

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Introdução às bases de Riesz e aplicações na estabilização fronteira de problemas de vigas

Alessandro Fernandes Silva

João Pessoa – PB
Maio de 2022

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Introdução às bases de Riesz e aplicações na estabilização fronteira de problemas de vigas

por

Alessandro Fernandes Silva

sob a orientação de

Dr. Maurício Cardoso Santos

João Pessoa – PB
Maio de 2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586i Silva, Alessandro Fernandes.

Introdução às bases de Riesz e aplicações na estabilização fronteira de problemas de vigas / Alessandro Fernandes Silva. - João Pessoa, 2022.
119 f. : il.

Orientação: Maurício Cardoso Santos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática - Bases de Riesz. 2. Estabilidade exponencial. 3. Método da comparação. 4. Problemas de vigas. 5. C0-semigrupos. I. Santos, Maurício Cardoso. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CAMPUS I – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DE MESTRADO JUNTO AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA, REALIZADA NO DIA 31 DE MAIO DE 2022.

Ao trigésimo primeiro dia de maio de dois mil e vinte e dois, às 14:00 horas, por meio da plataforma virtual *Google Meet*, através do link: <https://meet.google.com/oex-ptei-kwm>, em conformidade com o parágrafo único do Art. 80 da Resolução CONSEPE nº 79/2013, que regulamenta a defesa de trabalho final por videoconferência, seguindo os mesmos preceitos da defesa presencial, foi aberta a sessão pública de Defesa de dissertação intitulada “**Introdução às bases de Riesz e aplicações na estabilização fronteira de problemas de vigas**”, do aluno **Alessandro Fernandes Silva**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, na área de **Análise**, sob a orientação do Prof. Dr. Maurício Cardoso Santos. A Banca Examinadora, indicada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, foi composta pelos professores: Dr. Mauricio Cardoso Santos (Orientador), Dr. Fágner Dias Araruna (membro interno), Dr^a Bianca Morelli Rodolfo Calsavara (membro externo/UNICAMP) e Dr. José Carlos de Albuquerque Melo Júnior (membro externo/UFPE). O professor Maurício Cardoso Santos, em virtude da sua condição de orientador, presidiu os trabalhos e, depois das formalidades de apresentação, convidou o aluno a discorrer sobre o conteúdo da dissertação. Concluída a explanação, o candidato foi arguido pela banca examinadora que, em seguida, sem a presença do aluno, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar tendo concedido ao candidato a menção: **Aprovado**. E, para constar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 31 de maio de 2022.

Maurício Cardoso Santos *Maurício Cardoso Santos*

Fágner Dias Araruna *Fágner Dias Araruna*

Bianca Morelli Rodolfo Calsavara *Balsavara*

José Carlos de Albuquerque Melo Júnior *J.C. de Albuquerque*

Dedico a meus pais, José Silva e Antônia Aluciena, e aos meus irmãos, Alexandre Fernandes e Alúcio Fernandes.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus pela vida e pelas bênçãos recebidas, por me dar sabedoria e força interior para vencer os obstáculos, superando minhas dificuldades e me guiando sempre. Aos meus pais, irmãos e familiares que não mediram esforços para que eu pudesse concluir mais uma grande etapa de conquistas, pessoas que sempre acreditaram em mim e em meus objetivos de vida.

Sou e serei sempre grato também a todos os professores da Universidade Regional do Cariri - URCA pelo incentivo e voto de confiança em mim depositados.

Tenho imensa gratidão a todos os professores deste programa de Pós-Graduação - Elisandra de Fátima Gloss, Jacqueline Fabiola, Alexandre de Bustamante, Fágner Dias Araruna, Felipe W. Chaves-Silva, João Marcos B. do Ó, Marcio Silva Santos, Maurício C. Santos, Uberlandio Batista Severo - que contribuíram de forma significativa para o meu crescimento acadêmico pessoal. Em especial, agradeço: aos professores Fágner Dias Araruna e Felipe W. Chaves-Silva e todos os alunos do grupo de estudo de Teoria do Controle pela contribuição direta a este trabalho; aos secretários do departamento: Roseli Agapito e Ewerton Monteiro.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas que sempre acreditaram em mim e me apoiaram. Em especial, agradeço aos meus amigos de infância: Antônio Maxuel e Mario Alexis.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas de Graduação e Pós-Graduação: Cicero Alexandre, Shirley Primo, Natália Lucas, Renato Vieira, Paulo Vicente, Lucas Machado, Matheus Evangelista, Luiz Felipe - pela contribuição direta a este trabalho. Em especial, agradeço a Cicero Alexandre, Natália Lucas e Shirley Primo que sempre estiveram ao meu lado durante toda a Graduação e Pós-Graduação.

Deixo aqui, profunda gratidão ao meu grande amigo Renato Vieira que foi como pai durante a Pós-Graduação.

Deixo aqui também, profunda gratidão à meu orientador, Dr. Maurício Cardoso Santos, pela dedicação dada a este trabalho, pelas cobranças, serenidade, paciência e atenção com que me orientou e pelo incentivo e amizade.

Resumo

Neste trabalho iremos estudar um método que possibilite gerar bases de Riesz para sistemas unidimensionais, do tipo equação de viga sob controles na fronteira ou feedback pontual. A geração da base de Riesz resulta naturalmente na estabilidade exponencial e na condição de crescimento determinada pelo espectro. Faremos estudos em dois problemas de vigas que serão representados por equações de evolução, neles investigaremos o comportamento assintótico e a analiticidade das soluções. Nosso objetivo principal é apresentar as condições necessárias e suficientes para obter uma estabilidade exponencial do semigrupo correspondente. A ferramenta utilizada será o Método da Comparação junto com a teoria de semigrupos e operadores dissipativos em espaços de Hilbert.

Palavras-chave: Bases de Riesz; Estabilidade Exponencial; Método da Comparação; Problemas de Vigas e C_0 - Semigrupos.

Abstract

In this work we will study a method that is possible to generate one-dimensional Riesz bases, beam equation type under boundary controls or point feedback. The generation of the Riesz base naturally results in exponential stability and the growth condition determined by the spectrum. We will study two beam problems that will be represented by evolution equations, in them we will investigate the asymptotic behavior and the analyticity of the solutions. Our main objective is to present the necessary and sufficient conditions to obtain an exponential stability of the corresponding semigroup.

Keywords: Riesz bases; Exponential Stability; Comparison Method; Beam Problems and C_0 -Semigroups

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Espaços Normados e Banach	5
1.2 Operadores Lineares Contínuos em Espaços de Banach	7
1.2.1 Operadores lineares	7
1.2.2 O espectro de um operador linear contínuo	11
1.2.3 Operadores compactos	13
1.3 C_0 -Semigrupos	15
1.3.1 Semigrupo de operadores lineares contínuos	15
1.3.2 C_0 -semigrupos gerados por operadores dissipativos	17
1.3.3 Estabilidade para C_0 -semigrupos	18
1.4 Integração sobre curvas em \mathbb{C}	23
1.4.1 Teorema da Integral de Cauchy	25
1.4.2 Projeções de Riesz e Cálculo Funcional	26
1.4.3 Autovalores de tipo finito	34
1.5 Espaços de Sobolev	36
2 Bases de Riesz em Espaço de Hilbert	39
2.1 Bases de Riesz	39
2.2 Perturbações para bases de Riesz	43
2.3 Operador espectral de Riesz.	46
3 Método da Comparação.	53
3.1 Estabilização da fronteira para o problema de viga Euler-Bernoulli.	54
3.2 Estabilização da fronteira com uma massa de ponta.	86
Referências Bibliográficas	109

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\text{span}(S)$ - Subespaço formado por todas as combinações lineares de elementos de S .
- $\mathcal{L}(X, Y)$ - Conjunto dos operadores lineares limitadas de X em Y .
- $\mathcal{L}(X)$ - Conjunto dos operadores lineares limitadas de X em X .
- $\mathcal{K}(X, Y)$ - Conjunto dos operadores compactos de X em Y .
- $\mathcal{K}(X)$ - Conjunto dos operadores compactos de X em X .
- \sup - Supremo.
- X^* - Espaço dual de X .
- \mathcal{A}^* - Operador auto-adjunto do operador \mathcal{A} .
- $\rho(\mathcal{A})$ - Conjunto resolvente do operador \mathcal{A} .
- $\sigma(\mathcal{A})$ - Espectro do operador \mathcal{A} .
- $\sigma_p(\mathcal{A})$ - Espectro pontual do operador \mathcal{A} .
- $\sigma_c(\mathcal{A})$ - Espectro contínuo do operador \mathcal{A} .
- $\sigma_r(\mathcal{A})$ - Espectro residual do operador \mathcal{A} .
- $C(0, \infty; X)$ - Conjunto das aplicações contínuas de $(0, \infty)$ em X .
- Re - Parte real.
- $\text{Ker}(\mathcal{A})$ - Núcleo do operador \mathcal{A} .
- $\omega_0(\mathcal{A})$ - Limite de crescimento do operador \mathcal{A} .

- $S(\mathcal{A})$ - Cota superior do espectro do operador \mathcal{A} .
- Γ - Contorno de Cauchy.
- \oplus - Soma direta entre subespaços.
- \mathbb{P}_σ de \mathcal{A} - Projeção de Riesz de \mathcal{A} em um espaço de Banach, correspondente à parte isolada σ do espectro do operador \mathcal{A} .
- $\dim(X)$ - Dimensão do espaço X .
- $\text{supp}(\phi)$ - Suporte da função ϕ .
- $C^m(\Omega)$ - Espaço das funções contínuas tais que todas suas derivadas de ordem $m \leq \alpha$ são contínuas em Ω .
- $C_0(\Omega)$ - Conjunto das funções de $C(\Omega)$ com suporte compacto.
- $C^\infty(\Omega)$ - Conjunto formado por todas as funções que juntamente com todas as suas derivadas parciais são contínuas em Ω .
- $C_0^\infty(\Omega)$ - Conjunto das funções de $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto.
- $H^m(\Omega)$ - Espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω .
- \hookrightarrow - Imersão entre espaços.
- $\text{sp}(\mathcal{A})$ - Espaço raiz do operador \mathcal{A} (Espaço formado por todas as combinações lineares de autovetores generalizados do operador \mathcal{A}).
- $E(\lambda, \mathcal{A})$ - Projeção no espaço de autovetores de \mathcal{A} correspondente ao ponto espectral isolado λ .
- $R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ - Operador resolvente.
- $L^2(0, 1)$ - Conjunto das funções mensuráveis definidas em $(0, 1)$ com valores em \mathbb{C} que são quadrados integráveis no sentido da integral de Lebesgue.
- $H_L^2(0, 1) = \{f(x) \in H^2(0, 1) | f(0) = f'(0) = 0\}$.
- $\arg \rho$ - Ângulo correspondente do complexo ρ .
- $\det(A)$ - Determinante da matriz A .
- $\mathcal{O}(\cdot)$ - Descreve o comportamento limitante para uma função quando seu argumento tende a um valor específico ou para o infinito.

Introdução

Na teoria das Equações Diferenciais Parciais (EDPs) são conhecidas diversas equações que não podem ser resolvidas analiticamente. Dessa forma, quando desejamos modelar fenômenos, a utilização de técnicas que possibilitem a obtenção de propriedades qualitativas se tornam de grande importância.

Um tipo de propriedade qualitativa que podemos citar são aquelas obtidas por meio da aplicação na EDP de uma força (controle) do tipo *Feedback*, que consiste, essencialmente em fazer com que alguma saída, digamos y , se comporte de uma maneira desejada manipulando alguma entrada, digamos x , em que o objetivo do controle é manter a saída y num valor desejado. Um exemplo de controle bem simples que podemos citar é o de tornar a saída y pequena ou próximo de algum ponto de equilíbrio. Podemos resumir a ação de controle feedback da seguinte maneira: primeiro mede-se o valor da saída, em seguida, compara-se o valor medido da saída com o valor da “saída esperado”, e por fim, o valor do erro é alimentado ao controlador com a finalidade de reduzir o erro. Veja [6] e [7] para uma interpretação mais detalhada sobre a teoria de controle feedback e para exemplos de várias aplicações.

Dizemos que os sistemas são *estáveis*, quando toda entrada limitada produz uma saída limitada, independente de qual seja o seu estado inicial. Quando não é satisfeita esta condição dizemos que estes sistemas são *instáveis*. Diante disso, quando projetamos um sistema de feedback como controle, é natural que seja feito um estudo sobre suas características de estabilidade.

Cada sistema descrito por uma equação diferencial parcial tem associado um funcional de energia $E(t)$. Entendemos como estabilização o comportamento assintótico (decaimento para zero) em tempo dessa energia.

Para os problemas de estabilização estudados nesse trabalho, faremos um estudo sobre o decaimento exponencial. Queremos que o operador associado ao sistema satisfaça as condições necessárias para que o seu semigrupo $T(t)$ correspondente seja exponencialmente estável, isto é, existam constantes positivas $M, \omega > 0$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\omega t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Observemos que, para que estas condições sejam válidas, precisaremos que o sistema possua solução. Diante disso, é natural encontrarmos soluções para o problema e em seguida fazer um estudo do seu comportamento assintótico.

Neste trabalho, pretendemos fazer um estudo bibliográfico de alguns resultados contidos em [5] que tratam de problemas de estabilização para problemas de vigas e tais resultados podem ser encontrados nas Seções 3.1 e 3.2 do livro. Utilizaremos um método de comparação que possibilita gerar bases de Riesz para sistemas unidimensionais para o problema em questão. A existência das bases de Riesz estão relacionadas com a estabilidade exponencial de certos problemas em EDP e com a condição de crescimento determinada pelo espectro (Veja Definição 1.3.19). É importante ressaltar que existem na literatura exemplos de equações em que a condição de crescimento determinada pelo espectro não é válida, veja [12, Exemplo 3.6] para um exemplo. Diante disso, veremos que a existência de bases de Riesz assume um papel fundamental.

O objetivo principal do nosso trabalho é construir um material que possa nortear pesquisadores e estudantes interessados sobre o tema. Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresentaremos conteúdos de Análise funcional que iremos utilizar ao longo da dissertação. Os teoremas são apresentados sem a demonstração, porém, deixaremos claro onde podem ser encontradas.

No Capítulo 2, introduzimos as noções de bases de Riesz. Começaremos definindo o conceito de base linearmente independente para o espaço \mathbb{C}^n e em seguida definindo bases ω -linearmente independentes para espaços de dimensão infinita. Veremos quando duas bases de um espaço de Hilbert são equivalentes, o que representa um passo inicial para a comparação entre bases, o que será importante, futuramente para a construção de bases de Riesz. Falaremos sobre bases ortonormais e, em seguida, trataremos a definição precisa de base de Riesz, que são aquelas equivalentes às bases ortonormais. Também, mostraremos resultados de perturbações sobre a base de Riesz que são conhecidos como estabilidade de bases de Riesz. São resultados importantes pois quando dois objetos matemáticos estão “próximos” um do outro de uma maneira adequada as propriedades comuns são compartilhadas. Na terceira seção falaremos um pouco sobre o operador espectral de Riesz. Para isto, começaremos definindo quando um autovetor de um operador linear é generalizado. Apresentaremos em seguida a projeção $E(\lambda, \mathcal{A})$ no espaço de autovetores correspondente a um ponto espectral isolado, esta projeção por sua vez é um funcional linear limitado atuando no espaço de Hilbert. Por fim, demonstraremos alguns resultados sobre bases de Riesz que foram utilizados na dissertação.

Por fim, no Capítulo 3, falaremos um pouco sobre o método da comparação que

é utilizado para encontrar bases de Riesz associadas a operadores diferenciais. Em seguida faremos um estudo aplicando a um problema de viga delgada flexível conhecida como equação de viga de Euler-Bernoulli. Esta equação é um EDP linear de quarta ordem dada por

$$\rho(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x) I(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

em que $w(x, t)$ descreve a deflexão da viga em alguma posição x e no tempo t , $I(x)$ é o segundo momento de área. Pelo fato da equação possuir derivadas de ordem quatro no espaço, devemos ser suplementar com no máximo quatro condições que normalmente são fornecidas sobre a fronteira.

Sendo mais preciso sobre o problema em vista, consideraremos uma viga cantilever que possui uma de suas extremidades fixas e a outra livre, com um controle de fronteira sendo o momento fletor dada por:

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) + w_{xxxx}(x, t) = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ w(0, t) = w_x(0, t) = w_{xxx}(1, t) = 0, \\ w_{xx}(1, t) = u(t), \\ y(t) = w_{xt}(1, t), \end{cases}$$

em que $u(t)$ é a entrada e $y(t)$ é a saída do sistema. Este sistema por sua vez pode ser descrito como uma equação de evolução no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = H_L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ dada por:

$$\frac{d}{dt} Y(t) = \mathcal{A} Y(t)$$

em que $Y(t) = (w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))$ e o operador \mathcal{A} é tal que

$$\begin{cases} \mathcal{A}(f(x), g(x)) = (g(x), -f^{(4)}(x)) \\ D(\mathcal{A}) = \{(f, g) \in (H^4 \cap H_L^2) \times H_L^2 \mid f''(1) = -kg'(1), f'''(1) = 0\}. \end{cases}$$

Para a equação acima, mostraremos expansões assintóticas para seus autovalores e autofunções. Veremos que é possível a geração de uma base de Riesz para o espaço formado por autofunções generalizadas do operador \mathcal{A} . Mostraremos que o operador \mathcal{A} gera um semigrupo em que a condição de crescimento determinada pelo espectro se mantém. Na verdade, a condição de crescimento determinada pelo espectro surge de forma natural pelo fato do espaço possuir uma base de Riesz. Por fim, mostraremos que o semigrupo gerado pelo operador \mathcal{A} é exponencialmente estável.

Na Seção [3.2](#), faremos um estudo sobre a estabilização da fronteira com uma massa

de ponta em uma viga flexível, na qual possui uma de suas extremidades fixa e a outra extremidade é livre, que por sua vez é controlada. Este problema é descrito pela seguinte equação de viga de Euler-Bernoulli:

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) + w_{xxxx}(x, t) = 0, & 0 < x < 1, \\ w(0, t) = w_x(0, t) = w_{xx}(1, t) = 0, \\ -w_{xxx}(1, t) + mw_{tt}(1, t) = u(t), \end{cases}$$

em que $w(x, t)$ é a amplitude da vibração, m é a massa da ponta e $u(t)$ é a força de controle da fronteira aplicada na extremidade livre da viga. Para este problema mostraremos todos os resultados que foram feitos para o primeiro problema de equação de viga de Euler-Bernoulli.

Capítulo 1

Preliminares

Neste Capítulo veremos conceitos e resultados necessários de Análise Funcional.

1.1 Espaços Normados e Banach

Do estudo de espaços vetoriais, sabemos que podemos somar e multiplicar seus elementos por escalares, enquanto que em espaços métricos sabemos fazer o cálculo da distância entre dois de seus elementos. Nosso objetivo de definirmos espaços normados surge da necessidade de trabalharmos com espaços que possuem as propriedades de espaços vetoriais e métricos simultaneamente.

Definição 1.1.1. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} e uma função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que V é um *espaço normado* e $\|\cdot\|$ é uma *norma* em V se

- (a) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in V$; $\|x\| = 0$ se, e somente se $x = 0$.
- (b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todo $x \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.
- (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in V$.

Observação: Toda norma induz uma métrica dada por:

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ para todo } x, y \in V.$$

Definição 1.1.2. Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V , denotaremos por $\text{span}(S)$ o subespaço de V formado por todas as combinações lineares de vetores em V , isto é,

$$\text{span}(S) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \alpha_i \in \mathbb{K}, x_i \in S \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Definição 1.1.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ os vetores x_1, x_2, \dots, x_n de X são ditos *linearmente independentes* se

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0,$$

implicar que $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Caso contrário, os vetores são ditos *linearmente dependentes*.

Definição 1.1.4. A sequência infinita de vetores $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ é dita *linearmente independente* quando para cada k temos que $\{x_i\}_{i=1}^k$ é linearmente independente. Além disso, dizemos que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ é ω -*linearmente independente* se

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i = 0,$$

então $\alpha_i = 0$, para todo $i \geq 1$.

Observação: Toda sequência ω -linearmente independente é linearmente independente, mas a recíproca não é verdadeira.

Definição 1.1.5. Seja X um espaço vetorial e $\{x_1, x_2, \dots\}$ um subconjunto em X . Dizemos que $\{x_1, x_2, \dots\}$ é uma base de X quando

$$X = \text{span} \{x_1, x_2, \dots\}$$

e $\{x_1, x_2, \dots\}$ é linearmente independente. Denotamos por $\dim(V)$ a dimensão do espaço V , isto é, o número de elementos que formam a base do espaço V .

Definição 1.1.6. Seja V um espaço normado, uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ é dita *convergente* para $x \in V$ quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Definição 1.1.7. Uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ chama-se uma *sequência de Cauchy* quando, para todo ϵ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica que

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon.$$

Definição 1.1.8. Um espaço vetorial normado é chamado de *espaço completo* se, e somente se, toda sequência de Cauchy converge para um elemento do espaço. Os espaços normados completos são chamados de *espaços de Banach*.

Definição 1.1.9. Seja H um espaço vetorial sobre \mathbb{C} . Um produto interno em H é uma função de $H \times H$ para \mathbb{C} , denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in H;$
- (b) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall x, y \in H \text{ e } \alpha \in \mathbb{C};$
- (c) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in H;$
- (d) $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Teorema 1.1.10. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja H um espaço vetorial com produto interno. Então

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

para quaisquer x, y em H . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x, y \in H$ são linearmente dependentes.

Demonstração. Ver [13, pg. 78]. □

Corolário 1.1.11. Seja H um espaço com produto interno. A função

$$\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{C}, \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

é uma norma em H .

Demonstração. Ver [13, pg. 79]. □

Definição 1.1.12. Um espaço H com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno é chamado de *espaço de Hilbert*, isto é, um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.

1.2 Operadores Lineares Contínuos em Espaços de Banach

Nessa seção iremos definir operadores lineares em espaços de Banach, propriedades que alguns operadores possuem e resultados que serão de grande importância para entendermos as demonstrações dos resultados posteriores.

1.2.1 Operadores lineares

Sejam X e Y espaços de Banach e $A : D(A) (\subset X) \rightarrow X$ um operador linear. $D(A) \subset X$ é chamado de *domínio de A* e denotamos $\text{Im}(A)$ como sendo a imagem de A , dada por:

$$\text{Im}(A) = \{Ax \mid x \in D(A)\}.$$

Definição 1.2.1. O operador linear $A : D(A) \rightarrow Y$ é chamado de *operador injetivo* quando

$$Ax = 0 \text{ se, e somente se, } x = 0.$$

O operador A é dito ser *sobrejetivo* quando $\text{Im}(A) = Y$. Quando os operadores forem, simultaneamente, injetivos e sobrejetivos podemos referir a esta classe de operadores por *operadores invertíveis*. Uma vez que, para cada $y \in Y$, existe um único $x \in D(A)$ tal que $A(x) = y$. Dessa forma podemos definir o operador inversa por $A^{-1}(y) = x$. Por fim, dizemos que A é *densamente definido* quando $\overline{D(A)} = X$.

Definição 1.2.2. O operador linear $A : X \rightarrow Y$ chamado de *operador fechado* quando para qualquer sequência $x_n \in D(A)$, $n \geq 1$ tal que

$$x_n \rightarrow x, Ax_n \rightarrow y, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

tem-se que $x \in D(A)$ e $Ax = y$.

Definição 1.2.3. O operador linear $A : D(A) \rightarrow Y$ é chamado de *operador limitado ou contínuo*, quando

$$x_n \rightarrow x_0 \in X, \text{ implica que } Ax_n \rightarrow Ax_0 \in Y$$

para toda $\{x_n\} \subset X$.

Denotaremos o conjunto formado por todos os operadores lineares limitados de X em Y por $\mathcal{L}(X, Y)$. Em particular, se $X = Y$, então denotaremos apenas por $\mathcal{L}(X)$.

Teorema 1.2.4. Sejam X e Y espaços de Banach. Então $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço de Banach com a norma definida por:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup \{\|Ax\| \mid x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Demonstração. Ver [3], pg. 32]. □

Definição 1.2.5. Seja X um espaço de Banach. Se $Y = \mathbb{R}$ ou $Y = \mathbb{C}$, então os operadores de $\mathcal{L}(X, Y)$ são chamados de funcionais lineares de X .

Pelo Teorema 1.2.4 os funcionais lineares limitados em X pertencem a um espaço de Banach, que chamaremos de *espaço dual* de X e o denotaremos por X^* .

Definição 1.2.6.

- Dizemos que uma sequência de operadores $\{\mathcal{A}_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ converge para $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ em relação à norma do operador, quando

$$\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \rightarrow 0 \text{ com } n \rightarrow \infty.$$

- Dizemos que $\{\mathcal{A}_n\}$ converge fortemente para $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$, quando para cada $x \in X$ temos

$$\mathcal{A}_n x \rightarrow \mathcal{A}x, \text{ com } n \rightarrow \infty.$$

- Dizemos que $\{\mathcal{A}_n\}$ converge fraco* para $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$, quando para cada $f \in Y^*$ temos

$$f(\mathcal{A}_n x) \rightarrow f(\mathcal{A}x), \text{ com } n \rightarrow \infty.$$

Observação: É bastante usual a notação de dualidade entre espaço Y e seu dual Y^* da forma

$$\langle x, f \rangle = \langle x, f \rangle_{X, X^*} = f(x).$$

Neste sentido, na definição [1.2.6](#), podemos representar $f(\mathcal{A}_n x) \rightarrow f(\mathcal{A}x)$, com $n \rightarrow \infty$, por

$$\langle \mathcal{A}_n x, f \rangle \longrightarrow \langle \mathcal{A}x, f \rangle, \text{ com } n \longrightarrow \infty.$$

Deste ponto em diante, entraremos com uma série de resultados clássicos em Análise Funcional. Desde que esse não é o foco deste trabalho de dissertação, omitiremos as demonstrações, com o intuito de deixar o texto mais direto e objetivo.

Teorema 1.2.7. (Teorema da extensão de Hahn-Banach). Seja X um espaço de Banach e f_0 um funcional linear limitado definido em um subespaço X_0 de X . Então f_0 pode ser estendido a um funcional linear limitado f de X , tal que

- $f(x) = f_0(x), \forall x \in X_0;$
- $\|f\| = \|f_0\|_0$, em que $\|f_0\|_0$ é norma de f_0 em X_0^* .

Em particular, para cada $x_0 \in X$, com $x_0 \neq 0$, existe $f \in X^*$, tal que

$$f(x_0) = \|x_0\|, \|f\| = 1.$$

Demonstração. Ver [\[13\]](#), pg. 47. □

Teorema 1.2.8. (Teorema inverso de Banach). Sejam X e Y espaços de Banach. Se um operador linear $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ fechado e definido em todo o espaço X é invertível, então $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Demonstração. Ver [9], pg. 216]. □

Teorema 1.2.9. (Teorema da aplicação aberta). Sejam X e Y espaços de Banach e $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ um operador linear limitado sobrejetivo. Então \mathcal{A} é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.

Demonstração. Ver [13], pg. 33]. □

Definição 1.2.10. Sejam X e Y espaços normados e $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ um operador linear. O gráfico de \mathcal{A} é o conjunto

$$G(\mathcal{A}) = \{(x, y); x \in X \text{ e } y = \mathcal{A}(x)\} = \{(x, \mathcal{A}(x)); x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Teorema 1.2.11. (Teorema do gráfico fechado). Sejam X e Y espaços de Banach e $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ um operador linear. Então \mathcal{A} é contínuo se, e somente se, $G(\mathcal{A})$ é fechado em $X \times Y$.

Demonstração. Ver [13], pg. 35]. □

Teorema 1.2.12. (Princípio da limitação uniforme). Sejam X e Y espaços de Banach e suponha que $T_n \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Se

$$\sup \{\|T_n x\|\} < \infty, \quad \forall x \in X,$$

então

$$\sup \{\|T_n\|\} < \infty.$$

Demonstração. Ver [3], pg. 32]. □

Teorema 1.2.13. (Teorema da representação de Riesz). Seja H um espaço de Hilbert. Então $f \in H^*$ se, e somente se, existe $x \in H$ tal que

$$f(y) = \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

Demonstração. Ver [9], pg. 343]. □

Teorema 1.2.14. (Teorema de Lax-Milgram). Seja $a(x, y)$ uma forma bilinear, isto é, é linear em x e em y , satisfazendo

- (a) Existe $M > 0$ tal que $|a(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$ para todo $x, y \in H$;

(b) Existe $\lambda > 0$ tal que para todo $x \in H$, $|a(x, y)| \geq \lambda \|x\|^2$.

Então existe um operador $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H)$ que é invertível e satisfaz

$$a(x, y) = \langle x, \mathcal{A}y \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

Demonstração. Ver [16], pg. 137]. □

Definição 1.2.15. Seja \mathcal{A} um operador linear limitado de um espaço de Banach X . Dizemos que o operador \mathcal{A}^* é o adjunto do operador \mathcal{A} , quando para todo $x, y \in X$ temos que

$$\langle \mathcal{A}^*x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}y \rangle.$$

Definição 1.2.16. Um operador linear em um espaço de Hilbert é dito *simétrico* se

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \text{ em } D(\mathcal{A}) \text{ e } D(\mathcal{A}^*) \supseteq D(\mathcal{A}).$$

Um operador simétrico é dito auto-adjunto se é simétrico e $D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}^*)$. Neste caso, diremos simplesmente que $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. Quando $-\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ dizemos que o operador é anti-adjunto. Em operadores limitados, ser simétrico é equivalente a ser auto-adjunto, mas para operadores ilimitados, esta afirmação não é necessariamente verdadeira.

Exemplo: Seja o operador \mathcal{A} definido em $L^2(0, 1)$ da seguinte forma:

$$\mathcal{A}f = if', D(\mathcal{A}) = \{f \in L^2(0, 1) | f' \in L^2(0, 1), f(0) = f(1)\}.$$

Então \mathcal{A} é simétrico, mas seu adjunto é

$$\mathcal{A}^*f = if', D(\mathcal{A}^*) = \{f \in L^2(0, 1) | f' \in L^2(0, 1)\}.$$

Definição 1.2.17. Seja $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H)$ um operador auto-adjunto em um espaço de Hilbert H . Dizemos que \mathcal{A} é positivo se

$$\langle \mathcal{A}x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in H.$$

1.2.2 O espectro de um operador linear contínuo

Definição 1.2.18. Seja X um espaço vetorial e $\mathcal{A} : X \rightarrow X$ um operador linear. Um *autovalor* de \mathcal{A} é um escalar λ no qual existe um vetor não-nulo $x \in X$ tal que $\mathcal{A}x = \lambda x$. O subespaço

$$X_\lambda = \{x \in X | x \neq 0 \text{ e } \mathcal{A}x = \lambda x\} \cup \{0\}$$

é chamado de *autoespaço* associado ao autovalor λ e seus elementos são ditos *autovetores* de \mathcal{A} associados a λ .

Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A})(\subset X) \longrightarrow X$ um operador linear contínuo.

Definição 1.2.19. O escalar λ é um *valor regular* do operador \mathcal{A} se $(\mathcal{A} - \lambda I)$ é bijetora. Como consequência do Teorema [1.2.8](#), temos que se λ é um valor regular, então o operador

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} : X \longrightarrow X$$

é contínuo. O conjunto dos valores regulares de \mathcal{A} é chamado de *conjunto resolvente* de \mathcal{A} , denotado por $\rho(\mathcal{A})$. Logo,

$$\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\mathcal{A} - \lambda I) \text{ é bijetora}\}.$$

Quando $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, o operador $R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ é chamado de operador resolvente de \mathcal{A} .

Definição 1.2.20. O espectro de um operador \mathcal{A} , denotado por $\sigma(\mathcal{A})$ é o complemento do resolvente, isto é,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}).$$

O espectro é decomposto em três partes:

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}) \cup \sigma_c(\mathcal{A}) \cup \sigma_r(\mathcal{A}),$$

em que

$$\sigma_p(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists 0 \neq x \in X \text{ tal que } \mathcal{A}x = \lambda x\}$$

é denominado de *espectro pontual*.

$$\sigma_c(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - \mathcal{A} \text{ é invertível e } \overline{R(\lambda - \mathcal{A})} = X \right\}$$

é denominado de *espectro contínuo*. Por fim,

$$\sigma_r(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - \mathcal{A} \text{ é invertível mas } \overline{R(\lambda - \mathcal{A})} \neq X \right\}$$

é chamado de *espectro residual*.

Se $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})$, então claramente todo vetor não-nulo que satisfaz $\mathcal{A}x = \lambda x$ é um autovetor (autofunção, caso o espaço seja de funções). É importante destacar que para uma matriz em \mathbb{C}^n , o espectro é composto apenas pelo espectro pontual.

1.2.3 Operadores compactos

Nesta seção, falaremos de uma classe de operadores de extrema importância na análise funcional que são os *operadores compactos*. Novamente, não forneceremos provas dos resultados aqui contidos por se tratarem de resultados auxiliares e clássicos. Em um espaço normado X de dimensão infinita, temos que a bola unitária B_X não pode ser compacta na topologia induzida pela norma. Os operadores compactos são aqueles que, em um certo sentido, tem a propriedade de “consertar” essa falta de compacidade da bola. Assim temos,

Definição 1.2.21. Seja $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ um operador linear entre espaços normados. Dizemos que o operador \mathcal{A} é um *operador compacto* se $\overline{\mathcal{A}(B_X)}$ é compacto em Y .

Temos também o seguinte critério de compacidade

Definição 1.2.22. (Critério de Compacidade). O operador linear \mathcal{A} é compacto se, e somente se, a imagem de qualquer sequência (x_n) for uma sequência que possui uma subsequência convergente.

O conjunto de todos os operadores compactos de X em Y será denotado por $\mathcal{K}(X, Y)$. No caso em que $Y = X$, por simplicidade, denotaremos por $\mathcal{K}(X)$.

Definição 1.2.23. Dizemos que um operador possui *posto finito*, quando a imagem de seu operador possui dimensão finita.

Observação: Da teoria de espaços com dimensão finita, sabemos que toda sequência limitada possui uma subsequência convergente. Dessa forma, podemos concluir pelo critério de compacidade que todo operador de posto finito é um operador compacto.

Teorema 1.2.24. Temos as seguintes caracterizações:

- (a) Todo operador compacto é contínuo.
- (b) Todo operador linear contínuo de posto finito é compacto.
- (c) Um espaço normado X possui dimensão finita se, e somente se, o operador identidade em X do espaço for um operador compacto.

Demonstração. Ver [13], pg. 137]. □

Teorema 1.2.25. $\mathcal{K}(X, Y)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(X, Y)$ associado a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$.

Demonstração. Ver [3], pg. 157]. □

Corolário 1.2.26. Sejam (T_n) uma sequencia de operadores de posto finito e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \rightarrow 0$. Então $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Demonstração. Ver [3], pg. 157]. □

Teorema 1.2.27. Sejam X um espaço de Banach e \mathcal{A} um operador compacto com $\text{Im}(\mathcal{A})$ fechada. Então \mathcal{A} é um operador de posto finito.

Demonstração. Pelo Teorema 1.2.9, existe uma constante C tal que $B_{\text{Im}(\mathcal{A})} \subset C \cdot \mathcal{A}(B_X)$. Com isso, obtemos que

$$\overline{B_{\text{Im}(\mathcal{A})}} = B_{\text{Im}(\mathcal{A})} \subset C \cdot \overline{\mathcal{A}(B_X)}.$$

Como \mathcal{A} é compacto, implica que $\overline{\mathcal{A}(B_X)}$ é compacto. Sabemos que um subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Com isso, segue-se que a bola unitária da $\text{Im}(\mathcal{A})$ é compacta e portanto, $\dim \text{Im}(\mathcal{A}) < \infty$. □

Teorema 1.2.28. Sejam X um espaço de Banach e $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X)$. Então,

- (a) Se $\lambda \neq 0$, então $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})$ ou $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$.
- (b) $\sigma(\mathcal{A})$ contém apenas autovalores enumeráveis e $\lambda = 0$ é o único possível ponto de acumulação.
- (c) $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})$ se, e somente se, $\bar{\lambda} \in \sigma_p(\mathcal{A}^*)$.

Demonstração. Ver [9], pg. 301]. □

Teorema 1.2.29. Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ um operador compacto e autoadjunto. Então,

- (a) $\sigma(\mathcal{A}) \neq 0$.
- (b) Se $\sigma(\mathcal{A}) = 0$, então $\mathcal{A} \equiv 0$.

Demonstração. Ver [3], pg. 165-167]. □

Teorema 1.2.30. Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operador compacto e autoadjunto. Então existe uma sequência de autovetores de \mathcal{A} que formam uma base ortonormal para \mathcal{H} . Como consequência, se \mathcal{A} é um operador linear em \mathcal{H} com operador resolvente compacto, então existe uma sequência de autovetores de \mathcal{A} que formam uma base ortonormal para \mathcal{H} tal que para cada $x \in \mathcal{H}$, podemos representá-los por $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, tais que $\langle x_n, x_m \rangle = \delta_{nm}$ para todo $n, m \geq 1$, em que x_n são autovetores de \mathcal{A} e δ_{nm} é o delta Kronecker.

Demonstração. Ver [9], pg. 361]. □

1.3 C_0 -Semigrupos

A teoria de Semigrupos constitui uma poderosa ferramenta para resolução de EDPs. Nesta seção, falaremos brevemente sobre a teoria e apresentaremos os principais resultados.

1.3.1 Semigrupo de operadores lineares contínuos

Usamos a teoria do C_0 -Semigrupo com o objetivo de resolver a seguinte equação de evolução linear em um espaço de Banach X :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathcal{A}x(t), \quad x(0) = x_0. \quad (1.1)$$

em que $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear em X . Se para qualquer valor inicial $x_0 \in X$ existe uma solução contínua e única $x \in C(0, \infty; X)$ para (1.1), que depende continuamente do valor inicial x_0 , então a equação (1.1) associa-se naturalmente a um semigrupo de operadores lineares limitados e contínuos $T(t)$ com $x(t) = T(t)x_0$, que satisfaz $T(0) = I$, em que I é o operador identidade de X .

Definição 1.3.1. Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores lineares limitados

$$\{T(t) \mid t \geq 0\}$$

é chamado de *semigrupo de operadores lineares contínuos ou C_0 -semigrupo* $T(t)$, quando para qualquer $t \geq 0$, tem-se que $T(t)$ é um operador limitado em X e satisfaz:

- i) $T(0) = I$;
- ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$;
- iii) $\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)x - x\| = 0, \forall x \in X$.

Observação: Um C_0 -semigrupo é dito C_0 -grupo, quando é um C_0 -semigrupo para $t \geq 0$ e $t \leq 0$.

Definição 1.3.2. Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo em um espaço de Banach X .

- i) $T(t)$ é um C_0 -semigrupo uniformemente contínuo, quando $T(t)$ é contínuo em t na norma de $\mathcal{L}(X)$.
- ii) $T(t)$ é um C_0 -semigrupo diferenciável para $t > t_0$, quando para qualquer $x \in X$, $T(t)x$ é diferenciável para $t > t_0$. Em particular, se $t_0 = 0$, chamamos $T(t)$ de C_0 -semigrupo diferenciável.

- iii) $T(t)$ é dito ser compacto para $t > t_0$ se para qualquer $t > t_0$, $T(t)$ é um operador compacto. Em particular, se $t_0 = 0$, então $T(t)$ é considerado um C_0 -semigrupo compacto.
- iv) $T(t)$ é um semigrupo analítico, quando para qualquer $x \in X$, $T(t)x$ é analítico em relação a t .
- v) $T(t)$ é um semigrupo de contrações, quando

$$\|T(t)\| \leq 1 \text{ para todo } t \geq 0.$$

Definição 1.3.3. Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo em um espaço de Banach X . O gerador infinitesimal \mathcal{A} é definido como

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ para todo } x \in D(\mathcal{A}), \text{ em que} \\ D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ sempre existe} \right\}. \end{array} \right.$$

Neste sentido, podemos também nos referir a $T(t)$ como o semigrupo gerado por \mathcal{A} .

Teorema 1.3.4. Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo em um espaço de Banach X . Então,

- (a) Para todo $x \in X$, $T(t)x$ é fortemente contínuo em $t \geq 0$;
- (b) Existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t},$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Ver [14, pg. 4]. □

Teorema 1.3.5. Seja \mathcal{A} o gerador de um C_0 -semigrupo $T(t)$ em um espaço de Banach X . Então,

- (a) \mathcal{A} é linear, fechado e densamente definido.
- (b) Para qualquer $x \in D(\mathcal{A})$, temos que $T(t)x \in D(\mathcal{A})$, $t \geq 0$.
- (c)

$$\frac{d}{dt}(T(t)x) = \mathcal{A}T(t)x = T(t)\mathcal{A}x, \forall x \in D(\mathcal{A}), t \geq 0.$$

Portanto, para qualquer $x \in D(\mathcal{A})$, existe uma única solução para (1.1) dada por $T(t)x$.

Demonstração. Ver [14, pg. 5]. □

1.3.2 C_0 -semigrupos gerados por operadores dissipativos

Quando \mathcal{A} é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$ em espaço de Banach X , vimos no Teorema 1.3.5 a garantia para uma solução única de (1.1) dada por $T(t)x$. Por este fato, surge a necessidade para obtermos condições necessárias e suficientes para que um operador \mathcal{A} , definido em um espaço de Hilbert H , seja gerador infinitesimal de algum C_0 -semigrupo. Para isto, apresentamos os importantes teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips.

Definição 1.3.6. Um operador linear \mathcal{A} definido em um espaço de Hilbert H , é dito *dissipativo*, quando para todo $x \in D(\mathcal{A})$, temos

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}x, x \rangle \leq 0.$$

Teorema 1.3.7. Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $T(t)$ o semigrupo gerado por \mathcal{A} . Então, $T(t)$ é um semigrupo de contrações se, e somente se, \mathcal{A} é dissipativo.

Demonstração. Ver [8, pg. 64]. □

Teorema 1.3.8. (Teorema de Hille-Yosida). Seja \mathcal{A} um operador linear, não limitado em um espaço de Banach X . Então, \mathcal{A} gera um C_0 -semigrupo em X se, e somente se,

- (a) \mathcal{A} é fechado e densamente definido, isto é, $\overline{D(\mathcal{A})} = X$.
- (b) O conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} contém \mathbb{R}^+ e para todo $\lambda > 0$, temos

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Ver [14, pg. 8]. □

Corolário 1.3.9. Se \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações, temos

- (a)
$$\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

- (b)
$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}, \forall \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Demonstração. Ver [14, pg. 11]. □

Teorema 1.3.10. (Teorema de Lumer Phillips). Seja \mathcal{A} um operador linear densamente definido em um espaço de Banach X .

- (a) Se \mathcal{A} é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que $\text{Im}(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$, então \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações.
- (b) Se \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações sobre X , então \mathcal{A} é dissipativo e $\text{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ para todo $\lambda > 0$.

Demonstração. Ver [14, pg.14]. □

Corolário 1.3.11. Seja \mathcal{A} um operador fechado densamente definido no espaço de Banach X . Se \mathcal{A} e \mathcal{A}^* forem dissipativos, então \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .

Demonstração. Ver [14, pg. 15]. □

Teorema 1.3.12. Seja \mathcal{A} um operador linear, dissipativo e densamente definido sobre um espaço de Banach X . Se $0 \in \rho(\mathcal{A})$, então \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações.

Demonstração. Ver [8, pg.91]. □

1.3.3 Estabilidade para C_0 -semigrupos

Nessa seção iremos estudar as condições necessárias que devem ser satisfeitas pelo operador \mathcal{A} para que o semigrupo $T(t)$ seja exponencialmente estável.

Definição 1.3.13. Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo em um espaço de Banach X .

- (a) Dizemos que $T(t)$ é *exponencialmente estável*, quando existem constantes positivas $M, \omega > 0$ tais que

$$\|T(t)\| \leq M e^{-\omega t}, \forall t \geq 0.$$

- (b) Dizemos que $T(t)$ é *fortemente ou assintoticamente estável*, quando

$$T(t)x \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty, \forall x \in X.$$

- (c) Dizemos que $T(t)$ é *fracamente estável*, quando

$$\langle T(t)x, y \rangle \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty, \forall x \in X, y \in X^*.$$

Como motivação iremos considerar primeiro a equação diferencial ordinária de primeira ordem dada por

$$\begin{cases} y' = ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

1. Preliminares

com $a, x_0 \in \mathbb{R}$.

Sabemos pela teoria de EDO's que a solução da equação (1.2) é dada pela função exponencial $x(t) = x_0 e^{at}$. Claramente vemos que ela terá decaimento exponencial se, e somente se $a < 0$. Agora estenderemos estes conceitos para sistemas de equações.

Seja o vetor coluna $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ e $A = (a_{ij})$ uma matriz diagonalizável $n \times n$ e consideremos

$$\frac{d}{dt}Y = AY, \quad Y(0) = Y_0.$$

É bem conhecido (Veja [8], Cap.2]) que a solução para este sistema de equação pode ser escrita da forma

$$Y = e^{At}Y_0,$$

em que

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots \quad (1.3)$$

Temos que e^{At} é calculado explicitamente por meio de encontrar uma matriz B que diagonaliza A , isto é,

$$B^{-1}AB = D,$$

em que D é a matriz diagonal formada pelos autovalores de A . Para essa construção, recorreremos a seguinte propriedade:

$$[B^{-1}AB]^n = B^{-1}A^n B,$$

isto é, se B diagonaliza A , então B diagonaliza todas as potências de A . Multiplicando o lado esquerdo de (1.3) por B^{-1} e a direita por B obtemos que

$$\begin{aligned} B^{-1}e^{At}B &= I + B^{-1}ABt + \frac{1}{2}B^{-1}A^2Bt^2 + \dots + \frac{1}{n!}B^{-1}A^nBt^n + \dots \\ &= I + B^{-1}ABt + \frac{1}{2}[B^{-1}AB]^2t^2 + \dots + \frac{1}{n!}[B^{-1}AB]^n t^n + \dots \\ &= I + Dt + \frac{1}{2}D^2t^2 + \dots + \frac{1}{n!}D^n t^n + \dots \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$e^{At} = B^{-1}e^{Dt}B,$$

onde e^{Dt} é dada por

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Portanto, podemos observar que a solução decai exponencialmente para zero se, e somente se, a parte real dos autovalores de A é negativa. A taxa de decaimento é dada por

$$\gamma = \max \{ \operatorname{Re} \lambda_n; \lambda_n \in \sigma(A) \}.$$

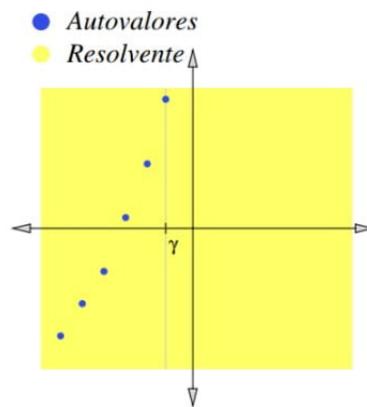


Figura 1.1: Ver [8], pg. 102]

Em dimensão infinita os autovalores de A possuem a parte real negativa não é suficiente para garantir a estabilidade exponencial, pois os autovalores podem se aproximar do eixo imaginário, isto é, a taxa de decaimento exponencial se aproxima de zero.

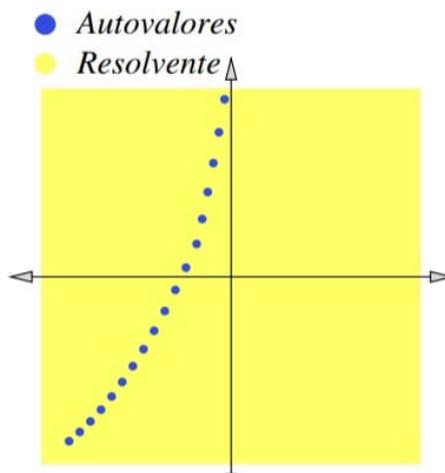


Figura 1.2: Ver [8], pg. 103]

Teorema 1.3.14. Seja \mathcal{A} um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t) = e^{At}$. Então,

$$e^{\sigma(\mathcal{A})t} \subset \sigma(T(t)),$$

isto é, se $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, então $e^{\lambda t} \in \sigma(T(t))$.

Demonstração. Ver [14, pg. 45]. □

Definição 1.3.15. Seja \mathcal{A} um operador definido em um espaço de Banach X . Chamaremos de *cota superior do espectro* ou *limite espectral de \mathcal{A}* o valor

$$S(\mathcal{A}) = \sup \{ \operatorname{Re} \lambda; \lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \}.$$

Agora iremos caracterizar o comportamento assintótico de um C_0 -semigrupo. Pelo Teorema 1.3.4 sabemos que um C_0 -semigrupo gerado pelo operador \mathcal{A} satisfaz

$$\|e^{At}\| \leq M e^{\omega t}, \tag{1.4}$$

para algum $M \geq 1$ e algum $\omega > 0$.

Claramente se (1.4) é válido, então implica que

$$\|e^{At}\| \leq M e^{(\omega+n^2)t},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ também será válido. Diante desta observação é esperado surgir a seguinte pergunta: “qual é o menor elemento $\omega \in \mathbb{R}$ que satisfaz (1.4)?”. Para respondermos esta pergunta introduzimos a seguinte definição

Definição 1.3.16. Seja \mathcal{A} o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo, diremos que $\omega_0(\mathcal{A})$ é o *limite de crescimento* ou *tipo de C_0 -semigrupo gerado por \mathcal{A}* , quando

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t}.$$

Teorema 1.3.17. Seja \mathcal{A} o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \geq 1$ tal que

$$\|e^{At}\| \leq M_\varepsilon e^{(\omega_0 + \varepsilon)t}.$$

Demonstração. Ver [8, pg. 112]. □

Teorema 1.3.18. Seja \mathcal{A} o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo. Então a cota superior do espectro de \mathcal{A} é menor ou igual que o limite de crescimento, isto é,

$$S(\mathcal{A}) \leq \omega_0(\mathcal{A}).$$

Demonstração. Ver [8], pg. 112]. □

Definição 1.3.19. Dizemos que $T(t)$ satisfaz a *condição de crescimento determinada pelo espectro* é satisfeita, quando

$$S(\mathcal{A}) = \omega_0(\mathcal{A}).$$

Corolário 1.3.20. Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo diferenciável para todo $t > t_0 \geq 0$. Então,

$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(\mathcal{A})} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Por consequência, a condição de crescimento determinada pelo espectro é satisfeita.

Demonstração. Ver [12], pg. 121]. □

Teorema 1.3.21. Seja \mathcal{A} o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo sobre um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Então,

$$S(\mathcal{A}) = \omega_0(\mathcal{A})$$

se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $M_\varepsilon \geq 1$ tal que

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq M_\varepsilon, \text{ Re } \lambda \geq S(\mathcal{A}) + \varepsilon.$$

Demonstração. Ver [8], pg. 121]. □

O teorema abaixo é uma condição necessária e suficiente para que o C_0 -semigrupo seja exponencialmente estável.

Teorema 1.3.22. Seja $T(t)$ um semigrupo analítico gerado pelo operador \mathcal{A} em um espaço de Banach X . Se $S(\mathcal{A}) < 0$, então existem constantes $M \geq 1$ e $\mu > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}$.

Demonstração. Ver [14], pg. 118]. □

A definição abaixo será de grande importância pois será mencionada no Capítulo 3.

Definição 1.3.23. (Perturbação Compacta). Sejam $T(t)$ e $T_B(t)$ os C_0 -semigrupos gerados respectivamente pelos operadores lineares \mathcal{A} e $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ definidos em um espaço de Banach X . Dizemos que $T_B(t)$ é uma *perturbação compacta* de $T(t)$ quando $T_B(t_0) - T(t_0)$ é compacto para algum $t_0 > 0$.

1.4 Integração sobre curvas em \mathbb{C}

Nesta seção iremos fazer um estudo de integração sobre curvas em \mathbb{C} , para isto iniciaremos com conceitos fundamentais, tais como os de funções inteiras e a de curvas de Jordan. Em seguida, abordaremos a noção de integração de funções definidas em curvas e daremos destaque para o estudo de propriedades das integrais de funções analíticas descritas pelo Teorema da integral de Cauchy. Por fim, introduziremos a definição para função holomorfa e apresentaremos o Teorema de Rouché.

Definição 1.4.1. Uma função complexa é dita *analítica em um ponto* $p \in \mathbb{C}$, quando ela é diferenciável em todos os pontos de uma vizinhança de p . Uma função é *analítica* em todo o seu domínio, quando for analítica em cada ponto do seu domínio. Em particular, quando o seu domínio é todo o plano complexo a chamamos de função *inteira*.

Uma curva contínua C no plano complexo é definida por meio de uma parametrização:

$$C : z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

em que $x(t)$ e $y(t)$ são funções reais contínuas na variável real t . Dizemos que a curva C é *diferenciável*, quando possuir uma parametrização diferenciável.

Apesar de termos definido por meio de uma parametrização, também podemos definir como “curva” ao gráfico gerado pela parametrização. Em outras palavras, podemos nos referir a uma curva como uma parametrização ou um conjunto de pontos em \mathbb{C} .

Dada uma curva definida da mesma maneira em (1.5), o valor $z(a)$ é chamado *valor inicial*, enquanto que $z(b)$ é chamado *valor final* da curva C . Se $z(a) = z(b)$, dizemos que é uma *curva fechada*. Caso $z(t_1) \neq z(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in (a, b)$, a chamamos de *curva simples*. As curvas $C : z(t), t \in [a, b]$ fechadas e simples são chamadas de *curvas de Jordan*.

Teorema 1.4.2. (Curvas de Jordan). Se C é uma curva de Jordan, então o complemento de C consiste de duas regiões disjuntas, uma limitada e a outra ilimitada em que ambas possuem a curva C como fronteira.

Apesar do fácil entendimento intuitivo do Teorema anterior, sua prova é notadamente difícil e para ela citamos [11].

Poderemos também admitir curvas C que não são suaves. Neste caso, deverão ser compostas por uma sequência finita de curvas suaves $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, em que o ponto final de uma está ligada ao ponto inicial da outra, neste caso dizemos que a curva é *suave por partes* em um intervalo fechado.

Agora, abordaremos a integração de funções definidas em curvas. Iniciaremos com funções definidas em intervalos reais com valores em \mathbb{C} . Neste caso, a integral de Riemann pode ser utilizada, portanto, sem mais delongas, definimos a integral de uma função $f(x) = u(x) + iv(x)$ definida em um intervalo (a, b) da forma:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

Para o caso em que f é contínua por partes, digamos em subintervalos de (a, b) da forma (a_{k-1}, a_k) , em que $a_0 = a$ e $a_n = b$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} u(x) dx + i \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} v(x) dx.$$

A extensão para o caso em que f está definida sobre uma curva suave de \mathbb{C} tal como (1.5) segue-se fazendo a composição $t \mapsto f(z(t))$, que representa uma espécie de mudança de variável de C para o intervalo $[a, b]$. Assim, a definição a seguir é bastante natural.

Definição 1.4.3. Seja C uma curva suave por partes em $[a, b]$ e f contínua sobre o gráfico de C . A integral de contorno de f sobre C é definida por:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt. \quad (1.6)$$

Observação 1: A integral à direita de (1.6) é, na verdade, do tipo Riemman Stieljes. Para partições do tipo $\delta := \{a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b\}$, temos que a integral de f sobre a curva C é o resultado do limite de expressões da forma

$$\sum_{k=1}^n f(z(a_k))(z(a_k) - z(a_{k-1})), \quad (1.7)$$

quando $|\delta| \rightarrow 0$, isto é, quando refinamos cada vez mais a partição.

Observação 2: Na definição anterior, escrevemos a definição da integral em termos da parametrização da curva C . Entretanto, se consideramos esta outra parametrização $\tilde{z}(t) = z(-t + b + a)$, vemos que ela gera uma curva cujo gráfico é a mesma curva C , porém, percorre a curva C no sentido oposto. Assim, com esta nova parametrização, obtemos que

$$\int_a^b f(z(t))z'(t) dt = - \int_a^b f(\tilde{z}(t))\tilde{z}'(t) dt.$$

Desta forma, concluímos que a alteração da orientação da curva pode mudar o sinal da integral sobre uma curva. Com isso, para que a Definição 1.4.3 faça sentido, esco-

lheremos sempre o sentido anti-horário como o padrão para o cálculo da integral sobre uma curva. Em outros termos, o sentido anti-horário é aquele em que um observador percorrendo sobre a curva C sempre terá à esquerda a região limitada estabelecida por C (Veja o Teorema [1.4.2](#)).

Outro resultado de extrema importância é o seguinte:

Teorema 1.4.4. Seja f uma função analítica em um domínio D simplesmente conexo. Se C_1 e C_2 são contornos contidos no domínio D com os mesmos pontos iniciais e finais (o que determina a orientação), então

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

Concluimos, portanto, que as integrais de funções suaves sobre curvas com pontos iniciais e finais iguais e com mesma orientação terão mesmo valores. Temos também que, a mudança de orientação, independente da parametrização escolhida, simplesmente muda o sinal do valor da integral desejada.

Definição 1.4.5. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, $X \subset \mathbb{C}$ aberto, uma função complexa. Dizemos que f é *holomorfa* em X , quando $f'(z)$ existe para todo $z \in X$.

O teorema a seguir será de grande importância para os resultados que seguem.

Teorema 1.4.6. (Teorema de Rouché). Sejam f e g duas funções holomorfas, ambas definidas no domínio $U \subset \mathbb{C}$ e seja $V \subset U$ uma região fechada e limitada cuja fronteira ∂V é uma curva de Jordan suave por partes, com $V \setminus \partial V$ um domínio. Se

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \text{ para todo } z \in \partial V,$$

então f e g tem o mesmo número de zeros no interior de V .

Demonstração. Ver [\[10\]](#), pg. 154]. □

1.4.1 Teorema da Integral de Cauchy

As integrais de funções analíticas possuem propriedades muito importantes. Em destaque temos as que são descritas pelo teorema da integral de Cauchy.

Definição 1.4.7. Um conjunto D é dito *conexo*, quando dados quaisquer dois pontos de D , podemos uni-los por uma linha totalmente contida em D . Além disso, diremos que D é *simplesmente conexo*, quando qualquer curva simples, fechada e contida em D pode ser deformada, sempre totalmente contida em D , até se tornar um único ponto.

Vamos agora aos teoremas de Cauchy:

Teorema 1.4.8. (Integral de Cauchy). Seja f uma função analítica em um domínio simplesmente conexo D . Se C é uma curva fechada e simples em D , então

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Uma questão natural que surge é o que podemos afirmar sobre a integral de uma função analítica sobre um contorno que contém uma singularidade do integrando. Para isto, temos as fórmulas das integrais de Cauchy:

Teorema 1.4.9. Seja f uma função analítica em um domínio simplesmente conexo contendo um contorno fechado C . Então $f(z)$ possui derivadas de todas as ordens em cada ponto z_0 dentro de C , com

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como consequência do teorema anterior, temos:

Teorema 1.4.10. Seja f uma função analítica em um domínio D contendo um contorno fechado C . Se z_0 é um ponto em D , então podemos representar $f(z)$ da seguinte forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

em que a série é convergente quando $|z - z_0| < \delta$ tal que δ é a distância entre z_0 e o ponto mais próximo em C .

1.4.2 Projeções de Riesz e Cálculo Funcional

Nesta seção, trabalharemos sobre a teoria espectral que se aplica a operadores lineares limitados.

Considere \mathcal{A} um operador auto-adjunto compacto, atuando em um espaço de Hilbert H que, por sua vez, decompõe-se em uma soma de auto-espacos ortogonais, a saber

$$H = Ker(\mathcal{A}) \oplus Ker(\lambda_1 - \mathcal{A}) \oplus Ker(\lambda_2 - \mathcal{A}) \oplus \dots$$

em que $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ são autovalores distintos e não nulos de \mathcal{A} , a soma acima podendo ser finita, ou não.

Suponha que H possui dimensão finita e que $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sejam os autovalores de \mathcal{A} , nos quais podemos mostrar que são números reais. Pela forma canônica de Jordan,

existe uma matriz invertível $Q_{\mathcal{A}}$ tal que $J_{\mathcal{A}} = Q_{\mathcal{A}}\mathcal{A}Q_{\mathcal{A}}^{-1}$ se escreve como uma matriz de blocos diagonais da forma:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_j \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Notemos que a existência de $Q_{\mathcal{A}}$ é equivalente à existência de uma base para H em que a matriz de \mathcal{A} escrita nessa nova base é composta por blocos da forma (1.8).

Seja agora M_v o espaço que contém os vetores da base que correspondem ao elemento do bloco de Jordan $J_{\mathcal{A}}$ com λ_v na diagonal principal. Então, em outros termos, a forma de Jordan nos permite escrever

$$H = M_1 \oplus \dots \oplus M_r, \quad (1.9)$$

em que cada M_v é \mathcal{A} -invariante ($\mathcal{A}(M_v) \subset M_v$) e a restrição de \mathcal{A} a M_v possui apenas um único autovalor que é λ_v . Neste caso, podemos ver a matriz identidade em H da forma:

$$\begin{bmatrix} Id_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Id_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & Id_r \end{bmatrix}$$

em que Id_v é a matriz identidade cuja quantidade de linhas ou colunas é exatamente a dimensão do espaço M_v . A matriz definida em H cujos únicos elementos não nulos são aqueles do bloco Id_v , chamaremos de I_v , isto é

$$I_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & Id_v & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Um fato interessante é que, para determinarmos o espaço M_v , não é necessário conhecermos a base Jordan. Há uma forma direta que iremos especificar a seguir:

$$M_v = \text{Im} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_v} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda \right], \quad (1.10)$$

em que Γ_v é o contorno em torno de λ_v , separando λ_v dos demais autovalores. Para vermos isto, notemos que pela matriz T de ordem k dada por (1.8), temos

$$(\lambda - T)^{-1} = \begin{bmatrix} (\lambda - \lambda_j)^{-1} & (\lambda - \lambda_j)^{-2} & \cdots & (\lambda - \lambda_j)^{-(k-1)} & (\lambda - \lambda_j)^{-k} \\ 0 & (\lambda - \lambda_j)^{-1} & \cdots & (\lambda - \lambda_j)^{-(k-2)} & (\lambda - \lambda_j)^{-(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda - \lambda_j)^{-1} & (\lambda - \lambda_j)^{-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (\lambda - \lambda_j)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Agora, sabendo que $Q_{\mathcal{A}}(\lambda - \mathcal{A})^{-1}Q_{\mathcal{A}}^{-1} = (\lambda - J_{\mathcal{A}})^{-1}$, vemos que a base que converte a matriz \mathcal{A} em blocos de Jordan, converte a matriz $(\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ em blocos da forma (1.11). Portanto, pelo Teorema 1.4.9,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_v} Q_{\mathcal{A}}(\lambda - \mathcal{A})^{-1}Q_{\mathcal{A}}^{-1} d\lambda = I_v,$$

o que implica em (1.10).

Observação: Na fórmula (1.10), o fato de estarmos trabalhando em espaços de dimensão finita não assume um papel importante. Veremos que ela também é usada no caso onde a dimensão é infinita para obtermos decomposições espectrais do espaço semelhante a (1.9).

Agora, iremos entender a integral sobre um contorno para funções definidas em \mathbb{C} e com valores em espaços de dimensão infinita.

Definição 1.4.11. Um subconjunto Ω de \mathbb{C} será chamado de *domínio de Cauchy*, quando for aberto, tiver um número finito de componentes conexas e a fronteira $\partial\Omega$ for composta por um número finito de curvas de Jordan. A fronteira de Ω é orientada positivamente e denotada por $+\partial\Omega$.

Definição 1.4.12. Um *contorno de Cauchy* é o contorno orientado de um domínio de Cauchy limitado em \mathbb{C} .

Seja Γ um contorno de Cauchy em \mathbb{C} . Queremos dar um sentido para

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(\lambda)d\lambda, \quad (1.12)$$

em que agora g é uma função com valores em algum espaço de Banach.

O teorema a seguir será de grande importância para os resultados que seguem.

Teorema 1.4.13. Se K é um subconjunto compacto e não vazio de um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$, então sempre podemos encontrar um contorno de Cauchy Γ em Ω tal que K esteja contido nele.

Demonstração. Ver [2, pg.6]. □

Seja Γ um contorno de Cauchy e $g : \Gamma \rightarrow X$ uma função contínua em Γ com valores no espaço de Banach X . Então, como na teoria das funções complexas, a integral (1.12) pode ser definida como a integral de Stieltjes com a sua convergência definida na norma de X . Assim, o valor da integral em (1.12) é um vetor em X que aparece como limite, na norma de X , da soma de Stieltjes correspondente similar à (1.7). Diante disso, temos

$$F\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(\lambda) d\lambda\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(g(\lambda)) d\lambda, \quad (1.13)$$

para qualquer funcional linear contínuo de F em X .

Definição 1.4.14. Seja Ω um conjunto aberto não vazio em \mathbb{C} e X um espaço de Banach. Dizemos que a função $g : \Omega \rightarrow X$ é *analítica* em $\lambda_0 \in \Omega$, quando existe uma vizinhança U de λ_0 em Ω tal que a função g pode ser representada como uma série de potência em $\lambda - \lambda_0$, isto é

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n g_n, \lambda \in U, \quad (1.14)$$

em que g_0, g_1, \dots são vetores em X que não dependem de λ . A série (1.14) é vista como o limite da sequência das reduzidas na norma de X . Em geral, se g é analítica em cada ponto de Ω , então dizemos que g é analítica em Ω .

Uma vez que g é analítica em Ω , podemos estender a fórmula da integral de Cauchy. Consideremos $g : \Omega \rightarrow X$ analítica em Ω e Γ um contorno de Cauchy tal que Γ e seu interior estejam em Ω . Dessa forma,

$$g(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} g(\lambda) d\lambda, \quad \forall \lambda_0 \in \Omega. \quad (1.15)$$

A prova de (1.15) é simples e segue diretamente do Teorema 1.4.9. De fato, consideremos y um vetor em X , definido como sendo o lado direito da igualdade acima. Tomaremos um funcional linear contínuo arbitrário F em X . Logo, $F \circ g$ é uma função analítica com valores escalares. Aplicando a fórmula da integral de Cauchy, obtemos

$$F(g(\lambda_0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} F(g(\lambda)) d\lambda.$$

Usando (1.13), concluímos que $F(g(\lambda_0)) = F(y)$. Pela arbitrariedade de F em X , segue-se pelo Teorema de Hahn-Banach que $g(\lambda_0) = y$, de onde obtemos (1.15).

Seja $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ um operador linear limitado no espaço de Banach X . Mostraremos que o operador resolvente $R(\cdot) := (\cdot - \mathcal{A})^{-1}$ é analítico no conjunto

resolvente $\rho(A)$.

Teorema 1.4.15. (Identidade do resolvente). Seja X um espaço de Banach sobre \mathbb{C} e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, em que $D(\mathcal{A})$ é um domínio em X . Se $\lambda, \mu \in \rho(\mathcal{A})$, então são válidas as seguintes identidades:

$$(\lambda - \mathcal{A})^{-1} - (\mu - \mathcal{A})^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu - \mathcal{A})^{-1}(\lambda - \mathcal{A})^{-1}$$

e

$$(\lambda - \mathcal{A})^{-1}(\mu - \mathcal{A})^{-1} = (\mu - \mathcal{A})^{-1}(\lambda - \mathcal{A})^{-1}.$$

Demonstração. ver [16, pg.198]. □

Observação: Como consequência da identidade do resolvente é fácil ver que se um dos operadores resolventes é compacto, então implica que todos devem ser compactos.

Teorema 1.4.16. Seja X um espaço de Banach sobre \mathbb{C} e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado. Então $\rho(\mathcal{A})$ é um subconjunto aberto de \mathbb{C} e $\sigma(\mathcal{A})$ é um subconjunto fechado de \mathbb{C} . Além disso, se $\mu \in \rho(\mathcal{A})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $|\mu - \lambda| \|\mu - \mathcal{A}\|^{-1} < 1$, então $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ e

$$(\lambda - \mathcal{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu - \mathcal{A})^{-(n+1)}.$$

Demonstração. Ver [16, pg.199]. □

Teorema 1.4.17. Seja X um espaço de Banach sobre \mathbb{C} e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado. Então, o operador resolvente $R(\cdot) := (\cdot - \mathcal{A})^{-1}$ é analítico no conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$. Além disso, dado $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ temos

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} = (-1)^n n! (\lambda - \mathcal{A})^{-(n+1)}.$$

Demonstração. Ver [16, pg.201]. □

Se M for um subespaço \mathcal{A} -invariante de X , então $\mathcal{A}|_M$ denota a restrição de \mathcal{A} a M , no qual é um operador de M em M . Suponhamos que o espectro de \mathcal{A} seja a união de dois subconjuntos disjuntos, compactos e não-vazios, denotados por σ e τ . Iremos mostrar que essa decomposição do espectro implica em uma decomposição em soma direta $X = M \oplus L$, em que M e L são \mathcal{A} -invariantes de X . Além disso, o espectro da restrição $\mathcal{A}|_M$ é igual a σ e o espectro de $\mathcal{A}|_L$ é igual a τ .

Para mostrarmos essa decomposição espectral definimos o operador linear e limitado atuando em X

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda. \quad (1.16)$$

Um conjunto σ é chamado de *parte isolada* de $\sigma(\mathcal{A})$, quando σ e $\tau := \sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma$ forem subconjuntos fechados de $\sigma(\mathcal{A})$. Dada uma parte isolada σ de $\sigma(\mathcal{A})$, definimos \mathbb{P}_{σ} como sendo um operador linear limitado dado por (1.16), em que Γ é um contorno de Cauchy no conjunto resolvente de \mathcal{A} em que σ está contido no domínio interno de Γ e τ no domínio externo de Γ . Uma vez que $(\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ é um operador analítico na variável λ no conjunto resolvente de \mathcal{A} , com argumentos padrões da teoria da função complexa, temos que \mathbb{P}_{σ} não depende da escolha de contorno Γ . O operador \mathbb{P}_{σ} é chamado de *projeção de Riesz* de \mathcal{A} no espaço de Banach X , correspondente à parte isolada σ . O uso da palavra projeção, decorre dos resultado a seguir.

Teorema 1.4.18. O operador \mathbb{P}_{σ} é uma projeção, isto é, $\mathbb{P}_{\sigma}^2 = \mathbb{P}_{\sigma}$.

Demonstração. Sejam Γ_1 e Γ_2 contornos de Cauchy em torno de σ tal que σ é separado de $\tau = \sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma$. Assumindo que Γ_1 está no domínio interno de Γ_2 , temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\sigma}^2 &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda \right) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} (\mu - \mathcal{A})^{-1} d\mu \right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} (\mu - \mathcal{A})^{-1} d\mu d\lambda. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.4.15

$$(\lambda - \mathcal{A})^{-1} - (\mu - \mathcal{A})^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - \mathcal{A})^{-1}(\mu - \mathcal{A})^{-1}, \quad \lambda, \mu \in \rho(\mathcal{A}).$$

Agora, fazendo $\mathbb{P}_{\sigma}^2 = Q - R$, em que

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\mu - \lambda} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\mu - \lambda} I d\mu \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda \\ &= \mathbb{P}_{\sigma}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 R &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\mu - \lambda} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\mu d\lambda \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\mu - \lambda} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda d\mu \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} (\mu - \mathcal{A})^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\mu - \lambda} I d\lambda \right) d\mu \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Acima utilizamos que

$$\int_{\Gamma_2} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} = 2\pi i (\lambda \in \Gamma_1), \quad \int_{\Gamma_2} \frac{d\lambda}{\mu - \lambda} = 0 (\mu \in \Gamma_2).$$

Observemos que essas identidades acima são verdadeiras, uma vez que Γ_1 está no domínio interno de Γ_2 . Além disso, as integrais no cálculo de R comutam pelo fato que o integrando é um operador contínuo em $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. Com isso, obtemos

$$\mathbb{P}_\sigma^2 = \mathbb{P}_\sigma.$$

□

Corolário 1.4.19. A imagem de uma projeção \mathbb{P} é fechada.

Demonstração. De fato, se $(\mathbb{P}x_n)$ é uma sequência em $\mathbb{P}(X)$ tal que $(\mathbb{P}x_n) \longrightarrow y$, então pelo fato que \mathbb{P} é uma projeção implica que $(\mathbb{P}x_n)^2 = \mathbb{P}x_n$. Uma vez que o operador é contínuo obtemos que $\mathbb{P}x_n \longrightarrow \mathbb{P}y$. Com isso, pela unicidade do limite concluímos que $y = \mathbb{P}y \in \mathbb{P}(X)$. □

Teorema 1.4.20. Seja σ uma parte isolada de $\sigma(\mathcal{A})$, $M = \text{Im}\mathbb{P}_\sigma$ e $L = \text{Ker}\mathbb{P}_\sigma$. Então, $X = M \oplus L$, em que M e L são subespaços \mathcal{A} -invariantes e

$$\sigma(\mathcal{A}|_M) = \sigma, \quad \sigma(\mathcal{A}|_L) = \sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma.$$

Demonstração. Pelo fato que \mathbb{P}_σ é uma projeção vimos pelo Corolário [1.4.19](#) que M é um subespaço fechado. De modo análogo, teremos claramente que L é um subespaço fechado. Além disso, temos a decomposição trivial $X = M \oplus L$. Como $\mathcal{A}(\lambda - \mathcal{A})^{-1} = (\lambda - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}$ para $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ segue-se que $\mathcal{A}\mathbb{P}_\sigma = \mathbb{P}_\sigma\mathcal{A}$, o que implica que M e L são \mathcal{A} -invariantes pois como já sabemos que M e L são fechados resulta em $\mathcal{A}(M) \subseteq M$ e $\mathcal{A}(L) \subseteq L$. Agora, seja Γ um contorno de Cauchy em torno de σ tal que σ é separado

de $\tau := \sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma$. Para $\mu \notin \Gamma$ definiremos

$$S(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda.$$

Como \mathbb{P}_{σ} comuta com \mathcal{A} e sabemos que \mathbb{P}_{σ} comuta com o resolvente resulta que \mathbb{P}_{σ} comuta com $S(\mu)$. Observemos que

$$\begin{aligned} S(\mu)(\mathcal{A} - \mu) &= (\mathcal{A} - \mu)S(\mu) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu - \lambda} (\mathcal{A} - \mu)(\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu - \lambda} (\mathcal{A} - \mu + \lambda - \lambda)(\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{-1}{\mu - \lambda} I d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda \\ &= \begin{cases} I - \mathbb{P}_{\sigma}, & \text{se } \mu \in \Gamma, \\ -\mathbb{P}_{\sigma}I, & \text{se } \mu \notin \Gamma. \end{cases} \end{aligned}$$

Seja $\mu \notin \sigma$ e sem perda de generalidade assumiremos que Γ é de tal forma que μ esteja fora de Γ . Assim, pelo cálculo feito acima resulta que

$$(\mathcal{A} - \mu)S(\mu)x = S(\mu)(\mathcal{A} - \mu)x = -x, \quad x \in M.$$

Desde que $S(\mu)M \subset M$, teremos que $(\mathcal{A} - \mu)$ é uma aplicação injetiva de M em M e $(\mu - \mathcal{A}|_M)^{-1} = S(\mu)|_M$. Portanto $\mu \in \rho(\mathcal{A}|_M)$ e concluímos que $\sigma(\mathcal{A}|_M) \subset \sigma$. De modo análogo obtemos $\sigma(\mathcal{A}|_L) \subset \tau$. Por fim, seja $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}|_M) \cup \sigma(\mathcal{A}|_L)$. Então $(\lambda - \mathcal{A})$ é uma aplicação injetiva de M (respectivamente, L) em M (respectivamente, L). Assim, segue-se que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Portanto,

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A}|_M) \cup \sigma(\mathcal{A}|_L) \subset (\sigma \cup \tau) = \sigma(\mathcal{A}).$$

□

Corolário 1.4.21. Seja $\sigma(\mathcal{A})$ uma união disjunta de subconjuntos fechados σ e τ . Então,

$$\mathbb{P}_{\sigma} + \mathbb{P}_{\tau} = I \text{ e } \mathbb{P}_{\sigma} \cdot \mathbb{P}_{\tau} = 0.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, consideremos os contornos de Cauchy Γ , Γ_1 e Γ_2 de modo que $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Gamma$ em que Γ_1 é um contorno em torno de σ e Γ_2 é um contorno em torno de τ . Pela teoria de funções complexa sabemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda. \quad (1.17)$$

Observemos que o lado esquerdo de (1.17) por definição é igual à $\mathbb{P}_\sigma + \mathbb{P}_\tau$. Além disso, pelo Teorema 1.4.20 ao considerarmos $\sigma = \sigma(\mathcal{A})$, obtemos que $\mathbb{P}_{\sigma(\mathcal{A})} = I$, pois $\sigma(\mathcal{A}|_L) = \sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma = \emptyset$, com isso implica que $L = \{0\}$ e $X = M$. Dessa forma, o lado direito de (1.17) é igual à I . Portanto segue-se que $\mathbb{P}_\sigma + \mathbb{P}_\tau = I$. Por fim, temos que $\mathbb{P}_\sigma \cdot \mathbb{P}_\tau = \mathbb{P}_\sigma \cdot (I - \mathbb{P}_\sigma) = (\mathbb{P}_\sigma - \mathbb{P}_\sigma^2) = 0$, isto é, $\mathbb{P}_\sigma \cdot \mathbb{P}_\tau = 0$. \square

Teorema 1.4.22. Seja X uma decomposição pela soma direta dos subespaços \mathcal{A} -invariantes M e L . Então, $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}|_M) \cup \sigma(\mathcal{A}|_L)$. E se $\sigma(\mathcal{A}|_M) \cap \sigma(\mathcal{A}|_L) = \emptyset$, então

$$M = \text{Im } \mathbb{P}_{\sigma(\mathcal{A}|_M)} \quad L = \text{Ker } \mathbb{P}_{\sigma(\mathcal{A}|_M)}.$$

Demonstração. Como M e L são subespaços \mathcal{A} -invariantes implica que o operador $(\lambda - \mathcal{A})$ possui a seguinte representação da matriz 2×2 do operador em relação à soma direta $X = M \oplus L$:

$$\lambda - \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \lambda - \mathcal{A}_1 & 0 \\ 0 & \lambda - \mathcal{A}_2 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_M$ e $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}|_L$. Assim, implica que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ se, e somente se, $\lambda \in \rho(\mathcal{A}_1) \cap \rho(\mathcal{A}_2)$, e para esse caso obtemos

$$(\lambda - \mathcal{A})^{-1} = \begin{bmatrix} (\lambda - \mathcal{A}_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (\lambda - \mathcal{A}_2)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Portanto, $\rho(\mathcal{A}) = \rho(\mathcal{A}_1) \cap \rho(\mathcal{A}_2)$ e $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}_1) \cup \sigma(\mathcal{A}_2)$. Agora, assumiremos que $\sigma(\mathcal{A}_1) \cap \sigma(\mathcal{A}_2) = \emptyset$ e consideremos Γ um contorno de Cauchy em torno de $\sigma(\mathcal{A}_1)$ de modo que separe $\sigma(\mathcal{A}_1)$ de $\sigma(\mathcal{A}_2)$ e integramos (1.18) sobre Γ . Pelo Corolário 1.4.21 e pela observação feita em sua demonstração que ao considerarmos $\sigma = \sigma(\mathcal{A})$ obtemos que $\mathbb{P}_{\sigma(\mathcal{A})} = I$, temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - \mathcal{A}_1)^{-1} d\lambda = I_M, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - \mathcal{A}_2)^{-1} d\lambda = 0.$$

Portanto,

$$\mathbb{P}_{\sigma(\mathcal{A}_1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda = \begin{bmatrix} I_M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

o que segue-se a prova o Teorema. \square

1.4.3 Autovalores de tipo finito

Seja \mathcal{A} um operador linear limitado no espaço de Banach X .

Definição 1.4.23. Seja $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$. Dizemos que λ é *autovalor de tipo finito*, quando X pode ser escrito em uma soma direta :

$$X = M \oplus L$$

e as seguintes propriedades serão satisfeitas:

- (a) M e L são subespaços \mathcal{A} -invariantes;
- (b) $\dim M < \infty$;
- (c) $\sigma(\mathcal{A}|_M) = \{\lambda\}$ e $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}|_L)$.

Teorema 1.4.24. Um ponto $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ é autovalor do tipo finito se, e somente se, λ é ponto isolado em $\sigma(\mathcal{A})$ e sua projeção de Riesz correspondente (\mathbb{P}_λ) possui posto finito.

Demonstração. Observemos que se λ_0 é um ponto isolado de $\sigma(\mathcal{A})$, então o conjunto $\{\lambda_0\}$ é uma parte isolada de $\sigma(\mathcal{A})$. Seja λ_0 tal ponto e suponha que a projeção de Riesz \mathbb{P}_{λ_0} possui posto infinito e consideremos $M = \text{Im } \mathbb{P}_{\lambda_0}$ e $L = \text{Ker } \mathbb{P}_{\lambda_0}$. Então, pelo Teorema [1.4.20](#) obtemos que $X = M \oplus L$ e as propriedades da Definição [1.4.23](#) serão satisfeitas. Portanto λ_0 é um autovalor de tipo finito.

Por outro lado, seja λ_0 um autovalor de \mathcal{A} de tipo finito. Então X admite a decomposição $X = M \oplus L$ satisfazendo as propriedades da Definição [1.4.23](#). Pelo Teorema [1.4.22](#) obtemos que $\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda_0\} \cup \sigma(\mathcal{A}|_L)$. Desde que $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}|_L)$, obtemos que λ_0 é um ponto isolado de $\sigma(\mathcal{A})$ e $M = \text{Im } \mathbb{P}_{\lambda_0}$. Mas, $\dim M < \infty$, com isso concluímos que \mathbb{P}_{λ_0} tem posto finito. \square

Definição 1.4.25. Sejam λ um autovalor de tipo finito de \mathcal{A} e $X = M \oplus L$ em que

$$M = \text{Im } \mathbb{P}_\lambda \quad \text{e} \quad L = \text{Ker } \mathbb{P}_\lambda.$$

Chamamos de *multiplicidade algébrica* de λ a dimensão de M , isto é, a dimensão de:

$$\text{Im } \mathbb{P}_\lambda.$$

Chamamos de *multiplicidade geométrica* de λ a dimensão de

$$\text{Ker } (\lambda - \mathcal{A}).$$

O teorema a seguir será de grande importância para concluirmos quando os autovalores de um operador possui multiplicidade algébrica finita.

Teorema 1.4.26. Sejam \mathcal{A} um operador compacto em um espaço de Banach e σ uma parte isolada do espectro de $\sigma(\mathcal{A})$. Se $0 \notin \sigma$, então a projeção de Riesz \mathbb{P}_σ possui posto finito.

Demonstração. Seja Γ um contorno de Cauchy em torno de σ de modo que separe σ de $\sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma$. Desde que $0 \notin \sigma$ podemos assumir, sem perda de generalidade, que 0 pertence o domínio externo de Γ . Daí,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\sigma &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda} (\lambda - \mathcal{A} + \mathcal{A})(\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda} I d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda} \mathcal{A} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda \\ &= \mathcal{A} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda \right). \end{aligned}$$

Com isso, conclui-se que \mathbb{P}_σ é compacto. Além disso, como \mathbb{P}_σ é uma projeção implica que \mathbb{P}_σ possui posto finito. \square

Corolário 1.4.27. Todo $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ não nulo de um operador compacto é um autovalor do tipo finito.

Demonstração. Basta observarmos que dado um ponto $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ não-nulo de um operador compacto tem-se que o conjunto $\{\lambda\}$ é uma parte isolada de $\sigma(\mathcal{A})$. Pelo Teorema [1.4.26](#), o operador \mathbb{P}_λ possui posto finito. Com isso, pelo Teorema [1.2.27](#), conclui-se que λ é um autovalor de tipo finito. \square

1.5 Espaços de Sobolev

Definição 1.5.1. Considere uma ênupla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, a qual chamaremos de multi-índice. Definimos

- (a) $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$,
- (b) $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
- (c) $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$,
- (d) $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \binom{\alpha_2}{\beta_2} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$.

Definição 1.5.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto com fronteira $\partial\Omega$ suave. Para qualquer inteiro m não negativo, $C^m(\Omega)$ é o espaço formado por todas as funções que juntamente com todas as suas derivadas parciais ∂^α com ordem $\alpha \leq m$, são contínuas em Ω . Para $m = 0$, denotamos $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. O suporte de uma função contínua ϕ é definido por

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega | \phi(x) \neq 0\}}.$$

Os subespaços $C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega)$ são formados por todas as funções $C(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$, respectivamente, com suporte compacto em Ω . A topologia de C_0^∞ definida de tal forma que $\{\phi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para 0 se

- i) O conjunto suporte de todas $\{\phi_n(\cdot)\}$ está contido em um conjunto compacto (este conjunto é fixo).
- ii) $\{\phi_n(\cdot)\}$ e suas derivadas parciais convergem uniformemente para 0.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ dotado por esta topologia é chamado de *espaço teste*, denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Teorema 1.5.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado com fronteira suficientemente suave $\partial\Omega$. Se $\mathcal{D}(\Omega)$ é sequencialmente completo, isto é, se uma sequência $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ satisfaz

- (a) $\text{supp}(\phi_n) \subset K \subset \Omega$, onde K é compacto.
- (b) $\max |\partial^\alpha \phi_n(x) - \partial^\alpha \phi_m(x)| \rightarrow 0$, $(n, m \rightarrow \infty)$.

Então, existe $\phi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\phi_n \rightarrow \phi_0$, para n suficientemente grande.

Demonstração. Ver [II, pg. 19]. □

Definição 1.5.4. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado com fronteira suave $\partial\Omega$. O espaço funcional contínuo (ou espaço dual) de $\mathcal{D}(\Omega)$, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, é chamado de espaço das funções generalizadas ou espaço de distribuições em Ω .

A derivada fraca $\partial^\alpha f$ de uma distribuição $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é definida por

$$\langle \partial^\alpha f, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a dualidade entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é,

$$\langle f, \phi \rangle = f(\phi).$$

Com isso, toda distribuição possui derivadas de todas as ordens. Considerando uma função localmente integrável, $f(\cdot)$, definida em Ω , existe uma distribuição \bar{f} definida por

$$\langle \bar{f}, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definição 1.5.5. Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave $\partial\Omega$. Uma sequência de funções generalizadas $\{f_n\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge fracamente para $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observe que se uma sequência de funções generalizadas é convergente, então a sequência de qualquer ordem de sua derivada generalizada também é convergente.

Definição 1.5.6. Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave $\partial\Omega$. Para qualquer inteiro m , definimos

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \partial^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\},$$

que é chamado de espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω . $H^m(\Omega)$ munido do produto interno:

$$\langle f, g \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall f, g \in H^m(\Omega),$$

é um espaço de Hilbert.

Temos os seguintes teoremas de imersão em espaços de Sobolev:

Teorema 1.5.7. (Teorema da imersão contínua de Sobolev). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto, limitado e com fronteira $\partial\Omega$ regular, com $s = m + \frac{n}{2} + \epsilon$, $0 < \epsilon < 1$, em que m é um inteiro não negativo. Então, a imersão

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\epsilon}(\Omega)$$

é contínua.

Demonstração. Ver [I, pg. 85]. □

Teorema 1.5.8. (Teorema da imersão compacta de Sobolev). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto, limitado e com fronteira, $\partial\Omega$, regular e considere $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, com $s_1 < s_2$. Então, a imersão

$$H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$$

é compacta.

Demonstração. Ver [I, pg. 168]. □

Capítulo 2

Bases de Riesz em Espaço de Hilbert

Neste capítulo iremos definir as bases de Riesz e os principais resultados que possibilitam a obtenção das mesmas em espaços de Hilbert. Nos próximos capítulos, veremos que a existência de tais bases está relacionada com a estabilidade exponencial de certos problemas em equações diferenciais parciais (EDPs) e com a condição de crescimento determinada pelo espectro (Veja Definição [1.3.19](#)). Em uma matriz de dimensão finita sempre é possível encontrarmos autovetores generalizados que formam uma base para o espaço estado (Ver [\[15\]](#), Seções 9.4-9.6). Porém, para sistemas lineares de dimensão infinita isto nem sempre é possível, o que torna a busca por condições onde isto aconteça interessante e, ao mesmo tempo, desafiador.

No estudo de EDPs existem exemplos de sistemas lineares de dimensão infinita em que a condição de crescimento determinada pelo espectro não é válida (Veja [\[12\]](#), Exemplo 3.6). Com isso, pode ocorrer que mesmo que todo o espectro do operador do sistema seja composto por elementos cuja a parte real de seus autovalores sejam negativas, o sistema ainda pode crescer à medida que o tempo tende ao infinito. Neste sentido, veremos que a determinação de bases de Riesz será de fundamental importância para dar respostas positivas a problemas de estabilização.

2.1 Bases de Riesz

Em espaços de dimensão finita, temos o seguinte conceito de base:

Definição 2.1.1. No espaço Euclidiano \mathbb{C}^n , um conjunto de elementos $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ é chamado de base para o espaço \mathbb{C}^n , quando $\{x_i\}_{i=1}^n$ é linearmente independente e para

cada vetor $x \in \mathbb{C}$ podemos representar por

$$x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

para algumas constantes complexas a_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Iremos aplicar o processo de Gram-Schmidt para concluirmos que dado uma base qualquer para \mathbb{C}^n , sempre é possível obter uma base ortogonal ou ortonormal para \mathbb{C}^n . Além disso, iremos concluir que duas bases quaisquer de \mathbb{C}^n são equivalentes no seguinte sentido:

Definição 2.1.2. Sejam $\{x_i\}_{i=1}^n$ e $\{y_i\}_{i=1}^n$ duas bases de \mathbb{C}^n . Dizemos que estas duas bases são equivalentes, quando existe uma matriz T linear e invertível $n \times n$ tal que

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Se $\{x_i\}_{i=1}^n$ é uma base de \mathbb{C}^n , o processo de Gram-Schmidt consiste em considerar

$$u_1 = x_1, \quad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, \quad \dots, \quad u_j = x_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle u_i, x_j \rangle}{\|u_i\|} u_i, \quad e_j = \frac{u_j}{\|u_j\|}, \quad (2.1)$$

com $j = 2, \dots, n$. Dessa forma, obtemos duas subsequências $\{u_i\}_{i=1}^n$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ em que $\{u_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortogonal pois,

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \text{ para todo } i \neq j,$$

e para cada $x \in \mathbb{C}^n$ podemos representar por

$$x = \sum_{i=1}^n a_i u_i, \quad a_i = \frac{\langle x, u_i \rangle}{\|u_i\|^2}.$$

E a sequência $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal, pois $\|e_i\| = 1$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ e para cada $x \in \mathbb{C}^n$ podemos representar por

$$x = \sum_{i=1}^n a_i e_i, \quad a_i = \langle x, e_i \rangle$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Pela construção de (2.1) podemos ver que $\{x_i\}_{i=1}^n$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ são equivalentes. Além disso, pela Definição 2.1.2 podemos obter que quaisquer duas bases de \mathbb{C}^n são equivalentes.

2. Bases de Riesz em Espaço de Hilbert

Em dimensão infinita, temos o seguinte conceito de base para um espaço de Hilbert H .

Definição 2.1.3. Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que uma sequência $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ω -linearmente independente (Veja Definição [1.1.4](#)) é uma base para H , quando para cada $x \in H$, existe uma sequência $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i,$$

com a convergência da série ocorrendo na norma de H .

Para as Bases de Riesz que definiremos no que segue, um conceito que resultará importante é o de bases equivalentes.

Definição 2.1.4. Duas bases $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ e $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ de um espaço de Hilbert H são ditas *equivalentes*, quando

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ é convergente se, e somente se, } \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i \text{ é convergente.}$$

Uma caracterização bastante importante é a seguinte:

Teorema 2.1.5. Duas bases $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ e $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ de um espaço de Hilbert H são equivalentes se, e somente se, existe um operador invertível limitado $T : H \rightarrow H$ tal que $Tx_n = y_n$ para cada n .

Demonstração. De fato, suponhamos que existe um operador invertível limitado $T : H \rightarrow H$ tal que $Tx_n = y_n$ para cada n . Para vermos que vale a equivalência da Definição [2.1.4](#) basta observarmos que

$$T \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i T(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i \quad \text{e} \quad T^{-1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i T^{-1}(y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i.$$

A seguir, utilizamos o Teorema [1.2.9](#) para garantirmos que T e T^{-1} são operadores limitados. Assim, a conclusão segue. Reciprocamente, suponhamos que $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ são equivalentes. Para cada

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in H,$$

definimos

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i.$$

Claramente temos que T está bem definido, é linear e $Tx_i = y_i$ para todo i . Agora mostraremos que T é um operador limitado invertível. Para isso, basta definirmos

$$T_N x = \sum_{i=1}^N a_i y_i.$$

Então,

$$Tx = \lim_{N \rightarrow \infty} T_N x.$$

Como cada T_N é limitado, pelo Teorema [1.2.12](#) implica que T é limitado. Agora, como $\{y_i\}$ é uma base, temos que T é sobrejetor. Daí, pelo Teorema [1.2.8](#), o operador T é invertível e T^{-1} é contínuo. De onde segue o resultado. \square

As noções de bases ortonormais de \mathbb{C}^n podem ser generalizadas para espaços de Hilbert. A partir de agora, em todos os resultados, assumiremos que os espaços de Hilbert possuem dimensão infinita.

Definição 2.1.6. Seja H um espaço de Hilbert. A sequência $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ é chamada de *base ortonormal* para H , se

- (a) $\{x_i\}$ são perpendiculares entre si e cada vetor é unitário (logo, deve ser ω -linearmente independentes);
- (b) $\{x_i\}$ é completo em H , isto é, o vetor nulo é o único elemento perpendicular a cada vetor x_i no espaço.

As bases mais importantes em espaços de Hilbert separáveis são as bases ortonormais, em segundo lugar estão as bases de Riesz.

Definição 2.1.7. Seja H um espaço de Hilbert. Uma base de H é chamada de *base de Riesz*, quando é equivalente a uma base ortonormal.

Teorema 2.1.8. Seja H um espaço de Hilbert separável. Então, as afirmações são equivalentes.

- i) A sequência $\{x_i\}$ forma uma base de Riesz para H .
- ii) Existe um produto interno equivalente em H de tal forma que a sequência $\{x_i\}$ torna-se uma base ortonormal para H .

Demonstração. $i) \Rightarrow ii)$. Seja $\{x_i\}$ é uma base de Riesz para H . Então pelo Teorema [2.1.5](#) existe um operador invertível limitado $T : H \rightarrow H$ tal que

$$Tx_i = e_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

em que $\{e_i\}$ é uma base ortonormal. Agora, definimos o produto interno $\langle x, y \rangle_1$ em H dado por:

$$\langle x, y \rangle_1 = \langle Tx, Ty \rangle \text{ para todo } x, y \in H$$

com $\|\cdot\|_1$ sendo a norma induzida por este novo produto interno que foi definido. Observemos que, por consequência do Teorema [1.2.4](#), temos que

$$\|Tx\| = \|x\|_1 \leq \|T\|\|x\| \text{ e } \|T^{-1}x\|_1 = \|x\| \leq \|T^{-1}\|_1\|x\|_1.$$

Daí, é fácil ver que

$$\frac{\|x\|}{\|T^{-1}\|_1} \leq \|x\|_1 \leq \|T\|\|x\| \text{ para todo } x \in H.$$

Portanto, segue-se que este novo produto interno é equivalente ao antigo produto interno. Por fim, desde que

$$\langle x_i, x_j \rangle_1 = \langle Tx_i, Tx_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

para todo i e j , obtemos que $\{x_i\}$ forma uma base ortonormal para H com este novo produto interno.

ii) \Rightarrow i). Seja e_i uma base ortonormal com o produto interno usual em H e defina $T(e_i) = x_i$. Como $\{e_i\}$ e $\{x_i\}$ são bases para H , segue que T é linear, contínuo e bijetor. Pelo Teorema [1.2.9](#), obtemos que T é um isomorfismo. Dessa forma, $\{e_i\}$ e $\{x_i\}$ são equivalente. Portanto, segue-se que $\{x_i\}$ é uma base de Riesz para H . \square

2.2 Perturbações para bases de Riesz

Nessa seção, apresentaremos resultados de perturbações sobre bases de Riesz, nos quais são conhecidos como estabilidade de bases de Riesz.

Definição 2.2.1. Duas sequências $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ em um espaço de Hilbert estão *quadraticamente próximas* quando

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - y_i\|^2 < \infty.$$

Teorema 2.2.2. (Teorema de Bari) Seja $\{e_i\}$ uma base ortonormal para o espaço de Hilbert H . Se $\{y_i\}$ é uma sequência ω -linearmente independente, que está quadraticamente próxima de $\{e_i\}$, então $\{y_i\}$ é uma base de Riesz para H .

Demonstração. Defina o operador $T : H \rightarrow H$ dado por,

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle (e_i - y_i).$$

Temos que T é um operador linear tal que

$$\|Tx\|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{i=1}^{\infty} \|e_i - y_i\|^2.$$

Daí, o operador T é limitado com $\|T\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|e_i - y_i\|^2$. Agora, como $Te_i = e_i - y_i$, segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|e_i - y_i\|^2 < \infty.$$

Definimos

$$T_N x = \sum_{i=1}^N a_i T e_i, \quad \text{para } x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|(T - T_N)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle (e_i - y_i) - \sum_{i=1}^N a_i T e_i \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i, e_i \right\rangle T e_i - \sum_{i=1}^N a_i T e_i \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i T e_i - \sum_{i=1}^N a_i T e_i \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} a_i T e_i \right\|^2 \\ &\leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \|T e_i\|^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

para todo $x \in H$. Isso mostra que para $N \rightarrow \infty$ tem-se

$$\|T - T_N\| \rightarrow 0.$$

Como T_N é um operador de posto finito, já que é de classificação finita, segue-se pelo Corolário [1.2.26](#) que $T \in \mathcal{K}(H)$. Agora mostraremos que $\text{Ker}(I - T) = \{0\}$. Se

$(I - T)x = 0$, então

$$0 = (I - T)x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle (e_i - y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle y_i$$

Pelo fato que $\{y_i\}$ ser ω -linearmente independente, segue que $x = 0$. Portanto,

$$\text{Ker}(I - T) = \{0\}.$$

Logo, o operador $I - T$ é invertível e como $(I - T)e_i = y_i$, obtemos que $\{y_i\}$ é equivalente a $\{e_i\}$, portanto por definição, $\{y_i\}$ é uma base de Riesz. \square

Corolário 2.2.3. Seja $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma base de Riesz do espaço de Hilbert H . Se existir um $N \geq 0$ tal que a sequência $\{\psi_i\}_{i=N+1}^{\infty}$ em H :

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \|x_i - \psi_i\|^2 < \infty,$$

então existe $M \geq N$ tal que $\{x_i\}_{i=1}^M \cup \{\psi_i\}_{i=M+1}^{\infty}$ forma uma base de Riesz para H .

Demonstração. A demonstração segue de forma análoga à prova do Teorema de Bari. \square

Teorema 2.2.4. Seja $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma base de Riesz para o espaço de Hilbert H . Suponhamos que exista um inteiro $N > 0$ tal que $\{y_i\}_{i=N}^{\infty}$ é uma sequência ω -linearmente independente de H e que

$$\sum_{i=N}^{\infty} \|x_i - y_i\|^2 < \infty.$$

Então, a sequência $\{y_i\}_{i=N}^{\infty}$ forma uma base de Riesz para o subespaço $H_0 = \text{Span}(\{y_i\})$, tal base é chamada de \mathcal{L} -base.

Demonstração. Seja T um operador linear limitado de tal forma que

$$Te_i = x_i, i = 1, 2, \dots$$

em que $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal de H . Agora, defina o operador S dado por:

$$Sx = \sum_{i=1}^{N-1} \langle x, e_i \rangle x_i + \sum_{i=N}^{\infty} \langle x, e_i \rangle (x_i - y_i), \text{ para } x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i \in H.$$

Claramente S é linear e pela desigualdade de Cauchy,

$$\|Sx\| \leq \|x\| \sum_{i=1}^{N-1} \|x_i\| + \|x\| \sqrt{\sum_{i=N}^{\infty} \|x_i - y_i\|^2}$$

no que segue que S é limitado em H . Agora observemos que

$$(T - S)x = \sum_{i=N}^{\infty} \langle x, e_i \rangle y_i, \quad \text{para } x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i \in H.$$

Isso mostra que

$$\text{Im}(T - S) \subset H_0.$$

Uma vez que $\text{Im}(T - S)$ é fechado e contém quaisquer combinações lineares finitas de $\{y_i\}_{i=N}^{\infty}$, temos

$$H_0 \subset \text{Im}(T - S).$$

Com isso, obtemos que $H_0 = \text{Im}(T - S)$. Agora, considerando que $(T - S)$ sendo um operador limitado do subespaço $H_e = \text{Span}(\{e_i\})$ e suponhamos que $x = \sum_{i=N}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i \in H_e$ é tal que $(T - S)x = 0$. Temos que

$$\sum_{i=N}^{\infty} \langle x, e_i \rangle y_i = 0.$$

Como $\{y_i\}_N^{\infty}$ é ω -linearmente independente, implica que $\langle x, e_i \rangle = 0$ para todo $i \geq 1$. Dessa forma, $x = 0$ e segue-se que $(T - S)$ é um operador limitado invertível de H_e em H_0 . Por fim, Pelo Teorema 1.2.8 obtemos que $(T - S)^{-1} \in \mathcal{L}(H_0, H_e)$ e desde que

$$(T - S)e_i = y_i, \forall i \geq N,$$

concluimos que $\{y_i\}$ é uma base de Riesz para H_0 . □

2.3 Operador espectral de Riesz.

Para uma matriz A , $n \times n$, estamos interessados em encontrar uma base formada pelos autovetores de A . Porém, em matrizes auto-adjuntas ou anti-adjuntas os seus autovetores geralmente não formam uma base de Riesz em \mathbb{C}^n . Com o surgimento da ideia de substituímos os autovetores por autovetores generalizados, conseguimos obter essas bases. Diante disso, o nosso objetivo principal nesta seção será de generalizar esse conceito em espaços de Hilbert.

Para um operador linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow H$ em um espaço de Hilbert temos as seguintes definições:

Definição 2.3.1. Dizemos que ϕ é um *autovetor generalizado* do operador \mathcal{A} , quando existe um $\lambda \in \mathbb{C}$ e um inteiro positivo n tal que $(\lambda - \mathcal{A})^n \phi = 0$.

Definição 2.3.2. O *subespaço raiz* do operador \mathcal{A} denotado por $\text{sp}(\mathcal{A})$ é o subespaço formado pelo $\text{span}(\{\phi_i\})$, isto é, o subespaço formado por todas as combinações lineares de autovetores generalizados de \mathcal{A} .

Denotaremos por $E(\lambda, \mathcal{A})$ a projeção no espaço de autovetores de \mathcal{A} correspondendo a um ponto espectral isolado, isto é, o subespaço gerado pelas funções ϕ_i que satisfazem $(\lambda_i - \mathcal{A})^n \phi_i = 0$ para algum n inteiro positivo e que:

$$E(\lambda, \mathcal{A})x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\bar{\lambda} - \mathcal{A})^{-1} x d\bar{\lambda} \quad (2.2)$$

em que Γ é a fronteira de um domínio fechado e λ é o único ponto espectral de \mathcal{A} que está no interior do contorno Γ .

Suponha que \mathcal{A} é um operador fechado e densamente definido em H e seja μ um ponto isolado do espectro de \mathcal{A} . Então a função holomorfa $\lambda \mapsto R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ pode ser expandida pela série de Laurent (Veja [2] Teorema 1.3 do Capítulo 2]) dadas por:

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda - \mu) \mathbb{A}_n,$$

para $0 < |\lambda - \mu| < \delta$ com $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Os coeficientes \mathbb{A}_n da série acima são operadores limitados dados por:

$$\mathbb{A}_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{R(\lambda, \mathcal{A})}{(\lambda - \mu)^{n+1}} d\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}$$

em que γ é o disco orientado positivamente com raio $\delta/2$ e centrado em μ .

Observemos que o coeficiente \mathbb{A}_{-1} é exatamente a projeção \mathbb{P} , pois

$$\mathbb{P} = E(\mu, \mathcal{A}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R(\lambda, \mathcal{A}) d\lambda,$$

correspondendo à decomposição $\sigma(\mathcal{A}) = \{\mu\} \cup (\sigma(\mathcal{A}) \setminus \{\mu\})$ do espectro de \mathcal{A} (veja o Teorema 1.4.20).

Observação : Pelas preliminares da seção 1.4.2 e pelo fato que $E(\lambda, \mathcal{A})$ é exatamente a projeção \mathbb{P} , podemos concluir que o integrando de (2.2) é um funcional linear limitado atuando no espaço H .

Lema 2.3.3. Seja \mathcal{A} um operador linear em um espaço de Hilbert H , tal que $\rho(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ e $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ são pontos isolados do espectro de \mathcal{A} em que o espectro é formado apenas por autovetores e pela parte residual, isto é, $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}) \cup \sigma_r(\mathcal{A})$, e consideremos

$$\sigma_{\infty} = \{x | E(\lambda_i, \mathcal{A})x = 0, i \geq 1\}.$$

Então, σ_{∞} possui dimensão 0 ou infinita.

Demonstração. Caso 1: \mathcal{A} é limitado e $0 < \dim(\sigma_{\infty}) < \infty$.

Afirmção 1: σ_{∞} é um subespaço \mathcal{A} -invariante.

De fato, tome $y \in \mathcal{A}\sigma_{\infty} = \{\mathcal{A}(x) | x \in \sigma_{\infty}\}$. Queremos mostrar que $y \in \sigma_{\infty}$. Por definição, se $y \in \mathcal{A}\sigma_{\infty}$, então existe um $x_{\infty} \in \sigma_{\infty}$ tal que $y = \mathcal{A}(x_{\infty})$. Observemos que

$$\begin{aligned} E(\lambda_i, \mathcal{A})x_{\infty} = 0 &\Rightarrow \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}E(\lambda_i, \mathcal{A})x_{\infty} = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}E(\lambda_i, \mathcal{A})\mathcal{A}x_{\infty} = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}E(\lambda_i, \mathcal{A})y = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}E(\lambda_i, \mathcal{A})y) = 0 \\ &\Rightarrow E(\lambda_i, \mathcal{A})y = 0, \end{aligned}$$

Portanto, por definição de σ_{∞} obtemos que $y \in \sigma_{\infty}$.

Afirmção 2: \mathcal{A} possui pelo menos um autovetor $x_{\infty} \in \sigma_{\infty}$ tal que $\mathcal{A}(x_{\infty}) = \eta x_{\infty}$, para alguma constante η .

De fato, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, defina

$$B_{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\mathcal{A}.$$

Note que vale

$$\|B_{\lambda}x - B_{\lambda}y\|_H = \frac{1}{\lambda}\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \leq \frac{\|\mathcal{A}\|}{\lambda}\|x - y\|_H.$$

Nestas condições, se $\lambda > \|\mathcal{A}\|$, então

$$\frac{\|\mathcal{A}\|}{\lambda} < 1$$

consequentemente, B_{λ} é uma contração. Logo, pelo o Teorema do ponto fixo de Banach, existe um $x_{\infty} \in D(\mathcal{A})$ tal que $B_{\lambda}x_{\infty} = x_{\infty}$. Dessa forma, obtemos que $\mathcal{A}x_{\infty} = \lambda x_{\infty}$ no que segue-se a afirmação em que $\eta = \lambda_i$ para algum i .

Uma vez que σ_{∞} é \mathcal{A} -invariante e $x_{\infty} \in \sigma_{\infty}$, ao considerarmos Γ em torno de λ_i , sabemos pelo construção de (1.10) que

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda \right) x_{\infty} = x_{\infty}.$$

Assim,

$$E(\lambda_i, \mathcal{A})x_\infty = x_\infty = 0,$$

o que é uma contradição, pois pela Afirmação 2, x_∞ é um autovetor. Portanto, segue-se que σ_∞ possui dimensão 0 ou infinita.

Caso 2: \mathcal{A} é ilimitado.

Tomemos $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$ tal que $|\lambda_0 - \lambda_i| \geq \varepsilon > 0$, para todo $i \geq 1$. Sejam $T = (\lambda_0 - \mathcal{A})^{-1}$ e $\mu_i = (\lambda_0 - \lambda_i)^{-1}$ com $i \geq 1$.

Afirmção 3: $\lambda_i \in \sigma_p(\mathcal{A})$ se, e somente se, $\mu_i \in \sigma_p(T)$.

De fato, se $\mu_i \in \sigma_p(T)$, então existe $x \neq 0$ tal que $Tx - \mu_i x = 0$. Observemos que

$$\begin{aligned} Tx - \mu_i x = 0 &\Leftrightarrow (\lambda_0 - \mathcal{A})^{-1}x - (\lambda_0 - \lambda_i)^{-1}x = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda_0 - \lambda_i)x - (\lambda_0 - \mathcal{A})x = 0 \\ &\Leftrightarrow -\lambda_i x + \mathcal{A}x = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A}x = \lambda_i x. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos que $\lambda_i \in \sigma_p(\mathcal{A})$.

Afirmção 4: $\lambda_i \in \sigma_r(\mathcal{A})$ se, e somente se, $\mu_i \in \sigma_r(T)$.

Primeiro, iremos mostrar a equivalência da existência de $(\lambda_i - \mathcal{A})^{-1}$ e $(\mu_i - T)^{-1}$. Para isto, seja $\lambda_i \in \sigma_p(\mathcal{A})$. Então, por definição existe $(\lambda_i - \mathcal{A})^{-1}$. Dessa forma, $(\lambda_i - \mathcal{A})x = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Observemos que

$$\begin{aligned} (\mu_i - T)^{-1}x = 0 &\Leftrightarrow ((\lambda_0 - \lambda_i)^{-1} - (\lambda_0 - \mathcal{A})^{-1})x = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda_0 - \lambda_i)x - (\lambda_0 - \mathcal{A})x = 0 \\ &\Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda_i)x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que $(\mu_i - T)^{-1}$ existe.

Por fim, iremos mostrar a equivalência entre $\overline{\text{Im}(\lambda_i - \mathcal{A})} \neq H$ e $\overline{\text{Im}(\mu_i - T)} \neq H$. Se $\overline{\text{Im}(\lambda_i - \mathcal{A})} \neq H$, então existe $h \in H$ não nulo, tal que satisfaz

$$\langle h, \lambda_i x - \mathcal{A}x \rangle = 0, \quad \forall x \in H.$$

Agora, consideremos $y = (\mu_i - T)^{-1}(\lambda_i - \mathcal{A})x$. Com isso, sucede-se que

$$\langle h, (\mu_i - T)y \rangle = \langle h, (\mu_i - T)(\mu_i - T)^{-1}(\lambda_i - \mathcal{A})x \rangle = \langle h, (\lambda_i - \mathcal{A})x \rangle = 0.$$

Assim, obtemos que $\overline{\text{Im}(\mu_i - T)} \neq H$. Reciprocamente, a outra implicação é válida.

2. Bases de Riesz em Espaço de Hilbert

Portanto, segue-se a equivalência entre $\overline{\text{Im}(\lambda_i - \mathcal{A})} \neq H$ e $\overline{\text{Im}(\mu_i - T)} \neq H$.

Pelas afirmações 3 e 4, podemos concluir que

$$E(\lambda_i, \mathcal{A}) = E(\mu_i, T), \quad \text{para todo } i \geq 1.$$

Assim,

$$\sigma_\infty = \{x \mid (\mu_i, T) = 0, \mu_i \in \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)\}.$$

Portanto, como T é limitado, pelo caso anterior que mostramos, podemos concluir que σ_∞ possui dimensão 0 ou infinita. \square

Lema 2.3.4. Seja \mathcal{A} um operador densamente definido e fechado em um espaço de Hilbert H com autovalores isolados $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$. Então,

$$H = \text{sp}(\mathcal{A}) \oplus \sigma_\infty(\mathcal{A}^*),$$

em que $\sigma_\infty(\mathcal{A}^*) = \{x \mid E(\bar{\lambda}_i, \mathcal{A}^*)x = 0, \lambda_i \in \sigma_p(\mathcal{A})\}$.

Demonstração. Observemos que $\sigma(\mathcal{A}^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$, em que $\bar{\lambda}_i$ é um ponto espectral isolado de \mathcal{A}^* . Dessa forma, $E(\bar{\lambda}_i, \mathcal{A}^*)$ está bem definido. Sejam $x \in E(\lambda_i, \mathcal{A})H$ e $x^* \in \sigma_\infty(\mathcal{A}^*)$. Então,

$$E(\lambda_i, \mathcal{A})x = x \text{ e } E(\bar{\lambda}_i, \mathcal{A}^*)x^* = x^*.$$

Assim,

$$\langle x, x^* \rangle = \langle E(\lambda_i, \mathcal{A})x, x^* \rangle = \langle x, E(\bar{\lambda}_i, \mathcal{A}^*)x^* \rangle = 0.$$

Portanto, obtemos que

$$\text{sp}(\mathcal{A}) \subset (\sigma_\infty(\mathcal{A}^*))^\perp.$$

Agora, tomemos $x \notin \text{sp}(\mathcal{A})$. Pelo Teorema da Extensão de Hahn-Banach, existe um funcional x^* tal que

$$\langle x, x^* \rangle = 1 \text{ e } \langle y, x^* \rangle = 0, \quad \text{para todo } y \in \text{sp}(\mathcal{A}).$$

Observemos que para qualquer $w \in H$, obtemos que $E(\lambda_i, \mathcal{A})w \in \text{sp}(\mathcal{A})$. Daí,

$$\langle w, E(\bar{\lambda}_i, \mathcal{A}^*)x^* \rangle = \langle E(\lambda_i, \mathcal{A})w, x^* \rangle = 0$$

Como w é arbitrário e $E(\bar{\lambda}_i, \mathcal{A}^*)x^* = 0$, implica que $x^* \in \sigma_\infty(\mathcal{A}^*)$. Dessa forma, $x \notin (\sigma_\infty(\mathcal{A}^*))^\perp$. Portanto,

$$\text{sp}(\mathcal{A}) = (\sigma_\infty(\mathcal{A}^*))^\perp.$$

□

Teorema 2.3.5. Seja \mathcal{A} um operador linear densamente definido e fechado em um espaço de Hilbert H com autovalores isolados $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, tal que $\sigma_r(\mathcal{A}) = \emptyset$ e $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma base de Riesz para H . Suponha que existe um inteiro $N \geq 1$ e uma sequência $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ de autovetores generalizados de \mathcal{A} , tal que

$$\sum_{i=N}^{\infty} \|\psi_i - x_i\|^2 < \infty.$$

Então, existem $M (\geq N)$ números de autovetores generalizados de \mathcal{A} , $\{\psi_{i_0}\}_{i=1}^M$, tal que

$$\{\psi_{i_0}\}_{i=1}^M \cup \{\psi_i\}_{i=M+1}^{\infty}$$

forma uma base de Riesz para H .

Demonstração. Vejamos as afirmações:

Afirmção 1: $\{x_i\}_{i=1}^M \cup \{\psi_i\}_{i=M+1}^{\infty}$ forma uma base de Riesz para H .

De fato, decorre do Corolário (2.2.3).

Afirmção 2: $(\text{sp}(\mathcal{A}))^{\perp} = \sigma_{\infty}(\mathcal{A}^*)$ possui dimensão finita.

De fato, decorre pela Afirmção 1 acima e pelo Lema (2.3.4).

Afirmção 3: $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A}) \cup \sigma_r(\mathcal{A})$ se, e somente se, $\bar{\lambda} \in \sigma_p(\mathcal{A}^*) \cup \sigma_r(\mathcal{A}^*)$

De fato, decorre do Teorema (1.2.28).

Por hipótese, H é um espaço de Hilbert com autovalores isolados $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$. Assim,

$$\sigma_p(\mathcal{A}^*) \cup \sigma_r(\mathcal{A}^*) = \{\bar{\lambda}_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

Pela Afirmção 2 acima junto com o Lema (2.3.3), obtemos que $\sigma_{\infty}(\mathcal{A}^*) = \{0\}$. Por fim, pelo Lema (2.3.4),

$$H = \text{sp}(\mathcal{A}).$$

Agora, suponhamos que $\{\psi_{\alpha}\} \cup \{\psi_i\}_{i=M}^{\infty}$ seja o conjunto “Máxima” ω -linearmente independente dos autovetores generalizados de \mathcal{A} , isto é, $\{\psi_{\alpha}\} \cup \{\psi_i\}_{i=M}^{\infty}$ é ω -linearmente independente, mas se adicionarmos outro autovetor generalizado de \mathcal{A} o conjunto estendido não é mais ω -linearmente independente.

Pelo Teorema (2.2.4) $\{\psi_{\alpha}\} \cup \{\psi_i\}_{i=M}^{\infty}$ forma uma base de Riesz para o subespaço abrangido por si mesmo, isto é, o subespaço $\text{sp}(\mathcal{A})$ no qual foi mostrado acima que é todo o espaço H .

Por fim, aplicando o Teorema (2.2.2) temos que,

$$\{\psi_{i_0}\}_{i=1}^M \cup \{\psi_i\}_{i=M+1}^{\infty}$$

2. Bases de Riesz em Espaço de Hilbert

é uma base de Riesz para H .

□

Capítulo 3

Método da Comparação.

Neste capítulo iremos trabalhar um método de verificação para base de Riesz, o método da comparação, porém vale lembrar que existem outros métodos que fornecem ferramentas necessárias e suficientes para verificações, entre eles podemos destacar o método da base dupla e o da função de Green (Veja [5]). No entanto, ao longo do capítulo iremos sistematizar apenas o método da comparação. Este possibilita gerar bases de Riesz em sistemas descritos por Equações Diferenciais Parciais. A ideia básica para o método da comparação funcionar é que o feedback (informações) será considerada como perturbação do próprio sistema. Uma vez que o espaço estado dos problemas possui uma base ortonormal, este método possibilita verificarmos a existência de uma base de Riesz equivalente à base ortonormal. Esta verificação claramente será vista pela condição (3.51) do nosso primeiro problema.

Motivações que nos levam ao estudo desses métodos surgiram pelas aplicações do espaço sideral, como exemplo podemos citar os manipuladores de Links e antenas flexíveis, onde essas estruturas têm sido um tópico muito ativo em pesquisa.

Iniciaremos o nosso estudo observando uma aplicação que descreve a vibração de uma viga delgada flexível, a equação de viga de Euler-Bernoulli. Ela simplifica a teoria linear da Elasticidade, na qual fornece ferramentas para calcular as características de deflexão da viga. A equação de viga de Euler-Bernoulli é uma equação diferencial parcial linear de quarta ordem. Esta teoria foi solidificada por Leonhad Euler e Daniel Bernoulli, por volta de 1950.

Considere a equação de viga de Euler-Bernoulli dada por,

$$\rho(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x) I(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

em que $w(x, t)$ descreve a deflexão da viga em alguma posição x e no tempo t , $\rho(x)$ é a densidade da massa linear do feixe, $E(x)$ é o módulo de elasticidade e $I(x)$ é o

3. Método da Comparação.

segundo momento de área. As derivadas sucessivas de $w(x, t)$ possuem significados físicos importantes, descritos por:

- $w(x, t)$ é a deflexão, isto é, o deslocamento de qualquer ponto no eixo da viga.
- $\frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$ é a inclinação da viga.
- $\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}$ é o momento fletor da viga, isto é, a força circular que age na viga quando aplicamos uma carga, a tendência na viga é uma deformação onde gera um movimento com dois esforços, tração na parte de baixo e compressão na parte de cima, ambos esforços acontecem entre a linha neutra, onde o esforço é zero.
- $\frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3}$ é a força de cisalhamento da viga, o esforço que resulta em forças cortantes, isto é, forças em sentidos opostos.

A equação de viga contém uma derivada de quarta ordem em x , com isso, para que o problema esteja bem posto, o devemos ser suplementar com no máximo quatro condições, que normalmente são fornecidas sobre a fronteira. Destacaremos as seguintes condições de fronteiras (localizadas na extremidade esquerda) que geralmente são encontradas:

- Extremidade engastada: $w|_{x=0} = \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0} = 0$, isto é, a deflexão e inclinação da viga na posição $x = 0$ é nula.
- Extremidade fixa por pino: $w|_{x=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=0} = 0$, isto é, a deflexão e o momento fletor da viga na posição $x = 0$ é nula.
- Extremidade com suporte cilíndrico: $\frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}|_{x=0} = 0$, isto é, a inclinação e a força de cisalhamento da viga na posição $x = 0$ é nula.
- Extremidade totalmente livre: $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=0} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}|_{x=0} = 0$, isto é, o momento fletor e a força de cisalhamento da viga na posição $x = 0$ é nula.

3.1 Estabilização da fronteira para o problema de viga Euler-Bernoulli.

Nessa seção iremos trabalhar com métodos de controle para estabilização na fronteira do problema de viga *Euler-Bernoulli*.

3. Método da Comparação.

Considere uma viga *cantilever*, isto é, que possuem uma das extremidades fixa e a outra livre com controle de fronteira sendo o momento fletor:

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) + w_{xxxx}(x, t) = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ w(0, t) = w_x(0, t) = w_{xxx}(1, t) = 0, \\ w_{xx}(1, t) = u(t), \\ y(t) = w_{xt}(1, t), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $u(t)$ é a entrada e $y(t)$ é a saída do sistema.

Seja $H_L^2(0, 1) = \{f(x) \in H^2(0, 1) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ e consideremos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$$

com a norma induzida:

$$\|(f, g)\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^1 [|f''(x)|^2 + |g(x)|^2] dx, \quad \forall (f, g) \in \mathcal{H}.$$

A energia do sistema (3.1), na qual consiste em energia cinética e potencial elástica, é dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [w_{xx}^2(x, t) + w_t^2(x, t)] dx = \frac{1}{2} \|(w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))\|^2. \quad (3.2)$$

Calculando a derivada parcial da energia em relação a t e utilizando (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= \int_0^1 (w_{xx}w_{xxt} + w_t w_{tt}) dx \\ &= \int_0^1 w_{xx}w_{xxt} dx - \int_0^1 w_t w_{xxxx} dx \\ &= \int_0^1 w_{xx}w_{xxt} dx - \left[\int_0^1 (w_t w_{xxx})_x dx - \int_0^1 w_{tx} w_{xxx} dx \right] \\ &= \int_0^1 w_{xx}w_{xxt} dx - \left[w_t(1)w_{xxx}(1) - w_t(0)w_{xxx}(0) - \int_0^1 w_{tx} w_{xxx} dx \right] \\ &= \int_0^1 w_{xx}w_{xxt} dx + \int_0^1 w_{tx} w_{xxx} dx \\ &= \int_0^1 w_{xx}w_{xxt} dx + \left[w_{tx}(1)w_{xx}(1) - w_{tx}(0)w_{xx}(0) - \int_0^1 w_{xxt} w_{xx} dx \right] \\ &= w_{tx}(1)w_{xx}(1) \\ &= y(t)u(t). \end{aligned}$$

Observação: Pelas condições de fronteira, sabemos que $w_x(0) = 0$. Assim, clara-

3. Método da Comparação.

mente temos que $w_{xxx}(0) = 0$. Dessa forma, a parcela (da quarta igualdade acima) $w_t(0)w_{xxx}(0) = 0$.

Portanto,

$$\frac{d}{dt}E(t) = u(t)y(t). \quad (3.3)$$

O sistema (3.1) é chamado de *passivo* pois o aumento da energia armazenado no sistema não é superior a energia externa que entra no sistema. Além disso, o controle com estabilização natural é proporcional à informação de saída:

$$u(t) = -ky(t), \quad k > 0, \quad (3.4)$$

em que a energia não aumenta em relação ao tempo, no sentido que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -ky^2(t) = -kw_{xt}^2(1, t) \leq 0.$$

Com o feedback de saída (3.4), o circuito fechado do sistema (3.1) pode ser escrito pela seguinte equação de evolução em \mathcal{H}

$$\frac{d}{dt}Y(t) = \mathcal{A}Y(t) \quad (3.5)$$

em que $Y(t) = (w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))$ e o operador \mathcal{A} são dados por:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(f(x), g(x)) = (g(x), -f^{(4)}(x)) \\ D(\mathcal{A}) = \{(f, g) \in (H^4 \cap H_L^2) \times H_L^2 \mid f''(1) = -kg'(1), f'''(1) = 0\}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Temos o seguinte resultado:

Lema 3.1.1. (a) Para qualquer $k \geq 0$ real, o operador \mathcal{A} definido em (3.6) é dissipativo e $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Além disso \mathcal{A}^{-1} é compacto, portanto, o espectro $\sigma(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} possui apenas autovalores com multiplicidade algébrica finita.

(b) Todos os autovalores com módulo suficientemente grande são geometricamente simples e os autovalores $\{\lambda_n, \bar{\lambda}_n\}$ possuem expansão assintótica:

$$\lambda = \lambda_n = -\frac{1}{k} + i \left(n - \frac{1}{4} \right)^2 \pi^2 + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

para todo n inteiro positivo.

(c) As autofunções $F_n = (F_{1n}, \lambda_n F_{1n})$ correspondentes a λ_n possuem a seguinte ex-

ansão assintótica:

$$\begin{pmatrix} F_{1n}''(x) \\ \lambda_n F_{1n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-(n-\frac{1}{4})\pi x} + \operatorname{sen}\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi x - \operatorname{cos}\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi x \\ -e^{-(n-\frac{1}{4})\pi x} + \operatorname{sen}\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi x - \operatorname{cos}\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi x \end{pmatrix} \\ + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n(x)\|_{\mathcal{H}}^2 = 2, \quad (3.9)$$

para n suficientemente grande.

Demonstração. **Iniciaremos com a prova do item (a).**

Afirmção 1:

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}(f, g), (f, g) \rangle = -k|g'(1)|^2 \leq 0, \quad \forall (f, g) \in D(\mathcal{A}). \quad (3.10)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(f, g), (f, g) \rangle &= \langle (g(x), -f^{(4)}(x)), (f(x), g(x)) \rangle \\ &= \int_0^1 [g''(x)f''(x) - f^{(4)}(x)g(x)] dx \\ &= \int_0^1 g''(x)f''(x)dx - \int_0^1 f^{(4)}(x)g(x)dx \\ &= \left[\int_0^1 (g'(x)f''(x))' dx - \int_0^1 g'(x)f'''(x)dx \right] - \int_0^1 f^{(4)}(x)g(x)dx \\ &= \left[g'(1)f''(1) - g'(0)f''(0) - \int_0^1 g'(x)f'''(x)dx \right] - \int_0^1 f^{(4)}(x)g(x)dx \\ &= g'(1)(-kg'(1)) - \left[\int_0^1 (g(x)f'''(x))' dx - \int_0^1 g(x)f^{(4)}(x)dx \right] \\ &\quad - \int_0^1 f^{(4)}(x)g(x)dx \\ &= -k(g'(1))^2 - g(1)f'''(1) + g(0)f'''(0) \end{aligned}$$

Pelas condições de fronteira, sabemos que $f'''(1) = 0$ e $g(0) = 0$. Dessa forma,

$$\langle \mathcal{A}(f, g), (f, g) \rangle = -k|g'(1)|^2.$$

Portanto, o operador \mathcal{A} é dissipativo (ver Definição 1.3.6).

Afirmção 2: O operador \mathcal{A} é invertível.

3. Método da Comparação.

De fato, é suficiente mostrarmos que para todo $(f(x), g(x)) \in \mathcal{H}$, existem $F(x)$ e $G(x)$ tais que

$$\mathcal{A}(F(x), G(x)) = (f(x), g(x)). \quad (3.11)$$

Para que $(F(x), G(x))$ satisfaça (3.11), devemos ter que

$$(G(x), -F^{(4)}(x)) = (f(x), g(x)), \quad (3.12)$$

isto é,

$$G(x) = f(x) \quad \text{e} \quad -F^{(4)}(x) = g(x).$$

Uma vez que temos a expressão explícita para $G(x)$, resta mostrarmos a expressão explícita para $F(x)$. Para $x \in (0, 1)$ arbitrário, integramos a equação de F no intervalo $(x, 1)$ e obtemos:

$$-F'''(1) + F'''(x) = \int_x^1 g(t) dt. \quad (3.13)$$

De maneira análoga, para $x_1 \in (0, 1)$ arbitrário e usando o fato que $F'''(1) = 0$, obtemos

$$F'''(1) - F'''(x_1) = \int_{x_1}^1 \int_x^1 g(t) dt dx. \quad (3.14)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^1 \int_x^1 g(t) dt dx &= \int_{x_1}^1 \left(\frac{d}{dx} x \int_x^1 g(t) dt \right) dx \\ &= -x_1 \int_{x_1}^1 g(t) dt + \int_{x_1}^1 xg(x) dx. \end{aligned}$$

Substituindo em (3.14) e usando o fato que $F'''(1) = -kg'(1)$,

$$F'''(x_1) = -kg'(1) + x_1 \int_{x_1}^1 g(t) dt - \int_{x_1}^1 xg(x) dx, \quad \forall x_1 \in (0, 1). \quad (3.15)$$

Para $x_2 \in (0, 1)$, integramos (3.15) em $(0, x_2)$ e obtemos

$$F''(x_2) - F''(0) = -kg'(1)x_2 + \int_0^{x_2} x_1 \int_{x_1}^1 g(t) dt dx_1 - \int_0^{x_2} \int_{x_1}^1 xg(x) dx dx_1, \quad \forall x_2 \in (0, 1). \quad (3.16)$$

Observemos que

3. Método da Comparação.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{x_2} x_1 \int_{x_1}^1 g(t) dt dx_1 &= \int_0^{x_2} \frac{1}{2} \frac{d}{dx_1} x_1^2 \int_{x_1}^1 g(t) dt dx_1 \\
 &= \frac{x_2^2}{2} \int_{x_2}^1 g(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1
 \end{aligned} \quad (3.17)$$

e que

$$\begin{aligned}
 \int_0^{x_2} \int_{x_1}^1 xg(x) dx dx_1 &= \int_0^{x_2} \frac{d}{dx_1} x_1 \int_{x_1}^1 xg(x) dx dx_1 \\
 &= x_2 \int_{x_2}^1 xg(x) dx + \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1.
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Substituindo (3.17) e (3.18) em (3.16) e usando o fato que $F'(0) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
 F'(x_2) &= -kg'(1)x_2 + \frac{x_2^2}{2} \int_{x_2}^1 g(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1 - x_2 \int_{x_2}^1 xg(x) dx \\
 &\quad - \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1, \quad \forall x_2 \in (0, 1).
 \end{aligned}$$

Para qualquer $x_3 \in (0, 1)$, integramos a expressão anterior em $(0, x_3)$ e obtemos

$$\begin{aligned}
 F(x_3) - F(0) &= -kg'(1) \frac{x_3^2}{2} + \int_0^{x_3} \frac{x_2^2}{2} \int_{x_2}^1 g(t) dt dx_2 + \frac{1}{2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1 dx_2 \\
 &\quad - \int_0^{x_3} x_2 \int_{x_2}^1 xg(x) dx dx_2 - \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1 dx_2.
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{x_3} \frac{x_2^2}{2} \int_{x_2}^1 g(t) dt dx_2 &= \frac{1}{6} \int_0^{x_3} \frac{d}{dx_2} x_2^3 \int_{x_2}^1 g(t) dt dx_2 \\
 &= \frac{x_3^3}{6} \int_{x_3}^1 g(t) dt + \frac{1}{6} \int_0^{x_3} x_2^3 g(x_2) dx_2
 \end{aligned} \quad (3.20)$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1 dx_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{x_3} \frac{d}{dx_2} x_2 \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{x_3}{2} \int_0^{x_3} x_1^2 g(x_1) dx_1 - \frac{1}{2} \int_0^{x_3} x_2^3 g(x_2) dx_2.
 \end{aligned} \quad (3.21)$$

3. Método da Comparação.

Temos também que:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_3} x_2 \int_{x_2}^1 xg(x) dx dx_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{x_3} \frac{d}{dx_2} x_2^2 \int_{x_2}^1 xg(x) dx dx_2 \\ &= \frac{x_3^2}{2} \int_{x_3}^1 xg(x) dx + \int_0^{x_3} \frac{x_2^3}{2} g(x_2) dx_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1 dx_2 &= \int_0^{x_3} \frac{d}{dx_2} x_2 \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1 dx_2 \\ &= x_3 \int_0^{x_3} x_1^2 g(x_1) dx_1 - \int_0^{x_3} x_2^3 g(x_2) dx_2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Substituindo (3.20) - (3.23) em (3.19) e usando o fato que $F(0) = 0$, conseguimos

$$\begin{aligned} F(x) &= -kg'(1) \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \int_x^1 g(t) dt + \frac{1}{6} \int_0^x t^3 g(t) dt + \frac{x}{2} \int_0^x t^2 g(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^x t^3 g(t) dt - \frac{x^2}{2} \int_x^1 tg(t) dt - \int_0^x \frac{t^3}{2} g(t) dt - x \int_0^x t^2 g(t) dt \\ &\quad + \int_0^x t^3 g(t) dt \\ &= \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} + \frac{t^2 x}{2} - \frac{t^3}{2} - xt^2 + t^3 - \frac{t^3}{2} \right) g(t) dt + \int_x^1 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 t}{2} \right) g(t) dt \\ &\quad - kg'(1) \frac{x^2}{2}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$F(x) = -kg'(1) \frac{x^2}{2} + \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} - x \frac{t^2}{2} \right) g(t) dt + \int_x^1 \left(\frac{x^3}{6} - x^2 \frac{t}{2} \right) g(t) dt. \quad (3.24)$$

Assim, concluímos que para todo $(f, g) \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1}(f, g) &= \left(-kg'(1) \frac{x^2}{2} + \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} - x \frac{t^2}{2} \right) g(t) dt + \int_x^1 \left(\frac{x^3}{6} - x^2 \frac{t}{2} \right) g(t) dt, f(x) \right) \\ &= \left(-kg'(1) \frac{x^2}{2} + \int_0^1 \left(\frac{t^3}{6} - x \frac{t^2}{2} \right) g(t) dt + \frac{1}{6} \int_x^1 (x-t)^3 g(t) dt, f(x) \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Observação: Para obtermos esta ultima igualdade acima, somamos e subtraímos o termo $\int_x^1 \left(\frac{t^3}{6} - x \frac{t^2}{2} \right) g(t) dt$.

Portanto, segue-se que o operador \mathcal{A} é invertível. Além disso, pelo Teorema 1.2.8 temos que $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Afirmção 3: \mathcal{A}^{-1} é compacto.

3. Método da Comparação.

Lembremos que para $(f, g) \in \mathcal{H} = H_L^2 \times L^2$, a segunda componente de $\mathcal{A}^{-1}(f, g)$ pertence à H_L^2 . Que, de acordo com o Teorema [1.5.8](#), é compacto em L^2 . Quanto à primeira componente, notemos que sua primeira derivada vale

$$-kg'(1)x - \int_0^1 \frac{t^2}{2}g(t)dt + \frac{1}{2} \int_x^1 (x-t)^2g(t)dt.$$

Já sua segunda derivada é dada por:

$$-kg'(1) + \int_x^1 (x-t)g(t)dt.$$

Já sua terceira derivada vale

$$\int_x^1 g(t)dt.$$

Por fim, sua quarta derivada vale $-g(x)$ que pertence a L^2 . Daí, a primeira componente de \mathcal{A}^{-1} pertence a $H^4(0, 1)$ que é compacto em H_L^2 .

Afirmção 4: O espectro $\sigma(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} possui apenas autovalores com multiplicidade algébrica finita.

Como $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é um operador compacto, pelo Teorema [1.2.28](#) temos que o espectro de \mathcal{A}^{-1} coincide com seu espectro pontual $\sigma_p(\mathcal{A}^{-1})$, sendo seus autovalores enumeráveis possuindo o zero como o único possível ponto de acumulação. Por outro lado, é fácil vermos que $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})$ se, e somente se, $\lambda^{-1} \in \sigma_p(\mathcal{A}^{-1})$, pois

$$\mathcal{A}x = \lambda x \Leftrightarrow x = \mathcal{A}^{-1}(\lambda x) \Leftrightarrow \lambda^{-1}x = \mathcal{A}^{-1}x.$$

Além disso, temos que $\text{Ker}(\lambda^{-1} - \mathcal{A}^{-1}) = \text{Ker}(\lambda - \mathcal{A})$, pois basta observarmos que se $x \in \text{Ker}(\lambda^{-1} - \mathcal{A}^{-1})$, então

$$(\lambda^{-1} - \mathcal{A})x = 0 \Leftrightarrow \lambda^{-1}\mathcal{A}x - x = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \mathcal{A})x = 0.$$

Assim, é válido se, e somente se, $x \in \text{Ker}(\lambda - \mathcal{A})$.

Desta forma, como a aplicação $\tau : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ dada por $\tau = 1/s$ é um homeomorfismo, então os autovalores de \mathcal{A} também formam uma sequência enumerável possuindo o infinito como possível “ponto” de acumulação. Temos também que $\sigma_p(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$, pois, se $\lambda \in \rho(\mathcal{A}^{-1})$, então $(\lambda - \mathcal{A}^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e portanto o problema

$$(\lambda - \mathcal{A}^{-1})x = f \tag{3.26}$$

possui solução para todo $f \in \mathcal{H}$, com $|x| \leq C|f|$. Em particular, para $f \in D(\mathcal{A})$, aplicamos o operador \mathcal{A}/λ em ambos os lados e encontramos que x é solução para o

3. Método da Comparação.

problema

$$\frac{1}{\lambda}x - \mathcal{A}x = -\frac{1}{\lambda}\mathcal{A}f.$$

Como $0 \in \rho(\mathcal{A})$, temos que para todo $\tilde{f} \in \mathcal{H}$, existe $f \in D(\mathcal{A})$ tal que $-\frac{1}{\lambda}\mathcal{A}f = \tilde{f}$ e assim existe $x \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$\frac{1}{\lambda}x - \mathcal{A}x = \tilde{f},$$

para todo $\tilde{f} \in \mathcal{H}$. Isto significa que $1/\lambda$ pertence a $\rho(\mathcal{A})$. Desta forma, o homeomorfismo τ também é uma correspondência entre os resolventes de \mathcal{A} e \mathcal{A}^{-1} . Sendo assim, se $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, então $1/\lambda$ deve pertencer a $\sigma_p(\mathcal{A}^{-1}) \cup \rho(\mathcal{A}^{-1})$. Daí, pela transformação τ devemos ter necessariamente que $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})$.

Agora, como $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, então $0 \in \rho(\mathcal{A})$ e pelo Teorema [1.4.15](#) com $\lambda = 0$, obtemos

$$(\mu - \mathcal{A})^{-1} = -\mathcal{A}^{-1} + \mu(\mu - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}^{-1},$$

para todo $\mu \in \rho(\mathcal{A})$. Em particular, obtemos que $(\mu - \mathcal{A})^{-1}$ é compacto para todo $\mu \in \rho(\mathcal{A})$.

Para $\eta \in \sigma(\mathcal{A})$ recordemos que a projeção de Riesz associada a η é da forma

$$\mathbb{P}_{\{\eta\}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda,$$

em que Γ é um contorno de Cauchy contendo η em seu interior. Como $(\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ é um operador compacto para cada $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ e como $\mathbb{P}_{\{\eta\}}$ é limite de somas de Riemann de operadores da forma $(z(t_k) - \mathcal{A})^{-1}(z(t_k) - z(t_{k-1}))$, em que $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma parametrização de Γ e $\{t_k\}$ é uma partição de $[0, 1]$, obtemos que $\mathbb{P}_{\{\eta\}}$ é compacto. Uma vez que $\mathbb{P}_{\{\eta\}}$ é uma projeção, pelo Corolário [1.4.19](#) a $\text{Im } \mathbb{P}_{\{\eta\}}$ é fechada. Logo, pelo Teorema [1.2.27](#) obtemos que $\mathbb{P}_{\{\eta\}}$ é um operador de posto finito. Portanto segue-se que os pontos de $\sigma(\mathcal{A})$ possuem multiplicidade algébrica finita. \square

Prova do item (b): Suponha que $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$. Então, existe $(f, g) \in D(\mathcal{A})$ tal que,

$$\mathcal{A}(f, g) = \lambda(f, g).$$

Com isso, temos que $g(x) = \lambda f(x)$, onde $f(x)$ satisfaz

$$\begin{cases} \lambda^2 f(x) + f^{(4)}(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ f(0) = f'(0) = f'''(1) = 0, \\ f''(1) = -k\lambda f'(1). \end{cases} \quad (3.27)$$

3. Método da Comparação.

Pela Afirmação (3.10), se (f, g) é um autovetor com autovalor λ , então

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}(f, g)(f, g) \rangle = \operatorname{Re} \langle \lambda(f, g), (f, g) \rangle = \operatorname{Re} \lambda |(f, g)|^2 \leq 0.$$

Com isso temos que $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ para qualquer $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, onde todos os autovalores aparecem em pares conjugados.

Diante disso, podemos considerar apenas os $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ tais que $\frac{\pi}{2} \leq \arg \lambda \leq \pi$, com $\lambda = \rho^2$ (fácil ver que para estes λ tem-se que $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$).

Afirmação 1:

$$\frac{\pi}{4} \leq \arg \rho \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.28)$$

De fato, consideramos as seguintes formas polares para λ e ρ :

$$\lambda = e^a (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad \text{e} \quad \rho = e^b (\cos \gamma + i \operatorname{sen} \gamma).$$

Temos que

$$\begin{aligned} \rho^2 = e^{2b} (\cos \gamma + i \operatorname{sen} \gamma)^2 &= e^{2b} (\cos^2 \gamma + 2i \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma - \operatorname{sen}^2 \gamma) \\ &= e^{2b} [(2 \cos^2 \gamma - 1) + i (2 \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma)] \\ &= e^{2b} (\cos(2\gamma) + i \operatorname{sen}(2\gamma)). \end{aligned}$$

Como $\lambda = \rho^2$, obtemos

$$e^a (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = e^{2b} (\cos(2\gamma) + i \operatorname{sen}(2\gamma)),$$

isto é, $a = 2b$ e $\theta = 2\gamma$. Portanto, se $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, teremos que $\pi/4 \leq \gamma \leq \pi/2$, conforme queríamos demonstrar.

Agora definimos,

$$\begin{cases} \omega_1 = e^{\frac{3\pi i}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \omega_2 = e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad \omega_3 = -\omega_2, \quad \omega_4 = -\omega_1, \\ S = \left\{ \rho \mid \frac{\pi}{4} \leq \arg \rho \leq \frac{\pi}{2} \right\}. \end{cases} \quad (3.29)$$

Desse ponto em diante, assumiremos que $\rho \in S$.

Afirmação 2: Para todo $\rho \in S$, temos

$$\operatorname{Re}(\rho \omega_1) \leq \operatorname{Re}(\rho \omega_2) \leq \operatorname{Re}(\rho \omega_3) \leq \operatorname{Re}(\rho \omega_4). \quad (3.30)$$

3. Método da Comparação.

De fato,

$$\begin{aligned}
 \rho\omega_1 &= e^b (\cos \gamma + i \operatorname{sen} \gamma) \left(e^{\frac{3\pi i}{4}} \right) \\
 &= e^b (\cos \gamma + i \operatorname{sen} \gamma) \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) \\
 &= e^b \left(\cos \gamma \cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \cos \gamma + i \operatorname{sen} \gamma \cos \frac{3\pi}{4} - \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\rho\omega_1) &= e^b \left(\cos \gamma \cos \frac{3\pi}{4} - \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} e^b (\operatorname{sen} \gamma + \cos \gamma).
 \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
 \rho\omega_2 &= e^b (\cos \gamma + i \operatorname{sen} \gamma) \left(e^{\frac{\pi i}{4}} \right) \\
 &= e^b (\cos \gamma + i \operatorname{sen} \gamma) \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= e^b \left(\cos \gamma \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos \gamma + i \operatorname{sen} \gamma \cos \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\rho\omega_2) &= e^b \left(\cos \gamma \cos \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} e^b (\operatorname{sen} \gamma - \cos \gamma).
 \end{aligned}$$

De (3.29) temos também que $\rho\omega_3 = -\rho\omega_2$ e $\rho\omega_4 = -\rho\omega_1$. Daí,

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^b (\operatorname{sen} \gamma - \cos \gamma) \quad \text{e} \quad \operatorname{Re}(\rho\omega_4) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^b (\operatorname{sen} \gamma + \cos \gamma).$$

Portanto, segue-se (3.30) para todo $\rho \in S$.

Dos cálculos recém desenvolvidos, temos as seguintes representações que serão de grande importância para cálculos futuros:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\rho\omega_1) = -|\rho| \operatorname{sen} \left(\arg \rho + \frac{\pi}{4} \right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} |\rho| < 0, \\ \operatorname{Re}(\rho\omega_2) = |\rho| \cos \left(\arg \rho + \frac{\pi}{4} \right) \leq 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Se $e^{\rho\omega_i x}$ com $i = 1, \dots, 4$ forem soluções fundamentais para $\lambda^2 f(x) + f^{(4)}(x) = 0$,

3. Método da Comparação.

então podemos representar a solução de (3.27) por

$$f(x) = c_1 e^{\rho\omega_1 x} + c_2 e^{\rho\omega_2 x} + c_3 e^{\rho\omega_3 x} + c_4 e^{\rho\omega_4 x},$$

em que as constantes c_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, são determinadas pelas condições de fronteira

$$f(0) = f'(0) = f'''(1) = 0 \quad \text{e} \quad f''(1) = -k\lambda f'(1) = -k\rho^2 f'(1).$$

Dessa forma, os parâmetros devem satisfazer

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0, \\ c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + c_4\omega_4 = 0, \\ c_1(\rho^3\omega_1^3)e^{\rho\omega_1} + c_2(\rho^3\omega_2^3)e^{\rho\omega_2} + c_3(\rho^3\omega_3^3)e^{\rho\omega_3} + c_4(\rho^3\omega_4^3)e^{\rho\omega_4} = 0, \\ c_1(\rho^2\omega_1^2 + k\rho^3\omega_1)e^{\rho\omega_1} + \dots + c_4(\rho^2\omega_4^2 + k\rho^3\omega_4)e^{\rho\omega_4} = 0. \end{cases}$$

Em outros termos, deveremos ter

$$\Delta(\rho) = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T = 0,$$

com $\Delta(\rho) = (\Delta_1(\rho), \Delta_2(\rho))$, onde

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 \\ (\rho^2\omega_1^2 + k\rho^3\omega_1)e^{\rho\omega_1} & (\rho^2\omega_2^2 + k\rho^3\omega_2)e^{\rho\omega_2} \\ \rho^3\omega_1^3e^{\rho\omega_1} & \rho^3\omega_2^3e^{\rho\omega_2} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega_3 & \omega_4 \\ (\rho^2\omega_3^2 + k\rho^3\omega_3)e^{\rho\omega_3} & (\rho^2\omega_4^2 + k\rho^3\omega_4)e^{\rho\omega_4} \\ \rho^3\omega_3^3e^{\rho\omega_3} & \rho^3\omega_4^3e^{\rho\omega_4} \end{pmatrix}.$$

A solução $f(x)$ de (3.27) é diferente de zero se, e somente se, o determinante característico for zero, isto é, $\det(\Delta(\rho)) = 0$. Antes de calcular o $\det(\Delta(\rho))$, faremos algumas observações para facilitar os cálculos.

Afirmção 3: Por definição de (3.29), obtemos que $\omega_1^2 = \omega_4^2 = -i$ e $\omega_2^2 = \omega_3^2 = i$.

De fato,

3. Método da Comparação.

- $\omega_1^2 = \omega_4^2 = -i$.

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \left(e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^2 = \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{4} - 2i\frac{2}{4} + (i)^2\frac{2}{4}\right) \\ &= -i.\end{aligned}$$

- $\omega_2^2 = \omega_3^2 = i$.

$$\begin{aligned}\omega_2^2 &= \left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^2 = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{4} + 2i\frac{2}{4} + (i)^2\frac{2}{4}\right) \\ &= i.\end{aligned}$$

Como $\omega_4 = -\omega_1$ e $\omega_3 = -\omega_2$ implica que $\omega_1^2 = \omega_4^2 = -i$ e $\omega_2^2 = \omega_3^2 = i$.

Afirmção 4: Por definição de (3.29) obtemos que $\omega_1\omega_2 = -1$ e $\frac{\omega_1}{\omega_2} = i$.

De fato,

- $\omega_1\omega_2 = -1$.

$$\begin{aligned}\omega_1\omega_2 &= \left(e^{\frac{3\pi}{4}i}\right) \left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right) \\ &= e^{\pi i} \\ &= \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi \\ &= -1.\end{aligned}$$

- $\frac{\omega_1}{\omega_2} = i$.

$$\begin{aligned}\frac{\omega_1}{\omega_2} &= e^{\frac{3\pi}{4}i} e^{-\frac{\pi}{4}i} \\ &= e^{\frac{\pi}{2}i} \\ &= \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \\ &= i.\end{aligned}$$

3. Método da Comparação.

Vamos agora ao cálculo de $\det(\Delta(\rho))$. Se $L = -i\omega_2^{-2}\rho^{-5}e^{\rho(\omega_1+\omega_2)}$, então

$$\begin{aligned}
 L \cdot \det(\Delta(\rho)) &= \tag{3.33} \\
 &= L \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ (\rho^2\omega_1^2 + k\rho^3\omega_1)e^{\rho\omega_1} & (\rho^2\omega_2^2 + k\rho^3\omega_2)e^{\rho\omega_2} & (\rho^2\omega_3^2 + k\rho^3\omega_3)e^{\rho\omega_3} & (\rho^2\omega_4^2 + k\rho^3\omega_4)e^{\rho\omega_4} \\ \rho^3\omega_1^3e^{\rho\omega_1} & \rho^3\omega_2^3e^{\rho\omega_2} & \rho^3\omega_3^3e^{\rho\omega_3} & \rho^3\omega_4^3e^{\rho\omega_4} \end{vmatrix} \\
 &= L \cdot (i\rho^5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & -\omega_2 & -\omega_1 \\ (-i + k\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} & (i + k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2} & (i - k\rho\omega_2)e^{-\rho\omega_2} & (-i - \rho\omega_1)e^{-\rho\omega_1} \\ -\omega_1e^{\rho\omega_1} & \omega_2e^{\rho\omega_2} & -\omega_2e^{-\rho\omega_2} & \omega_1e^{-\rho\omega_1} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dividindo a segunda e quarta linha por ω_2 , obtemos que

$$L \cdot \det(\Delta(\rho)) = e^{\rho(\omega_1+\omega_2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & -1 & -i \\ (-i + k\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} & (i + k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2} & (i - k\rho\omega_2)e^{-\rho\omega_2} & (-i - \rho\omega_1)e^{-\rho\omega_1} \\ -ie^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & -e^{-\rho\omega_2} & ie^{-\rho\omega_1} \end{vmatrix}.$$

Multiplicando a terceira coluna por $e^{\rho\omega_2}$ e a quarta coluna por $e^{\rho\omega_1}$, chegamos em

$$L \cdot \det(\Delta(\rho)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & e^{\rho\omega_1} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & -ie^{\rho\omega_1} \\ (-i + k\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} & (i + k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2} & (i - k\rho\omega_2) & (-i - \rho\omega_1) \\ -ie^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & -1 & i \end{vmatrix}.$$

Usando a propriedade de separar os elementos da quarta coluna de modo que $a_{1,4}$ e $a_{2,4}$ fique em um determinante e os elementos $a_{3,4}$ e $a_{4,4}$ fiquem em outro, obtemos que

$$\begin{aligned}
 L \cdot \det(\Delta(\rho)) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ (-i + k\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} & (i + k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2} & (i - k\rho\omega_2) & (-i - \rho\omega_1) \\ -ie^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & -1 & i \end{vmatrix} \\
 &+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & e^{\rho\omega_1} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & -ie^{\rho\omega_1} \\ (-i + k\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} & (i + k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2} & (i - k\rho\omega_2) & 0 \\ -ie^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & -1 & 0 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Aplicando a mesma propriedade na primeira coluna do primeiro determinante acima

3. Método da Comparação.

de modo que separe os elementos $a_{1,1}$ e $a_{2,1}$ dos $a_{3,1}$ e $a_{4,1}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
 L \cdot \det(\Delta(\rho)) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ 0 & (i+k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2} & (i-k\rho\omega_2) & (-i-\rho\omega_1) \\ 0 & e^{\rho\omega_2} & -1 & i \end{vmatrix} \\
 &+ \begin{vmatrix} 0 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ 0 & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ (-i+k\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} & (i+k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2} & (i-k\rho\omega_2) & (-i-\rho\omega_1) \\ -ie^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & -1 & i \end{vmatrix} \\
 &+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & e^{\rho\omega_1} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & -ie^{\rho\omega_1} \\ (-i+k\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} & (i+k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2} & (i-k\rho\omega_2) & 0 \\ -ie^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= M_1 + M_2 + M_3.
 \end{aligned}$$

Antes de prosseguirmos, vejamos as seguintes definições.

Definição 3.1.2. Sejam X um conjunto de \mathbb{C} com um ponto de acumulação a e $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$. Usaremos a notação $\mathcal{O}(\cdot)$ para descrever o comportamento limitante para uma função quando seu argumento tende a um valor específico ou para o infinito. Dizemos que $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ quando existe uma constante C tal que

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|, \text{ para todo } x \in X.$$

Definição 3.1.3. Se $x \rightarrow a$ (ou $x \rightarrow \infty$), então dizemos que $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ quando existe uma constante C e uma vizinhança V de a tal que

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|, \text{ para todo } x \in V \cap X.$$

Agora, afirmamos que $L \cdot \det(\Delta(\rho)) = M_1 + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|})$. De fato, somando a segunda linha com a primeira no determinante M_2 , obtemos

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ (-i+k\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} & (i+k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2} & (i-k\rho\omega_2) & (-i-\rho\omega_1) \\ -ie^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & -1 & i \end{vmatrix}$$

3. Método da Comparação.

$$\begin{aligned}
&= -2 \begin{vmatrix} 0 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ (-i + k\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} & i - k\rho\omega_2 & -i - k\rho\omega_1 \\ -ie^{\rho\omega_1} & -1 & i \end{vmatrix} \\
&= -2e^{\rho\omega_2} \begin{vmatrix} (-i + k\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} & -i - k\rho\omega_1 \\ -ie^{\rho\omega_1} & i \end{vmatrix} \\
&= -2e^{\rho\omega_2} [(1 + ik\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} + (1 - ik\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1}] \\
&= -4e^{\rho(\omega_1 + \omega_2)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, multiplicando a primeira linha de M_3 por i e em seguida a somamos com a segunda linha, temos

$$\begin{aligned}
M_3 &= \begin{vmatrix} i & i & ie^{\rho\omega_2} & ie^{\rho\omega_1} \\ 2i & i + 1 & (i - 1)e^{\rho\omega_2} & 0 \\ (-i + k\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} & (i + k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2} & i - k\rho\omega_2 & 0 \\ -ie^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -ie^{\rho\omega_1} \begin{vmatrix} 2i & i + 1 & (i - 1)e^{\rho\omega_2} \\ (-i + k\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} & (i + k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2} & i - k\rho\omega_2 \\ -ie^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & -1 \end{vmatrix} \\
&= -ie^{\rho\omega_1} \left[2i \begin{vmatrix} (i + k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2} & i - k\rho\omega_2 \\ e^{\rho\omega_2} & -1 \end{vmatrix} - (i + 1) \begin{vmatrix} (-i + k\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} & i - k\rho\omega_2 \\ -ie^{\rho\omega_1} & -1 \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. + (i - 1)e^{\rho\omega_2} \begin{vmatrix} (-i + k\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} & (i + k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2} \\ -ie^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} \end{vmatrix} \right] \\
&= -ie^{\rho\omega_1} \{ 2i [-(i + k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2} - (i - k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2}] - (i + 1) [-(-i + k\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1} \\
&\quad + (i - k\rho\omega_2)ie^{\rho\omega_1}] + (i - 1)e^{\rho\omega_2} [(-i + k\rho\omega_1)e^{\rho(\omega_1 + \omega_2)} + i(i + k\rho\omega_2)e^{\rho(\omega_1 + \omega_2)}] \} \\
&= -ie^{\rho\omega_1} \{ 2i [-2ie^{\rho\omega_2}] - (i + 1) [(-1 + i - k\rho\omega_1 - ki\rho\omega_2)e^{\rho\omega_1}] \\
&\quad + (i - 1)e^{\rho\omega_2} [(-1 - i + k\rho\omega_1 + ki\rho\omega_2)e^{\rho(\omega_1 + \omega_2)}] \} \\
&= -4ie^{\rho(\omega_1 + \omega_2)} + (i - 1)(-1 + i - k\rho\omega_1 - ki\rho\omega_2)e^{2\rho\omega_1} + (i + 1)(-1 - i + k\rho\omega_1 + ki\rho\omega_2)e^{2\rho(\omega_1 + \omega_2)}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
M_2 + M_3 &= -4(i + 1)e^{\rho(\omega_1 + \omega_2)} + (i - 1)(-1 + i - k\rho\omega_1 - ki\rho\omega_2)e^{2\rho\omega_1} \\
&\quad + (i + 1)(-1 - i + k\rho\omega_1 + ki\rho\omega_2)e^{2\rho(\omega_1 + \omega_2)}.
\end{aligned}$$

A conclusão segue de 3.31 uma vez que desta forma

3. Método da Comparação.

•

$$e^{2\rho\omega_1} \leq Ce^{2\operatorname{Re}(\rho\omega_1)} \leq Ce^{-\sqrt{2}|\rho|};$$

•

$$e^{2\rho\omega_2} \leq Ce^{2\operatorname{Re}(\rho\omega_2)} \leq C; \quad (3.34)$$

•

$$e^{\rho(\omega_1+\omega_2)} = e^{\rho\omega_1}e^{\rho\omega_2} \leq Ce^{-\frac{\sqrt{2}}{2}|\rho|} \cdot C \leq Ce^{-\frac{\sqrt{2}}{2}|\rho|};$$

•

$$e^{2\rho(\omega_1+\omega_2)} \leq Ce^{-\sqrt{2}|\rho|}.$$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned} & M_1 + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|}) \\ = & \begin{vmatrix} 1-i & -(i+1)e^{\rho\omega_2} & 0 \\ (i+k\rho\omega_2)e^{\rho\omega_2} & i-k\rho\omega_2 & -i-k\rho\omega_1 \\ e^{\rho\omega_2} & -1 & i \end{vmatrix} + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|}) \\ = & -2(1+e^{2\rho\omega_2}) + 2(i-1)k\rho\omega_2(i+e^{2\rho\omega_2}) + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|}). \end{aligned}$$

Acima, utilizamos o fato que $\omega_1 = i\omega_2$.

Afirmção 5: O $\det(\Delta(\rho)) = 0$ se, e somente se,

$$e^{2\rho\omega_2} = -i - \frac{1}{k\rho\omega_2} + \mathcal{O}(|\rho|^{-2}). \quad (3.35)$$

De fato, primeiramente, notemos que $\det(\Delta(\rho)) = 0$ se, e somente se

$$-2(1+e^{2\rho\omega_2}) + 2(i-1)k\rho\omega_2(i+e^{2\rho\omega_2}) + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|}) = 0,$$

ou ainda que

$$e^{2\rho\omega_2}(-2 + 2(i-1)k\rho\omega_2) + (-2 + 2(i-1)k\rho\omega_2i) + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|}) = 0. \quad (3.36)$$

Definamos,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2 - \frac{2(i-1)k\omega_2 i}{z} - \mathcal{O}(e^{-\frac{c}{|z|}})}{-2 + \frac{2(i-1)k\omega_2}{z}} \\ &= \frac{z - (i-1)k\omega_2 i}{-z + (i-1)k\omega_2} - \frac{z\mathcal{O}(e^{-\frac{c}{|z|}})}{2(-z + (i-1)k\omega_2)}. \end{aligned}$$

3. Método da Comparação.

Logo,

$$f(0) = \frac{-(i-1)k\omega_2 i}{(i-1)k\omega_2} = -i.$$

De maneira análoga, podemos provar que

$$\begin{aligned} f'(0) &= -\frac{(i-1)^2 k\omega_2}{(i-1)^2 k^2 \omega_2^2} \\ &= -\frac{1}{k\omega_2}. \end{aligned}$$

Daí, utilizando a expansão de Taylor

$$f(z) = f(0) + zf'(0) + \mathcal{O}(|z|^2),$$

obtemos (3.35) por (3.36) e fazendo $z = 1/\rho$.

Afirmção 6: As soluções de (3.35) são dadas por:

$$\rho = \rho_n = \left(n - \frac{1}{4}\right) \pi\omega_2 + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.37)$$

De fato, tome

$$h(\rho) = e^{2\rho\omega_2} + i \quad \text{e} \quad g(\rho) = \frac{1}{k\rho\omega_2} + \mathcal{O}(|\rho|^{-2})$$

Se $\xi_n = \left(n - \frac{1}{4}\right) \pi\omega_2$, então

$$\begin{aligned} h(\xi_n) &= e^{2[(n-\frac{1}{4})\pi\omega_2]\omega_2} + i = e^{2\pi i(n-\frac{1}{4})} + i \\ &= \cos\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Notemos que,

$$\left((n+1) - \frac{1}{4}\right) \pi\omega_2 - \left(n - \frac{1}{4}\right) \pi\omega_2 = \pi\omega_2.$$

Dessa forma, tomando $B_n = B\left(\left(n - \frac{1}{4}\right) \pi\omega_2, \frac{\pi}{2}\right)$, a bola centrada em $\left(n - \frac{1}{4}\right) \pi\omega_2$ e raio $\pi/2$, teremos que $B_n \cap B_{n+k} = \emptyset$, isto é, cada bola possui apenas uma raiz de $h(\rho)$. Além disso, por construção de B_n , se $\rho \in \partial B_n$, então

$$\left|\rho - \left(n - \frac{1}{4}\right) \pi\omega_2\right| = \frac{\pi}{2},$$

3. Método da Comparação.

isto é, $\rho = \xi_n + \Delta_{\theta_\rho}$, em que $\Delta_{\theta_\rho} = \frac{\pi}{2} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Daí,

$$|g(\rho)| \leq \left| \frac{1}{k\rho\omega_2} + \mathcal{O}(|\rho|^{-2}) \right| = \left| \frac{1}{k(\xi_n + \Delta_{\theta_\rho})} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\xi_n + \Delta_{\theta_\rho}|^2}\right) \right|$$

que tende a zero quando n é suficientemente grande. Por outro lado,

$$\begin{aligned} h(\rho) &= e^{2(\xi_n + \Delta_{\theta_\rho})\pi\omega_2} + i = e^{2\xi_n\pi\omega_2} e^{\Delta_{\theta_\rho}\pi\omega_2} + i \\ &= -ie^{\Delta_{\theta_\rho}\pi\omega_2} + i = -i(e^{\Delta_{\theta_\rho}\pi\omega_2} - 1), \end{aligned}$$

que é diferente de zero pois $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ é sempre não nulo. Assim, $|g(\rho)| \leq |h(\rho)|$ no contorno de B_n , para n suficientemente grande.

Pelo Teorema de Rouché (1.4.6), h e $h + g$ possuem o mesmo número de zeros em B_n , isto é, existem $\rho_n = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi\omega_2 + r_n$ tais que,

$$h(\rho_n) + g(\rho_n) = 0.$$

De (3.35),

$$e^{2\rho_n\pi\omega_2} + i + \frac{1}{k\rho_n\omega_2} + \mathcal{O}(|\rho_n^{-2}|) = 0,$$

ou seja,

$$-i(e^{2r_n\pi\omega_2} - 1) + \frac{1}{k(\xi_n + r_n)\omega_2} + \mathcal{O}(|\rho_n^{-2}|) = 0.$$

Em particular, deveremos ter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Agora, verificaremos que $r_n \in \mathcal{O}(n^{-1})$. De fato, mostraremos que se $e^{r_n} - 1 = \mathcal{O}(n^{-1})$, então $r_n = \mathcal{O}(n^{-1})$. Pela fórmula de Taylor, temos que $e^x = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$. Em particular

$$e^{r_n} = 1 + r_n + \mathcal{O}(r_n^2).$$

Como, por hipótese $e^{r_n} - 1 \in \mathcal{O}(n^{-1})$, segue que

$$\mathcal{O}(n^{-1}) = r_n + \mathcal{O}(r_n^2).$$

Daí,

$$|r_n| \leq C \left(\frac{1}{n} + r_n^2 \right). \quad (3.38)$$

Como o $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, então $Cr_n^2 \leq \frac{1}{2}|r_n|$, para n suficientemente grande. Daí, substi-

3. Método da Comparação.

tuindo em (3.38), chegamos que

$$|r_n| \leq 2\frac{C}{n},$$

conforme queríamos demonstrar, portanto concluímos que as soluções de (3.35) são dadas por (3.37).

Além disso, de (3.33) - (3.37), concluímos que o posto matricial de $(\Delta(\rho))$ é menor do que 4. Na verdade, pela estrutura da matriz, podemos facilmente verificar que o posto vale 3, para $|\rho| \rightarrow \infty$. Logo, o operador \mathcal{A} possui autovetores não nulos. Provemos que os autovalores com módulo suficientemente grande são geometricamente simples. De fato, a equação

$$\begin{cases} \lambda^2 f(x) + f^{(4)}(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ f(0) = f'(0) = f'(1) = f'''(1) = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

possui apenas a solução nula. Para vermos este fato, basta multiplicarmos (3.39) por $f(x)$ e integramos por partes

$$\lambda^2 \int_0^1 |f(x)|^2 dx + \int_0^1 f^{(4)}(x)f(x)dx = \lambda^2 \|f(x)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|f''(x)\|_{L^2(0,1)}^2 = 0.$$

Assim, se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são duas soluções não nulas de (3.27), seja $\phi(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$. Então, podemos escolher c_1 e c_2 tal que $\phi'(1) = 0$. Com isso obtemos que $\phi \equiv 0$ o que significa que $\{f_1(x), f_2(x)\}$ é um conjunto L.D. Portanto a multiplicidade geométrica dos autovalores de módulo grande vale um.

Substituindo (3.37) em (3.35), obtemos

$$\begin{aligned} e^{2[(n-\frac{1}{4})\pi\omega_2 + \mathcal{O}(n^{-1})]\omega_2} &= -i - \frac{1}{k [(n-\frac{1}{4})\pi\omega_2 + \mathcal{O}(n^{-1})]\omega_2} \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{|(n-\frac{1}{4})\pi\omega_2 + \mathcal{O}(n^{-1})|^2}\right), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$-ie^{2\mathcal{O}(n^{-1})\omega_2} = -i - \frac{1}{k [(n-\frac{1}{4})\pi\omega_2 + \mathcal{O}(n^{-1})]\omega_2} + \mathcal{O}(n^{-2}). \quad (3.40)$$

Definamos $h(x) = -ie^{2\mathcal{O}(n^{-1})\omega_2}$. Para x suficientemente pequeno, utilizamos a expansão de Taylor

$$e^x = 1 + x + \mathcal{O}(x^2),$$

3. Método da Comparação.

Daí, para $x = 2\mathcal{O}(n^{-1})\omega_2$, obtemos que

$$h(x) = -i \left(1 + 2\mathcal{O}(n^{-1})\omega_2 + \mathcal{O}(n^{-2}) \right).$$

De maneira inteiramente análoga, se $l(x) = \frac{1}{k \left[\left(n - \frac{1}{4} \right) \pi \omega_2 + \mathcal{O}(n^{-1}) \right] \omega_2}$ temos que

$$l(x) = -\frac{1}{k \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi \omega_2^2} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Substituindo as expansões de $h(x)$ e $l(x)$ em [\(3.40\)](#), obtemos

$$\begin{aligned} -i \left(1 + 2\mathcal{O}(n^{-1})\omega_2 + \mathcal{O}(n^{-2}) \right) &= -i - \frac{1}{k \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi \omega_2^2} + \mathcal{O}(n^{-2}), \\ -i2\mathcal{O}(n^{-1})\omega_2 &= -\frac{1}{k \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi \omega_2^2} + \mathcal{O}(n^{-2}), \\ \mathcal{O}(n^{-1}) &= -\frac{1}{2k \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi \omega_2} + \mathcal{O}(n^{-2}). \end{aligned}$$

Substituindo a expressão de $\mathcal{O}(n^{-1})$ em [\(3.37\)](#), obtemos

$$\rho = \rho_n = \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi \omega_2 - \frac{1}{2k \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi \omega_2} + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.41)$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_n = \rho_n^2 &= \left[\left(n - \frac{1}{4} \right) \pi \omega_2 - \frac{1}{2k \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi \omega_2} + \mathcal{O}(n^{-2}) \right]^2 \\ &= \left(n - \frac{1}{4} \right)^2 \pi^2 i - \frac{1}{k} + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto segue-se [\(3.7\)](#) e a prova do item (b). □

Prova do item (c): Afirmação:

$$f(x) = \omega_2^{-2} \rho^{-3} e^{\rho(\omega_1 + \omega_2)} \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_3 x} & e^{\rho\omega_4 x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \rho^3 \omega_1^3 e^{\rho\omega_1} & \rho^3 \omega_2^3 e^{\rho\omega_2} & \rho^3 \omega_3^3 e^{\rho\omega_3} & \rho^3 \omega_4^3 e^{\rho\omega_4} \end{vmatrix} \quad (3.42)$$

é uma autofunção associada ao autovalor $\lambda = \rho^2$, para n suficientemente grande.

De fato, é fácil ver que $f(x)$ satisfaz as condições $f(0) = f'(0) = f'''(0) = 0$. Além disso a condição de fronteira $f''(1) = -k\lambda f'(1)$ é a condição que possibilita gerar os

3. Método da Comparação.

autovalores de tal forma que a solução $f(x)$ de (3.27) seja não nula, pois com um simples cálculo obtemos que

$$f''(1) + k\lambda f'(1) = \det(\Delta(\rho)) = 0.$$

Para obtermos as expansões assintóticas dessas autofunções dadas por (3.8), observamos que de (3.42) e pelo fato que $\omega_3 = -\omega_2$ e $\omega_4 = -\omega_1$, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= ie^{\rho(\omega_1+\omega_2)} \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{-\rho\omega_2 x} & e^{-\rho\omega_1 x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & -1 & -i \\ -ie^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & -e^{\rho\omega_2} & ie^{-\rho\omega_1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & e^{\rho\omega_1(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & e^{\rho\omega_1} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & -ie^{\rho\omega_1} \\ e^{\rho\omega_1} & ie^{\rho\omega_2} & -i & -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

É claro que podemos escrever a autofunção $f(x)$ na forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & e^{\rho\omega_1(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ e^{\rho\omega_1} & ie^{\rho\omega_2} & -i & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & 0 \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & e^{\rho\omega_1} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & -ie^{\rho\omega_1} \\ e^{\rho\omega_1} & ie^{\rho\omega_2} & -i & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & e^{\rho\omega_1(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ 0 & ie^{\rho\omega_2} & -i & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & e^{\rho\omega_1(1-x)} \\ 0 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ 0 & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ e^{\rho\omega_1} & ie^{\rho\omega_2} & -i & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & 0 \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & e^{\rho\omega_1} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & -ie^{\rho\omega_1} \\ e^{\rho\omega_1} & ie^{\rho\omega_2} & -i & 0 \end{vmatrix} \\ &= M_1 + M_2 + M_3. \end{aligned}$$

Por (3.34), temos que M_2 e M_3 são $\mathcal{O}(e^{-c|\rho|})$, assim

$$f(x) = M_1 + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|})$$

3. Método da Comparação.

$$\begin{aligned}
&= - \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} \end{vmatrix} - e^{\rho\omega_1(1-x)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} \\ 0 & ie^{\rho\omega_2} & -i \end{vmatrix} + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|}) \\
&= - \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} \end{vmatrix} + \mathcal{O}(|\rho^{-1}|).
\end{aligned}$$

Calculando explicitamente o determinante, obtemos

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\rho\omega_2} [(i-1)e^{-\rho\omega_2 x} + 2e^{\rho\omega_1 x} - (1+i)e^{\rho\omega_2 x}] + \mathcal{O}(|\rho^{-1}|) \\
&= e^{\rho\omega_2} \left\{ (i-1)e^{-\left[(n-\frac{1}{4})\pi\omega_2 - \frac{1}{2k(n-\frac{1}{4})\pi\omega_2} + \mathcal{O}(n^{-2})\right]\omega_2 x} + 2e^{\left[(n-\frac{1}{4})\pi\omega_2 - \frac{1}{k(n-\frac{1}{4})\pi\omega_2} + \mathcal{O}(n^{-2})\right]\omega_1 x} \right. \\
&\quad \left. - (1+i)e^{\left[(n-\frac{1}{4})\pi\omega_2 - \frac{1}{2k(n-\frac{1}{4})\pi\omega_2} + \mathcal{O}(n^{-2})\right]\omega_2 x} \right\} + \mathcal{O}(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Substituindo o valor da expansão assintótica de ρ , obtemos

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\rho\omega_2} \left\{ (i-1) \left[\cos \left(\left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \right) - i \operatorname{sen} \left(\left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \right) \right] + 2e^{-(n-\frac{1}{4})\pi x} \right. \\
&\quad \left. - (1+i) \left[\cos \left(\left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \right) - i \operatorname{sen} \left(\left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \right) \right] \right\} + \mathcal{O}(n^{-1}) \\
&= 2e^{\rho\omega_2} \left[e^{-(n-\frac{1}{4})\pi x} + \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x - \cos \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \right] + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad (3.43)
\end{aligned}$$

De maneira inteiramente análoga, temos por [\(3.42\)](#) que

$$\begin{aligned}
\lambda^{-1} f''(x) &= \omega_2^{-2} \rho^{-3} e^{\rho(\omega_1 + \omega_2)} \begin{vmatrix} -ie^{\rho\omega_1 x} & ie^{\rho\omega_2 x} & ie^{\rho\omega_3 x} & -ie^{\rho\omega_4 x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \rho^3 \omega_1^3 e^{\rho\omega_1} & \rho^3 \omega_2^3 e^{\rho\omega_2} & \rho^3 \omega_3^3 e^{\rho\omega_3} & \rho^3 \omega_4^3 e^{\rho\omega_4} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & -e^{\rho\omega_2 x} & -e^{\rho\omega_2(1-x)} & e^{\rho\omega_1(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ 0 & e^{\rho\omega_2} & -1 & i \end{vmatrix} + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|}) \\
&= -(1+i)e^{\rho\omega_2(1-x)} - 2ie^{\rho\omega_1 x + \rho\omega_2} + (1-i)e^{\rho\omega_2(1+x)} + \mathcal{O}(|\rho|^{-1}) \\
&= 2ie^{\rho\omega_2} \left[-e^{-(n-\frac{1}{4})\pi x} + \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x - \cos \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \right] + \mathcal{O}(n^{-1}). \quad (3.44)
\end{aligned}$$

3. Método da Comparação.

Agora, de (3.43) e (3.44) definimos as autofunções dadas por:

$$F_{1n}(x) = \frac{1}{2} \lambda_n^{-1} e^{-\rho_n \omega_2} f(x).$$

Dessa forma, as autofunções $F_n(x) = (F_{1n}(x), F_{2n}(x))$, devem satisfazer a equação do problema do autovalor $\mathcal{A}F_n(x) = \lambda F_n(x)$, ou seja

$$(F_{2n}(x), -F_{1n}^4(x)) = \lambda(F_{1n}(x), F_{2n}(x)),$$

portanto $F_{2n}(x) = \lambda F_{1n}(x)$, e assim segue-se (3.8). Por fim, observamos que

$$\begin{aligned} \|F_n(x)\|^2 &= \langle (F_{1n}(x), \lambda_n F_{1n}(x)), (F_{1n}(x), \lambda_n F_{1n}(x)) \rangle \\ &= \int_0^1 F_{1n}''(x) F_{1n}''(x) dx + \int_0^1 (\lambda_n F_{1n}(x))^2 dx + \mathcal{O}(n^{-1}) \\ &= \int_0^1 \left[e^{-(n-1/4)\pi x} + \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x - \cos \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \right]^2 dx \\ &\quad + \int_0^1 \left[-e^{-(n-1/4)\pi x} + \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x - \cos \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \right]^2 dx + \mathcal{O}(n^{-1}) \\ &= \int_0^1 \left\{ e^{-2(n-1/4)\pi x} + 2e^{-(n-1/4)\pi x} \left[\cos \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x - \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \right] \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sen}^2 \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x + \cos^2 \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x - 2\operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \cdot \cos \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \right\} \\ &\quad + \int_0^1 \left\{ e^{-2(n-1/4)\pi x} - 2e^{-(n-1/4)\pi x} \left[\cos \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x - \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \right] \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sen}^2 \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x + \cos^2 \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x - 2\operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \cdot \cos \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \right\} dx + \mathcal{O}(n^{-1}) \\ &= \int_0^1 \left[2e^{-2(n-1/4)\pi x} + 2 - 4\operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \cdot \cos \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \right] dx + \mathcal{O}(n^{-1}) \\ &= \int_0^1 \left[2e^{-2(n-1/4)\pi x} + 2 - 2\operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{4} \right) 2\pi x \right] dx + \mathcal{O}(n^{-1}) \\ &= \frac{-e^{-2(n-1/4)\pi}}{(n-\frac{1}{4})\pi} - \frac{1}{(n-\frac{1}{4})\pi} + 2 + \frac{\cos 2(n-\frac{1}{4})\pi}{(n-\frac{1}{4})\pi} - \frac{1}{(n-\frac{1}{4})\pi} + \mathcal{O}(n^{-1}). \end{aligned}$$

Com isso, obtemos que

$$\|F_n(x)\|^2 = \frac{-e^{-2(n-1/4)\pi}}{(n-\frac{1}{4})\pi} - \frac{2}{(n-\frac{1}{4})\pi} + 2 + \frac{\cos 2(n-\frac{1}{4})\pi}{(n-\frac{1}{4})\pi} + \mathcal{O}(n^{-1}). \quad (3.45)$$

Assim, de (3.45) segue-se (3.9). □

Portanto segue-se a prova do Lema.

Teorema 3.1.4. Seja \mathcal{A} definido em (3.6). Então,

- i) Existe uma seqüência de autofunções generalizadas de \mathcal{A} que formam uma base de Riesz para \mathcal{H} .
- ii) Todos $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ com modulo suficientemente grande são algebricamente simples.
- iii) \mathcal{A} gera um C_0 -semigrupo $e^{\mathcal{A}t}$, onde a condição de crescimento determinada pelo espectro se mantém, isto é, $\omega_0(\mathcal{A}) = S(\mathcal{A})$.

3. Método da Comparação.

Demonstração. A partir dos cálculos do determinante característico (3.33), observamos que ao considerarmos $1/k = 0$ em (3.27) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} y_{tt}(x, t) + y_{xxxx}(x, t) = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = y_{xx}(1, t) = y_{xt}(1, t) = 0, \end{cases} \quad (3.46)$$

no qual é chamado de sistema Riesz. Daí, definimos o operador \mathcal{A}_{0p} associado ao sistema (3.46), dado por:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{0p}(f(x), g(x)) = (g(x), -f^{(4)}(x)), \\ D(\mathcal{A}_{0p}) = \{(f, g) \in (H^4 \cap H_L^2) \times H_L^2 \mid f'''(1) = g'(1) = 0\}. \end{cases} \quad (3.47)$$

Afirmção 1: O operador \mathcal{A}_{0p} é anti-adjunto, isto é, $\mathcal{A}_{0p}^* = -\mathcal{A}_{0p}$.

De fato, dados $(f, g), (h, w) \in D(\mathcal{A}_{0p})$, temos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_{0p}(f(x), g(x)), (h(x), w(x)) \rangle &= \langle (g(x), -f^{(4)}(x)), (h(x), w(x)) \rangle \\ &= \int_0^1 [g''(x)h''(x) - f^{(4)}(x)w(x)] dx. \end{aligned}$$

Agora temos

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 [g''(x)h''(x) - f^{(4)}(x)w(x)] dx \\
 = & \left[\int_0^1 (g'(x)h''(x))' dx - \int_0^1 g'(x)h'''(x) dx \right] - \int_0^1 f^{(4)}(x)w(x) dx \\
 = & g'(1)h''(1) - g'(0)h''(0) - \int_0^1 g'(x)h'''(x) dx - \int_0^1 f^{(4)}(x)w(x) dx \\
 = & - \left[\int_0^1 (g(x)h'''(x))' - \int_0^1 g(x)h^{(4)}(x) dx \right] - \int_0^1 f^{(4)}(x)w(x) dx \\
 = & -g(1)h'''(1) + g(0)h'''(0) + \int_0^1 g(x)h^{(4)}(x) dx - \int_0^1 f^{(4)}(x)w(x) dx \\
 = & \int_0^1 g(x)h^{(4)}(x) dx - \left[\int_0^1 (f'''(x)w(x))' dx - \int_0^1 f'''(x)w'(x) dx \right] \\
 = & \int_0^1 g(x)h^{(4)}(x) dx - f'''(1)w(1) + f'''(0)w(0) + \int_0^1 f'''(x)w'(x) dx \\
 = & \int_0^1 g(x)h^{(4)}(x) dx + \left[\int_0^1 (f''(x)w'(x))' dx - \int_0^1 f''(x)w''(x) dx \right] \\
 = & \int_0^1 g(x)h^{(4)}(x) dx + f''(1)w'(1) - f''(0)w'(0) - \int_0^1 f''(x)w''(x) dx \\
 = & \int_0^1 g(x)h^{(4)}(x) dx - \int_0^1 f''(x)w''(x) dx \\
 = & \langle (f(x), g(x)), \mathcal{A}_{0p}^*(h(x), w(x)) \rangle,
 \end{aligned}$$

com $\mathcal{A}_{0p}^*(h(x), w(x)) = (-w(x), h^{(4)}(x))$. De onde concluímos que $\mathcal{A}_{0p}^* = -\mathcal{A}_{0p}$.

Além disso, para qualquer $(\phi, \psi) \in \mathcal{H}$, fazendo $(\rho^2 - \mathcal{A}_{0p})(f, g) = (\phi, \psi)$, obtemos

$$\begin{aligned}
 (\rho^2 - \mathcal{A}_{0p})(f, g) = (\phi, \psi) & \Rightarrow (\rho^2)(f, g) - (\mathcal{A}_{0p})(f, g) = (\phi, \psi) \\
 & \Rightarrow (\rho^2 f, \rho^2 g) - (g, -f^{(4)}) = (\phi, \psi) \\
 & \Rightarrow \rho^2 f - g = \phi \text{ e } \rho^2 g + f^{(4)} = \psi.
 \end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$g = \rho^2 f - \phi$$

e

$$f^{(4)} = \psi - \rho^2 g = \psi - \rho^2(\rho^2 f - \phi)$$

onde implica que $f^{(4)} + \rho^4 f = \rho^2 \phi + \psi$. Assim, $f(x)$ satisfaz

$$\begin{cases} f^{(4)}(x) + \rho^4 f(x) = \rho^2 \phi(x) + \psi(x), \\ f(0) = f'(0) = f'''(1) = 0, f'(1) = \rho^{-2} \phi'(1). \end{cases} \quad (3.48)$$

3. Método da Comparação.

Agora, seja o quociente

$$Q = \frac{\omega_1 e^{\rho\omega_1(x-\xi)} + \omega_2 e^{\rho\omega_2(x-\xi)} + \omega_3 e^{\rho\omega_3(x-\xi)} + \omega_4 e^{\rho\omega_4(x-\xi)}}{4\rho^5}.$$

Aplicando a fórmula da variação das constantes obtemos a seguinte solução,

$$f(x) = d_1 e^{\rho\omega_1 x} + d_2 e^{\rho\omega_2 x} + d_3 e^{\rho\omega_3 x} + d_4 e^{\rho\omega_4 x} - \int_0^x Q \times [\rho^2 \phi(\xi) + \psi(\xi)] d\xi, \quad (3.49)$$

onde ω_i são dados em (3.29) e $d_i; i = 1, \dots, 4$ são determinados por as condições de fronteira,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega_1^3 e^{\rho\omega_1} & \omega_2^3 e^{\rho\omega_2} & \omega_3^3 e^{\rho\omega_3} & \omega_4^3 e^{\rho\omega_4} \\ \omega_1 e^{\rho\omega_1} & \omega_2 e^{\rho\omega_2} & \omega_3 e^{\rho\omega_3} & \omega_4 e^{\rho\omega_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \rho^{-5} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi'(1) \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Com alguns cálculos semelhantes aos que já trabalhamos, o determinante da matriz do lado esquerdo acima, é dado por

$$2(i-1)\omega_2 e^{\rho(\omega_1-\omega_2)} (e^{2\rho\omega_2})$$

que não possui zeros para $\rho = \omega_2 \pi$. Portanto, há uma solução única para (3.50) com $d_i, i = 1, \dots, 4$. Logo, $(\omega_2 \pi)^2 \in \rho(\mathcal{A}_{0p})$. Observemos que $D(\mathcal{A}_{0p})$ é compactamente denso em \mathcal{H} . Assim, $((\omega_2 \pi)^2 - \mathcal{A}_{0p})^{-1}$ é um operador compacto em \mathcal{H} , implicando que operador resolvente de \mathcal{A}_{0p} é compacto. Pelo Lema 3.1, todas as afirmações provadas para o operador \mathcal{A} serão válidas também para o operador \mathcal{A}_{0p} . Daí, os autovalores $\{\lambda_{n0}, \overline{\lambda_{n0}}\}$ de \mathcal{A}_{0p} possuem a expansão assintótica de (3.7) e as autofunções $F_{n0} = (F_{1n0}, \lambda_{n0} F_{1n0})$ associada a λ_{n0} têm a mesma expansão assintótica de (3.8), para o caso em que $1/k = 0$.

Pelo Teorema 1.2.30 temos que os autovetores $\{F_{n0}\}$ formam uma base ortonormal para \mathcal{H} e além disso, como o operador \mathcal{A}_{0p} possui operador resolvente compacto, implica que existe o produto interno equivalente em que a referida base é ortonormal. Assim, pelo Teorema 2.1.8, temos que os autovetores $\{F_{n0}\}$ formam uma base de Riesz para \mathcal{H} .

Por (3.8), existe um inteiro N suficientemente grande tal que

$$\sum_{n \geq N}^{\infty} \|F_n - F_{n0}\|^2 = \sum_{n \geq N}^{\infty} \mathcal{O}(n^{-2}) < \infty. \quad (3.51)$$

De posse disto, temos que o item *i*) segue-se de (3.51) e do Teorema 2.3.5.

3. Método da Comparação.

Para provarmos o item *ii*) basta observarmos que pelo Lema [3.1](#) os autovalores $\{\lambda_n, \overline{\lambda_n}\}$ com módulo suficientemente grande são algebricamente simples. Uma vez que os autovalores $\{\lambda_{n_0}, \overline{\lambda_{n_0}}\}$ de \mathcal{A}_{0p} possuem a mesma expansão assintótica de $\{\lambda_n, \overline{\lambda_n}\}$, segue-se a prova do item *ii*).

Vamos agora à prova de *iii*). Pelo item *(i)*, temos que o espaço \mathcal{H} possui uma base de Riesz, isto é, existe um operador $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que,

$$Te_i = \phi_i$$

onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H} , T é um operador linear contínuo e possui T^{-1} que também um operador linear contínuo. Logo, para todo $x \in \mathcal{H}$ temos

$$x = T(y) = T\left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j T(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \phi_j.$$

Pela equação de evolução [\(3.5\)](#) e por [\(3.10\)](#), segue-se que \mathcal{A}_{0p} gera um C_0 -semigrupo $S(t)$. Observemos que podemos escrever a solução de [\(3.5\)](#) por:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(t) \phi_j$$

e assim

$$\frac{d}{dt}x(t) - \mathcal{A}x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dt}\gamma_j(t) - \gamma_j(t)\lambda_j\right) \phi_j = 0.$$

Daí,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dt}\gamma_j(t) - \gamma_j(t)\lambda_j\right) e_j = 0$$

o que implica

$$\frac{d}{dt}\gamma_j(t) - \gamma_j(t)\lambda_j = 0.$$

Tomando $\gamma_j(0) = x_0^j$, a solução da EDO acima é dada por:

$$\gamma_j(t) = x_0^j e^{\lambda_j t}.$$

Com isso, podemos representar

$$S(t)x = \sum_{j=1}^{\infty} x_0^j e^{\lambda_j t} \phi_j$$

que claramente é de classe C^∞ . Logo o C_0 -semigrupo gerado pelo operador \mathcal{A}_{0p} é

3. Método da Comparação.

diferenciável. Portanto pelo Corolário 1.3.20 segue-se que a condição de crescimento determinada pelo espectro é satisfeita. \square

Corolário 3.1.5. Seja $E(t)$ dada por (3.2). Então o sistema (3.5) é exponencialmente estável, isto é,

$$E(t) \leq M e^{-\omega t} E(0), \quad (3.52)$$

para algum $M, \omega > 0$ e para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Pelo item (iii) do Teorema (3.1.4) a condição de crescimento determinada pelo espectro é satisfeita, isto é, $\omega(\mathcal{A}) = S(\mathcal{A})$. Logo, pelo Teorema 1.3.22, é suficiente mostrarmos que $Re(\lambda) < 0$ para qualquer $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$.

Tome o produto com $\overline{f(x)}$ em ambos os lados da primeira equação de (3.27), e considere todas as condições de fronteira. Daí,

Afirmção 1: Temos

$$\lambda^2 \|f(x)\|_{L^2(0,1)}^2 + k\lambda |f'(1)| + \|f''(x)\|_{L^2(0,1)}^2 = 0. \quad (3.53)$$

De fato, tal afirmação vem diretamente do fato que

$$\begin{aligned} & \left\langle \overline{f(x)}, \lambda^2 f(x) + f^{(4)}(x) \right\rangle \\ &= \lambda^2 \|f(x)\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^1 \left(\overline{f(x)} f'''(x) \right)' dx - \int_0^1 \overline{f'(x)} f'''(x) dx \\ &= \lambda^2 \|f(x)\|_{L^2(0,1)}^2 + f'''(1)f(1) - f'''(0)f(0) - \int_0^1 \overline{f'(x)} f'''(x) dx \\ &= \lambda^2 \|f(x)\|_{L^2(0,1)}^2 - \left[\int_0^1 \left(\overline{f'(x)} f''(x) \right)' dx - \int_0^1 \overline{f''(x)} f''(x) dx \right] \\ &= \lambda^2 \|f(x)\|_{L^2(0,1)}^2 - \overline{f'(1)} f''(1) + \overline{f'(0)} f''(0) + \int_0^1 |f''(x)|^2 dx \\ &= \lambda^2 \|f(x)\|_{L^2(0,1)}^2 + k\lambda |f'(1)|^2 + \|f''(x)\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Afirmção 2: $Re(\lambda) \leq 0$.

Considere $\lambda = a + ib$. Por (3.53), temos

$$(a + ib)^2 \|f(x)\|_{L^2(0,1)}^2 + k(a + ib) |f'(1)|^2 + \|f''(x)\|_{L^2(0,1)}^2 = 0.$$

Daí

$$(a^2 + 2iab - b^2)C_1 + k(a + ib)C_2 + C_3 = 0,$$

3. Método da Comparação.

em que $C_1 = \|f(x)\|_{L^2(0,1)}^2 \geq 0$, $C_2 = |f'(1)|^2 \geq 0$ e $C_3 = \|f''(x)\|_{L^2(0,1)}^2 \geq 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [(a^2 + 2iab - b^2)C_1 + k(a + ib)C_2 + C_3] &= \\ (a^2 - b^2)C_1 + kaC_2 + C_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$kaC_2 - b^2C_1 = -(a^2C_1 + C_3) \leq 0$$

, o que implica

$$kaC_2 \leq b^2C_1.$$

Com isso, temos que $\operatorname{Re}(\lambda) = a \leq 0$. De fato, o caso em que $a = 0$ é trivialmente satisfeita. Agora, se que $a > 0$, pela arbitrariedade de $k > 0$, podemos tomar k suficientemente grande, tal que $akC_2 > b^2C_1$, o que é uma contradição. Portanto, segue-se que $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$.

Afirmção 3: Não há autovalor localizado no eixo imaginário.

Caso exista um autovalor $\lambda = i\omega \neq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Por (3.53) temos,

$$-\omega^2 \|f(x)\|_{L^2(0,1)}^2 + ki\omega |f'(1)|^2 + \|f''(x)\|_{L^2(0,1)}^2 = 0.$$

Tomando a parte imaginaria da igualdade acima, obtemos

$$ki\omega |f'(1)|^2 = 0,$$

implicando que $|f'(1)| = 0$. Assim, o sistema (3.27) torna-se,

$$\begin{cases} -\omega^2 f(x) + f^{(4)}(x) = 0, \\ f(0) = f'(0) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0. \end{cases} \quad (3.54)$$

Podemos supor que $\omega = \rho^2$, em que $\rho > 0$ é real. É fácil vermos que $\cos \rho x$, $\operatorname{sen} \rho x$, $\cosh \rho x$ e $\operatorname{senh} \rho x$ são soluções da equação homogênea acima. Logo, (3.54) possui a solução dada por:

$$f(x) = c_1 \cos \rho x + c_2 \operatorname{sen} \rho x + c_3 \cosh \rho x + c_4 \operatorname{senh} \rho x.$$

Pela condição de fronteira $f(0) = 0$ obtemos,

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1 \cos \rho x + c_2 \operatorname{sen} \rho x + c_3 \cosh \rho x + c_4 \operatorname{senh} \rho x \\ \Rightarrow f(0) &= c_1 + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -c_1 \end{aligned}$$

3. Método da Comparação.

E pela condição de fronteira $f'(0) = 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\rho c_1 \operatorname{sen} \rho x + \rho c_2 \cos \rho x + \rho c_3 \operatorname{senh} \rho x + \rho c_4 \cosh \rho x \\ \Rightarrow f'(0) &= c_2 + c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = -c_2. \end{aligned}$$

Daí, segue-se que a solução do sistema [3.54](#) é dada por,

$$c_1 [\cos \rho x - \cosh \rho x] + c_2 [\operatorname{sen} \rho x - \operatorname{senh} \rho x].$$

Pelas condições de fronteira $f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0$ e $f(x)$ é não nula, obtemos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} -c_1 \operatorname{sen} \rho - c_1 \operatorname{senh} \rho + c_2 \cos \rho - c_2 \cosh \rho = 0, \\ -c_1 \cos \rho - c_1 \cosh \rho - c_2 \operatorname{sen} \rho - c_2 \operatorname{senh} \rho = 0, \\ c_1 \operatorname{sen} \rho - c_1 \operatorname{senh} \rho - c_2 \cos \rho - c_2 \cosh \rho = 0. \end{cases} \quad (3.55)$$

Pela primeira equação do sistema [3.55](#) obtemos que

$$c_1 = \frac{\cos \rho - \cosh \rho}{\operatorname{sen} \rho + \operatorname{senh} \rho} \cdot c_2. \quad (3.56)$$

Pela segunda equação do sistema [3.55](#) obtemos que

$$c_1 = \frac{-(\operatorname{sen} \rho + \operatorname{senh} \rho)}{\cos \rho + \cosh \rho} \cdot c_2. \quad (3.57)$$

Por fim, pela terceira equação temos que

$$c_1 = \frac{\cos \rho + \cosh \rho}{\operatorname{sen} \rho - \operatorname{senh} \rho} \cdot c_2. \quad (3.58)$$

De [\(3.56\)](#) e [\(3.57\)](#), obtemos

$$\frac{\cos \rho - \cosh \rho}{\operatorname{sen} \rho + \operatorname{senh} \rho} = \frac{-(\operatorname{sen} \rho + \operatorname{senh} \rho)}{\cos \rho + \cosh \rho},$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \cos^2 \rho - \cosh^2 \rho &= -(\operatorname{sen} \rho + \operatorname{senh} \rho)^2 \\ &= -\operatorname{sen}^2 \rho - 2\operatorname{sen} \rho \operatorname{senh} \rho - \operatorname{senh}^2 \rho \\ &= -(1 - \cos^2 \rho) - 2\operatorname{sen} \rho \operatorname{senh} \rho + (1 - \cosh^2 \rho). \end{aligned}$$

3. Método da Comparação.

Assim,

$$\operatorname{sen}\rho \operatorname{senh}\rho = 0. \quad (3.59)$$

De (3.57) e (3.58), obtemos

$$\frac{-(\operatorname{sen}\rho + \operatorname{senh}\rho)}{\cos\rho + \cosh\rho} = \frac{\cos\rho + \cosh\rho}{\operatorname{sen}\rho - \operatorname{senh}\rho},$$

o que implica que

$$\begin{aligned} -(\operatorname{sen}^2\rho - \operatorname{senh}^2\rho) &= (\cos\rho + \cosh\rho)^2 \\ &= \cos^2\rho + 2\cos\rho\cosh\rho + \cosh^2\rho \\ &= (1 - \operatorname{sen}^2\rho) + 2\cos\rho\cosh\rho + (1 + \operatorname{senh}^2\rho). \end{aligned}$$

Assim,

$$1 + \cos\rho\cosh\rho = 0. \quad (3.60)$$

Dessa forma, de (3.59) e (3.60) implica que

$$\operatorname{sen}\rho \operatorname{senh}\rho = 1 + \cos\rho\cosh\rho = 0. \quad (3.61)$$

Uma vez que $\rho > 0$, podemos concluir que (3.61) não é satisfeita, já que $1 + \cos\rho\cosh\rho \neq 0$ para todo $\rho > 0$. Portanto temos que não existe nenhum autovalor localizado no eixo imaginário.

Pelas Afirmações 2 e 3 segue-se que $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ para qualquer $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$. Com isso, concluimos a prova do Corolário. \square

De forma inteiramente análoga podemos fazer as mesmas aplicações ao seguinte sistema com controle $u(t)$ e saída $y(t)$ dados por:

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) + w_{xxxx}(x, t) = 0, & 0 < x < 1, \\ w(0, t) = w_x(0, t) = w_{xx}(1, t) = 0, \\ w_{xxx}(1, t) = u(t), \\ y(t) = w_t(1, t). \end{cases} \quad (3.62)$$

Ao considerarmos o feedback $u(t) = ky(t)$, obtemos o seguinte sistema de malha fechada

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) + w_{xxxx}(x, t) = 0, & 0 < x < 1, \\ w(0, t) = w_x(0, t) = w_{xx}(1, t) = 0, \\ w_{xxx}(1, t) = kw_t(1, t), & k > 0, \end{cases} \quad (3.63)$$

no qual é um sistema dissipativo.

Teorema 3.1.6. Considere o sistema (3.63) com o espaço \mathcal{H} e com o operador do sistema \mathcal{A}_s dado por:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_s(f(x), g(x)) = (g(x), -f^{(4)}(x)), \\ D(\mathcal{A}_s) = \{(f, g) \in (H^4 \times H_L^2) \times H_L^2 \mid f'''(1) = kg(1), f''(1) = 0\}. \end{cases} \quad (3.64)$$

Então,

- (a) Há uma sequência de autofunções generalizadas de \mathcal{A}_s que formam uma base de Riesz para \mathcal{H} .
- (b) Todos os $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_s)$ com módulo suficientemente grande são algebricamente simples. Além disso os autovalores $\{\lambda_n, \overline{\lambda_n}\}$ possuem a seguinte expansão assintótica:

$$\lambda_n = -2k + i \left(n - \frac{1}{4} \right)^2 \pi^2 + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty.$$

- (c) \mathcal{A}_s gera um C_0 -grupo $e^{\mathcal{A}_s t}$ em \mathcal{H} em que a condição de crescimento determinada pelo espectro se mantém, isto é, $\omega_0(\mathcal{A}_s) = S(\mathcal{A}_s)$.
- (d) $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ para todo $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_s)$ e $\operatorname{Re}(\lambda) \rightarrow -2k$ para $\lambda \rightarrow \infty$, portanto $e^{\mathcal{A}_s t}$ é exponencialmente estável.

Demonstração. A construção da prova dos itens é análoga aos resultados que foram demonstrados no Lema 3.1.1 e no Teorema 3.1.4 □

3.2 Estabilização da fronteira com uma massa de ponta.

Nesta seção, iremos fazer um estudo para a estabilização de uma viga flexível, na qual possui uma de suas extremidades fixa e a outra extremidade é livre que por sua vez é controlada. Este problema pode ser descrito pela seguinte equação de viga de Euler-Bernoulli:

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) + w_{xxxx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ w(0, t) = w_x(0, t) = w_{xx}(1, t) = 0, \\ -w_{xxx}(1, t) + mw_{tt}(1, t) = u(t), \end{cases} \quad (3.65)$$

em que $w(x, t)$ é a amplitude da vibração, m é a massa da ponta e $u(t)$ é a força de controle da fronteira aplicada na extremidade livre da viga. Observamos que a última

3. Método da Comparação.

igualdade do sistema descreve o movimento da massa da ponta, que segue a segunda Lei de Newton. Uma forma natural para $u(t)$ pela descrição apresentada é dada por

$$u(t) = -kw_t(1, t), \quad k > 0.$$

Este feedback produz uma perturbação compacta para o sistema livre no espaço de estados:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (w(\cdot, t), w_t(\cdot, t), mw_t(1, t)) \\ &= \mathcal{A}_0 (w(\cdot, t), w_t(\cdot, t), mw_t(1, t)) + \mathcal{B}_0 (w(\cdot, t), w_t(\cdot, t), mw_t(1, t)), \end{aligned} \quad (3.66)$$

com

$$\mathcal{A}_0(f, g, \eta) = (g, -f^{(4)}, f'''(1)) \quad e \quad \mathcal{B}_0(f, g, \eta) = (0, 0, -km^{-1}\eta).$$

O operador \mathcal{A}_0 é um operador do sistema que corresponde ao sistema livre, sem controle e o operador \mathcal{B}_0 é um operador compacto.

A perturbação compacta (Ver Definição (1.3.23)) não altera a estabilidade exponencial para um sistema de dimensão infinita (Ver [4, Corolário 1, pg. 192]). Dessa forma, o sistema (3.66) não é exponencialmente estável. No entanto, iremos aplicar o princípio da forma colocada no qual permite obtermos um feedback de “alta ordem”. Para isto, consideremos o funcional de Lyapunov de “alta ordem” dado por:

$$E_0(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [w_{xxxx}^2(x, t) + w_{xxt}^2(x, t)] dx + \frac{1}{2m} w_{xxx}^2(1, t),$$

com a finalidade de conseguirmos que o sistema seja exponencialmente estável.

Suponhamos que a solução de (3.65) é suficientemente suave. Então a derivada de

3. Método da Comparação.

$E_0(t)$ ao longo da trajetória de (3.65) é :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_0(t) &= \int_0^1 [w_{xxxx}(x,t)w_{xxxxt}(x,t) + w_{xxt}(x,t)w_{xxtt}(x,t)] dx \\
&\quad + \frac{1}{m}w_{xxx}(1,t)w_{xxxxt}(1,t) \\
&= - \int_0^1 w_{tt}(x,t)w_{xxxxt}(x,t)dx + \int_0^1 w_{xxt}(x,t)w_{xxtt}(x,t)dx \\
&\quad + \frac{1}{m}w_{xxx}(1,t)w_{xxxxt}(1,t) \\
&= - \left[\int_0^1 (w_{tt}(x,t)w_{xxxxt}(x,t))_x dx - \int_0^1 w_{ttx}(x,t)w_{xxxxt}(x,t)dx \right] \\
&\quad + \int_0^1 w_{xxt}(x,t)w_{xxtt}(x,t)dx + \frac{1}{m}w_{xxx}(1,t)w_{xxxxt}(1,t) \\
&= -w_{tt}(1,t)w_{xxxxt}(1,t) + w_{tt}(0,t)w_{xxxxt}(0,t) + \int_0^1 w_{ttx}(x,t)w_{xxxxt}(x,t)dx \\
&\quad + \left[\int_0^1 (w_{xxt}(x,t)w_{xxtt})_x dx - \int_0^1 w_{xxxxt}(x,t)w_{xxtt}(x,t)dx \right] \\
&\quad + \frac{1}{m}w_{xxx}(1,t)w_{xxxxt}(1,t) \\
&= -w_{tt}(1,t)w_{xxxxt}(1,t) + w_{xxt}(1,t)w_{xxtt}(1,t) - w_{xxt}(0,t)w_{ttx}(0,t) \\
&\quad + \frac{1}{m}w_{xxx}(1,t)w_{xxxxt}(1,t) \\
&= -w_{tt}(1,t)w_{xxxxt}(1,t) + \frac{1}{m}w_{xxx}(1,t)w_{xxxxt}(1,t) \\
&= \left(\frac{1}{m}w_{xxx}(1,t) - w_{tt}(1,t) \right) w_{xxxxt}(1,t) \\
&= -\frac{1}{m}u(t)w_{xxxxt}(1,t).
\end{aligned}$$

Daí, é natural tomarmos o seguinte controle de feedback

$$u(t) = \beta w_{xxxxt}(1,t), \quad \beta > 0, \quad (3.67)$$

em que o sistema de malha fechada torna-se

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) + w_{xxxx}(x,t) = 0, & 0 < x < 1, \\ w(0,t) = w_x(0,t) = w_x(1,t) = 0, \\ -w_{xxx}(1,t) + mw_{tt}(1,t) = \beta w_{xxxxt}(1,t). \end{cases} \quad (3.68)$$

Como há uma massa de ponta adicional na viga, a função energia do sistema será dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [w_t^2(x,t) + w_{xx}^2(x,t)] dx + \frac{1}{2} [mw_t(1,t) - \beta w_{xxx}(1,t)]^2.$$

3. Método da Comparação.

Com essas definições, consideramos o sistema (3.66) no espaço de Hilbert dado por:

$$\mathcal{H}_m = H_L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times \mathbb{C}, \quad H_L^2(0, 1) = \{f \in H^2(0, 1) | f(0) = f'(0) = 0\}$$

com a norma induzida pelo produto interno definida por

$$\|(f, g, \eta)\|^2 = \int_0^1 [|f''(x)|^2 + |g(x)|^2] dx + K|\eta|^2,$$

onde $K > 0$ é uma constante positiva. Agora, escrevemos a equação (3.68) como uma equação de evolução em \mathcal{H}_m

$$\frac{d}{dt}Y(t) = \mathcal{A}_p Y(t), \quad (3.69)$$

em que

$$Y(t) = (w(\cdot, t), w_t(\cdot, t), mw_t(1, t) - \beta w_{xxx}(1, t))$$

e o operador $\mathcal{A}_p : D(\mathcal{A}_p) \subset \mathcal{H}_m \rightarrow \mathcal{H}_m$ é definido por

$$\begin{cases} \mathcal{A}_p(f, g, \eta) = (g, -f^{(4)}, -\beta^{-1}\eta + \beta^{-1}mg(1)), & \forall (f, g, \eta) \in D(\mathcal{A}_p), \\ D(\mathcal{A}_p) = \{(f, g, \eta) \in (H^4 \cap H_L^2) \times H_L^2 \times \mathbb{C} | f''(1) = 0, \eta = mg(1) - \beta f'''(1)\}. \end{cases} \quad (3.70)$$

Lema 3.2.1. Seja \mathcal{A}_p definido em (3.70). Então

- (a) \mathcal{A}_p^{-1} existe e é compacto em \mathcal{H}_m . Portanto, o espectro $\sigma(\mathcal{A}_p)$ é formado apenas por autovalores isolados com multiplicidade finita: $\sigma(\mathcal{A}_p) = \sigma_p(\mathcal{A}_p)$.
- (b) $\lambda = -\beta^{-1}$ é um autovalor e para cada $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_p)$, $\lambda \neq -\beta^{-1}$, tem-se que λ é geometricamente simples.
- (c) $Re(\lambda) < 0$ para todo $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_p)$.
- (d) Os autovalores $\{\lambda_n, \bar{\lambda}_n\}$ possuem a seguinte expansão assintótica:

$$\lambda_n = -2m\beta^{-1} + i \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty \quad (3.71)$$

para todo inteiro n , suficientemente grande.

- (e) As autofunções $(f_n, \lambda_n f_n, \eta_n)$ correspondentes de λ_n possuem a seguinte expansão

assintótica:

$$\begin{aligned}
 \lambda_n f_n(x) &= e^{-(n-\frac{1}{2})\pi x} + (-1)^n e^{(n-\frac{1}{2})\pi(1-x)} + \operatorname{sen}\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x \\
 &\quad - \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \\
 f_n''(x) &= e^{-(n-\frac{1}{2})\pi x} + (-1)^n e^{(n-\frac{1}{2})\pi(1-x)} + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x \\
 &\quad - \operatorname{sen}\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \\
 \eta_n &= \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Demonstração. Prova do item (a). Observemos que

Afirmção 1: O operador \mathcal{A}_p^{-1} é invertível.

De fato, é suficiente mostramos que para todo $(f(x), g(x), \eta) \in \mathcal{H}_m$, existem $F(x)$, $G(x)$ e H tais que

$$\mathcal{A}_p(F(x), G(x), H) = (f(x), g(x), \eta). \tag{3.73}$$

Para que (F, G, H) satisfaça (3.73), devemos ter

$$(G(x), -F^{(4)}(x), -\beta^{-1}H + \beta^{-1}mG(1)) = (f(x), g(x), \eta), \tag{3.74}$$

isto é,

$$\begin{cases} G(x) = f(x), \\ -F^{(4)}(x) = g(x), \\ -\beta^{-1}H + \beta^{-1}mG(1) = \eta. \end{cases} \tag{3.75}$$

De (3.75) temos as expressões explícitas:

$$G(x) = f(x) \text{ e } H = -\beta\eta + mf(1).$$

Agora mostraremos a expressão explícita para $F(x)$. Para $x \in (0, 1)$ arbitrário, integramos a equação de F no intervalo $(x, 1)$ e obtemos

$$-F'''(1) + F'''(x) = \int_x^1 g(t) dt. \tag{3.76}$$

Usando o fato que $F'''(1) = m\beta^{-1}g(1) - \eta\beta^{-1}$,

$$F'''(x) = m\beta^{-1}g(1) - \eta\beta^{-1} + \int_x^1 g(t) dt. \tag{3.77}$$

3. Método da Comparação.

Para $x_1 \in (0, 1)$ arbitrário, integramos (3.77) em $(x_1, 1)$, obtemos

$$F''(1) - F''(x_1) = (m\beta^{-1}g(1) - \eta\beta^{-1})x_1 + \int_{x_1}^1 \int_x^1 g(t) dt dx. \quad (3.78)$$

Já vimos que

$$\int_{x_1}^1 \int_x^1 g(t) dt dx = -x_1 \int_{x_1}^1 g(t) dt + \int_{x_1}^1 xg(x) dx.$$

Substituindo em (3.78) e usando o fato que $F''(1) = 0$,

$$F''(x_1) = x_1 \int_{x_1}^1 g(t) dt - \int_{x_1}^1 xg(x) dx - (m\beta^{-1}g(1) - \eta\beta^{-1})x_1, \quad \forall x_1 \in (0, 1). \quad (3.79)$$

Para $x_2 \in (0, 1)$, integramos (3.79) em $(0, x_2)$ e obtemos

$$\begin{aligned} F'(x_2) - F'(0) &= \int_0^{x_2} x_1 \int_{x_1}^1 g(t) dt dx_1 - \int_0^{x_2} \int_{x_1}^1 xg(x) dx dx_1 \\ &\quad - (m\beta^{-1}g(1) - \eta\beta^{-1})\frac{x_2^2}{2}, \quad \forall x_2 \in (0, 1). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Já vimos que

$$\int_0^{x_2} x_1 \int_{x_1}^1 g(t) dt dx_1 = \frac{x_2^2}{2} \int_{x_2}^1 g(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1, \quad (3.81)$$

e que

$$\int_0^{x_2} \int_{x_1}^1 xg(x) dx dx_1 = x_2 \int_{x_2}^1 xg(x) dx + \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1. \quad (3.82)$$

Substituindo (3.81) e (3.82) em (3.80) e usando o fato que $F'(0) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} F'(x_2) &= \frac{x_2^2}{2} \int_{x_2}^1 g(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1 - x_2 \int_{x_2}^1 xg(x) dx + \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1 \\ &\quad - (m\beta^{-1}g(1) - \eta\beta^{-1})\frac{x_2^2}{2}, \quad \forall x_2 \in (0, 1). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Para $x_3 \in (0, 1)$ arbitrário, integramos (3.83) em $(0, x_3)$ e obtemos

$$\begin{aligned} F(x_3) - F(0) &= \int_0^{x_3} \frac{x_2^2}{2} \int_{x_2}^1 g(t) dt dx_2 + \frac{1}{2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1 dx_2 \\ &\quad - \int_0^{x_3} x_2 \int_{x_2}^1 xg(x) dx dx_2 + \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1 dx_2 \\ &\quad - (m\beta^{-1}g(1) - \eta\beta^{-1})\frac{x_3^3}{6}, \quad \forall x_3 \in (0, 1). \end{aligned} \quad (3.84)$$

3. Método da Comparação.

Já vimos que

$$\int_0^{x_3} \frac{x_2^2}{2} \int_{x_2}^1 g(t) dt dx_2 = \frac{x_3^3}{6} \int_{x_3}^1 g(t) dt + \frac{1}{6} \int_0^{x_3} x_2^3 g(x_2) dx_2, \quad (3.85)$$

e

$$\frac{1}{2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1 dx_2 = \frac{x_3}{2} \int_0^{x_3} x_1^2 g(x_1) dx_1 - \frac{1}{2} \int_0^{x_3} x_2^3 g(x_2) dx_2. \quad (3.86)$$

Também vimos que

$$\int_0^{x_3} x_2 \int_{x_2}^1 x g(x) dx dx_2 = \frac{x_3^2}{2} \int_{x_3}^1 x g(x) dx + \int_0^{x_3} \frac{x_2^3}{2} g(x_2) dx_2, \quad (3.87)$$

e

$$\int_0^{x_3} \int_0^{x_2} x_1^2 g(x_1) dx_1 dx_2 = x_3 \int_0^{x_3} x_1^2 g(x_1) dx_1 - \int_0^{x_3} x_2^3 g(x_2) dx_2. \quad (3.88)$$

Substituindo (3.85) - (3.88) em (3.84) e usando o fato que $F(0) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} + \frac{xt^2}{2} - \frac{t^3}{2} - xt^2 + t^3 - \frac{t^3}{2} \right) g(t) dt + \int_x^1 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 t}{2} \right) g(t) dt \\ &\quad - (m\beta^{-1}g(1) - \eta\beta^{-1}) \frac{x_3^3}{6} \\ &= \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} - x \frac{t^2}{2} \right) g(t) dt + \int_x^1 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 t}{2} \right) g(t) dt - (m\beta^{-1}g(1) - \eta\beta^{-1}) \frac{x_3^3}{6}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$F(x) = \int_0^1 \left(\frac{t^3}{6} - x \frac{t^2}{2} \right) g(t) dt + \int_x^1 \frac{(x-t)^3}{6} g(t) dt - (m\beta^{-1}g(1) - \eta\beta^{-1}) \frac{x_3^3}{6} \quad (3.89)$$

Portanto segue-se que o operador \mathcal{A}_p é invertível. Além disso, pelo Teorema 1.2.8 temos que $\mathcal{A}_p^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_m)$.

Afirmção 2: \mathcal{A}_p^{-1} é compacto. Observamos que para $(f, g, \eta) \in \mathcal{H}_m = H_L^2 \times L^2 \times \mathbb{C}$, a segunda componente de \mathcal{A}_p^{-1} pertence à H_L^2 e a terceira componente pertence à \mathbb{C} . Dessa forma, pelo Teorema 1.5.8 implica que a segunda componente é compacta em L^2 e que a terceira componente é compacta em \mathbb{C} . Quanto à primeira componente basta observamos que a sua quarta derivada vale $-g(x)$ que pertence a L^2 . Daí, a primeira componente de \mathcal{A}_p^{-1} pertence a $H^4(0, 1)$ que é compacto em H_L^2 . Portanto segue-se que o operador \mathcal{A}_p^{-1} é compacto.

Afirmção 3: O espectro de \mathcal{A}_p^{-1} possui apenas autovalores com multiplicidade algébrica finita. Além disso, $\sigma(\mathcal{A}_p) = \sigma_p(\mathcal{A}_p)$.

A prova da Afirmção 3 é análoga a Afirmção 4 do item (a) do Lema 3.1. \square

3. Método da Comparação.

Prova do item (b). Temos,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_p(f, g, \eta) &= -\beta^{-1}(f, g, \eta) \\ \Rightarrow (g, -f^{(4)}, -\beta^{-1}\eta + \beta^{-1}mg(1)) &= (-\beta^{-1}, -\beta^{-1}g, -\beta^{-1}\eta).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} g = -\beta f, \\ -f^{(4)} = -\beta^{-1}g, \\ -\beta^{-1}\eta + \beta^{-1}mg(1) = -\beta^{-1}\eta. \end{cases}$$

Observemos que $\lambda = \beta^{-1}$ é um autovalor, pois basta tomarmos $f \equiv g \equiv 0$ que as autofunções associadas a $-\beta^{-1}$ serão da forma $(0, 0, \eta)$, com $\eta \neq 0$.

Agora, considere qualquer $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A}_p)$, com $\lambda \neq -\beta^{-1}$, resolvendo o problema do autovalor, obtemos $g(x) = \lambda f(x)$ e $-\beta^{-1}\eta + \beta^{-1}mg(1) = \lambda\eta$. Em particular, chegamos que

$$\eta = \frac{\lambda m \beta^{-1}}{\beta^{-1} + \lambda} f(1),$$

em que $f(x)$ satisfaz,

$$\begin{cases} f^{(4)}(x) + \lambda^2 f(x) = 0, \\ f(0) = f'(0) = f''(1) = 0, \\ (\lambda + \beta^{-1}) f'''(1) = m\beta^{-1}\lambda^2 f(1). \end{cases} \quad (3.90)$$

Se (3.90) possui duas soluções linearmente independentes, digamos $f_1(x)$ e $f_2(x)$, então consideramos $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ de modo que as constantes c_1 e c_2 são tomadas tal que $f(1) = 0$. Desse modo, (3.90) é reduzido a (3.54) com $\lambda^2 = -\omega^2$ real, na qual já mostramos que a única solução que existe é $f(x) \equiv 0$, o que é uma contradição. Logo, segue-se que λ é geometricamente simples. \square

Prova do item (c). Para construção da prova do item (c) utilizaremos as Afirmações 1-3 do Corolário 3.1.5, em que difere apenas a condição de fronteira do problema do autovalor (3.90). Pela Afirmação 1, obtemos que

$$\lambda^2 \|f(x)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{m\beta^{-1}}{\lambda + \beta^{-1}} |f(1)|^2 + \|f''(x)\|_{L^2(0,1)}^2 = 0. \quad (3.91)$$

Com uma construção semelhante à Afirmação 2, juntamente com (3.91), obtemos que $\text{Re}(\lambda) \leq 0$. Por fim, fazendo uma construção semelhante da Afirmação 3, concluiremos que não há autovalor localizado no eixo imaginário. Portanto, segue-se que $\text{Re}(\lambda) < 0$. \square

3. Método da Comparação.

Prova do item (d). Pelo item (c) vimos que $\text{Re}(\lambda) < 0$. Dessa forma, os autovalores são simétricos em relação ao eixo real. Com isso, consideraremos apenas os que estão localizados no segundo quadrante. Seja $\lambda = \rho^2$ e usando novamente as considerações feitas em (3.28), (3.30) e (3.31), uma vez que $e^{\rho\omega_i x}$, $i = 1, \dots, 4$ são soluções fundamentais para $\lambda^2 f(x) + f^{(4)}(x) = 0$, a solução de (3.90) será representada por,

$$f(x) = c_1 e^{\rho\omega_1 x} + c_2 e^{\rho\omega_2 x} + c_3 e^{\rho\omega_3 x} + c_4 e^{\rho\omega_4 x}$$

em que as constantes, c_i são determinadas pelas condições de fronteira, i.e ,

$$\Delta(\rho) (c_1, c_2, c_3, c_4)^T = [\Delta_1(\rho), \Delta_2(\rho)] (c_1, c_2, c_3, c_4)^T = 0 \quad (3.92)$$

com

$$\Delta_1(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 \\ [(\rho^2 + \beta^{-1}) \rho^3 \omega_1^3 - m\beta^{-1} \rho^4] e^{\rho\omega_1} & [(\rho^2 + \beta^{-1}) \rho^3 \omega_2^3 - m\beta^{-1} \rho^4] e^{\rho\omega_2} \\ \rho^2 \omega_1^2 e^{\rho\omega_1} & \rho^2 \omega_2^2 e^{\rho\omega_2} \end{pmatrix}$$

e

$$\Delta_2(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega_3 & \omega_4 \\ [(\rho^2 + \beta^{-1}) \rho^3 \omega_3^3 - m\beta^{-1} \rho^4] e^{\rho\omega_3} & [(\rho^2 + \beta^{-1}) \rho^3 \omega_4^3 - m\beta^{-1} \rho^4] e^{\rho\omega_4} \\ \rho^2 \omega_3^2 e^{\rho\omega_3} & \rho^2 \omega_4^2 e^{\rho\omega_4} \end{pmatrix}.$$

A solução $f(x)$ de (3.90) é diferente de zero se, e somente se, o determinante característico $\det(\Delta(\rho)) = 0$. Iremos fazer o uso de W_i para representar o termo $[(\rho^2 + \beta^{-1}) \rho^3 \omega_i^3 - m\beta^{-1} \rho^4] e^{\rho\omega_i}$, com $i = 1, \dots, 4$ e W_{-i} para representar o termo $[(\rho^2 + \beta^{-1}) \rho^3 (-\omega_i)^3 - m\beta^{-1} \rho^4] e^{\rho(-\omega_i)}$ com $i = 1, 2$. Se $L = -i\rho^{-5} \omega_2 e^{\rho(\omega_1 + \omega_2)}$, então

$$L \cdot \det(\Delta(\rho)) \quad (3.93)$$

$$= -i\rho^{-5} \omega_2 e^{\rho(\omega_1 + \omega_2)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \\ \rho^2 \omega_1^2 e^{\rho\omega_1} & \rho^2 \omega_2^2 e^{\rho\omega_2} & \rho^2 \omega_3^2 e^{\rho\omega_3} & \rho^2 \omega_4^2 e^{\rho\omega_4} \end{vmatrix}$$

Usando o fato que $\omega_3 = -\omega_2$ e $\omega_4 = -\omega_1$, obtemos

3. Método da Comparação.

$$L \cdot \det(\Delta(\rho)) = -i\rho^{-5}\omega_2 e^{\rho(\omega_1+\omega_2)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & -\omega_2 & -\omega_1 \\ W_1 & W_2 & W_{-2} & W_{-1} \\ \rho^2\omega_1^2 e^{\rho\omega_1} & \rho^2\omega_2^2 e^{\rho\omega_2} & \rho^2(-\omega_2)^2 e^{-\rho\omega_2} & \rho^2(-\omega_1)^2 e^{-\rho\omega_1} \end{vmatrix}.$$

Multiplicando $-i\rho^{-5}\omega_2 e^{\rho(\omega_1+\omega_2)}$ pelo determinante, obtemos que

$$L \cdot \det(\Delta(\rho)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & e^{\rho\omega_1} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & -ie^{\rho\omega_1} \\ [-i\omega_1 k - m\beta^{-1}\rho] e^{\rho\omega_1} & [i\omega_2 k - m\beta^{-1}\rho] e^{\rho\omega_2} & [-i\omega_2 k - m\beta^{-1}\rho] & [i\omega_1 k - m\beta^{-1}\rho] \\ -e^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

com $k = \rho^2 + \beta^{-1}$. Agora, usando a propriedade de separar os elementos da quarta coluna de modo que $a_{1,4}$ e $a_{2,4}$ fique em um determinante e os elementos $a_{3,4}$ e $a_{4,4}$ fiquem em outro, obtemos que

$$L \cdot \det(\Delta(\rho)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ [-i\omega_1 k - m\beta^{-1}\rho] e^{\rho\omega_1} & [i\omega_2 k - m\beta^{-1}\rho] e^{\rho\omega_2} & [-i\omega_2 k - m\beta^{-1}\rho] & [i\omega_1 k - m\beta^{-1}\rho] \\ -e^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & e^{\rho\omega_1} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & -ie^{\rho\omega_1} \\ [-i\omega_1 k - m\beta^{-1}\rho] e^{\rho\omega_1} & [i\omega_2 k - m\beta^{-1}\rho] e^{\rho\omega_2} & [-i\omega_2 k - m\beta^{-1}\rho] & 0 \\ -e^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Usando a mesma propriedade na primeira coluna do primeiro determinante acima, de modo que $a_{1,1}$ e $a_{2,1}$ fiquem em um determinante e os elementos $a_{3,1}$ e $a_{4,1}$ fiquem em outro, obtemos que

$$L \cdot \det(\Delta(\rho)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ 0 & [i\omega_2 k - m\beta^{-1}\rho] e^{\rho\omega_2} & [-i\omega_2 k - m\beta^{-1}\rho] & [i\omega_1 k - m\beta^{-1}\rho] \\ 0 & e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ 0 & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ [-i\omega_1 k - m\beta^{-1}\rho] e^{\rho\omega_1} & [i\omega_2 k - m\beta^{-1}\rho] e^{\rho\omega_2} & [-i\omega_2 k - m\beta^{-1}\rho] & [i\omega_1 k - m\beta^{-1}\rho] \\ -e^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

3. Método da Comparação.

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & e^{\rho\omega_1} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & -ie^{\rho\omega_1} \\ [-i\omega_1k - m\beta^{-1}\rho] e^{\rho\omega_1} & [i\omega_2k - m\beta^{-1}\rho] e^{\rho\omega_2} & [-i\omega_2k - m\beta^{-1}\rho] & 0 \\ -e^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$= M_1 + M_2 + M_3.$$

Pelas mesmas conclusões de (3.34) podemos concluir que

$$-i\rho^{-5}\omega_2e^{\rho(\omega_1+\omega_2)} \cdot \det(\Delta(\rho)) = M_1 + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|}).$$

Finalmente, temos

$$M_1 + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ [i\omega_2k - m\beta^{-1}\rho] e^{\rho\omega_2} & -i\omega_2k - m\beta^{-1}\rho & i\omega_1k - m\beta^{-1}\rho \\ e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$-i \begin{vmatrix} 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ [i\omega_2k - m\beta^{-1}\rho] e^{\rho\omega_2} & -i\omega_2k - m\beta^{-1}\rho & i\omega_1k - m\beta^{-1}\rho \\ e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix} + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|})$$

$$= i\omega_2k + m\beta^{-1}\rho - e^{2\rho\omega_2} [i\omega_1k - m\beta^{-1}\rho] - i\omega_1k + m\beta^{-1}\rho - e^{2\rho\omega_2} [i\omega_2k - m\beta^{-1}\rho]$$

$$+ i(-i\omega_2k - m\beta^{-1}\rho) + ie^{2\rho\omega_2} [-\omega_1k + m\beta^{-1}\rho] + (i\omega_1k - m\beta^{-1}\rho) - ie^{2\rho\omega_2} [i\omega_2k - m\beta^{-1}\rho]$$

$$= \omega_1k + m\beta^{-1}\rho - i\omega_1k + m\beta^{-1}\rho - \omega_1k - im\beta^{-1}\rho - \omega_1k - im\beta^{-1}\rho$$

$$+ e^{2\rho\omega_2} [-i\omega_1k + m\beta^{-1}\rho - \omega_1k + m\beta^{-1}\rho + \omega_1k + im\beta^{-1}\rho - i\omega_1k + im\beta^{-1}\rho]$$

$$= -2i\omega_1k + 2m\beta^{-1}\rho - 2im\beta^{-1}\rho + e^{2\rho\omega_2} [-2i\omega_1k + 2m\beta^{-1}\rho + 2im\beta^{-1}\rho]$$

$$= -2i\omega_1(\rho^2 + \beta^{-1}) + 2m\beta^{-1}\rho(1 - i) + e^{2\rho\omega_2} [-2i\omega_1(\rho^2 + \beta^{-1}) + 2m\beta^{-1}\rho(1 + i)]. \quad (3.94)$$

Afirmação 1: O $\det(\Delta(\rho)) = 0$ se, e somente se,

$$e^{2\rho\omega_2} = -1 - 2i\omega_1m\beta^{-1} + \mathcal{O}(|\rho|^{-2}). \quad (3.95)$$

3. Método da Comparação.

De fato, por (3.94) obtemos

$$e^{\rho\omega_2} = \frac{2i\omega_1(\rho^2 + \beta^{-1}) - 2m\beta^{-1}\rho(1-i)}{-2i\omega_1(\rho^2 + \beta^{-1}) + 2\beta^{-1}\rho(1+i)}.$$

Aplicando uma expansão de Taylor com $f(z) = e^{2\rho\omega_2}$ e $z = \frac{1}{\rho}$, obtemos

$$f(z) = \frac{i\omega_1\left(\frac{1}{z^2} + \beta^{-1}\right) - \frac{m\beta^{-1}(1-i)}{z}}{-i\omega_1\left(\frac{1}{z^2} + \beta^{-1}\right) + \frac{m\beta^{-1}(1+i)}{z}} = \frac{i\omega_1(1 + z^2\beta^{-1}) - zm\beta^{-1}(1-i)}{-i\omega_1(1 + z^2\beta^{-1}) + zm\beta^{-1}(1+i)}.$$

Logo,

$$f(0) = \frac{i\omega_1}{-i\omega_1} = -1$$

e

$$f'(z) = \frac{X - Y}{[-i\omega_1(1 + z^2\beta^{-1}) + zm\beta^{-1}(1+i)]^2}$$

para

$$\begin{cases} X = [2z\beta^{-1}i\omega_1 - m\beta^{-1}(1-i)] \cdot [-i\omega_1(1 + z^2\beta^{-1}) + zm\beta^{-1}(1+i)] \\ Y = [-2z\beta^{-1}i\omega_1 + m\beta^{-1}(1+i)] \cdot [i\omega_1(1 + z^2\beta^{-1}) - zm\beta^{-1}(1-i)]. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{[-m\beta^{-1}(1-i)] \cdot [-i\omega_1] - [m\beta^{-1}(1+i)] \cdot [i\omega_1]}{[-i\omega_1]^2} \\ &= \frac{m\beta^{-1}i\omega_1(1-i) - m\beta^{-1}i\omega_1(1+i)}{i^2\omega_1^2} \\ &= \frac{-2im\beta^{-1}i\omega_1}{i} \\ &= -2i\omega_1m\beta^{-1}. \end{aligned}$$

Daí,

$$e^{2\rho\omega_2} = -1 - 2mi\omega_1\beta^{-1}\rho^{-1} + \mathcal{O}(|\rho|^{-2}).$$

Portanto, a afirmação segue sendo verdadeira.

Afirmação 2: As soluções de (3.95) são dadas por:

$$\rho_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi\omega_2 + \mathcal{O}(n^{-1}). \quad (3.96)$$

De fato, tome $h(\rho) = e^{\rho\omega_2} + 1$ e $g(\rho) = 2mi\omega_1\beta^{-1}\rho^{-1} + \mathcal{O}(|\rho|^{-2})$. Se $\xi = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi\omega_2$

3. Método da Comparação.

então,

$$\begin{aligned}
 h(\xi) &= e^{2[(n-\frac{1}{2})\pi\omega_2]\omega_2} + 1 \\
 &= e^{2(n-\frac{1}{2})\pi i} + 1 \\
 &= \cos(\pi - 2\pi n) + i\operatorname{sen}(\pi - 2\pi n) + 1 \\
 &= \cos((1 - 2n)\pi) + i\operatorname{sen}((1 - 2n)\pi) + 1 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Observemos que,

$$\left((n+1) - \frac{1}{2}\right)\pi\omega_2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\omega_2 = \pi\omega_2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Com isso, tomando $B_n = B\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\omega_2, \frac{\pi}{2}\right)$, implica que $B_n \cap B_{n+k} = \emptyset$, isto é, cada bola possui apenas uma raiz de $f(\rho)$. Pela construção de B_n

$$\left|\rho - \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\omega_2\right| = \frac{\pi}{2} \text{ para todo } \rho \in \partial B_n\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\omega_2, \frac{\pi}{2}\right).$$

Agora, tome $\rho = \xi_n + \Delta_{\theta_\rho}$, com $\xi_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\omega_2$ e $\Delta_{\theta_\rho} = \cos\theta_\rho + \operatorname{sen}\theta_\rho$. Temos,

$$\begin{aligned}
 |g(\rho)| &\leq |2mi\omega_1\beta^{-1}\rho^{-1} + \mathcal{O}(|\rho|^{-2})| \\
 &= \left|\frac{2m\omega_1\beta^{-1}}{\xi_n + \Delta_{\theta_\rho}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\xi_n + \Delta_{\theta_\rho}|^2}\right)\right| \\
 &= \mathcal{O}(n^{-1}),
 \end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Além disso,

$$\begin{aligned}
 |h(\rho)| &= |e^{2(\xi_n + \Delta_{\theta_\rho})\pi\omega_2} + 1| \\
 &= |e^{2\xi_n\pi\omega_2} \cdot e^{2\Delta_{\theta_\rho}\pi\omega_2} + 1| \\
 &= |-e^{2\Delta_{\theta_\rho}\pi\omega_2} + 1|
 \end{aligned}$$

que é diferente de zero pois $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ é sempre não nulo. Assim, $|g(\rho)| \leq |h(\rho)|$ no contorno de B_n para n suficientemente grande.

Daí, pelo Teorema de Rouché [1.4.6](#) h e $h + g$ possuem o mesmo número de raízes em B_n , isto é, existem $\rho_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\omega_2 + r_n$ tais que,

$$f(\rho_n) + g(\rho_n) = 0,$$

3. Método da Comparação.

com $|r_n| \leq \pi$. Assim, de (3.95)

$$e^{2\rho_n\rho\omega_2} + 1 + \frac{2mi\omega_1\beta^{-1}}{\rho_n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\rho_n|^2}\right) = 0,$$

ou ainda

$$-e^{2r_n\pi\omega_2} + 1 + \frac{2mi\omega_1\beta^{-1}}{\xi_n + r_n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\rho_n|^2}\right) = 0.$$

Em particular, deveremos ter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

É fácil ver que $r_n \in \mathcal{O}(n^{-1})$, pois já vimos na afirmação 6 do item (b) do Lema 3.1 que se $e^{r_n} - 1 = \mathcal{O}(n^{-1})$, então $r_n = \mathcal{O}(n^{-1})$. Portanto segue-se a afirmação e (3.96).

Agora substituindo os valores de ρ_n em (3.95), obtemos

$$e^{[(n-\frac{1}{2})\pi\omega_2 + \mathcal{O}(n^{-1})]\omega_2} = -1 - \frac{2mi\omega_1\beta^{-1}}{(n-\frac{1}{2})\pi\omega_2 + \mathcal{O}(n^{-1})} + \mathcal{O}(n^{-2})$$

ou ainda

$$-e^{2\omega_2\mathcal{O}(n^{-1})} = -1 - \frac{1}{(n-\frac{1}{2})\pi\omega_2 + \mathcal{O}(n^{-1})} \cdot 2mi\omega_1\beta^{-1} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Novamente pela fórmula de Taylor, chegamos que

$$-e^{2\omega_2\mathcal{O}(n^{-1})} = -(1 + 2\omega_2\mathcal{O}(n^{-1}) + \mathcal{O}(n^{-2})).$$

Agora, fazendo uma expansão de Taylor para $\frac{1}{(1-\frac{x}{2})\pi\omega_2 + \mathcal{O}(x^2)}$. Tomando $h(x) = \frac{-1}{\frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{2x\pi\omega_2}{2+x\pi\omega_2}\right)}$ com x suficientemente pequeno. Denotando por $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}\left(\frac{2x\pi\omega_2}{2+x\pi\omega_2}\right)$, temos que

$$h(0) = 0,$$

e de

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\left[\frac{1}{x} + \tilde{\mathcal{O}}(x)\right]^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} + \mathcal{O}^*\right), \text{ onde } \mathcal{O}^* = \left(\tilde{\mathcal{O}}(x)\right)' \\ &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left[\frac{1}{x} + \tilde{\mathcal{O}}(x)\right]^2} + \frac{\mathcal{O}^*}{\left[\frac{1}{x} + \tilde{\mathcal{O}}(x)\right]^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{\tilde{\mathcal{O}}(x)}{x^2} + \tilde{\mathcal{O}}(x^2)} + \frac{\mathcal{O}^*}{\left[\frac{1}{x} + \tilde{\mathcal{O}}(x)\right]^2} \end{aligned}$$

3. Método da Comparação.

temos que $h'(0) = -1$. Assim, fazendo $x = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \omega_2$ para n suficientemente grande, obtemos que

$$\frac{-1}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \omega_2 + \mathcal{O}(n^{-1})} = \frac{-1}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \omega_2} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Daí, substituindo os valores encontrados, tem-se

$$-1 - 2\omega_2 \mathcal{O}(n^{-1}) - \mathcal{O}(n^{-2}) = -1 - \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \omega_2} \cdot 2mi\omega_1 \beta^{-1} + \mathcal{O}(n^{-2})$$

ou ainda que

$$\mathcal{O}(n^{-1}) = \frac{-m\beta^{-1}}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \omega_2} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Substituindo em (3.96), obtemos

$$\rho = \rho_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \omega_2 + \frac{-m\beta^{-1}}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \omega_2} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_n &= \rho_n^2 = \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \omega_2 + \frac{-m\beta^{-1}}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \omega_2} + \mathcal{O}(n^{-2}) \right]^2 \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 i - 2m\beta^{-1} + \mathcal{O}(n^{-1}). \end{aligned}$$

Portanto segue-se (3.71) e a prova do item (d). □

Prova do item (e). As autofunções $f(x)$ associadas aos autovalores $\lambda = \rho^2$, para n suficientemente grande, são dadas por:

$$f(x) = \omega_2^{-3} \rho^{-2} e^{\rho(\omega_1 + \omega_2)} \cdot \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_3 x} & e^{\rho\omega_4 x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \rho^2 \omega_1^2 e^{\rho\omega_1} & \rho^2 \omega_2^2 e^{\rho\omega_2} & \rho^2 \omega_3^2 e^{\rho\omega_3} & \rho^2 \omega_4^2 e^{\rho\omega_4} \end{vmatrix}.$$

Usando o fato que $\omega_3 = -\omega_2$ e que $\omega_4 = -\omega_1$, obtemos

$$f(x) = \omega_2^{-3} \rho^{-2} e^{\rho(\omega_1 + \omega_2)} \cdot \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{-\rho\omega_2 x} & e^{-\rho\omega_1 x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & -\omega_2 & -\omega_1 \\ -i\rho^2 e^{\rho\omega_1} & i\rho^2 e^{\rho\omega_2} & i\rho^2 e^{-\rho\omega_2} & -i\rho^2 e^{-\rho\omega_1} \end{vmatrix}.$$

3. Método da Comparação.

Multiplicando o termo $\omega_2^{-3} \rho^{-2} e^{\rho(\omega_1+\omega_2)}$ pelo determinante, obtemos

$$f(x) = \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & e^{\rho\omega_1(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & e^{\rho\omega_1} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & -ie^{\rho\omega_1} \\ -e^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Agora, usando a propriedade de separar os elementos da quarta coluna de forma que os elementos $a_{2,4}$ e $a_{3,4}$ fiquem em um determinante e os elementos $a_{1,4}$ e $a_{4,4}$ fiquem em outro

$$f(x) = \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & e^{\rho\omega_1(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ -e^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & 0 \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & e^{\rho\omega_1} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & -ie^{\rho\omega_1} \\ -e^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Novamente, usando a mesma propriedade no primeiro determinante acima de tal forma que separe o elemento $a_{1,4}$ dos elementos $a_{1,1}$, $a_{1,2}$ e $a_{1,3}$, temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & e^{\rho\omega_1(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ 0 & e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & e^{\rho\omega_1(1-x)} \\ 0 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ 0 & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ -e^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & 0 \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & e^{\rho\omega_1} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & -ie^{\rho\omega_1} \\ -e^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= M_1 + M_2 + M_3. \end{aligned}$$

Assim, como foi mostrado em casos anteriores com mesmos argumentos encontramos

$$f(x) = \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & e^{\rho\omega_1(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ 0 & e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix} + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|})$$

3. Método da Comparação.

$$\begin{aligned}
&= - \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} \end{vmatrix} - e^{\rho\omega_1(1-x)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} \\ 0 & e^{\rho\omega_2} & 1 \end{vmatrix} + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|}) \\
&= 2e^{\rho\omega_1 x + \rho\omega_2} - (1+i)e^{\rho\omega_2(1+x)} - (1-i)e^{\rho\omega_2(1-x)} - 2ie^{\rho\omega_1(1-x)} + \mathcal{O}(|\rho|^{-1}),
\end{aligned}$$

ou ainda

$$f(x) = -e^{\rho\omega_2} [-2e^{\rho\omega_1 x} + (1+i)e^{\rho\omega_2 x} + (1-i)e^{-\rho\omega_2 x}] - 2ie^{\rho\omega_1(1-x)} + \mathcal{O}(|\rho|^{-1}).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
-2e^{\rho\omega_1 x} &= -2e^{\left[(n-\frac{1}{2})\pi\omega_2 - \frac{m\beta^{-1}}{(n-\frac{1}{2})\pi\omega_2} + \mathcal{O}(n^{-2}) \right] \omega_1 x} \\
&= -2e^{\left[-(n-\frac{1}{2})\pi x - \frac{m\beta^{-1}ix}{(n-\frac{1}{2})\pi} + \mathcal{O}(n^{-2}) \right] \omega_1 x} \\
&= -2e^{-(n-\frac{1}{2})\pi x} \cdot e^{\left[-\frac{m\beta^{-1}ix}{(n-\frac{1}{2})\pi} + \mathcal{O}(n^{-2}) \right] \omega_1 x} \\
&= -2e^{-(n-\frac{1}{2})\pi x} \cdot \left[\cos\left(\frac{m\beta^{-1}x}{(n-\frac{1}{2})\pi} \right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{m\beta^{-1}x}{(n-\frac{1}{2})\pi} \right) \right] \cdot e^{\mathcal{O}(n^{-2})\omega_1 x} \\
&= -2e^{-(n-\frac{1}{2})\pi x},
\end{aligned}$$

para n suficientemente grande.

Temos também que

$$\begin{aligned}
(1+i)e^{\rho\omega_2 x} &= (1+i)e^{\left[(n-\frac{1}{2})\pi\omega_2 - \frac{m\beta^{-1}}{(n-\frac{1}{2})\pi\omega_2} + \mathcal{O}(n^{-2}) \right] \omega_2 x} \\
&= (1+i)e^{\left[(n-\frac{1}{2})\pi ix - \frac{m\beta^{-1}x}{(n-\frac{1}{2})\pi} + \mathcal{O}(n^{-2}) \right] \omega_2 x} \\
&= (1+i)e^{(n-\frac{1}{2})\pi ix} \cdot e^{\left[-\frac{m\beta^{-1}x}{(n-\frac{1}{2})\pi} + \mathcal{O}(n^{-2}) \right] \omega_2 x} \\
&= (1+i) \cdot \left[\cos\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x + i \operatorname{sen}\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x \right] \cdot e^{\left[-\frac{m\beta^{-1}x}{(n-\frac{1}{2})\pi} + \mathcal{O}(n^{-2}) \right] \omega_2 x}.
\end{aligned}$$

Observemos que $-\frac{m\beta^{-1}x}{(n-\frac{1}{2})\pi} = \mathcal{O}(n^{-1})$, para n suficientemente grande. Além disso, com a expansão $e^{x+\mathcal{O}(n^{-1})} = 1+x+\mathcal{O}(n^{-1})$ vemos que

$$\begin{aligned}
(1+i)e^{\rho\omega_2 x} &= (1+i) \cdot \left[\cos\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x + i \operatorname{sen}\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x \right] \cdot [1 + \mathcal{O}(n^{-1})] \\
&= (1+i) \cdot \left[\cos\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x + i \operatorname{sen}\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x \right] + \mathcal{O}(n^{-1}) \\
&= \cos\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x + i \operatorname{sen}\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x + i \cos\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x - \operatorname{sen}\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x + \mathcal{O}(n^{-1}).
\end{aligned}$$

3. Método da Comparação.

Analogamente

$$(1-i)e^{-\rho\omega_2x} = \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x - i\operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x - i\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x - \operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

Daí,

$$\begin{aligned} f(x) &= -e^{\rho\omega_2} [-2e^{\rho\omega_1x} + (1+i)e^{\rho\omega_2x} + (1-i)e^{-\rho\omega_2x}] - 2ie^{\rho\omega_1(1-x)} + \mathcal{O}(|\rho|^{-1}) \\ &= -e^{\rho\omega_2} \cdot \left[-2e^{-(n-\frac{1}{2})\pi x} + \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x + i\operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x + i\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x + \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x - i\operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x - i\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x \right] + \mathcal{O}(n^{-1}) - 2ie^{\rho\omega_1(1-x)} + \mathcal{O}(n^{-1}) \\ &= 2e^{\rho\omega_2} \left[e^{-(n-\frac{1}{2})\pi x} + \operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x - \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x \right] - 2ie^{\rho\omega_1(1-x)} + \mathcal{O}(n^{-1}) \end{aligned}$$

ou ainda

$$f(x) = 2e^{\rho\omega_2} \left[e^{-(n-\frac{1}{2})\pi x} + (-1)^n e^{(n-\frac{1}{2})\pi(1-x)} + \operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x - \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x \right] + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

Além disso,

$$\lambda^{-1} \cdot f''(x) = i\omega_2^{-3} \rho^{-2} e^{\rho(\omega_1+\omega_2)} \cdot \begin{vmatrix} -ie^{\rho\omega_1x} & ie^{\rho\omega_2x} & ie^{\rho\omega_3x} & -ie^{\rho\omega_4x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \rho^2\omega_1^2e^{\rho\omega_1} & \rho^2\omega_2^2e^{\rho\omega_2} & \rho^2\omega_3^2e^{\rho\omega_3} & \rho^2\omega_4^2e^{\rho\omega_4} \end{vmatrix}.$$

Usando o fato que $\omega_3 = -\omega_2$ e $\omega_4 = -\omega_1$, obtemos

$$\lambda^{-1} \cdot f''(x) = i\omega_2^{-3} \rho^{-2} e^{\rho(\omega_1+\omega_2)} \cdot \begin{vmatrix} -ie^{\rho\omega_1x} & ie^{\rho\omega_2x} & ie^{-\rho\omega_2x} & -ie^{-\rho\omega_1x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & -\omega_2 & -\omega_1 \\ -i\rho^2e^{\rho\omega_1} & i\rho^2e^{\rho\omega_2} & i\rho^2e^{-\rho\omega_2} & -i\rho^2e^{-\rho\omega_1} \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -e^{\rho\omega_1x} & e^{\rho\omega_2x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & -e^{\rho\omega_1(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & e^{\rho\omega_1} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & -ie^{\rho\omega_1} \\ -e^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Usando a propriedade de separar os elementos da quarta coluna de forma que $a_{2,4}$ e

3. Método da Comparação.

$a_{3,4}$ fiquem em um determinante e os elementos $a_{1,4}$ e $a_{4,4}$ fiquem em outro

$$\lambda^{-1} \cdot f''(x) = - \begin{vmatrix} -e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & -e^{\rho\omega_1(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ -e^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & 0 \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & e^{\rho\omega_1} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & -ie^{\rho\omega_1} \\ -e^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Usando a mesma propriedade na primeira coluna de forma que separe o elemento $a_{1,4}$ dos elementos $a_{1,1}$, $a_{2,1}$ e $a_{3,1}$

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \cdot f''(x) &= - \begin{vmatrix} -e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & -e^{\rho\omega_1(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ 0 & e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & -e^{\rho\omega_1(1-x)} \\ 0 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ 0 & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ -e^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & 0 \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & e^{\rho\omega_1} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & -ie^{\rho\omega_1} \\ -e^{\rho\omega_1} & e^{\rho\omega_2} & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= M_1 + M_2 + M_3. \end{aligned}$$

Assim, como foi mostrado em casos anteriores com mesmos argumentos encontramos

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \cdot f''(x) &= - \begin{vmatrix} -e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} & -e^{\rho\omega_1(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} & 0 \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} & 0 \\ 0 & e^{\rho\omega_2} & 1 & -1 \end{vmatrix} + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|}) \\ &= \begin{vmatrix} -e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & e^{\rho\omega_2(1-x)} \\ 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{\rho\omega_2} \\ i & 1 & -e^{\rho\omega_2} \\ 0 & e^{\rho\omega_2} & 1 \end{vmatrix} + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|}) \\ &= 2e^{\rho\omega_1 x + \rho\omega_2} + (1+i)e^{\rho\omega_2(1+x)} + (1-i)e^{\rho\omega_2(1-x)} - 2ie^{\rho\omega_1(1-x)} + \mathcal{O}(|\rho|^{-1}) \\ &= e^{\rho\omega_2} \cdot [2e^{\rho\omega_1 x} + (1+i)e^{\rho\omega_2 x} + (1-i)e^{-\rho\omega_2 x}] - 2ie^{\rho\omega_1(1-x)} + \mathcal{O}(|\rho|^{-1}) \\ &= 2e^{\rho\omega_2} \left[e^{-(n-\frac{1}{2})\pi x} - \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x + \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x \right] - 2ie^{\rho\omega_1(1-x)} + \mathcal{O}(n^{-1}), \end{aligned}$$

ou ainda

$$\lambda^{-1} f''(x) = 2e^{\rho\omega_2} \left[e^{-(n-\frac{1}{2})\pi x} + (-1)^n e^{(n-\frac{1}{2})\pi(1-x)} - \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x + \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x \right] - 2ie^{\rho\omega_1(1-x)} + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

Por fim, definindo $f_n(x) = 2^{-1} e^{-\rho\omega_2} f(x)$, obtemos as duas primeiras expansões de

3. Método da Comparação.

(3.72) e definindo $\eta_n = 2^{-1}e^{-\rho\omega_2}\eta$ obtemos a ultima expansão, pois

$$\eta = \frac{\rho^2 m \beta^{-1}}{\rho^2 + \beta^{-1}} \cdot f(1) = \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Portanto, segue-se

$$F_n(x) = (f_n(x), \lambda f_n(x), \eta_n) \quad (3.97)$$

em que $f_n(x)$ e η_n são determinadas por (3.72). Isto acaba a demonstração do item (e) e a prova do Lema 3.2.1. \square

\square

É claro que temos que existe constantes $c_1, c_2 > 0$ independentes de n tais que

$$c_1 \leq \|F_n\|_{\mathcal{H}_m} \leq c_2, \quad \text{para } n \rightarrow \infty. \quad (3.98)$$

Para vermos que (3.98) é satisfeita, basta observamos que de modo análogo ao que foi feito para provar (3.9), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n(x)\|^2 = 2.$$

Da última igualdade do problema do autovalor (3.90), temos que a ordem da derivada do lado esquerdo é muito maior do que a ordem do lado direito. Daí, escolhemos de forma natural o sistema de referência de Riesz dado por:

$$\begin{cases} \tilde{w}_{tt}(x) + \tilde{w}_{xxxx}(x) = 0, \\ \tilde{w}(0, t) = \tilde{w}_x(0, t) = \tilde{w}_x(1, t) = \tilde{w}_{xxx}(1, t) = 0, \\ \tilde{\eta}(t) = 0. \end{cases} \quad (3.99)$$

Podemos representar o sistema (3.99) pela seguinte equação de evolução:

$$\frac{d\tilde{Y}(t)}{dt} = \mathcal{A}_p^0 \cdot \tilde{Y}(t) \quad (3.100)$$

em que o operador $\mathcal{A}_p^0 : D(\mathcal{A}_p^0) (\subset \mathcal{H}_m) \rightarrow \mathcal{H}_m$ é definido por:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_p^0(f, g, \eta) = (g, -f^{(4)}, 0), \quad \forall (f, g, \eta) \in D(\mathcal{A}_p^0), \\ D(\mathcal{A}_p^0) = \{(f, g, \eta) \in (H^4 \cap H_L^2) \times H_L^2 \times \mathbb{C} \mid f''(1) = f'''(1) = 0\} \end{cases} \quad (3.101)$$

com,

$$\tilde{Y}(t) = (w(\cdot, t), w_t(\cdot, t), \tilde{\eta}(t)).$$

Lema 3.2.2. Seja \mathcal{A}_p^0 definido em (3.101). Então,

3. Método da Comparação.

- (a) $(\mathcal{A}_p^0)^* = -\mathcal{A}_p^0$, e $(I - \mathcal{A}_p^0)^{-1}$ existe e é compacto em \mathcal{H}_m . Portanto, existe uma sequência de autofunções normalizadas de \mathcal{A}_p^0 que formam uma base ortonormal para \mathcal{H}_m . (Por consequência do Teorema [1.2.30](#)).
- (b) O espectro de \mathcal{A}_p^0 é formado por $\{\mu_n, \overline{\mu_n}\}$, onde $\mu_n = \nu_n^2$ possuem a seguinte expansão assintótica:

$$\begin{cases} \nu_n = -i \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi \omega_1 + \mathcal{O}(|n|^{-1}) \\ \mu_n = \nu_n^2 = i \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi^2 + \mathcal{O}(|n|^{-1}) \end{cases} \quad (3.102)$$

para n suficientemente grande.

- (c) As autofunções $G_n(x) = (u_n(x), \mu_n u_n(x), \eta_{0_n})$ associadas a μ_n , possuem a seguinte expansão assintótica:

$$\begin{cases} u_n(x) = e^{-(n-\frac{1}{2})\pi x} + (-1)^n e^{(n-\frac{1}{2})\pi(1-x)} + \text{sen} \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x \\ - \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x + \mathcal{O}(n^{-1}), \\ \mu_n^{-1} u_n''(x) = e^{-(n-\frac{1}{2})\pi x} + (-1)^n e^{(n-\frac{1}{2})\pi(1-x)} - \text{sen} \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x \\ + \cos \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi x + \mathcal{O}(n^{-1}), \\ \eta_{0_n} = \mathcal{O}(n^{-1}), \end{cases} \quad (3.103)$$

para n suficientemente grande.

Demonstração. Observamos que definindo $m\beta^{-1} = 0$ na prova do Lema [3.2.1](#), temos imediatamente todos os resultados do Lema [3.2.2](#), exceto que $(I - \mathcal{A}_p^0)^{-1}$ existe e é compacto em \mathcal{H}_m . Suponhamos que $(I - \mathcal{A}_p^0)^{-1}(f_1, g_1, \eta_1) = (f, g, \eta)$. Então, $\eta = \eta_1$ e $g(x) = f(x) - f_1(x)$, onde $f(x)$ satisfaz,

$$\begin{cases} f^{(4)}(x) + f(x) = f_1(x) + g_1(x) \\ f(0) = f'(0) = f''(1) = f'''(1) = 0. \end{cases} \quad (3.104)$$

Já provamos que a equação homogênea de [\(3.104\)](#) ($f_1 = g_1 = 0$) possui apenas a solução nula, logo, a solução de [\(3.104\)](#) é única, caso exista. Seja ω_1 e ω_2 definidas em [\(3.29\)](#).

Afirmção: A transformação

$$F(x) = e^{\omega_1 x} \int_0^x e^{-\omega_1 s} y(s) ds - e^{-\omega_1 x} \int_0^x e^{\omega_1 s} y(s) ds$$

3. Método da Comparação.

transforma $f^{(4)}(x) + f(x) = f_1(x) + g_1(x)$ em uma equação diferencial linear de segunda ordem para $y(x)$:

$$y''(x) - iy(x) = \frac{i\omega_1}{2} [f_1(x) + g_1(x)]$$

em que possui a solução particular

$$y_0(x) = \frac{1+i}{4} \int_0^x \left[e^{\frac{1+i}{2}(x-s)} - e^{-\frac{1+i}{2}(x-s)} \right] [f_1(s) + g_1(s)] ds.$$

De fato, observamos que

$$\begin{aligned} F^{(4)}(x) &= -e^{\omega_1 x} \int_0^x e^{-\omega_1 s} y(s) ds - i\omega_1 y(x) - iy'(x) + \omega_1 y''(x) + y^{(4)}(x) \\ &\quad + e^{-\omega_1 x} \int_0^x e^{\omega_1 s} y(s) ds - i\omega_1 y(x) + iy'(x) + \omega_1 y''(x) - y^{(4)}(x). \\ &= -e^{\omega_1 x} \int_0^x e^{-\omega_1 s} y(s) ds + e^{-\omega_1 x} \int_0^x e^{\omega_1 s} y(s) ds + 2\omega_1 [y''(x) - iy(x)]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} F^{(4)}(x) + F(x) &= f_1(x) + g_1(x) \\ \Rightarrow 2\omega_1 [y''(x) - iy(x)] &= f_1(x) + g_1(x) \\ \Rightarrow y''(x) - iy(x) &= \frac{\omega_1^{-1} \cdot [f_1(x) + g_1(x)]}{2} \\ \Rightarrow y''(x) - iy(x) &= \frac{i\omega_1}{2} [f_1(x) + g_1(x)]. \end{aligned}$$

Assim, a solução particular para $f^{(4)}(x) + f(x) = f_1(x) + g_1(x)$ é:

$$f_0(x) = e^{\omega_1 x} \int_0^x e^{-\omega_1 s} y_0(s) ds - e^{\omega_1 x} \int_0^x e^{\omega_1 s} y_0(s) ds.$$

Uma vez que as quatro soluções linearmente independentes de $f^{(4)}(x) + f(x) = 0$ são: $e^{\omega_1 x}$, $e^{-\omega_1 x}$, $e^{\omega_2 x}$ e $e^{-\omega_2 x}$, podemos encontrar a solução de (3.104) com,

$$f(x) = \sum_{i=1}^4 c_i \cdot e^{\omega_i x} + f_0(x),$$

para algumas constantes $c_i, i = 1, 2, 3, 4$, pois a equação homogênea de (3.104) possui apenas a solução nula. Portanto $(I - \mathcal{A}_p^0)^{-1}$ existe. A compacidade segue-se pelos Teoremas 1.5.7 e 1.5.8. \square

Teorema 3.2.3. Seja \mathcal{A}_p o operador definido em (3.70). Então,

(a) Existe uma sequência de autofunções generalizadas de \mathcal{A}_p que formam uma base

3. Método da Comparação.

de Riesz para \mathcal{H}_m .

- (b) Os autovalores de \mathcal{A}_p possuem a expansão assintótica de (3.71).
- (c) Todos $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_p)$ com modulo suficientemente grande são algebricamente simples. Portanto, \mathcal{A}_p gera um C_0 -semigrupo em \mathcal{H}_m para quaisquer constantes reais m e β . Para o semi-grupo gerado por \mathcal{A}_p a condição de crescimento determinada pelo espectro se mantém:

$$-2m\beta^{-1} \leq \omega(\mathcal{A}_p) = S(\mathcal{A}_p) < 0.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.2.2, temos que um conjunto “máximo” de autofunções ω -linearmente independentes de \mathcal{A}_p é formado por todos (u_n, v_n, η_{0n}) e seus conjugados definidos por (3.103) e adicionados a um número finito de autofunções. Daí, podemos assumir sem perda de generalidade que este conjunto é

$$\{(u_n, v_n, \eta_{0n})\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\text{seus conjugados}\}.$$

Caso o conjunto acima forme uma base ortogonal para \mathcal{H}_m e eles estejam quadráticamente próximos, de (3.98) o conjunto é uma base de Riesz para \mathcal{H}_m , pois de (3.72) e (3.103), existe um inteiro positivo N tal que,

$$\sum_{n>N}^{\infty} \|(f_n, g_n, \eta_n) - (u_n, v_n, \eta_{0n})\|_{\mathcal{H}_m}^2 = \sum_{n>N}^{\infty} \|F_n - G_n\|_{\mathcal{H}_m}^2 = \sum_{n>N}^{\infty} \mathcal{O}(n^{-2}) < \infty$$

O mesmo é válido para seus conjugados. Além disso, note que todos $\lambda_n = \rho_n^2$ são diferentes para n suficientemente grande, daí aplicando o Teorema 2.3.5 obtemos o desejado. \square

A estabilidade do sistema (3.69) segue-se do Corolário abaixo.

Corolário 3.2.4. O semi-grupo $e^{\mathcal{A}_p t}$ é exponencialmente estável para qualquer $m, \beta > 0$.

Demonstração. Pelo Lema 3.2.1 $Re(\lambda) < 0$, para todo $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_p)$. Pelo fato que o operador \mathcal{A}_p possui resolvente compacto, então existe apenas um número finito de autovalores de \mathcal{A}_p para qualquer região limitada no plano complexo. Daí pelo Teorema 3.2.3 existe uma constante $\omega > 0$ tal que,

$$S(\mathcal{A}_p) = \sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_p)} Re(\lambda) < -\omega. \quad (3.105)$$

Portanto pelo Teorema 1.3.22 segue-se a prova do Corolário. \square

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS RA, FOURNIER JOHN J.F , *Sobolev spaces, 2nd edn*, Academic Press, Department of Mathematics The University of British Columbia Vancouver, Canada, 1975.
- [2] GOHBERG I, GOLDBERG S, M. A. KAASHOEK, *Classes of linear operators*, Springer Basel AG, 1990.
- [3] H. BREZIS, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.
- [4] GUO. BZ , *On the exponential stability of C_0 -semigroups on Banach spaces with compact perturbations.*, Semigroup Forum 59: 190 - 196, 1999.
- [5] GUO. BZ; WANG. JM, *Control of Wave and Beam PDEs - The Riesz Basis Approach*, Communications and Control Engineering, Springer, 2019.
- [6] JOHN DOYLE, BRUCE FRANCIS, ALLEN TANNENBAUM, *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Co., 1990.
- [7] STEPHEN J. DODDS , *Feedback Control - Linear, Nonlinear and Robust, Techniques and Design with Industrial Applications*, Springer, 2015.
- [8] JAIME E. MUÑOZ RIVERA, *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*, Série de Métodos Matemáticos,UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.
- [9] TAYLOR A.E, LAY D, *An introduction to functional analysis, 2nd edn*, Wiley, New York, 1980.
- [10] SOARES, M.G, *Cálculo em uma variável complexa, 5nd edn*, Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [11] NEWMAN, M.H.A *Elements of the Toplogy of plane Sets of Points, 4th ed.*, Cambridge University Press, 1961.

- [12] LUO ZH, GUO BZ, MÖRGÜL O , *Stability and stabilization of infinite dimensional system with applications*, Springer, New York, 1999.
- [13] BOTELHO, G.M.A; PELLEGRINO, D.M.; TEIXEIRA, E.V, *Fundamentos de Análise Funcional*, 2 ed.. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [14] A. PAZY *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer, New York, 1983.
- [15] BRONSON RICHAD , *Matrix Methods: An Introduction, 2nd edn*, Academic Press, New York, 1991.
- [16] C.R. DE OLIVEIRA *Introdução à Análise Funcional*, 1 ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2014.