i, \nabla f, \nabla f)) - D(\nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f, \nabla f). \quad (3.65)$$

Ora, como temos

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} D)(\nabla f, \nabla f) &= (\nabla_{E_i}D)(E_i, \nabla f, \nabla f) \\ &= E_i(D(E_i, \nabla f, \nabla f)) - D(\nabla_{E_i}E_i, \nabla f, \nabla f) - D(E_i, \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f) \\ &\quad - D(E_i, \nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f), \end{aligned} \quad (3.66)$$

Segue de (3.65) e (3.66) que

$$(\operatorname{div} D)(\nabla f, \nabla f) = \operatorname{div}(\omega) - D(E_i, \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f) - D(E_i, \nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f). \quad (3.67)$$

Afirmção: $D(E_i, \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f) = 0$.

Com efeito, note que $D(E_i, \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f) = D(E_i, E_k, \nabla f)\langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_k \rangle$, daí como te-

mos $\nabla^2 f = -\text{Ric} + \frac{1}{m}df \otimes df + \lambda g$, segue que

$$\nabla^2 f(E_i, E_k) = \text{Ric}(E_i, E_k) + \frac{1}{m}\langle \nabla f, E_i \rangle \langle \nabla f, E_k \rangle + \lambda \langle E_i, E_k \rangle.$$

Ora, como temos que

$$\begin{aligned} \sum_{ik} D(E_i, E_k, \nabla f) \text{Ric}(E_i, E_k) &= - \sum_{ik} D(E_k, E_i, \nabla f) \text{Ric}(E_i, E_k) \\ &= - \sum_{ik} D(E_i, E_k, \nabla f) \text{Ric}(E_k, E_i), \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} D(E_i, \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla f) &= D(E_i, E_k, \nabla f) \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_k \rangle \\ &= D(E_i, E_k, \nabla f) \left(-\text{Ric}(E_i, E_k) + \frac{1}{m} \langle \nabla f, E_i \rangle \langle \nabla f, E_k \rangle \right. \\ &\quad \left. + \lambda \langle E_i, E_k \rangle \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daí,

$$\sum_{ik} D(E_i, E_k, \nabla f) \text{Ric}(E_i, E_k) = 0.$$

Além disso,

$$\sum_{i,k} D(E_i, E_k, \nabla f) \langle \nabla f, E_i \rangle \langle \nabla f, E_k \rangle = D(\nabla f, \nabla f, \nabla f) = 0.$$

E mais,

$$\sum_{i,k} D(E_i, E_k, \nabla f) \langle E_i, E_k \rangle = \sum_i D(E_i, E_i, \nabla f) = 0.$$

Assim, voltando para (3.67), tem-se

$$(\text{div} D)(\nabla f, \nabla f) = \text{div}(\omega) - D(E_i, \nabla f, \nabla_{E_i} \nabla f).$$

Daí, integrando sobre M , e notando que pelo teorema da divergência $\int_M \text{div}(\omega) dV = 0$, inferimos que

$$\int_M (\text{div} D)(\nabla f, \nabla f) dV = - \int_M D(E_i, \nabla f, \nabla_{E_i} \nabla f) dV.$$

Voltando para (3.64), temos

$$\frac{m(n-2)}{m+n-2} \int_M B(\nabla f, \nabla f) dV = - \int_M \sum_i D(E_i, \nabla f, \nabla_{E_i} \nabla f) dV. \quad (3.68)$$

Agora, vamos analisar $-\sum_i D(E_i, \nabla f, \nabla_{E_i} \nabla f)$. Como $\nabla_{E_i} \nabla f = \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_j \rangle E_j$,

$$\begin{aligned} & - \sum_i D(E_i, \nabla f, \nabla_{E_i} \nabla f) \\ &= - \sum_{i,j} D(E_i, \nabla f, E_j) \nabla^2 f(E_i, E_j) \\ &= \sum_{i,j} D(E_i, \nabla f, E_j) (\text{Ric}(E_i, E_j) - \frac{1}{m} g(E_i, \nabla f) g(E_j, \nabla f) - \lambda g(E_i, E_j)) \\ &= \sum_{i,j} D(E_i, \nabla f, E_j) (\text{Ric}(E_i, E_j) - \frac{1}{m} g(E_i, \nabla f) g(E_j, \nabla f)) \\ &= \sum_{i,j,k} D(E_i, E_k, E_j) g(E_k, \nabla f) (\text{Ric}(E_i, E_j) - \frac{1}{m} g(E_i, \nabla f) g(E_j, \nabla f)) \\ &= \sum_{i,j,k} D(E_i, E_k, E_j) (\text{Ric}(E_i, E_j) g(E_k, \nabla f)) \\ &\quad - \frac{1}{m} \sum_{i,j,k} D(E_i, E_k, E_j) g(E_i, \nabla f) g(E_j, \nabla f) \\ &= \sum_{i,j,k} D(E_i, E_k, E_j) (\text{Ric}(E_i, E_j) g(E_k, \nabla f)) \\ &= \sum_{i,j,k} D(E_i, E_k, E_j) \left(\frac{1}{2} (\text{Ric}(E_i, E_j) g(E_k, \nabla f) - \text{Ric}(E_k, E_j) g(E_i, \nabla f)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} D(E_i, E_k, E_j) (\text{Ric}(E_i, E_j) g(E_k, \nabla f) - \text{Ric}(E_k, E_j) g(E_i, \nabla f)). \end{aligned}$$

Como $\{E_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal, por (3.48), temos que

$$-D(E_i, E_k, E_j) = \frac{1}{n-2} (\text{Ric}(E_i, E_j) g(E_k, \nabla f) - \text{Ric}(E_k, E_j) g(E_i, \nabla f))$$

Daí, podemos inferir que

$$-\sum_i D(E_i, \nabla f, \nabla_{E_i} \nabla f) = -\frac{1}{2(n-2)} \sum_{i,j,k} |D(E_i, E_j, E_k)|^2.$$

Voltando para (3.68), podemos inferir que

$$\frac{m(n-2)}{m+n-2} \int_M B(\nabla f, \nabla f) dV = -\frac{1}{2(n-2)} \int_M |D|^2 dV. \quad (3.69)$$

Assim, o tensor de Bach sendo zero sobre M implica que o tensor D também será sobre M . Além disso, de (3.51) temos $C(X, Y, Z) = W(X, Y, Z, \nabla f)$. Mostrando que ambos são zero nos pontos regulares de f e, portanto, em M , uma vez que, f é analítica (veja [14], Proposição 2.4). Daí, em um ponto regular de f , considere $E_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ e $C_{ijk} = C(E_i, E_j, E_k)$. Pelas propriedades de simetria do tensor de Weyl, temos $C_{ij1} = 0$. Sejam $a, b, c \geq 2$ números inteiros. Pela Proposição 3.16, podemos inferir que $\text{Ric}(E_1, E_a) = 0$ e $R(E_1, E_a, E_b, E_c) = 0$, donde temos que

$$W(E_a, E_b, E_c, E_1) = R(E_a, E_b, E_c, E_1) = 0.$$

Então temos

$$C_{abc} = W(E_a, E_b, E_c, \nabla f) = 0.$$

Agora só resta mostrar que $C_{1ij} = 0$ para $i, j = 1, \dots, n$. Observe que, sendo $D = 0$ e por hipótese, o tensor de Bach é zero, temos

$$0 = (n-2)B(E_i, E_j) = \frac{n-3}{n-2}C(\nabla f, E_i, E_j) + \frac{1}{m}W(\nabla f, E_i, E_j, \nabla f).$$

Como

$$\begin{aligned} C(\nabla f, E_i, E_j) &= C\left(\nabla f \frac{|\nabla f|}{|\nabla f|}, E_i, E_j\right) \\ &= C\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, E_i, E_j\right)|\nabla f| \\ &= C_{1ij}|\nabla f| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W(\nabla f, E_i, E_j, \nabla f) &= W\left(\nabla f \frac{|\nabla f|}{|\nabla f|}, E_i, E_j, \nabla f\right) \\ &= W(E_1, E_i, E_j, \nabla f)|\nabla f| \\ &= C(E_1, E_i, E_j)|\nabla f| \\ &= C_{1ij}|\nabla f|. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
0 = (n-2)B(E_i, E_j) &= \frac{n-3}{n-2}C_{1ij}|\nabla f| + \frac{1}{m}C_{1ij}|\nabla f| \\
&= \left(\frac{n-3}{n-2} + \frac{1}{m}\right)C_{1ij}|\nabla f|.
\end{aligned}$$

Assim $C_{1ij} = 0$ se $m \neq -\frac{n-2}{n-3}$. Observe que se considerarmos $-\frac{n-2}{n-3} = -2$ teremos $n = 4$. Ora, por hipótese devemos ter $m \neq 2 - n$ e isso implica que $m \neq 2$. Dai segue que para $n = 4$ tem-se $m \neq -\frac{n-2}{n-3}$. Quando $n \geq 5$, o resultado segue da Proposição 5.1 de [7]. O que prova que $C_{1ij} = 0$ para todo $m \neq 0, 1$ ou $2 - n$. Portanto o teorema fica demonstrado. ■

Teorema 3.18. *Suponha que (M^4, g, f) seja uma variedade compacta $(\lambda, 4+m)$ -Einstein com $m \neq 0, 1$ ou $n - 2$. Se o tensor de Bach for zero, então M será localmente conformemente plana.*

Demonstração: Sabemos do teorema anterior que para (M^4, g, f) o tensor de Weyl é harmônico e que $W(\nabla f, X, Y, Z) = 0$, $\forall X, Y, Z \in TM$. Suponha que M não seja Einstein. Em um ponto regular p de f , assumimos que o tensor de Ricci tenha autovalores distintos. Agora, pelo Teorema de Sard, temos que o complemento de tais pontos não pode conter um conjunto aberto, Por ([14], Proposição 2.4) temos que g e f são analíticas. Então é suficiente mostrar que a métrica g é localmente conformemente plana em torno do ponto p . Por ([14], Teorema 7.9) a métrica g é localmente um produto warped sobre um intervalo, o que significa que

$$g = g_B + f^2 g_F, \quad (3.70)$$

pois (F^3, g_F) é uma variedade Einstein, em particular, tem curvatura seccional constante e $\dim B = 1$. Colocando f^2 em evidência na equação (3.70), temos que

$$g = \left(\frac{1}{f^2}g_B + g_F\right)f^2.$$

Dai, considere $\tilde{g} = \frac{1}{f^2}g_B + g_F$, essa métrica $\tilde{g}$ está relacionada com a variedade produto $B \times F$, pois dados (B, g_B) e (F, g_F) , a métrica de $B \times F$ será dada por $g = g_B + g_F$. Agora, usando o fato que $\tilde{W} = W$, pois o tensor de Weyl é invariante por transformações conformes, concluímos da Proposição 3.13 que $W = 0$, o que prova o teorema. ■

Observação 3.6. Em [14], os autores consideraram um produto warped em variedades Einstein com fronteira não vazia. Seja $u = \exp(-\frac{f}{m})$ no interior de M e $u = 0$ sobre

∂M . Daí, tanto o Teorema [3.17](#) quanto o Teorema [3.18](#) podem ser estendidos para o caso em que as variedades tenham fronteira, que foi o nosso objetivo de estudo até aqui. De fato, tomando então qualquer $\varepsilon > 0$, definamos $M_\varepsilon = \{x \in M; u(x) \geq \varepsilon\}$. Agora só resta mostrar que $D = 0$ sobre M_ε , pois tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, implica que $D \equiv 0$ sobre ∂M .

Demonstração: Inicialmente note que a partir de [\(3.64\)](#), podemos inferir que

$$(n-2) \int_{M_\varepsilon} B(\nabla f, \nabla f) dV = -\frac{m+n-2}{m} \int_{M_\varepsilon} (\operatorname{div} D)(\nabla f, \nabla f) dV. \quad (3.71)$$

Agora, integrando [\(3.67\)](#), tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{M_\varepsilon} (\operatorname{div} D)(\nabla f, \nabla f) dV &= \int_{M_\varepsilon} \operatorname{div}(\omega) dV - \int_{M_\varepsilon} D(E_i, \nabla f, \nabla_{E_i} \nabla f) dV \\ &= \int_{\partial M_\varepsilon} \omega(\nu) dS - \frac{1}{2(n-2)} \int_{M_\varepsilon} |D|^2 dV. \end{aligned}$$

Como $\omega(\nu) = \omega\left(-\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right) = -\frac{1}{|\nabla f|} D(\nabla f, \nabla f, \nabla f) = 0$, inferimos que

$$\int_{M_\varepsilon} (\operatorname{div} D)(\nabla f, \nabla f) dV = -\frac{1}{2(n-2)} \int_{M_\varepsilon} |D|^2 dV. \quad (3.72)$$

Como, por hipótese, o tensor de Bach é zero, segue de [\(3.71\)](#) que

$$\frac{m+n-2}{m} \int_{M_\varepsilon} (\operatorname{div} D)(\nabla f, \nabla f) dV = (n-2) \int_{M_\varepsilon} B(\nabla f, \nabla f) dV = 0,$$

isto é,

$$\frac{m+n-2}{m} \int_{M_\varepsilon} (\operatorname{div} D)(\nabla f, \nabla f) dV = 0, \quad (3.73)$$

Daí, temos através de [\(3.72\)](#) e [\(3.73\)](#) que

$$-\frac{1}{2(n-2)} \int_{M_\varepsilon} |D|^2 dV = 0 \Rightarrow |D|^2 = 0 \Rightarrow D \equiv 0.$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] AMBROSIO, L.: *On static three-manifolds with positive scalar curvature*. J. Differ. Geom. **107**(1), 1-45 (2017)
- [2] BARROS, A.: *Characterizations and integral formulae for generalized m -quasi-Einstein metrics*. Bull. Braz. Math. Soc. New Ser. 45(2), 325–341 (2014)
- [3] BESSE, A. L.: *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg. (1987)
- [4] BISHOP, A. L *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg. (1987)
- [5] BOUCHER, W., GIBBONS, G.W., HOROWITZ, G.T.: *Uniqueness theorem for anti-de Sitter spacetime*. Phys. Rev. D (3) **30**(12), 2447–2451 (1984)
- [6] BRENDLE, S., MARQUES, F. C., NEVES, A.: *Deformations of the hemisphere that increase scalar curvature*. Invent math. **185**(1), 175-197 (2011)
- [7] CAO, H-D., CHEN, Q.: *On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons*. preprint, 2011: arXiv 1105.3163v3
- [8] CARMO, M. C.: *Geometria Riemanniana*, (5a edição) Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro. (2015)
- [9] CHEN, Q., HE, C.: *On Bach flat warped product Einstein manifolds*. Pacific journal.**265**(2), 265-313 (2013)
- [10] COUTINHO, F., DIÓGINES, R., LEANDRO, B., RIBEIRO JR.: *Static perfect fluid space-time on compact manifolds*. Class. Quantum Grav. **37**(1), 015003 (2019)
- [11] CHRUSCIEL, P.T.: *Remarks on rigidity of the de Sitter metric*. preprint. homepage.univie.ac.at/piotr.chrusciel/ papers/deSitter/deSitter2.pdf
- [12] FREITAS, A., SANTOS, M.: *Boundary topology and rigidity results for generalized $(\lambda, n + m)$ -Einstein manifolds*. Annali di matematica pura ed Applicata. **199**(1), 2511–2520 (2020)

- [13] FREITAS, A.: *New gap results on n -dimensional static manifolds*. Mathematische Nachrichten. (2020)
- [14] HE, C., PERTERSEN, P., WYLIE, W.: *On the classification of warped product Einstein metrics*. Commun. Anal. Geom. **20**(2), 271–311 (2012)
- [15] HE, C., PERTERSEN, P., WYLIE, W.: *Warped product Einstein metrics over spaces with constant scalar curvature*. Asian J. Math. **18**(1), 159–189 (2014)
- [16] KASUE, A.: *Ricci curvature, geodesics and some geometric properties of Riemannian manifolds with boundary*. J. Math. Soc. Japan **35**(1), 23–29 (1981)
- [17] KIM, D. -S.; KIM, Y. H.: *Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature*. Proc. Amer. Math. Soc. **131**(8), 2573–2576 (2003)
- [18] MIAO, P., TAM, L.-F.: *On the volume functional of compact manifolds with boundary with constant scalar curvature*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations. **36**(2), 141 - 171 (2009)
- [19] O’NEILL, B.: *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*, Academic Press, Nova York. (1983)
- [20] OKUMURA M.: *Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor*, Am. J. Math. **96**(1), 207–213 (1974)
- [21] PETERSEN, P.: *Riemannian Geometry*, Second edition. New York: Springer-Verlag New York. (2006)
- [22] REILLY, R. C.: *Geometric applications of the solvability of Neumann problems on a Riemannian manifold*. Arch. Ration. Mech. Anal. **75**(1), 23–29 (1980)
- [23] YANO, K.: *Integral Formulas in Riemannian Geometry* (New York: Dekker). (1970)
- [24] ZENG, F.: *Rigidity of τ -quasi Ricci-Harmônico metrics*, Indian J. Pure Appl. Math. **49**(1), 431–449 (2018)