



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Física

JABES DIAS DE ALMEIDA MELO

**MEDIDA FRACA UTILIZANDO EFEITO MIRAGEM NO
INTERFERÔMETRO DE MACH-ZEHNDER.**

João Pessoa - PB
2020

JABES DIAS DE ALMEIDA MELO

**MEDIDA FRACA UTILIZANDO EFEITO MIRAGEM NO
INTERFERÔMETRO DE MACH-ZEHNDER.**

Dissertação apresentada ao departamento de
Física da Universidade Federal da Paraíba
para obtenção do título de mestre em física.

Área de concentração: Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Bertúlio de Lima Ber-
nardo.

João Pessoa -PB
2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M528m Mélo, Jabes Dias de Almeida.
Medida Fraca Utilizando Efeito Miragem no
Interferômetro de Mach-Zehnder / Jabes Dias de Almeida
Mélo. - João Pessoa, 2020.
082 f. : il.

Orientação: Bertúlio de Lima Bernardo.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Simetria Temporal. 2. Pré-seleção. 3. Pós-seleção.
4. Qubit. 5. Medida Fraca. 6. Valor Fraco. 7.
Stern-Gerlach. 8. Interferômetro de Mach-Zehnder. I.
Bernardo, Bertúlio de Lima. II. Título.

UFPB/BC

Ata da Sessão Pública da Defesa de Dissertação de
Mestrado do aluno **Jabes Dias de Almeida Mélo**,
 candidato ao Título de Mestre em Física na Área de
 Concentração Física da Matéria Condensada.

1 Aos vinte e sete dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte, às 10:00, reuniram-se,
 2 remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao
 3 grau de Mestre em Física na área de Física da Matéria Condensada, **Jabes Dias de Almeida**
 4 **Mélo**. A comissão examinadora composta pelos professores doutores: Bertúlio de Lima
 5 Bernardo (DF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Sérgio André Fontes
 6 Azevedo (DF/UFPB) e Askery Alexandre Canabarro Barbosa da Silva (UFAL). Dando início
 7 aos trabalhos, o Prof. Bertúlio de Lima Bernardo comunicou aos presentes a finalidade da
 8 reunião. A seguir, passou a palavra o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a
 9 exposição do trabalho de dissertação intitulado “*Estudo das medidas fracas quânticas com*
 10 *aplicação no interferômetro de Mach-Zehnder*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido
 11 pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a
 12 Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma
 13 da lei. E para constar, eu, José Sérgio Trindade Silva, lavrei esta ata que vai assinada por mim
 14 e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, **27 de julho de 2020**.

15

Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo
 Orientador - UFPB

Bertulio de Lima Bernardo

Prof. Dr. Sérgio André Fontes Azevedo
 UFPB

Sergio Azevedo

Prof. Dr. Askery Alexandre Canabarro Barbosa
 da Silva
 UFAL

Askery Canabarro

16 Link da reunião: <https://meet.google.com/oyc-mxkv-ikg>

*Dedico este trabalho aos meus pais
e a minha esposa,
Sthefânie Myrella.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, sou grato a Deus pela oportunidade de estar ao lado de pessoas excelentes, que me fizeram crescer ao longo deste tempo de trabalho. Pela oportunidade de estudar nesta instituição de renome, onde pude aprender muito.

A minha esposa, Sthefânie Myrella, por todo apoio e força que me deu. Sem ela, não poderia chegar onde cheguei. Por estar comigo nas horas e boas, e nas horas mais difíceis. Por me aconselhar e me dá forças. Por me ensinar que não há caminhos que não possam ser trilhados.

A minha mãe, Verônica, pois com seu coração enorme sempre esteve presente, me apoiando em minha caminhada. Me auxiliando nas horas que mais precisei. Me ensinou que não há medidas para ir em busca do que se deseja. Por suas orações e confiança em mim.

A meu pai, Joanyr, que por seu exemplo de homem bom que é, me ensinou a ser honesto e íntegro, que me ensinou que só o esforço pode levar ao alvo que se deseja. Que não há ganho sem trabalho duro. Por suas orações e confiança em mim. E por todo seu apoio em minha vida.

A minha irmã, Glauciene, e meus irmãos, Jades e Joabes, que sempre estiveram comigo. Por seu apoio e força. Conselhos e ajudas em todas os momentos. Por dividir os momentos bons e difíceis de uma nova vida que alcançamos em nossa jornada.

Ao meu orientador, Bertúlio Bernardo, por suas habilidades e padrão em física, por sua paciência, que me fizeram aumentar os meus parâmetros no conhecimento.

Ao meu amigo Fabiano, que esteve comigo nos melhores e nos difíceis momentos de graduação e de mestrado, me dando forças e me incentivando todos os dias. Que em todas horas esteve comigo, estudando, aprendendo e nos divertindo nas melhores conversas sobre Física.

Aos meus familiares e amigos, que sempre me ensinaram e aconselharam. Que sempre se alegraram comigo em todas as conquistas.

Ao meu orientador do PET, Joel Batista, que ensinou muito sobre física durante a graduação. Que acreditou em mim e me mostrou os caminhos em que eu poderia chegar.

Ao Departamento de Física e à Universidade Federal da Paraíba.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por seu incentivo à pesquisa científica e ao projeto Pronex/Fapesq-PB/CNPq, número 0016/2019.

"Devemos promover a coragem onde há medo, promover o acordo onde existe conflito, e inspirar esperança onde há desespero."

Nelson Mandela

Resumo

Ao longo da "criação" da Mecânica Quântica, tem se construído uma teoria que se baseia em uma única forma de medir sistemas quânticos. Essas medidas sempre ocorreram de forma que o ato de medir perturba o sistema ao ponto de colapsá-lo, e então ele adquire todas as propriedades de um único estado. Contudo, no fim da década de 1980, surgiu uma nova forma de medir um sistema quântico, chamada de Medida Fraca. Com ela, pudemos tratar de experimentos com uma nova abordagem, onde a configuração da medida é mudada por um fator que perturba muito pouco o sistema. Com a forma de medir antes desse novo conceito, seria impossível detectar pequenas mudanças em um sistema quântico, mas, agora, a medida fraca alcança novos horizontes.

Nós desenvolvemos uma forma de medida fraca usando um acoplamento geral em termos da superposição de um estado inicial e um estado final, para o caso de um qubit. Com isso, foi possível enxergar com mais detalhes como ocorre o processo dessa forma de medir, onde veremos como deve ser feito o acoplamento entre os dois estados para realizar tal experimento. Desenvolvemos também uma medida fraca em um sistema quântico em que utiliza um interferômetro de Mach-Zehnder para tal estudo. Nele, com a ajuda de um valor que determinará o quão fraca é a medida fraca, poderemos realizar uma medida em que não precisaremos perturbar um sistema para obter informações.

Palavras-chave: Simetria Temporal, Pré-seleção, Pós-seleção, Qubit, Medida Fraca, Valor Fraco, Stern-Gerlach, Interferômetro de Mach-Zehnder.

Abstract

Throughout the "creation" of Quantum Mechanics, a theory has been built that is based on a single way of measuring quantum systems. These measurements have always taken place so that the act of measuring disturbs the system to the point of collapsing it, and then it acquires all the properties of a single state. However, in the late 1980s, a new way of measuring a quantum system emerged, called the Weak Measurement. With it, we were able to deal with experiments with a new approach, where the configuration of the measurement is changed by a factor that disturbs the system very little. With the way of measuring before this new concept, it would be impossible to detect small changes in a quantum system, but now, the weak measurement reaches new horizons.

We developed a form of weak measurement using a general coupling in terms of the superposition of an initial state and a final state, in the case of a qubit. With that, it was possible to see in more detail how the process of this way of measuring occurs, where we will see how the coupling between the two states must be done to carry out such an experiment. We have also developed a weak measurement in a quantum system using a Mach-Zehnder interferometer for such a study. In it, with the help of a value that will determine how weak the weak measure is, we can carry out a measure in which we do not need to disturb a system to obtain information.

Keywords: Temporal Symmetry, Pre-selection, Post-selection, Qubit, Weak Measurement, Weak Value, Stern-Gerlach, Mach-Zehnder Interferometer.

Lista de abreviações e entidades matemáticas

Matrizes de Pauli:

$$\sigma_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\sigma_1 = \hat{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\sigma_2 = \hat{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\sigma_3 = \hat{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Operadores de spin-1/2:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} [|+\rangle \langle -| + |- \rangle \langle +|] \quad (5)$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} [-i |+\rangle \langle -| + i |- \rangle \langle +|] \quad (6)$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} [|+\rangle \langle +| - |- \rangle \langle -|] \quad (7)$$

Autokets de spin-1/2:

$$|S_x, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \pm |- \rangle) \quad (8)$$

$$|S_y, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \pm i |- \rangle) \quad (9)$$

$$|S_z, \pm\rangle = |\pm\rangle \quad (10)$$

Porta quântica Hadamard:

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Identidades trigonométricas:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)] \quad (12)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)] \quad (13)$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad (14)$$

Lista de Figuras

3.1	Descrição da evolução temporal de sistema quântico pré e pós-selecionado.	35
3.2	Em vermelho: curva da probabilidade na mecânica quântica padrão. Em Verde: curva da probabilidade na mecânica quântica com simetria temporal.	38
4.1	Descrição do colapso do estado $ \psi\rangle$ em um dos autoestados do sistema quando é feita a medida.	40
4.2	Experimento de Stern-Gerlach. Um feixe de átomos de prata é disparado na direção de um campo magnético não homogêneo.	40
4.3	Sequência de experimentos de Stern-Gerlach mostrando como é feita a medida fraca com este tipo de aparato.	43
5.1	Medida com interação fraca em um experimento do tipo Stern-Gerlach. Um feixe pouco se divide (um feixe em vermelho e outro em azul) ao interagir com o campo magnético quase homogêneo.	50
5.2	Gráfico da superposição dos estados após o estágio de interação fraca. . . .	52
5.3	Gráfico da superposição dos estados após a interação fraca, entre os valores -15 e 15, na coordenada x, separadas por $2x'$, com $x' = 0, 32$	52
5.4	Intensidade do feixe gaussiano após a conclusão do protocolo de interação fraca, com intensidade 3.62×10^{-6} , centrado na posição $x = 14.07$	53
6.1	Uma fonte dispara fótons em direção a um semiespelho (beam splitter, BS1) e entra em uma superposição de estados, $ 0\rangle$ e $ 1\rangle$. [1]	54
6.2	Uma fonte dispara fótons em direção a um semiespelho separando o feixe em dois. Esses feixes são refletidos em espelhos e interagem no segundo semiespelho, BS2.	55
6.3	Esta imagem é análoga à Figura 6.2, mas com nomes diferentes para os caminhos.	56
6.4	Uma fonte dispara fótons em direção a um semiespelho separando o feixe em dois. Esses feixes são refletidos em espelhos, e um deles passa por um material refrator (F), gerando uma fase local, e voltam a interagir no segundo semiespelho, BS2.	59
6.5	Uma miragem formada por um raio de luz que incide sobre o piso e reflete no observador. Fonte: Maria Antonieta T. de Almeida, Marta Feijó Barroso, Stenio Dore de Magalhães [2].	63
6.6	Um raio de luz incide sobre um espaço com temperatura variável, e é desviado de um ângulo θ . Fonte: João Paulo Campos Trigueiro, Tulio Matencio, Gastón Alvial Moraga and Christian Lopez [3].	63

- 7.1 Interferômetro de Mach-Zehnder com um material quente próximo de um dos caminhos. E no outro caminho, um vidro que gera uma fase. 67
- 7.2 Interferômetro de Mach-Zehnder com um feixe que se desvia de sua direção original, graças à incorporação de um material quente (M) próximo de um dos caminhos. Esta é uma aproximação da parte da Figura (7.1) que mostra o objeto M, o semiespelho (BS2) e os detectores (D1 e D2), com mais clareza. 68

Lista de Tabelas

Símbolo	Significado
$\hbar$	Constante de Planck reduzida ($\hbar/2\pi$)
μ	Momento de dipolo magnético
g	Constante de acoplamento entre $\hat{A}$ e $\hat{P}$
σ	Largura da gaussiana na Eq. (4.4)
$\langle \hat{A} \rangle_w$	Valor fraco
$Re\langle \hat{A} \rangle_w$	Parte real do valor fraco
$Im\langle \hat{A} \rangle_w$	Parte imaginária do valor fraco
$BS1$ e $BS2$	Divisores de feixe
$M1$ e $M2$	Espelhos
$D1$ e $D2$	Detectores de fótons
M	Material quente
F	Material feito de vidro

Sumário

1	Introdução	18
2	Introdução à Mecânica Quântica	20
2.1	Introdução	20
2.2	Álgebra Linear	21
2.2.1	Vetores	21
2.3	Postulados da Mecânica Quântica	23
2.3.1	Exemplo	26
2.4	Fase	27
2.4.1	Fase global	27
2.4.2	Fase local	28
3	O Formalismo de Vetor de Dois Estados	30
3.1	Introdução	30
3.2	Sistemas Quânticos	30
3.2.1	O estado quântico	30
3.2.2	O vetor de dois estados	31
3.2.3	O estado quântico em evolução	31
3.2.4	O vetor de dois estados novamente	32
3.3	Probabilidade Condicional	32
3.4	Simetria Temporal na Mecânica Quântica	34
3.4.1	Exemplo	36
4	Medida Fraca	39
4.1	O Experimento de Stern-Gerlach	40
4.1.1	A força magnética que age sobre o átomo de prata.	41
4.2	Como Fazer uma Medida Fraca?	42
4.3	O valor Fraco	43
5	Medidas F. como um E. de Interferência	48

<i>SUMÁRIO</i>	17
6 O Interferômetro de Mach-Zehnder	54
6.1 O Interferômetro de Mach-Zehnder com o Acréscimo de uma Fase	59
6.2 O Princípio do Efeito Miragem	61
7 Medida Fraca no Interferômetro de Mach-Zehnder	65
8 Conclusão	69
A	74
A.1 Demonstração das equações 2.7 e 2.8	74
B	75
B.1 Demonstração da equação 4.6	75
B.2 Demonstração das equações $\langle \hat{X} \rangle$ (4.7) e $\langle \hat{P} \rangle$	76
B.3 Demonstração da equação 4.12	77
B.4 Demonstração das equações 4.16, 4.17, 4.18 e 4.19	77
B.5 Demonstração da equação 4.20	79
C	80
C.1 Demonstração do resultado que há fase usando a equação 6.14	80
D	81
D.1 Demonstração da equação 7.4	81
D.2 Demonstração da equação 7.5	82

Capítulo 1

Introdução

Com o início da mecânica quântica, tivemos uma construção de medidas que se tornaram usuais no ato de medir, onde com elas, tivemos uma medida que, em geral, é bastante invasiva no sistema, de forma que a perturbação causada pela medida perturba esse sistema e com isso obtemos informações que revelam propriedades sobre o sistema estudado. Por exemplo, quando fazemos uma medida de spin de um átomo, encontramos com isso um dos possíveis resultados, que são os possíveis autovalores do observável.

A mecânica quântica tem se mostrado cada vez mais surpreendente, e não poderia ser diferente em suas aplicações. Com ela podemos ter um novo olhar do mundo, onde se abre a possibilidade para fenômenos antes inimagináveis. A mecânica quântica tem sido de grande utilidade para a humanidade, com todas as suas aplicações. Desde seu começo, cada vez mais as suas aplicações tem surgido, e de forma cada vez mais evidente, como por exemplo, nos dispositivos eletrônicos. Aqui, também introduzimos uma possível aplicação da mecânica quântica para uso na metrologia.

Apresentamos uma forma de medir que veremos com mais detalhes no decorrer dos capítulos. Estudaremos uma medida que não é invasiva em um sistema do tipo qubits, ou seja, usaremos estados que são criados em uma base de dois estados, que determinaremos sua forma no decorrer do estudo. Utilizaremos uma medida que agirá "fracamente" em comparação com a medida que já conhecemos, vamos analisar o comportamento do estado final do medidor usando medidas fracas para um acoplamento geral em termos da superposição entre os estados inicial e final do medidor no caso em que já sabemos que o sistema medido é um qubit.

Apresentamos também um segundo estudo nesta forma de medir que veremos que a perturbação induzida da própria medida será fortemente diminuída em relação a medida convencional. No capítulo que apresentamos este estudo, veremos como o procedimento para realizar a medida que mencionamos pode ser utilizada para detectarmos pequenos desvios angulares de um raio de luz, devido à fenomenologia do efeito miragem, quando o mesmo passa por uma região em que há a presença de um material quente causando um desvio na propagação desse raio de luz. Para tal proposta experimental, um interferômetro

de Mach-Zehnder modificado será utilizado no processo.

Para o estudo proposto acima, faremos uso da revisão de alguns estudos, como veremos a seguir. Faremos uma introdução sobre a mecânica quântica e com isso, estudaremos a medida que é pouco invasiva, como falado anteriormente. Será necessário entender sobre o formalismo de vetor de dois estados para entendermos melhor sobre os estágio dessa medida que será apresentada. E faremos uma rápida revisão sobre o interferômetro de Mach-Zehnder para melhor explicarmos a nossa proposta.

Capítulo 2

Introdução à Mecânica Quântica

2.1 Introdução

Por uma questão histórica, a construção dos livros texto em mecânica quântica tem sido baseada em um conceito de medida que, diferente da sua versão clássica, em geral, perturba o sistema de uma forma imprevisível. No presente contexto, chamaremos tais medidas de *medidas fortes*. Entretanto, veremos no decorrer deste trabalho uma outra forma de medida na mecânica quântica, que é caracterizada pelo enfraquecimento da interação entre o sistema medido e o aparato utilizado, de forma que novas informações aparecerão. Este tipo de medida é comumente chamado de *medida fraca*, que há alguns anos tem fornecido resultados bem interessantes acerca dos fundamentos da teoria. O presente trabalho será apresentado principalmente em torno desse novo conceito particular de medida, bem como nas aplicações do mesmo.

Assumiremos algumas importantes definições da mecânica quântica aqui usadas. Todos os espaços vetoriais são assumidos como tendo dimensão finita, a menos que indicado de outra forma. Muitas vezes, essa restrição é desnecessária ou pode ser removida com algum trabalho técnico adicional, mas assumir esta restrição torna a apresentação mais facilmente compreensível e não prejudica muito as aplicações pretendidas dos resultados.

Um operador positivo $\hat{A}$ é aquele para o qual $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \geq 0$ para todos os vetores estado $|\psi\rangle$. Um operador definido positivo $\hat{A}$ é aquele em que $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle > 0$ para todos $|\psi\rangle \neq 0$. A notação $\hat{U}$ será usada genericamente para denotar um operador ou matriz unitária. $\hat{H}$ é geralmente usado para denotar o hamiltoniano de um sistema quântico, e algumas vezes para denotar uma porta lógica quântica, a porta Hadamard, com o significado claro do contexto.

Os vetores serão algumas vezes escritos no formato de uma matriz coluna, por exemplo,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

mas algumas vezes, por questão de simplicidade, será escrito na seguinte forma (a, b, c) . Este último deve ser entendido como uma abreviação para um vetor coluna.

Também definimos as matrizes de Pauli da maneira convencional. Mais significativamente, a convenção para a matriz σ_z de Pauli é que $\sigma_z|0\rangle = |0\rangle$ e $\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$. Além das notações convencionais σ_x , σ_y e σ_z para as matrizes de Pauli, também será conveniente usar as notações σ_1 , σ_2 , σ_3 para essas três matrizes e definir σ_0 como a matriz identidade 2×2 .

2.2 Álgebra Linear

Nesta seção será apresentada uma breve revisão de álgebra linear, a fim de apresentarmos a mecânica quântica de um ponto de vista moderno, usando a notação de Dirac, [4, 5].

Na mecânica quântica, o espaço vetorial em que se descreve os sistemas quânticos, é o espaço de Hilbert, que admite coeficientes complexos e permite o produto interno entre os vetores que o compõe. Faremos a seguir uma descrição para o caso em que o espaço vetorial possui dimensão finita, mas as regras apresentadas se estendem sem grandes mudanças para o caso em que a dimensão é infinita.

2.2.1 Vetores

Os vetores são muitas vezes usados na mecânica quântica para representar um estado do sistema (em outras vezes são usados matrizes), sendo assim possível a construção de toda a base necessária para estudar a física quântica.

Um vetor pode ainda ser representado por uma matriz

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Com isto, podemos fazer uso das propriedades dos vetores, que são:

- A adição

Um vetor pode ser somado a outro. Seja o vetor $|\psi'\rangle$ dado por:

$$|\psi'\rangle = \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \\ \vdots \\ z'_n \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

A soma dos vetores $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$ fica

$$|\psi\rangle + |\psi'\rangle = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \\ \vdots \\ z'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + z'_1 \\ z_2 + z'_2 \\ z_3 + z'_3 \\ \vdots \\ z_n + z'_n \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

- A multiplicação por número

Seja c um número complexo qualquer, então o vetor $|\psi\rangle$ pode ser multiplicado por um número c e ficamos com $c|\psi\rangle$, que fica:

$$c|\psi\rangle = c \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cz_1 \\ cz_2 \\ cz_3 \\ \vdots \\ cz_n \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Algumas notações são:

- Se z é um número complexo, então z^* é o complexo conjugado de z .
- $|\psi\rangle$ é um vetor, ou também chamado de ket, e seu correspondente dual é denotado por: $\langle\psi|$, que é chamado de bra.
- O produto interno é escrito como: $\langle\phi|\psi\rangle$.
- O produto tensorial entre dois vetores $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ é escrito como: $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$, ou mais sucintamente como $|\phi\rangle|\psi\rangle$, onde o símbolo $\otimes$, representa o produto tensorial.
- Seja $\hat{A}$ um operador, $\hat{A}^*$ é dito ser seu complexo conjugado.
- Temos também que $\hat{A}^\top$ é a matriz transposta de $\hat{A}$, assim como a matriz hermitiana de $\hat{A}$ é escrita como $\hat{A}^\dagger$.
- $\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle$ é o produto interno entre $|\phi\rangle$ e $\hat{A}|\psi\rangle$, ou $\hat{A}^\dagger|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$.

2.3 Postulados da Mecânica Quântica

- Primeiro Postulado.

No primeiro postulado, vemos como trabalhar com a mecânica quântica. Ou seja, como podemos usar a matemática para estudar os efeitos do mundo subatômico [6].

O postulado:

"Associado a qualquer sistema físico isolado, há um espaço vetorial complexo com produto interno (ou seja, um espaço de Hilbert) conhecido como espaço de estados do sistema. O sistema é completamente descrito por seu vetor de estado, que é um vetor unitário no espaço de estados do sistema."(Nielsen e Chuang, 2010)

O primeiro postulado nos diz como descrever matematicamente um estado quântico. A mecânica quântica não nos diz qual espaço de Hilbert devemos usar para cada sistema. Ela apenas nos diz que o estado do sistema será um dos vetores desse espaço que precisamos encontrar.

- Segundo Postulado.

Este postulado trata da evolução temporal de um estado quântico. Vimos na física clássica que os estados evoluem no tempo através de uma equação que determina bem o futuro de um objeto e também seu passado. Entretanto, na física quântica, veremos que o que temos é a evolução de um sistema que vai de um estado num tempo t_1 (no presente) para um estado no tempo t_2 (no futuro).

O postulado:

"A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por uma transformação unitária. Ou seja, o estado $|\psi\rangle$ do sistema no momento t_1 está relacionado ao estado $|\psi'\rangle$ do sistema no tempo t_2 por um operador unitário que depende apenas dos tempos t_1 e t_2 ."(Nielsen e Chuang, 2010)"

$$|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle. \quad (2.6)$$

Podemos, por exemplo, tomar um sistema quântico de dois níveis, também chamado de qubit, que é o sistema quântico mais simples, para entender melhor como ocorre uma evolução unitária. Um importante e conhecido operador unitário é a porta Hadamard, que é uma porta lógica, representada pela letra H. Esta porta tem a ação de levar um certo estado em um outro estado de dois níveis (outro qubit). Por exemplo, quando esta operação é aplicada no estado $|0\rangle$, temos

$$\hat{H}|0\rangle \equiv \frac{(|0\rangle + |1\rangle)}{\sqrt{2}}. \quad (2.7)$$

Quando a porta Hadamard é aplicada no estado $|1\rangle$, chegamos ao estado a seguir:

$$\hat{H}|1\rangle \equiv \frac{(|0\rangle - |1\rangle)}{\sqrt{2}}, \quad (2.8)$$

que nos permite escrever o operador $\hat{H}$ (Hadamard), Eq. (11).

O postulado 2 exige que o sistema seja fechado. Dessa forma, o sistema não está interagindo com outros sistemas. Na verdade, os sistemas sempre interagem um pouco com outros sistemas, porém, em alguns casos de interesse, podemos com boa aproximação considerá-los como fechados. Além disso, ao menos a priori, todo sistema aberto pode ser descrito como sendo parte de um sistema fechado e maior (por exemplo o universo), que evolui a partir de uma transformação unitária.

Este postulado descreve de que forma os estados de um sistema quântico (fechado) em dois instantes diferentes estão relacionados. Para que seja melhor entendido este postulado, faremos um refinamento do seu enunciado.

Um estado de um sistema quântico tem sua evolução temporal descrita pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle, \quad (2.9)$$

com $\hbar$ sendo a constante de Planck reduzida, e $\hat{H}$ é o hamiltoniano do sistema. Se soubermos qual é o hamiltoniano do sistema, saberemos sua dinâmica completamente, ao menos a priori. De modo geral, descobrir qual o hamiltoniano que descreve um sistema físico específico é um problema muito difícil e que, em geral, exige dados de vários experimentos realizados sobre os sistema.

Para vários sistemas de interesse prático, existe a necessidade de escrevermos um hamiltoniano que varia com o tempo, de acordo com alguns parâmetros sob um controle externo, e que podem ser alterados durante um experimento, por exemplo. Ou seja, o sistema não está fechado, mas evolui de acordo com a equação de Schrödinger, para uma boa aproximação, com um Hamiltoniano variável no tempo.

- Terceiro Postulado.

O terceiro postulado trata das medidas na mecânica quântica. O postulado anterior do estado. Agora, por não sermos capazes de isolar um sistema quântico do equipamento que realiza a medida, não podemos mais tratar o sistema quântico como um sistema isolado, ou melhor, como um sistema fechado. Isso quer dizer que em uma interação do sistema quântico com o aparato experimental a sua evolução não será mais unitária.

Nesse caso, enunciamos o terceiro postulado.

O postulado:

"As medidas quânticas são descritas por uma coleção $\{\hat{M}_m\}$ de operadores de medidas. Esses são operadores que atuam no espaço de estados do sistema

que está sendo medido. O índice m refere-se aos possíveis resultados da medição que podem ocorrer no experimento. Se o estado do sistema quântico for $|\psi\rangle$ imediatamente antes da medição, a probabilidade de que o resultado m ocorra será dada por

$$p(m) = \langle \psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle, \quad (2.10)$$

e o estado do sistema após a medição é

$$\frac{\hat{M}_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle}}, \quad (2.11)$$

onde,

$$\sum_m \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m = I. \quad (2.12)$$

(Nielsen e Chuang, 2010)

A relação de completeza expressa o fato de que a soma das probabilidades é um,

$$\sum_m p(m) = \sum_m \langle \psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle = 1. \quad (2.13)$$

A equação (2.13) é equivalente à equação de (2.12). Mas, a equação (2.12) é muito mais fácil de verificar diretamente, por esta razão ela aparece na apresentação do postulado. Podemos, por exemplo, tratar de uma medida projetiva sobre um qubit na base computacional. Esta medida é definida por dois operadores de medição $\hat{M}_0 = |0\rangle\langle 0|$, $\hat{M}_1 = |1\rangle\langle 1|$. Observe que cada operador de medição é hermitiano e que $\hat{M}_0^2 = \hat{M}_0$, $\hat{M}_1^2 = \hat{M}_1$. Assim, a relação de completeza é obedecida, $I = \hat{M}_0^\dagger \hat{M}_0 + \hat{M}_1^\dagger \hat{M}_1 = \hat{M}_0 + \hat{M}_1$. Suponha que o estado quântico que está sendo medido seja $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$. Então a probabilidade de obter o resultado da medição 0 é

$$p(0) = \langle \psi | \hat{M}_0^\dagger \hat{M}_0 | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{M}_0 | \psi \rangle = |a|^2. \quad (2.14)$$

Da mesma forma, a probabilidade de obter o resultado da medição 1 é $p(1) = |b|^2$. O estado após a medição nos dois casos é, portanto,

$$\frac{\hat{M}_0 |\psi\rangle}{|a|} = \frac{a}{|a|} |0\rangle, \quad (2.15)$$

$$\frac{\hat{M}_1 |\psi\rangle}{|b|} = \frac{b}{|b|} |1\rangle. \quad (2.16)$$

- Quarto Postulado:

O quarto postulado trata de sistemas compostos. Por exemplo, se estivermos interessados em um sistema quântico que na verdade é composto de dois ou mais sistemas

quânticos distintos. O postulado 4 indica como descrever formalmente tal caso. O postulado:

"O espaço de estados de um sistema físico composto é o produto tensorial das componentes dos espaços de estados dos sistemas físicos. Além disso, se tivermos sistemas numerados de 1 a n , e o sistema i for preparado no estado $|\psi_i\rangle$, o estado conjunto do sistema total será $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle \cdots \otimes |\psi_n\rangle$." (Nielsen e Chuang, 2010)

Vamos supor que temos um sistema com espaço de estados Q e esperamos realizar uma medida descrita por operadores de medição $\hat{M}$ no sistema Q . Para isso devemos introduzir um sistema auxiliar, com espaço de estados M , tendo uma base ortonormal $|m\rangle$ em correspondência individual com os possíveis resultados da medida que desejamos implementar. Esse sistema auxiliar pode ser considerado como sendo apenas um elemento matemático que aparece na construção, ou pode ser interpretado fisicamente como sendo um sistema quântico extra introduzido no nosso problema, onde supomos que tenha um espaço de estados com as propriedades necessárias.

Permitindo que $|0\rangle$ seja qualquer estado fixo de M , podemos definir um operador $\hat{U}$ nos produtos $|\psi\rangle|0\rangle$ dos estados $|\psi\rangle$ de Q com o estado $|0\rangle$ por $\hat{U}|\psi\rangle|0\rangle \equiv \sum_m \hat{M}_m |\psi\rangle |m\rangle$.

Usando a ortonormalidade dos estados $|m\rangle$ e a relação de completeza $\sum_m \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m = I$, podemos ver que $\hat{U}$ preserva os produtos internos entre estados da forma $|\psi\rangle|0\rangle$,

$$\langle\phi|\langle 0|\hat{U}^\dagger \hat{U}|\psi\rangle|0\rangle = \langle\phi|\psi\rangle. \quad (2.17)$$

Supondo agora uma medida projetiva feita sobre o sistema do tipo $\hat{P}_m = I \otimes |m\rangle\langle m|$. Então, temos que

$$\begin{aligned} \hat{P}(m) &= \langle\phi|\langle 0|\hat{U}^\dagger \hat{P}_m \hat{U}|\psi\rangle|0\rangle \\ &= \sum_{m', m''} \langle\psi|\hat{M}_{m'}^\dagger \langle m'| (I \otimes |m\rangle\langle m|) \hat{M}_{m''} |\psi\rangle |m''\rangle \\ &= \langle\psi|\hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m |\psi\rangle. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Após a medida, o estado composto fica

$$|\psi\rangle|0\rangle \rightarrow \frac{\hat{P}_m \hat{U}|\psi\rangle|0\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{U}^\dagger \hat{P}_m \hat{U}|\psi\rangle}} = \frac{\hat{M}_m |\psi\rangle |m\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m |\psi\rangle}}. \quad (2.19)$$

2.3.1 Exemplo

Os sistemas compostos permitem a ideia de "emaranhamento". O emaranhamento é um fenômeno físico que ocorre em duas ou mais partículas que estão ligadas de tal forma

que o estado de uma não pode ser descrito de forma independente do estado da outra partícula, não importa a distância entre elas.

Veja, por exemplo um estado criado com dois estados compostos

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle). \quad (2.20)$$

Note que o estado $|\psi\rangle$ não pode ser escrito na forma

$$|\psi\rangle = |a\rangle|b\rangle, \quad (2.21)$$

onde $|a\rangle$ e $|b\rangle$ são estados de um qubit, ou seja, assumindo $|a\rangle = x|0\rangle + y|1\rangle$ e $|b\rangle = w|0\rangle + z|1\rangle$, temos que o produto tensorial desses dois estados fica:

$$|a\rangle|b\rangle = xw|00\rangle + yz|11\rangle + xz|01\rangle + yw|10\rangle. \quad (2.22)$$

Observe que se os dois últimos termos da equação (2.22) forem nulos essa equação se torna igual à equação (2.20) (com $xw = yz = 1/\sqrt{2}$). Entretanto, quando esses termos são nulos, x ou z e y ou w devem ser nulos simultaneamente, de forma que, com esta restrição, os dois primeiros termos se anulam também juntamente com os dois últimos termos. Ou seja, a equação (2.20) nunca pode ser escrita como a equação (2.21).

2.4 Fase

Um outro elemento fundamental para o desenvolvimento da teoria quântica, que não vem explicitamente descrito nos postulados, é o conceito de fase, que pode ser subdividido com relação às noções de fase global e fase local.

2.4.1 Fase global

A fase global se apresenta como um número complexo geral multiplicando todo um estado da seguinte forma: $e^{i\theta}|\psi\rangle$. Se for executada uma medida representada pelos operadores $\hat{M}_m$, então a probabilidade de se obter um resultado m será:

$$P(m) = \langle\psi|e^{-i\theta}\hat{M}_m^\dagger\hat{M}_me^{i\theta}|\psi\rangle. \quad (2.23)$$

Observe que o produto dos coeficientes das exponenciais se cancelam, tendo como resultado o valor 1, ficando então:

$$P(m) = \langle\psi|\hat{M}_m^\dagger\hat{M}_m|\psi\rangle. \quad (2.24)$$

Vemos que esta fase não fez diferença alguma no resultado final, ou seja, este fator é irrelevante na medida.

2.4.2 Fase local

A fase relativa não multiplica todo o estado, mas ele aparece da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle). \quad (2.25)$$

Esta fase altera o estado geral do sistema, veja que um dos kets está mudando o estado $|\psi\rangle$, alterando a probabilidade nesse estado, de acordo com a fase θ . Isto pode ser visto como um controle que o experimental tem em mãos, ou seja, com uma fase relativa pode-se manipular o experimento de forma a ter resultados diferentes do que teria caso ela não existisse.

Vejam alguns exemplos para a fase:

Para um ângulo $\theta = 0$ a fase permanece inalterada.

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle).$$

Mas para ângulos diferentes de 0, a fase muda. Por exemplo, para $\theta = \pi/2$, temos

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i|1\rangle).$$

Para $\theta = \pi$, temos

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle).$$

Vamos tomar como exemplo, uma medida do operador

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|).$$

Temos que as médias das medidas de $\hat{S}_x$ para os estados $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ e $|\psi_3\rangle$ serão:

$$\langle \hat{S}_x \rangle_1 = \langle \psi_1 | \hat{S}_x | \psi_1 \rangle = \frac{\hbar}{2}, \quad (2.26)$$

$$\langle \hat{S}_x \rangle_2 = \langle \psi_2 | \hat{S}_x | \psi_2 \rangle = 0, \quad (2.27)$$

e

$$\langle \hat{S}_x \rangle_3 = \langle \psi_3 | \hat{S}_x | \psi_3 \rangle = -\frac{\hbar}{2}. \quad (2.28)$$

Vemos que os resultados das médias são diferentes. Isso se deve à fase relativa que

está presente nos estados $|\psi_2\rangle$ e $|\psi_3\rangle$ em relação ao estado $|\psi_1\rangle$. Portanto, isso interfere nos resultados experimentais.

Capítulo 3

O Formalismo de Vetor de Dois Estados

3.1 Introdução

O formalismo de vetor de dois estados foi desenvolvido primeiro por Satosi Watanabe, em 1955, que nomeou de Formalismo Inferencial de Vetor de Estado (DIVF) [7]. Posteriormente, seu trabalho foi redescoberto pelos físicos Yakir Aharonov, Peter Bergmann e Joel Lebowitz, em 1964, que renomearam o trabalho de Formalismo de Vetor de Dois Estados (TSVF) [8].

O formalismo de vetor de dois estados traz um tratamento de simetria temporal para medidas quânticas. Este formalismo ajuda a entender algumas peculiaridades da teoria, como por exemplo a medida fraca, que é uma particularidade da medida quântica padrão, onde, a interação entre o sistema quântico e o aparato de medida é reduzida, de modo que o primeiro é fracamente perturbado pelo segundo. Este formalismo também ajuda a entender experimentos que levam em consideração sistemas pré-selecionados e pós-selecionados. Para entender um pouco mais sobre o TSVF, faremos uso, neste capítulo, do conceito de probabilidade condicional, por ser um conceito o qual o leitor deve estar mais familiarizado.

3.2 Sistemas Quânticos

3.2.1 O estado quântico

Na mecânica quântica padrão, um estado quântico tem sua descrição completa dada através de um vetor estado $|\psi\rangle$, que pode ter sido definido a partir de uma medida prévia ocorrida em um tempo t .

O status de um estado quântico é controverso: existem diversos trabalhos sobre realidade de um estado quântico e várias interpretações desta "realidade", [9–12].

Levando em consideração o estado quântico, este tem uma assimetria temporal, que é definida pelos resultados da medida no passado. O fato é que se soubermos a posição e o momento de uma partícula clássica em um dado instante, e como o ambiente interage com ela através das forças atuantes (ou do potencial), obtemos univocamente a equação do movimento. A equação do movimento nos dá uma informação completa sobre a história do sistema, incluindo passado e futuro.

Entretanto, na mecânica quântica não ocorre isto. Os resultados das medidas no futuro são em parte limitadas pelos resultados de medidas passadas. Com isto, um estado quântico é verdadeiramente assimétrico do ponto de vista temporal. Sendo assim, a assimetria do estado quântico é algo que reproduz a assimetria temporal na mecânica quântica, ou pode ser removida por uma reformulação da mecânica quântica? Exploraremos este questionamento a seguir.

3.2.2 O vetor de dois estados

A partir do trabalho de formalismo de vetor de dois estados (TSVF, Two-State Vector Formalism) de Aharonov, Bergmann e Lebowitz (ABL) [8], podemos estudar a assimetria temporal na mecânica quântica. Neste sentido, esta teoria reformula o modo com que pensamos em medidas quânticas, [13–15].

Temos que um sistema quântico é descrito completamente a partir de um vetor de dois estados quânticos em um tempo t , $\langle\phi|$ e $|\psi\rangle$, de forma que o estado $\langle\phi|$ descreve o estado do sistema estabelecido por uma medida ocorrida em um tempo posterior t_2 . Se as medidas após o tempo t ainda não existem, então o sistema é descrito apenas pelo estado $|\psi\rangle$ que é o estado estabelecido por medidas realizadas no tempo t_1 anterior a t , e assim, o sistema é dito ser pré-selecionado. No caso das medidas realizadas em um tempo futuro, este estado quântico no tempo t está evoluindo para "trás", e é dito ser pós-selecionado, $\langle\phi|$, como será visto adiante.

Podemos ver que o formalismo de vetor de dois estados e o formalismo de apenas um estado quântico descrevem a mesma teoria com as mesmas previsões, entretanto, a abordagem padrão (formalismo de apenas um estado quântico) é assimétrica no tempo, e por hipótese, os resultados das medidas influenciam o sistema apenas no que concerne o seu passado, e portanto $|\psi\rangle$ contém todas as informações do sistema fornecidas com base no seu passado. Mas, em TSVF, existe a simetria temporal, onde não há preferência entre as medidas no passado ou no futuro.

3.2.3 O estado quântico em evolução

A fim de ter um sistema cuja descrição completa no instante t é um único estado quântico $|\psi\rangle$, deve existir uma medição anterior ao tempo t e nenhuma medição no sistema depois do tempo t . O sistema no estado $|\psi\rangle$ é obtido quando uma medida de um observável

A no tempo t_1 é realizada, obtendo um resultado específico $A = a$ tal que o sistema criado $|a\rangle$ sofre uma evolução unitária entre t_1 e t , governado pelo hamiltoniano $\hat{H}$, através da seguinte fórmula:

$$\hat{U}(t_1, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^t \hat{H} dt}, \quad (3.1)$$

evoluindo para o estado $|\psi\rangle$.

Ao contrário da mecânica clássica, onde conhecendo os estados (posição e momento) de uma partícula podemos conhecer sobre seu passado e futuro, na mecânica quântica um sistema é descrito evoluindo no tempo, de forma que o estado quântico final tem a seguinte expressão:

$$|\psi\rangle = \hat{U}(t_1, t) |a\rangle. \quad (3.2)$$

3.2.4 O vetor de dois estados novamente

Para ter uma descrição completa em t , o vetor $\langle\phi||\psi\rangle$ é descrito a partir de medidas feitas antes e depois de t . Realizando uma medida em t_2 , com $t_2 > t$, além da medida em A , obtendo um resultado similar, $B = b$, onde agora, haverá uma evolução temporal inversa, ou seja, uma evolução no tempo para trás, de forma que a evolução do operador temporal de t_2 para t leve ao estado do sistema em t :

$$\langle\phi| = \langle b|\hat{U}^\dagger(t, t_2), \quad (3.3)$$

onde o vetor $\langle\phi||\psi\rangle$ de dois estados é agora a descrição completa do sistema no instante t .

3.3 Probabilidade Condicional

A Teoria de Probabilidade estuda eventos correlacionados e não correlacionados, onde eventos não correlacionados são eventos que não dependem uns dos outros para ocorrer, como, por exemplo, jogar duas moedas. Este evento é não correlacionado, ou seja, o evento posterior não é afetado pelo anterior, para ocorrer.

O conceito de probabilidade condicional facilita o entendimento de eventos correlacionados, [16]. Estes eventos, ao contrário do exemplo anterior das moedas, são vinculados por condições que levam algo a ocorrer ou não, como, por exemplo, chover nos influencia a ficar em casa. Estes eventos estão correlacionados, mas não é necessário que chova para ficarmos em casa. Vamos considerar um evento A com os possíveis resultados $\{a_i\}$. Este evento tem uma probabilidade $P(a_i)$ ligado a ele. Dessa forma, temos as seguintes condições para as probabilidades dos eventos:

$$0 \leq P(a_i) \leq 1 \quad (3.4)$$

e

$$\sum_{i=1}^N P(a_i) = 1. \quad (3.5)$$

Se existem dois eventos que não estão correlacionados, A e B , com possibilidades $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ e probabilidades $P(a_i)$ e $P(b_j)$, respectivamente, então as probabilidades serão independentes. O evento B tem condições análogas, ou seja, semelhantes a (3.4) e (3.5). Assim temos que a probabilidade que os dois eventos ocorram é:

$$P(a_i, b_j) = P(a_i) \times P(b_j), \quad (3.6)$$

com $P(a_i, b_j)$ sendo a probabilidade que ocorra uma possibilidade a_i e uma possibilidade b_j dentro dos eventos A e B , respectivamente. Voltando ao exemplo das moedas, ao jogar as duas moedas, a probabilidade de sair cara em uma moeda e coroa na outra é $P(\text{cara}, \text{coroa}) = P(\text{cara}) \times P(\text{coroa}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Porém, se houver agora alguma correlação entre os eventos, pode-se usar as expressões a seguir:

$$P(a_i) = \sum_{j=1}^N P(a_i, b_j) \quad (3.7)$$

e

$$P(b_j) = \sum_{i=1}^N P(a_i, b_j), \quad (3.8)$$

onde estas expressões valem para eventos correlacionados e eventos não correlacionados, ou seja, é uma regra mais geral. O significado destas relações é que a probabilidade $P(a_i)$ de um certo evento a_i é a soma sobre todas as probabilidades de ocorrer qualquer $B = b_j$ junto com a probabilidade de ocorrer o evento $A = a_i$, em conjunto.

Temos ainda que a probabilidade de que ocorra um evento $A = a_i$, condicionado por um evento $B = b_j$ é

$$P(A = a_i | B = b_j) = \frac{P(a_i, b_j)}{P(b_j)}, \quad (3.9)$$

com $P(b_j) \neq 0$, nomeada de probabilidade condicional, que é a probabilidade que ocorra um evento a_i para A dado que ocorre o evento b_j para B . De forma análoga, a probabilidade condicional de que ocorra um evento b_j para B dado que já ocorreu a_i para A é

$$P(B = b_j | A = a_i) = \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i)}, \quad (3.10)$$

com $P(a_i) \neq 0$.

Igualando as equações (3.9) e (3.10), temos a seguinte relação:

$$P(A = a_i | B = b_j) = P(b_j | a_i) \frac{P(a_i)}{P(b_j)}, \quad (3.11)$$

que é o Teorema de Bayes. Substituindo as equações (3.8) e (3.9) em (3.11), chegamos ao seguinte resultado:

$$P(A = a_i | B = b_j) = \frac{P(b_j | a_i) P(a_i)}{\sum_{k=1}^N P(b_j | a_k) P(a_k)}. \quad (3.12)$$

3.4 Simetria Temporal na Mecânica Quântica

A mecânica quântica descreve a evolução temporal de um estado quântico através da seguinte forma: Um estado $|\psi\rangle$ vai para outro estado $|\psi'\rangle$ a partir de uma certa evolução temporal, que é regida pela seguinte equação:

$$|\psi'\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^t \hat{H} dt} |\psi\rangle, \quad (3.13)$$

com a evolução ocorrendo de t_1 até t e o hamiltoniano $\hat{H}$ gerando a evolução.

Na figura (4.2), vemos a representação de um estado evoluindo para outro estado, que é um evento, conforme rege a equação (3.13).

Se fizermos uma medida do operador $\hat{A}$ no sistema $|\psi'\rangle$, obteremos um novo estado $|a_j\rangle$, que é um dos seus autovetores. Expandindo $|\psi'\rangle$ em termos dos estados $|a_j\rangle$, temos:

$$|\psi'\rangle = \sum_{j=1}^N |a_j\rangle \langle a_j | \psi' \rangle. \quad (3.14)$$

Com isto, pela mecânica quântica padrão, usando a regra de Born, a probabilidade de obter um estado $|a_j\rangle$ é:

$$P(A = a_j) = |\langle a_j | \psi' \rangle|^2, \quad (3.15)$$

que a partir da equação (3.13) nos dá

$$P(A = a_j) = |\langle a_j | \hat{U}(t_1, t) | \psi \rangle|^2, \quad (3.16)$$

de forma que o operador evolução temporal é $\hat{U}(t_1, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^t \hat{H} dt}$. Se impusermos condições de contorno, no passado e no futuro, ou seja, se pré-selecionarmos e pós-selecionarmos o sistema, teremos a evolução temporal como mostra a figura (3.1).

Cabe agora fazer uma pergunta: o que acontece no tempo t ? Na pós-seleção, a probabilidade de obter um estado $|\phi\rangle$ dado que no tempo t havia um estado $|a_j\rangle$ é:

$$P(|\phi\rangle | A = a_j) = |\langle \phi | \hat{U}(t, t_2) | a_j \rangle|^2. \quad (3.17)$$

Observe que o estado evolui de t para t_2 , levando o estado $|a_j\rangle$ ao estado pós-selecionado $|\phi\rangle$ através da composição da evolução temporal seguido da medida projetiva.

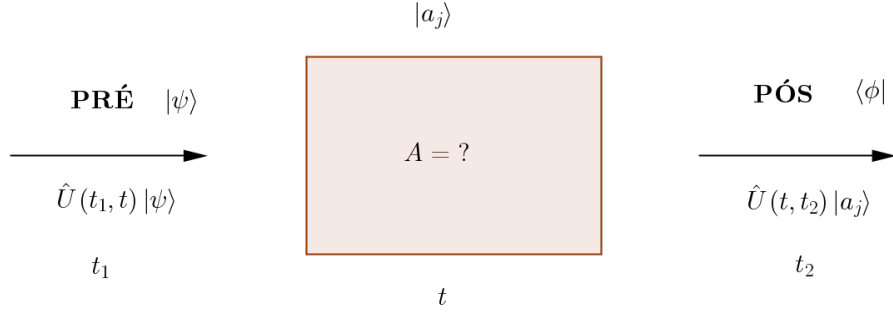


Figura 3.1: Descrição da evolução temporal de sistema quântico pré e pós-selecionado.

Usando as equações (3.16) e (3.17), e substituindo no teorema de Bayes, chegamos à seguinte probabilidade:

$$P(A = a_j | \psi; \phi) = \frac{|\langle \phi | \hat{U}(t, t_2) | a_j \rangle|^2 |\langle a_j | \hat{U}(t_1, t) | \psi \rangle|^2}{\sum_{k=1}^N |\langle \phi | \hat{U}(t, t_2) | a_k \rangle|^2 |\langle a_k | \hat{U}(t_1, t) | \psi \rangle|^2}, \quad (3.18)$$

sendo esta a probabilidade de se obter o estado $|a_j\rangle$ no tempo t , dado que o estado foi pré-selecionado em $|\psi\rangle$ em t_1 e pós-selecionado em $|\phi\rangle$ em t_2 .

Uma propriedade do operador evolução temporal é:

$$\begin{aligned} \hat{U}(t_2, t) &= e^{-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t_2} \hat{H} dt} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t_2} \hat{H} dt} \\ &= \left[e^{-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t_2} \hat{H} dt} \right]^\dagger \\ &= \hat{U}^\dagger(t, t_2), \end{aligned} \quad (3.19)$$

de modo que:

$$\langle \phi | \hat{U}(t, t_2) | a_j \rangle = \langle a_j | \hat{U}(t_2, t) | \phi \rangle^*. \quad (3.20)$$

Agora, com o módulo ao quadrado da equação (3.20), e substituindo o resultado na equação (3.18), ficamos com a seguinte probabilidade:

$$P(A = a_j | \psi; \phi) = \frac{|\langle a_j | \hat{U}(t_2, t) | \phi \rangle|^2 |\langle a_j | \hat{U}(t_1, t) | \psi \rangle|^2}{\sum_{k=1}^N |\langle a_k | \hat{U}(t_2, t) | \phi \rangle|^2 |\langle a_k | \hat{U}(t_1, t) | \psi \rangle|^2}. \quad (3.21)$$

Observando este resultado, vemos que os primeiros fatores do numerador e do denominador podem ser interpretados como que o sistema evoluiu do futuro, no tempo t_2 , para o passado, no tempo t , do estado $|\phi\rangle$ para um dos autokets de A . Esta é a probabilidade de se obter um autovalor a_j dado que havia um estado $|\psi\rangle$ pré-selecionado, e que foi pós-selecionado um estado $|\phi\rangle$. Com esta abordagem, cria-se a simetria temporal na mecânica quântica, onde esta simetria se refere à existência de uma medida em um sistema que bus-

cou informações no passado (pré-seleção) e no futuro (pós-seleção). Com isto, no tempo t , temos uma informação vindo do passado para o presente, e uma informação vinda do futuro para o presente, sendo esta a simetria temporal abordada na referência [8]

Esta probabilidade dá origem à formulação com simetria temporal da mecânica quântica. O estado do sistema em um certo momento é descrito por duas funções de onda, $\langle\phi||\psi\rangle$. Uma evolui do passado ($|\psi\rangle$), e a outra evolui do futuro para o presente ($|\phi\rangle$).

3.4.1 Exemplo

Vamos analisar, inicialmente, um caso da mecânica quântica usando, como base para isto, o experimento do tipo Stern-Gerlach. Por exemplo, poderíamos nos questionar qual seria a probabilidade de obter um estado $|\beta+\rangle$, onde $|\beta+\rangle$ representa um estado up de uma partícula de spin $1/2$ orientado em uma direção β qualquer, dado que entrou um estado $|-\rangle$. Ou seja, buscamos $P(|\beta+\rangle | |-\rangle) = |\langle S_\beta + | S_z - \rangle|^2$, onde o estado

$$|S_\beta+\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)|+\rangle + e^{i\alpha}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)|-\rangle, \quad (3.22)$$

e o estado

$$|S_\beta-\rangle = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)|+\rangle - e^{i\alpha}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)|-\rangle, \quad (3.23)$$

de forma que assumiremos por simplicidade $\alpha = 0$, ou seja, o aparato de medida possui a direção do campo confinada ao plano (x, z) . Assim, obtemos:

$$P(|\beta+\rangle | |-\rangle) = \left| \left[\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\langle + | + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\langle - | \right] | - \rangle \right|^2. \quad (3.24)$$

Realizando os cálculos, encontramos que:

$$P(|\beta+\rangle | |-\rangle) = \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right). \quad (3.25)$$

Isto nos mostra que a probabilidade máxima de obter um estado de saída $|\beta+\rangle$ ocorre para $\beta = \pi$, ou seja, este resultado é obtido quando o segundo ímã está a 90° em relação ao primeiro ímã. Vamos agora obter a probabilidade condicional para um evento pré-selecionado e pós-selecionado.

Tomemos o seguinte exemplo: Um feixe de partículas é pré-selecionado no eixo z por um campo magnético, sendo o estado selecionado o $|z-\rangle$ onde este feixe de partículas passa por um segundo campo magnético que pode girar no plano (x, z) . Em seguida, o feixe de partículas passa por um terceiro campo magnético orientado na direção x , pós-selecionando um estado de saída $|x+\rangle$.

Comparando e analisando a equação (3.21), vemos que

$$P(A = a_j | \psi; \phi) =$$

$$\frac{|\langle a_1 | \hat{U}(t_2, t) | \phi \rangle|^2 |\langle a_1 | \hat{U}(t_1, t) | \psi \rangle|^2}{|\langle a_1 | \hat{U}(t_2, t) | \phi \rangle|^2 |\langle a_1 | \hat{U}(t_1, t) | \psi \rangle|^2 + |\langle a_2 | \hat{U}(t_2, t) | \phi \rangle|^2 |\langle a_2 | \hat{U}(t_1, t) | \psi \rangle|^2}. \quad (3.26)$$

Para a probabilidade que leva em consideração a simetria temporal temos que a soma em k deve ser feita em $|\beta+\rangle$ e $|\beta-\rangle$ de modo que para $k = 1$ temos $|a_{k=1}\rangle = |\beta+\rangle$ e para $k = 2$ temos $|a_{k=2}\rangle = |\beta-\rangle$, além das informações anteriores. Lembrando que como não há mecanismos nem antes e nem depois do medidor em t que provoque uma evolução temporal no estado do sistema, então os operadores evolução temporal serão $\hat{U}(t_1, t) = \hat{U}(t_2, t) = 1$, portanto, usando os seguintes resultados,

$$|\langle a_{j=k=1} | \hat{U}(t_2, t) | \phi \rangle|^2 = |\langle a_1 | \phi \rangle|^2 = |\langle \beta + | x+ \rangle|^2, \quad (3.27)$$

$$|\langle a_{j=k=1} | \hat{U}(t_1, t) | \psi \rangle|^2 = |\langle a_1 | \psi \rangle|^2 = |\langle \beta + | - \rangle|^2, \quad (3.28)$$

$$|\langle a_{k=2} | \hat{U}(t_2, t) | \phi \rangle|^2 = |\langle a_2 | \phi \rangle|^2 = |\langle \beta - | x+ \rangle|^2 \quad (3.29)$$

e

$$|\langle a_{k=2} | \hat{U}(t_1, t) | \psi \rangle|^2 = |\langle a_2 | \psi \rangle|^2 = |\langle \beta - | - \rangle|^2. \quad (3.30)$$

temos que as probabilidades respectivas abaixo serão:

$$|\langle a_1 | \hat{U}(t_2, t) | \phi \rangle|^2 = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right)^2, \quad (3.31)$$

$$|\langle a_1 | \hat{U}(t_1, t) | \psi \rangle|^2 = \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right), \quad (3.32)$$

$$|\langle a_2 | \hat{U}(t_2, t) | \phi \rangle|^2 = \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right)^2, \quad (3.33)$$

$$|\langle a_2 | \hat{U}(t_1, t) | \psi \rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right). \quad (3.34)$$

Substituindo estes resultados na equação (3.26), temos que a probabilidade de que seja medido no aparato intermediário o ket $|\beta+\rangle$ dado que havia sido pré-selecionado o estado $|z-\rangle$, e que foi pós-selecionado o estado $|x+\rangle$ é dado por:

$$P(|\beta+\rangle | |z-\rangle; |x+\rangle) =$$

$$\frac{\left[\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^2 \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\left[\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^2 \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \left[\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^2 \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}. \quad (3.35)$$

É fácil ver na figura (3.2) que a probabilidade é máxima quando o ângulo é $\pi/2$, além de que quando o ângulo é π , caso em que há simetria temporal, em que a probabilidade máxima ocorre somente no caso em que $\beta = \pi/2$. Para enxergar a grande distinção entre essas duas abordagens, podemos pensar nas partículas que foram apenas pré-selecionadas como sendo um sistema pré e pós-selecionado onde a informação da pós-seleção foi jogada fora. Dessa forma, o sistema pós-selecionado representa um ensemble mais refinado do que aquele que foi apenas pré-selecionado. Isso claramente causou repercussão nas probabilidades dos resultados da medida intermediária.

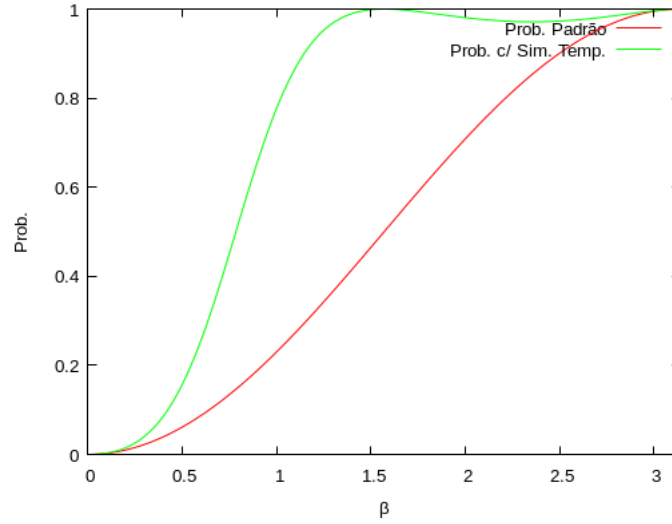


Figura 3.2: Em vermelho: curva da probabilidade na mecânica quântica padrão. Em Verde: curva da probabilidade na mecânica quântica com simetria temporal.

Capítulo 4

Medida Fraca

A medida fraca é um tipo especial de medida em mecânica quântica, que leva em consideração o enfraquecimento da interação entre o sistema medido com o medidor em comparação com a medida convencional. Esta medida foi introduzida pelos físicos Yakir Aharonov, Peter Bergmann e Joel Lebowitz, em 1964, como vimos no capítulo anterior, que inicialmente apresentaram o trabalho de Formalismo de Vetor de Dois Estados (TSVF) [8], e em seguida a medida fraca. Podemos tomar como exemplo o experimento de Stern-Gerlach, em que um feixe de átomos de prata é disparado em uma certa direção passando por um ímã que tem um campo magnético não homogêneo. Ao passar pelo ímã, o feixe se separa em dois feixes com caminhos bem definidos e bem separados um do outro. Na medida fraca, por outro lado, esta interação do feixe com o ímã é enfraquecida, sendo que ele não se separa totalmente, de modo que a interação entre o sistema e o medidor é consideravelmente enfraquecida.

A medida fraca foi usada para estudar, por exemplo, a interação de duas partículas, sendo uma a antipartícula da outra. Nesse estudo, foi provado que é possível que tais partículas podem interagir uma com a outra sem que elas sejam aniquiladas no processo. Este é o chamado paradoxo de Hardy [11, 17, 18] em 1992.

Na mecânica quântica, em uma medida padrão, também chamada de medida forte, ocorre que o ato de medir perturba o sistema de tal forma que colapsa o sistema em um dos estados. Ou seja, o que ocorre é que quando é realizada a medida do observável, esta colapsa a função de onda, e um dos autoestados se manifesta e o sistema adquire as propriedades deste autoestado, como simboliza a Figura (4.1). Na medida fraca, entretanto, fazemos uma troca: abrimos mão da precisão da medida em favor de uma redução na perturbação induzida na medida do sistema.

Voltemos ao exemplo do experimento de Stern-Gerlach. A interação do feixe de partículas com o campo magnético é reduzida de tal forma que o borrão que aparece na tela de detecção é uma superposição dos estados que seriam separados, caso a interação fosse forte, como será visto posteriormente.

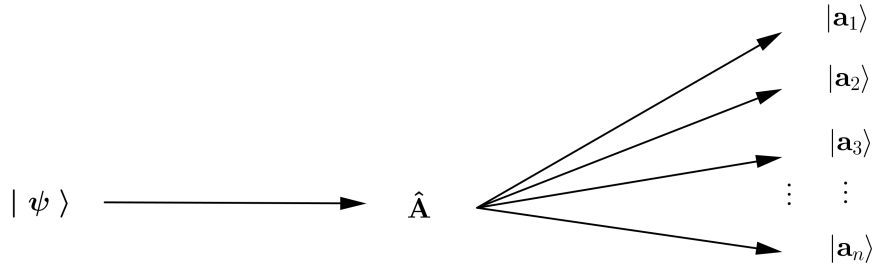


Figura 4.1: Descrição do colapso do estado $|\psi\rangle$ em um dos autoestados do sistema quando é feita a medida.

4.1 O Experimento de Stern-Gerlach

Para maior familiaridade do leitor com o estudo aqui proposto, apresentaremos com mais detalhes o experimento de Stern-Gerlach. [19,20]. Este trabalho revolucionou a física, quando comprovou a quantização do momento de dipolo magnético do elétron proposto por Bohr, em seu modelo "semi-clássico" para o átomo.

O experimento é chamado de experimento de Stern-Gerlach, em homenagem aos dois físicos que o realizaram. O experimento consiste de um feixe de átomos de prata que é lançado de um forno passando por um orifício que, em seguida passa por um colimador, e depois atravessa um campo magnético, que é inhomogêneo, e então chega até uma tela de detecção, como mostra a Figura (4.2). A aresta presente no ímã produz a inhomogeneidade do campo magnético, sem a qual, a detecção da quantização não seria possível. Na época, pela física clássica, o esperado era que o feixe se abrisse em uma faixa contínua, manifestando a continuidade entre os valores $-\mu_x$ e μ_x , onde $\vec{\mu}$ é momento de dipolo magnético, entretanto, não foi o que ocorreu.

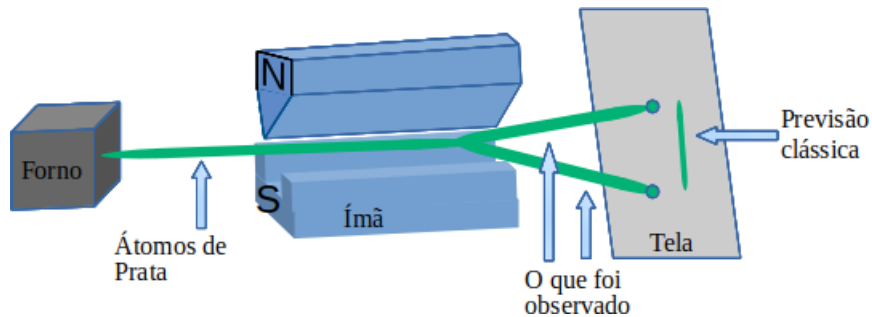


Figura 4.2: Experimento de Stern-Gerlach. Um feixe de átomos de prata é disparado na direção de um campo magnético não homogêneo.

4.1.1 A força magnética que age sobre o átomo de prata.

Poderíamos pensar na força ($\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$) que age sobre o átomo de prata como sendo a força que atua sobre uma carga, entretanto, a carga total do átomo de prata é nula, (veja que o átomo de prata possui 47 prótons em seu núcleo e 47 elétrons em seus orbitais) e portanto, esta força é nula, [21, 22]. O tipo de força que podemos buscar é a de interação entre o campo magnético e os dipolos magnéticos. Podemos encontrar uma força deste tipo a partir da energia potencial U de quando um dipolo magnético está na presença de um campo magnético: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, onde $\vec{B}$ é o campo magnético. Considerando que a direção do campo está disposta na direção x , podemos considerar apenas a direção x do momento de dipolo, μ_x , assim

$$U = -\mu_x B. \quad (4.1)$$

Lembremos que a força que um campo magnético exerce sobre uma partícula é dada por $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, e, neste caso, $F_x = -\frac{dU}{dx}$. Sendo μ_x é constante, temos que a força será

$$F_x = \mu_x \frac{dB}{dx}. \quad (4.2)$$

Observe que a força é determinada pelo gradiente do campo, e não pelo próprio campo magnético, fazendo com que o átomo se direcione para cima ou para baixo, e não para os lados (no caso de uma força que age sobre uma carga em movimento). Se o campo magnético for nulo, ou homogêneo, temos que a força é nula, e portanto os átomos de prata não sofrem deflexão quando passam pelo ímã.

O experimento de Stern-Gerlach, não mostrou os resultados previstos pela mecânica clássica. Ao invés disso, o experimento mostrou dois borrões na tela de detecção, bem separados um do outro. Isto foi o que surpreendeu a comunidade científica. Este experimento mostrou que o momento de dipolo magnético é discretizado, ou seja, ele só "aparece" com valores bem definidos.

Sabemos que o átomo de prata contém 47 elétrons [21], em que cada um tem o seu momento magnético angular e o seu momento magnético de spin. Podemos considerar, que desses 47 elétrons, 46 formam uma nuvem eletrônica, onde o seu momento angular total é nulo, sobrando apenas o momento magnético do 47º elétron. Assim, sendo o momento de dipolo magnético proporcional ao momento angular, medi-lo neste caso seria uma forma de acessar a projeção do momento angular intrínseco desse elétron, ao longo da direção do campo, o que hoje entendemos como a projeção do *spin* do elétron.

4.2 Como Fazer uma Medida Fraca?

Bem, o leitor já deve estar familiarizado com a medida quântica padrão, uma medida que está bem apresentada em diversos livros textos de mecânica quântica. Entretanto, é bom ter o conhecimento de como é feita a medida fraca, onde esta é uma variação da medida quântica padrão. Aqui, será apresentado, o esquema de uma medida fraca também com base no experimento de Stern-Gerlach.

Já sabemos que a medida "forte" destrói o estado original, que em geral é uma combinação linear de spin up e down. No entanto, para obter a medida fraca, um experimental deveria ter que enfraquecer a inhomogeneidade do campo magnético até que o feixe seja apenas levemente desviado. O Stern-Gerlach é simplesmente um medidor de spin, e a medida fraca foi por muito tempo considerada não como uma medida. Entretanto, os físicos Lev Vaidman, Yakir Aharonov e David Albert [23, 24], em 1988, criaram uma forma de obter informações a partir de uma medida muito fraca. O segredo é que depois da medida fraca interagir com o feixe, o experimental deve passá-lo por um outro ímã ("forte") para que seja realizada uma pós-seleção, [25].

Esta medida é feita de forma que três ímãs são dispostos em sequência. O primeiro ímã pré-seleciona o estado, ou seja, o feixe de átomos ao passar pelo ímã é defletido em spin para cima e para baixo (na direção z , por exemplo) e logo em seguida é descartado um desses dois feixes, passando apenas um deles, digamos o feixe com spin para cima. O segundo ímã é o que deflete fracamente o feixe, e a direção deste ímã pode ser a direção x . O terceiro, e último ímã, divide os átomos em dois feixes, um com spin para cima e o outro para baixo. Sabendo que os átomos inicialmente tinham sido pré-selecionados em spin para cima, na direção z , então o terceiro ímã enviará a maioria dos átomos do feixe para cima, o que não revelará nada de novo. Alguns desses átomos serão enviados para baixo, o que nos dará mais informações. Isso se dá porque o segundo ímã não separa completamente o feixe de átomos. Assim, o ímã horizontal (o segundo ímã) produz uma medida não invasiva sobre o estado quântico dos átomos, embora o último ímã o colapse.

O que vemos na Figura (4.3) é um esboço do que é a medida fraca. Temos um primeiro ímã que é a pré-seleção de um feixe de átomos de prata, onde este passa por um campo magnético não homogêneo, sendo defletido em dois feixes, um com spin para cima e o outro com spin para baixo, esta é uma medida padrão. Observe que este ímã está orientado na direção z . O segundo ímã tem seu campo magnético quase homogêneo, mas heterogêneo o suficiente para bifurcar levemente o estado pré-selecionado. Esta deflexão ocorre na direção x , pois se fosse feita na mesma direção do ímã anterior nada de novo seria observado. Poderia ser na direção y também, mas por conveniência, utilizamos a direção x . O terceiro ímã está disposto em uma orientação que é quase a orientação z , pois caso fosse igualmente a orientação z nada obteríamos, o que será melhor explicado posteriormente. Neste caso, bloqueamos o feixe com estado de spin para cima e analisamos

os dados do feixe com spin para baixo; esta é uma pós-seleção.

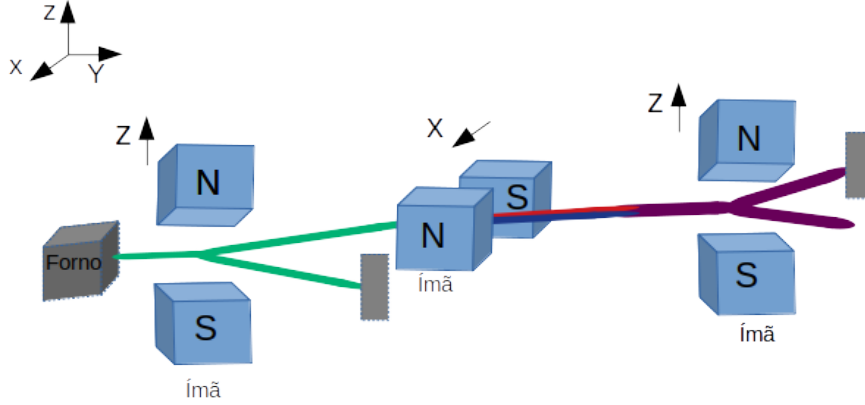


Figura 4.3: Sequência de experimentos de Stern-Gerlach mostrando como é feita a medida fraca com este tipo de aparato.

4.3 O valor Fraco

Antes de falarmos diretamente de medida fraca, é importante apresentarmos inicialmente o processo geral de medida de acordo com o esquema de medida de von Neumann para descrever o modo com que o sistema medido interage com o aparato de medida, de acordo com o aparato mostrado na Figura (4.2). Neste caso, o formalismo exige que levemos em conta os espaços de Hilbert do sistema e do medidor de modo que ambos evoluam de acordo com o seguinte hamiltoniano [26, 27]:

$$\mathcal{H} = g\hat{A} \otimes \hat{P}. \quad (4.3)$$

Este hamiltoniano é um pouco diferente do que estamos acostumados a ver em livros de mecânica quântica. Por isso, vamos entender melhor o que significa cada parte dele.

- A constante g .

g é simplesmente uma constante de acoplamento, a qual é real, deixando $\mathcal{H}$ hermitiano. Ela vai acoplar os dois operadores $\hat{A}$ e $\hat{P}$.

- O operador $\hat{A}$.

Este operador representa o observável do sistema. No exemplo do Stern-Gerlach, ele seria o observável S_z , caso a medida seja feita na direção z , por exemplo.

- O operador $\hat{P}$.

$\hat{P}$ é um operador de momento vinculado ao espaço do medidor. Geralmente, o que chamamos de medidor é um grau de liberdade auxiliar da própria partícula que é utilizado para indicar o resultado do observável principal que estamos medindo. No exemplo do Stern-Gerlach, caso o resultado da medida for o autovalor $\frac{\hbar}{2}$, para um certo grupo de partículas, o medidor apontaria para este autovalor, através do momento transversal positivo adquirido por essas partículas. Veja que este modelo contém duas partes: uma é o sistema medido S , e a outra é um sistema auxiliar M , que neste caso específico são representados pela projeção de spin na direção z e pelo momento adquirido pelas partículas nesta mesma direção, respectivamente.. Veremos a seguir que o processo de acoplamento desses observáveis com essas particularidades, de fato ocorrem por conta da ação conjunta do hamiltoniano da Eq. (4.3).

Vamos assumir que o estado do medidor, que é a função de onda transversal das partículas, é inicialmente uma gaussiana centrada na origem. Este estado tem a seguinte forma:

$$\langle x|\phi\rangle = \phi(x) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right), \quad (4.4)$$

onde σ é a largura de $|\phi(x)|^2$, o desvio padrão.

Vamos supor que o estado de spin inicial das partículas é conhecido e que chamamos de $|I\rangle$. Este estado inicial seria uma pré-seleção, que poderia ser obtida através de um experimento de Stern-Gerlach prévio, com o campo orientado em uma direção aleatória, em que utilizaríamos apenas um dos feixes bifurcados para seguirmos para o próximo estágio do experimento. Note que neste caso é pré-selecionado um estado puro.

Ao prepararmos o sistema no estado $|I\rangle$, podemos escrevê-lo como uma superposição dos autoestados do observável $\hat{A}$,

$$|I\rangle = \sum_n \langle a_n|I\rangle |a_n\rangle. \quad (4.5)$$

Feitas essas suposições, vejamos agora como uma evolução temporal, que age de acordo com o hamiltoniano da Eq. (4.3), evolui o conjunto sistema-medidor que se inicia no estado separável $|\psi(0)\rangle = |I\rangle \otimes |\phi\rangle$,

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right) \sum_n \langle a_n|I\rangle |a_n\rangle \otimes |\phi\rangle \\ &= \sum_n \exp\left(-\frac{ig\hat{A}\hat{P}t}{\hbar}\right) \langle a_n|I\rangle |a_n\rangle \otimes |\phi\rangle \\ &= \sum_n \exp\left(-\frac{igta_n\hat{P}}{\hbar}\right) \langle a_n|I\rangle |a_n\rangle \otimes |\phi\rangle \\ &= \sum_n \langle a_n|I\rangle |a_n\rangle \otimes |\phi(gta_n)\rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Como vemos, o resultado da interação é fornecer um estado emaranhado entre o sis-

tema e o medidor, de tal forma que as posições finais do medidor estarão vinculadas diretamente com os possíveis autoestados do sistema medido, $|a_n\rangle$. Calculando o valor médio da posição x , temos

$$\begin{aligned}\langle\psi(t)|\hat{X}|\psi(t)\rangle &= |\langle a_n|I\rangle|^2 \langle\phi(gta_n)|\hat{X}|\phi(gta_n)\rangle \\ &= |\langle a_n|I\rangle|^2 gta_n \\ &= gt\langle I|\hat{A}|I\rangle.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Em um processo análogo, encontramos $\langle\hat{P}\rangle = 0$. Vemos, então, que a interação de von Neumann altera a posição do medidor em um valor médio proporcional ao valor esperado do observável do sistema medido, $\langle\hat{A}\rangle$. Observe que a constante de proporcionalidade é gt . A ideia é que a posição do medidor, de fato, é alterada de acordo com o estado do sistema medido, ou seja, com este acoplamento o medidor acaba cumprindo bem o seu papel. A medida subsequente da posição do medidor colapsa seu estado quântico, revelando assim o resultado da grandeza medida. Em uma medida padrão, temos $gt \gg \sigma$, o que leva a $\langle\psi(gta_m)|\psi(tga_n)\rangle \approx \delta_{mn}$, e assim a medida da posição colapsa o sistema em um dos estados $|a_i\rangle$. Neste caso, a coerência inicialmente contida no estado inicial $|I\rangle$ do sistema é perdida por conta do emaranhamento adquirido com o medidor. Entretanto, caso o acoplamento seja muito fraco, ou seja, $gt \rightarrow 0$, temos $\langle\psi(gta_m)|\psi(tga_n)\rangle \approx 1$. Neste caso, não há emaranhamento entre o sistema medido e o medidor.

Vamos agora analisar o regime de medida fraca no modelo de von Neumann. Vamos reescrever a equação (4.6), mas agora vamos expandir a exponencial, de acordo com o aparato descrito na Figura (4.3), em que a medida fraca ocorre na direção x . Neste caso, a evolução do sistema se dá como

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= \exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)|I\rangle \otimes |\phi\rangle \\ &= \left(1 - \frac{i\hat{H}t}{\hbar} + \dots\right)|I\rangle \otimes |\phi\rangle,\end{aligned}\tag{4.8}$$

onde foram desprezados os termos de ordem maior que dois. Assim, ficamos com

$$|\psi(t)\rangle = |I\rangle|\phi\rangle - \frac{igt}{\hbar}\hat{A}|I\rangle\hat{P}|\phi\rangle \dots\tag{4.9}$$

Vamos agora pós-selecionar o estado $|\psi(t)\rangle$ no estado $|F\rangle$. Neste caso, a função de onda do medidor após a interação e a pós-seleção fica da seguinte forma:

$$\langle F|\psi(t)\rangle = \langle F|I\rangle|\phi\rangle - \frac{igt}{\hbar}\langle F|\hat{A}|I\rangle\hat{P}|\phi\rangle \dots\tag{4.10}$$

Na completa ausência da interação intermediária, temos que a probabilidade de sucesso

é $P_{sucesso} = |\langle F|I \rangle|^2$, que é a probabilidade de ocorrência da pós-seleção. Assim, a função de onda pós-selecionada do medidor tem a seguinte forma:

$$|\phi_f\rangle = \frac{\langle F|\psi(t)\rangle}{\sqrt{P_{sucesso}}}, \quad (4.11)$$

que fornece

$$|\phi_f\rangle = |\phi\rangle - \frac{igt}{\hbar} \frac{\langle F|\hat{A}|I\rangle}{\langle F|I\rangle} \hat{P}|\phi\rangle + \dots \quad (4.12)$$

O coeficiente complexo $\frac{\langle F|\hat{A}|I\rangle}{\langle F|I\rangle}$ no segundo termo da equação (4.12) é o chamado valor fraco [23, 28],

$$\langle \hat{A} \rangle_w = \frac{\langle F|\hat{A}|I\rangle}{\langle F|I\rangle}. \quad (4.13)$$

Com isso, o valor esperado da posição do medidor ao final é dado por

$$\begin{aligned} \langle \phi_f|\hat{X}|\phi_f\rangle &= \langle \phi|\hat{X}|\phi\rangle - \frac{igt}{\hbar} \langle \hat{A} \rangle_w \langle \phi|\hat{X}\hat{P}|\phi\rangle + \\ &\quad \frac{igt}{\hbar} \langle \hat{A} \rangle_w^* \langle \phi|\hat{P}\hat{X}|\phi\rangle + \left(\frac{gt}{\hbar}\right)^2 \langle \hat{A} \rangle_w^* \langle \hat{A} \rangle_w \langle \phi|\hat{P}\hat{X}\hat{P}|\phi\rangle + \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

Vemos que o primeiro termo do lado direito da equação vai a zero, pois representa uma integral do produto de uma função par por uma função ímpar, assim como o quarto termo. Desconsideraremos os termos posteriores ao quarto termo por ser de ordem superior em gt , que estamos desprezando, porém, sem desprezar o termo quadrático [29–31]. Dessa forma, encontramos que

$$\begin{aligned} \langle \hat{X} \rangle_f &= \langle \phi_f|\hat{X}|\phi_f\rangle \\ &= \frac{igt}{\hbar} \left\{ -Re\langle \hat{A} \rangle_w [\langle \hat{X}\hat{P} \rangle - \langle \hat{P}\hat{X} \rangle] - Im\langle \hat{A} \rangle_w [\langle \hat{P}\hat{X} \rangle + \langle \hat{X}\hat{P} \rangle] \right\} \\ &= gt Re\langle \hat{A} \rangle_w, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde foram usadas as seguintes relações:

$$\langle \phi|\hat{X}\hat{P}|\phi\rangle = \frac{i\hbar}{2}, \quad (4.16)$$

$$\langle \phi|\hat{P}\hat{X}|\phi\rangle = -\frac{i\hbar}{2}, \quad (4.17)$$

$$\langle \phi|\hat{X}^2|\phi\rangle = \sigma^2, \quad (4.18)$$

$$\langle \phi|\hat{P}^2|\phi\rangle = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}. \quad (4.19)$$

Para encontrarmos $\langle \hat{P} \rangle_f$, podemos seguir um caminho análogo ao que foi usado para

encontrar $\langle \hat{X} \rangle_f$. Temos,

$$\langle \hat{P} \rangle_f = \frac{\hbar g t}{2\sigma^2} \text{Im} \langle \hat{A} \rangle_w. \quad (4.20)$$

Vemos que os valores esperados de $\hat{X}$ e $\hat{P}$ mudaram, e são proporcionais ao valor fraco: $\langle \hat{A} \rangle_w = \frac{\langle F | \hat{A} | I \rangle}{\langle F | I \rangle}$. Note que ainda podemos reescrever a equação (4.12) como sendo $|\phi_f\rangle \approx \mathcal{J} \left(g t \text{Re} \langle \hat{A} \rangle_w \right) |\phi\rangle$, sendo $\mathcal{J}(\epsilon) = \hat{I} + i\epsilon \hat{P}/\hbar$ o operador translação espacial de primeira ordem. Observe que, quando o acoplamento é suficientemente fraco, temos que o medidor é mudado por um valor proporcional ao valor fraco:

$$\langle x | \phi_f \rangle = \phi_f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\sigma}} \exp \left[-\frac{(x - g t \text{Re} \langle A \rangle_w)^2}{4\sigma^2} \right], \quad (4.21)$$

ou seja, a função de onda será transladada da origem, de um valor proporcional à parte real do valor fraco.

É importante notar que se $\langle \psi_i | \psi_f \rangle \approx 0$, o valor fraco da Eq. (4.13) pode se tornar muito grande, fazendo com que o deslocamento da gaussiana da Eq. (4.21) seja bem maior que o ocorrido no estágio intermediário da medida fraca, que é da ordem de gt . Esse é o chamado *efeito de amplificação por medida fraca*, que ocorre quando os estados de pré-seleção e pós-seleção são aproximadamente ortogonais. Esse artifício é capaz de revelar efeitos que atuam perpendicularmente sobre o feixe, que não poderiam ser revelados se os estágios de pré- e pós-seleção não existissem.

Capítulo 5

Medidas Fracas como um Efeito de Interferência

Estudamos anteriormente como fazer uma medida fraca usando como principal instrumento a interação de von Neumann, onde foi introduzido um hamiltoniano que descreve o acoplamento entre o sistema medido e o medidor, através do observável A e do operador de momento p , respectivamente. Com isso, encontramos o valor fraco (4.13), dado pela interação deste hamiltoniano com sistema de tal forma que a função de onda gaussiana, que representa o perfil transversal feixe de átomos, é transladada de um valor proporcional à parte real do valor fraco.

Agora, de maneira alternativa, vamos analisar o comportamento do estado final do medidor usando medidas fracas para um acoplamento geral em termos da superposição entre os estados inicial e final do medidor no caso em que o sistema medido é um qubit. Como já estudamos, o experimento parte da ideia de uma pré e uma pós-seleção, separadas por um aparato do tipo Stern-Gerlach com uma interação fraca entre o campo magnético e os átomos de prata. Portanto, o experimento é constituído de uma pré-seleção, uma medida intermediária, e por fim, a pós-seleção, já discutidos anteriormente.

Como estamos trabalhando com um qubit, vamos supor que seja pré-selecionado o seguinte estado inicial para o sistema:

$$|\psi_i\rangle = \alpha|S_1\rangle + \beta|S_2\rangle, \quad (5.1)$$

onde as constantes α e β são as amplitudes de probabilidades, e $|S_1\rangle$ e $|S_2\rangle$ formam uma base para o estado do sistema.

Comparando com o experimento de Stern-Gerlach [19], o estado inicial (5.1) pode ser considerado como o autoestado $|S_x; +\rangle = (1/\sqrt{2})(|+\rangle + |-\rangle)$, onde as amplitudes de probabilidades são $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$.

O estágio de acoplamento é dado por:

$$|\psi\rangle = \alpha|S_1\rangle|a_1\rangle + \beta|S_2\rangle|a_2\rangle, \quad (5.2)$$

onde $|S_1\rangle$ e $|S_2\rangle$ são os autoestados do operador relacionado com a medida fraca (caso ela fosse forte), e os autoestados $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ são os estados do medidor.

Observe que $\langle a_1|a_2\rangle$ não deve ser nulo, o que representaria uma medida convencional (medida forte). Em nosso caso, $\langle a_1|a_2\rangle \approx 1$ que é o caso de uma medida fraca.

Vamos também admitir uma pós-seleção no estado

$$|\psi_f\rangle = \gamma|S_1\rangle + \delta|S_2\rangle, \quad (5.3)$$

onde as constantes γ e δ são as amplitudes de probabilidades. Portanto, este será o estado final do sistema. Com ele podemos encontrar a intensidade do feixe de saída, que é dada por:

$$I = |\phi_f(x)|^2. \quad (5.4)$$

Realizando uma projeção do acoplamento no estado final, $|\psi_f\rangle\langle\psi_f|$, temos,

$$\begin{aligned} |\psi_f\rangle\langle\psi_f|\psi\rangle &= (\gamma|S_1\rangle + \delta|S_2\rangle)(\langle S_1|\gamma^* + \langle S_2|\delta^*) \\ &\times (\alpha|S_1\rangle|a_1\rangle + \beta|S_2\rangle|a_2\rangle) \\ &= [|\gamma|^2|S_1\rangle\langle S_1| + \gamma\delta^*|S_1\rangle\langle S_2| \\ &+ \delta\gamma^*|S_2\rangle\langle S_1| + |\delta|^2|S_2\rangle\langle S_2|] \\ &\times (\alpha|S_1\rangle|a_1\rangle + \beta|S_2\rangle|a_2\rangle) \\ &= \gamma|S_1\rangle(\gamma^*\alpha|a_1\rangle + \delta^*\beta|a_2\rangle) \\ &+ \delta|S_2\rangle(\gamma^*\alpha|a_1\rangle + \delta^*\beta|a_2\rangle) \\ &= (\gamma|S_1\rangle + \delta|S_2\rangle)(\gamma^*\alpha|a_1\rangle + \delta^*\beta|a_2\rangle). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Vemos no resultado da equação (5.5) que, o primeiro termo é o próprio estado final $|\psi_f\rangle$, e o segundo termo é o estado final do medidor, que denotaremos por:

$$|\phi_f\rangle = \gamma^*\alpha|a_1\rangle + \delta^*\beta|a_2\rangle. \quad (5.6)$$

Vimos em trabalhos anteriores que encontramos certos valores que possibilitaram a realização de uma medida não convencional, o valor fraco (4.13), que representa o valor de uma medida fraca, muito bem preparada em um sistema pré e pós-selecionado. No

capítulo de Medidas Fracas, todo o trabalho foi realizado usando uma constante gt , que determina a força e o tempo de interação de cada átomo com o campo magnético do aparato central (veja a Figura 4.3). Entretanto, observe que nesse capítulo não foi mencionada a constante gt . Por outro lado, veremos que podemos substituir esse elemento na forma de outros parâmetros.

Com esses dados, podemos buscar informações sobre o quão separadas as gaussianas devem estar para haver uma superposição dos estados do medidor. Vimos que $\langle a_1 | a_2 \rangle$ não deve ser nulo, pois a segunda medida não separa completamente os estados. Ao contrário, temos que a segunda medida deve satisfazer $|\langle a_1 | a_2 \rangle|^2 \approx 1$ para que a medida seja considerada fraca, e este resultado determinará, como será o nosso acoplamento.

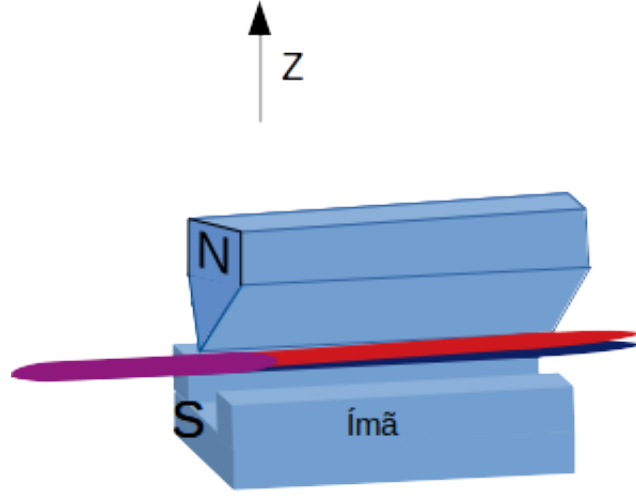


Figura 5.1: Medida com interação fraca em um experimento do tipo Stern-Gerlach. Um feixe pouco se divide (um feixe em vermelho e outro em azul) ao interagir com o campo magnético quase homogêneo.

O feixe antes de se separar (antes da medida) é representado pela seguinte gaussiana:

$$\langle x | a \rangle = \psi_a(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right), \quad (5.7)$$

de forma que esta função de onda já está normalizada.

Após a interação do feixe com o campo, são formadas duas gaussianas transladadas simetricamente de um valor constante (x') do centro ($x = 0$), de forma que as funções para as duas gaussianas novas são:

$$\langle x | a_1 \rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{4\sigma^2}\right) \quad (5.8)$$

e

$$\langle x | a_2 \rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{(x + x')^2}{4\sigma^2}\right). \quad (5.9)$$

A constante σ é a largura das gaussianas. Observe que, a partir da relação entre a largura das gaussianas σ e o deslocamento x' , podemos também quantificar a *fraqueza* do acoplamento entre sistema e medidor, em substituição ao parâmetro gt apresentado no capítulo anterior. Assim, a quantificação da fraqueza do acoplamento se dá no presente formalismo a partir da seguinte medida de superposição:

$$|\langle a_1 | a_2 \rangle|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a_1}^*(x) \psi_{a_2}(x) dx \approx 1. \quad (5.10)$$

O estado final do medidor é encontrado a partir das Eqs. (5.6), (5.8) e (5.9). A partir desse resultado se obtém o perfil espacial final do feixe de átomos, $|\phi_f|^2$. Para verificarmos o procedimento, vamos atribuir alguns valores para as amplitudes α , β , γ e δ .

Como visto anteriormente, podemos assumir que a pré-seleção como sendo formada por um estado inicial, com amplitudes de probabilidades $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$, e a pós-seleção como um estado final com amplitudes de probabilidades $\gamma = \cos \theta$ e $\delta = \sin \theta$, [32]. Assim, o produto interno $\langle \psi_i | \psi_f \rangle$ fica,

$$\begin{aligned} \langle \psi_i | \psi_f \rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle S_1 | + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle S_2 | \right) \left(\cos \theta | S_1 \rangle + \sin \theta | S_2 \rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta + \sin \theta). \end{aligned} \quad (5.11)$$

De acordo com a expressão do valor fraco, Eq. (4.13), ele cresce bastante quando $\langle \psi_i | \psi_f \rangle \approx 0$, de acordo com a Eq.(4.15), mesmo apesar do valor desse deslocamento ter sido imperceptível no estágio da medida fraca. É neste caso em que o deslocamento final do medidor pode revelar com clareza o efeito fraco intermediário. Dessa forma, desejamos pós-selecionar um estado aproximadamente ortogonal ao de pré-seleção. Para tal, podemos escolher $\theta = 0,757\pi$, que nos fornece $\langle \psi_i | \psi_f \rangle = -0.021989$, que é próximo de zero, como queríamos.

Com essas informações em mãos, podemos construir um perfil para a função de onda que determina a intensidade do estado final do feixe na tela de detecção. Usando os dados descritos acima, podemos ver na Figura (5.2) o gráfico da superposição dos estados. A Figura (5.3) mostra uma ampliação deste gráfico, tendo uma visualização melhor de como essa superposição ocorre.

Como vemos, as duas gaussianas estão praticamente superpostas após o estágio intermediário da interação fraca, sendo muito difícil identificarmos que algum efeito de deslocamento entre elas ocorreu.

As Figuras (5.2) e (5.3) mostram um resultado esperado para a superposição. Vemos que os estados estão quase totalmente superpostos, ainda. Essas são as gaussianas separadas por um valor $2x'$. Observamos ainda que o acoplamento, dado pela Eq. (5.10), tem o

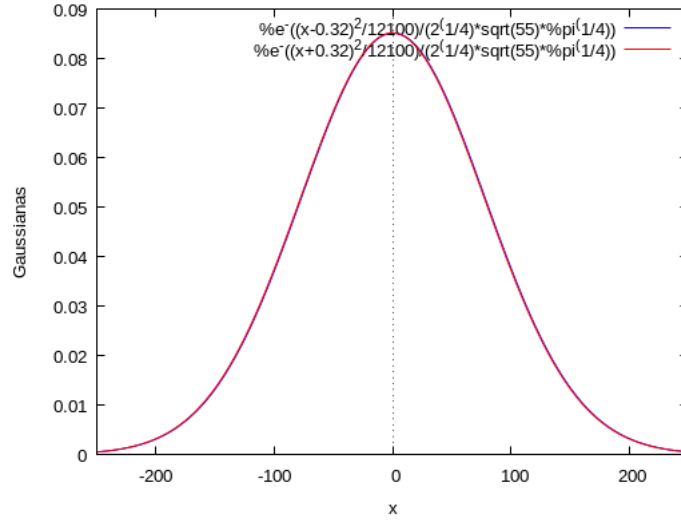


Figura 5.2: Gráfico da superposição dos estados após o estágio de interação fraca.

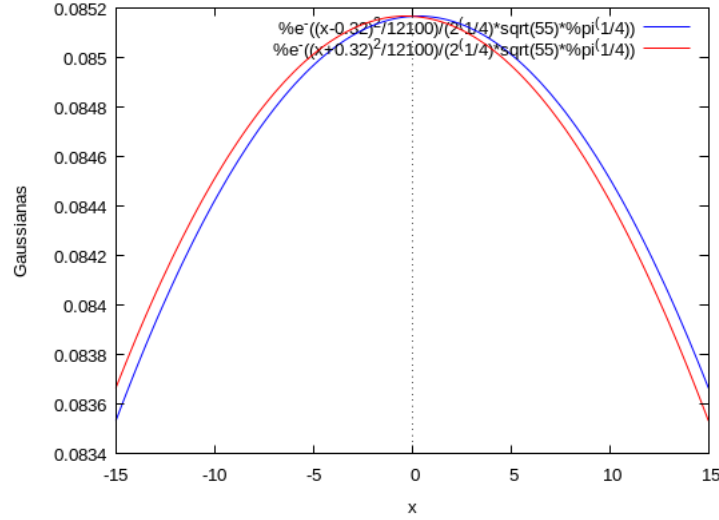


Figura 5.3: Gráfico da superposição dos estados após a interação fraca, entre os valores -15 e 15, na coordenada x , separadas por $2x'$, com $x' = 0,32$.

valor de 0.9999830745234026, o que é bem próximo de 1, dados pela relação entre x' e σ (com $x' = 0,32$ e $\sigma = 55$) como queríamos. O perfil de intensidade do feixe após a pós-seleção, Figura (5.4), é dada pela Eq. (5.4), onde esta baixa intensidade se dá pelo fato de que a pós-seleção é quase ortogonal à pré-seleção, de forma que o feixe é muito enfraquecido. Observe também que o feixe foi transladado, assim como foi previsto em (4.21). Porém, essa translação final foi consideravelmente maior que o deslocamento das gaussianas ocorrido no estágio intermediário. Assim, podemos ver que após a conclusão da pós-seleção é possível identificar que de fato houve uma interação fraca no estágio intermediário.

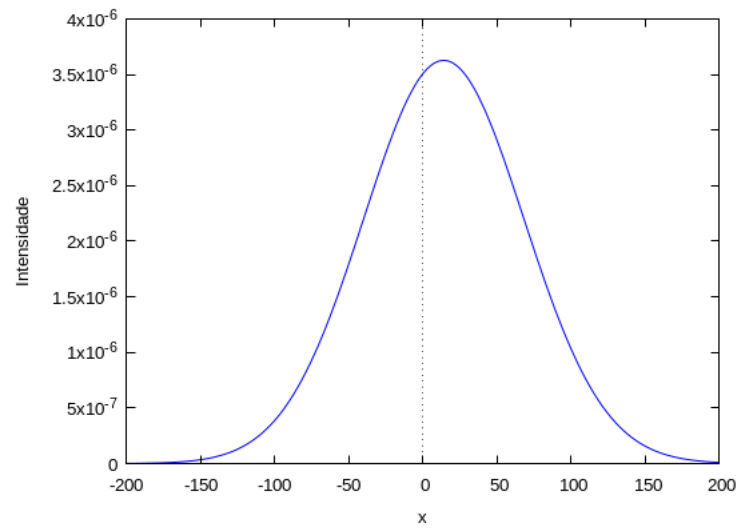


Figura 5.4: Intensidade do feixe gaussiano após a conclusão do protocolo de interação fraca, com intensidade 3.62×10^{-6} , centrado na posição $x = 14.07$.

Capítulo 6

O Interferômetro de Mach-Zehnder

O interferômetro de Mach-Zehnder [33, 34] foi um experimento produzido pelos físicos Ludwig Mach e Ludwig Zehnder por volta de 1892, o qual demonstra através do fenômeno de interferência de um feixe de luz, os efeitos da luz, como onda, e mais recentemente como partícula (se tratando de fótons).

Este experimento ainda pode ser aplicado a diversos estudos como por exemplo a difração e a polarização da luz, introdução ao ensino de Física Moderna no ensino médio, além da interferência, como já fala este estudo, [35–39]. O Interferômetro de Mach-Zehnder é um aparato experimental que estuda a interação de um feixe de luz (no caso clássico) ou fótons (no caso quântico), usando para isto uma fonte de luz coerente (um laser), espelhos, semiespelhos (que refletem metade da radiação incidente e deixa passar a outra metade da radiação, também chamado de 50-50) e um anteparo para a análise do resultado da interferência do feixe. Começamos por descrever o experimento e no processo já explicamos a configuração do interferômetro.

Ao diminuir a intensidade da luz na fonte, esta passa a emitir a radiação no chamado limite monofotônico, onde um fóton é emitido de cada vez. Um fóton é incidido até um semiespelho, que está a um ângulo de 45° com a direção do fóton. Este fóton ao chegar no semiespelho (BS ou Beam Splitter) entra no estado de superposição, ou seja o caminho que o fóton percorria agora está ao mesmo tempo em dois caminhos, como mostra a figura abaixo.

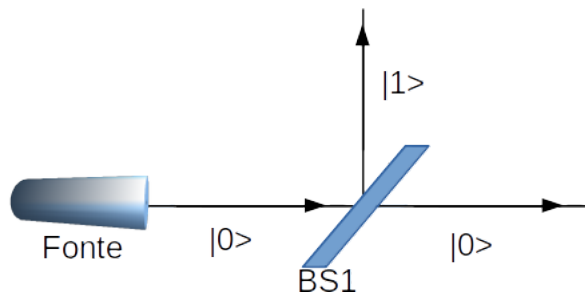


Figura 6.1: Uma fonte dispara fótons em direção a um semiespelho (beam splitter, BS1) e entra em uma superposição de estados, $|0\rangle$ e $|1\rangle$. [1]

A fonte envia um fóton que percorre o caminho $|0\rangle$ (este caminho representa o estado do fóton) e ao passar pelo BS1 adquire uma superposição demonstrada pelos caminhos $|0\rangle$ e $|1\rangle$. O estado deste fóton agora é determinado pela seguinte expressão:

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i|1\rangle). \quad (6.1)$$

Ou seja, agora o fóton está nos dois caminhos ($|0\rangle$ e $|1\rangle$), ao mesmo tempo. Aqui, o caminho $|1\rangle$ é dito ser o caminho que o fóton toma quando refletido, pois com a reflexão, este ganhou uma fase em relação ao estado de transmissão [40], enquanto que o caminho $|0\rangle$ é dito ser o caminho que o fóton toma quando é transmitido.

A segunda parte do interferômetro tem como objetivo interferir os feixes que foram separados anteriormente. Para isto, são colocados dois espelhos (nomeados de M1 e M2) para refletir os dois feixes separados a fim de refletir ambos em direção ao mesmo ponto, onde há um outro semiespelho (BS2). Veja a figura (6.2) abaixo.

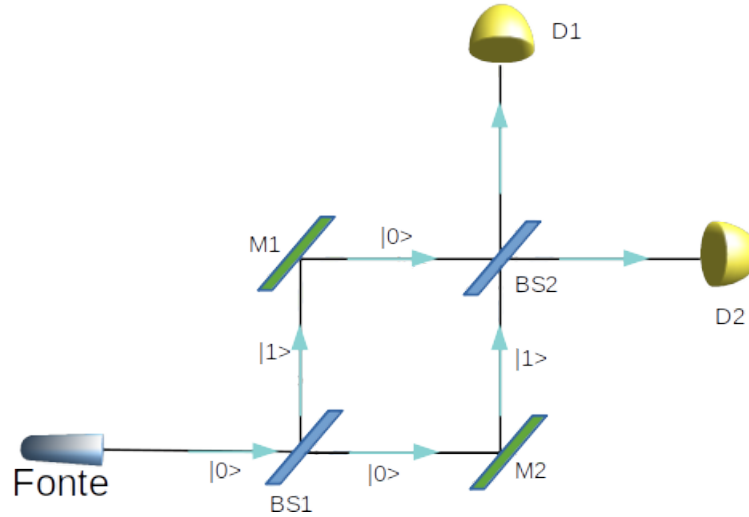


Figura 6.2: Uma fonte dispara fótons em direção a um semiespelho separando o feixe em dois. Esses feixes são refletidos em espelhos e interagem no segundo semiespelho, BS2.

Vamos agora calcular o que acontece com o feixe ao passar pelos semiespelhos e pelos espelhos (ver Figura (6.3)). Após o fóton sair da fonte, ele é determinado pelo caminho $|a\rangle$ e após passar pelo primeiro semiespelho ele se torna,

$$|a\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|b\rangle + i|c\rangle). \quad (6.2)$$

Logo após passar pelos espelhos, os caminhos se reencontram no segundo semiespelho (BS2) e assim, os caminhos $|b\rangle$ e $|c\rangle$ se superpõem e ganham uma nova fase. Assim, temos

$$|b\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|d\rangle + i|e\rangle) \quad (6.3)$$

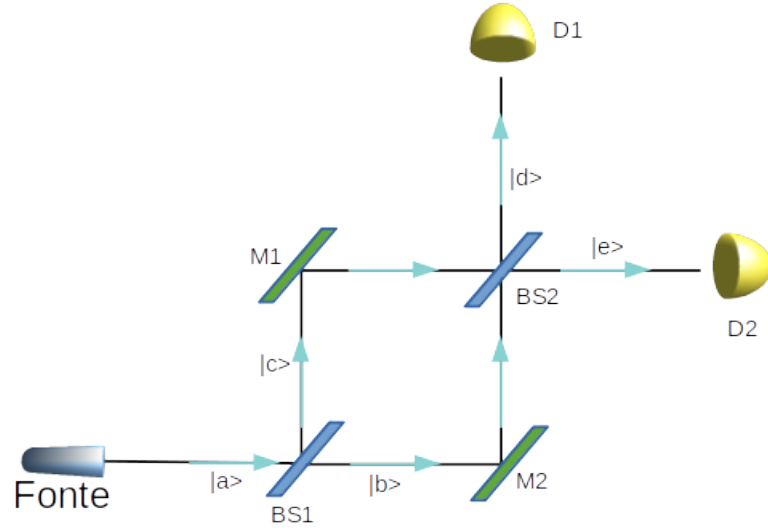


Figura 6.3: Esta imagem é análoga à Figura 6.2, mas com nomes diferentes para os caminhos.

e

$$|c\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (i|d\rangle + |e\rangle). \quad (6.4)$$

Observe que os espelhos geram uma mesma fase em cada feixe, sendo assim, não é necessário calcular a fase ganha pelos fótons ao passar por eles, que será mostrado com mais detalhes posteriormente. Agora, apareceram os caminhos $|d\rangle$ e $|e\rangle$, que se referem aos caminhos após a passagem do fóton pelo segundo semiespelho, onde há uma segunda superposição. Observe que $|b\rangle$ se assemelha ao caminho $|a\rangle$, que obtém uma fase no termo $|e\rangle$, mas, no caminho $|c\rangle$, a fase aparece no termo $|d\rangle$. Essas fases são ganhas devido ao efeito de reflexão. Dessa forma, o autoestado $|a\rangle$ fica:

$$\begin{aligned} |a\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|d\rangle + i|e\rangle) + i \frac{1}{\sqrt{2}} (i|d\rangle + |e\rangle) \right] \\ |a\rangle &\rightarrow (0|d\rangle + i|e\rangle). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Este resultado indica que, com esta configuração, os fótons só serão detectados em um dos detectores. Isto porque a interferência durante o processo deixa o autoestado $|d\rangle$ um estado destrutivo, enquanto que o autoestado $|e\rangle$ se torna totalmente construtivo. Isto quer dizer que não há detecção de fótons no detector D1, pois todos os fótons chegam no detector D2.

Vamos provar isto. Qual a probabilidade de detectar fótons em D1? Os fótons que chegam em D1 estão no estado $|d\rangle$ e então, a probabilidade fica:

$$\begin{aligned}
P(D_1) &= |\langle d | (0|d\rangle + i|e\rangle)|^2 \\
&= |0\langle d|d\rangle + i\langle d|e\rangle|^2 \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Agora, qual a probabilidade de detectar fótons em D2? Os fótons que chegam em D2 estão no estado $|e\rangle$ e, então a probabilidade fica:

$$\begin{aligned}
P(D_2) &= |\langle e | (0|d\rangle + i|e\rangle)|^2 \\
&= |0\langle e|d\rangle + i\langle e|e\rangle|^2 \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Como dito acima, os fótons são todos detectados no detector D2. Podemos ainda refazer este experimento pensando nos caminhos representados na Figura 6.2. Agora, os autoestados serão caracterizados pelas seguintes matrizes:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

e

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6.9}$$

O efeito dos semiespelhos nos fótons é dado pela seguinte matriz:

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{6.10}$$

Isto porque existe a probabilidade do fóton ir ou não por um dos dois caminhos, dado pela superposição, ou seja, o fóton ganha uma fase (se for refletido) ao passar pelo semiespelho.

Seja o estado inicial $|\psi_i\rangle = |0\rangle$, onde é modificado quando o fóton passa pelo BS1 como

$$\hat{S}|\psi_i\rangle = |\psi\rangle, \tag{6.11}$$

com $|\psi_i\rangle$ o estado inicial. Assim, o estado do fóton depois de passar pelo primeiro semiespelho fica,

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle).
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Como dito acima, o efeito conjunto dos espelhos em nada altera o estado dos fótons. Assim, vamos agora estudar o que acontece quando o fóton passa pelo segundo semiespelho. Por ser um semiespelho idêntico ao primeiro, o operador é o próprio $\hat{S}$. O estado final deste fóton é $\hat{S}|\psi\rangle = |\psi_f\rangle$. Temos,

$$\begin{aligned}
|\psi_f\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= |0\rangle.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Com este resultado, podemos ver diretamente que o caminho em que o fóton "sobrevive", é o que leva ao estado $|0\rangle$. O que nos mostra que a probabilidade de detecção é de 100% no detector D2, e de 0% no detector D1.

Verifica-se que o operador dos semiespelhos pode ser da seguinte forma:

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{bmatrix}, \tag{6.14}$$

pois, com essa matriz, verifica-se facilmente o aparecimento da fase (equivalente à da equação (6.1)) quando o fóton interage com os semiespelhos.

É interessante saber que a superposição do fóton pode ser desfeita ao tentar descobrir por qual caminho ele passou, dessa forma, o fóton não apresentará o efeito de superposição. Qualquer tentativa de obter informação sobre o caminho que o fóton passou, destrói, inevitavelmente, a interferência. Mesmo que seja possível "marcar" cada fóton que sai da fonte, e conseqüentemente, conhecer seu caminho, é possível apagar esta marca depois que ele sai do interferômetro, de forma que, surpreendentemente, a interferência

é reconstruída. Este último processo é chamado de *apagamento quântico*. O processo de apagamento (parcial ou totalmente) destrói as informações de como e por onde passou o fóton e, assim, restaura a interferência [41].

6.1 O Interferômetro de Mach-Zehnder com o Acréscimo de uma Fase

Podemos introduzir um pequeno vidro no aparato de forma que gerará uma fase no estado final do fóton, diferente do resultado encontrado anteriormente. Este será um caso um pouco mais geral do estudo. A introdução da fase produz um estudo mais aprofundado do interferômetro.

Ao introduzir um vidro com uma fase bem determinada, denotada por $e^{i\theta}$, os fótons que seguiram o caminho contendo o vidro adquirem esta fase relativa em relação aos que seguiram pelo outro caminho. Este efeito pode ser causado por outros fatores, inclusive naturais, por exemplo, a gravidade, no caso da interferometria de nêutrons, [42, 43]. Isto certamente causará uma influência na probabilidade de detecção no interferômetro Mach-Zehnder, como será visto a seguir. O vidro é colocado em um dos feixes como mostra a figura (6.4).

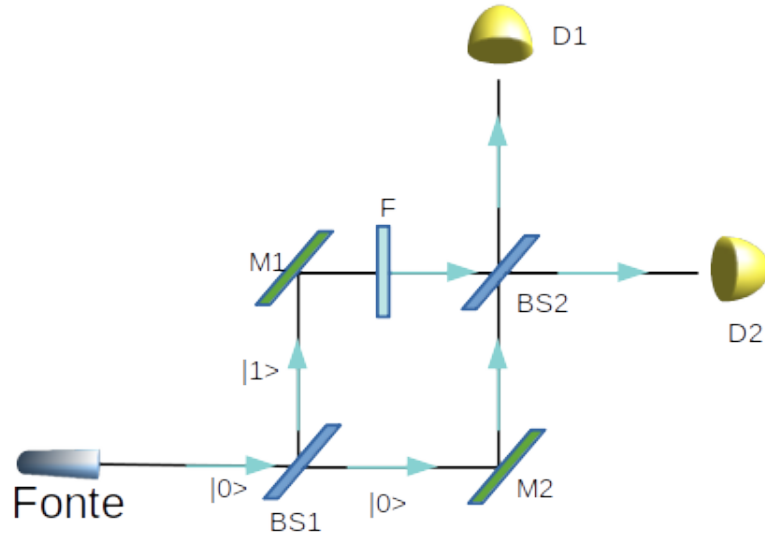


Figura 6.4: Uma fonte dispara fótons em direção a um semiespelho separando o feixe em dois. Esses feixes são refletidos em espelhos, e um deles passa por um material refrator (F), gerando uma fase local, e voltam a interagir no segundo semiespelho, BS2.

No início, o processo é o mesmo que ocorre na Figura 6.2, e só muda quando consideramos os cálculos no segundo semiespelho (BS2). Vamos refazer este experimento pensando nos caminhos representados na Figura 6.4. Os estados base serão caracterizados pelas mesmas matrizes:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

e

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

O efeito dos semiespelhos também será o mesmo:

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

Considerando a passagem do fóton pelo primeiro semiespelho, vemos que ainda não houve a modificação no aparato, e o estado inicial do fóton, após passar pelo primeiro semiespelho (BS1) será:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle). \quad (6.18)$$

Vamos agora adicionar a fase $e^{i\theta}$, causada pela introdução da placa de vidro em um dos caminhos, de forma que temos um novo operador,

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

O operador gera a fase graças à incorporação do vidro no aparato. A inspiração para a construção deste operador se dá pois ele atua apenas no caminho do estado que é colocado o vidro, neste caso ao longo do caminho representado pelo estado $|1\rangle$. Vamos provar isso: Um novo estado ($|A\rangle$) é construído quando $\hat{F}$ atua em $|\psi\rangle$,

$$\begin{aligned} |A\rangle &= \hat{F}|\psi\rangle \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{i\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Veremos que esse novo estado fará diferença quando o fóton chegar ao segundo semiespelho. Temos,

$$\begin{aligned}
|\psi_f\rangle &= \hat{S}|A\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{i\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + e^{i\theta} \\ 1 - e^{i\theta} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Este resultado mostra que devido à fase acrescentada, D1 e D2 detectarão conforme à mudança da fase. O fator de fase $e^{i\theta}$ gera novos resultados, onde agora existe a possibilidade de detecção em D1. Vamos calcular as probabilidades de detecção em D1 e D2.

A probabilidade de detecção no detector D1 será:

$$\begin{aligned}
P_{D_1} &= |\langle 0|\psi_f\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2} [1 - \cos(\theta)] \\
&= \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^2.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

A probabilidade de detecção no detector D2 será:

$$\begin{aligned}
P_{D_2} &= |\langle 1|\psi_f\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2} [1 + \cos(\theta)] \\
&= \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^2.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Observe que esse resultado está de acordo com a equação (6.13). Se $\theta = 0$, temos que o detector D2 detectará 100% dos fótons e o detector D1 não detectará os fótons. Se $\theta = \pi$, ou se $\theta = \frac{3\pi}{2}$, somente o detector D1 detectará os fótons. Dessa forma, esta análise, levando em consideração a fase gerada por acrescentar o vidro ao aparato, torna o estudo mais geral, podendo-se pensar no caso do aparato sem o vidro como sendo um caso específico.

6.2 O Princípio do Efeito Miragem

O efeito miragem diz respeito à capacidade que os materiais transparentes têm de desviar a direção de propagação da radiação incidente, quando existe uma diferença de

temperatura (mais precisamente um gradiente de temperatura). De forma prática, a miragem é o efeito de causar desvio da luz quando existe uma mudança de temperatura, onde esta mudança de temperatura causa uma rarefação (ato de tornar rarefeita uma concentração de substância). No caso da miragem, a mudança de temperatura causa uma rarefação espacial no ar, ou seja, o ar fica mais rarefeito, [2]. O ar rarefeito tem um índice de refração menor que o ar sem efeito de rarefação nos locais onde a temperatura é mais alta. Então, o que estudamos aqui é a mudança no índice de refração do ar em relação à temperatura, e o gradiente de temperatura.

O efeito miragem é mais comum de ocorrer em dias quentes, nas estradas, quando os raios solares incidem no asfalto e são refletidos pelo ar quente (próximo ao asfalto), sem interagir com o solo, refletindo a imagem como um espelho. Este é chamado efeito miragem inferior, por ocorrer a reflexão da luz abaixo da linha do horizonte. Geralmente, em dias quentes, nas estradas, é possível ver em uma distância muito grande, a imagem de carros sendo refletida pelo chão, como um espelho refletindo os raios de luz do Sol que batem no carro e são refletidos até os olhos de um observador, formando a imagem do carro no solo. Isto se dá porque a luz que é refletida pelo carro, se aproxima do solo. Neste momento a luz aumenta a sua velocidade ao interagir com o ar menos denso, se espelhando no solo, e então desvia em direção ao observador.

O caso inverso é o de uma miragem superior, que ocorre quando a imagem é refletida acima da linha do horizonte. Isto é causado em lugares em que há uma extensa camada de gelo ou longa superfície de água gelada, como o mar, onde existe uma camada de ar quente acima da água gelada (ou do gelo) que reflete a imagem que vem de baixo, parecendo que o objeto está flutuando no ar.

Graças à mudança no índice de refração em relação à temperatura, ocorre a refração e a reflexão da luz, como em um aquário, onde a luz ao passar para fora da água, parte é refletida e parte é refratada. A luz é totalmente refletida se a luz for incidida com o chamado ângulo crítico.

A técnica de efeito miragem será muito útil no entendimento do estudo aqui proposto. Efeito miragem é uma técnica que se baseia na propriedade de refração da luz, que ao atravessar um meio que está a uma temperatura diferente da que a luz estava é desviada de acordo com a temperatura que interagiu.

A luz, ao incidir no meio com índice de refração diferente do meio que estava anteriormente, é desviada com um certo ângulo θ em relação à sua trajetória inicial. A dependência do ângulo de desvio da luz com a taxa de variação do índice de refração é dada por [3, 44]:

$$\theta = \frac{L}{n} \frac{dn}{dx}. \quad (6.24)$$

Vemos na Figura (6.6) que um feixe atravessa um material com um índice de refração

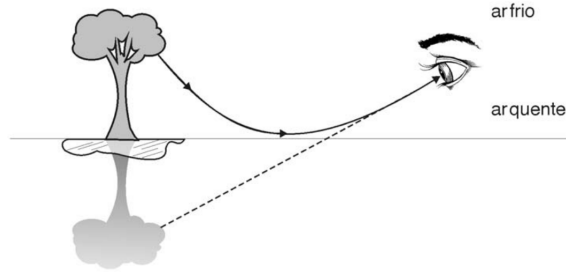


Figura 6.5: Uma miragem formada por um raio de luz que incide sobre o piso e reflete no observador. Fonte: Maria Antonieta T. de Almeida, Marta Feijó Barroso, Stenio Dore de Magalhães [2].

que varia no espaço, causado por uma mudança de temperatura (ou de concentração) em relação ao meio de onde o feixe vinha. Além disso, esta interação tem um comprimento L , ou seja, é o comprimento da interação enquanto ela é desviada. n é o índice de refração do meio não perturbado e x é o eixo ao longo do qual ocorre a interação.

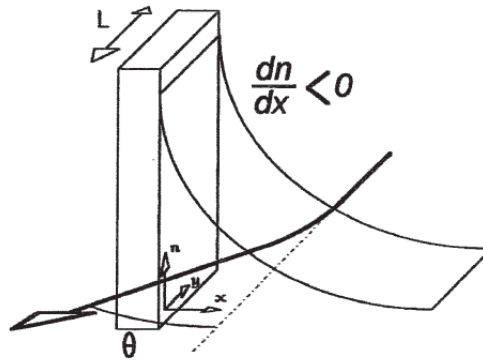


Figura 6.6: Um raio de luz incide sobre um espaço com temperatura variável, e é desviado de um ângulo θ . Fonte: João Paulo Campos Trigueiro, Tulio Matencio, Gastón Alvial Moraga and Christian Lopez [3].

O gradiente do índice de refração pode ser introduzido por muitos fatores como: concentração, temperatura, pressão e outros. Se temperatura e concentração forem os únicos fatores, então o gradiente de índice de refração será [3, 45]:

$$\frac{dn}{dx} = \frac{\partial n}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (6.25)$$

onde $\frac{\partial n}{\partial T}$ e $\frac{\partial n}{\partial C}$ dizem qual a taxa de variação do índice de refração com a temperatura e a concentração, respectivamente. Já os coeficientes $\frac{\partial T}{\partial x}$ e $\frac{\partial C}{\partial x}$ dizem o quanto a temperatura e a concentração variam com a coordenada.

A técnica de efeito miragem foi primeiro estudada para investigar o efeito de gradiente de temperatura, sendo chamada de “Photothermal Deflection Spectroscopy” – PDS, “Photothermal Beam Deflection” PBD ou “Photothermal Deflection Technique” – PDT, [3].

A equação para encontrar qual o desvio do feixe é derivada das equações (6.24) e (6.25),

$$\theta = \frac{L}{n} \frac{dn}{dT} \frac{dT}{dx}. \quad (6.26)$$

Vemos assim que o gradiente de temperatura é expresso em unidades de temperatura por unidade comprimento, e descreve a taxa de variação de temperatura com relação à direção do fluxo de calor em um determinado espaço.

Capítulo 7

Medida Fraca no Interferômetro de Mach-Zehnder

Neste capítulo, estudaremos como o protocolo de medida fraca pode ser utilizado para detectarmos pequenos desvios angulares de um feixe de luz, devido ao efeito miragem, quando o mesmo passa por uma região com um gradiente de temperatura transversal. Existem diversos trabalhos realizando a técnica de metrologia de medida fraca [29–31]. Para tal proposta experimental aqui estudada, um interferômetro de Mach-Zehnder modificado é utilizado.

Neste sentido, a ideia é, em um dos braços do interferômetro, introduzir um material aquecido de forma que ele se aproxima de um dos feixes após a reflexão pelo espelho, por exemplo, o feixe logo após ser refletido pelo espelho $M2$, como na Figura (7.1). Com o I.M-Z, ao adaptá-lo ao experimento de medida fraca, o que causará essa medida fraca será o material aquecido, de forma que esta medida fraca será em termos de um pequeno desvio do feixe, em relação ao caso que não há a introdução deste material, ou seja, a presença do material é capaz de identificar o caminho do fóton no interferômetro.

No experimento de medida fraca, no capítulo 3, vimos que um feixe de átomos de prata é pré-selecionado no eixo z . Selecionamos o estado $|z, +\rangle$ e descartamos o outro estado. Em seguida, foi feita a medida fraca na direção x , que separou muito pouco os feixes. A terceira fase do experimento é a pós-seleção, que é muito parecida com a pré-seleção, entretanto, descartamos o estado $|z, +\rangle$ e analisamos o estado $|z, -\rangle$. Com essas informações pudemos estudar a medida fraca, e o valor fraco, dado pela equação (4.13).

Em um I.M-Z, uma fase é introduzida ao feixe inicialmente dividido por BS1 na Figura (7.1) com o acréscimo de um vidro, como mostra a figura (6.4). Com isso, temos que a pré-seleção, devido ao efeito do BS1 e do vidro, que se escolhido adequadamente em termos de espessura e índice de refração, deixam o fóton no estado

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 + \sin \alpha} |0\rangle + \sqrt{1 - \sin \alpha} |1\rangle \right). \quad (7.1)$$

A fase ganha pelo feixe, neste experimento, é similar à do capítulo 5, e, agora, haverá uma medida fraca que ocorre devido o gradiente de temperatura que causa um desvio no feixe, de acordo com a fenomenologia do efeito miragem vista no capítulo anterior.

Ao aproximar o material quente M, este provoca um desvio no feixe, em relação ao caso sem o material, causando o efeito miragem. Caso esse desvio seja grande, poderíamos determinar o caminho do fóton na base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ com certeza. Ou seja, similar ao caso do experimento de Stern-Gerlach convencional que bifurca o feixe de átomo em uma dada direção, podemos atribuir um operador do tipo

$$\hat{A} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|. \quad (7.2)$$

Porém, se o desvio for pequeno, temos uma medida fraca com este operador.

Na Figura (7.1), podemos ver como é feita a medida fraca no I.M-Z. Inicialmente, temos um feixe que é disparado de uma fonte, e em seguida, o feixe passa por um semiespelho (BS1), ou seja, ele estará em uma superposição entre os estados, $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Após ser refletido pelos espelhos, os fótons do feixe sofrem a ação do pedaço de vidro, sendo postos no estado da Eq. (7.1), como discutido acima, sendo este o estágio de pré-seleção. Em seguida, devido à proximidade do material quente, os fótons no estado $|1\rangle$ são levemente defletidos em relação ao caminho de alinhamento original do interferômetro (no caso, sem a presença do material), sendo este o estágio de medida fraca.

O que vemos na figura (7.2) é uma demonstração do que ocorre com o feixe ao interagir com o gradiente de temperatura causado pelo objeto a temperatura superior. O feixe na cor vermelha está sendo defletido em um ângulo θ em relação à direção que ele estava anteriormente. Ao final, os detectores D1 e D2 marcam os caminhos de saída dos fótons.

De acordo com o que vimos no capítulo anterior, com a configuração do IMZ da Figura (7.1), os detectores D1 e D2 detectam fótons, que antes de passar por BS2, encontram-se nos estados $(1/\sqrt{2})(|0\rangle - |1\rangle)$ e $(1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle)$, respectivamente.

Neste caso, se ao final do experimento da Figura (7.1) considerarmos somente os fótons detectados em D2 e ignorarmos aqueles detectados em D1, de acordo com o protocolo de medidas fracas, estaremos realizando uma pós-seleção no estado

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle). \quad (7.3)$$

Com isso, temos uma medida fraca, em que o valor fraco é dado pela Eq. (4.13). Assim,

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle_w &= \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \\ &= \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Dessa forma, o desvio do feixe em D2 é dado por Eq. (4.15), [26].

Se fizermos uma pré-seleção tal que $\alpha = 3.1$, temos $\langle \hat{X} \rangle \approx 48gt$. Se notarmos que, se o protocolo de medidas fracas não estivesse sendo executado, o desvio devido ao efeito miragem seria de $\langle \hat{X} \rangle \approx gt$. Ou seja, a medida fraca nos deu uma amplificação do desvio aproximadamente 50 vezes maior. Com isso, o artifício da medida fraca faz com que o pequeno desvio causado pelo efeito miragem seja amplificado de modo que a presença do gradiente de temperatura no interferômetro, causador de tal efeito, possa ser mais facilmente detectado.

Um ponto importante, que temos que mencionar é com respeito à probabilidade de pós-seleção. Para que o efeito de amplificação ocorra, tivemos que pagar um preço, ou seja, a atenuação do feixe detectado é dada por um fator

$$\begin{aligned} f &= |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Para $\alpha = 3.1$, temos $f \simeq 4,32 \times 10^{-4}$.

Dessa forma, para conseguirmos uma grande amplificação do efeito através da técnica de medida fraca, temos que "jogar fora" uma grande quantidade de fótons, tendo ao final um feixe de detecção bastante atenuado.

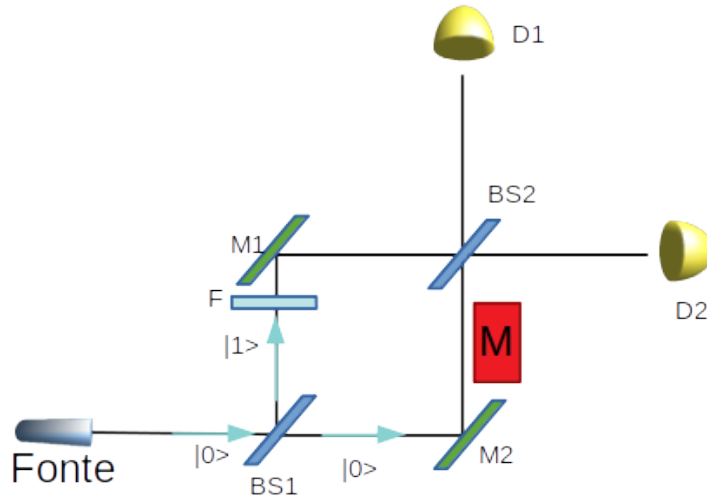


Figura 7.1: Interferômetro de Mach-Zehnder com um material quente próximo de um dos caminhos. E no outro caminho, um vidro que gera uma fase.

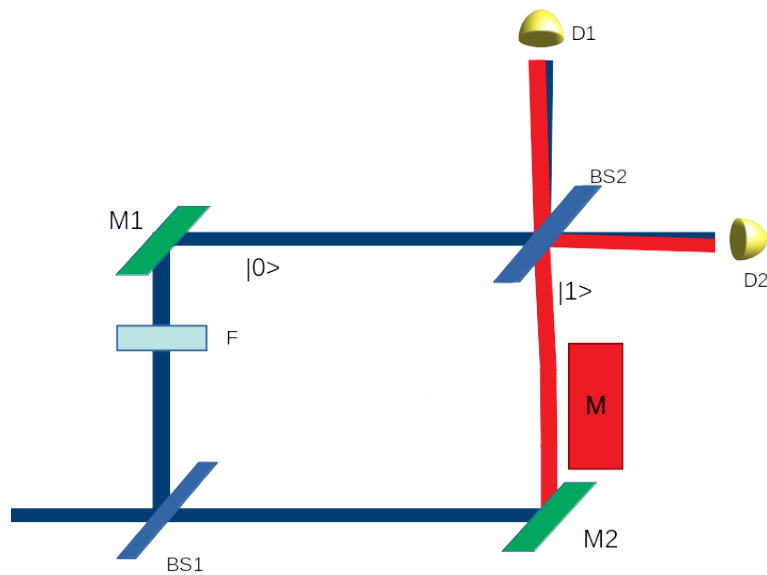


Figura 7.2: Interferômetro de Mach-Zehnder com um feixe que se desvia de sua direção original, graças à incorporação de um material quente (M) próximo de um dos caminhos. Esta é uma aproximação da parte da Figura (7.1) que mostra o objeto M, o semiespelho (BS2) e os detectores (D1 e D2), com mais clareza.

Capítulo 8

Conclusão

A medida fraca é uma modificação da medida quântica padrão, onde fazemos uma "troca": perdemos a precisão na medida em favor da redução na perturbação da mesma. Aqui, usamos a definição proposta por AAV no contexto de sistemas quânticos pré e pós-selecionados, onde, uma medida de um efeito extremamente fraco pode ser amplificado de modo a tornar-se perceptível, [23].

Apresentamos aqui um modo de compreender a medida fraca sem precisar abordar diretamente o acoplamento entre o sistema medido e o medidor, onde resultados interessantes puderam ser obtidos sob esse ponto de vista.

Por fim, propomos um protocolo de medidas fracas baseado em um IMZ modificado, de modo a ser utilizado para detectarmos o efeito transversal de um pequeno gradiente de temperatura sobre um feixe de luz. Apesar do grande número de fótons que tivemos que descartar, de fato, vimos que este protocolo de medida fraca pôde amplificar o efeito de um gradiente de temperatura que age transversalmente à direção de propagação do feixe, tornando-o muito mais perceptível.

Desta forma, obtivemos resultados bastante animadores, nos dando mais perspectivas para futuras pesquisas utilizando interferômetros de Mach-Zehnder modificados de outras formas, a fim de possibilitar outras formas de detecção de pequenos efeitos que agem sobre os feixes de luz, transversalmente em relação à propagação, como por exemplo um gradiente de índice de refração causado por variações espaciais de concentração de certas substâncias, ou mesmo efeitos ópticos não-lineares em materiais.

Referências Bibliográficas

- [1] T. Peters, “Quantum mechanics, by gennaro auletta, mauro fortunato and giorgio parisi: Scope: text book. level: advanced undergraduate,” 2014.
- [2] M. F. B. e. S. D. d. M. Maria Antonieta T de Almeida, *Introdução às Ciências Físicas 1*, vol. 1. 2009.
- [3] J. P. C. Trigueiro, T. Matencio, G. A. Moraga, and C. Lopez, “Princípio e utilização da técnica de efeito miragem de concentração,” *Química Nova*, vol. 29, no. 5, pp. 1078–1085, 2006.
- [4] D. J. Griffiths, “Introduction to quantum mechanics,” *2nd, Pearson, Chapter2. The time-independent schrodinger equation*, pp. 70–73, 2005.
- [5] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, and B. Dui, “Quantum mechanics (2 vol. set),” 2006.
- [6] M. A. Nielsen and I. Chuang, “Quantum computation and quantum information,” 2002.
- [7] S. Watanabe, “Symmetry of physical laws. part iii. prediction and retrodiction,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 27, no. 2, p. 179, 1955.
- [8] Y. Aharonov, P. G. Bergmann, and J. L. Lebowitz, “Time symmetry in the quantum process of measurement,” *Physical Review*, vol. 134, no. 6B, p. B1410, 1964.
- [9] L. S. Fassarella, “O experimento de hardy: a mais simples prova da violação do realismo local epr,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 41, no. 4, 2019.
- [10] A. Ribeiro Filho, “Realismo e localidade em mecânica quântica,” 2015.
- [11] L. Hardy, “Quantum mechanics, local realistic theories, and lorentz-invariant realistic theories,” *Physical Review Letters*, vol. 68, no. 20, p. 2981, 1992.
- [12] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?,” *Physical review*, vol. 47, no. 10, p. 777, 1935.

- [13] B. Reznik and Y. Aharonov, “Time-symmetric formulation of quantum mechanics,” *Physical Review A*, vol. 52, no. 4, p. 2538, 1995.
- [14] G. Muga, R. S. Mayato, and I. Egusquiza, *Time in quantum mechanics*, vol. 734. Springer Science & Business Media, 2007.
- [15] D. C. Struppa and J. M. Tollaksen, *Quantum theory: a two-time success story: Yakir Aharonov festschrift*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [16] S. M. Barnett, *Time in quantum mechanics*. Oxford University Press, 2007.
- [17] Y. Aharonov, A. Botero, S. Popescu, B. Reznik, and J. Tollaksen, “Revisiting hardy’s paradox: counterfactual statements, real measurements, entanglement and weak values,” *Physics Letters A*, vol. 301, no. 3-4, pp. 130–138, 2002.
- [18] K. Yokota, T. Yamamoto, M. Koashi, and N. Imoto, “Direct observation of hardy’s paradox by joint weak measurement with an entangled photon pair,” *New Journal of Physics*, vol. 11, no. 3, p. 033011, 2009.
- [19] O. Stern *Z Phys*, vol. 7, no. 249, 1921.
- [20] W. Gerlach and O. Stern *Z Phys*, vol. 9, no. 349, 1922.
- [21] J. J. Sakurai and E. D. Commins, “Modern quantum mechanics, revised edition,” 1995.
- [22] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker, “Fundamentos de física, volume 3: eletromagnetismo,” *Jearl Walker: tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC*, p. 395, 2009.
- [23] Y. Aharonov, D. Z. Albert, and L. Vaidman, “How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100,” *Physical review letters*, vol. 60, no. 14, p. 1351, 1988.
- [24] I. Duck, P. M. Stevenson, and E. Sudarshan, “The sense in which a "weak measurement" of a spin-1/2 particle’s spin component yields a value 100,” *Physical Review D*, vol. 40, no. 6, p. 2112, 1989.
- [25] A. G. Kofman, S. Ashhab, and F. Nori, “Nonperturbative theory of weak pre-and post-selected measurements,” *Physics Reports*, vol. 520, no. 2, pp. 43–133, 2012.
- [26] J. S. Lundeen, *Generalized measurement and post-selection in optical quantum information*, vol. 68. 2006.

- [27] G. A. Smith, S. Chaudhury, A. Silberfarb, I. H. Deutsch, and P. S. Jessen, “Continuous weak measurement and nonlinear dynamics in a cold spin ensemble,” *Physical review letters*, vol. 93, no. 16, p. 163602, 2004.
- [28] J. Dressel, M. Malik, F. M. Miatto, A. N. Jordan, and R. W. Boyd, “Colloquium: Understanding quantum weak values: Basics and applications,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 86, no. 1, p. 307, 2014.
- [29] B. de Lima Bernardo, W. S. Martins, S. Azevedo, and A. Rosas, “Uncertainty control and precision enhancement of weak measurements in the quadratic regime,” *Physical Review A*, vol. 92, no. 1, p. 012109, 2015.
- [30] B. de Lima Bernardo, S. Azevedo, and A. Rosas, “Simplified algebraic description of weak measurements with hermite–gaussian and laguerre–gaussian pointer states,” *Optics Communications*, vol. 331, pp. 194–197, 2014.
- [31] B. de Lima Bernardo, S. Azevedo, and A. Rosas, “Ultrasmall polarization rotation measurements via weak value amplification,” *Physics Letters A*, vol. 378, no. 30–31, pp. 2029–2033, 2014.
- [32] N. Ritchie, J. G. Story, and R. G. Hulet, “Realization of a measurement of a “weak value”,” *Physical review letters*, vol. 66, no. 9, p. 1107, 1991.
- [33] L. Zehnder *Z Instrumentenk*, vol. 11, no. 275, 1891.
- [34] L. Mach *Z Instrumentenk*, vol. 12, no. 89, 1892.
- [35] F. Ostermann, C. J. d. H. Cavalcanti, S. D. Prado, and T. d. S. F. Ricci, “Fundamentos da física quântica à luz de um interferômetro virtual de mach-zehnder,” *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias. Ourense. Vol. 8, no. 3 (2009), p. 1094-1116*, 2009.
- [36] A. Pereira, F. Ostermann, and C. Cavalcanti, “On the use of a virtual mach–zehnder interferometer in the teaching of quantum mechanics,” *Physics Education*, vol. 44, no. 3, p. 281, 2009.
- [37] A. Pereira, C. J. de Holanda Cavalcanti, O. Pessoa Jr, and F. Ostermann, “Uma abordagem conceitual e fenomenológica dos postulados da física quântica,” *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, vol. 29, pp. 831–863, 2012.
- [38] G. G. Gomes and M. Pietrocola, “O experimento de stern-gerlach e o spin do elétron: um exemplo de quasi-história,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 33, no. 2, pp. 1–11, 2011.

- [39] S. Adams, “Quantum bombing reality,” *Physics Education*, vol. 33, no. 6, p. 378, 1998.
- [40] V. Degiorgio, “Phase shift between the transmittes an the reflected optical fields of a semireflecting lossless mirror is $\pi/2$,” *American Journal of Physics*, vol. 48, no. 81, 1980.
- [41] T. L. Dimitrova and A. Weis, “Single photon quantum erasing: a demonstration experiment,” *European journal of physics*, vol. 31, no. 3, p. 625, 2010.
- [42] R. Colella, A. W. Overhauser, and S. A. Werner, “Observation of gravitationally induced quantum interference,” *Physical Review Letters*, vol. 34, no. 23, p. 1472, 1975.
- [43] H. Abele and H. Leeb, “Gravitation and quantum interference experiments with neutrons,” *New Journal of Physics*, vol. 14, no. 5, p. 055010, 2012.
- [44] K. R. Barbero C, Miras C, “Gravitation and quantum interference experiments with neutrons,” *Electrochim Acta*, vol. 37, no. 429, 1992.
- [45] M. Daoud, G. Louis, X. Quelin, M. Gharbia, A. Gharbi, and P. Peretti, “Characterization by mirage effect technique of dye diffusion in columnar discotic liquid crystals,” *Liquid Crystals*, vol. 19, no. 6, pp. 833–837, 1995.

Apêndice A

A.1 Demonstração das equações 2.7 e 2.8

$$\begin{aligned}\hat{H} |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 0 \\ 1 \times 1 + (-1 \times 0) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}.\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}\hat{H} |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \times 0 + 1 \times 1 \\ 1 \times 0 + (-1 \times 1) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Provando a ação da porta quântica Hadamrd nos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

Apêndice B

B.1 Demonstração da equação 4.6

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right) \sum_n \langle a_n|I\rangle |a_n\rangle \otimes |\phi\rangle \\ &= \sum_n \exp\left(-\frac{ig\hat{A}\hat{P}t}{\hbar}\right) \langle a_n|I\rangle |a_n\rangle \otimes |\phi\rangle \\ &= \sum_n \exp\left(-\frac{igta_n\hat{P}}{\hbar}\right) \langle a_n|I\rangle |a_n\rangle \otimes |\phi\rangle \\ &= \sum_n \langle a_n|I\rangle |a_n\rangle \otimes \exp\left(-\frac{igta_n\hat{P}}{\hbar}\right) |\phi\rangle \\ &= \sum_n \langle a_n|I\rangle |a_n\rangle \otimes |\phi(gta_n)\rangle, \end{aligned} \tag{B.1}$$

onde usamos $\sum_n e^{\hat{A}} |a_n\rangle \langle a_n| = \sum_n a_n |a_n\rangle \langle a_n|$ (a função de um operador é um operador) e $\exp\{-\frac{ib\hat{P}}{\hbar}\} |\phi(x)\rangle \rightarrow |\phi(x+b)\rangle$ (o operador momento como operador de translação espacial), onde b é constante.

B.2 Demonstração das equações $\langle \hat{X} \rangle$ (4.7) e $\langle \hat{P} \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{X} \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{X} | \psi(t) \rangle \\
&= \sum_{n'} \langle I | a_{n'} \rangle \langle a_{n'} | \langle \phi(gta_{n'}) | \sum_n \langle an | I \rangle | a_n \rangle \hat{X} | \phi(gta_n) \rangle \\
&= \sum_{n'} \sum_n \langle I | a_{n'} \rangle \langle I | a_n \rangle \langle a_{n'} | a_n \rangle \langle \phi(gta_{n'}) | \hat{X} | \phi(gta_n) \rangle \\
&= \sum_n |\langle I | a_n \rangle|^2 gta_n \\
&= gt \sum_n a_n \langle I | a_n \rangle \langle a_n | I \rangle \\
&= gt \langle I | \left(\sum_n a_n | a_n \rangle \langle a_n | \right) | I \rangle \\
&= gt \langle I | \hat{A} | I \rangle.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Onde usamos $\langle a_{n'} | a_n \rangle = \delta_{n,n'}$ e $\langle \phi(gta_n) | \hat{X} | \phi(gta_n) \rangle = gta_n$.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{P} \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{P} | \psi(t) \rangle \\
&= \sum_{n'} \langle I | a_{n'} \rangle \langle a_{n'} | \langle \phi(gta_{n'}) | \sum_n \langle an | I \rangle | a_n \rangle \hat{P} | \phi(gta_n) \rangle \\
&= \sum_{n'} \sum_n \langle I | a_{n'} \rangle \langle I | a_n \rangle \langle a_{n'} | a_n \rangle \langle \phi(gta_{n'}) | \hat{P} | \phi(gta_n) \rangle \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{B.3}$$

onde usamos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x + gta_n)^2}{4\sigma^2}\right) \hat{P} \left[\exp\left(-\frac{(x + gta_n)^2}{4\sigma^2}\right) \right] dx = 0. \tag{B.4}$$

B.3 Demonstração da equação 4.12

$$\begin{aligned}
|\phi_f\rangle &= \frac{\langle F|\psi(t)\rangle}{\sqrt{P_{sucesso}}} \\
&= \frac{\langle F|\psi(t)\rangle}{\sqrt{|\langle F|I\rangle|^2}} \\
&= \frac{\langle F|I\rangle|\phi\rangle - \frac{igt}{\hbar}\langle F|\hat{A}|I\rangle\hat{P}|\phi\rangle + \dots}{\langle F|I\rangle} \\
&= \frac{\langle F|I\rangle|\phi\rangle}{\langle F|I\rangle} - \frac{igt}{\hbar}\frac{\langle F|\hat{A}|I\rangle\hat{P}|\phi\rangle}{\langle F|I\rangle} + \dots \\
&= |\phi\rangle - \frac{igt}{\hbar}\langle\hat{A}\rangle\hat{P}|\phi\rangle, \tag{B.5}
\end{aligned}$$

onde truncamos a relação matemática acima no termo de primeira ordem em gt , ou seja, desconsideramos o quarto termo por ser de ordem quadrática em gt .

B.4 Demonstração das equações 4.16, 4.17, 4.18 e 4.19

$$\begin{aligned}
\langle\phi|\hat{X}\hat{P}|\phi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) \hat{x}\hat{p} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) x \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} (-i\hbar) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) x \left(-\frac{2x}{4\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} (i\hbar) \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{i\hbar}{2\sigma^2} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\sigma^2)^{3/2}\right] \\
&= \frac{i\hbar}{2}. \tag{B.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \phi | \hat{P} \hat{X} | \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) \hat{p} \hat{x} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) x \left[\exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right)\right] dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} (-i\hbar) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) \left(1 - \frac{2x^2}{4\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} (-i\hbar) \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{2x^2}{4\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} (-i\hbar) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} (-i\hbar) \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{2x^2}{4\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= -i\hbar + \frac{i\hbar}{2} \\
&= -\frac{i\hbar}{2}.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
\langle \phi | \hat{X}^2 | \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) \hat{x}^2 \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sqrt{2\pi}\sigma^3 \\
&= \sigma^2.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
\langle \phi | \hat{P}^2 | \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) \hat{p}^2 \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right)^2 \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} (-i\hbar)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right)\right)\right] dx \\
&= \frac{-\hbar^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(1 - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right] \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) dx \\
&= \left(-\frac{\hbar^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{\hbar^2}{2\sqrt{2\pi}\sigma^3} \left[\sqrt{2\pi}\sigma - \frac{\sqrt{2\pi}\sigma}{2}\right] \\
&= \frac{\hbar^2}{2\sqrt{2\pi}\sigma^3} \frac{\sqrt{2\pi}\sigma}{2} \\
&= \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

B.5 Demonstração da equação 4.20

$$\begin{aligned}
\langle \hat{P} \rangle_f &= \langle \phi_f | \hat{P} | \phi_f \rangle \\
&= \langle \phi | \hat{P} | \phi \rangle - \frac{igt}{\hbar} \langle \hat{A} \rangle_w \langle \phi | \hat{P} \hat{P} | \phi \rangle \\
&+ \frac{igt}{\hbar} \langle \hat{A} \rangle_w^* \langle \phi | \hat{P} \hat{P} | \phi \rangle + \left(\frac{gt}{\hbar}\right)^2 \langle \hat{A} \rangle_w^* \langle \hat{A} \rangle_w \langle \phi | \hat{P} \hat{P} \hat{P} | \phi \rangle + \dots \\
&= -\frac{igt}{\hbar} \langle \hat{A} \rangle_w \langle \phi | \hat{P} \hat{P} | \phi \rangle + \frac{igt}{\hbar} \langle \hat{A} \rangle_w^* \langle \phi | \hat{P} \hat{P} | \phi \rangle \\
&= -\frac{igt}{\hbar} \text{Re} \langle \hat{A} \rangle_w \langle \phi | (\hat{P}^2 - \hat{P}^2) | \phi \rangle + \frac{gt}{\hbar} \text{Im} \langle \hat{A} \rangle_w \langle \phi | (\hat{P}^2 + \hat{P}^2) | \phi \rangle \\
&= \frac{\hbar gt}{2\sigma^2} \text{Im} \langle \hat{A} \rangle_w.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Apêndice C

C.1 Demonstração do resultado que há fase usando a equação 6.14

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \hat{S} |\psi_i\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \times 1 + (-i \times 0) \\ i \times 1 + (-1 \times 0) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i|1\rangle) \end{aligned} \tag{C.1}$$

e

$$\begin{aligned} |\psi_f\rangle &= \hat{S} |\psi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \times 1 + (-i \times i) \\ i \times 1 + (-1 \times i) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= |0\rangle. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Apêndice D

D.1 Demonstração da equação 7.4

Faremos os cálculos por partes. Primeiro, encontraremos o numerador desta equação:

$$\begin{aligned}\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0 | + \langle 1 |) \\ &\times (|0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1|) \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1 + \text{sen } \alpha} |0\rangle + \sqrt{1 - \text{sen } \alpha} |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0 | - \langle 1 |) (\sqrt{1 + \text{sen } \alpha} |0\rangle + \sqrt{1 - \text{sen } \alpha} |1\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \{ \sqrt{1 + \text{sen } \alpha} \langle 0 | 0 \rangle + \sqrt{1 - \text{sen } \alpha} \langle 0 | 1 \rangle \\ &+ \sqrt{1 + \text{sen } \alpha} \langle 1 | 0 \rangle - \sqrt{1 - \text{sen } \alpha} \langle 1 | 1 \rangle \} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \text{sen } \alpha} - \sqrt{1 - \text{sen } \alpha}).\end{aligned}\tag{D.1}$$

E agora para o denominador, $\langle \psi_f | \psi_i \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle \psi_f | \psi_i \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0 | + \langle 1 |) \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1 + \text{sen } \alpha} |0\rangle + \sqrt{1 - \text{sen } \alpha} |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \sqrt{1 + \text{sen } \alpha} \langle 0 | 0 \rangle + \sqrt{1 - \text{sen } \alpha} \langle 0 | 1 \rangle \\ &+ \sqrt{1 + \text{sen } \alpha} \langle 1 | 0 \rangle + \sqrt{1 - \text{sen } \alpha} \langle 1 | 1 \rangle \} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \text{sen } \alpha} + \sqrt{1 - \text{sen } \alpha}).\end{aligned}\tag{D.2}$$

Portanto, o valor fraco fica:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{A} \rangle_w &= \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \\
&= \frac{\frac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha})}{\frac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha})} \\
&= \frac{(\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha})}{(\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha})} \times \frac{(\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha})}{(\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha})} \\
&= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \\
&= \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right), \tag{D.3}
\end{aligned}$$

onde na segunda linha multiplicamos e dividimos a fração pelo conjugado do denominador, chegando na terceira linha. E usamos também a relação (14).

D.2 Demonstração da equação 7.5

Como já encontramos o valor $\langle \psi_f | \psi_i \rangle$, podemos usá-lo para encontrar o fator f :

$$\begin{aligned}
f &= |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 \\
&= \left| \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha}) \right|^2 \\
&= \frac{1}{4} (1 + \sin \alpha + 1 - \sin \alpha + 2\sqrt{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)}) \\
&= \frac{1}{4} (2 + 2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}) \\
&= \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha). \tag{D.4}
\end{aligned}$$