



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

Aspectos modernos em buracos negros

José André Vieira Campos

JOÃO PESSOA

- Julho 2022 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

Aspectos modernos em buracos negros

José André Vieira Campos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba, em complementação aos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física, na área de concentração em gravitação e cosmologia.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito.

Coorientador: Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto.

JOÃO PESSOA

- Julho 2022 -

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C198a Campos, José André Vieira.

Aspectos modernos em buracos negros / José André
Vieira Campos. - João Pessoa, 2022.

136 f. : il.

Orientação: Francisco de Assis de Brito.

Coorientação: Marcos Antônio Anacleto.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Buracos negros. 2. Espalhamento. 3. Modos
quasinormais. 4. Correções quânticas. I. Brito,
Francisco de Assis de. II. Anacleto, Marcos Antônio.
III. Título.

UFPB/BC

CDU 524.882(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **José André Vieira Campos**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física de Partículas Elementares e Campos.

1 Aos vinte e nove dias do mês de julho de dois mil e vinte e dois, às quatorze horas,
2 reuniram-se, na Sala Virtual do Google Meet, os membros da Banca Examinadora constituída
3 para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física de Partículas
4 Elementares e Campos, **José André Vieira Campos**. A comissão examinadora foi composta
5 pelos professores doutores: *Francisco de Assis de Brito* (UFPB) - orientador e presidente da
6 banca examinadora, *Dionísio Bazeia Filho* (UFPB), *Fábio Leal de Melo Dahia* (UFPB),
7 *Carlos Alberto Santos de Almeida* (UFCE), *Tiago Homero Mariz do Nascimento* (UFAL).
8 Dando início aos trabalhos, o Professor Francisco de Assis de Brito comunicou aos presentes
9 a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a
10 exposição do trabalho de tese intitulado “*Aspectos Modernos em Buracos Negros*”. Concluída
11 a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer:
12 “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo
13 diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Maria do Socorro de Oliveira
14 Souza, Assistente em Administração, lavrei a presente ata que será assinada por mim e pelos
15 membros da Banca Examinadora.

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito *Orientador* -
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho - PPGF/UFPB

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia - PPGF/UFPB

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida - UFCE

Documento assinado digitalmente

MARIA DO SOCORRO DE OLIVEIRA SOUZA
Data: 22/08/2022 10:39:49-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento - UFAL

Maria do Socorro de Oliveira Souza
Assistente em Administração

José André Vieira Campos
Discente

Ao meu pai João Monteiro Campos (*in memoriam*)

*Temos de ter a imaginação para pensar em algo
que nunca foi visto antes, que nunca foi ouvido
antes.*

- Richard P. Feynman

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus pelo dom da vida e condições para que eu conseguisse cumprir mais uma importante etapa da minha vida, mesmo em meio as dificuldades impostas pela pandemia a todos nós.

Ao Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, pela orientação e oportunidade de realização deste trabalho em especial ao Prof. Dr. Marcos Antonio Anacleto pela coorientação e disponibilidade durante esses quatro anos.

A todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica e que colaboraram indiretamente com essa tese, a todos os funcionários do Departamento de Física da UFPB.

Aos amigos do departamento pelas discussões de Física, momentos de lazer e que propiciaram que o ambiente fosse agradável para realização do trabalho.

À minha família em especial minha mãe Edileusa e meu irmão Rodrigo, pelo apoio incondicional e encorajamento constante, em todas as etapas da minha vida.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFPB, pela oportunidade da realização do doutorado em Física.

E finalmente ao CNPq pelo financiamento e suporte.

Lista de Publicações

1. **Absorption and scattering of a noncommutative black hole.** *Physics Letters B*, 803 (2020), 135334; Anacleto, M. A., Brito, F. A., Campos, J. A. V., Passos, E.
2. **Absorption and scattering by a self-dual black hole.** *General Relativity and Gravitation*, 52(10) (2020), 1-17; Anacleto, M. A., Brito, F. A., Campos, J. A. V., Passos, E.
3. **Quantum-corrected scattering and absorption of a Schwarzschild black hole with GUP.** *Physics Letters B*, 810 (2020), 135830; Anacleto, M. A., Brito, F. A., Campos, J. A. V., Passos, E.
4. **Quasinormal modes and shadow of a Schwarzschild black hole with GUP.** *Annals of Physics*, 434 (2020), 168662; Anacleto, M. A., Campos, J. A. V., Brito, F. A., Passos, E.
5. **Quasinormal modes and shadow of noncommutative black hole.** *Scientific Reports*, 12 (2022), 8516; Campos, J. A. V., Anacleto, M. A., Brito, F. A., Passos, E.

Lista de Figuras

2.1	Gráfico da função $f(r)$ para alguns valores de $M/\sqrt{\theta}$. Os raios do horizonte para cada caso é obtido pela interseção das curvas com o eixo horizontal. Para $M = \sqrt{\theta}$ (azul tracejada), não temos horizonte, já para $M = M_{min} = 1.905\sqrt{\theta}$ (preta contínua) temos um horizonte degenerado e por último $M = 2.5\sqrt{\theta}$ (laranja pontilhada tracejada) representa o caso onde temos dois horizontes.	10
2.2	No gráfico vemos que o resultado padrão diverge para valores pequenos de r_h , enquanto o efeito da não-comutatividade elimina esse problema.	11
2.3	Geodésicas em torno de um buraco negro não-comutativo. Os feixes de luz vindos do infinito com parâmetros de impacto definidos por $b = 3.6, 4.1, 4.7, 5.2, 5.9$ e 6.5 são os mesmos para todos os gráficos, assumindo $M = 1$. Podemos ver a influência do parâmetro não-comutativo nas curvas geodésicas de (a) $\Theta = 0$ (caso Schwarzschild) a (d) $\Theta = 0.12$, onde $\Theta = \sqrt{\theta/\pi}$	19
2.4	Cada imagem mostra feixes de luz vindos do infinito com parâmetros de impacto específicos. Em (a) temos o parâmetro de impacto menor que o parâmetro de impacto crítico, $b < b_c$ para o qual os feixes são absorvidos, já em (b) temos o cenário de espalhamento quando $b > b_c$ e em (c) $b = b_c$, temos que os feixes de luz ficam presos em uma órbita.	20
2.5	No esquema da figura podemos ver a relação entre o ângulo de deflexão e o ângulo total varrido pelo feixe de luz que passa por um ponto máximo de aproximação.	20
2.6	Geodésicas em torno de um buraco negro não-comutativo. As linhas vermelhas correspondem às geodésicas para o parâmetro de impacto glória b_g , comparadas ao parâmetro de impacto crítico.	22
2.7	Seção de choque parcial de absorção em (a) temos apenas $l = 0$, quanto em (b) comparamos os multipolos $l = 0, 1, 2, 3$	24

2.8	Seção de choque total de absorção. As retas representam os valores obtidos pelo método geodésico equação (2.58), $\sigma_{abs}^{af} = 27, 23.2, 16.6$ para $\Theta = 0, 0.05, 0.12$ respectivamente. Podemos verificar o efeito da não-comutatividade com o caso de Schwarzschild ($\Theta = 0$).	24
2.9	Seção de choque parcial de absorção para o multipolo $l = 0$. Comparamos os resultados para um buraco negro de Reissner-Nordström admitido $Q/M = 0.5$ com o buraco negro não-comutativo assumindo $\Theta = 0.045$ (b) e $\Theta = 0.065$ (a).	25
2.10	Seção de choque parcial de absorção para $l = 0$. Comparamos um buraco negro de Reissner-Nordström admitido $Q/M = 1$ com o buraco negro não-comutativo em (a) $\Theta = 0.085$ e em (b) $\Theta = 0.115$.	25
2.11	Seção de choque total de absorção. Novamente comparamos os dois casos, para buraco negro de Reissner-Nordström com $Q/M = 0.5$ e 1 e o caso não-comutativo $\Theta = 0.045, 0.065$ e $\Theta = 0.085, 0.115$.	26
2.12	Seção de choque de diferencial de espalhamento para alguns valores de Θ em dois cenários de frequência $M\omega = 1$ e $M\omega = 3$.	26
2.13	Comparando os resultados para a seção de choque diferencial de espalhamento numérico com as aproximações geodésicas e a aproximação semiclássica glória para $\omega M = 1$ e $\omega M = 3$ em ambos os casos usamos $\Theta = 0.05$.	27
3.1	Efeito glória em torno de um buraco negro com correções quânticas GUP. As linhas vermelhas correspondem as geodésicas para o parâmetro de impacto glória b_g , comparadas ao parâmetro de impacto crítico em azul.	39
3.2	Nas imagens (b) e (d) temos a seção de choque parcial de absorção com GUP linear e quadrático para $l = 0$ com valores diferentes de α e β . Enquanto na imagem (a) temos o efeito apenas do parâmetro $\alpha = 0.0, 0.02, 0.04, 0.06$. Na imagem (c) temos apenas a parte linear do GUP $\alpha = 0$ e $\beta = 0.0, 0.01, 0.02, 0.03$.	41
3.3	Seção de choque de absorção para os multipolos $l = 0, 1, 2, 3$.	42
3.4	Em (a) temos a seção de choque parcial de absorção com GUP linear e quadrático para $l = 0$, com $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.01$ e uma variação da massa da forma $M = 1.0, 0.5, 0.15, 0.05, 0.035$, no gráfico (b) temos apenas a parte quadrática $\alpha = 0$.	42
3.5	Seção choque total de absorção com GUP linear e quadrático. Em (a) temos apenas a parte quadrática com $\alpha = 0.0$ e alguns valores para β . Enquanto (b) temos apenas a contribuição de α	43

3.6	Seção de choque diferencial de espalhamento para um buraco negro com correções quânticas GUP, usando o método clássico, semiclássico glória e numérico.	43
3.7	Seção de choque diferencial de espalhamento para diferentes valores de α e β . Podemos ver a influência da correção quântica na largura das franjas de interferência.	44
4.1	Em (a) temos a seção de choque parcial de absorção para $l = 0$, com $a_0 = \sqrt{3}/2$, $m = 1$ e $P = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. Já em (b) comparamos os multipolos $l = 0, 1, 2, 3$ fixando $a_0 = \sqrt{3}/2$, $m = 1$ e $P = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ (lado direito)	53
4.2	Seção de choque parcial de absorção para $l = 0$ e $a_0 = \sqrt{3}/2$. Em (a) verificamos o comportamento da absorção para P fixo em 0.1 com $m = 1, 0.5, 0.3, 0.2, 0.1$. Enquanto em (b) fixamos o m em 0.4 e $P = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$	53
4.3	Seção de choque diferencial de espalhamento com $a_0 = \sqrt{3}/2$ e $P = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$, em (a) temos o comportamento do espalhamento para uma frequência fixa em $\omega = 1$, enquanto em (b) fixamos em $\omega = 3$. As curvas de cor preta representam o caso para um buraco negro de Schwarzschild quando $a_0 = 0$ e $P = 0$	54
4.4	Seção de choque total de absorção com $a_0 = \sqrt{3}/2$, $m = 1$ e $P = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. Cada linha representa os valores da seção de absorção para alta frequência obtido pela equação (4.40), estes valores em ordem crescente foram 19.11, 20.26, 21.97, 24.33 e 27.	55
5.1	Coeficiente de transmissão (a) para $\alpha = 0$ e $\beta = 0.01, 0.02, 0.03$; enquanto para (b) $\alpha = 0.02, 0.04, 0.06$ e $\beta = 0$ todos com $M = 1$	61
5.2	Seção de choque de absorção obtidos pelo WKB de sexta ordem, comparado com o resultado obtidos pelo método numérico descrito no Capítulo 3.	61
5.3	Frequências quasinormais, parte real e imaginária em função de n . Temos de cima para baixo a distribuição na ordem crescente do número de multipolo de $l = 1$ até $l = 3$, enquanto da esquerda para direita temos a variação do parâmetro α para 0, 0.02 e 0.06. Para todos os gráficos assumimos a mesma variação de β (0, 0.01, 0.02 e 0.03). Observe que quando alteramos os valores de α (da esquerda para a direita) temos uma variação muito sutil nas curvas, que são mais perceptíveis para $n > 5$	68

5.4	Plano complexo para os modos quasinormais, considerando os seguintes parâmetros: $l = 0$ (círculo), $l = 1$ (quadrado), $l = 2$ (diamante). Em (a) consideramos apenas a parte quadrática da correção fazendo $\alpha = 0$ e $\beta \geq 0$: $\beta = 0$ (preto), $\beta = 0.01$, (vermelho) $\beta = 0.02$ (azul) e $\beta = 0.03$ (verde). Em (b) consideramos apenas a parte linear da correção, definindo da forma, $\beta = 0$ e $\alpha \geq 0$: $\alpha = 0$ (preto), $\alpha = 0.02$, (vermelho) $\alpha = 0.04$ (azul) e $\alpha = 0.06$ (verde).	69
5.5	Ilustração do grid de integração, cada quadrado do grid representa uma etapa da integração. O quadrado em destaque representa uma etapa específica da integração. Os eixos v e u representa os dados iniciais e h o comprimento do passo.	69
5.6	Graficos Log-log para a função de onda em $x = 10M$, comparando o caso de Schwarzschild com os efeitos dos parâmetros α e β	70
5.7	Potencial efetivo V_{ef} em função da coordenada tortoise x em (a) $l = 1$ e (b) $l = 2$	72
5.8	Coefficiente de transmissão para três multipolos $l = 1, 2, 3$ e $\Theta = 0.05$ em (a) e $\Theta = 0.12$ em (b). Podemos notar que a aproximação WKB e resultado numérico apresentado no Capítulo 2 são bem próximos para esses valores de multipolos.	73
5.9	Partes reais e imaginárias das frequências quasinormais, em função de n . Para $l = 1$ as curvas de frequência são bastante dispersas com o aumento de n , enquanto para $l = 3, 4$ as curvas da parte real são mais constantes.	78
5.10	Plano complexo para os modos quasinormais. No gráfico (a) temos os resultados obtidos pela aproximação WKB, enquanto em (b) usamos fração contínua. Os marcadores denotam o número multipolar como: $l = 1$ (círculo), $l = 2$ (quadrado) e $l = 3$ (diamante), enquanto as cores denotam o valor do parâmetro não-comutativo $\Theta = 0$ (preto), $\Theta = 0.05$ (vermelho), $\Theta = 0.10$ (azul) e $\Theta = 0.12$ (verde).	78
5.11	Graficos Log-log para a função de onda em $x = 10M$, comparando o caso de Schwarzschild com os efeitos dos parâmetros não-comutativo Θ	80
6.1	Diagrama esquemático de um observador distante, e o plano celeste.	84
6.2	Cada círculo representa o limite da sombra do buraco negro com GUP, fixando $M = 1$ para diferentes valores de α e β	86
6.3	Sombra do buraco negro no limite de pequenas massas, usando os seguintes valores para os parâmetros: $M = 0.05$, $\alpha = 0$ e $\beta = 0.01, 0.02, 0.03$	86
6.4	Influência da não-comutatividade no comportamento do raio da sombra assumindo os seguintes valores de parâmetros $M = 1$ e $\Theta = 0.0, 0.05, 0.10$ e 0.12	88

6.5	Vemos a influência da não-comutatividade na sombra admitindo (a) $\Theta = 0.01$ e $M = 1.0, 0.6, 0.4, 0.2, 0.09$. (b) $\Theta = 0.005$ e $M = 0.1, 0.09, 0.08, 0.06, 0.04$	89
6.6	Vemos a influência da não-comutatividade na sombra, admitindo os seguintes parâmetros: (a) $M = 0.03$ e $\Theta = 0.000, 0.001, 0.002, 0.003$. (b) $M = 0.05$ e $\Theta = 0.000, 0.001, 0.002, 0.003$	89
6.7	As linhas representam os valores do raio da sombra R_s para cada cenário, os pontos representam os valores obtidos pelo método WKB de sexta ordem, assumindo os valores $n = 5$ e $M = 1$	91
B.1	Gráfico da função $Q(x)$ onde as três regiões estão separadas pelos pontos x_1 e x_2	101

Lista de Tabelas

3.1	Resultados analíticos e numéricos para o parâmetro de impacto glória e sua derivada. . .	38
3.2	Resultados analíticos e numéricos para seção de choque de absorção no limite $\omega \rightarrow 0$, com $M = 1$ e $l = 0$	40
3.3	Resultados analíticos e numéricos para seção de choque de absorção no limite $\omega \rightarrow 0$, agora considerando alguns valores para M com $l = 0$	40
4.1	Resultados analíticos e numéricos para a seção de absorção para valores pequenos de m . Os resultados estão divididos por π e o valor de P está fixado em 0.1.	52
5.1	Frequências quasinormais para o multipolo $l = 1$, considerando a parte linear e quadrática.	66
5.2	Frequências quasinormais para o multipolo $l = 2$, considerando a parte linear e quadrática.	66
5.3	Frequências quasinormais no limite de pequenas massas para o multipolo $l = 1$	67
5.4	Frequências quasinormais no limite de pequenas massas para o multipolo $l = 2$	67
5.5	Frequências quasinormais para o caso não-comutativo, multipolo $l = 1$	77
5.6	Frequências quasinormais para o caso não-comutativo, multipolo $l = 2$	77
5.7	Frequências quasinormais para o caso não-comutativo, multipolo $l = 3$	77

Resumo

Nesta tese, estudamos o processo de espalhamento de ondas escalares devido a diversos cenários de buracos negros, como os efeitos da não-comutatividade via distribuição Lorentziana de massa, a implementação de correções quânticas na métrica de Schwarzschild usando o princípio da incerteza generalizado (generalized uncertainty principle - GUP), e buraco negro auto-dual. Usamos alguns métodos para analisar o processo de espalhamento em baixas e altas frequências, principalmente o método de ondas parciais e análise numérica para verificar os resultados. Determinamos o deslocamento de fase analiticamente no limite de baixas frequências e vimos que a seção de choque de absorção e a seção de choque diferencial de espalhamento são modificadas pelas correções implementadas em cada caso. Em todos os cenários descobrimos que a absorção não vai a zero mesmo em limites de pequenas massas. Complementamos com o estudo dos modos quasinormais usando dois métodos distintos: a aproximação WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) com as correções até sexta ordem implementadas por Konoplya e a análise numérica introduzida por Leaver. Notamos que tanto a não-comutatividade como as correções introduzidas com o GUP modificam o comportamento das frequências quasinormais. Além disso, investigamos o raio da sombra do buraco negro nestes dois cenários e verificamos a relação com os modos quasinormais no regime eikonal.

Palavras-chave: Buraco negro, Espalhamento, Modos quasinormais, Correções quânticas.

Abstract

In this thesis, we study the process of scattering massless scalar waves due to different black hole scenarios, such as the effects of noncommutative via Lorentzian smeared mass distribution, the implementation of quantum corrections in the Schwarzschild metric using the generalized uncertainty principle (GUP), and self-dual black hole. We use different methods to investigate the scattering process at the low and high frequencies limit, mainly the partial wave method, and numerical analysis to verify the results. We determined the phase shift analytically at the low energy limit and saw that the absorption cross section and the differential scattering cross section are modified by the corrections in each scenario. In all scenarios we find that the absorption is not zero as the mass parameter goes to zero. We complement it with the study of quasinormal modes using two different methods: The first is the Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) approximation with corrections up to the sixth order implemented by Konoplya and the second is the numerical analysis introduced by Leaver. We noticed that both the noncommutativity and the corrections introduced with the GUP modify the behavior of quasinormal frequencies. Furthermore, we investigated the black hole shadow radius in these two scenarios and verified the relationship with the quasinormal modes in the eikonal regime.

Keywords: Black hole, Scattering, Quasinormal modes, Quantum corrections .

Sumário

Agradecimentos	vii
Lista de Publicações	viii
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xiv
Resumo	xv
Abstract	xvi
1 Introdução	1
2 Absorção e espalhamento de um buraco negro não-comutativo	7
2.1 Buraco negro de Schwarzschild não-comutativo	8
2.1.1 Método de ondas parciais	13
2.1.2 Estudo da órbita e análise clássica	17
2.2 análise numérica	22
3 Correções quânticas, espalhamento e absorção de um buraco negro de Schwarzschild com GUP	28
3.1 Métrica com correções quânticas	29
3.1.1 Método de ondas parciais	31
3.1.2 Estudo da órbita e análise clássica	35
3.1.3 Aproximação glória	37
3.2 Resultados numéricos	38

4	Absorção e espalhamento de um buraco negro auto-dual	45
4.1	Buracos negros auto-duais	46
4.1.1	Seção de choque de absorção e espalhamento diferencial	47
4.1.2	Geodésica nula	50
4.2	Análise Numérica	52
5	Modos quasinormais em buracos negros	56
5.1	Buraco negro com GUP	57
5.1.1	Aproximação WKB	58
5.1.2	Método fração contínua	61
5.1.3	Comparando os resultados	64
5.1.4	Domínio temporal	65
5.2	Buraco negro não-comutativo	70
5.2.1	Aproximação WKB	71
5.2.2	Fração contínua	72
5.2.3	Comparando os resultados	76
5.2.4	Domínio temporal	79
6	Estudo da sombra de um buraco negro	81
6.1	Cálculo da sombra do buraco negro	82
6.1.1	Buraco negro com GUP	84
6.1.2	Buraco negro não-comutativo	87
6.1.3	Raio da sombra e modos quasinormais	89
7	Conclusões	92
A	Ângulo de deflexão semiclássico	96
A.1	Buraco negro não-comutativo	96
A.2	Buraco negro com GUP	98
B	Análise da aproximação WKB	99
C	Equação esferoidal	105
D	Método computacional	108

Capítulo 1

Introdução

A relatividade geral e a mecânica quântica mudaram profundamente nossa visão do mundo, não só isso como ambas as teorias foram verificadas com extraordinária precisão nas últimas décadas. Neste contexto inúmeros pesquisadores buscam formas de unificar essas teorias com o objetivo de encontrar uma descrição para o universo em escalas muito pequenas da ordem do comprimento de Planck ($l_p \sim 10^{-33} \text{cm}$). Um dos trabalhos que abriram as portas para um melhor entendimento sobre a relação entre esses dois regimes foi proposto por S. Hawking em 1975 [1], ele mostrou que os buracos negros podem evaporar, ou seja, que podem emitir radiação térmica como um corpo negro. Assim Hawking levantou uma questão natural sobre o estágio final da evaporação e a possível perda de informação codificada nos estados quânticos da matéria. Todos os problemas sobre a evaporação do buraco negro foram basicamente devido a uma quebra da descrição semiclássica, que requer que a massa do buraco negro seja muito maior que a massa de Planck $M_{BN} \gg M_p$. À medida que o buraco negro evapora, perdendo energia na forma de radiação térmica, a massa do buraco negro diminui tal que essa condição não pode ser mais atendida e precisamos de uma teoria quântica da gravidade.

Nesta tese não pretendemos dar uma descrição completa das tentativas existentes para a formulação de uma teoria quântica da gravitação, porém vamos mencionar brevemente as principais alternativas. Atualmente temos pelo menos duas teorias candidatas ao estudo do Universo próximo à escala de Planck. A primeira é a teoria de supercordas [2] na qual a supersimetria é incorporada à física como uma forma de unificar ou abranger duas categorias de partículas aparentemente distintas, bósons e fermions. Um dos temas de grandes discussões há décadas é a existência de dimensões espaciais extras, esta hi-

pótese é uma solução viável para o problema da hierarquia, ou seja, a presença de duas escalas fundamentais da natureza, a escala eletrofraca e a escala de Planck, separadas por 16 ordens de magnitude [3, 4, 5]. O ponto importante é que as dimensões extras podem ser consideradas tão grandes quanto cerca de um milímetro, se os campos do Modelo Padrão ¹ são restritos em uma subvariedade de quatro dimensões do espaço-tempo de dimensão superior, e que somente a gravidade pode sondar as dimensões transversais adicionais. Assim, podemos identificar uma nova escala M_* , derivada da escala de Planck através da relação $M_*^{(2+n)} = M_p^2/R^n$ onde R é o tamanho médio de cada uma das n dimensões extras. Se R é grande o suficiente em relação ao comprimento de Planck l_p , então M_* será muito menor que M_p , e assim teríamos uma única escala para ambas as interações eletrofraca e gravitacional.

Além de dar uma possível solução para o problema da hierarquia, a presença de dimensões extras, há outras consequências importantes. Um buraco negro menor que o tamanho das dimensões extras pode ser considerado, como totalmente submerso em um espaço-tempo isotrópico de $4 + n$ dimensões, com uma dimensão de tempo e $3 + n$ espaciais. Isso permite usar a solução de Schwarzschild em dimensões altas para descrever a fase neutra sem rotação do buraco negro [6].

A segunda alternativa é conhecida como *loop quantum gravity* (LQG), ou seja, gravidade quântica em laços proposta por Rovelli, Smolin e outros [7, 8, 9, 10, 11]. Esta teoria é derivada do procedimento de quantização canônica das equações de Einstein obtidas em função das variáveis de Ashtekar [12], com o objetivo de reconciliar a relatividade geral e a mecânica quântica na escala de Planck. A LQG postula que a estrutura do espaço tempo é composta de laços finitos entrelaçados em um tecido ou uma rede extremamente fina. Essas redes de laços são chamadas de redes de spin. A evolução de uma rede de spin tem uma escala acima da ordem do comprimento de Planck. Como consequência da quantização, todas as áreas e volumes do Universo devem ser múltiplos de valores discretos, por exemplo, a área de uma superfície bidimensional qualquer é representada na LQG da forma $A = 8\pi G\gamma \sum_i \sqrt{j_i(j_i + 1)}$, onde j_i é o spin associado com os nós da rede de spin e γ um parâmetro fundamental (Barbero-Immirzi²).

¹Teoria que descreve três das quatro forças fundamentais conhecidas no universo, apenas a gravidade permanece inexplicada, veja mais em [The Standard Model](#).

²Este parâmetro surge no processo de descrever uma conexão de Lorentz com o grupo não compacto $SO(3,1)$ na forma de uma conexão complexa com valores em um grupo compacto de rotações, seja $SO(3)$

Ambas as teorias têm grandes méritos e problemas em aberto, ainda que sejam fisicamente muito promissoras e matematicamente elegantes e bem definidas, não temos dados experimentais que demonstrem algum tipo de efeito gravitacional quântico. Assim, como iniciado por Hawking, um caminho para desvendar alguns desses mistérios está no estudo dos buracos negros, mais especificamente no estágio final, no qual o buraco negro resultante perde energia pela emissão de radiação, com a diminuição gradual da massa e aumento da temperatura. Em uma geometria de Schwarzschild, haveria um comportamento divergente na temperatura Hawking nas proximidades da origem, ou seja, perturbado por fortes flutuações gravitacionais quânticas da variedade espaço-tempo. Esta fase de Planck da evaporação do buraco negro [14] é estudada de forma eficiente usando como base argumentos da geometria não-comutativa. Assim da mesma forma que acontece com coordenadas e momentos na teoria quântica convencional, temos um novo tipo de princípio da incerteza, que viria de uma relação não comutativa e assim, postulando a existência de uma variedade não-comutativa.

Temos então que as coordenadas do espaço tempo x^μ passam a ser operadores hermitianos que não comutam entre si, obtendo uma relação de comutação da forma

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \quad (1.1)$$

em que $\theta^{\mu\nu}$ é uma matriz anti-simétrica, com dimensão do comprimento ao quadrado. A abordagem mais popular para a geometria não-comutativa baseia-se na substituição da multiplicação pontual de corpos na lagrangiana por um produto- \star Groenewold-Moyal [15, 16]. Esta técnica, amplamente inspirada nos fundamentos da mecânica quântica, fornece uma maneira sistemática de descrever espaços não comutativos e estudar teorias de campos que se propagam neles.

Uma característica comum entre várias teorias da gravidade quântica, como as mencionadas, é a existência de um comprimento mensurável mínimo que pode ser identificado com a ordem da escala de Planck. O comprimento mensurável mínimo é especialmente importante, pois pode ser aplicado a diferentes sistemas físicos e modificar muitas teorias clássicas [17, 18, 19, 20]. Uma das teorias modificadas mais interessantes é chamada de *generalized uncertainty principle* (GUP) ou princípio da incerteza generalizado, que é uma generalização do princípio convencional da incerteza de Heisenberg. É bem conhecido que a GUP pode ser derivada a partir de uma deformação da álgebra de Lie de $SU(2)$, uma revisão atual em [13].

conhecido que o princípio da incerteza está intimamente relacionado com a relação de comutação fundamental. Portanto, levando em conta a escala mensurável mínima, Kempf, Mangano e Mann [21] propuseram uma relação de comutação fundamental modificada

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} [1 + \beta p^2], \quad (1.2)$$

com os operadores posição e momento, $x_i = x_{0i}$ e $p_j = p_{0j} (1 + \beta p_0^2)$, respectivamente, onde x_{0i} e p_{0j} satisfazem as relações de comutação canônicas $[x_{0i}, p_{0j}] = i\hbar\delta_{ij}$. Através das relações acima, a forma mais comum do GUP é dada da forma

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \beta(\Delta p)^2], \quad (1.3)$$

onde Δx e Δp representam as incertezas para posição e momento. Sendo que $\beta = \beta_0 l_p^2 / \hbar^2 = \beta_0 / M_p^2 c^2$, β_0 é uma constante sem dimensão, a equação (1.3) implica na existência de um comprimento mensurável mínimo $\Delta x_{min} \approx l_p \sqrt{\beta_0}$.

Na presente tese abordaremos a influência dessas teorias mencionadas, como a não-comutatividade e o princípio da incerteza generalizado no cenário de buracos negros no contexto de espalhamento e absorção, e a influência nas frequências quasinormais. Uma forma de estudar os efeitos ao redor de buracos negros é por meio da análise de espalhamento. Na literatura podemos encontrar diversos trabalhos propostos para investigar diferentes aspectos do espalhamento de ondas escalares por buracos negros [22, 23, 24]. Vários estudos descobriram que no limite de baixa frequência ($GM\omega \ll 1$) [25, 26, 27, 28], a seção de choque de espalhamento diferencial no limite de pequenos ângulos exibe o seguinte resultado $d\sigma/d\Omega \approx 16G^2M^2/\vartheta^4$. Além disso, muitos estudos anteriores [29, 30, 31] relataram que no limite de baixa frequência a seção de choque de absorção é igual à área do horizonte de eventos do buraco negro, dada por $\sigma = 4\pi r_h^2 = 16\pi G^2M^2$ [32]. Nos últimos anos, uma extensão do método de onda parcial também foi aplicada na física de buracos negros análogos em fluidos [33, 34, 35, 36], bem como na investigação de espalhamento devido a um buraco negro não-comutativo BTZ (Bañados-Teitelboim-Zanelli) [37]. Alguns estudos sobre o processo de espalhamento de campos massivos de buracos negros também foram investigados [38, 39, 40, 41]. Na teoria das cordas, o espalhamento de ondas escalares por buracos negros em d dimensões esfericamente simétrico também foi analisado [42]. Os primeiros trabalhos de investigação numérica do espalhamento de ondas planares por buracos negros foram examinados por Sanchez na década de 1970, ele aplicou o método numérico em buraco negro de Schwarzschild [43].

Diversos avanço no ramo experimental nos possibilitou incríveis resultados, como a detecção de ondas gravitacionais que surgem da fusão de buracos negros e estrelas de nêutrons, apresentada pela colaboração LIGO-VIRGO [44, 45]. O estudo de perturbações em buracos negros teve início com o trabalho de Regge e Wheeler em 1950 [46], analisando a instabilidade do buraco negro de Schwarzschild usando pequenas perturbações em sua geometria. De modo geral, perturbações devido a campos de teste ou mesmo a geometria nas vizinhanças do horizonte de eventos evoluem com frequências bem características denominadas de quasinormais [47]. As frequências quasinormais dependem exclusivamente dos parâmetros que definem a família de buracos negros considerada, e não da perturbação inicial. Assim, seu espectro de frequência e tempo de amortecimento podem ser analisados estudando modos quasinormais. Os modos quasinormais são frequências complexas que extraem informações sobre como os buracos negros relaxam depois que a perturbação para de agir sobre eles. Se a parte imaginária dessas frequências for positiva significa que as perturbações crescem com o tempo tornando o sistema instável. Uma maneira bem conhecida de analisar modos quasinormais é através da aproximação Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB), que iremos detalhar melhor nos capítulos seguintes, além de apresentar uma forma numérica para obtenção das frequências quasinormais.

Estas melhorias nas técnicas experimentais, resultaram em uma das imagens mais impressionantes das últimas décadas, a primeira imagem de um buraco negro supermassivo localizado no centro da galáxia M87*, fruto da colaboração *Event Horizon Telescope* (EHT) [48, 49]. Estes resultados experimentais estimularam e reaqueceram os estudos sobre sombra de buracos negros. Esta sombra é uma região escura que indica ausência de estrelas e galáxias ao fundo, são determinadas por órbitas instáveis que estão fora do horizonte de eventos. Por sua vez esta órbita instável, é uma região onde delimita os feixes que são absorvidos ou espalhados, pelo buraco negro, muitas vezes chamado de anel ou esfera de fótons. Para o buraco negro de Schwarzschild o tamanho da sombra corresponde ao tamanho da órbita instável aumentado pela curvatura dos raios de luz, como veremos nos capítulos seguintes. Relacionado à investigação de modos quasinormais, o estudo da sombra de buracos negros tem sido amplamente explorado na literatura [50, 51, 52, 53, 54]. Este estudo é uma ferramenta muito importante para entender as propriedades do buraco negro próximo ao horizonte de eventos.

Esta tese está organizado da seguinte forma. Nos Capítulos 2 e 3 estudamos o

espalhamento para os buracos negros não-comutativo e com correções provenientes do princípio da incerteza generalizado respectivamente, encontrado a seção de choque de absorção e espalhamento diferencial no regime de baixa e alta frequência, verificando que mesmo para pequenas massas temos uma seção não nula, relacionadas a massa mínima de cada cenário. Estudamos também, o regime intermediário pela análise numérica, complementando com o estudo semiclássico de espalhamentos para ângulos próximos de 180° chamados de espalhamento glória.

Capítulo 4, continuamos com o estudo de espalhamento agora no cenário dos buracos negros auto-duais, calculando a seção de choque de absorção e espalhamento diferencial no limite de baixas frequências, como encontrado nos capítulos anteriores, no limite de pequenas massas a seção de absorção e espalhamento é diferente de zero. Para uma análise completa verificamos os resultados numericamente além de obter a seção de absorção para altas frequências com a análise geodésica.

Capítulo 5, é feita uma pequena introdução sobre modos quasinormais e a influência nos estudos de buracos negros. Para calcular as frequências quasinormais usamos a aproximação WKB de sexta ordem implementada por Kanoplya e um método numérico chamado fração continua de Leaver, aplicamos em dois cenários diferentes, buracos negros não-comutativos e com correções quânticas usando o princípio da incerteza generalizado. Para cada caso estudamos também a evolução temporal por uma perturbação com perfil inicial gaussiano, assim, integramos numericamente a equação dependente do tempo e observamos o comportamento das frequências quasinormais no domínio temporal.

Capítulo 6, é discutido um pouco sobre a sombra do buraco negro e a relação com os modos quasinormais no limite eikonal, verificando a influência dos parâmetros de não comutatividade e GUP no comportamento da sombra.

Capítulo 7, são apresentadas as conclusões e considerações finais.

Capítulo 2

Absorção e espalhamento de um buraco negro não-comutativo

Neste capítulo iremos estudar a seção de choque diferencial de espalhamento e absorção para uma geometria de um buraco negro não-comutativo, no regime de baixas e altas frequências, além de uma análise numérica para o regime intermediário. O espaço tempo não-comutativo na teoria gravitacional tem sido objeto de estudo em diversas investigações na literatura recente [14, 55]. Em particular, o estudo considerando os efeitos da não-comutatividade na física de buracos negros tem sido uma área de grande interesse, principalmente pela possibilidade de uma melhor compreensão do estado final de um buraco negro devido a sua evaporação. Além disso, a não-comutatividade pode ser implementada na Relatividade Geral modificando a fonte de matéria, ou seja, a não-comutatividade é introduzida modificando a densidade de massa para que a função delta de Dirac seja substituída por uma distribuição Gaussiana [56] ou de forma alternativa por uma distribuição Lorentziana [57]. Assim, a densidade de massa assume a forma respectivamente,

$$\rho_{\theta}(r) = \frac{M}{(4\pi\theta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\theta}\right) \quad \text{ou} \quad \rho_{\theta}(r) = \frac{M\sqrt{\theta}}{\pi^{3/2}(r^2 + \pi\theta)^2}, \quad (2.1)$$

onde θ é o parâmetro não-comutativo e M é a massa total difundida por toda a região de tamanho linear $\sqrt{\theta}$.

Para analisar o processo de espalhamento de um buraco negro de Schwarzschild não-comutativo, aplicaremos a abordagem de onda parcial para determinar a seção de choque de espalhamento e absorção no limite de baixa frequência. Vimos que devido a

não-comutatividade, a densidade de massa é dada em termos das distribuições gaussianas ou lorentzianas, tal que para o nosso estudo de espalhamento iremos considerar esta última por duas razões principais. Primeiro, porque é mais tratável em algumas etapas analíticas específicas do presente estudo e, segundo, em nosso formalismo os termos gaussianos são altamente suprimidos como veremos nas próximas seções. Assim, estamos interessados em investigar o efeito da não-comutatividade considerando uma distribuição de massa espalhada lorentziana no problema de espalhamento de uma onda escalar sem massa por um buraco negro de Schwarzschild não-comutativo.

2.1 Buraco negro de Schwarzschild não-comutativo

Vamos começar estudando o elemento de linha para o buraco negro não-comutativo dado por uma distribuição Gaussiana como demonstrado por Noline e colaboradores [56]. A versão não-comutativa da equação de Einstein em termos das coordenadas quase clássicas

$$G_{\theta}^{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^2} T_{\theta}^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde temos G_N como a constante gravitacional e c a velocidade da luz. Os efeitos não-comutativos podem ser implementados atuando sobre a fonte de matéria, assim, não é necessário alterar a parte tensorial de Einstein $G_{\theta}^{\mu\nu}$ das equações de campo. Considerando uma distribuição de energia para uma fonte gravitacional estática esfericamente simétrica, difusa, não-comutativa, da forma

$$\rho_{\theta}(r) = \frac{M}{(4\pi\theta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\theta}\right), \quad (2.3)$$

que substitui a distribuição convencional de Dirac e entra na componente temporal do tensor energia momento, $T_{\theta 0}^0 = -\rho_{\theta}(r)$. A conservação covariante $\nabla_{\nu} T_{\theta}^{\mu\nu} = 0$ e a condição adicional $g_{00} = -g_{rr}^{-1}$, ou seja, “tipo Schwarzschild”, especifica completamente a forma do tensor momento energia

$$T_{\theta\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho_{\theta} & & & \\ & p_r & & \\ & & p_{\perp} & \\ & & & p_{\perp} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

com $p_r = -\rho_\theta$ e $p_\perp = -\rho_\theta - r\partial_r\rho_\theta(r)/2$. Inserindo o tensor $T_{\theta\mu}{}^\nu$ acima na equação de Einstein, assumindo $G_N = c = 1$, temos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2d\Omega^2, \quad (2.5)$$

onde $d\Omega$ é o ângulo sólido dado por, $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2$, nesta tese como θ é definido como o parâmetro não-comutativo, definimos o ângulo do sistema de coordenadas como ϑ . Temos também que $f(r) = 1 - \frac{4M}{\sqrt{\pi}r}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)$, onde é usado uma definição diferente da função gama chamada de função gama incompleta, é obtida pela mesma integral porém indefinida, assim temos dois tipos:

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) = \int_0^{r^2/4\theta} \sqrt{t}e^{-t} dt, \quad (2.6)$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) = \int_{r^2/4\theta}^{\infty} \sqrt{t}e^{-t} dt, \quad (2.7)$$

estas duas expressões são relacionadas da seguinte forma

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right). \quad (2.8)$$

Impondo a condição $f(r_h) = 0$, obtemos o raio do horizonte

$$r_h = \frac{2r_s}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_h^2}{4\theta}\right), \quad (2.9)$$

em que $r_s = 2M$ é o horizonte de eventos para um buraco negro de Schwarzschild em unidades naturais. Para $M^2/\theta \gg 1$, temos

$$r_h = r_s \left[1 - \frac{M}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-(M^2/\theta)} \right], \quad (2.10)$$

tal que o efeito da não-comutatividade é exponencialmente pequeno em grandes distâncias. Já para distâncias pequenas, temos mudanças significativas como vamos ver a seguir.

A equação (2.9) não admite uma solução direta para r_h , portanto, uma forma rápida de verificar algumas situações do horizonte em relação ao parâmetro não-comutativo é obter o gráfico de $f(r)$ como mostrado na Figura 2.1. Ajustando as curvas para diferentes valores de $M/\sqrt{\theta}$ podemos encontrar três situações que caracterizam o horizonte. A primeira, quando $M/\sqrt{\theta} > 1.905$, temos dois horizontes, um horizonte interno (Cauchy) e um horizonte externo. A segunda situação, quando $M/\sqrt{\theta} = 1.905$, temos um horizonte degenerado $r_h = 1.585M$ ou $r_h = 3.018\sqrt{\theta}$, que corresponde ao caso extremo do buraco negro tendo uma massa mínima $M_{min} = 1.905\sqrt{\theta}$. Finalmente a ultima situação, quando

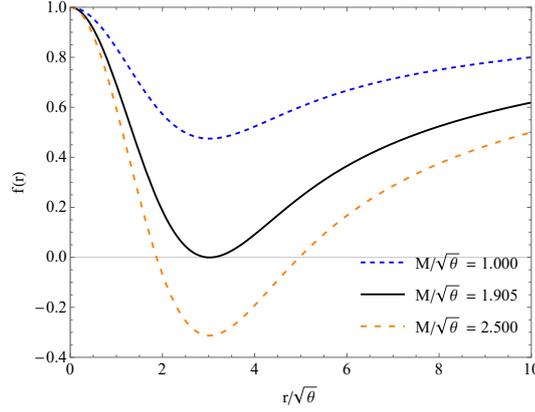


Figura 2.1: Gráfico da função $f(r)$ para alguns valores de $M/\sqrt{\theta}$. Os raios do horizonte para cada caso é obtido pela interseção das curvas com o eixo horizontal. Para $M = \sqrt{\theta}$ (azul tracejada), não temos horizonte, já para $M = M_{min} = 1.905\sqrt{\theta}$ (preta contínua) temos um horizonte degenerado e por último $M = 2.5\sqrt{\theta}$ (laranja pontilhada tracejada) representa o caso onde temos dois horizontes.

$M/\sqrt{\theta} < 1.905$ não temos horizonte. Logo o intervalo do parâmetro $\sqrt{\theta}$ para o buraco negro não-comutativo está entre $0 < \sqrt{\theta} \leq 0.5252M$.

A temperatura Hawking para o buraco negro não-comutativo de Schwarzschild é dado pela expressão

$$T_H = \frac{f'(r_h)}{4\pi} = \frac{1}{4\pi r_h} \left(1 - \frac{r_h^3 e^{-r_h^2/4\theta}}{4\theta^{3/2} \gamma(3/2, r_h^2/4\theta)} \right). \quad (2.11)$$

Considerando apenas o primeiro termo da equação (2.11), recuperamos o resultado padrão para a temperatura Hawking $T_H = 1/4\pi r_h$. Neste caso, a temperatura do buraco negro aumenta a medida que o raio do horizonte diminui apresentando assim uma divergência para valores pequenos de r_h da ordem de $\sqrt{\theta}$. Esse problema pode ser contornado considerando os efeitos da não-comutatividade como na equação (2.11), que está representado na Figura 2.2 pela linha contínua preta. Veja que diferente de explodir para valores pequenos de r_h , a curva vai a um máximo da temperatura em $r_h = 4.755\sqrt{\theta}$ e depois cai a zero em $r_h = 3.02\sqrt{\theta}$, que corresponde ao raio do buraco negro extremo. Desta forma, para $r_h < 3.02\sqrt{\theta}$ não há buraco negro e portanto a temperatura não pode ser definida.

Assim, podemos expressar a equação para temperatura (2.11) de uma forma mais compacta no regime de θ pequeno, reescrevendo a equação assumindo $r_h^2/4\theta \gg 1$ e substituindo o valor do raio do horizonte, que então temos

$$T_H = \frac{1}{8\pi M} \left[1 - \frac{4M^3}{\sqrt{\pi\theta^3}} e^{-M^2/\theta} \right]. \quad (2.12)$$

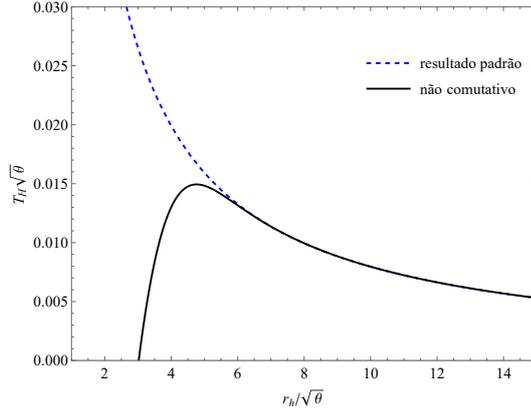


Figura 2.2: No gráfico vemos que o resultado padrão diverge para valores pequenos de r_h , enquanto o efeito da não-comutatividade elimina esse problema.

Novamente mantendo apenas o primeiro termo, recuperamos a temperatura de Hawking do buraco negro de Schwarzschild $T_H = 1/4\pi r_s$.

Agora sabendo da importância de estudar os efeitos da não-comutatividade em pequenas distâncias, vamos considerando o limite $r^2/4\theta \gg 1$ para expandir a função gama incompleta (2.8),

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{r}{2\sqrt{\theta}} e^{-r^2/4\theta} + \dots, \quad (2.13)$$

e reescrever a métrica (2.5) da forma

$$ds^2 = F(r)dt^2 - \frac{dr^2}{F(r)} - r^2 d\Omega^2, \quad (2.14)$$

em que

$$F(r) = 1 - \frac{4M}{\sqrt{\pi}r} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{r}{2\sqrt{\theta}} e^{-r^2/4\theta} \right) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M}{\sqrt{\pi}\theta} e^{-r^2/4\theta}. \quad (2.15)$$

Cálculos semelhantes podem ser feitos para uma distribuição lorentziana. Mais especificamente podemos obter a métrica para este caso, considerando a densidade de massa

$$\rho_\theta(r) = \frac{M\sqrt{\theta}}{\pi^{3/2}(r^2 + \pi\theta)^2}. \quad (2.16)$$

Agora, a função de distribuição de massa pode ser obtida pela seguinte integração

$$M_\theta = \int_0^r \rho_\theta 4\pi r^2 dr, \quad (2.17)$$

$$M_\theta = \frac{2M}{\pi} \left[\tan^{-1}\left(\frac{r}{\sqrt{\pi\theta}}\right) - \frac{r\sqrt{\pi\theta}}{\pi\theta + r^2} \right]. \quad (2.18)$$

Considerando o limite $r^2/\pi\theta \gg 1$,

$$M_\theta = M - \frac{4M\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}r} + \dots + \mathcal{O}(\theta^{3/2}). \quad (2.19)$$

Consequentemente sendo a massa modificada (2.19), a função métrica do buraco negro não-comutativo pode agora ser dada por

$$F(r) = 1 - \frac{2M_\theta}{r} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{8M\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}r^2}. \quad (2.20)$$

Podemos comparar este resultado com a função métrica (2.15). A escolha da expressão (2.20) simplificará os cálculos do deslocamento de fase e nos cálculos da seção de choque diferencial de espalhamento e absorção que serão feitos posteriormente. Além disso, para estes cálculos iremos considerar uma expansão de potência em $1/r$ para grandes distâncias, de modo que o termo Gaussiano na função (2.15) é altamente suprimido em comparação com a distribuição lorentziana e, portanto, não se espera que efeitos não-comutativos sensíveis apareçam a partir de (2.15).

Considerando (2.20), obtemos o horizonte de eventos externo e interno representados por r_+ e r_- , respectivamente,

$$r_\pm = M \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{M} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}}} \right). \quad (2.21)$$

Uma outra forma de expressar os raios do horizonte é da forma expandida no limite de θ pequeno, considerando até termos da ordem $\sqrt{\theta}$:

$$r_h = 2M - 4\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} - \frac{8\theta}{M\pi} + \dots = 2M \left(1 - \frac{2}{M} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \right) + \dots, \quad (2.22)$$

$$r_\theta = 4\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} + \frac{8\theta}{M\pi} + \dots. \quad (2.23)$$

Nessa aproximação o horizonte interno é diretamente proporcional ao parâmetro não-comutativo. Como vimos para a distribuição gaussiana na Figura 2.2, no o caso não-comutativo o comportamento da temperatura Hawking admite um valor máximo, que corresponde a uma massa crítica relacionado a temperatura máxima e posteriormente a temperatura decai. Para uma distribuição lorentziana temos o mesmo comportamento, sendo a temperatura dada por:

$$T_H = \frac{M - 4\sqrt{\theta/\pi}}{8\pi \left(M - 2\sqrt{\theta/\pi} \right)^2}, \quad (2.24)$$

neste caso temos uma temperatura máxima para uma massa da ordem $M = 6\sqrt{\theta/\pi}$. Já para $M = 4\sqrt{\theta/\pi}$ temos uma temperatura Hawking tendendo a zero.

Nas seções seguintes, vamos analisar a seção de espalhamento diferencial e a seção de absorção em dois regimes: baixas frequências, por meio do método de ondas parciais, e altas frequências, pela geodésica e para complementa uma análise semiclássica para o espalhamento.

2.1.1 Método de ondas parciais

Começando com o método de ondas parciais, considerando a equação para o caso de um campo escalar sem massa para descrever a onda espalhada. Neste caso as ondas escalares sem massa são descritas pela equação de Klein-Gordon em um espaço-tempo (2.14), dada por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi) = 0. \quad (2.25)$$

Agora podemos fazer a separação de variável,

$$\Psi_{\omega lm}(\vec{r}, t) = \frac{R_{\omega l}(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (2.26)$$

no qual $Y_{lm}(\vartheta, \phi)$ são os harmônicos esféricos e ω a frequência. Substituído a função de onda acima na equação de Klein-Gordon, obtemos a seguinte equação para $R_{\omega l}(r)$:

$$F(r)\frac{d}{dr}\left[F(r)\frac{dR_{\omega l}(r)}{dr}\right] + [\omega^2 - V_{ef}(r)]R_{\omega l}(r) = 0, \quad (2.27)$$

onde o potencial efetivo é dado por

$$V_{ef}(r) = \frac{(r^2 - 2Mr + 8M\sqrt{\theta/\pi})}{r^4} \left[\frac{2M}{r} - \frac{16M\sqrt{\theta/\pi}}{r^2} + l(l+1) \right]. \quad (2.28)$$

Seguindo, vamos encontrar a seção de choque de espalhamento diferencial e a seção de absorção para o regime de baixas frequências. Para isso vamos usar algumas expansões. Para começar, considerando uma nova função radial $G(r) = \sqrt{F(r)}R_{\omega l}(r)$, temos

$$\frac{d^2G(r)}{dr^2} + U(r)G(r) = 0, \quad (2.29)$$

onde obtemos um novo potencial da forma

$$U(r) = \frac{1}{4F^2(r)}\left(\frac{dF(r)}{dr}\right)^2 - \frac{1}{2F(r)}\frac{d^2F(r)}{dr^2} + \frac{\omega^2}{F^2(r)} - \frac{V_{ef}(r)}{F^2(r)}, \quad (2.30)$$

as derivadas primeira e segunda da função métrica são

$$\frac{dF(r)}{dr} = \frac{2M}{r^2} - \frac{16\sqrt{\theta}M}{\sqrt{\pi}r^3}, \quad \frac{d^2F(r)}{dr^2} = \frac{-4M}{r^3} + \frac{48\sqrt{\theta}M}{\sqrt{\pi}r^4}. \quad (2.31)$$

Agora, expandindo o potencial $U(r)$ em série de potências em torno de $1/r$, obtemos

$$U(r) = \omega^2 + \frac{4M\omega^2}{r} + \frac{12M^2\omega^2 - l(l+1) - 16M\omega^2\sqrt{\theta/\pi}}{r^2} + \dots + \mathcal{O}(1/r)^3, \quad (2.32)$$

tal que

$$\frac{d^2G(r)}{dr^2} + (\omega^2 + \mathcal{U}(r)) G(r) = 0, \quad (2.33)$$

em que

$$\mathcal{U}(r) = \frac{4M\omega^2}{r} + \frac{12\ell^2}{r^2} + \frac{32M\omega^2}{r^2} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} + \dots. \quad (2.34)$$

Note que definimos

$$\ell^2 = \frac{-l(l+1)}{12} + M^2\omega^2 \left(1 - \frac{4}{M} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \right). \quad (2.35)$$

Aqui ℓ^2 define a mudança para os coeficientes de $1/r^2$ envolvendo apenas contribuições de l , M , $\sqrt{\theta}$ e ω . Note que quando $r \rightarrow \infty$ o potencial $\mathcal{U}(r)$ vai a zero, mostrando que satisfaz as condições assintóticas. O deslocamento de fase δ_l pode ser obtido aplicando a seguinte formula aproximada:

$$\delta_l \approx 2(l - \ell) = 2 \left[l - \sqrt{-\frac{l(l+1)}{12} + M^2\omega^2 \left(1 - \frac{4}{M} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \right)} \right]. \quad (2.36)$$

Tomando o limite $l \rightarrow 0$, obtemos

$$\delta_l = \delta_0 + \delta_{l \geq 1}, \quad \delta_0 = -2M\omega \left(1 - \frac{4}{M} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \right)^{1/2}, \quad \delta_{l \geq 1} = 0. \quad (2.37)$$

Com a expressão do deslocamento de fase podemos obter a amplitude de espalhamento e com isso determinar a seção diferencial de espalhamento. A amplitude de espalhamento, definida por $f(\vartheta)$, pode ser representado na forma de uma expansão em ondas parciais [58]:

$$f(\vartheta) = \frac{1}{2i\omega} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \vartheta), \quad (2.38)$$

onde $P_l(\cos \vartheta)$ são os polinômios de Legendre. A seção de choque diferencial de espalhamento é dado por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta)|^2. \quad (2.39)$$

Para calcular diretamente a série (2.38) se torna complicada devido a divergência, ou seja, precisamos de um número infinito de polinômios de Legendre para descrever a

divergência em $\vartheta = 0$. Yennie, Ravenhall e Wilson [59] desenvolveram uma forma possível de contornar esse problema. Dada uma série de polinômios de Legendre, que é divergente em $\vartheta = 0$, pode-se definir uma série reduzida

$$(1 - \cos \vartheta)^m f(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l^m P_l(\cos \vartheta). \quad (2.40)$$

Essa série reduzida é menos divergente em $\vartheta = 0$, assim, pode-se esperar que esta série convirja mais rapidamente. Usando as propriedades dos polinômios de Legendre, podemos mostrar que os novos coeficientes a_l^{i+1} estão relacionados com os anteriores da seguinte forma:

$$a_l^{i+1} = a_l^i - \frac{l+1}{2l+3} a_{l+1}^i - \frac{l}{2l-1} a_{l-1}^i. \quad (2.41)$$

Este é um método excelente para somar as séries numericamente, no qual interações são suficientes. Neste caso vamos abrir a primeira interação assumindo $i = 0$ em (2.41), tal que temos

$$a_l^1 = a_l^0 - \frac{l+1}{2l+3} a_{l+1}^0 - \frac{l}{2l-1} a_{l-1}^0, \quad (2.42)$$

onde $a_l^0 = (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1)$. A seção de choque diferencial de espalhamento é obtida da forma [59, 60]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{1}{2i\omega} \sum_{l=0}^{\infty} a_l^1 \frac{P_l(\cos \vartheta)}{1 - \cos \vartheta} \right|^2. \quad (2.43)$$

Com os resultados obtidos para o deslocamento de fase em (2.37), os dois últimos termos da equações (2.42) são nulos e então podemos reescrever a equação (2.43) como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{1}{2i\omega} \sum_{l=0}^{\infty} a_l^0 \frac{P_l(\cos \vartheta)}{1 - \cos \vartheta} \right|^2 = \left| \frac{1}{2i\omega} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1) \frac{P_l(\cos \vartheta)}{1 - \cos \vartheta} \right|^2. \quad (2.44)$$

No limite de pequenos ângulos, podemos reescrever a seção de espalhamento da seguinte forma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4}{\omega^2 \vartheta^4} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(1) \right|^2. \quad (2.45)$$

Assim, a seção de espalhamento diferencial no limite $l = 0$ é dado por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\omega \rightarrow 0}^{bf} = \frac{16M^2}{\vartheta^4} \left(1 - \frac{4}{M} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \right) + \dots, \quad (2.46)$$

aqui usamos o subscrito bf para definir o regime de baixas frequências. O termo dominante é modificado pelo parâmetro não-comutativo θ . Verificamos que a seção de choque diferencial de espalhamento diminui devido o efeito da não-comutatividade. Para $\theta = 0$, retornamos ao caso do buraco negro de Schwarzschild. Vamos determinar agora a seção de choque de absorção para um buraco negro de Schwarzschild não-comutativo para baixas frequências. Como já é bem conhecido na mecânica quântica, a seção de choque de absorção total pode ser calculada pela relação

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi}{\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |e^{2i\delta_l}|^2). \quad (2.47)$$

Obtemos, no limite $\omega \rightarrow 0$ e $l = 0$,

$$\sigma_{abs}^{bf} = 16\pi M^2 \left(1 - \frac{4}{M} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \right) = A_{Sch} \left(1 - \frac{4}{M} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \right), \quad (2.48)$$

onde $A_{Sch} = 4\pi r_s^2 = 16\pi M^2$ é a área do horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild. Vemos também que a absorção diminui pelo efeito da não-comutatividade. A equação acima pode ser reescrita em termos da área do horizonte de eventos para o buraco negro não-comutativo

$$\sigma_{abs}^{bf} \approx 4\pi \left[2M \left(1 - \frac{2}{M} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \right) \right]^2 = 4\pi r_h^2, \quad (2.49)$$

sendo $4\pi r_h^2$ a área do horizonte de eventos para o buraco negro de Schwarzschild não-comutativo. Além disso nossos resultados para absorção mostram concordância com a propriedade de universalidade da seção choque de absorção, que é sempre proporcional a área do horizonte de eventos no limite de baixas frequência [61]. Na Figura 2.7, a seguir mostra o gráfico da seção de choque de absorção para $l = 0$, que foi obtida numericamente a partir da equação radial (2.27) para frequências arbitrárias. Analisando o comportamento desta figura, podemos observar que o parâmetro não-comutativo θ introduz um efeito de carga se comparado com o gráfico da absorção do buraco negro de Reissner-Nordström [62].

O elemento de linha para o buraco negro de Reissner-Nordström é dado pela equação (2.14) com,

$$F_{RN}(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (2.50)$$

Aqui devemos enfatizar que o parâmetro não-comutativo está relacionado com a carga do buraco negro de Reissner-Nordström pela relação $\sqrt{\theta} = \sqrt{\pi} Q^2 / 8M$. Note que a raiz quadrada do parâmetro não-comutativo é proporcional ao quadrado da carga elétrica.

2.1.2 Estudo da órbita e análise clássica

Vamos analisar a seção de choque diferencial de espalhamento no limite de altas frequências, considerando duas abordagens, espalhamento geodésico clássico e a aproximação glória semiclássica. Com isso teremos tanto os resultados de baixa quanto os de alta frequência e assim, podemos verificar de forma mais completa a seção de choque de espalhamento obtida pelo método numérico na análise de onda parcial.

Geodésica nula

Podemos encontrar as geodésicas nulas a partir da equações de movimento tomando uma lagrangiana da forma $\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$, onde $\dot{x}^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\phi})$, o ponto define a derivada em relação ao parâmetro afim, tal que

$$2\mathcal{L} = F(r)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{F(r)} - r^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\phi}^2). \quad (2.51)$$

Estamos interessados na trajetória de um raio de luz em uma métrica esfericamente simétrica, assim considerando um plano equatorial fixando o ângulo ϑ em $\pi/2$. Nestas condições a métrica (2.51) é independente de t e ϕ , tal que duas equações são suficientes para descrever o movimento de um raio de luz, podemos montar um sistema com essas equações que dão origem a duas constantes de movimento geodésico E e L , que correspondem a energia e momento angular, respectivamente:

$$E = F(r)\dot{t}, \quad L = r^2\dot{\phi}. \quad (2.52)$$

Agora, como nosso objetivo é estudar geodésicas nulas, temos que $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$. Usando as equações (2.52), podemos escrever a equação da “energia” como

$$\dot{r}^2 + F(r)\frac{L^2}{r^2} = E^2. \quad (2.53)$$

Introduzindo uma nova variável $u = 1/r$ e usando os resultados obtidos nas equações (2.52) e (2.53), podemos escrever a equação orbital da seguinte forma:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{b} - u^2 + 2Mu^3 - \frac{8M\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}}u^4, \quad (2.54)$$

onde $b = L/E$ é o parâmetro de impacto definido como a distância perpendicular (medida no infinito) entre a geodésica e uma linha paralela que passa pela origem Figura 2.4(a).

Diferenciando (2.54), temos

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = -u + 3Mu^2 - \frac{16M\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}}u^3. \quad (2.55)$$

Usando as condições $\frac{du}{d\phi} = 0$ e $\frac{d^2u}{d\phi^2} = 0$, obtemos o parâmetro de impacto crítico e o raio crítico

$$r_c = \frac{1}{2} \left(3M + \sqrt{9M^2 - 64M\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}} \right), \quad (2.56)$$

$$b_c = \frac{r_c^2}{\sqrt{r_c^2 - 2Mr_c + 8M\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}}}. \quad (2.57)$$

A seção de choque de absorção no limite de altas frequências pode ser determinada usando a relação $\sigma_{abs}^{af} = \pi b_c^2$, assim temos

$$\sigma_{abs}^{af} = \frac{\pi r_c^4}{r_c^2 - 2Mr_c + 8M\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}}. \quad (2.58)$$

Este é o primeiro resultado que podemos comparar com os obtidos na análise de ondas parciais totais mostrado na Figura 2.8. Além disso, o espalhamento geodésico clássico fornece resultados aceitáveis da seção de choque de espalhamento diferencial como vamos ver mais à frente.

Resolvendo as equações (2.54) e (2.55) numericamente podemos obter o comportamento das linhas geodésicas para diferentes valores do parâmetro de impacto b . Na Figura 2.3, verificamos o comportamento para diferentes valores de b enquanto variamos os valores do parâmetro não-comutativo. O disco preto central representa o limite do horizonte de eventos o círculo pontilhado interno é o raio para esfera de fótons (raio crítico) (2.56) e o círculo tracejado externo é o parâmetro de impacto crítico (2.57). Vemos da esquerda para direita que o parâmetro não-comutativo afeta no comportamento das geodésicas diminuindo o efeito do buraco negro sobre os feixes de luz.

Espalhamento geodésico clássico e efeito Glória

Agora vamos investigar o espalhamento por uma buraco negro não-comutativo por dois métodos analíticos e posteriormente comparar com os resultados numéricos. A seção de choque de espalhamento pode ser derivada diretamente do ângulo de deflexão através da fórmula clássica

$$\frac{d\sigma_{clas}}{d\Omega} = \frac{b(\vartheta)}{\sin \vartheta} \left| \frac{db}{d\vartheta} \right|, \quad (2.59)$$

onde $b(\vartheta)$ é o parâmetro de impacto associado ao ângulo de espalhamento. Os primeiros cálculos nesse sentido pode ser encontrados para o caso de Schwarzschild mostrando que

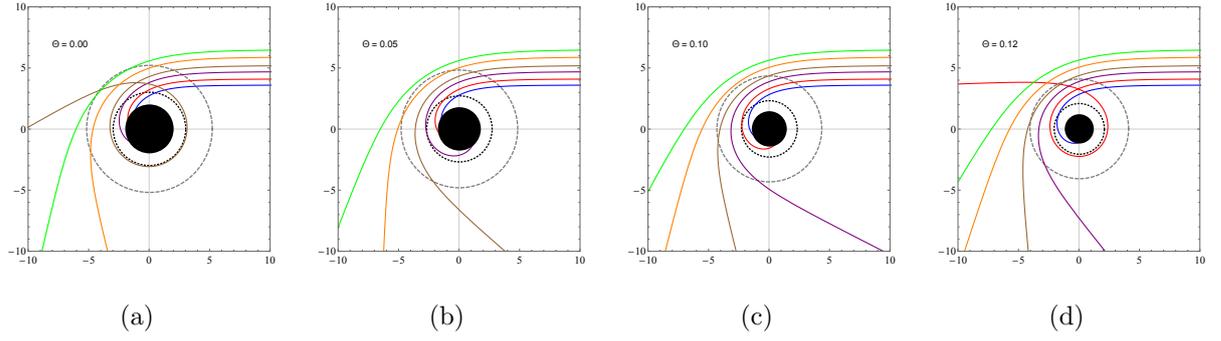


Figura 2.3: Geodésicas em torno de um buraco negro não-comutativo. Os feixes de luz vindos do infinito com parâmetros de impacto definidos por $b = 3.6, 4.1, 4.7, 5.2, 5.9$ e 6.5 são os mesmos para todos os gráficos, assumindo $M = 1$. Podemos ver a influência do parâmetro não-comutativo nas curvas geodésicas de (a) $\Theta = 0$ (caso Schwarzschild) a (d) $\Theta = 0.12$, onde $\Theta = \sqrt{\theta/\pi}$.

as geodésicas sofrem um desvio dado por $\chi = 4M/b$ em unidades naturais, conhecido como o ângulo de deflexão de Einstein [63]. É interessante notar que a fórmula clássica de espalhamento dada pela (2.59) descreve muito bem o caso de uma onda planar para pequenos ângulos de espalhamento, embora dê resultados não tão precisos para ângulos de espalhamento altos, como veremos mais a frente.

Veja na Figura 2.4 três comportamentos para os raios de luz que viajam próximo de um buraco negro. No primeiro caso 2.4(a), temos que, para $b < b_c$, os raios de luz vindos do infinito serão absorvidos pelo buraco negro, enquanto em 2.4(b), para $b > b_c$, temos um cenário de espalhamento, onde a luz não será absorvida pelo buraco negro mas voltará ao infinito após passar por um ponto de virada ou raio de máxima aproximação ($u = u_0$). Outra situação é quando o parâmetro de impacto equivale ao parâmetro de impacto crítico $b = b_c$, os raios de luz ficam aprisionados em uma órbita instável em torno do buraco negro formando um círculo de raio igual a r_c 2.4(c), esse círculo é chamado de anel ou esfera de fótons.

Podemos obter o ângulo de deflexão calculando o ângulo total varrido pelo feixe desde o infinito até se afastar, como mostrado na figura 2.5 onde temos χ que é o ângulo de deflexão e $\Delta\phi$ o ângulo total varrido pelo feixe. A relação entre esses dois ângulos é dada por

$$\chi(b) = \Delta\phi - \pi. \quad (2.60)$$

Assim, para obter o ângulo de deflexão de uma geodésica integramos a equação (2.54)

$$\Delta\phi = 2 \int^{u_0} \left(\frac{1}{b^2} - u^2 + 2Mu^3 - 8M\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}u^4 \right)^{-1/2} du. \quad (2.61)$$

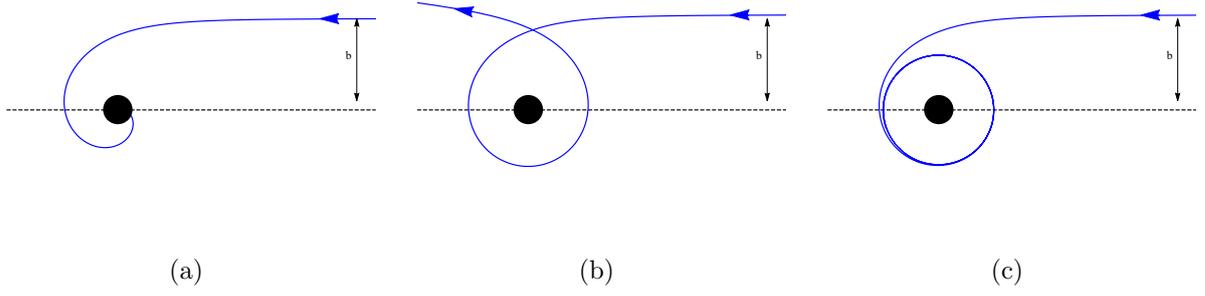


Figura 2.4: Cada imagem mostra feixes de luz vindos do infinito com parâmetros de impacto específicos. Em (a) temos o parâmetro de impacto menor que o parâmetro de impacto crítico, $b < b_c$ para o qual os feixes são absorvidos, já em (b) temos o cenário de espalhamento quando $b > b_c$ e em (c) $b = b_c$, temos que os feixes de luz ficam presos em uma órbita.

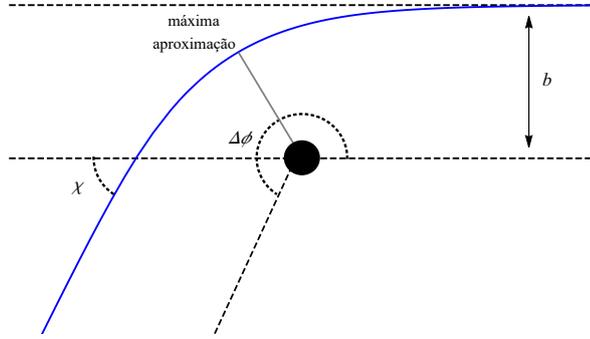


Figura 2.5: No esquema da figura podemos ver a relação entre o ângulo de deflexão e o ângulo total varrido pelo feixe de luz que passa por um ponto máximo de aproximação.

Assim, o procedimento para integrar e encontrar o ângulo encontra-se no Apêndice A, temos que

$$\chi(b) = \frac{4M}{b} + \frac{15\pi M^2}{4b^2} - \frac{6\pi M}{b^2} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}}. \quad (2.62)$$

Agora o processo se resume a inverter a equação (2.62), obtendo $b(\chi)$, e por fim substituindo o parâmetro de impacto na equação (2.59), para ângulos pequenos

$$\frac{d\sigma_{clas}}{d\Omega} \approx \frac{16M^2}{\vartheta^4} + \frac{15\pi M^2}{4\vartheta^3} - \frac{6\pi M}{\vartheta^3} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}}. \quad (2.63)$$

Como mencionado o processo considerando a formula clássica (2.59) não contempla ângulos altos retornando resultados imprecisos. Desta forma, é interessante apresentar um método aproximado que funcione bem para ângulos de espalhamento altos especificamente próximos de π . Este método é chamado de aproximação semiclássica glória [64]. As vantagens dessa aproximação semiclássica é obter uma formula analítica que fornece uma visão física para a largura das franjas de interferência na seção de choque diferencial de espalhamento, e a intensidade do fluxo espalhado para $\vartheta \sim \pi$. Embora uma aproximação

glória semiclássica, seja válida para altas frequências $\omega M \gg 1$, ela ainda está de acordo com os resultados numéricos para frequências intermediárias $\omega M \sim 1$ [62], e como veremos nos resultados obtidos. A formula semiclássica para o espalhamento glória para um buraco negro esfericamente simétrico é dado por [64].

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi\omega b_g^2 \left| \frac{db}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=\pi} J_{2s}^2(\omega b_g \sin \vartheta), \quad (2.64)$$

onde b_g é o parâmetro de impacto para os raios retroespalhados ($\vartheta = \pi$), $J_{2s}(x)$ é a função de Bessel de primeiro tipo e s é o spin da onda. Nesta tese estamos tratando apenas do caso escalar onde $s = 0$. Existem vários valores de b_g que corresponde aos múltiplos valores do ângulo de deflexão, ($\chi = \pi + 2n\pi$) com $n = 0, 1, 2, \dots$ o número de vezes que os feixes de luz gira em torno do buraco negro, mais a maior contribuição para a seção de choque de espalhamento diferencial vem de $n = 0$ [65].

Desta forma, de acordo com a equação (2.64), precisamos determinar b_g e $|db/d\vartheta|_{\vartheta=\pi}$ para obter a seção de choque de espalhamento glória. Resolvendo a integral (2.61), escrevemos a equação (2.60) da forma

$$\chi = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{M\sqrt{\theta/\pi}(u_3 - u_1)(u_0 - u_2)}} [K(\kappa) - F(z, \kappa)] - \pi, \quad (2.65)$$

onde aqui $F(z, \kappa)$ e $K(\kappa)$ são as integrais elípticas incompletas e completas de primeiro tipo [66], respectivamente, com

$$\kappa^2 = \frac{(u_3 - u_2)(u_0 - u_1)}{(u_0 - u_2)(u_3 - u_1)}, \quad z = \sqrt{\frac{u_0(u_3 - u_1)}{u_3(u_0 - u_1)}}, \quad (2.66)$$

aqui, u_0, u_1, u_2 e u_3 são as raízes da equação (2.54). Assim para obter b_g e $|db/d\vartheta|_{\vartheta=\pi}$, podemos resolver numericamente a equação (2.65). Na Figura 2.6, temos o comportamento das linhas geodésicas para b_g calculado para cada parâmetro não-comutativo comparado com o caso crítico. Veja que como o esperado para o caso glória (linhas vermelhas) os feixes são espalhado em um ângulo de 180, o parâmetro de impacto é bem próximo do caso crítico (linhas azuis), onde podemos ver que os feixes de luz ficam presos em uma órbita instável.

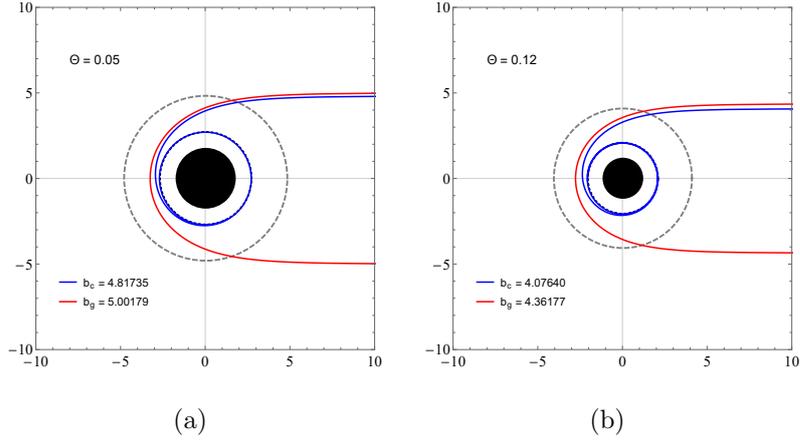


Figura 2.6: Geodésicas em torno de um buraco negro não-comutativo. As linhas vermelhas correspondem às geodésicas para o parâmetro de impacto glória b_g , comparadas ao parâmetro de impacto crítico.

2.2 análise numérica

A equação (2.27) pode ser reescrita na forma de uma equação tipo de Schrödinger usando uma mudança de coordenada chamada de tortoise (tartaruga) x , da forma

$$\frac{d^2 R_{\omega l}(x)}{dx^2} + (\omega^2 - V_{ef}) R_{\omega l}(x) = 0, \quad (2.67)$$

onde

$$x = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \log |r - r_+| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \log |r - r_-|, \quad (2.68)$$

com r_{\pm} definido em (2.21). O potencial V_{ef} que é dado em (2.28) tende à zero nos limites próximo do horizonte de eventos $r \rightarrow r_h$ e no infinito $r \rightarrow \infty$. Para $r \gg r_h$ temos a seguinte solução:

$$R_{\omega l}(x) \approx \omega x \left[(-i)^{l+1} A_{ent} h_l^{(1)}(\omega x)^* + i^{l+1} A_{sai} h_l^{(1)}(\omega x) \right], \quad (2.69)$$

onde $h_l^{(1)}(\omega x)$ são funções esféricas de Bessel de terceiro tipo [66], e A_{ent} e A_{sai} são constantes complexas e os subscritos (*ent*) e (*sai*) correspondem respectivamente as ondas que entram e saem, com relação ao potencial. Assim, analisando o problema do espalhamento considerando a solução nos limites assintóticos, onde $h_l^{(1)} \approx (-i)^{l+1} e^{ix}/x$ em $x \rightarrow \infty$ e $V_{ef} \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow -\infty$, podemos escrever as soluções para as seguintes condições de contorno

$$R_{\omega l}(x) \approx \begin{cases} A_{ent} e^{-i\omega x} + A_{sai} e^{i\omega x}, & x \rightarrow +\infty (r \rightarrow \infty), \\ A_{tr} e^{-i\omega x}, & x \rightarrow -\infty (r \rightarrow r_h), \end{cases} \quad (2.70)$$

onde $|A_{ent}|^2 = |A_{sai}|^2 + |A_{tr}|^2$. A seção de absorção pode ser calculada, usando a equação (2.47) com deslocamento de fase dado por

$$e^{2i\delta_l} = (-1)^{l+1} \frac{A_{sai}}{A_{ent}}. \quad (2.71)$$

Combinado essa análise assintótica com a solução numérica da equação (2.27) obtida pelo método Runge-Kutta de quarta ordem como mostrado no Apêndice D, obtemos os coeficientes da equação (2.71) e conseqüentemente a seção de absorção.

Agora apresentamos os resultados numéricos para a seção choque de espalhamento em função de frequências arbitrárias. O procedimento usado para realizar os cálculos numéricos estão descritos no Apêndice D, consideramos valores arbitrários de Θ entre $0 \leq \Theta \leq 0.125$ onde $\Theta = \sqrt{\theta}/(M\sqrt{\pi})$. Os gráficos para $\Theta = 0$ (caso de Schwarzschild), $\Theta = 0.05$ e $\Theta = 0.065$ (caso não-comutativo) e $\Theta = 0.125$ (caso extremo) são mostrados nas Figuras de 2.7 a 2.12.

Na Figura 2.7(a), temos as curvas para a seção de choque parcial de absorção para o multipolo $l = 0$. Vemos que quando aumentamos o valor do parâmetro que representa a contribuição não-comutativa Θ temos uma diminuição nas curvas de absorção. Entretanto, no limite de baixar frequências $\omega M \rightarrow 0$ a absorção não é nula e os valores encontrados nesse limite são próximos aos encontrados analiticamente na equação (2.48). Na Figura 2.7(b), temos a contribuição da absorção parcial para os multipolos $l = 0, 1, 2$ e 3 . Vemos que o comportamento das curvas se mantém, ou seja, quando aumentamos os valores de Θ temos uma redução nas curvas de absorção. Como foi mencionado anteriormente quando $\Theta = 0$ recuperamos o caso de Schwarzschild, representado nos gráficos pela curva preta contínua, assim para Θ diferente de zero a contribuição da não-comutatividade faz com que a absorção parcial diminua com relação ao buraco negro de Schwarzschild.

Vamos agora comparar o caso não-comutativo ($\Theta = 0.045$ e $\Theta = 0.065$) com o buraco negro de Reissner-Nordström, com $Q/M = 0.5$ como mostrado na figura 2.9. Podemos observar que quando consideramos os valores $\Theta = 0.065$ e $Q/M = 0.5$, que corresponde à metade do intervalo nos respectivos casos não-comutativo e Reissner-Nordström, as amplitudes não coincidem. No entanto quando diminuimos o valor de Θ as curvas se aproximam 2.9(b), assim, as curvas vão se coincidem quando $\Theta = 0.031$. Na Figura 2.10 comparamos a seção de choque parcial de absorção para $l = 0$ para o extremo Reissner-Nordström com o buraco negro não-comutativo (para $\Theta = 0.085$ e $\Theta = 0.115$).

Uma outra forma de observarmos o comportamento das curvas de absorção é so-

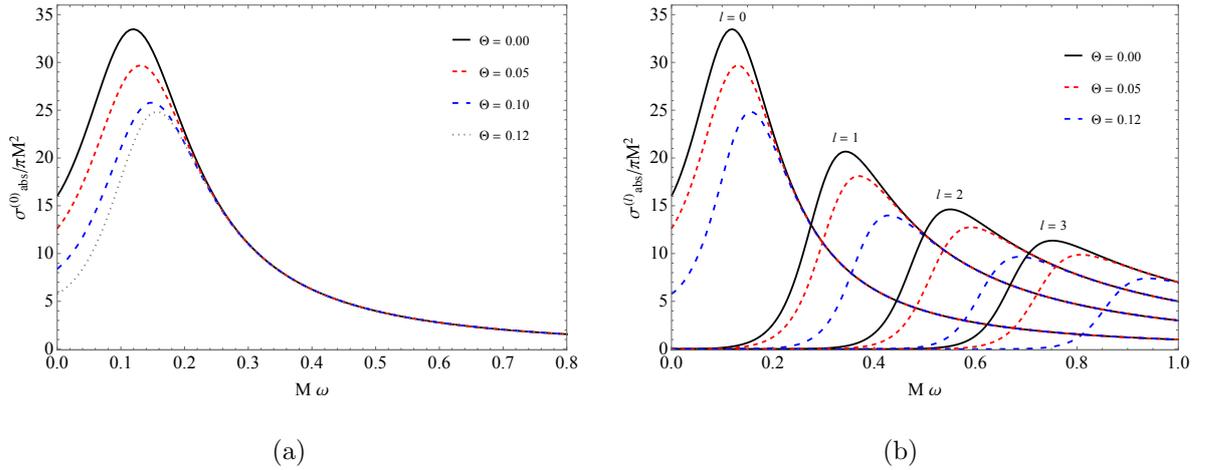


Figura 2.7: Seção de choque parcial de absorção em (a) temos apenas $l = 0$, quanto em (b) comparamos os multipolos $l = 0, 1, 2, 3$.

mando todas as contribuições parciais como mostrado na Figura 2.7(b), com isso obtemos um gráfico para a seção de choque total de absorção Figura 2.8. Veja que as curvas para a seção de choque total de absorção convergem para o valor da absorção em altas frequências, representado pelas retas que foi obtido usando o método geodésico (2.58). Novamente vemos a influência da não-comutatividade para um buraco negro ao comparar com o caso de Schwarzschild.

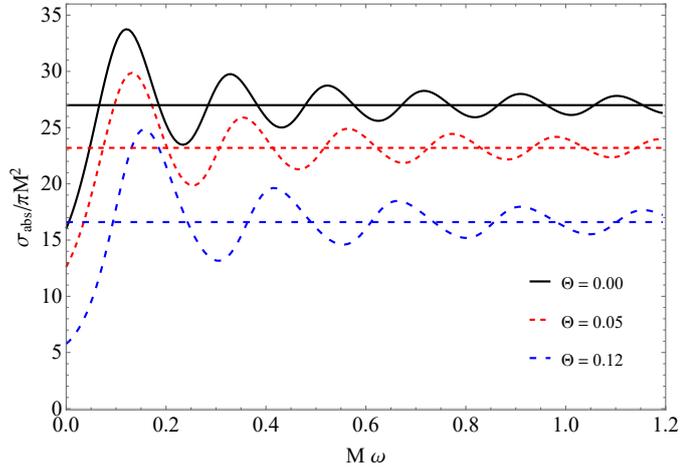


Figura 2.8: Seção de choque total de absorção. As retas representam os valores obtidos pelo método geodésico equação (2.58), $\sigma_{\text{abs}}^{\text{af}} = 27, 23.2, 16.6$ para $\Theta = 0, 0.05, 0.12$ respectivamente. Podemos verificar o efeito da não-comutatividade com o caso de Schwarzschild ($\Theta = 0$).

Na figura 2.11 comparamos a seção de choque total de absorção do buraco negro não-comutativo ($\Theta = 0.045$ e $\Theta = 0.065$) nas figuras 2.11(a) e 2.11(b) com o buraco negro de Reissner-Nordström ($Q/M = 0.5$). E por fim nos gráficos 2.11(c) e 2.11(d)

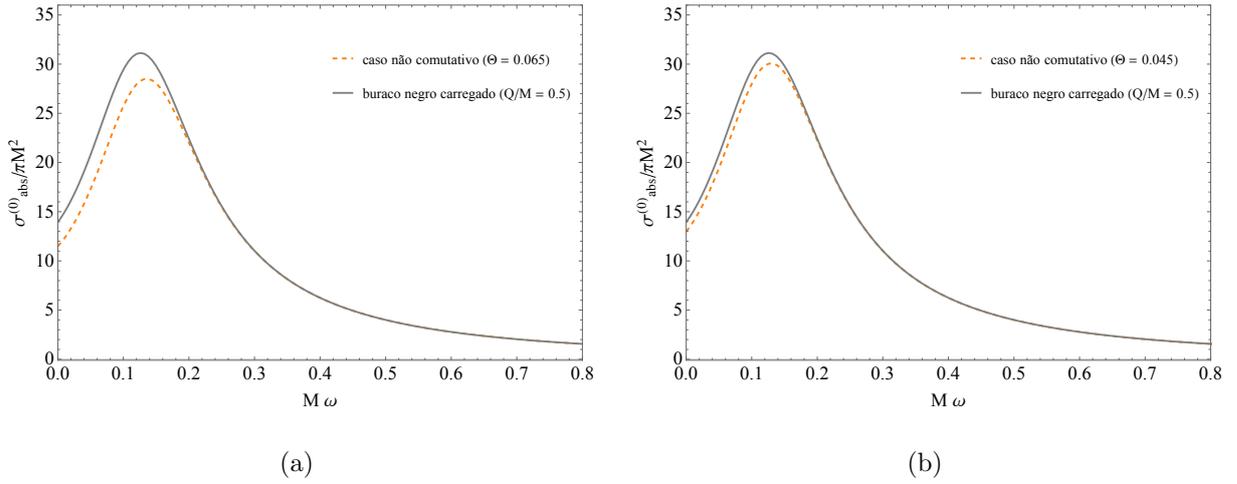


Figura 2.9: Seção de choque parcial de absorção para o multipolo $l = 0$. Comparamos os resultados para um buraco negro de Reissner-Nordström admitido $Q/M = 0.5$ com o buraco negro não-comutativo assumindo $\Theta = 0.045$ (b) e $\Theta = 0.065$ (a).

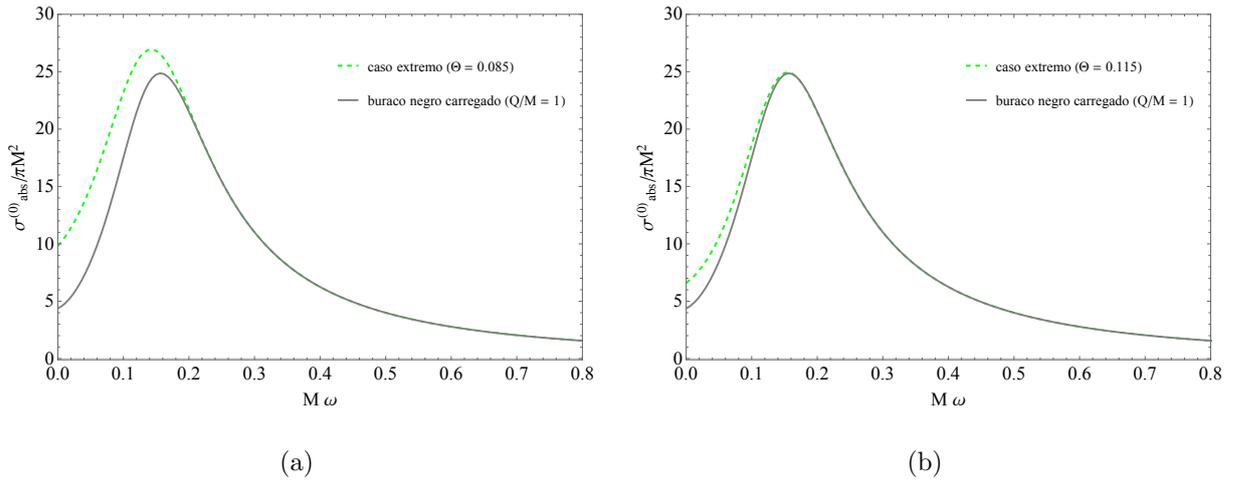
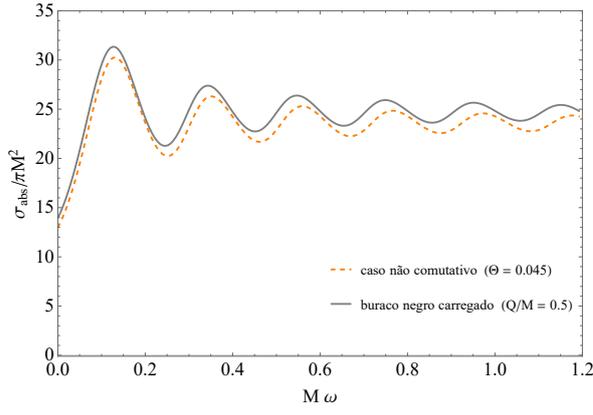


Figura 2.10: Seção de choque parcial de absorção para $l = 0$. Comparamos um buraco negro de Reissner-Nordström admitido $Q/M = 1$ com o buraco negro não-comutativo em (a) $\Theta = 0.085$ e em (b) $\Theta = 0.115$.

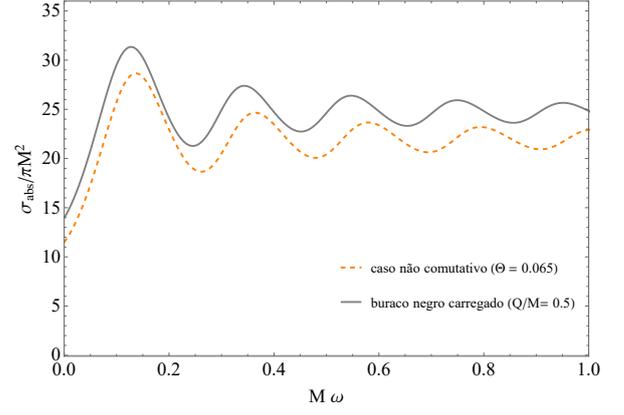
comparamos o caso não-comutativo ($\Theta = 0.085$ e $\Theta = 0.115$) com o extremo Reissner-Nordström ($Q/M = 1.0$).

Na Figura 2.12 apresentamos os gráficos para a seção de choque diferencial de espalhamento de um buraco negro não-comutativo para um campo escalar onde em (a) $M\omega = 1.0$ e (b) $M\omega = 3.0$. Analisando a figura 2.12 podemos observar que o efeito da não-comutatividade na seção diferencial de espalhamento é mais significativa para ângulos maiores.

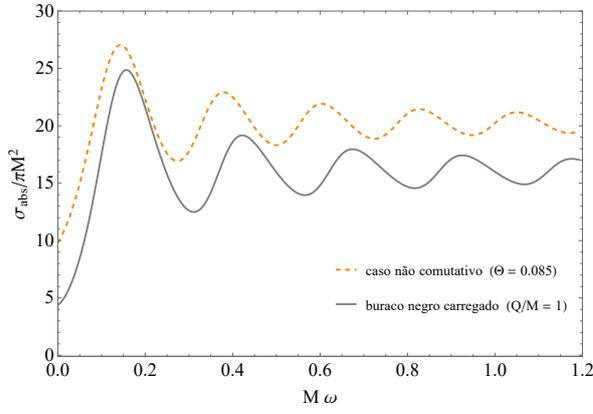
A Figura 2.13 mostra comparações entre as seções de choque diferencial de es-



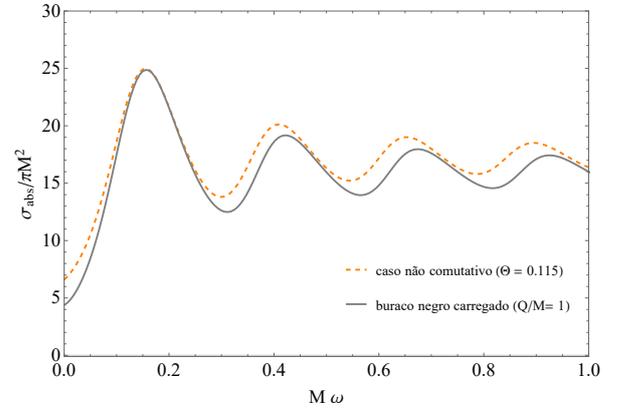
(a)



(b)

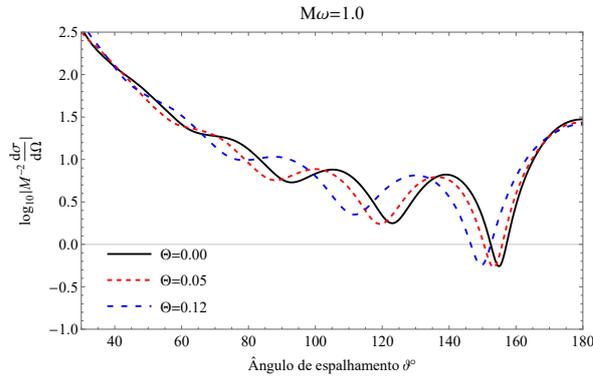


(c)

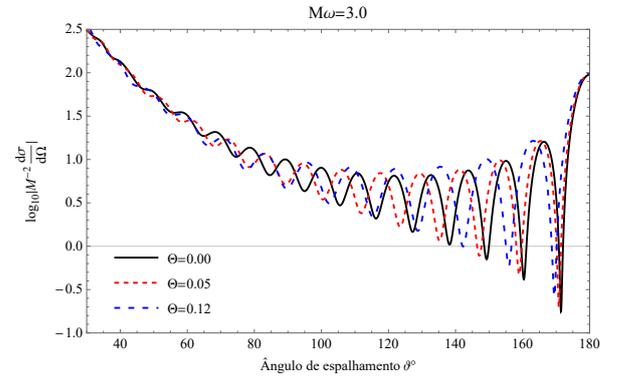


(d)

Figura 2.11: Seção de choque total de absorção. Novamente comparamos os dois casos, para buraco negro de Reissner-Nordström com $Q/M = 0.5$ e 1 e o caso não-comutativo $\Theta = 0.045, 0.065$ e $\Theta = 0.085, 0.115$.



(a)



(b)

Figura 2.12: Seção de choque de diferencial de espalhamento para alguns valores de Θ em dois cenários de frequência $M\omega = 1$ e $M\omega = 3$.

palhamento obtidas numericamente e com as aproximações clássica e semiclássica glória descritas na seção anterior. Observe que a aproximação glória se ajusta bem aos resultados numéricos para grandes ângulos $\vartheta \gtrsim 160^\circ$, enquanto a aproximação clássica se ajusta bem à região de pequenos ângulos $\vartheta \lesssim 40^\circ$. Na faixa intermediária, apenas o tratamento de espalhamento de onda completa produz resultados precisos. Todos os resultados deste capítulo foram publicados em [67].

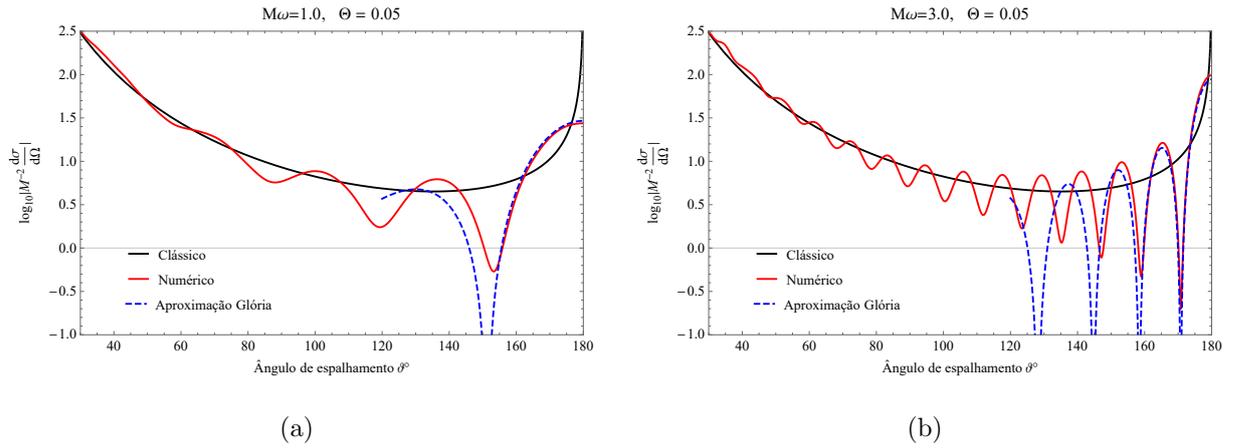


Figura 2.13: Comparando os resultados para a seção de choque diferencial de espalhamento numérico com as aproximações geodésicas e a aproximação semiclássica glória para $\omega M = 1$ e $\omega M = 3$ em ambos os casos usamos $\Theta = 0.05$.

Capítulo 3

Correções quânticas, espalhamento e absorção de um buraco negro de Schwarzschild com GUP

Neste capítulo vamos estudar os efeitos das correções quânticas provenientes do princípio da incerteza generalizado GUP (*generalized uncertainty principle*) no cenário de espalhamento em buracos negros. Como já mencionado na introdução desta tese, as soluções de buracos negros são frequentemente atormentadas por singularidades. No entanto, geralmente espera-se que essas singularidades sejam encontradas na região interna de um buraco negro. Por outro lado, existem soluções de buracos negros que não possuem singularidades e são chamadas de buracos negros regulares. A primeira solução de buraco negro regular foi obtida por Bardeen em 1968 [68]. Na literatura existem alguns trabalhos que exploraram os processos de espalhamento de buracos negros regulares [69, 65] na tentativa de construir uma teoria consistente da gravidade livre de singularidades ou paradoxo de informação de buracos negros.

Nos últimos anos, tem-se investigado que este tipo de dificuldade pode ser evitado considerando objetos astrofísicos com raio efetivo maior que o horizonte [70]. Para esses tipos de objetos podemos citar, por exemplo, o paradigma fuzzball [71] proposto na teoria das cordas, gravastar [72, 73] e o firewall [74, 75]. Ao considerar correções quânticas do horizonte de eventos de buracos negros decorrentes do princípio da incerteza generalizada, implica que o raio efetivo é maior que o raio do horizonte de Schwarzschild. O princípio da incerteza generalizado ou GUP, vem da existência de uma escala de comprimento mínimo,

que está presente basicamente em todas as abordagens da gravidade quântica. A ideia de um espaço-tempo como uma variedade suave se desfaz na escala de Planck, e isso, por sua vez, implica que pelo menos o comprimento de Planck atue como uma escala de comprimento mínimo mensurável.

No capítulo anterior exploramos a dispersão de ondas escalares através de um buraco negro não-comutativo e percebemos que a não comutatividade faz com que a seção de absorção seja diferente de zero no limite de pequenas massas. Neste capítulo iremos verificar se este efeito permanece ou não quando consideramos o efeito das correções quânticas devido ao princípio da incerteza generalizado no processo de espalhamento para um buraco negro de Schwarzschild.

3.1 Métrica com correções quânticas

Nesta seção aplicaremos correções quânticas, para métrica de um buraco negro tipo Schwarzschild e desta forma investigar a influência destas correções no processo de espalhamento. Vamos começar considerando o princípio da incerteza generalizado que por simplicidade usaremos apenas a forma abreviada GUP (generalized uncertainty principle). Assim, considerando a seguinte definição [76, 77, 78, 21]

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left(1 - \frac{\alpha l_p}{\hbar} \Delta p + \frac{\beta l_p^2}{\hbar^2} (\Delta p)^2 \right), \quad (3.1)$$

onde α e β são parâmetros positivos adimensional e l_p é o comprimento de Planck. A aproximação GUP (3.1) com o momento linear e quadrático implica no surgimento de um comprimento mínimo mensurável $\Delta x \geq (\Delta x)_{min} \approx (\sqrt{\beta} - \alpha/2)l_p$, e um momento máximo mensurável $\Delta p \leq (\Delta p)_{max} \approx \alpha \hbar / (\beta l_p)$. A parte linear de (3.1) é consistente com o espaço tempo não-comutativo e a teoria *Doubly Special Relativity* (DSR) ou relatividade especial deformada [78]. Entretanto a aproximação GUP quadrática onde $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ que é naturalmente consistente com a generalização geométrica não-comutativa do espaço introduzindo uma aparência de um comprimento mínimo $\Delta x \geq (\Delta x)_{min} \approx \sqrt{\beta} l_p$ [21]. Na literatura existem várias abordagens para GUP com a existência de um comprimento mínimo diferente de zero que leva a uma geometria não-comutativa e com aplicações em diversos ramos da física. Além disso, vale ressaltar que o comprimento de Planck corresponde ao menor tamanho permitido de um buraco negro. Neste sentido, a incerteza da posição é considerada da ordem do comprimento de Compton λ , ou seja, $\Delta x \simeq \lambda$

[76, 77] e perto do buraco negro de Schwarzschild as partículas têm um comprimento de onda próximo ao inverso da temperatura de Hawking, em unidades naturais. Então teremos a incerteza da posição na ordem do raio do horizonte $\Delta x \sim r_s$. Agora a equação (3.1) pode ser escrita da forma

$$\Delta p \geq \frac{\hbar(2\Delta x + \alpha l_p)}{2\beta l_p^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\beta l_2^2}{(2\Delta x + \alpha l_p)^2}} \right). \quad (3.2)$$

Vamos adotar nas etapas seguintes, sem perda de generalidade, as unidades naturais $G_N = c = k_B = \hbar = l_p = 1$. Vamos fazer também as seguintes redefinições: $\alpha \rightarrow 2\alpha$, $\beta \rightarrow 2\beta$, $\Delta x \rightarrow \Delta x/4$ e $\Delta p \rightarrow 4\Delta p$. Fazemos isso para simplificar as equações e interpretações dos resultados nas etapas seguintes, podendo assim obter resultados melhores graficamente usando valores menores nos parâmetros α e β . Seguindo, vamos expandir em série de potência em α e β , obtendo

$$\Delta p \geq \frac{1}{2\Delta x} \left[1 - \frac{4\alpha}{\Delta x} + \frac{16\beta}{(\Delta x)^2} + \dots \right]. \quad (3.3)$$

Para o caso $\alpha = \beta = 0$, recuperamos o princípio da incerteza de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

Desta forma, assumimos que $\Delta p \sim p \sim E$ e da equação (3.4) obtemos um limite para partículas sem massa dado por

$$E \Delta x \geq \frac{1}{2}. \quad (3.5)$$

Neste caso, a equação (3.3) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq E \left[1 - \frac{4\alpha}{\Delta x} + \frac{16\beta}{(\Delta x)^2} + \dots \right] \\ &= E \left[1 - \frac{4\alpha}{r_s} + \frac{16\beta}{r_s^2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nesse ponto identificamos ε como a energia do buraco negro correspondente ao GUP, considerando Δx o raio de Schwarzschild r_s [76, 77]. A equação (3.6) pode ser escrita em termos da massa, tal que $E \sim M$, $\varepsilon \sim \mathcal{M} = M_{gup}$, $r_s = 2M$ podemos obter a seguinte relação

$$\mathcal{M} = M_{gup} \geq M \left[1 - \frac{4\alpha}{r_s} + \frac{16\beta}{r_s^2} \right] = M \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right). \quad (3.7)$$

Aqui $\mathcal{M} = M_{gup}$ é a massa correspondente ao buraco negro com GUP. Da expressão acima podemos obter a relação para o horizonte de eventos

$$r_{hgup} = 2M_{gup} \geq r_s \left(1 - \frac{4\alpha}{r_s} + \frac{16\beta}{r_s^2} \right). \quad (3.8)$$

Se considerarmos apenas a parte quadrática GUP (com $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$), a relação acima fica

$$r_{hgup} = 2M_{gup} \geq r_s \left(1 + \frac{16\beta}{r_s^2} \right). \quad (3.9)$$

Note que, neste caso, o horizonte de eventos devido ao GUP é maior do que o horizonte de eventos do buraco negro de Schwarzschild. A métrica para o buraco negro de Schwarzschild com correções quânticas introduzida pelo GUP é obtida relacionando a massa M com a massa GUP M_{gup} , descrita pelo seguinte elemento de linha

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M_{gup}}{r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M_{gup}}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2), \quad (3.10)$$

aqui temos um horizontes de eventos, r_{hgup} dado da forma

$$r_{hgup} = 2M_{gup} = 2M \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right), \quad (3.11)$$

A temperatura Hawking para o buraco negro com correções GUP é dado da forma

$$T_H = \frac{1}{8\pi M} \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right)^{-1} \quad (3.12)$$

onde $\alpha = \beta = 0$ retornamos ao caso convencional da temperatura de Schwarzschild. O comportamento da temperatura admite um máximo para um valor de massa crítica $M_{cr} = 2\sqrt{\beta}$. Um resultado interessante é aplicar o limite de pequenas massas, $M \rightarrow 0$, na equação (3.11) encontramos um raio de horizonte diferente de zero dado por $r_{hgup} \approx \frac{8\beta}{M}$, usando o valor da massa crítica $M \rightarrow M_{cr}$ temos o seguinte raio do horizonte para o caso crítico $r_{hgup} \approx 4\sqrt{\beta}$.

Nas seções seguintes vamos obter a seção de choque de absorção e de espalhamento diferencial, da mesma forma que foi feito no capítulo anterior para o espaço tempo não-comutativo.

3.1.1 Método de ondas parciais

Nesta seção vamos encontrar uma expressão para o espalhamento diferencial e a seção de absorção no limite de baixas frequências para o buraco negro de Schwarzschild

implementando correções quânticas pelo GUP. Seguindo o procedimento do capítulo anterior vamos considerar a equação do campo escalar para um caso sem massa e assim descrever a onda espalhada pela métrica (3.10), dado por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi) = 0. \quad (3.13)$$

O efeito do GUP na equação acima aparecera explicitamente pela métrica (3.10). Então aplicando a separação de variável na equação acima

$$\Psi_{\omega lm}(\vec{r}, t) = \frac{R_{\omega l}(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (3.14)$$

onde $Y_{lm}(\vartheta, \phi)$ são harmônicos esféricos e ω é a frequência, a equação radial para $R_{\omega l}(r)$ é agora escrita da seguinte forma

$$f(r) \frac{d}{dr} \left(f(r) \frac{dR_{\omega l}(r)}{dr} \right) + [\omega^2 - V_{ef}] R_{\omega l}(r) = 0, \quad (3.15)$$

onde

$$f(r) = 1 - \frac{2M_{gup}}{r} = 1 - \frac{2M}{r} \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right), \quad (3.16)$$

e o potencial efetivo é dado por

$$V_{ef} = \frac{(r - 2M_{gup})}{r^3} \left[\frac{2M_{gup}}{r} + l(l+1) \right]. \quad (3.17)$$

O próximo passo é reescrever a equação (3.15) considerando a seguinte mudança de variável $G(r) = \sqrt{f(r)} R_{\omega l}(r)$,

$$\frac{d^2 G(r)}{dr^2} + U(r) G(r) = 0, \quad (3.18)$$

com $U(r)$ definido da seguinte forma

$$U(r) = \frac{1}{4f^2(r)} \left(\frac{df(r)}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2f(r)} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{\omega^2}{f^2(r)} - \frac{V_{ef}}{f^2(r)}, \quad (3.19)$$

veja que temos a mesma expressão obtida no capítulo anterior, onde para este caso as derivadas primeira e segunda de $f(r)$ é simplesmente

$$\frac{df(r)}{dr} = \frac{2M_{gup}}{r^2}, \quad \frac{d^2 f(r)}{dr^2} = -\frac{4M_{gup}}{r^3}. \quad (3.20)$$

Neste ponto consideramos a equação (3.18) expandindo $U(r)$ em série de potências em torno de $1/r$, assim temos

$$\frac{d^2 G(r)}{dr^2} + (\omega^2 + \mathcal{U}(r)) G(r) = 0, \quad (3.21)$$

onde $\mathcal{U}(r)$ é um novo potencial efetivo dado por

$$\mathcal{U}(r) = \frac{4M_{gap}\omega^2}{r} + \frac{12\ell^2}{r^2} + \dots \quad (3.22)$$

É interessante notar que modificamos o termo em $1/r^2$, definindo um ℓ^2 da seguinte forma,

$$\ell^2 = -\frac{l(l+1)}{12} + M^2\omega^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2}\right)^2. \quad (3.23)$$

No limite de $r \rightarrow \infty$ temos que o novo potencial $\mathcal{U}(r)$ vai a zero assim temos que a condição assintótica do potencial é satisfeita. Usando novamente uma formula aproximada para determinar o deslocamento de fase analítico em baixas frequências

$$\delta_l \approx 2(l - \ell) = 2 \left(l - \sqrt{-\frac{l(l+1)}{12} + M^2\omega^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2}\right)^2} \right), \quad (3.24)$$

e considerando o limite de baixas frequências o deslocamento de fase δ_l pode ser obtido considerando $l \rightarrow 0$, temos que

$$\delta_l = \delta_0 + \delta_{l \geq 1}, \quad \delta_0 = -2M\omega \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2}\right), \quad \delta_{l \geq 1} = 0. \quad (3.25)$$

Agora como feito no capítulo anterior, a um problema de divergência na equação da seção de choque de espalhamento diferencial em ângulos pequenos, e esse problema é contornado usando uma série reduzida menos divergente onde a expressão final é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{1}{2i\omega} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) \frac{P_l(\cos \vartheta)}{1 - \cos \vartheta} \right|^2. \quad (3.26)$$

Podemos ainda tomar o limite para pequenos ângulos, ficando da forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4}{\omega^2 \vartheta^4} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(1) \right|^2 \quad (3.27)$$

$$= \frac{4}{\omega^2 \vartheta^4} \left| e^{i\delta_0} \sin(\delta_0) + \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) \right|^2. \quad (3.28)$$

Sendo assim, com o limite de baixa frequência, com $l = 0$, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\omega \rightarrow 0}^{bf} &= \frac{4}{\omega^2 \vartheta^4} \delta_0^2 + \dots = \frac{16M^2}{\vartheta^4} \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2}\right)^2 + \dots, \\ &= \frac{16}{\vartheta^4} \left(M^2 - 4\alpha M + 8\beta + 4\alpha^2 - \frac{16\alpha\beta}{M} + \frac{16\beta^2}{M^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

Note que quando $\alpha = \beta = 0$ o resultado retorna para o caso de Schwarzschild. Verificamos que os resultados para a seção de choque de espalhamento diferencial para o buraco negro de Schwarzschild com GUP diminui quando aumentamos os valores do parâmetro α com β fixo, e quando aumentamos o valor de β com α fixo a seção de espalhamento aumenta. Considerando apenas a parte quadrática (ou seja, $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$),

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\omega \rightarrow 0}^{bf} = \frac{16M^2}{\vartheta^4} \left(1 + \frac{4\beta}{M^2} \right)^2 + \dots, \quad (3.30)$$

$$= \frac{16M^2}{\vartheta^4} \left(M^2 + 8\beta + \frac{16\beta^2}{M^2} \right) + \dots. \quad (3.31)$$

No limite $M \rightarrow 0$ o termo dominante da equação (3.29)

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\omega \rightarrow 0}^{bf} \approx \frac{(16\beta)^2}{\vartheta^4 M^2}. \quad (3.32)$$

Agora vamos determinar a seção de choque de absorção para um buraco negro de Schwarzschild com GUP no limite de baixas frequências. Como vimos no capítulo anterior podemos obter a seção de choque de absorção pela seguinte expressão,

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi}{\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |e^{2i\delta_l}|^2), \quad (3.33)$$

este é um resultados bem conhecido na mecânica quântica, temos

$$\sigma_{abs} = \frac{4\pi}{\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2(\delta_l) \quad (3.34)$$

$$= \frac{4\pi}{\omega^2} \left[\sin^2(\delta_0) + \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \sin^2(\delta_{l \geq 1}) \right]. \quad (3.35)$$

Considerando o limite de baixas frequências ($\omega \rightarrow 0$) e aplicando (3.25) em (3.35), absorção para $l = 0$ é dado por

$$\sigma_{abs}^{bf} = \frac{4\pi}{\omega^2} \delta_0^2 = 16\pi M^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right)^2, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} &= 16\pi M^2 \left(M^2 - 4\alpha M + 8\beta + 4\alpha^2 - \frac{16\alpha\beta}{M} + \frac{16\beta^2}{M^2} \right) \\ &= 4\pi r_{hgup}^2 = A_{schwgup}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Novamente podemos observar que quando assumimos $\alpha = \beta = 0$, recuperamos o resultado da seção de absorção para o buraco negro de Schwarzschild. Já quando assumimos α e/ou β diferente de zero temos a contribuição das correções quânticas provenientes

do GUP. Vamos considerar o caso admitindo a parte linear e quadrática da GUP, ou seja, $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ a amplitude das curvas de absorção aumenta quando aumentamos o valor de α com o β fixo como podemos ver na figura 3.2(b), por outro lado quando aumentamos o valor do parâmetro β e fixando α temos uma redução na amplitude de absorção como pode ser visto na figura 3.2(d). Entretanto assumindo apenas a parte quadrática do GUP, ou seja, com $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ encontramos o seguinte resultado para seção transversal de absorção no limite de baixas frequência

$$\sigma_{abs}^{bf} = 16\pi M^2 \left(1 + \frac{4\beta}{M^2}\right)^2, \quad (3.38)$$

$$= 16\pi \left(M^2 + 8\beta + \frac{16\beta^2}{M^2}\right). \quad (3.39)$$

Neste caso temos um aumento da absorção quando aumentamos o valor do parâmetro β . As equações (3.36) e (3.39) nos obtemos um resultado bastante interessante no limite de massa nula. Neste limite a seção de absorção não vai a zero, contrariando o caso usual para um buraco negro de Schwarzschild, o resultado nesse limite é dado por

$$\sigma_{abs}^{bf} \approx \frac{\pi(16\beta)^2}{M^2}. \quad (3.40)$$

3.1.2 Estudo da órbita e análise clássica

Vamos analisar a seção de choque diferencial de espalhamento e a absorção no limite de altas frequências, considerando o espalhamento geodésico clássico e a aproximação glória semiclássica. O estudo da geodésica nula segue os passos do capítulo anterior, assim para um espaço tempo da forma (3.10) esfericamente simétrica, considerando um plano equatorial fixando o ângulo ϑ em $\pi/2$. Temos que a lagrangeana associada a geodésica nula é dada por $2\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$, assim

$$E = f(r)\dot{t}, \quad L = r^2\dot{\phi} \quad \text{e} \quad \dot{r}^2 + f(r)\frac{L^2}{r^2} = E^2, \quad (3.41)$$

lembrando que as constantes E e L correspondem a energia e momento angular respectivamente. Introduzindo uma nova variável $u = 1/r$ podemos escrever a equação orbital da seguinte forma

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{b} - u^2 + 2M_{gup}u^3, \quad (3.42)$$

onde novamente temos o parâmetro de impacto $b = L/E$ e diferenciando (3.42) temos,

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = -u + 3M_{gup}u^2. \quad (3.43)$$

Usando as condições $\frac{du}{d\phi} = 0$ e $\frac{d^2u}{d\phi^2} = 0$ obtemos o parâmetro de impacto crítico e o raio crítico,

$$r_c = 3M \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right), \quad (3.44)$$

$$b_c = 3\sqrt{3}M \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right). \quad (3.45)$$

A seção de choque de absorção no limite de altas frequências é proporcional a área crítica delimitada pelo parâmetro de impacto crítico da forma $\sigma_{abs}^{af} = \pi b_c^2$, assim temos

$$\sigma_{abs}^{af} = 27M^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right)^2. \quad (3.46)$$

Este resultado mostra influência da correção quântica da seção de absorção em altas frequências, na seção seguinte comparamos com os resultados obtidos numericamente. Como já vimos para que haja um cenário de espalhamento temos que $b > b_c$, onde a luz não será absorvida pelo buraco negro mas voltará ao infinito após passar por um ponto de virada, assim a seção de choque de espalhamento clássico pode ser obtida diretamente pelo ângulo de deflexão e para obtê-lo basta integrar a equação (3.42)

$$\Delta\phi = 2 \int^{u_0} \left(\frac{1}{b^2} - u^2 + 2M_{gup}u^3 \right)^{-1/2} du, \quad (3.47)$$

onde ângulo de deflexão é obtido pela relação $\chi(b) = \Delta\phi - \pi$. A equação (3.47) pode ser integrada tomando o limite de $M_{gup}/r \ll 1$, detalhes pode ser encontrados no Apêndice A temos que

$$\chi(b) = \frac{4M}{b} \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right). \quad (3.48)$$

Dada a relação entre b e o ângulo de deflexão, a seção de choque de espalhamento diferencial clássico é apresentada por

$$\frac{d\sigma_{clas}}{d\Omega} = \frac{b(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|. \quad (3.49)$$

Agora o processo se resume a inverter a equação (3.48), obtendo $b(\chi)$, e por fim substituindo o parâmetro de impacto na equação (3.49), para obter

$$\frac{d\sigma_{clas}}{d\Omega} \approx \frac{16M^2}{\vartheta^4} \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right)^2. \quad (3.50)$$

3.1.3 Aproximação glória

Como já discutimos no capítulo anterior a aproximação glória é um método que funciona bem para ângulos de espalhamento altos especificamente próximos de π , desta forma o efeito glória vem do espalhamento de partículas no sentido oposto ao sentido inicial de propagação, em buracos negros esse fenômeno está diretamente ligada à existência de órbitas instáveis. A equação que descreve a seção de choque diferencial de espalhamento glória equação (2.64), descrita no capítulo anterior.

Resolvendo a integral (3.47) temos o seguinte ângulo de deflexão,

$$\chi = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{M(u_2 - u_0)}} [K(\kappa) - F(z, \kappa)] - \pi, \quad (3.51)$$

onde aqui $F(z, \kappa)$ e $K(\kappa)$ são as integrais elípticas incompletas e completas de primeiro tipo [66], respectivamente, com

$$\kappa^2 = \frac{u_1 - u_2}{u_2 - u_0}, \quad z = \sqrt{\frac{-u_0}{u_1 - u_0}}, \quad (3.52)$$

e u_0, u_1 e u_2 são as raízes da equação (3.42). Neste capítulo iremos fazer uma análise um pouco diferente do capítulo anterior, é interessante derivar uma aproximação para as integrais elípticas em (3.51), a fim de obter uma expressão analítica para o parâmetro de impacto glória b_g e sua derivada, como feito por Darwin [79] para o buraco negro de Schwarzschild para parâmetros de impacto próximos de b_c . Vamos começar encontrando as raízes do lado direito da (3.42) para o caso crítico ($b = b_c$), obtemos $\bar{u}_0 = -1/6M_{gup}$, $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 1/3M_{gup} = u_c$. Expandindo as raízes em $b \rightarrow b_c$ temos

$$u_0 = \bar{u}_0 + \dots \mathcal{O}(\varrho^2), \quad (3.53)$$

$$u_1 = u_c + u_c \frac{\sqrt{6}}{3} \varrho + \dots + \mathcal{O}(\varrho^2), \quad (3.54)$$

$$u_2 = u_c - u_c \frac{\sqrt{6}}{3} \varrho + \dots + \mathcal{O}(\varrho^2), \quad (3.55)$$

onde $\varrho = \frac{\sqrt{b - b_c}}{\sqrt{b_c}}$. Com os raios obtidos para órbitas quase críticas, podemos obter os coeficientes em (3.52)

$$\kappa^2 = \frac{u_c - u_c(\sqrt{6}/3)\varrho - \bar{u}_0}{u_c + u_c(\sqrt{6}/3)\varrho - \bar{u}_0} \approx 1 - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \varrho + \dots + \mathcal{O}(\varrho^2), \quad (3.56)$$

$$z = \sqrt{\frac{-\bar{u}_0}{u_c - u_c(\sqrt{6}/3)\varrho - \bar{u}_0}} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} \varrho + \dots + \mathcal{O}(\varrho^2). \quad (3.57)$$

Tabela 3.1: Resultados analíticos e numéricos para o parâmetro de impacto glória e sua derivada.

$M = 1$		b_g		$ db/d\vartheta _{\vartheta=\pi}$	
α	β	Eq. (3.59)	Numérico	Eq. (3.59)	Numérico
0.00	0.00	5.34664	5.35696	0.150483	0.170554
	0.02	5.77437	5.78552	0.162522	0.184198
	0.03	5.98823	5.99790	0.168510	0.191020
0.03	0.00	5.02584	5.03554	0.141454	0.160321
	0.02	5.45347	5.46410	0.153493	0.173965
	0.03	5.66743	5.67838	0.159512	0.180787
0.06	0.00	4.70504	4.71412	0.132425	0.150087
	0.02	5.13277	5.14268	0.144464	0.160087
	0.03	5.34664	5.35696	0.150483	0.170554

Para derivar o ângulo de deflexão na forma logarítmica usamos a aproximação pra $\kappa \approx 1$

$$K(\kappa) \approx \frac{1}{2} \log \left(\frac{16}{1 - \kappa^2} \right), \quad F(z, \kappa) \approx \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right), \quad (3.58)$$

substituindo estes resultados na equação (3.51) e algumas manipulações matemáticas, obtemos a seguinte expressão

$$\chi + \pi = -\log \left[\frac{(3 + \sqrt{3})\sqrt{b - b_c}}{18(\sqrt{6} - \sqrt{2})\sqrt{b_c}} \right]^2, \quad (3.59)$$

$$b = \left(3.48228e^{-\chi} + 3\sqrt{3} \right) M \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right),$$

onde b_g é obtido para $\chi = \pi$. Se assumimos $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ temos o resultado obtido por Darwin [79] para o buraco negro de Schwarzschild. Para verificar os resultados obtidos pela aproximação resolvemos a equação (3.51) numericamente usando o método de Newton e obtemos b_g em seguida $|db/d\vartheta|_{\vartheta=\pi}$, os resultados para ambos os casos estão apresentados na Tabela 3.1. O efeito glória pode ser visto na Figura 3.1 onde temos o comportamento das linhas geodésicas para b_g e o parâmetro de impacto crítico b_c para diferentes valores de α e β

3.2 Resultados numéricos

A análise numérica segue o procedimento feito no capítulo anterior, ou seja, transformando a equação radial (3.15) em uma equação tipo de Schrödinger usado uma mu-

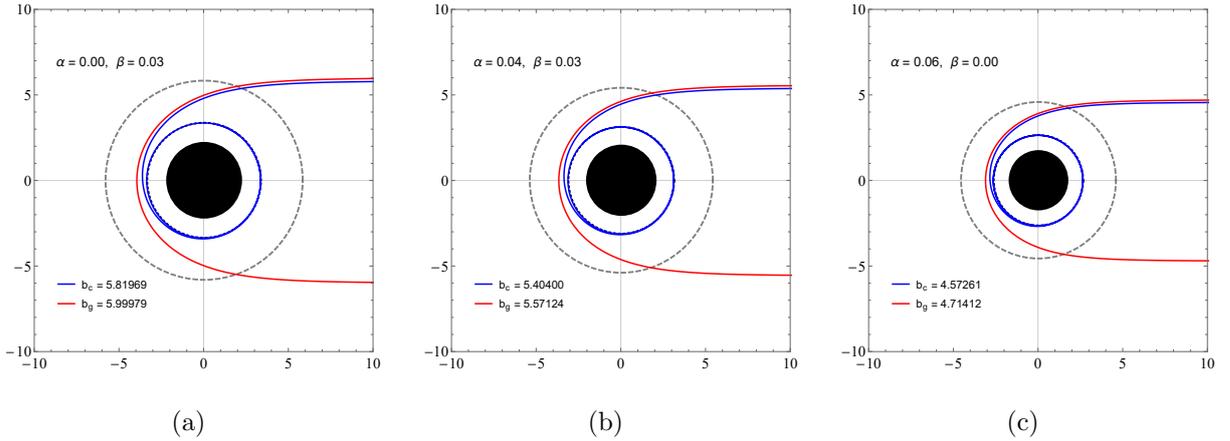


Figura 3.1: Efeito glória em torno de um buraco negro com correções quânticas GUP. As linhas vermelhas correspondem as geodésicas para o parâmetro de impacto glória b_g , comparadas ao parâmetro de impacto crítico em azul.

dança de coordenada da forma $x = r + r_{hgup} \log |r - r_{hgup}|$, a nova equação é sujeita as seguintes condições de contorno é

$$\mathcal{R}_{\omega l}(x) \approx \begin{cases} A_{ent} e^{-i\omega x} + A_{sai} e^{i\omega x}, & x \rightarrow +\infty (r \rightarrow \infty), \\ A_{tr} e^{-i\omega x}, & x \rightarrow -\infty (r \rightarrow r_{hgup}), \end{cases} \quad (3.60)$$

onde os coeficientes A_{ent} e A_{sai} podem ser determinados numericamente seguindo os passos descritos no Apêndice D.

Os resultados numéricos obtidos por meio da solução da equação radial (3.15) é comparado com os resultados dos outros métodos descritos nesse capítulo. Na Tabela 3.2 temos os resultados analítico (3.29) e numérico para a seção de choque de absorção com o GUP linear e quadrático (com $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$) para valores de α e β entre 0 e 0.06 fixando os valores para $M = 1$ e $l = 0$. Ainda na tabela 3.2 comparamos os resultados analíticos e numéricos com apenas a parte quadrática do GUP (com $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$) para valores de α e β entre 0 e 0.06, com os mesmos valores fixos de M e l . Na Tabela 3.3 temos os resultados analíticos e numéricos para os valores da seção de choque de absorção para valores de M entre 0 e 1, fixando os valores de $\alpha = 0, 0.06$, $\beta = 0.01$ e $l = 0$. Em todos os casos o resultado analítico no limite de baixas frequências se mostra bastante eficiente com boa aproximação com os resultados numéricos.

Vamos agora analisar as figuras obtidas pelo método numérico, para diversos casos. Primeiro considerando a parte linear e quadrática do GUP (com $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$) temos nos gráficos da Figura 3.2 a absorção parcial para multipolo $l = 0$, e adotando os seguintes va-

Tabela 3.2: Resultados analíticos e numéricos para seção de choque de absorção no limite $\omega \rightarrow 0$, com $M = 1$ e $l = 0$.

β	$\alpha = 0.00$		$\alpha = 0.03$		$\alpha = 0.06$	
	Eq. (3.36)	Numérico	Eq. (3.36)	Numérico	Eq. (3.36)	Numérico
0.00	16.0000	16.0003	14.1376	14.1362	12.3904	12.3883
0.01	17.3056	17.3048	15.3664	15.3655	13.5424	13.5398
0.02	18.6624	18.6602	16.6464	16.6460	14.7456	14.7451
0.03	20.0704	20.0675	17.9776	17.9770	16.0000	16.0003
0.04	21.5296	21.5268	19.3600	19.3561	17.3056	17.3048
0.05	23.0400	23.0360	20.7936	20.7929	18.6624	18.6602
0.06	24.6016	24.5994	22.2784	22.2753	20.0704	20.0675

Tabela 3.3: Resultados analíticos e numéricos para seção de choque de absorção no limite $\omega \rightarrow 0$, agora considerando alguns valores para M com $l = 0$.

M	$\alpha = 0.00, \beta = 0.01$		$\alpha = 0.06, \beta = 0.01$	
	Eq. (3.36)	Numérico	Eq. (3.36)	Numérico
1.00	17.3056	17.3019	13.5424	13.5389
0.50	5.38240	5.38347	3.38560	3.38685
0.15	2.77778	2.77756	1.40818	1.40821
0.09	4.57009	4.57034	2.74823	2.74936
0.04	11.5600	11.5365	8.52640	8.52718
0.02	65.2864	65.2784	57.7600	57.7565

lores para o parâmetro GUP $\alpha = 0.02, 0.04, 0.06$ e $\beta = 0.03$. Na Figura 3.2(a) analisamos o efeito linear do GUP e encontramos que amplitude de absorção para um buraco negro de Schwarzschild com GUP diminui a medida que variamos o parâmetro α com $\beta = 0$. Na Figura 3.2(b) fixando $\beta = 0.03$ e variando α mostramos que a absorção é reduzida e essa diminuição ocorre acima da curva do buraco negro de Schwarzschild. Na Figura 3.2(c) consideramos apenas a parte quadrática do GUP (com $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$), temos as curvas de absorção parcial para $l = 0$, e adotando os seguintes valores para os parâmetros do GUP $\alpha = 0$ e $\beta = 0.01, 0.02, 0.03$. Encontramos que a amplitude de absorção é agora aumentada quando os valores do parâmetro β aumentam, já na Figura 3.2(d), fixamos $\alpha = 0.06$ e variando β mostramos que a absorção é aumentada sendo que esse aumento ocorre abaixo da curva de absorção do buraco negro de Schwarzschild.

Considerando agora mais modos de multipolos podemos comparar o comporta-

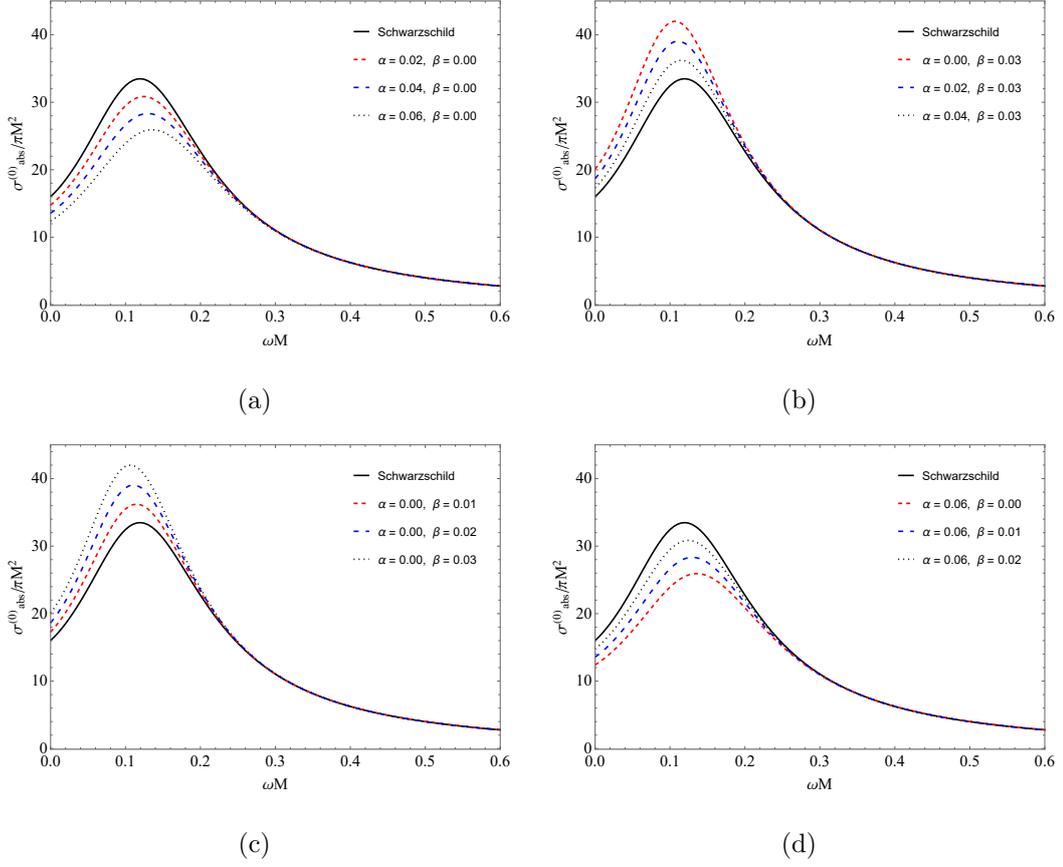


Figura 3.2: Nas imagens (b) e (d) temos a seção de choque parcial de absorção com GUP linear e quadrático para $l = 0$ com valores diferentes de α e β . Enquanto na imagem (a) temos o efeito apenas do parâmetro $\alpha = 0.0, 0.02, 0.04, 0.06$. Na imagem (c) temos apenas a parte linear do GUP $\alpha = 0$ e $\beta = 0.0, 0.01, 0.02, 0.03$.

mento destas novas curvas para os casos citados anteriormente. Podemos ver que as curvas para esses novos modos na região de baixas frequências é zero, as amplitudes máximas de absorção se comportam semelhante ao modo $l = 0$ com a diferença que o pico das curvas diminui conforme aumentamos o valor de l . Outro resultado interessante é quando considerando o limite de pequenas massas, na Figura 3.4(a) temos a parte linear e quadrática, quando reduzimos o valor da massa M a amplitude de absorção não vai à zero. Veja que a seção de choque de absorção é quase nula em $M = 0.150$, porém devido a presença das correções quânticas principalmente a parte quadrática Figura 3.4(b) como vimos também no limite de baixas frequências (3.40), assim temos uma amplitude de absorção que cresce para valores pequenos de M .

Na Figura 3.6 temos os resultados obtidos para a seção de choque diferencial de espalhamento pelos métodos clássico, semiclássico glória e numérico usando o método de ondas parciais. Podemos ver novamente a região de mais eficiência de cada método em

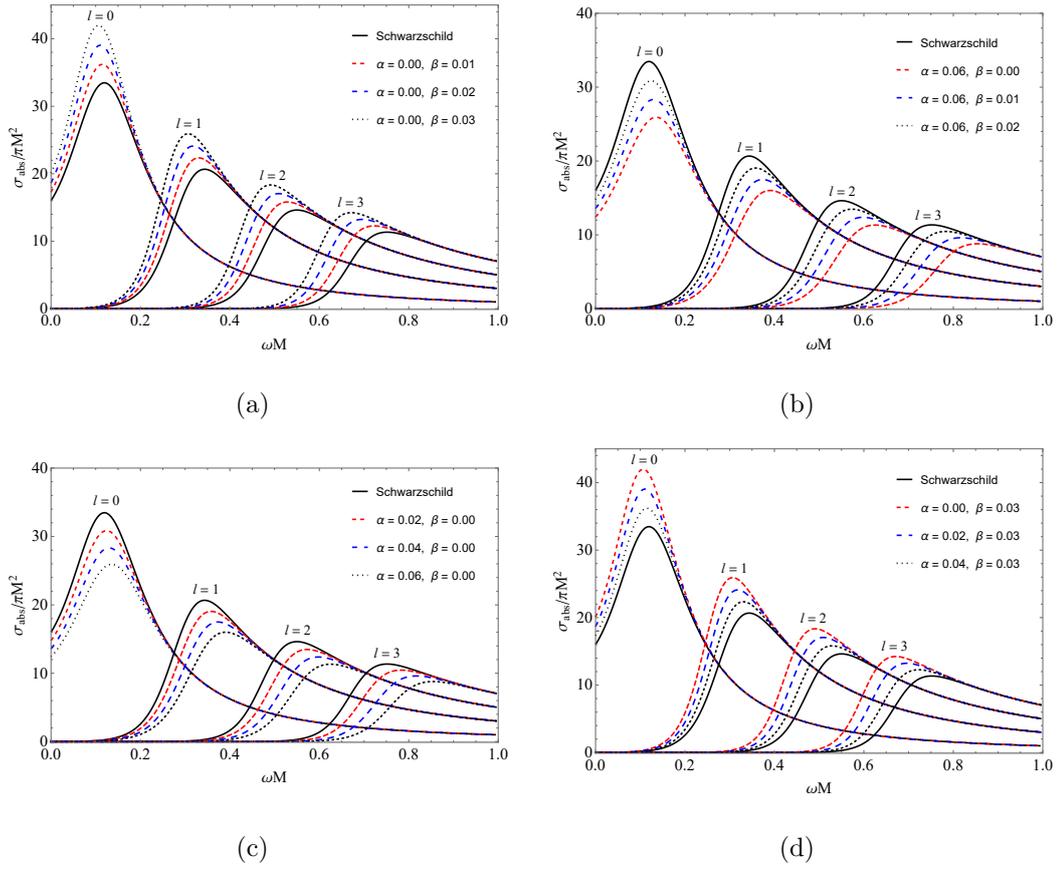


Figura 3.3: Seção de choque de absorção para os multipolos $l = 0, 1, 2, 3$.

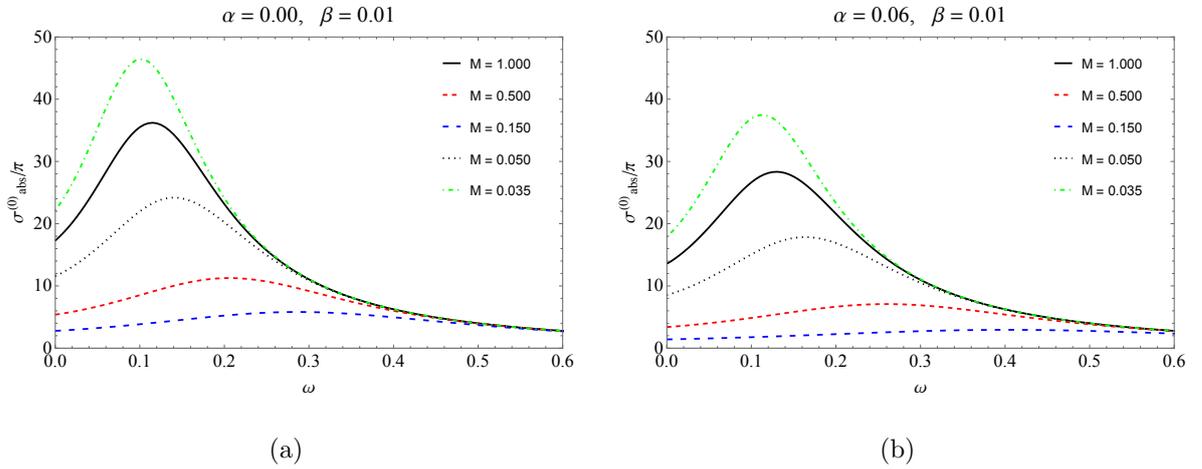


Figura 3.4: Em (a) temos a seção de choque parcial de absorção com GUP linear e quadrático para $l = 0$, com $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.01$ e uma variação da massa da forma $M = 1.0, 0.5, 0.15, 0.05, 0.035$, no gráfico (b) temos apenas a parte quadrática $\alpha = 0$.

duas frequências diferentes $\omega M = 1$ gráfico há esquerda e $\omega M = 2$ à direita nos dois cenários o clássico é eficiente para ângulos pequenos aproximadamente $\vartheta < 40^\circ$ enquanto a aproximação glória é boa para ângulos da ordem $\vartheta \geq 150^\circ$ e para descrever no intermédio

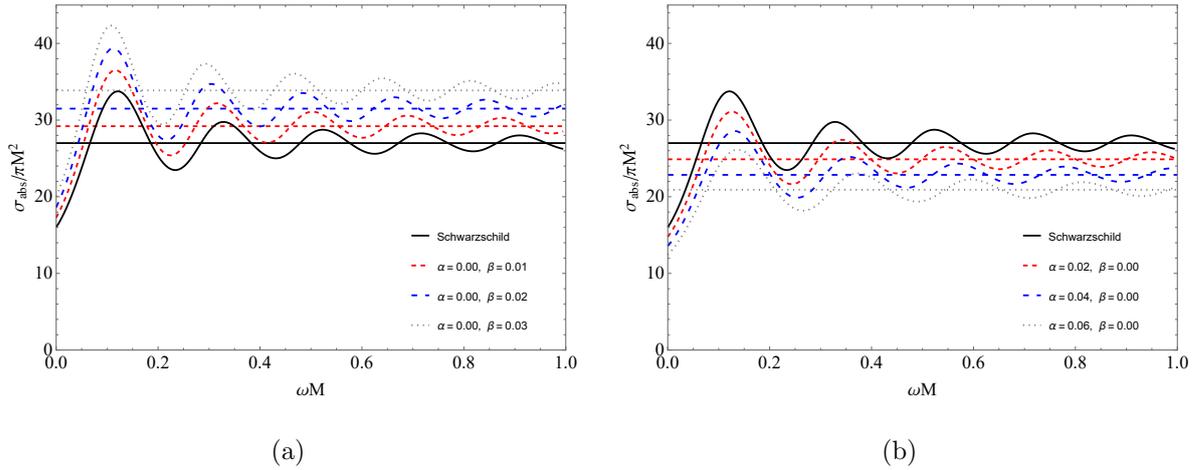


Figura 3.5: Seção choque total de absorção com GUP linear e quadrático. Em (a) temos apenas a parte quadrática com $\alpha = 0.0$ e alguns valores para β . Enquanto (b) temos apenas a contribuição de α de forma mais completa o comportamento da seção de choque diferencial de espalhamento é indispensável o método numérico.

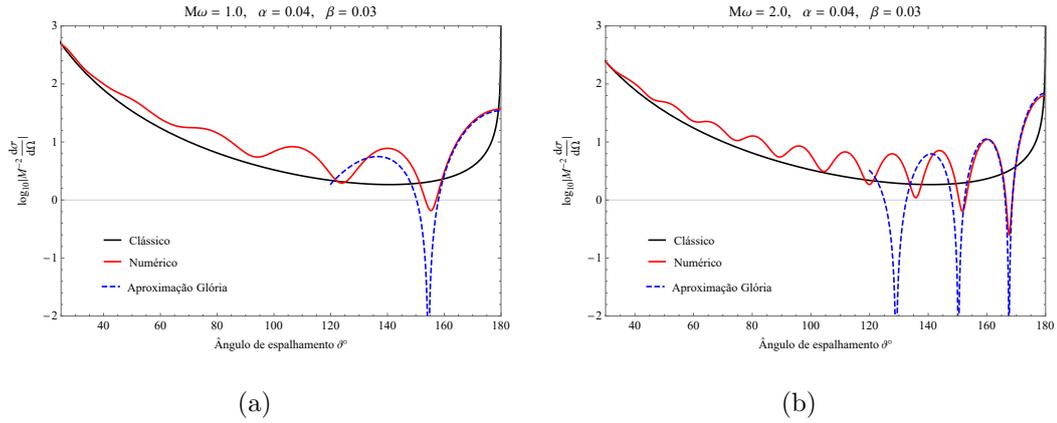


Figura 3.6: Seção de choque diferencial de espalhamento para um buraco negro com correções quânticas GUP, usando o método clássico, semiclássico glória e numérico.

Já na Figura 3.7 vemos a influência dos parâmetros α e β na seção de choque diferencial de espalhamento usando o método numérico, fixando a frequência ωM . Nas Figuras 3.7(a) a 3.7(c) não há variação da intensidade de espalhamento quando modificamos os valores dos parâmetros de correção, porém há pequenas variações nas larguras das franjas de interferência como pode ser mais perceptível na Figura 3.7(a) quando temos apenas a parte linear. De acordo com a fórmula do efeito glória (2.64) as distâncias entre os picos da seção de choque diferencial de espalhamento variam de forma inversa ao parâmetro de impacto glória b_g , assim os resultados da Tabela 3.1 é compatível com o comportamento dos gráficos de espalhamento, veja que para $\alpha = 0$ variando β temos um aumento de b_g

portanto as franjas devem diminuir como pode ser visto na Figura 3.7(a), já para $\beta = 0$ com o aumento de α temos uma diminuição de b_g como em Figura 3.7(c). Os resultados mostrados neste capítulo foram publicados em [80].

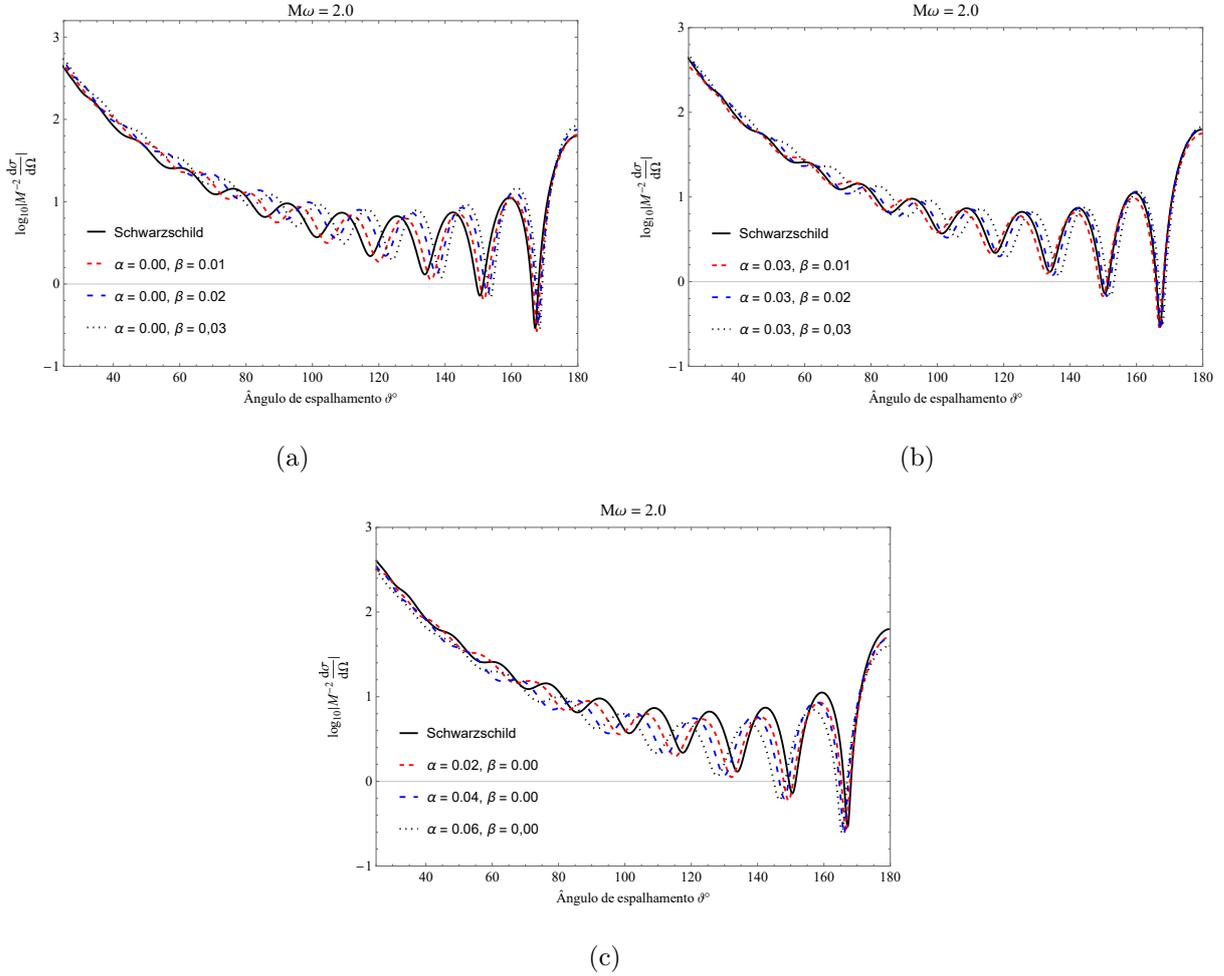


Figura 3.7: Seção de choque diferencial de espalhamento para diferentes valores de α e β . Podemos ver a influência da correção quântica na largura das franjas de interferência.

Capítulo 4

Absorção e espalhamento de um buraco negro auto-dual

Os chamados buracos negros auto-duais correspondem a um modelo simplificado que é obtido através de uma análise semiclássica, consistindo em modelos de simetria reduzida correspondente a espaço-tempo homogêneos, de gravidade quântica em laços. Como já mencionado na introdução a gravidade quântica em laços é uma teoria geométrica quântica construída com o objetivo de reconciliar a relatividade geral e a mecânica quântica na escala de Planck, sendo derivada do procedimento de quantização canônica das equações de Einstein obtidas em função das variáveis de Ashtekar [12]. A métrica do buraco negro auto-dual com correções de gravidade quântica foi encontrada por Modesto [81, 82], caracterizada por sua dependência do parâmetro polimérico δ e uma área mínima $A_{min} = 8\pi a_0$ relacionado ao parâmetro a_0 . Também apresenta um horizonte de eventos e um horizonte de Cauchy. Além disso, a condição de autodualidade tem a propriedade de remover a singularidade e substituí-la por outra região assintoticamente plana na distância a_0/r como a coordenada radial $r \approx 0$ [81]. A solução do buraco negro de Schwarzschild é recuperada no limite quando P e a_0 vão para zero.

Como feito nos dois capítulos anteriores, temos o objetivo de explorar o efeito das correções quânticas da gravidade que contribuem para o processo de espalhamento de ondas escalares por um buraco negro auto-dual. Usando as técnicas já discutidas para encontrar o deslocamento de fase aproximado no limite de baixas frequências ($m\omega \ll 1$), em seguida, calculamos a seção de choque diferencial de espalhamento e a absorção.

4.1 Buracos negros auto-duais

Vamos introduzir a geometria do buraco negro auto-dual com o objetivo de determinar a seção de choque diferencial de espalhamento e a seção de choque de absorção. Adotando os métodos já apresentados nos capítulos anteriores, ou seja, o método de ondas parciais para calcular o deslocamento de fase no limite de baixas frequências. O buraco negro auto-dual esfericamente simétrico pode ser descrito da seguinte forma

$$ds^2 = F(r)dt^2 - \frac{dr^2}{N(r)} - \rho^2(r) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2), \quad (4.1)$$

as funções $F(r)$, $N(r)$ e $\rho(r)$ são dadas respectivamente por

$$F(r) = \frac{(r - r_+)(r - r_-)(r + r_*)^2}{r^4 + a_0^2}, \quad (4.2)$$

$$N(r) = \frac{(r - r_+)(r - r_-)r^4}{(r + r_*)^2(r^4 + a_0^2)}, \quad (4.3)$$

$$\rho(r) = r\sqrt{1 + \frac{a_0^2}{r^4}}, \quad (4.4)$$

onde ρ é definido como uma coordenada radial efetiva que representa o raio da 2 esfera [81]. Aqui o raio do horizonte de eventos é dado por $r_+ = 2m$ e $r_- = 2mP^2$ o horizonte de Cauchy, o parâmetro m esta relacionado a massa do buraco negro M da forma $M = m(1 + P)^2$. Temos também que $r_* = \sqrt{r_+r_-} = 2mP$, onde P é uma função sem dimensão chamada de função polimérica que esta relacionada com o parâmetro polimérico δ da seguinte forma

$$P = \frac{\sqrt{1 + \gamma^2\delta^2} - 1}{\sqrt{1 + \gamma^2\delta^2} + 1}, \quad (4.5)$$

onde γ é o parâmetro de Barbero-Immirzi. Ainda temos o parâmetro a_0 que esta relacionado com a área mínima na gravidade quântica em laços da seguinte forma $a_0 = A_{min}/8\pi$.

A área mínima é representada da forma

$$A_{min} = 8\pi l_p^2 \gamma \sqrt{j_{min}(j_{min} + 1)}, \quad (4.6)$$

onde j_{min} é o menor valor da representação na borda da rede de spin que cruza a superfície, considerando a representação do grupo $SU(2)$, que leva à $j_{min} = 1/2$, nesta tese vamos assumir $\gamma \sim 1$ então em unidades naturais temos $a_0 = \sqrt{3}/2$.

Finalmente o valor de $\rho(r)$ relacionado com o horizonte de eventos r_+ é dado da seguinte forma

$$\rho_h = \rho(r_+) = r_+ \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{r_+^4}} = 2m \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{(2m)^4}}. \quad (4.7)$$

A propriedade de autodualidade pode ser expressa dizendo que a métrica é invariante sob transformações da forma

$$r \rightarrow a_0/r, \quad t \rightarrow tr_*^2/a_0, \quad r_{\pm} \rightarrow a_0/r_{\mp}. \quad (4.8)$$

O elemento de superfície mínimo é obtido quando a coordenada dual $\tilde{r} = a_0/r$ assume o valor $\tilde{r} = \sqrt{a_0}$. A propriedade da autodualidade remove a singularidade do buraco negro substituindo por outra região assintoticamente plana.

4.1.1 Seção de choque de absorção e espalhamento diferencial

Podemos interpretar a solução do buraco negro (4.1) como uma solução proveniente de um fluido de matéria efetiva que simula a gravidade quântica em laços. A teoria efetiva da gravidade acoplada à matéria é então descrita pelas equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (4.9)$$

onde $T_{\mu\nu} = (\rho, -P_r, -P_{\vartheta}, -P_{\phi})$. No limite semiclássico restrito à ordem zero em δ e a_0 recuperando a solução de Schwarzschild que satisfaz $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} = 0$. Em ordens mais altas captura as correções quânticas e $T_{\mu\nu} \neq 0$. Para mais discussões e componentes para correção do tensor momento energia veja [81]. Então, podemos considerar vários tipos de campos de matéria que podem ser consistentes com a teoria efetiva acima mencionada. No contexto de modos quasinormais é possível encontrar na literatura, estudos de perturbações escalares [83] e tensoriais [84]. Agora vamos considerar o caso para uma equação de campo escalar sem massa para descrever as ondas espalhadas na métrica (4.1)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} \Psi \right) = 0, \quad (4.10)$$

aplicando separação de variáveis na equação acima

$$\Psi_{\omega lm}(\mathbf{r}, t) = \frac{R_{\omega l}(r)}{\rho(r)} Y_{lm}(\vartheta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (4.11)$$

novamente temos a frequência ω e $Y_{lm}(\vartheta, \phi)$ são os esféricos harmônicos. Assim, obtemos a seguinte equação radial para $R_{\omega l}(r)$

$$\Lambda(r) \frac{d}{dr} \left(\Lambda(r) \frac{dR_{\omega l}(r)}{dr} \right) + [\omega^2 - V_{ef}] R_{\omega l}(r) = 0, \quad (4.12)$$

onde $\Lambda(r) = \sqrt{F(r)N(r)}$ e V_{ef} é o potencial efetivo, dado por

$$V_{ef} = \frac{\Lambda(r)}{\rho(r)} \left[\rho'(r) \frac{d\Lambda(r)}{dr} + \Lambda(r) \rho''(r) \right] + \frac{\Lambda(r)l(l+1)}{\rho^2(r)}. \quad (4.13)$$

onde

$$\rho'(r) = \frac{\rho(r)}{r} \left(1 - \frac{2a_0^2}{\rho^2(r)r^2} \right), \quad \rho''(r) = \frac{6a_0^2}{\rho(r)r^4} \left(1 - \frac{2a_0^2}{3\rho^2(r)r^2} \right). \quad (4.14)$$

Seguindo, consideramos uma nova função radial, $G(r) = \sqrt{\Lambda(r)}\mathcal{R}(r)$, e assim reescrever a equação (4.12) em uma forma tipo de Schrödinger, da forma

$$\frac{d^2G(r)}{dr^2} + U(r)G(r) = 0, \quad (4.15)$$

onde

$$U(r) = \frac{[\Lambda'(r)]^2}{4\Lambda^2(r)} - \frac{\Lambda''(r)}{2\Lambda(r)} + \frac{\omega^2}{\Lambda^2(r)} - \frac{V_{ef}}{\Lambda^2(r)}. \quad (4.16)$$

Expandindo o potencial $U(r)$ em série de potência em torno de $1/r$ (para r grande em relação a $\sqrt{a_0}$), a equação (4.15) fica

$$\frac{d^2G(r)}{dr^2} + [\omega^2 + \mathcal{U}_{ef}(r)] G(r) = 0, \quad (4.17)$$

agora temos o seguinte potencial efetivo

$$\mathcal{U}_{ef}(r) = \frac{4m(1+P^2)\omega^2}{r} + \frac{12\ell^2}{r^2} + \frac{4m^2P^2\omega^2}{r^2} \left[1 + 3P^2 - \frac{3a_0^2(1+P^2)}{16m^4P^2} \right] + \dots, \quad (4.18)$$

com ℓ^2 definido como

$$\ell^2 = -\frac{l(l+1)}{12} + m^2\omega^2 \left(1 + \frac{a_0^2}{16m^4} \right) (1+P^2), \quad (4.19)$$

$$= -\frac{l(l+1)}{12} + \frac{\rho_h^2\omega^2}{4} (1+P^2). \quad (4.20)$$

Aqui ℓ^2 foi definido fazendo algumas mudanças no coeficiente em $1/r^2$ que surge após a realização da expansão em torno de $1/r$ na equação (4.15). Note que quando $r \rightarrow \infty$ o potencial $\mathcal{U}_{ef}(r) \rightarrow 0$ sendo assim o comportamento adequado do potencial é satisfeito. Em seguida, vamos aplicar a seguinte formula aproximada

$$\delta_l \approx 2(l - \ell) = 2 \left(l - \sqrt{-\frac{(l^2+l)}{12} + \frac{\rho_h^2\omega^2}{4} (1+P^2)} \right), \quad (4.21)$$

tomando o limite $l \rightarrow 0$, obtemos o deslocamento de fase δ_l dado por

$$\delta_l = \delta_0 + \delta_{l \geq 1}, \quad \delta_0 = -2m\omega \left(1 + \frac{a_0^2}{16m^4} \right)^{1/2} (1+P^2)^{1/2}, \quad \delta_{l \geq 1} = 0. \quad (4.22)$$

portanto, sabendo o valor de δ_l , podemos agora determinar a seção de choque de espalhamento diferencial e a absorção. Vamos obter a seção de choque diferencial de espalhamento usando a expressão usadas nos Capítulos 2 e 3, considerando os limites (4.22)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta)|^2 = \left| \frac{1}{2i\omega} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) \frac{P_l(\cos \vartheta)}{1 - \cos \vartheta} \right|^2, \quad (4.23)$$

lembrando que $P_l(\cos \vartheta)$ são os polinômios de Legendre. No limite para pequenos ângulos podemos reescrever a equação da forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4}{\omega^2 \vartheta^4} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(1) \right|^2. \quad (4.24)$$

Portanto, a seção de choque diferencial de espalhamento no limite de baixas frequências e $l = 0$ é dado por

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\omega \rightarrow 0}^{\text{bf}} = \frac{16m^2}{\vartheta^4} \left(1 + \frac{a_0^2}{16m^4} \right) (1 + P^2) + \dots. \quad (4.25)$$

Assim, verificamos que a seção de choque diferencial para um buraco negro auto-dual o termo dominante é modificado pelo parâmetro P e pelo parâmetro a_0 . Para $P = 0$ e $a_0 = 0$ obtemos o resultado para o caso do buraco negro de Schwarzschild. No limite de $m \rightarrow 0$ o termo dominante da equação (4.25) é diferente de zero e é dado por

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\omega \rightarrow 0}^{\text{bf}} \approx \frac{a_0^2 (1 + P^2)}{\vartheta^4 m^2} = \frac{A_{\min}^2 (1 + P^2)}{4\pi \vartheta^4 A_{schw}}, \quad (4.26)$$

onde $A_{schw} = 4\pi r_+^2 = 16\pi m^2$ é a área para o buraco negro de Schwarzschild e A_{\min} é o valor mínimo para a área mínima na gravidade quântica em laços. Portanto, neste limite a seção de choque diferencial é diretamente proporcional a área mínima $A_{\min} = 8\pi a_0$ e inversamente proporcional a área do buraco negro de Schwarzschild A_{schw} . Agora vamos determinar a seção de choque de absorção para o buraco negro auto-dual no limite de baixas frequência. A seção de choque total de absorção pode ser encontrada como feito nos capítulos anteriores por meio da seguinte formula:

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi}{\omega^2} \sum_{l=0}^2 (2l+1) (1 - |e^{2i\delta_l}|^2). \quad (4.27)$$

A equação para a seção de absorção no limite $\omega \rightarrow 0$ ($l = 0$) é dado por:

$$\sigma_{abs}^{\text{bf}} = 16\pi m^2 \left(1 + \frac{a_0^2}{16m^4} \right) (1 + P^2) = 4\pi \rho_h^2 (1 + P^2), \quad (4.28)$$

$$= A_{schw} \left(1 + \frac{16\pi^2 a_0^2}{A_{schw}^2} \right) (1 + P^2). \quad (4.29)$$

Fazendo $P = a_0 = 0$, o resultado da absorção para um buraco negro de Schwarzschild é recuperado. Note que quando P ou a_0 aumenta, o valor da seção de choque de absorção também aumenta. Assim, a presença de P^2 indica que a amplitude de absorção para o número de multipolo $l = 0$ pode ser aumentado como pode ser verificado numericamente na Figura 4.1(a). Além disso, podemos observar que no limite de pequenas massas a absorção não é nula devido a contribuição da área mínima a_0 , neste limite a equação (4.28) pode ser escrita como

$$\sigma_{abs}^{bf} \approx \frac{\pi a_0^2}{m^2} (1 + P^2) = \frac{16\pi^2 a_0^2}{A_{schw}} (1 + P^2) = \frac{A_{min}^2}{4A_{schw}} (1 + P^2). \quad (4.30)$$

Como vimos nos capítulos anteriores, ao contrario do caso usual, ou seja, do buraco negro de Schwarzschild, a seção de choque de absorção e de espalhamento diferencial para o buraco negro auto-dual é diferente de zero quando a massa vai a valores pequenos, como vimos para os casos dos capítulos anteriores. A equação (4.28) pode ser reescrito em termos da área do horizonte de eventos para um buraco negro auto-dual

$$\sigma_{abs}^{bf} = 4\pi\rho_h^2 (1 + P^2) \approx 4\pi\rho_h^2 = A_{auto} \quad (4.31)$$

onde

$$\rho_h = \rho(r_+) = \sqrt{4m^2 + \frac{a_0^2}{4m^2}} = 2m \left(1 + \frac{a_0^2}{16m^4} \right)^{1/2}, \quad (4.32)$$

é o horizonte de eventos e $A = 4\pi\rho_h^2$ é a área do horizonte de eventos para o buraco negro auto-dual.

4.1.2 Geodésica nula

O uso do método geodésico para obter uma expressão para seção de choque de absorção em altas frequências foi usado nos capítulos anteriores onde obtemos resultados bem precisos comparando com a soma dos resultados parciais obtidos pelo método numérico. Assim vamos repetir o processo e calcular as geodésicas agora para o caso auto-dual (4.1) e obter uma aproximação para a seção de choque de absorção no limite de altas frequências. Para começar temos novamente um lagrangiano da forma $\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$, onde $\dot{x}^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\phi})$ lembrando que o ponto é a derivada com respeito ao parâmetro afim. Aplicando o elemento de linha (4.26) temos que

$$2\mathcal{L} = F(r)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{N(r)} - \rho^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\phi}^2 \right). \quad (4.33)$$

Vamos considerar trajetórias de raios de luz em um plano equatorial $\vartheta = \pi/2$, usando a equação de Hamilton Jacob podemos encontrar duas equações de movimento.

$$E = F(r)\dot{t}, \quad L = \rho^2(r)\dot{\phi}, \quad (4.34)$$

onde novamente temos E e L como constantes relacionadas a energia e o momento angular respectivamente. Para o estudo de geodésicas nulas temos que $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$ assim,

$$F(r)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{N(r)} - \rho^2(r)\dot{\phi}^2 = 0. \quad (4.35)$$

Substituindo os resultados da equação (4.34) temos:

$$\dot{r} = \frac{r^2}{(r + r_*)^2} \sqrt{E^2 - \frac{F(r)}{\rho^2(r)} L^2}, \quad (4.36)$$

onde sua segunda derivada é dada por

$$\ddot{r} = \frac{1}{2} \left[\left(N'(r) - \frac{N(r)F'(r)}{F(r)} \right) \frac{E^2}{F(r)} - \left(N'(r) - \frac{2N(r)\rho'(r)}{\rho(r)} \right) \frac{L^2}{\rho^2(r)} \right]. \quad (4.37)$$

Para um caso crítico temos as seguintes condições $\dot{r} = 0$ e $\ddot{r} = 0$, podemos obter o parâmetro de impacto crítico b_c e raio crítico r_c (raio da esfera de fótons).

$$b_c = \frac{\rho(r_c)}{\sqrt{F(r_c)}}, \quad (4.38)$$

e

$$2\rho'(r_c)F(r_c) - \rho(r_c)F'(r_c) = 0. \quad (4.39)$$

Assim podemos encontrar a seção de choque de absorção no limite de alta frequência usando a equação abaixo,

$$\sigma_{abs}^{af} = \pi b_c^2 = \pi \frac{\rho^2(r_c)}{F(r_c)}. \quad (4.40)$$

Desta forma para encontrar a seção de choque de absorção para alta frequência basta calcular o raio crítico r_c solucionando a equação (4.39) para r_c , veja que para o raio crítico a equação retorna um polinômio de grau elevado, vamos assim resolver esse problema numericamente e com o resultado usamos a equação (4.38) para obter o parâmetro de impacto crítico. Na Figura 4.4 vemos que os resultados obtidos pelo procedimento geodésico são representadas pelas retas, enquanto as ondulações é a soma das seções de choque parciais de absorção obtidas numericamente.

4.2 Análise Numérica

Vamos agora apresentar os resultados numéricos obtidos pela solução da equação radial (4.12). Na tabela 4.1 temos um rápido comparativo entre os resultados numéricos e analíticos para alguns valores de m fixando os parâmetros $a_0 = \sqrt{3}/2$ e $P = 0.1$. Note que como foi discutido a equação (4.30) só é válida para o limite de m pequeno, neste limite o resultado numérico começa a se distanciar dos resultados analíticos devido a presença do P nas equações (4.28) e (4.30).

Tabela 4.1: Resultados analíticos e numéricos para a seção de absorção para valores pequenos de m . Os resultados estão divididos por π e o valor de P está fixado em 0.1.

m	Eq. (4.28)	Eq. (4.30)	Numérico
1.00	16.9175	0.75750	16.7515
0.50	7.07000	3.03000	7.00055
0.30	9.87107	8.41667	9.77417
0.20	19.5839	18.9375	19.3917
0.10	75.9116	75.7500	75.1662

Na Figura 4.1(a), temos as curvas que representam a seção de choque de absorção para $l = 0$ com $m = 1$ e $a_0 = \sqrt{3}/2$ adotando os seguintes valores para o parâmetro de polimérico $P = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. Analisando o comportamento das curvas vemos um aumento na amplitude de absorção conforme aumenta o valor do parâmetro P , podemos ver também a diferença entre a seção de absorção para o buraco negro auto-dual e o caso de Schwarzschild em um determinado intervalo de frequência ω , ou seja, a presença dos parâmetros a_0 e P causam um aumento na absorção com relação ao caso convencional de Schwarzschild. Em contrapartida esse efeito é invertido para os demais multipolos l , como podemos ver na Figura 4.1(b) onde temos os gráficos para os valores de $l = 0, 1, 2, 3$ com os valores fixos $m = 1$ e $a_0 = \sqrt{3}/2$, veja que para $l = 1, 2, 3$ a amplitude máxima de cada curva de absorção decaem conforme aumentamos o valor do parâmetro P e segue para os demais valores de l isso é devido a contribuição dos multipolos no potencial (4.18) veja que para $l = 0$ o termo de $1/\rho^2(r)$ é nulo.

Um outro comportamento interessante é a seção de choque de absorção não ser zero mesmo quando admitimos valores muito pequenos para o parâmetro m que esta

relacionado com a massa da seguinte forma $m = M/(1 + P^2)$. Como já vimos para o caso de um buraco negro de Schwarzschild quando tomamos a massa tendendo a zero $M \rightarrow 0$ os efeitos de absorção são nulos. Na Figura 4.2 temos o comportamento das curvas de absorção nesse limite com os valores dos parâmetros $a_0 = \sqrt{3}/2$, $m = 0.4$ e $l = 0$, em 4.2(b) para alguns valores de P veja que no intervalo de frequência $0 \leq \omega \leq 0.4$ temos um aumento da amplitude das curvas com o aumento de P . Na Figura 4.2(a) temos agora o comportamento para diferentes valores de m vemos que a absorção não vai a zero mesmo para valores pequenos de m .

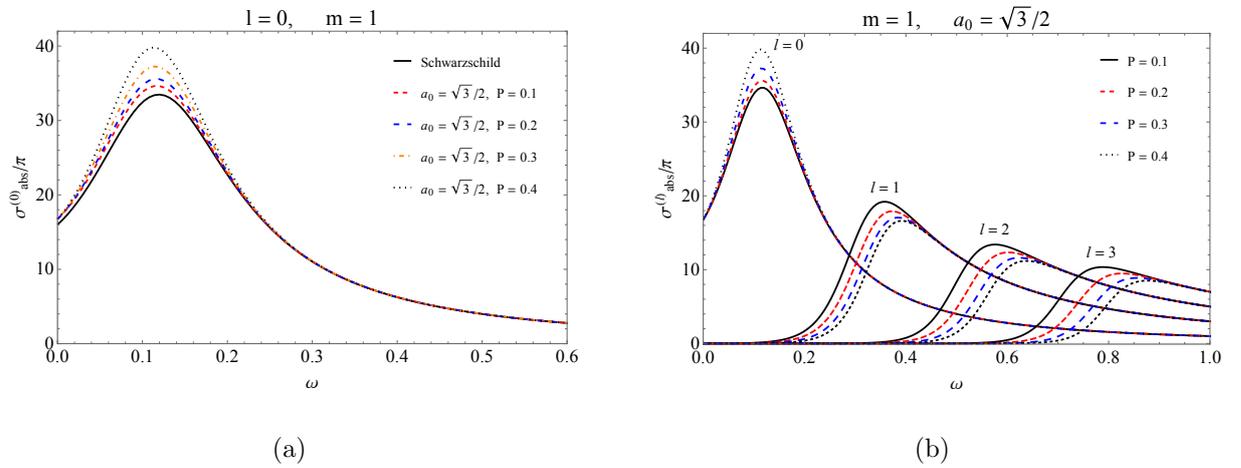


Figura 4.1: Em (a) temos a seção de choque parcial de absorção para $l = 0$, com $a_0 = \sqrt{3}/2$, $m = 1$ e $P = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. Já em (b) comparamos os multipolos $l = 0, 1, 2, 3$ fixando $a_0 = \sqrt{3}/2$, $m = 1$ e $P = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ (lado direito)

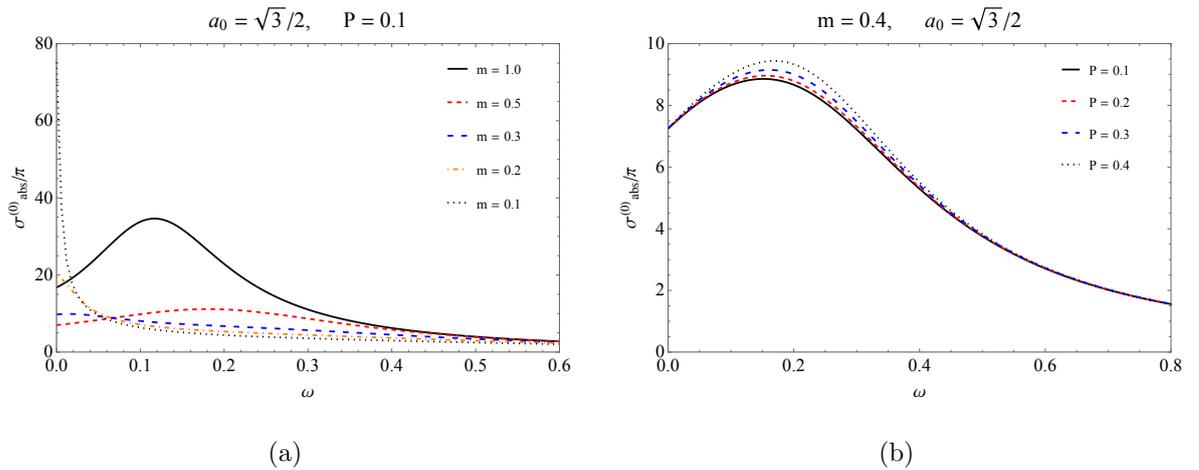


Figura 4.2: Seção de choque parcial de absorção para $l = 0$ e $a_0 = \sqrt{3}/2$. Em (a) verificamos o comportamento da absorção para P fixo em 0.1 com $m = 1, 0.5, 0.3, 0.2, 0.1$. Enquanto em (b) fixamos o m em 0.4 e $P = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$.

Na Figura 4.3 temos duas análise da seção de choque diferencial de espalhamento em função do ângulo de espalhamento. Em 4.3(a) admitimos uma frequência $\omega = 1$, enquanto em 4.3(b) temos $\omega = 3$, nas duas situações variamos o parâmetro polimérico da forma $P = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. Veja que para ambos os casos a influência do parâmetro P é menos presente para ângulos pequenos. E em ângulos maiores podemos ver que quanto maior os valores de P temos um maior deslocamento das curvas, mostrando que o parâmetro polimérico influência nas franjas de interferência do espalhamento. Os resultados obtidos nesse capítulo foram publicados em [85].

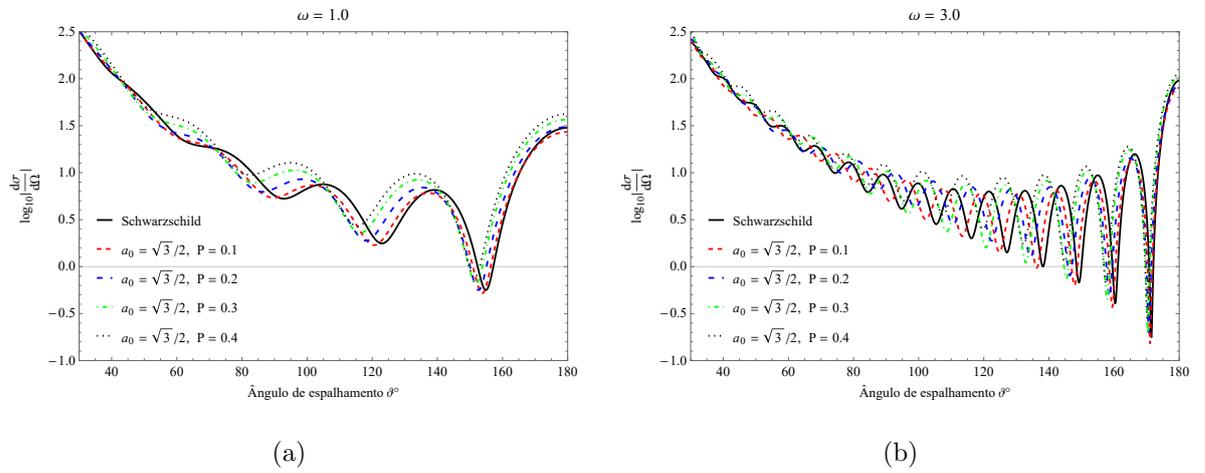


Figura 4.3: Seção de choque diferencial de espalhamento com $a_0 = \sqrt{3}/2$ e $P = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$, em (a) temos o comportamento do espalhamento para uma frequência fixa em $\omega = 1$, enquanto em (b) fixamos em $\omega = 3$. As curvas de cor preta representam o caso para um buraco negro de Schwarzschild quando $a_0 = 0$ e $P = 0$.

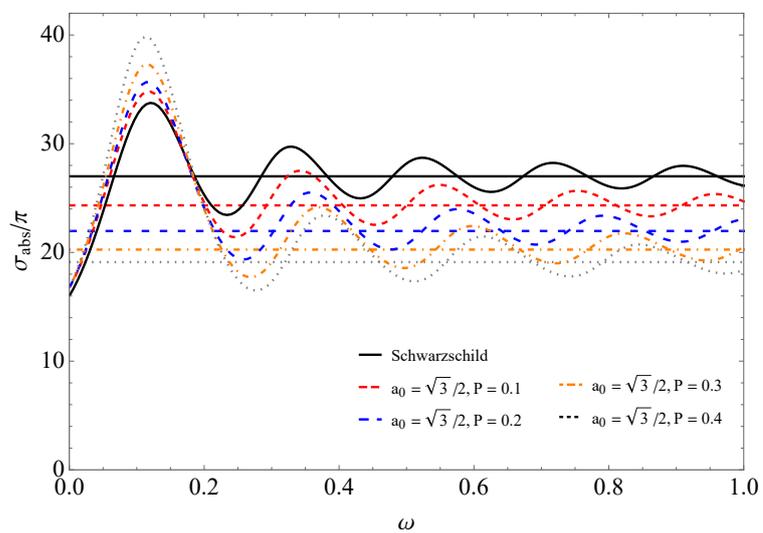


Figura 4.4: Seção de choque total de absorção com $a_0 = \sqrt{3}/2$, $m = 1$ e $P = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. Cada linha representa os valores da seção de absorção para alta frequência obtido pela equação (4.40), estes valores em ordem crescente foram 19.11, 20.26, 21.97, 24.33 e 27.

Capítulo 5

Modos quasinormais em buracos negros

Neste capítulo vamos introduzir o estudo dos modos quasinormais para dois casos específicos, primeiro o buraco negro de Schwarzschild com correções quânticas implementadas pelo GUP e segundo o buraco negro não-comutativo. Os modos quasinormais são soluções das equações de perturbação que possuem frequência de oscilações características complexas e que satisfazem condições de contorno específicas como veremos ao decorrer deste capítulo. Essas frequências carregam informações sobre como os buracos negros relaxam depois que a perturbação para de agir. Estas oscilações amortecidas foram primeiramente estudadas na relatividade geral por Vishveshwara [86], ele analisou a evolução de um pacote de ondas gaussiano na geometria de Schwarzschild, onde estas evoluções são caracterizadas por três etapas, um pulso rápido inicial, seguido por oscilações amortecidas, que são os modos quasinormais e por último as oscilações amortecidas se tornam um decaimento tipo lei de potência. A instabilidade das soluções define o sinal da parte imaginária das frequências quasinormais, assim se a parte imaginária é negativa a perturbação inicial deve decair de maneira amortecida, este comportamento pode ser visto nas Figuras 5.6 e 5.11 para os dois casos estudados aqui.

É importante lembrar também, que os modos quasinormais se aplicam a outros sistemas físicos dissipativos. Por exemplo, um sistema formado por uma corda vibrando acoplada ao meio mecânico, transmitindo energia para esse meio. As frequências quasinormais características dessa corda decaem com o tempo devido a dissipação com o meio. Outro exemplo é a vibração de uma taça de vidro, perturbada por uma leve batida. A taça começa a soar, com um conjunto ou superposição, de suas frequências naturais, esses modos são normais se a taça continua soando para sempre. Já se a amplitude da oscilação

decai com o tempo, então chamamos seus modos de quasinormais. Assim, vemos que esses modos quasinormais estão presentes no cotidiano, como no espaço-tempo na relatividade geral.

Nos últimos anos o estudo dos modos quasinormais tem sido estimulado principalmente pela detecção de ondas gravitacionais que surgem da fusão de buracos negros e estrelas de nêutrons apresentada pela colaboração LIGO-VIRGO [44, 45]. Uma fase de reverberação surge do sinal das ondas gravitacionais detectadas no processo de fusão do buraco negro. Assim, seu espectro de frequência e tempo de amortecimento podem ser analisados estudando modos quasinormais. No campo teórico atualmente pode-se encontrar diversos métodos para obtenção dos modos quasinormais, nesta tese vamos empregar dois métodos bastante utilizados na literatura atual. A primeira, faz uso da aproximação WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin)[87, 88, 89] e o segundo método é numérico, usando uma técnica desenvolvida por Leaver [90] para obter os modos quasinormais. Por simplicidade, vamos tratar da propagação de um campo escalar sem massa os procedimentos analítico e numérico serão discutidos com mais detalhes ao longo do capítulo.

5.1 Buraco negro com GUP

Como visto no Capítulo 3, a correção quântica para um buraco negro modificam a seção de choque de absorção e o espalhamento diferencial. Com isso podemos presumir que essas correções possam modificar os resultados para modos quasinormais, assim vamos verificar a influência da parte linear e quadrática, como também no limite de pequenas massas $M \rightarrow 0$. Os cálculos para a equação de onda para um buraco negro de Schwarzschild com GUP já foi discutido no Capítulo 3 aqui não entraremos em detalhes, vamos relembrar apenas alguns pontos. O elemento de linha é dado da forma

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (5.1)$$

onde

$$f(r) = 1 - \frac{r_{hgup}}{r}, \quad (5.2)$$

e r_{hgup} é dado por

$$r_{hgup} = 2M_{gup} = 2M \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right). \quad (5.3)$$

Novamente temos os parâmetros α e β que representam respectivamente a parte quadrática e linear da correção. Agora lembrando o procedimento feitos nos capítulos anteriores vamos considerar um campo escalar sem massa descrita pela equação de Klein-Gordon

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi\right)=0, \quad (5.4)$$

decompondo o campo em termos dos esféricos harmônicos $\Psi = \frac{R_{\omega l}(r)}{r}Y_{lm}(\vartheta, \phi)e^{-i\omega t}$, a equação radial pode ser escrita da seguinte forma

$$r(r-r_{hgup})^2\frac{d^2R_{\omega l}(r)}{dr^2}+r_{hgup}(r-r_{hgup})\frac{dR_{\omega l}(r)}{dr}+r^3(\omega^2-V_{ef})R_{\omega l}(r)=0, \quad (5.5)$$

ou como já vimos em coordenadas tortoise

$$\frac{d^2R_{\omega l}(x)}{dx^2}+[\omega^2-V_{ef}]R_{\omega l}(x)=0, \quad (5.6)$$

sendo $x = r + r_{hgup} \log(r - r_{hgup})$. O potencial V_{ef} que aparece nas equações radiais é dado da seguinte forma

$$V_{ef} = \frac{(r-r_{hgup})}{r^3} \left[\frac{r_{hgup}}{r} + l(l+1) \right]. \quad (5.7)$$

Como já vimos os modos quasinormais correspondem a soluções da equação de onda (5.6), que satisfazem os requisitos de ondas puramente de saída no infinito e ondas puramente de entrada no horizonte de eventos, da seguinte forma:

$$R_{\omega l}(x) \sim \pm e^{\pm i\omega x}, \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (5.8)$$

Vamos usar as condições acima em dois métodos distintos, com o objetivo de obter os modos quasinormais. O primeiro a aproximação WKB, muito usada devido a similaridades das equações radiais obtidas, em diversos casos de buracos negros, com as equações da mecânica quântica, no estudo de espalhamento por uma barreira potencial, onde aqui temos um potencial que vai a zero em $\pm\infty$, para a coordenada x , descrevendo um potencial tipo “sino”. O segundo método vem dos estudos de Leaver, para obter as frequências quasinormais a partir de um método de fração contínua.

5.1.1 Aproximação WKB

Os primeiros trabalhos usando a aproximação WKB para calcular os modos quasinormais foram feitos por Schutz e Will [87], estes cálculos para uma primeira aproximação

estão detalhadas no Apêndice B. Posteriormente alguns trabalhos surgiram trazendo melhorias na precisão, considerando mais termos na expansão usada no método, destacamos aqui dois trabalhos importantes na melhoria da aproximação, como o mostrado por Iyer [88] com correções até terceira ordem, e por Konoplya [89] com correções até sexta ordem, este último usado nesta tese. Uma comparação entre as correções com o aumento da ordem de aproximação, para o método e a melhoria na precisão dos resultados para diversas situações pode ser encontrados no trabalho do Konoplya [91].

Nesta tese vamos aplicar a aproximação WKB de sexta ordem, este método é muito usado na literatura por apresentar resultados bastantes satisfatórios comparados com resultados numéricos. Assim a formula para obter as frequências quasinormais com correções até sexta ordem, encontradas por Konoplya, é escrita da seguinte forma

$$\frac{i(\omega_n^2 - V_0)}{\sqrt{-2V_0''}} - \sum_{j=2}^6 \Omega_j = n + \frac{1}{2}, \quad (5.9)$$

onde V_0 é o potencial efetivo máximo no ponto r_0 . As aspas (") corresponde a derivada segunda em relação a coordenada tartaruga e Ω_j são correções. Podemos obter o ponto r_0 resolvendo a equação $V_0' = 0$,

$$r_0 = \frac{M}{2} \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right) \Lambda(l) = \frac{M_{gup}}{2} \Lambda(l), \quad (5.10)$$

onde

$$\Lambda(l) = \frac{1}{l(l+1)} \left\{ 3[l(l+1) - 1] + \sqrt{9 + l(l+1)[14 + 9l(l+1)]} \right\}. \quad (5.11)$$

Aqui vamos verificar também o comportamento para o caso da massa M pequena, ou seja, se $M \rightarrow 0$ podemos expandir a equação acima em series de potência para obter uma expressão que neste caso é dado por

$$r_0 = \frac{2\Lambda(l)\beta}{M} - \Lambda(l)\alpha + \frac{\Lambda(l)M}{2} + \dots + \mathcal{O}(M^3). \quad (5.12)$$

Assim, temos tudo para encontrar as frequências quasinormas ω_n . As correções até sexta ordem Ω_j são bastante extensas, mais podem ser encontradas no apêndice em [89]. Os nossos resultados estão apresentados nas Tabelas (5.1-5.4).

Reflexão e Transmissão

A aproximação WBK pode ser usada também para obter os coeficientes de transmissão e reflexão, assumindo condições apropriadas. Este estudo possibilita obter resultados sobre a seção de absorção para o buraco negro em estudo, aqui o objetivo é verificar

o método WKB comparando com os resultados obtidos no Capítulo 3, onde detalhamos o estudo de espalhamento e absorção para um buraco negro com GUP. Vamos iniciar analisando as condições de contorno aplicadas a equação radial em termos da coordenada tartaruga. Aqui temos duas situações diferentes, a primeira, quando as ondas se aproximam do horizonte de eventos, e a segunda quando se afastam para o infinito. Estas duas situações são representadas nas equações abaixo

$$R_{\omega l} = \begin{cases} e^{-i\omega x} + \mathcal{R}e^{i\omega x}, & x \rightarrow \infty, \\ T e^{i\omega x}, & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (5.13)$$

onde \mathcal{R} e T representam os coeficientes de reflexão e transmissão respectivamente. Neste ponto, para aplicar o método WKB para o processo de espalhamento, definimos $n + 1/2 = \mathcal{K}$ na equação (5.9)

$$\mathcal{K} = \frac{i(\omega^2 - V_0)}{\sqrt{-2V_0''}} - \sum_{j=2}^6 \Omega_j(\mathcal{K}), \quad (5.14)$$

aqui ω é real e os termos de correção Ω_j são agora funções de \mathcal{K} . Resolvendo a equação (5.14) para \mathcal{K} , podemos usar o resultado para encontrar o coeficiente de transmissão T e a reflexão \mathcal{R} , e então temos a seguinte relação entre os termos [87]:

$$|\mathcal{R}|^2 = \frac{1}{1 + e^{-2i\pi\mathcal{K}}}, \quad 0 < |\mathcal{R}|^2 < 1, \quad (5.15)$$

$$|T|^2 = \frac{1}{1 + e^{2i\pi\mathcal{K}}} = 1 - |\mathcal{R}|^2. \quad (5.16)$$

Na Figura 5.1, temos os resultados para o coeficiente de transmissão, aplicando a aproximação WKB de sexta ordem. Veja que as curvas analíticas (aproximação WKB) e numéricas (resultados obtidos no Capítulo 3) são muito próximos para $l = 2$ e $l = 3$, mostrando um bom resultado.

Além disso, podemos obter a seção de choque de absorção e comparar com os resultados obtidos no Capítulo 3, isso pode ser feito usando a equação que relaciona o coeficiente de transmissão e a seção de absorção dada por

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi}{\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) |T|^2. \quad (5.17)$$

Na Figura 5.2, mostramos que o resultado para a seção de absorção obtidas pela aproximação WKB de sexta ordem (linha cinza sólida) e os resultados obtidos numericamente (linha preta tracejada). Na Figura 5.2(a), temos os resultados considerando apenas

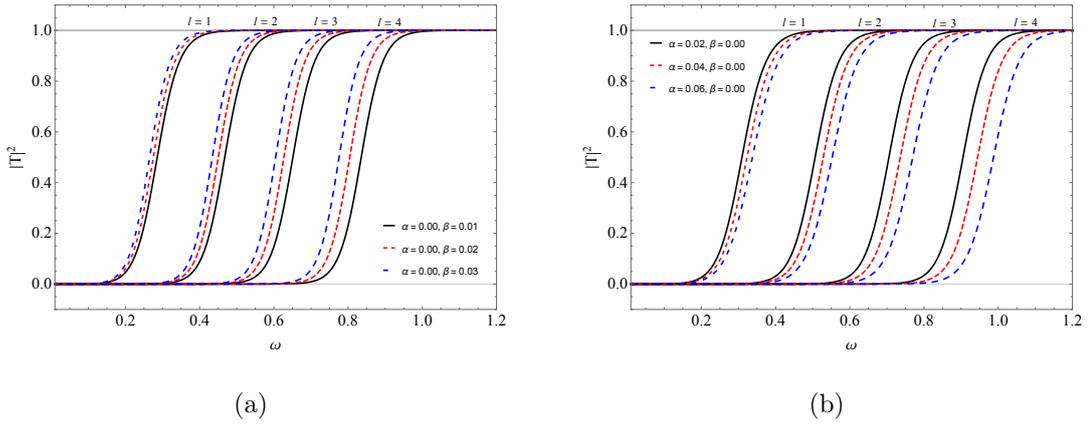


Figura 5.1: Coeficiente de transmissão (a) para $\alpha = 0$ e $\beta = 0.01, 0.02, 0.03$; enquanto para (b) $\alpha = 0.02, 0.04, 0.06$ e $\beta = 0$ todos com $M = 1$.

a parte quadrática assumindo os valores $\alpha = 0$ e $\beta = 0.03$ para os multipolos $l = 1, 2, 3$ e 4. Já na Figura. 5.2(b), fazemos o contrario adotamos apenas a parte linear assumindo $\alpha = 0.06$ e $\beta = 0$ para os multipolos $l = 1, 2$ e 3. É importante mencionar que a aproximação funciona muito bem para valores $l \geq 1$ e valores da frequência não muito pequenas.

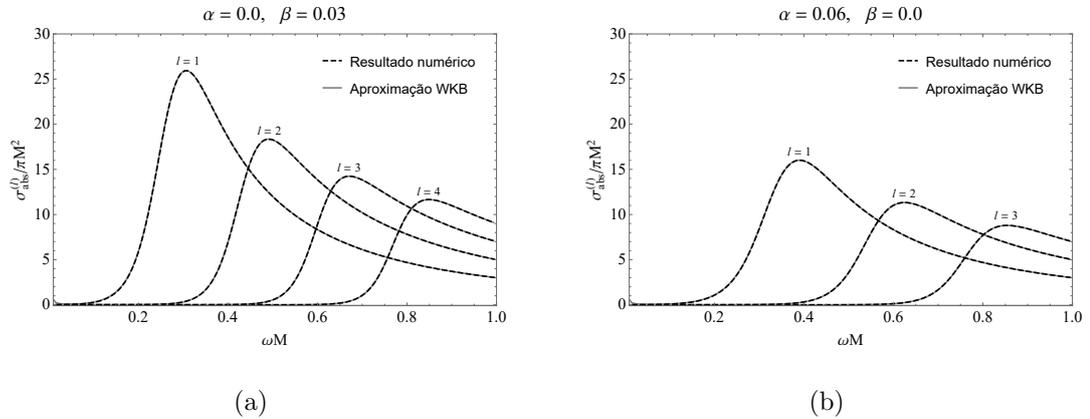


Figura 5.2: Seção de choque de absorção obtidos pelo WKB de sexta ordem, comparado com o resultado obtidos pelo método numérico descrito no Capítulo 3.

5.1.2 Método fração contínua

Os resultados obtidos pela aproximação WKB podem ser verificados usando um método numérico. Nesta seção vamos obter as frequências quasinormais, pelo método que inicialmente foi introduzido por Leaver, inspirado por uma técnica para calcular os autovalores de energia do íon H_2^+ . Leaver calculou numericamente os modos quasinormais

para um buraco negro de Schwarzschild e Kerr [90] e depois para Reissner-Nordström [92]. Esta técnica consiste em expressar a solução para a equação de onda, com condições de contorno adequadas para os modos quasinormais como já mencionamos, em uma série de potência convergente, exceto no limite assintótico $r \rightarrow \infty$. Quando assumimos também uma convergência no infinito, obtemos uma relação fracionária contínua que deve ser satisfeita pelos coeficientes da expansão da série de potências. Assim, a equação radial (5.5) tem as seguintes condições de contorno:

$$R_{\omega l}(r) \approx \begin{cases} (r - r_{hgup})^{-i\omega r_{hgup}}, & r \rightarrow r_{hgup}, \\ r^{i\omega r_{hgup}} e^{i\omega r}, & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.18)$$

A solução para a equação (5.5) que satisfaz as condições de contorno podem ser expandidas em série de potência em torno ($r = r_{hgup}$) da seguinte forma

$$R_{\omega l}(r) = \left(\frac{r - r_{hgup}}{r} \right)^{-i\omega r_{hgup}} r^{i\omega r_{hgup}} e^{i\omega(r - r_{hgup})} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{r - r_{hgup}}{r} \right)^k. \quad (5.19)$$

Uma forma simples de verificar essa solução é pegando o primeiro termo da soma-tória e assumindo $a_0 = 1$, desta forma retornamos a primeira condição de contorno (5.18) onde $r \rightarrow r_{hgup}$. Voltando ao método, aplicando a equação (5.19) em (5.5) nos obtemos a seguinte relação de recorrência

$$A_0 a_1 + B_0 a_0 = 0, \quad (5.20)$$

$$A_k a_{k+1} + B_k a_k + C_k a_{k-1} = 0, \quad k \geq 1. \quad (5.21)$$

Os coeficientes para a relação de recorrência A_k , B_k e C_k são funções simplesmente de k , ω , l e o raio do horizonte com correção quântica r_{hgup} .

$$\begin{aligned} A_k &= (1 + k)(1 + k - 2ir_{hgup}\omega), \\ B_k &= -[1 + l(l + 1) + 2k(1 + k) - 4ir_{hgup}\omega - 8ikr_{hgup}\omega - 8r_{hgup}^2\omega^2], \\ C_k &= k^2 - 4ikr_{hgup}\omega - 4r_{hgup}^2\omega^2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

A condição de contorno no infinito será satisfeita para valores de frequência quasinormais tal que $\omega = \omega_n$, de modo que a série (5.19) seja absolutamente convergente. Assim, temos uma relação de recorrência com três termos para determinar o coeficiente a_k , e podemos escrever em termos de um relação fracionária contínua [93],

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{-C_{k+1}}{B_{k+1} - \frac{A_{k+1}C_{k+2}}{B_{k+2} - \frac{A_{k+2}C_{k+3}}{B_{k+2} - \dots}}}, \quad (5.23)$$

que pode também se escrito da forma

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{-C_{k+1}}{B_{k+1}-} \frac{A_{k+1}C_{k+2}}{B_{k+2}-} \frac{A_{k+2}C_{k+3}}{B_{k+3}-} \dots \quad (5.24)$$

Obtemos a equação característica para as frequências quasinormais, evoluindo a equação (5.24) para $k = 0$ e comparando o resultado com $a_1/a_0 = -B_0/A_0$ obtido em (5.20)

$$0 = \frac{B_0}{A_0} - \frac{C_1}{B_1-} \frac{A_1C_2}{B_2-} \frac{A_2C_3}{B_3-} \dots \quad (5.25)$$

Veja que se truncarmos a fração contínua acima em um índice suficientemente grande, podemos obter as frequências quasinormais ω_n , calculando as raízes da equação resultante numericamente. No entanto, a equação (5.25) é mais usada para encontrar a frequência fundamental, ou seja, a raiz mais estável. Assim a forma mais conveniente de encontrar as demais frequências quasinormais é inverter a equação, de modo a ficar da seguinte forma

$$B_k - \frac{A_{k-1}C_k}{B_{k-1}-} \frac{A_{k-2}C_{k-1}}{B_{k-2}-} \dots \frac{A_0C_1}{B_0-} = \frac{A_kC_{k+1}}{B_{k+1}-} \frac{A_{k+1}C_{k+2}}{B_{k+2}-} \dots \quad (5.26)$$

Para complementar o método, é importante verificar o comportamento para k grande como feito por Nollert [94], ele percebeu que a convergência do método de Leaver pode ser melhorada se estimar um erro associado ao truncamento da fração contínua. Assim vamos analisar a equação (5.21) no limite de k grande organizando da seguinte forma,

$$A_k \frac{a_{k+1}}{a_k} + B_k + C_k \frac{a_{k-1}}{a_k} = 0. \quad (5.27)$$

Vemos que, $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{k+1}/a_k) \simeq 1$, e podemos obter uma expressão mais completa expandindo a_{k+1}/a_k em série de potência em termos de \sqrt{k}

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i k^{-i/2} = C_0 + \frac{C_1}{\sqrt{k}} + \frac{C_2}{k} + \frac{C_3}{k^{3/2}} + \dots \quad (5.28)$$

Considerando apenas os três primeiros termos da série a cima e admitindo $C_0 = 1$ temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \right) \approx 1 + \frac{C_1}{\sqrt{k}} + \frac{C_2}{k} + \dots, \quad (5.29)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \right) \approx 1 - \frac{C_1}{\sqrt{k}} + \frac{(C_1)^2 - C_2}{k} + \frac{C_1(2C_2 - 1/2 - (C_1)^2)}{k^{3/2}} + \dots, \quad (5.30)$$

aqui para obter a equação (5.30) basta fazer $k = k - 1$ na equação (5.29) e expandir em termos de k grande. Agora para obter os valores de C_1 e C_2 substituímos essas duas

expressões (5.29) e (5.30) na equação(5.27) no regime de k grande restringindo até termos da ordem de $k^{-3/2}$ para obter

$$\frac{(\mathcal{C}_1)^2 + 2i\omega r_{hgup}}{k} - \frac{\mathcal{C}_1(-3 + 2(\mathcal{C}_1)^2 - 4\mathcal{C}_2 - 4i\omega r_{hgup})}{2} k^{3/2} \approx 0, \quad (5.31)$$

encontramos os seguintes valores:

$$(\mathcal{C}_1)^2 = -2i\omega r_{hgup}, \quad (5.32)$$

$$\mathcal{C}_2 = -2i\omega r_{hgup} - \frac{3}{4} \quad (5.33)$$

Assim temos que,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 \pm \frac{\sqrt{-2i\omega r_{hgup}}}{\sqrt{k}} - \frac{3 + 4i\omega r_{hgup}}{4k}. \quad (5.34)$$

5.1.3 Comparando os resultados

Neste ponto, apresentamos e comparamos os resultados obtidos pela aproximação WKB e o numérico, inicialmente temos as Tabelas (5.1 - 5.4) onde assumimos dois casos $l = 1, 2$, assim podemos ver a influência dos multipolos l sobre os modos quasinormais. Nas Tabelas 5.1 e 5.2, temos os resultados para os modos quasinormais considerando $M = 1$. Quando fixamos um valor do parâmetro α e aumentamos os valores de β , notamos uma diminuição na parte real e imaginária da frequência quasinormal. Isso mostra que a parte quadrática nessas condições contribui para a diminuição da frequência quasinormal. Nas Tabelas 5.3 e 5.4, exibimos os resultados no limite de massa pequena para representar essa situação fixamos $M = 0,05$. Este resultado é bastante interessante, pois mostra que mostra a influência da parte quadrática do GUP ($\beta \neq 0$).

Sabemos que as frequências quasinormais associadas ao campo escalar têm uma parte imaginaria negativa isso significa que os modos quasinormais decaem exponencialmente com o tempo perdendo energia na forma de ondas escalares [95]. Em outras palavras as frequências quasinormais que são dadas por $\omega = \omega_R - i\omega_I$, onde ω_R representa a frequência da oscilação e ω_I fornece a escala de tempo de amortecimento, assim para que um buraco negro seja estável temos que $\omega_I > 0$. Podemos verificar esses efeitos do GUP em modos quasinormais e estabilidade pelo gráfico de frequência em função dos modos (n) conforme mostrado na Figura 5.3, no qual dividimos a parte real e imaginaria das frequências para $l = 1, 2, 3$ e $M = 1$. Isso causa uma pequena mudança nas curvas que é mais perceptível para $l = 1$, enquanto a adição do parâmetro β causa uma mudança sendo

mais perceptível para a parte imaginária da frequência principalmente para n grandes. Note que aumentando l e o parâmetro β a parte real e imaginária se aproximam do eixo horizontal mas nunca cruzam o eixo, ou seja, não há mudanças de sinal. Este efeito é mais perceptível para a parte imaginária da frequência. Assim, o resultado indica que o buraco negro se mantém estável sob a perturbação do campo escalar.

Na Figura 5.4 temos os resultados das frequências quasinormais em um plano complexo para três famílias multipolos $l = 0, 1, 2$. Na Figura 5.4(a) consideramos apenas a parte quadrática ($\alpha = 0$). Ao comparar com o caso de Schwarzschild (curvas pretas), as curvas se movem para a esquerda com o aumento do parâmetro β , enquanto para a parte linear apenas ($\beta = 0$), conforme mostrado na Figura 5.4(b), as curvas se movem para a direita em relação ao caso Schwarzschild quando aumentamos o parâmetro α .

5.1.4 Domínio temporal

Como forma de complementar o estudo, podemos ainda verificar o papel dos modos quasinormais em um espalhamento dependente do tempo, ou seja, investigar as perturbações escalares no domínio do tempo. Sabendo que uma perturbação no espaço tempo de Schwarzschild evolui em três fases: Uma fase transitória inicial que depende dos dados iniciais, um modo de toque quasinormal e uma terceira o decaimento polinomial. As oscilações amortecidas possuem frequências que dependem apenas dos parâmetros que caracterizam o buraco negro. Vamos começar reescrevendo a equação de onda (5.6) sem impor o ansatz estacionário $\psi \sim R(r)e^{-i\omega t}$, temos então a seguinte forma.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V_{ef} \psi = 0. \quad (5.35)$$

A técnica de integração da equação de onda acima no domínio temporal, foi desenvolvida por Gundlach e colaboradores [96]. Escrevendo a equação de onda em termos das coordenadas de cone de luz $u = t - x$ e $v = t + x$ a equação de onda pode ser reescrita como

$$\left(4 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + V(u, v) \right) \psi(u, v) = 0. \quad (5.36)$$

A equação (5.36) pode ser integrada numericamente pelo método diferenças finitas, usando expansão de Taylor temos

$$\begin{aligned} \psi(u+h, v+h) &= -\psi(u, v) + \psi(u+h, v) + \psi(u, v+h) \\ &\quad - \frac{h^2}{8} V(u, v) [\psi(u+h, v) + \psi(u, v+h)] + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Tabela 5.1: Frequências quasnormais para o multipolo $l = 1$, considerando a parte linear e quadrática.

$M = 1$		ω_0			ω_1			ω_2		
α	β	WKB 6ª ordem	numérico							
0.00	0.00	0.292910 - 0.097762i	0.292936 - 0.097660i	0.264471 - 0.306518i	0.264449 - 0.306257i	0.231014 - 0.542166i	0.229539 - 0.540183i	0.231014 - 0.542166i	0.229539 - 0.540183i	
	0.01	0.281644 - 0.094002i	0.281669 - 0.093904i	0.254299 - 0.294729i	0.254278 - 0.294478i	0.222129 - 0.521313i	0.220711 - 0.519359i	0.222129 - 0.521313i	0.220711 - 0.519359i	
	0.02	0.271213 - 0.090520i	0.271237 - 0.090426i	0.244881 - 0.283813i	0.244860 - 0.283572i	0.213902 - 0.502005i	0.212536 - 0.500124i	0.213902 - 0.502005i	0.212536 - 0.500124i	
	0.03	0.261526 - 0.087287i	0.261550 - 0.087196i	0.236135 - 0.273677i	0.236115 - 0.273444i	0.206263 - 0.484076i	0.204946 - 0.482262i	0.206263 - 0.484076i	0.204946 - 0.482262i	
0.02	0.00	0.305114 - 0.101835i	0.305142 - 0.101729i	0.275491 - 0.319290i	0.275467 - 0.319018i	0.240640 - 0.564755i	0.239103 - 0.562639i	0.240640 - 0.564755i	0.239103 - 0.562639i	
	0.01	0.292910 - 0.097762i	0.292936 - 0.097660i	0.264471 - 0.306518i	0.264449 - 0.306257i	0.231014 - 0.542166i	0.229539 - 0.540183i	0.231014 - 0.542166i	0.229539 - 0.540183i	
	0.02	0.281644 - 0.094002i	0.281669 - 0.093904i	0.254299 - 0.294729i	0.254278 - 0.294478i	0.222128 - 0.521315i	0.220711 - 0.519359i	0.222128 - 0.521315i	0.220711 - 0.519359i	
	0.03	0.271213 - 0.090520i	0.271237 - 0.090426i	0.244881 - 0.283813i	0.244860 - 0.283572i	0.213902 - 0.502005i	0.212536 - 0.500124i	0.213902 - 0.502005i	0.212536 - 0.500124i	
0.04	0.00	0.318380 - 0.106263i	0.318409 - 0.106152i	0.287469 - 0.333172i	0.287444 - 0.332888i	0.251103 - 0.589309i	0.249499 - 0.587102i	0.251103 - 0.589309i	0.249499 - 0.587102i	
	0.01	0.305114 - 0.101835i	0.305142 - 0.101729i	0.275491 - 0.319290i	0.275467 - 0.319018i	0.240640 - 0.564755i	0.239103 - 0.562639i	0.240640 - 0.564755i	0.239103 - 0.562639i	
	0.02	0.292910 - 0.097762i	0.292936 - 0.097660i	0.264471 - 0.306518i	0.264449 - 0.306257i	0.231014 - 0.542166i	0.229539 - 0.540183i	0.231014 - 0.542166i	0.229539 - 0.540183i	
	0.03	0.281644 - 0.094002i	0.281669 - 0.093904i	0.254299 - 0.294730i	0.254278 - 0.294478i	0.222128 - 0.521315i	0.220711 - 0.519359i	0.222128 - 0.521315i	0.220711 - 0.519359i	
0.06	0.00	0.332852 - 0.111093i	0.332882 - 0.110977i	0.300536 - 0.348315i	0.300510 - 0.348020i	0.262518 - 0.616093i	0.260840 - 0.613788i	0.262518 - 0.616093i	0.260840 - 0.613788i	
	0.01	0.318380 - 0.106263i	0.318409 - 0.106152i	0.287469 - 0.333171i	0.287444 - 0.332888i	0.251104 - 0.589306i	0.249499 - 0.587102i	0.251104 - 0.589306i	0.249499 - 0.587102i	
	0.02	0.305114 - 0.101835i	0.305142 - 0.101729i	0.275491 - 0.319290i	0.275467 - 0.319018i	0.240640 - 0.564755i	0.239103 - 0.562639i	0.240640 - 0.564755i	0.239103 - 0.562639i	
	0.03	0.292910 - 0.097762i	0.292936 - 0.097660i	0.264471 - 0.306518i	0.264449 - 0.306257i	0.231014 - 0.542166i	0.229539 - 0.540183i	0.231014 - 0.542166i	0.229539 - 0.540183i	

Tabela 5.2: Frequências quasnormais para o multipolo $l = 2$, considerando a parte linear e quadrática.

$M = 1$		ω_0			ω_1			ω_2		
α	β	WKB 6ª ordem	numérico	WKB 6ª ordem	numérico	WKB 6ª ordem	numérico	WKB 6ª ordem	numérico	
0.00	0.00	0.483642 - 0.096766i	0.483644 - 0.0967588i	0.463847 - 0.295627i	0.463851 - 0.295604i	0.430386 - 0.508700i	0.430544 - 0.508558i	0.430386 - 0.508700i	0.430544 - 0.508558i	
	0.01	0.465040 - 0.093044i	0.465042 - 0.0930373i	0.446006 - 0.284257i	0.446010 - 0.284235i	0.413833 - 0.489134i	0.413985 - 0.488998i	0.413833 - 0.489134i	0.413985 - 0.488998i	
	0.02	0.447817 - 0.089598i	0.447818 - 0.0895915i	0.429488 - 0.273729i	0.429491 - 0.273707i	0.398505 - 0.471018i	0.398652 - 0.470887i	0.398505 - 0.471018i	0.398652 - 0.470887i	
	0.03	0.431823 - 0.086398i	0.431825 - 0.0863918i	0.414149 - 0.263953i	0.414152 - 0.263932i	0.384273 - 0.454196i	0.384414 - 0.454070i	0.384273 - 0.454196i	0.384414 - 0.454070i	
0.02	0.00	0.503794 - 0.100798i	0.503796 - 0.100790i	0.483174 - 0.307945i	0.483178 - 0.307921i	0.448318 - 0.529896i	0.448483 - 0.529748i	0.448318 - 0.529896i	0.448483 - 0.529748i	
	0.01	0.483642 - 0.096766i	0.483644 - 0.096759i	0.463847 - 0.295627i	0.463851 - 0.295604i	0.430386 - 0.508700i	0.430544 - 0.508558i	0.430386 - 0.508700i	0.430544 - 0.508558i	
	0.02	0.465040 - 0.093044i	0.465042 - 0.093037i	0.446006 - 0.284257i	0.446010 - 0.284235i	0.413832 - 0.489135i	0.413985 - 0.488998i	0.413832 - 0.489135i	0.413985 - 0.488998i	
	0.03	0.447817 - 0.089598i	0.447818 - 0.089591i	0.429488 - 0.273729i	0.429491 - 0.273707i	0.398505 - 0.471018i	0.398652 - 0.470887i	0.398505 - 0.471018i	0.398652 - 0.470887i	
0.04	0.00	0.525698 - 0.105181i	0.525700 - 0.105173i	0.504181 - 0.321334i	0.504185 - 0.321309i	0.467811 - 0.552935i	0.467983 - 0.552781i	0.467811 - 0.552935i	0.467983 - 0.552781i	
	0.01	0.503794 - 0.100798i	0.503796 - 0.100790i	0.483174 - 0.307945i	0.483178 - 0.307921i	0.448318 - 0.529896i	0.448483 - 0.529748i	0.448318 - 0.529896i	0.448483 - 0.529748i	
	0.02	0.483642 - 0.096766i	0.483644 - 0.096759i	0.463847 - 0.295627i	0.463851 - 0.295604i	0.430386 - 0.508700i	0.430544 - 0.508558i	0.430386 - 0.508700i	0.430544 - 0.508558i	
	0.03	0.465040 - 0.093044i	0.465042 - 0.093037i	0.446006 - 0.284257i	0.446010 - 0.284235i	0.413832 - 0.489135i	0.413985 - 0.488998i	0.413832 - 0.489135i	0.413985 - 0.488998i	
0.06	0.00	0.549593 - 0.109961i	0.549595 - 0.109953i	0.527099 - 0.335940i	0.527103 - 0.335914i	0.489075 - 0.578068i	0.489255 - 0.577907i	0.489075 - 0.578068i	0.489255 - 0.577907i	
	0.01	0.525698 - 0.105181i	0.525700 - 0.105173i	0.504181 - 0.321334i	0.504185 - 0.321309i	0.467811 - 0.552935i	0.467983 - 0.552781i	0.467811 - 0.552935i	0.467983 - 0.552781i	
	0.02	0.503794 - 0.100798i	0.503796 - 0.100790i	0.483174 - 0.307945i	0.483178 - 0.307921i	0.448319 - 0.529895i	0.448483 - 0.529748i	0.448319 - 0.529895i	0.448483 - 0.529748i	
	0.03	0.483642 - 0.096766i	0.483644 - 0.096759i	0.463847 - 0.295627i	0.463851 - 0.295604i	0.430386 - 0.508700i	0.430544 - 0.508558i	0.430386 - 0.508700i	0.430544 - 0.508558i	

Tabela 5.3: Frequências quasnormais no limite de pequenas massas para o multipolo $l = 1$.

$M = 0.05$	ω_0			ω_1			ω_2		
	α	β	WKB 6ª ordem	numérico	WKB 6ª ordem	numérico	WKB 6ª ordem	numérico	WKB 6ª ordem
0.00	0.01	0.344600 - 0.115014i	0.344631 - 0.114894i	0.311142 - 0.360610i	0.311116 - 0.360303i	0.271782 - 0.637841i	0.270046 - 0.635451i		
	0.02	0.177537 - 0.059188i	0.177537 - 0.059188i	0.160286 - 0.185769i	0.160272 - 0.185611i	0.134603 - 0.481920i	0.123187 - 0.477756i		
	0.03	0.119555 - 0.039903i	0.119566 - 0.039861i	0.107947 - 0.125109i	0.107938 - 0.125003i	0.094292 - 0.221292i	0.093689 - 0.220463i		
0.03	0.01	0.370772 - 0.123749i	0.370805 - 0.123620i	0.334774 - 0.387998i	0.334745 - 0.387668i	0.292423 - 0.686285i	0.290556 - 0.683713i		
	0.02	0.184220 - 0.061485i	0.184237 - 0.061421i	0.166334 - 0.192779i	0.166320 - 0.192615i	0.145292 - 0.340984i	0.144364 - 0.339707i		
	0.03	0.122556 - 0.040904i	0.122567 - 0.040862i	0.110657 - 0.128250i	0.110648 - 0.128141i	0.096659 - 0.226847i	0.096042 - 0.225997i		
0.06	0.01	0.401246 - 0.133920i	0.401282 - 0.133781i	0.362291 - 0.419885i	0.362258 - 0.419531i	0.316464 - 0.742678i	0.314437 - 0.739909i		
	0.02	0.191444 - 0.063897i	0.191462 - 0.063830i	0.172857 - 0.200339i	0.172842 - 0.200168i	0.150990 - 0.354357i	0.150026 - 0.353028i		
	0.03	0.125712 - 0.041958i	0.125724 - 0.041914i	0.113507 - 0.131553i	0.113497 - 0.131441i	0.099148 - 0.232689i	0.0985147 - 0.231817i		

Tabela 5.4: Frequências quasnormais no limite de pequenas massas para o multipolo $l = 2$.

$M = 0.05$	ω_0			ω_1			ω_2		
	α	β	WKB 6ª ordem	numérico	WKB 6ª ordem	numérico	WKB 6ª ordem	numérico	WKB 6ª ordem
0.00	0.01	0.568990 - 0.113842i	0.568993 - 0.113834i	0.545702 - 0.347796i	0.545707 - 0.347769i	0.506336 - 0.598470i	0.506522 - 0.598304i		
	0.02	0.293116 - 0.058646i	0.293117 - 0.058642i	0.281119 - 0.179168i	0.281122 - 0.179154i	0.260840 - 0.308303i	0.260936 - 0.308217i		
	0.03	0.197405 - 0.039496i	0.197406 - 0.039493i	0.189325 - 0.120664i	0.189327 - 0.120655i	0.175668 - 0.207633i	0.175732 - 0.207575i		
0.03	0.01	0.612205 - 0.122489i	0.612207 - 0.122479i	0.587148 - 0.374211i	0.587153 - 0.374182i	0.544792 - 0.643924i	0.544992 - 0.643745i		
	0.02	0.304177 - 0.060859i	0.304179 - 0.060855i	0.291728 - 0.185929i	0.291730 - 0.185914i	0.270683 - 0.319937i	0.270782 - 0.319848i		
	0.03	0.202361 - 0.040488i	0.202361 - 0.040484i	0.194078 - 0.123693i	0.19408 - 0.123684i	0.180078 - 0.212845i	0.180144 - 0.212786i		
0.06	0.01	0.662523 - 0.132556i	0.662526 - 0.132546i	0.635407 - 0.404968i	0.635412 - 0.404937i	0.589570 - 0.696849i	0.589786 - 0.696655i		
	0.02	0.316106 - 0.063246i	0.316107 - 0.063241i	0.303168 - 0.193201i	0.303170 - 0.193205i	0.281298 - 0.332484i	0.281401 - 0.332391i		
	0.03	0.207572 - 0.041530i	0.207572 - 0.041527i	0.199076 - 0.126879i	0.199078 - 0.126869i	0.184715 - 0.218326i	0.184783 - 0.218265i		

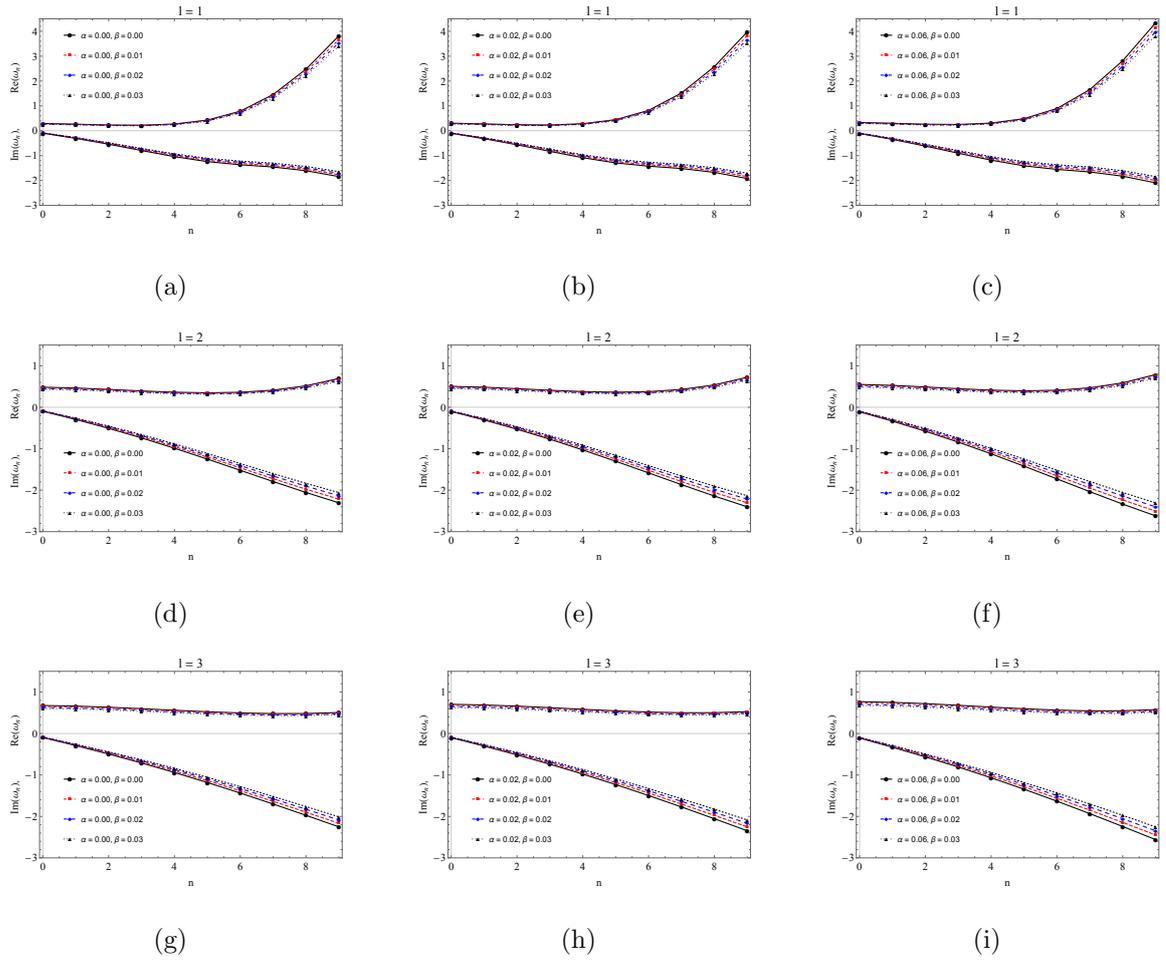


Figura 5.3: Freqüências quasinormais, parte real e imaginária em função de n . Temos de cima para baixo a distribuição na ordem crescente do número de multipolo de $l = 1$ até $l = 3$, enquanto da esquerda para direita temos a variação do parâmetro α para 0, 0.02 e 0.06. Para todos os gráficos assumimos a mesma variação de β (0, 0.01, 0.02 e 0.03). Observe que quando alteramos os valores de α (da esquerda para a direita) temos uma variação muito sutil nas curvas, que são mais perceptíveis para $n > 5$.

onde h é o comprimento do passo para u e v , ou seja, já consideramos que o passo será o mesmo para ambos os eixos. Veja que a equação (5.37) nos permite calcular os valores de ψ dentro de uma região, que é construído sobre duas superfícies nulas $u = u_0$ e $v = v_0$ como mostra na Figura 5.5, a partir dos dados iniciais especificados. Escolhendo um perfil inicial Gaussiano centrado em $v = v_c$ e largura σ em $u = u_0$,

$$\psi(u = u_0, v) = Ae^{-(v-v_c)^2/2\sigma^2}, \quad \psi(u, v = v_0) = \psi_0 \quad (5.38)$$

Aqui sem perda de generalidade podemos assumir que $\psi_0 = 0$. Uma vez definido os valores iniciais, a integração nas linhas onde $u = \text{constante}$ no sentido que aumenta v . Os resultados foram obtidos levando em conta os seguintes valores para os parâmetros da Gaussiana, uma largura $\sigma = 3.0$ centrada em $v_c = 10$ e com uma amplitude $A = 1$ e

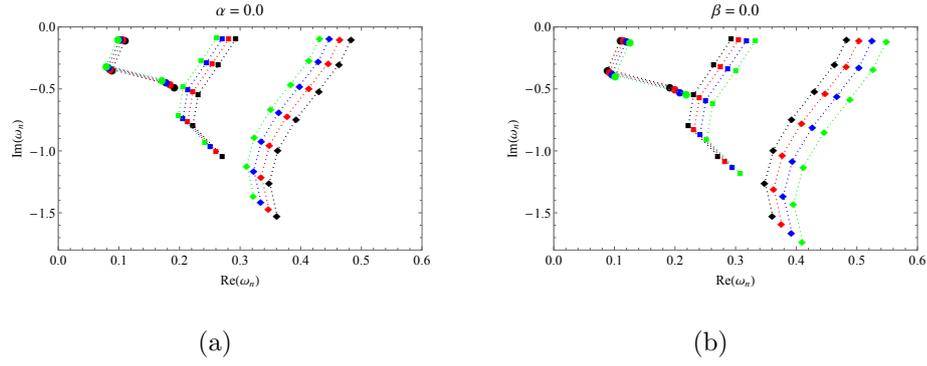


Figura 5.4: Plano complexo para os modos quasinormais, considerando os seguintes parâmetros: $l = 0$ (círculo), $l = 1$ (quadrado), $l = 2$ (diamante). Em (a) consideramos apenas a parte quadrática da correção fazendo $\alpha = 0$ e $\beta \geq 0$: $\beta = 0$ (preto), $\beta = 0.01$, (vermelho) $\beta = 0.02$ (azul) e $\beta = 0.03$ (verde). Em (b) consideramos apenas a parte linear da correção, definindo da forma, $\beta = 0$ e $\alpha \geq 0$: $\alpha = 0$ (preto), $\alpha = 0.02$, (vermelho) $\alpha = 0.04$ (azul) e $\alpha = 0.06$ (verde).

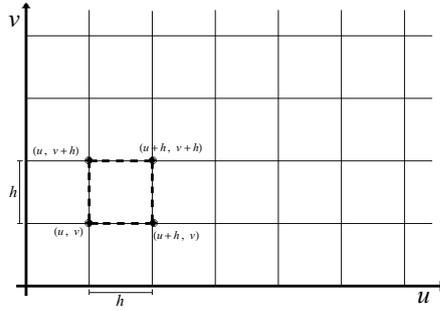


Figura 5.5: Ilustração do grid de integração, cada quadrado do grid representa uma etapa da integração. O quadrado em destaque representa uma etapa específica da integração. Os eixos v e u representa os dados iniciais e h o comprimento do passo.

$u_0 = 0$. Trabalhamos com um grid onde u e v ambos estavam em um intervalo de 0 à 500 com 2500 pontos nesse intervalo, sendo assim $h = 0.2$, esse ajuste foi suficiente para um bom resultado como mostra nas Figuras 5.6 seguintes.

Nos gráficos da Figura 5.6 consideramos a influência das correções quânticas no domínio temporal da função de onda. Nos dois gráficos temos três cenários, o primeiro apenas influência da parte linear (linha contínua azul) o segundo apenas parte quadrática (linha contínua vermelha) e comparamos com o caso clássico para o buraco negro de Schwarzschild (linha pontilhada). Podemos observar o domínio das oscilações amortecidas até $v \sim 100$ para $l = 0$ e $v \sim 200$ para $l = 1$, antes de ser assumido por um decaimento polinomial. Olhando para o caso onde temos apenas parte linear vemos que a duração das oscilações é um pouco menor comparando com o caso clássico (linha pontilhada),

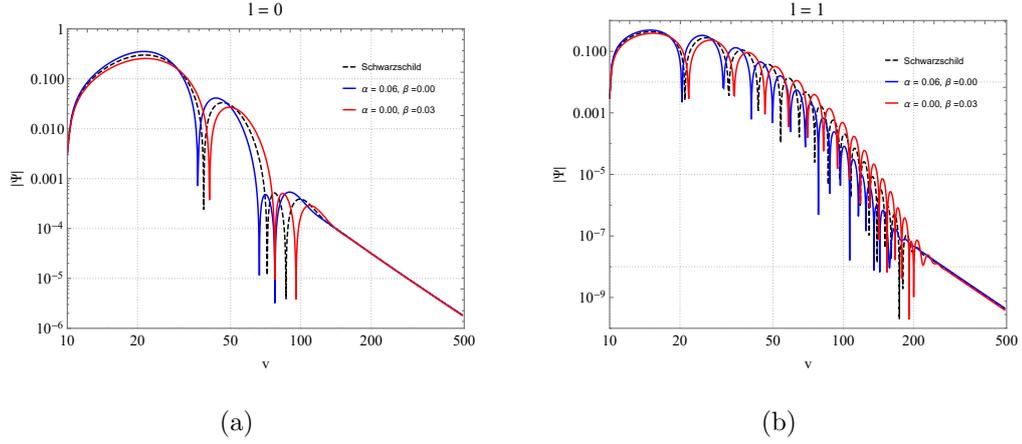


Figura 5.6: Graficos Log-log para a função de onda em $x = 10M$, comparando o caso de Schwarzschild com os efeitos dos parâmetros α e β .

enquanto que se consideramos apenas a parte quadrática temos um prolongamento e as oscilações duram mais, como podemos ver melhor para $l = 1$. Esse comportamento condiz com o que foi obtido na seção de resultados, veja nas tabelas que a parte real da frequência aumenta quando aumentamos o valor de l , além disso a parte imaginária que representa a escala de tempo de amortecimento também correspondem ao mostrado na Figura 5.6.

5.2 Buraco negro não-comutativo

No Capítulo 2 introduzimos o estudo de espalhamento para o buraco negro não-comutativo, agora iremos estudar os modos quasinormais para a métrica não-comutativa. Usando as técnicas apresentadas na seção anterior para a métrica com correções quânticas pelo GUP. Relembrando o elemento de linha para um buraco negro de Schwarzschild não-comutativo descrito no Capítulo 2:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (5.39)$$

com

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{8M\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}r^2}, \quad (5.40)$$

$$= \frac{1}{r^2}(r - r_+)(r - r_-), \quad (5.41)$$

onde

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - 8M\sqrt{\theta/\pi}} \approx 2M - 4\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}, \quad (5.42)$$

$$r_- = M - \sqrt{M^2 - 8M\sqrt{\theta/\pi}} \approx 4\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}, \quad (5.43)$$

que representam o raio do horizonte de eventos e o horizonte Cauchy respectivamente. Assim, no próximo passo vamos novamente considerar um campo escalar sem massa descrita pela a equação de Klein-Gordon, aplicando o método de separação de variáveis, podemos montar uma equação radial da seguinte forma:

$$(r - r_-)(r - r_+) \frac{d^2 R_{\omega l}(r)}{dr^2} + r^2 \frac{df(r)}{dr} \frac{dR_{\omega l}(r)}{dr} + \left[\frac{\omega^2 r^4}{(r - r_-)(r - r_+)} - r \frac{df(r)}{dr} - l(l+1) \right] R_{\omega l}(r) = 0. \quad (5.44)$$

reduzindo a equação radial (5.44) para uma equação tipo de Schrödinger introduzindo a coordenada tortoise como feito no Capítulo 2 temos

$$\frac{d^2 R_{\omega l}(x)}{dx^2} + [\omega^2 - V_{ef}] R_{\omega l}(x) = 0, \quad (5.45)$$

onde x novamente é dado por

$$x = r + \frac{r_-^2}{r_- - r_+} \log(r - r_-) - \frac{r_+^2}{r_- - r_+} \log(r - r_+), \quad (5.46)$$

e o potencial

$$V_{ef} = \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^4} \left[\frac{(r_+ + r_-)}{r} - \frac{2r_- r_+}{r^2} + l(l+1) \right]. \quad (5.47)$$

5.2.1 Aproximação WKB

Como já vimos à aproximação WKB é bastante eficiente para obter os modos quasinormais, isso para espaço tempo assintoticamente plano ou que admitem soluções ondulatórias no infinito espacial. Assim vamos novamente aplicar a aproximação WKB de sexta ordem para obter os modos quasinormais de um buraco negro não-comutativo, usando a equação seguinte

$$\frac{i(\omega_n^2 - V_0)}{\sqrt{-2V_0''}} - \sum_{j=2}^6 \Omega_j = n + \frac{1}{2}, \quad (5.48)$$

lembrando que Ω_j são termos de correção para o modelo. Temos também que V_0 é o potencial efetivo máximo no ponto x_0 . Obtemos o valor de x_0 fazendo $V_0' = 0$. Na Figura

5.7 temos as curvas para o potencial efetivo em função da coordenada tartaruga para $l = 1, 2$ e $\Theta = 0.0, 0.05, 0.10, 0.12$ como já definimos no Capítulo 2, o parâmetro não comutativo definido da forma $\Theta = \sqrt{\theta}/(M\sqrt{\pi})$. Nas Tabelas (5.5 - 5.7) apresentamos os resultados obtidos pela aproximação WKB de sexta ordem.

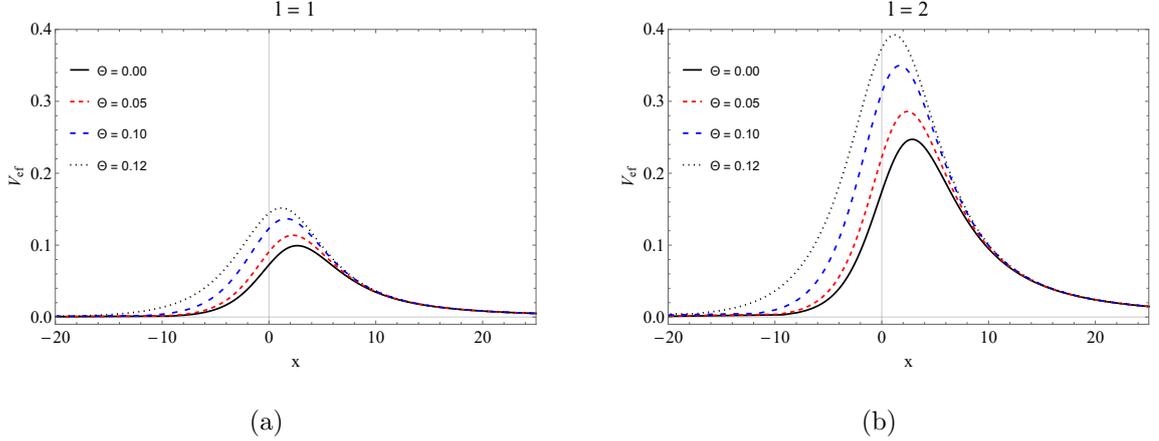


Figura 5.7: Potencial efetivo V_{ef} em função da coordenada tortoise x em (a) $l = 1$ e (b) $l = 2$.

Nessa etapa vamos analisar o espalhamento como feito na seção anterior e verificar os resultados com os obtidos no Capítulo 2. Temos a seguinte relação assumindo que \mathcal{K} é puramente imaginário

$$i(\omega^2 - V_0) - \sqrt{-2V_0''} \left(\mathcal{K} + \sum_{j=2}^6 \Omega_j(\mathcal{K}) \right) = 0. \quad (5.49)$$

Novamente usando as seguintes relações:

$$|R|^2 = \frac{|A_{sai}|^2}{|A_{ent}|^2} = \frac{1}{1 + e^{-2i\pi\mathcal{K}}}, \quad 0 < |R|^2 < 1, \quad (5.50)$$

$$|T|^2 = \frac{|A_{tr}|^2}{|A_{ent}|^2} = \frac{1}{1 + e^{2i\pi\mathcal{K}}} = 1 - |R|^2. \quad (5.51)$$

Podemos encontrar os coeficientes calculando os valores de \mathcal{K} obtidos resolvendo a equação (5.49). Na Figura 5.8 temos o coeficiente de transmissão em função da frequência ω usando os resultados numéricos obtidos no Capítulo 2 para comparar os resultados, usamos os seguintes valores para os parâmetros $l = 1, 2, 3$ e $\Theta = 0.05, 0.12$.

5.2.2 Fração contínua

Agora, novamente vamos aplicar o método da fração contínua para o caso não-comutativo. Iniciamos analisando a equação radial (5.44) sujeita as condições de con-

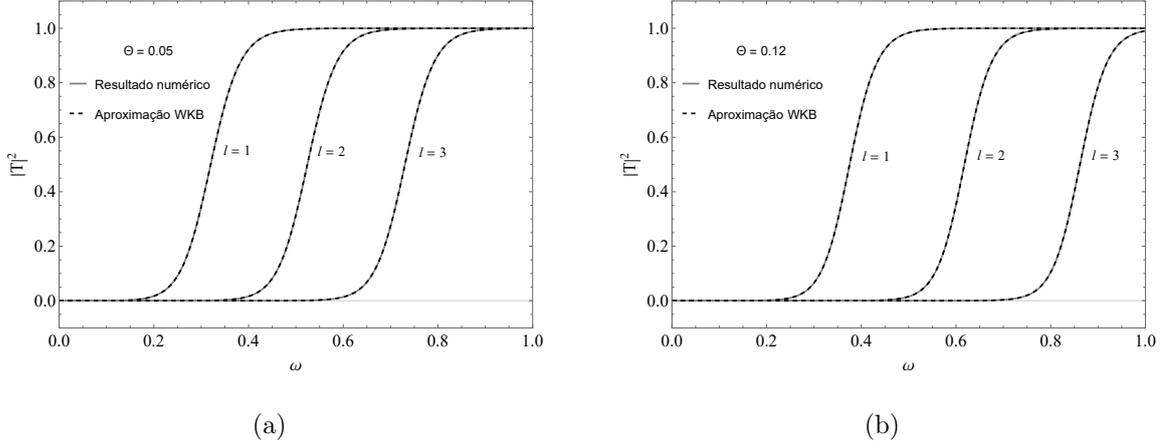


Figura 5.8: Coeficiente de transmissão para três multipolos $l = 1, 2, 3$ e $\Theta = 0.05$ em (a) e $\Theta = 0.12$ em (b). Podemos notar que a aproximação WKB e resultado numérico apresentado no Capítulo 2 são bem próximos para esses valores de multipolos.

torno no infinito $r \rightarrow \infty$ e próximo ao horizonte de eventos $r \rightarrow r_+$ obtendo as soluções assintóticas da seguinte forma

$$R_{\omega l}(r) \approx \begin{cases} e^{i\omega r} r^{i\omega(r_- + r_+)}, & r \rightarrow \infty, \\ e^{-i\omega r_+} (r_+ - r_-)^{-i\omega r_-^2/(r_- - r_+)} (r - r_+)^{i\omega r_+^2/(r_- - r_+)}, & r \rightarrow r_+. \end{cases} \quad (5.52)$$

Assim considerando uma solução em série de potência em torno de $(r = r_+)$, escrita na forma

$$R_{\omega l}(r) = \frac{r}{r - r_-} (r - r_-)^{i\omega(r_+ + r_-)} \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right)^{\frac{-i\omega r_+^2}{r_+ - r_-}} e^{i\omega r} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right)^k, \quad (5.53)$$

onde considerando $a_0 = 1$ no limite $r \rightarrow r_h$ retornamos a segunda solução em (5.52). Aplicando a solução na equação (5.44) aplicando o método de Frobenius obtemos a seguinte relação de recorrência conectadas por três termos

$$A_0 a_1 + B_0 a_0 = 0, \quad (5.54)$$

e

$$A_k a_{k+1} + B_k a_k + C_k a_{k-1} = 0, \quad k \geq 1. \quad (5.55)$$

Os coeficientes da relação de recorrência A_k , B_k e C_k são funções simples de k e dos parâmetros ω , l e os raios r_- e r_+ :

$$A_k = (1+k)[r_-(k+1) - r_+(1+k - 2i\omega r_+)], \quad (5.56)$$

$$B_k = r_+[l(l+1) + 1 + 2(k - 2i\omega r_+)(1+k - 2i\omega r_+)] \\ - r_-[l(l+1) + 1 - 2i\omega r_+ + 2k(1+k - 2i\omega r_+)], \quad (5.57)$$

$$C_k = [k - 2i\omega(r_- + r_+)] [k(r_- - r_+) + 2i\omega r_+^2]. \quad (5.58)$$

Veja que, como o caso com GUP, substituindo a solução (5.53) na equação radial (5.45) obtemos diretamente uma relação de recorrência de três termos, o que facilita o uso do método fração contínua. Isto ocorre porque tanto a métrica para o buraco negro com o GUP, quanto o caso não comutativo, resultarem em uma equação de onda esferoidal generalizada [97] cujas as soluções são conectadas por relações de recorrência de três termos, como podemos ver com mais detalhes no Apêndice C. Entretanto, o método de Leaver não é necessariamente limitado a uma relação de recorrência deste tipo, podendo usar métodos de redução quando temos mais de três termos como em [92].

As condições de contorno no infinito são satisfeitas para frequências quasinormais da forma $\omega = \omega_n$, de modo que a série em (5.53) seja absolutamente convergente. Assim, temos uma relação de recorrência com três termos, para determinar os coeficientes a_k escrevemos em termos de uma fração contínua

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{-C_{k+1}}{B_{k+1} - \frac{A_{k+1}C_{k+2}}{B_{k+2} - \frac{A_{k+2}C_{k+3}}{B_{k+2} - \dots}}}, \quad (5.59)$$

que também pode ser organizado de outra forma como,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{-C_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_{k+1}C_{k+2}}{B_{k+2}} - \frac{A_{k+2}C_{k+3}}{B_{k+3}} - \dots. \quad (5.60)$$

Obtemos a equação característica para as frequências quasinormais assumindo $k = 0$ em (5.60) e comparando com $a_1/a_0 = -B_0/A_0$ obtido em (5.54), encontramos a seguinte relação

$$0 = \frac{B_0}{A_0} - \frac{C_1}{B_1} - \frac{A_1C_2}{B_2} - \frac{A_2C_3}{B_3} - \dots. \quad (5.61)$$

Com a equação acima, obtemos as frequências quasinormais ω_n , apenas calculando as raízes numericamente. No entanto, a equação (5.61) é mais usada para encontrar a

frequência fundamental no caso da raiz mais estável, assim uma outra forma de encontrar os modos é inverter esta equação para um valor grande de k como segue

$$B_k - \frac{A_{k-1}C_k}{B_{k-1}-} \frac{A_{k-2}C_{k-1}}{B_{k-2}-} \dots \frac{A_0C_1}{B_0} = \frac{A_kC_{k+1}}{B_{k+1}-} \frac{A_{k+1}C_{k+2}}{B_{k+2}-} \dots . \quad (5.62)$$

Para complementar a análise, verificaremos o comportamento de k muito grandes. Organizando a equação (5.55) dividindo por a_k para obter

$$A_k \frac{a_{k+1}}{a_k} + B_k + C_k \frac{a_{k-1}}{a_k} = 0, \quad (5.63)$$

podemos ver que, $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{k+1}/a_k) \simeq 1$, assim expandindo a_{k+1}/a_k em serie de potência em \sqrt{k} ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{C}_i k^{-i/2} = \mathcal{C}_0 + \frac{\mathcal{C}_1}{\sqrt{k}} + \frac{\mathcal{C}_2}{k} + \frac{\mathcal{C}_3}{k^{3/2}} + \dots . \quad (5.64)$$

Considerando a expansão da série até o terceiro termo e assumindo que $\mathcal{C}_0 = 1$ temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \approx 1 + \frac{\mathcal{C}_1}{\sqrt{k}} + \frac{\mathcal{C}_2}{k} + \dots , \quad (5.65)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k-1}}{a_k} \approx 1 - \frac{\mathcal{C}_1}{\sqrt{k}} + \frac{(\mathcal{C}_1)^2 - \mathcal{C}_2}{k} + \frac{\mathcal{C}_1(2\mathcal{C}_2 - 1/2 - (\mathcal{C}_1)^2)}{k^{3/2}} + \dots . \quad (5.66)$$

Para obter os valores de \mathcal{C}_1 and \mathcal{C}_2 , substituímos essas duas expressões acima na equação (5.63) no regime de k muito grande, fazendo as multiplicações e restringindo até termos da ordem $k^{-3/2}$ para obter

$$\frac{(\mathcal{C}_1)^2 - 2i\omega(r_- - r_+)}{k} - \frac{\mathcal{C}_1[-3 + 2(\mathcal{C}_1)^2 - 4\mathcal{C}_2 - 4i\omega(r_- + r_+)]}{2k^{3/2}} \approx 0, \quad (5.67)$$

assim temos que:

$$(\mathcal{C}_1)^2 = 2i\omega(r_- - r_+), \quad (5.68)$$

$$\mathcal{C}_2 = -2i\omega r_+ - \frac{3}{4}. \quad (5.69)$$

Agora temos,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \approx 1 \pm \frac{\sqrt{2i\omega(r_- - r_+)}}{\sqrt{k}} - \frac{2i\omega r_+ + 3/4}{k}, \quad (5.70)$$

vemos que no limite $r_- \rightarrow 0$ e $r_+ \rightarrow 1$, recuperamos os resultados para o caso de Schwarzschild encontrados por Leaver.

5.2.3 Comparando os resultados

Nas Tabelas (5.5 - 5.7), apresentamos alguns resultados para os modos quasinormais calculados usando a aproximação WKB de sexta ordem, e o método de fração contínua de Leaver descrito na seção anterior admitindo $M = 1$ para vários valores de $\Theta = \sqrt{\theta/\pi}$, l e n . Vemos que os resultados entre os métodos se aproximam quando $l > 1$, isto é, devido a instabilidade do método WKB para pequenos números multipolares principalmente próximos de zero esta instabilidade também pode ser observada nos gráficos da Figura 5.9. Como já discutido um detalhe importante está no sinal da parte imaginária que é sempre negativo quando a frequência está associada ao campo escalar. Uma justificativa para isso se deve à queda exponencial dos modos quasinormais ao longo do tempo pela perda de energia na forma de ondas escalares Figura 5.11. Podemos ver a influência nos modos quasinormais para o caso não-comutativo admitindo valores para Θ onde $\Theta = 0$ retorna ao caso Schwarzschild. Com o aumento do parâmetro não-comutativo Θ , temos um aumento na parte real da frequência quasinormais, enquanto a parte imaginária começa a crescer e depois diminui.

Outra forma de visualizar os efeitos do parâmetro não-comutativo é através dos gráficos da Figura 5.9, esses gráficos foram obtidos usando o método WKB. Temos os modos quasinormais onde separamos no gráfico a parte real (superior) e a parte imaginária (inferior). Os modos são baseados em n para os seguintes números multipolares $l = 1, 2, 3$ e 4 , para os quais vemos que os resultados se tornam mais lineares com os resultados variando Θ e $l = 3$ e 4 . Assim, na Figura 5.9 observamos que, ao variar l e o parâmetro θ , a parte imaginária da frequência não cruza o eixo horizontal nem muda de sinal, indicando que o buraco negro permanece estável devido à perturbação escalar. Além disso, é interessante fazer um gráfico para o plano complexo como na Figura 5.10 onde consideramos três famílias de multipolos $l = 1, 2, 3$ e variando Θ como segue 0 (preto), $0,05$ (vermelho), $0,10$ (azul), $0,12$ (verde). O painel esquerdo foi obtido pela aproximação WKB e o painel direito pelo método de fração contínua (numérico). Aqui podemos ver novamente que o WKB se aproxima melhor do numérico para valores maiores de l , por exemplo para $l = 1$ (círculos) com apenas cinco pontos (referentes a valores de n) já é possível ver bem a diferença com o resultado numérico. Podemos ver que o efeito da não comutatividade faz com que as curvas se desloquem para direita. Também vemos que para o caso extremo $\Theta = 0,12$ a curva se inclina mais para a esquerda.

Tabela 5.5: Frequências quasnormais para o caso não-comutativo, multipolo $l = 1$

Θ	ω_0		ω_1		ω_2	
	WKB 6 ^a ordem	numérico	WKB 6 ^a ordem	numérico	WKB 6 ^a ordem	numérico
0.00	0.292910 - 0.097762i	0.292936 - 0.0976600i	0.264471 - 0.306518i	0.264449 - 0.306257i	0.231014 - 0.542166i	0.229539 - 0.540133i
0.05	0.316239 - 0.099311i	0.316243 - 0.0992441i	0.290671 - 0.309586i	0.290591 - 0.309431i	0.260297 - 0.543374i	0.258427 - 0.542162i
0.10	0.351481 - 0.097397i	0.351435 - 0.0973776i	0.330103 - 0.300074i	0.329892 - 0.300209i	0.300773 - 0.519039i	0.299190 - 0.519345i
0.12	0.371967 - 0.091934i	0.371932 - 0.0919646i	0.346286 - 0.282086i	0.346358 - 0.282153i	0.300083 - 0.491675i	0.301082 - 0.491385i

Tabela 5.6: Frequências quasnormais para o caso não-comutativo, multipolo $l = 2$

Θ	ω_0		ω_1		ω_2	
	WKB 6 ^a ordem	numérico	WKB 6 ^a ordem	numérico	WKB 6 ^a ordem	numérico
0.00	0.483642 - 0.096766i	0.483644 - 0.0967588i	0.463847 - 0.295627i	0.463851 - 0.295604i	0.430386 - 0.508700i	0.430544 - 0.508558i
0.05	0.521842 - 0.098436i	0.521844 - 0.0984288i	0.504088 - 0.300022i	0.504087 - 0.299997i	0.474038 - 0.514099i	0.474067 - 0.513965i
0.10	0.580028 - 0.096808i	0.580028 - 0.0968027i	0.565520 - 0.293676i	0.565511 - 0.293660i	0.540100 - 0.499152i	0.540039 - 0.499083i
0.12	0.615658 - 0.091534i	0.615659 - 0.0915307i	0.599809 - 0.276911i	0.599817 - 0.276896i	0.569259 - 0.469194i	0.569307 - 0.469133i

Tabela 5.7: Frequências quasnormais para o caso não-comutativo, multipolo $l = 3$

Θ	ω_0		ω_1		ω_2	
	WKB 6 ^a ordem	numérico	WKB 6 ^a ordem	numérico	WKB 6 ^a ordem	numérico
0.00	0.675366 - 0.096501i	0.675366 - 0.0964996i	0.660671 - 0.292288i	0.660671 - 0.292285i	0.633591 - 0.496011i	0.633626 - 0.496008i
0.05	0.728594 - 0.098197i	0.728594 - 0.0981957i	0.715414 - 0.297060i	0.715414 - 0.297056i	0.691124 - 0.502924i	0.691137 - 0.502911i
0.10	0.809869 - 0.096642i	0.809869 - 0.0966413i	0.799161 - 0.291636i	0.799159 - 0.291633i	0.779124 - 0.491455i	0.779117 - 0.491442i
0.12	0.860294 - 0.091410i	0.860294 - 0.0914089i	0.848871 - 0.275415i	0.848871 - 0.275412i	0.826463 - 0.462957i	0.826463 - 0.462950i

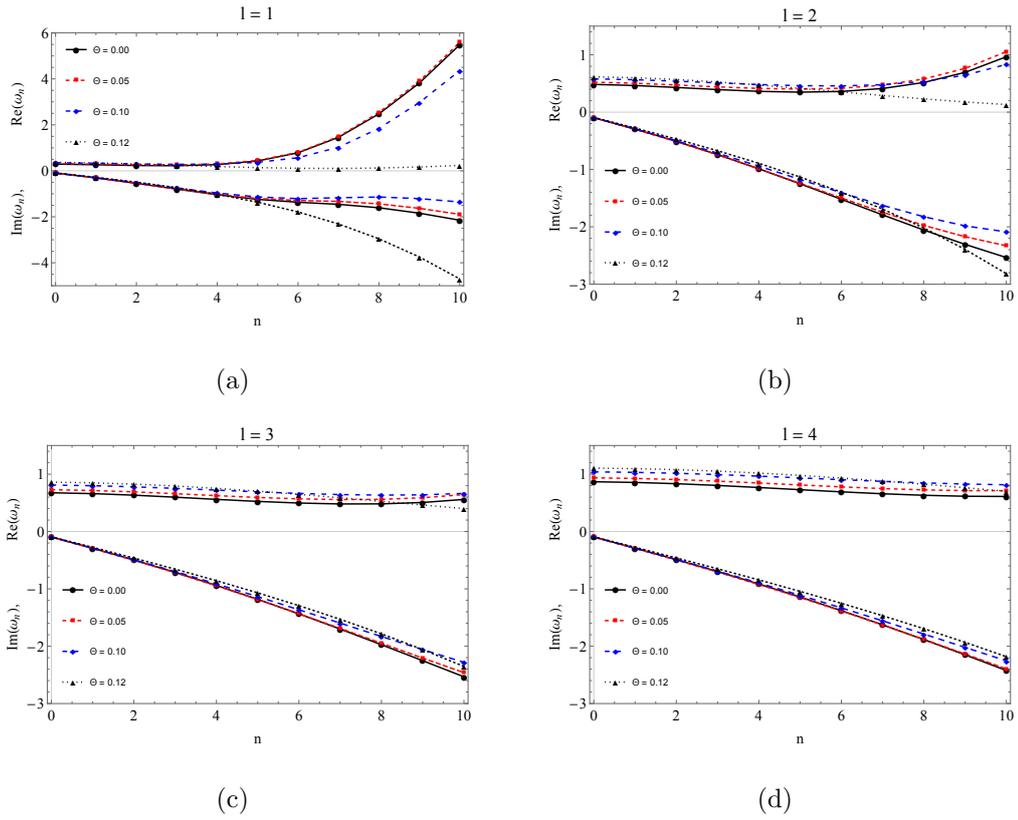


Figura 5.9: Partes reais e imaginárias das frequências quasinormais, em função de n . Para $l = 1$ as curvas de frequência são bastante dispersas com o aumento de n , enquanto para $l = 3, 4$ as curvas da parte real são mais constantes.

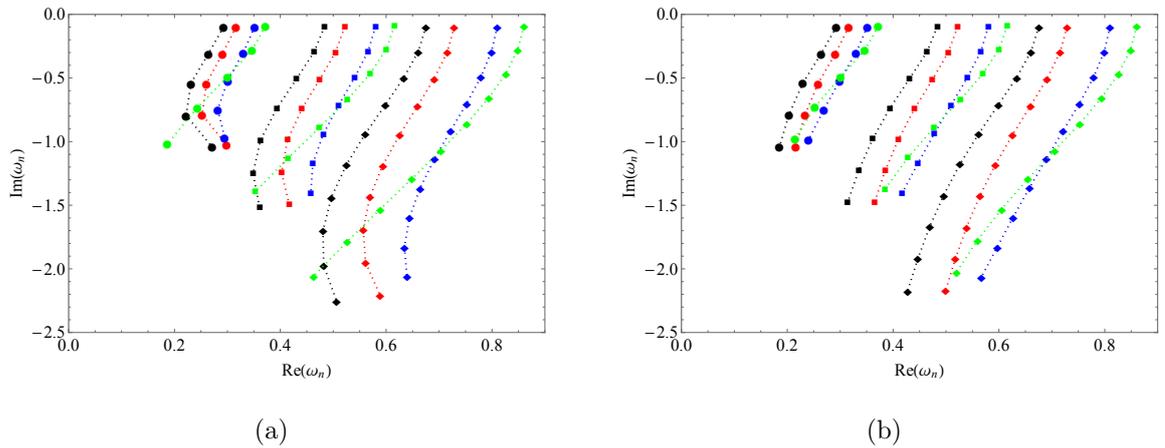


Figura 5.10: Plano complexo para os modos quasinormais. No gráfico (a) temos os resultados obtidos pela aproximação WKB, enquanto em (b) usamos fração contínua. Os marcadores denotam o número multipolar como: $l = 1$ (círculo), $l = 2$ (quadrado) e $l = 3$ (diamante), enquanto as cores denotam o valor do parâmetro não-comutativo $\Theta = 0$ (preto), $\Theta = 0.05$ (vermelho), $\Theta = 0.10$ (azul) e $\Theta = 0.12$ (verde).

5.2.4 Domínio temporal

Agora vamos analisar o domínio temporal da função de onda para o caso não-comutativo, o procedimento é similar ao feito na seção anterior para buracos negros com GUP. Onde usando coordenada nulas u e v temos uma equação do tipo

$$\left(4\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + V(u, v)\right)\psi(u, v) = 0.$$

Que pode ser integrada numericamente usando o método diferenças finitas. Assim escolhamos um perfil gaussiano da mesma forma

$$\psi(u = u_0, v) = Ae^{-(v-v_c)^2/2\sigma^2}, \quad \psi(u, v = v_0) = \psi_0. \quad (5.71)$$

Aplicando em uma equação do tipo (5.37) e usando os mesmos parâmetros descritos na seção anterior para a integração numérica, ou seja, assumimos uma gaussiana com largura $\sigma = 3.0$ centrada em $v_c = 10$ e com uma amplitude $A = 1$. O intervalo de u e v vai de 0 à 500 com um passo de $h = 0.2$.

Na Figura 5.6 consideramos três famílias de multipolos $l = 1, 2, 3$ e comparamos o efeito da não-comutatividade na evolução da função de onda com o caso clássico para o buraco negro de Schwarzschild (linha pontilhada). Diferente do caso anterior que estudamos o buraco negro com correções quânticas via-se uma relativa diferença da parte imaginária da frequência quasinormal com a mudança dos parâmetros de correção, essa mudança é notada na relação de amortecimento de cada curva na Figura 5.6. Por outro lado para o caso não-comutativo os valores para a parte imaginária das frequências quasinormais não muda tanto, como mostrado nas Tabelas (5.5 - 5.7), assim é esperado que não haja diferença no amortecimento das curvas com o efeito da não comutatividade como vemos na Figura 5.11. Os resultados apresentados nesse capítulo foram publicados em [98] e [99].

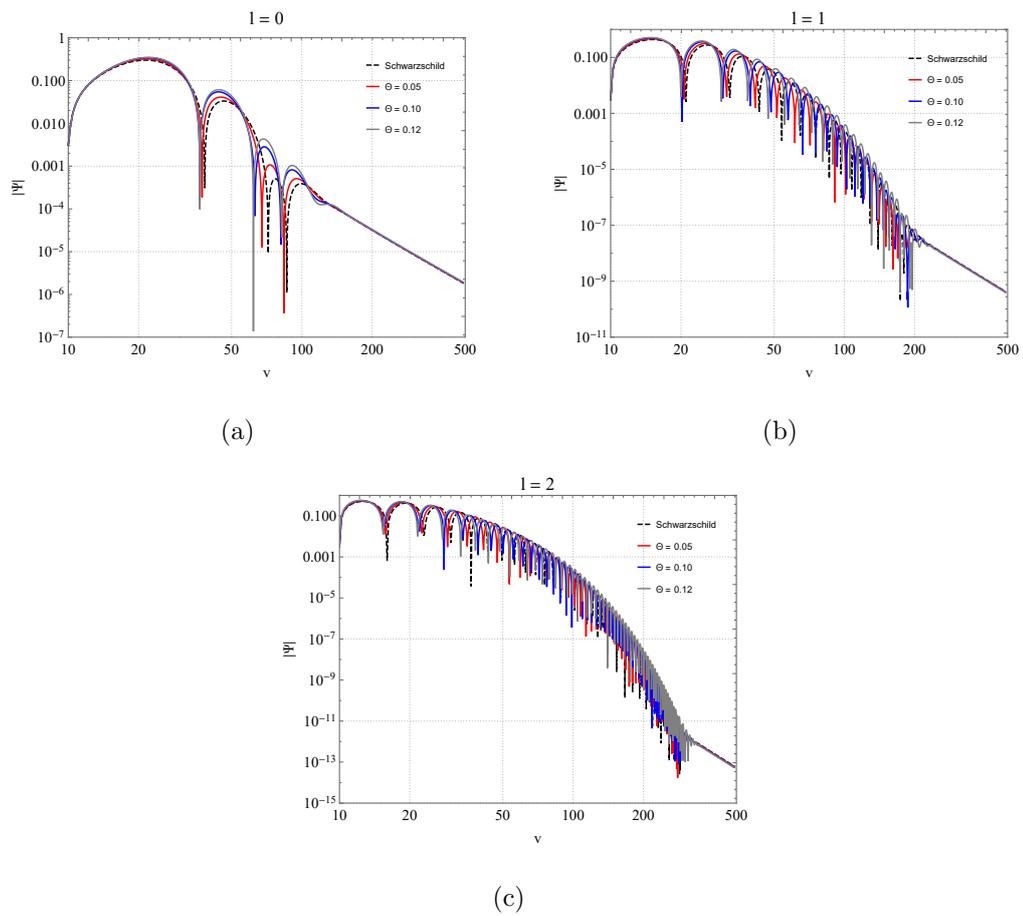


Figura 5.11: Gráficos Log-log para a função de onda em $x = 10M$, comparando o caso de Schwarzschild com os efeitos dos parâmetros não-comutativo Θ .

Capítulo 6

Estudo da sombra de um buraco negro

Neste capítulo, iremos complementar o estudo dos modos quasinormais analisando a sombra do buraco negro nos dois cenários discutido no capítulo anterior. Nos últimos anos aumentou o interesse em se estudar a sombra do buraco negro ainda mais com os incríveis resultados da colaboração internacional *Event Horizon Telescope* (EHT) que depois de um grande trabalho em 2019 compôs a primeira imagem de um buraco negro, localizado no centro da galáxia Messier 87, indicado por M87*, e nos últimos meses após um árduo trabalho de melhorias EHT apresentou ao mundo a primeira imagem do buraco negro no centro de nossa própria galáxia Via Láctea denominado de Sagitário A* (SgrA*) [100]. A sombra do buraco negro esta relacionada ao fato de nas vizinhanças de um buraco negro os ftons serem absorvidos, se não houver outras fontes na linha de visão o observador encontrara uma mancha escura na direção do buraco negro.

Os primeiros trabalhos sobre sombras de buracos negros foi apresentado por John Synge [101] onde determinou a sombra do buraco negro de Schwarzschild, neste caso o tamanho da sombra corresponde ao tamanho da esfera de fótons aumentado pela curvatura dos raios de luz. Já James Bardeen [102] calculou analiticamente o tamanho e forma da sombra no vácuo para a métrica de Kerr. Diferente do caso estático onde a sombra é perfeitamente circular, no caso de Kerr devido a rotação sua sombra nem sempre é circular, porem não iremos detalhar os efeitos da rotação na sombra, aqui vamos nos restringir aos casos estáticos.

Usaremos o raio sombra para entender melhor as proximidades do horizonte de evento, tanto para o caso não-comutativo quanto para o caso com correções quânticas GUP. Sabemos que existe uma relação entre os modos quasinormais e a sombra do buraco

negro e que várias investigações contribuíram para esse entendimento. Um dos primeiros estudos que certamente serviram de base para estruturar essa relação foi feito por Mashhoon [103], que descreve um método alternativo para calcular modos quasinormais no limite eikonal. É interessante mencionar o estudo geodésico bem detalhado feito por Cardoso e colaboradores [104], mostrando que a parte real dos modos quasinormais está relacionada à velocidade angular da órbita circular nula e a parte imaginária está associada ao expoente de Lyapunov. Stefanov e colaboradores [105] no regime eikonal estabeleceram uma conexão entre os modos quasinormais de buracos negros e lentes no limite de deflexão forte.

6.1 Cálculo da sombra do buraco negro

Nesta seção vamos refazer o estudo geodésico para os casos abordados nos Capítulos 2 e 3, porém para uma descrição mais completa não adotaremos inicialmente $\vartheta = \pi/2$. O procedimento segue o feito por Carter [106], para construir geodésicas partindo da equação de Hamilton-Jacobi. Assim vamos considerar um elemento de linha da forma

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2). \quad (6.1)$$

Então, iniciando com a lagrangeana $\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$, os pontos são derivadas com respeito ao parâmetro afim. O momento canônico conjugado é dado por

$$P_t = f(r)\dot{t} = E, \quad P_r = f(r)^{-1}\dot{r}, \quad (6.2)$$

$$P_\vartheta = r^2\dot{\vartheta}, \quad P_\phi = r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\phi} = L, \quad (6.3)$$

onde novamente E e L são constante que representam a energia e o momento angular respectivamente. A partir da equação de Hamilton-Jacobi, Carter mostrou a separabilidade das equações geodésicas, por meio de equações independentes para uma geodésica e uma constante K . Assim, sendo a equação de Hamilton-Jacobi dada por

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = \mathcal{H} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} \quad (6.4)$$

onde S é a ação Jacobiana. Usando a equação (6.1) e (6.4) temos

$$-2\frac{\partial S}{\partial \tau} = -f(r)^{-1} \left(\frac{\partial S_t}{\partial t} \right)^2 + f(r) \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + r^{-2} \left(\frac{\partial S_\vartheta}{\partial \vartheta} \right)^2 + r^{-2} \sin^{-2} \vartheta \left(\frac{\partial S_\phi}{\partial \phi} \right)^2. \quad (6.5)$$

Considerando uma solução para a ação de Jacobi da forma

$$S = \frac{1}{2}m_t^2\tau - Et + L\phi + S_r(r) + S_\vartheta(\vartheta), \quad (6.6)$$

onde S_r e S_ϑ são funções respectivamente de r e ϑ temos também que m_t é a massa da partícula teste, para o nosso caso por se trata de fótons, portanto $m_t = 0$. Usando (6.6) na equação de Hamilton-Jacobi obtemos

$$r^4 f(r)^2 \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 = E^2 r^4 - r^2 f(r) (K + L^2), \quad (6.7)$$

$$\left(\frac{\partial S_\vartheta}{\partial \vartheta} \right)^2 = K - L^2 \cot^2 \vartheta, \quad (6.8)$$

onde K é a constante de Carter. Relacionando com as equações (6.2) e (6.3) obtemos a equação completa pra geodésica nula

$$\dot{t} = \frac{E}{f(r)}, \quad \dot{\phi} = \frac{L}{r^2 \sin^2 \vartheta}, \quad (6.9)$$

$$r^2 \dot{r} = \pm [E^2 r^4 - r^2 f(r) (K + L^2)]^{1/2}, \quad r^2 \dot{\vartheta} = \pm [K - L^2 \cot^2 \vartheta]. \quad (6.10)$$

As equações (6.9) e (6.10) governam o movimento do fóton no espaço tempo. As características para um fóton próximo de um buraco negro pode ser descritas de uma forma geral por dois parâmetros de impacto que são funções das constantes de movimento E e L

$$\zeta = \frac{L}{E}, \quad \iota = \frac{K}{E^2}. \quad (6.11)$$

Isto é importante para determinar o limite da sombra, já que é determinado por órbitas instáveis $r = r_c$ fora do horizonte de eventos, os fótons que órbita esta região pode cair ou escapar do buraco negro. Aplicando as condições para o caso crítico $\dot{r} = 0$ e $\ddot{r} = 0$ e usando a primeira equação em (6.10) temos

$$(\iota + \zeta^2) = \frac{r_c^2}{f(r_c)}, \quad r_c = \frac{2f(r_c)}{f'(r_c)}. \quad (6.12)$$

Vamos usar as equações (6.12) para analisar o raio da sombra para dois cenários buracos negros com GUP e não-comutativo, assim como já vimos temos:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right), \quad \text{para o caso com GUP}, \quad (6.13)$$

ou

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{8M\sqrt{\theta}}{r^2\sqrt{\pi}}, \quad \text{para o caso não-comutativo}. \quad (6.14)$$

6.1.1 Buraco negro com GUP

Vamos agora verificar a influência de efeitos quânticos no comportamento da sombra do buraco negro com GUP. Aplicando (6.13) em (6.12) obtemos

$$r_c = 3M \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right), \quad (6.15)$$

$$(\iota + \zeta^2) = \frac{r_c^3}{r_c - 2M_{gup}} = 27M^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right)^2. \quad (6.16)$$

Para determinar o tamanho da sombra de um buraco negro, introduziremos um novo sistema de coordenadas (ξ, η) chamadas de coordenadas celestes [107]. As coordenadas são definidas como

$$\xi = \lim_{r_o \rightarrow \infty} \left[-r_o^2 \sin \vartheta_o \frac{d\phi}{dr} \Big|_{\vartheta=\vartheta_o} \right], \quad (6.17)$$

$$\eta = \lim_{r_o \rightarrow \infty} \left[r_o^2 \frac{d\vartheta}{dr} \Big|_{\vartheta=\vartheta_o} \right], \quad (6.18)$$

onde (r_o, ϑ_o) é a posição do observador no infinito. A coordenada ξ representa a distância perpendicular aparente da sombra ao eixo de simetria e η representa a distância perpendicular aparente da sombra a partir de sua projeção no plano equatorial, como no esquema mostrado na Figura 6.1. Usando as equações geodésicas (6.9) e (6.10) em termos

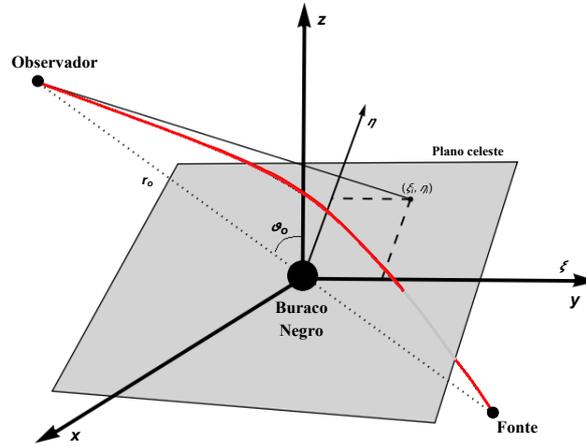


Figura 6.1: Diagrama esquemático de um observador distante, e o plano celeste.

da coordenada radial, encontramos as seguintes equações em termos dos parâmetros ι e ζ

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\zeta}{r^2} \left[1 - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M_{gup}}{r} \right) (\iota + \zeta^2) \right]^{-1/2}, \quad (6.19)$$

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\iota - \zeta^2 \cot^2 \vartheta}{1 - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M_{gup}}{r} \right) (\iota + \zeta^2)} \right]^{1/2}, \quad (6.20)$$

assim, as coordenadas (6.17) e (6.18) aplicando o limite de r_o no infinito

$$\xi = -\frac{\zeta}{\sin \vartheta_o}, \quad \eta = [\iota - \zeta^2 \cot^2 \vartheta_o]^{1/2}. \quad (6.21)$$

Neste caso, para um observador no plano equatorial, ou seja, $\vartheta_o = \pi/2$ temos a seguinte relação

$$R_s \equiv \sqrt{\iota + \zeta^2} = 3\sqrt{3}M \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right) = 3\sqrt{3}M - 6\sqrt{3}\alpha + \frac{12\sqrt{3}\beta}{M}. \quad (6.22)$$

Este é o resultado do raio da sombra para um buraco negro com correções quânticas, veja que o raio da sombra é proporcional ao parâmetro de impacto calculado anteriormente no Capítulo 2. Na Figura 6.2, vemos as sombras devido a correções quânticas para um buraco negro com GUP. Mostramos o comportamento para diferentes valores de α e β . Observe que, considerando apenas a contribuição do GUP quadrático ($\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$), o raio da sombra aumenta quando variamos o parâmetro β , conforme mostrado na Figura 6.2(a). Na Figura 6.2(c), o aumento do raio da sombra também pode ser observado quando definimos o parâmetro α e variamos o parâmetro β . O efeito do GUP linear ($\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$) é mostrado na Figura 6.2(b). Neste caso, o raio da sombra é reduzido quando variamos α . Na Figura 6.2(d), esse efeito também pode ser visto quando fixamos o valor de β e aumentamos o valor de α . Além disso, observamos que para a contribuição quadrática temos apenas que $r_{hgup} > 2M$ e o raio crítico da esfera de fótons é maior que o raio r_{hgup} ($r_c > r_{hgup}$). Assim, para o raio da sombra, o resultado mostra que a parte quadrática do GUP gera um efeito semelhante ao obtido pela contribuição da matéria escura nas proximidades de um buraco negro [51].

Um outro resultado interessante é obtido quando consideramos o limite de pequenas massas na equação (6.22), veja que o resultado é proporcional ao parâmetro β sendo diferente de zero

$$R_s \approx \frac{12\sqrt{3}\beta}{M}. \quad (6.23)$$

Na Figura 6.3, observamos o comportamento do raio da sombra para um valor de massa pequena $M = 0,05$, que aumenta significativamente com a adição do parâmetro β , enquanto a mudança de valores para o parâmetro α não tem muita influência nos resultados quando assumimos β diferente de zero. Isso pode ser visto em (6.22), e esse efeito é consistente com os resultados obtidos no Capítulo 3, que mostra um aumento na seção de choque de absorção para M pequeno. Aqui temos que quanto maior o raio crítico, maior a região de absorção.

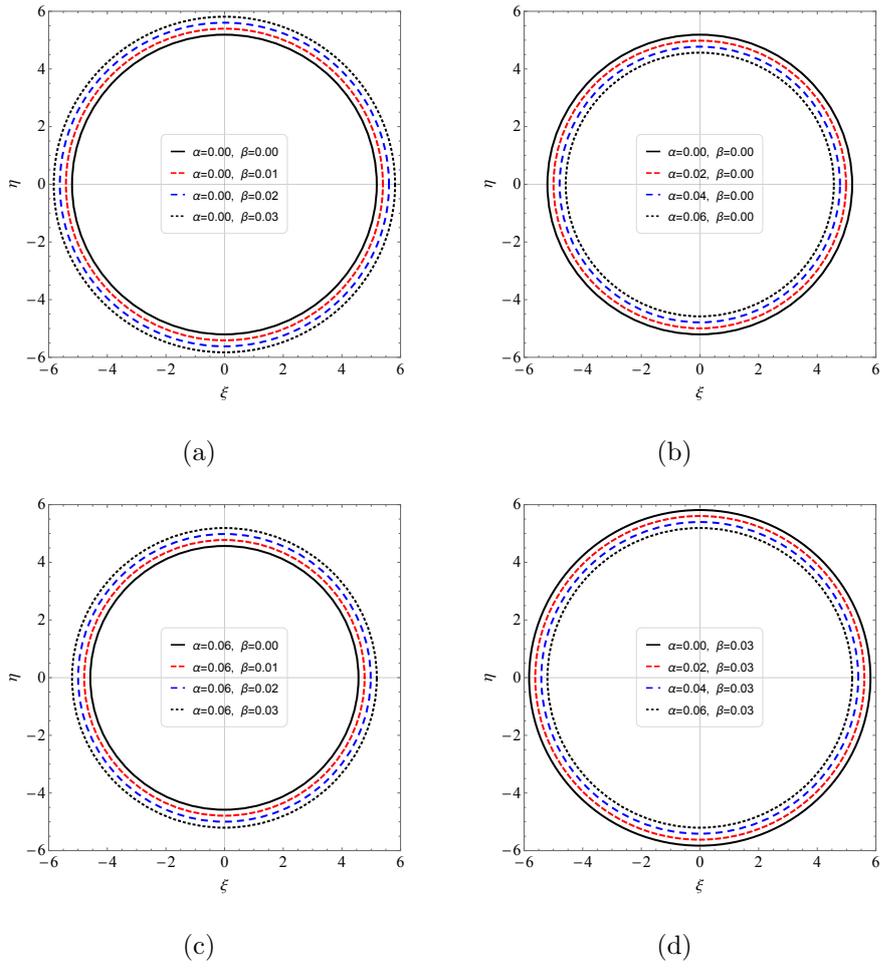


Figura 6.2: Cada círculo representa o limite da sombra do buraco negro com GUP, fixando $M = 1$ para diferentes valores de α e β .

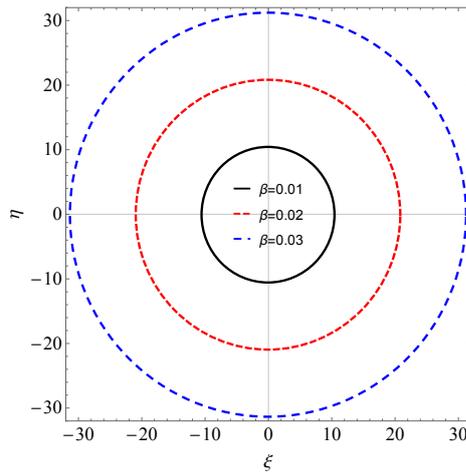


Figura 6.3: Sombra do buraco negro no limite de pequenas massas, usando os seguintes valores para os parâmetros: $M = 0.05$, $\alpha = 0$ e $\beta = 0.01, 0.02, 0.03$.

6.1.2 Buraco negro não-comutativo

Agora vamos verificar os efeitos da não comutatividade sobre a sombra do buraco negro, repetindo o processo da seção anterior, verificando as órbitas que delimitam a sombra (6.12) usando:

$$f(r) = \frac{1}{r^2}(r - r_+)(r - r_-), \quad (6.24)$$

onde para $\sqrt{\theta}$ pequeno temos $r_+ \approx 2M - 4\sqrt{\theta/\pi}$ e $r_- \approx 4\sqrt{\theta/\pi}$ como vimos no Capítulo 2. Temos os seguintes resultados para o raio crítico e o parâmetro de impacto

$$\begin{aligned} r_c &= \frac{3(r_+ + r_-)}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{9(r_+^2 + r_-^2) - 14r_+r_-}, \\ &= \frac{3M}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9M^2 - 64M\sqrt{\theta/\pi} + 128(\theta/\pi)}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} (\iota + \zeta^2) &= \frac{r_c^4}{(r_c - r_+)(r_c - r_-)}, \\ &= \frac{\left[3M + \sqrt{9M^2 - 64M\sqrt{\theta/\pi} + 128(\theta/\pi)}\right]^4}{8 \left[3M^2 - 16M\sqrt{\theta/\pi} + 32(\theta/\pi) + M\sqrt{9M^2 - 64\sqrt{\theta/\pi} + 128(\theta/\pi)}\right]}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Novamente usando o sistema de coordenada celeste (ξ, η) , para determinar a sombra do buraco negro não-comutativo. Usando as equações geodésicas (6.9) e (6.10) temos as derivadas de ϕ e ϑ em relação a r

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\zeta}{r^2 \sin \vartheta} \left[1 - \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^4} (\iota + \zeta^2) \right]^{-1/2}, \quad (6.27)$$

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\iota - \zeta^2 \cot^2 \vartheta}{1 - \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^4} (\iota + \zeta^2)} \right]^{1/2}. \quad (6.28)$$

Assim, aplicando os resultados acima nas coordenadas celestes (6.17), (6.18) e aplicando o limite de r_o no infinito obtemos o mesmo resultado encontrados para o buraco negro com GUP

$$\xi = -\frac{\zeta}{\sin \vartheta_o}, \quad \eta = [\iota - \zeta^2 \cot^2 \vartheta_o]^{1/2}. \quad (6.29)$$

Neste caso, para um observador no plano equatorial, ou seja, $\vartheta_o = \pi/2$ temos a seguinte relação

$$R_s \equiv \sqrt{\iota + \zeta^2} = \frac{\left[3M + \sqrt{9M^2 - 64M\sqrt{\theta/\pi} + 128(\theta/\pi)}\right]^2}{\sqrt{8 \left[3M^2 - 16M\sqrt{\theta/\pi} + 32(\theta/\pi) + M\sqrt{9M^2 - 64\sqrt{\theta/\pi} + 128(\theta/\pi)}\right]}}. \quad (6.30)$$

Podemos expressar R_s em termos de $\sqrt{\theta}$ pequeno, da seguinte forma

$$R_s \approx 3\sqrt{3}M - 4\sqrt{3}\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} + \frac{16}{3\sqrt{3}M}\frac{\theta}{\pi} + \dots, \quad (6.31)$$

note que para $\theta = 0$, temos o raio da sombra para um buraco negro de Schwarzschild. Portanto, notamos que o raio da sombra é reduzido quando alteramos o parâmetro θ . Na Figura 6.4, vemos os círculos que representam os limites da sombra do buraco negro não-comutativo para diferentes valores de Θ , lembrando que $\Theta = \sqrt{\theta/\pi}$. Observe que temos uma redução nos círculos quando variamos Θ . Além disso, tomando $M \rightarrow 0$ em (6.30), obtemos um resultado diferente de zero para o raio da sombra, que é

$$R_s \approx 8\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} = 2M_{min}, \quad (6.32)$$

onde, $M_{min} = 4\sqrt{\theta/\pi}$ é a massa mínima como mostrado no Capítulo 2. Portanto, no limite de $M \rightarrow 0$ o raio da sombra é proporcional à massa mínima e o buraco negro se torna um remanescente de buraco negro. Mostramos este comportamento para o raio da sombra na Figura 6.5, onde mantendo Θ fixo e assumindo pequenos valores de M . Na Figura 6.6, mostramos o comportamento do raio da sombra mantendo M fixo e assumindo pequenos valores de Θ .

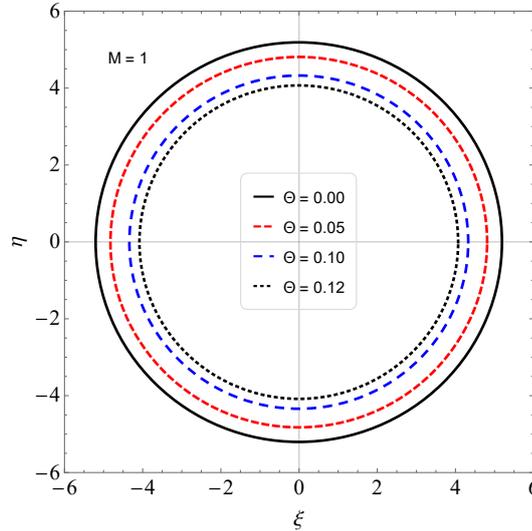


Figura 6.4: Influência da não-comutatividade no comportamento do raio da sombra assumindo os seguintes valores de parâmetros $M = 1$ e $\Theta = 0.0, 0.05, 0.10$ e 0.12 .

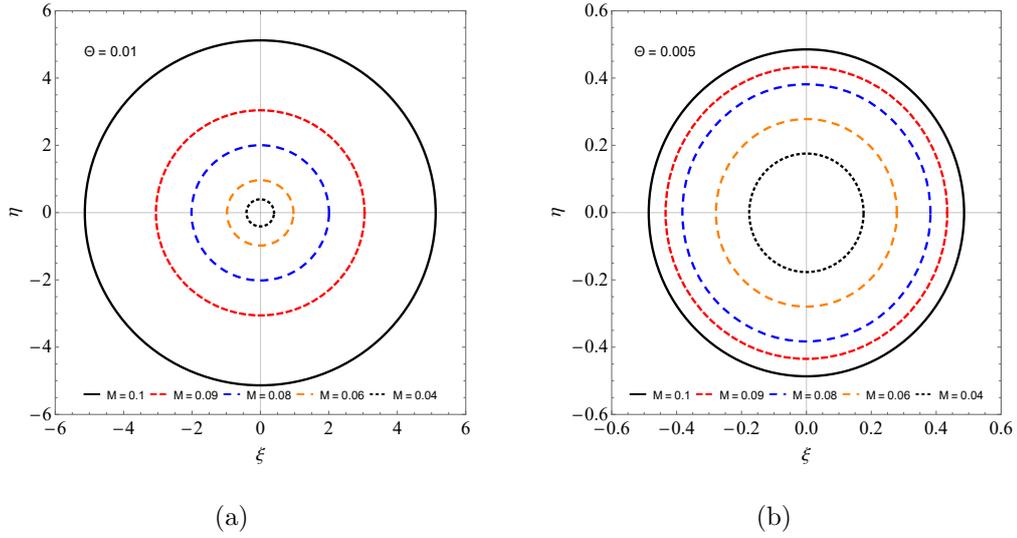


Figura 6.5: Vemos a influência da não-comutatividade na sombra admitindo (a) $\Theta = 0.01$ e $M = 1.0, 0.6, 0.4, 0.2, 0.09$. (b) $\Theta = 0.005$ e $M = 0.1, 0.09, 0.08, 0.06, 0.04$.

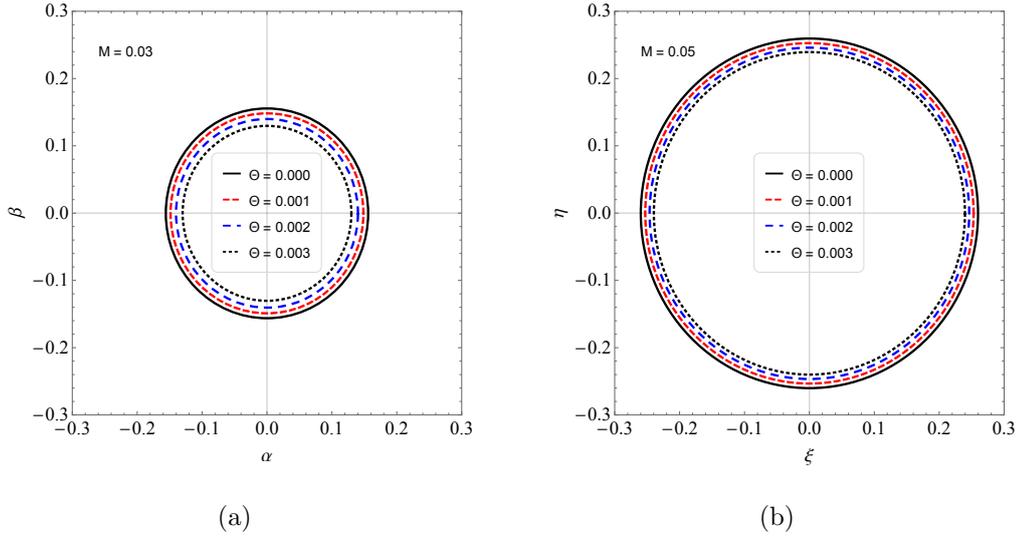


Figura 6.6: Vemos a influência da não-comutatividade na sombra, admitindo os seguintes parâmetros: (a) $M = 0.03$ e $\Theta = 0.000, 0.001, 0.002, 0.003$. (b) $M = 0.05$ e $\Theta = 0.000, 0.001, 0.002, 0.003$.

6.1.3 Raio da sombra e modos quasinomais

Como visto no capítulo anterior o método WKB fornece uma aproximação para obter os modos quasinomais. Em particular obtém-se a seguinte relação, como descrito no Apêndice B.

$$\frac{Q_0}{\sqrt{2(d^2Q_0/dx^2)}} = i \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (6.33)$$

onde a função $Q_0 = \omega^2 - V_0$ e V_0 o potencial efetivo no ponto máximo r_0 . Essa equação é válida para o extremo de Q_0 , ou seja, no ponto r_0 no qual $dQ_0/dx = 0$, sendo que este resultado é válido apenas para espaço tempo assintoticamente planos ou para os que admitem soluções ondulatórias no infinito espacial. Assim como já vimos para o espaço tempo (6.1) a equação radial obtida pode ser escrita em uma equação tipo de Schrödinger usando as coordenadas tortoise, assim encontrando

$$Q = \omega^2 - \frac{f(r)}{r} \left(\frac{df(r)}{dr} + \frac{l(l+1)}{r} \right). \quad (6.34)$$

No limite eikonal ($l \rightarrow \infty$) temos

$$Q \approx \omega^2 - f(r) \frac{l^2}{r^2}. \quad (6.35)$$

Assim no extremo de Q_0 onde $dQ/dr|_{r=r_0} = 0$ usando a relação $dr = f(r)dx$ temos $2f(r_0) = r_0 f'(r_0)$, ou seja, r_0 coincide com a localização da geodésica circular nula $r_0 = r_c$. Isso permite relacionar o raio da sombra com os modos quasinormais usando o limite eikonal ($l \rightarrow \infty$) como feito por Cardoso e colaboradores [104]. Eles mostraram que a parte real dos modos quasinormais para l grande está relacionada com a velocidade angular para a última órbita circular nula Ω_c e a parte imaginária está relacionada com o expoente de Lyapunov λ que determina a escala de tempo instável da órbita

$$\omega_n = \Omega_c l - i(n + 1/2) |\lambda|. \quad (6.36)$$

Assim, para essa análise vamos nos restringir as equações de movimento para um plano equatorial $\vartheta = \pi/2$ onde temos

$$\dot{t} = \frac{E}{f(r)}, \quad \dot{\phi} = \frac{L}{r^2}, \quad r^2 \dot{r} = E^2 r^2 - f(r) L^2, \quad (6.37)$$

e usando as condições para órbita instável temos $L/E = \sqrt{r_c^2/f(r_c)}$ e $2f(r_c) = r_c f'(r_c)$ respectivamente. Sendo a velocidade angular dada por

$$\Omega_c = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} = \sqrt{\frac{r_c^2}{f(r_c)} \frac{f(r_c)}{r_c^2}} = \frac{1}{R_s}. \quad (6.38)$$

Lembrando que os estudos feitos neste capítulo para o espaço-tempo (6.1) o raio da sombra é dado por $R_s^2 = (l + \zeta^2) = r_c^2/f(r_c)$. Isso nos permite ter, olhando para o primeiro termo da equação (6.36), uma relação entre a parte real dos modos quasinormais e o raio de sombra do buraco negro (6.22) dado simplesmente por

$$\Re(\omega_n) = \lim_{l \gg 1} \left(\frac{l}{R_s} \right). \quad (6.39)$$

Embora esta relação seja válida para valores grandes de l , ela não é uma equação geral, sendo que em alguns casos pode não ser válida, como mostrado por Konoplya e Stuchlik para a teoria de Einstein-Lovelock [108]. Na Figura 6.7 usamos o método WKB de sexta ordem descrito e usado no Capítulo 5 para calcular a parte real dos modos quasinormais, considerando diversos valores de l no intervalo de 1 até 900. Os resultados são comparados com o raio da sombra do buraco negro para cada cenário. Veja que para ambos os casos os valores obtidos pelo WKB convergem para as retas que correspondem aos valores dos respectivos raios da sombra, como o esperado (6.7). Para a Figura 6.7 usamos o modo $n = 5$ para o método WKB além de $\alpha = 0.04, \beta = 0.01, 0.02, 0.03$ para o buraco negro com GUP e $\Theta = 0.01, 0.03, 0.06$ para o não-comutativo.

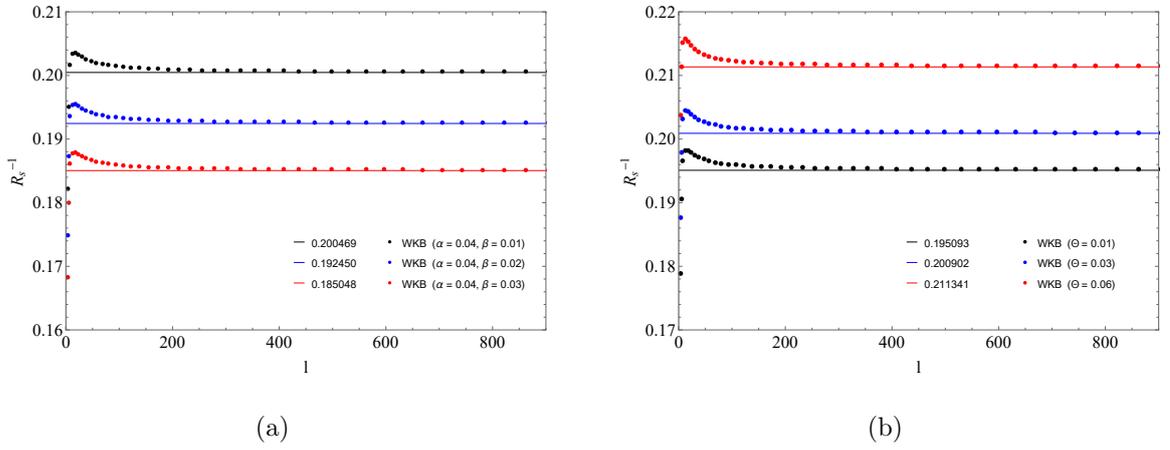


Figura 6.7: As linhas representam os valores do raio da sombra R_s para cada cenário, os pontos representam os valores obtidos pelo método WKB de sexta ordem, assumindo os valores $n = 5$ e $M = 1$.

Capítulo 7

Conclusões

Nesta tese exploramos o espalhamento de ondas escalares por um buraco negro de Schwarzschild não-comutativo, com correções quânticas implementadas pelo GUP e auto-dual no limite de baixa e alta frequência usando métodos analíticos e em frequências arbitrárias por métodos numéricos. Determinamos o deslocamento de fase analiticamente para ambos os casos usando os resultados para obter a seção de choque de espalhamento diferencial e absorção no limite de baixa frequência. Também foi usada a análise geodésica para determinar a seção de choque de absorção em altas frequências. Nos casos, não-comutativo e GUP complementamos com o estudo da seção de choque diferencial de espalhamento obtendo o ângulo de deflexão usando o método clássico e o espalhamento para ângulos próximos de 180 graus calculando o efeito glória. Além dos regimes assintóticos obtivemos os resultados de espalhamento e absorção numericamente, permitindo uma análise em um regime intermediário de frequência. Estudamos os modos quasinormais para os casos não-comutativo e com correções quânticas dadas pelo princípio da incerteza generalizado, aplicando dois métodos diferentes para investigar e comparar os resultados. Usando a aproximação WKB de sexta ordem e o método de fração contínua, usado primeiramente por Leaver para obter os modos quasinormais, descobrimos que há uma pequena diferença entre as frequências quasinormais obtidas por cada método principalmente para pequenos multipolos, obtivemos também o raio sombra do buraco negro e sua relação com os modos quasinormais no limite eikonal.

Para o caso não-comutativo os resultados mostraram que no limite de ângulo pequeno o termo dominante da seção de choque do espalhamento diferencial é modificado pela presença do parâmetro não-comutativo θ . Mostramos que o resultado para a seção

de choque de espalhamento diferencial, bem como a seção de choque de absorção, é diminuído devido aos efeitos da não comutatividade. Além disso, os resultados para a seção de choque de absorção parcial para frequências arbitrárias mostraram que a absorção tem seu valor diminuído à medida que aumentamos o valor do parâmetro não-comutativo reescrito da forma de Θ . Portanto verificamos que o parâmetro simula o efeito de uma “carga efetiva” no modelo. Assim, os resultados obtidos são semelhantes ao processo de espalhamento de uma onda escalar sem massa por um buraco negro de Reissner-Nordström, com a diferença devido ao efeito gerado pela carga neste caso é consequência da não comutatividade espacial. Também identificamos que a raiz quadrada do parâmetro não-comutativo é proporcional ao quadrado da carga elétrica.

Os efeitos da não-comutatividade nos modos quasinormais, esta presente no aumento da parte real da frequência, enquanto a magnitude da parte imaginária começa a crescer e depois diminui. Para a sombra do buraco negro utilizamos os resultados obtidos pelo método WKB para verificar que no regime eikonal, ou seja, l grande a parte real dos modos quasinormais é inversamente proporcional ao raio da sombra. Além disso, mostramos que o raio da sombra é diferente de zero no limite de massa zero, sendo assim proporcional a uma massa mínima. No entanto, para $\theta = 0$, recuperamos o raio da sombra para o caso do buraco negro de Schwarzschild. Também verificamos que o efeito da não comutatividade reduz o raio da sombra.

No estudo de espalhamento e absorção para o buraco negro de Schwarzschild com correções quânticas implementadas pelo GUP mostramos que, ao contrário do buraco negro de Schwarzschild, a seção de choque diferencial de espalhamento e a absorção são diferentes de zero no limite de pequenas massas. Assim, descobrimos que no limite de $M \rightarrow 0$ a seção de choque de absorção apresenta uma contribuição dominante que é inversamente proporcional à massa M , ou seja, $\sigma_{abs}^{bf} \approx \pi(16\beta)^2/M^2$. Além disso, verificamos que o resultado para a seção de choque de absorção no limite de baixa frequência é proporcional a área do horizonte do buraco negro de Schwarzschild com correções quânticas introduzidas pelo GUP, essa relação também foi encontrada para o caso não-comutativo.

No cenário dos modos quasinormais, mostramos graficamente as partes reais e imaginárias no plano complexo para três famílias multipolares $l = 0, 1, 2$. Comparando com o caso de Schwarzschild, as curvas associadas com a parte quadrática do GUP ($\alpha = 0$) deslocam-se para a esquerda com o aumento do parâmetro β , enquanto para a parte

linear ($\beta = 0$), as curvas deslocam-se para a direita, quando aumentamos o parâmetro α . Observe que enquanto no primeiro caso se aproxima de frequências menores, no segundo caso ele se aproxima de frequências maiores. Isso está de fato de acordo com o efeito da contribuição linear e quadrática do GUP no cálculo do raio da sombra. Mostramos que a parte quadrática do GUP tem o efeito de aumentar o raio da sombra quando alteramos o parâmetro β , enquanto que para a parte linear o raio da sombra é reduzido quando alteramos o parâmetro α . Como consequência, esses dois efeitos estão de acordo com a relação da parte real dos modos quasinormais com o inverso do raio de sombra, o que significa que, no presente caso, a conexão entre as geodésicas nulas e os modos quasinormais não é violada como acontece na teoria de Einstein-Lovelok. Mostramos também que mantendo a parte quadrática do GUP o raio da sombra não desaparece mesmo no limite de massa muito pequena do buraco negro.

Finalizamos o estudo da seção de choque de espalhamento diferencial e absorção, analisando o buraco negro auto-dual onde mostramos que a contribuição dominante no limite de ângulo pequeno da seção de choque de espalhamento diferencial é modificada devido aos parâmetros a_0 relacionado a área mínima e a função polimérica P . Novamente temos que o resultado para a seção de choque de absorção é dado pela área do horizonte de eventos do buraco negro no limite de baixa frequência. E temos também, ao contrário do buraco negro de Schwarzschild, a seção de choque de espalhamento diferencial e absorção de um buraco negro auto-dual são diferentes de zero no limite de massa zero. Assim, no limite de $m \rightarrow 0$ a seção de choque de absorção apresenta uma contribuição dominante que é inversamente proporcional ao quadrado da massa, neste caso $\sigma_{abs}^{bf} \approx \pi a_0^2 (1 + P^2) / m^2$. Além disso, verificamos esses resultados resolvendo numericamente a equação radial para frequências arbitrárias. Finalmente, obtivemos que a amplitude da seção de absorção parcial do buraco negro auto-dual aumenta à medida que aumentamos os valores do parâmetro P para o modo $l = 0$, enquanto que para os demais multipolos a amplitude é reduzida com o aumento de P . No entanto, mostramos um aumento na amplitude quando aumentamos P no limite de baixa frequência e uma amplitude reduzida no limite de alta frequência.

Como perspectivas futuras, podemos explorar o estudo de espalhamento tanto analítico quanto numérico em diversos cenários, bem como a análise de instabilidade de buracos negros obtendo os modos quasinormais, por exemplo, considerando a evolução de

outros campos, como no campo eletromagnético. O estudo da sombra pode ser estendido a correções quânticas para buracos negros rotativos, analisando a influência das correções e da rotação no comportamento da sombra.

Apêndice A

Ângulo de deflexão semiclássico

Neste apêndice detalhamos as etapas para os cálculos do ângulo de deflexão e conseqüentemente a seção espalhamento diferencial semiclássico.

A.1 Buraco negro não-comutativo

Vamos começar escrevendo as equações da órbita geodésicas descritas no Capítulo 2 em termos de r da seguinte forma,

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{8M}{r^4} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \right)^{-1/2}. \quad (\text{A.1})$$

Primeiramente vamos calcular o ângulo total defletido pelo feixe de luz integrando a equação acima. Uma forma de integrar essa equação analiticamente é tomar o limite $M/r \ll 1$, antes de fazer essa expansão é interessante assumir algumas mudanças de variáveis da seguinte forma

$$y = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{M}{r} + \frac{(\tilde{\theta} - 1) M^2}{2 r^2} \right), \quad (\text{A.2})$$

$$y^2 = \frac{1}{r^2} \left[\left(1 - \frac{M}{r} \right)^2 + \left(1 - \frac{M}{r} \right) \frac{(\tilde{\theta} - 1) M^2}{r^2} + \frac{(\tilde{\theta} - 1)^2 M^4}{4 r^4} \right], \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{dy}{dr} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{3(\tilde{\theta} - 1) M^2}{2r^4}, \quad (\text{A.4})$$

onde definimos $\tilde{\theta} = \frac{8}{M} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}}$, assim a equação (A.1) é reescrita nessa nova variável como

$$\frac{d\phi}{dy} = \left(-1 + \frac{2M}{r} - \frac{3(\tilde{\theta} - 1) M^2}{2 r^2} \right)^{-1} \left[\frac{1}{b^2} - y^2 + \frac{1}{r^2} \left(-\frac{M^3(\tilde{\theta} - 1)}{r^3} + \frac{(\tilde{\theta} - 1)^2 M^2}{4r^2} \right) \right]^{-1/2}. \quad (\text{A.5})$$

Agora expandindo a equação acima no limite de $M/r \ll 1$ e organizando os termos, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dy} = \frac{-b}{\sqrt{1-y^2b^2}} & \left\{ 1 + \frac{2M}{r} \left(1 - \frac{M}{r} + \frac{(\tilde{\theta}-1)M^2}{2r^2} \right) + \frac{(15-3\tilde{\theta})M^2}{2r^2} \left[\left(1 - \frac{M}{r} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(1 - \frac{M}{r} \right) \frac{(\tilde{\theta}-1)M^2}{r^2} + \frac{(\tilde{\theta}-1)^2M^4}{4r^4} \right] \right\} + \frac{10(3-\tilde{\theta})bM^3}{\sqrt{1-y^2b^2}r^3} - \frac{5(29-24\tilde{\theta}+3\tilde{\theta}^2)bM^4}{\sqrt{1-y^2b^2}r^4} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

onde o sinal indica o sentido dos feixes defletidos. Veja que da forma como a expansão está organizada podemos identificar o y no primeiro parênteses que multiplica M/r e um y^2 no colchetes que multiplica M^2/r^2 , desta forma se desprezarmos os termos acima de M^2/r^2 temos apenas

$$\frac{d\phi}{dy} = \frac{-b}{\sqrt{1-y^2b^2}} \left[1 + 2My + \frac{(15-3\tilde{\theta})M^2y^2}{2} \right]. \quad (\text{A.7})$$

O ângulo de deflexão é dado por $\chi = \Delta\phi - \pi$, onde

$$\Delta\phi = 2 \int_0^{y_0} \frac{-b}{\sqrt{1-y^2b^2}} \left[1 + 2My + \frac{(15-3\tilde{\theta})M^2y^2}{2} \right] dy, \quad (\text{A.8})$$

$$\Delta\phi = \frac{4M}{b} - \frac{M\sqrt{1-b^2y_0^2}(8-3My_0(\tilde{\theta}-5))}{2b} + \frac{4b^2+3M^2(5-\tilde{\theta})\arcsin(by_0)}{2b^2}. \quad (\text{A.9})$$

Sabendo que no limite $M/r \ll 1$ temos que $y_0 \rightarrow 1/b$ o resultado fica da forma

$$\Delta\phi = \frac{4M}{b} + \pi + \frac{3\pi(5-\tilde{\theta})M^2}{4b^2}. \quad (\text{A.10})$$

Por fim o ângulo de deflexão em termos de $\sqrt{\theta}$ é dado por

$$\chi = \frac{4M}{b} + \frac{15\pi M^2}{4b^2} - \frac{6\pi M}{b^2} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}}. \quad (\text{A.11})$$

Com a relação do ângulo de deflexão e o parâmetro de impacto, podemos combinar esse resultado com a equação da seção de espalhamento diferencial clássica

$$\frac{d\sigma_{clas}}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\vartheta} \left| \frac{db}{d\vartheta} \right|, \quad (\text{A.12})$$

para obter o seguinte resultado no limite de ϑ pequeno

$$\frac{d\sigma_{clas}}{d\Omega} \approx \frac{16M^2}{\vartheta^4} + \frac{15\pi M^2}{4\vartheta^3} - \frac{6\pi M}{\vartheta^3} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}}. \quad (\text{A.13})$$

A.2 Buraco negro com GUP

Nesta seção do apêndice vamos repetir o procedimento para calcular a seção de espalhamento clássica agora para o caso do buraco negro com correções quânticas. Como vimos no Capítulo 3

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (\text{A.14})$$

onde $M_{gup} = M \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right)$. Para este caso vamos fazer a seguinte mudança de variável

$$y = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{M_{gup}}{r} \right), \quad y^2 = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M_{gup}}{r} + \frac{M_{gup}^2}{r^2} \right), \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{dy}{dr} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2M_{gup}}{r^3}. \quad (\text{A.16})$$

A equação é reescrita da forma

$$\frac{d\phi}{dy} = \left(-1 + \frac{2M_{gup}}{r} \right)^{-1} \left(\frac{1}{b^2} - y^2 + \frac{M_{gup}^2}{r^4} \right). \quad (\text{A.17})$$

Como feito na seção anterior vamos expandir agora para $M_{gup}/r \ll 1$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dy} &= \frac{-b}{\sqrt{1-y^2b^2}} \left(1 + \frac{2M_{gup}}{r} + \frac{4M_{gup}}{r^2} + \frac{8M_{gup}^3}{r^3} \right) + \dots + \mathcal{O} \left(\frac{M_{gup}^4}{r^4} \right) \\ \frac{d\phi}{dy} &= \frac{-b}{\sqrt{1-y^2b^2}} \left[1 + \frac{2M_{gup}}{r} \left(1 - \frac{M_{gup}}{r} \right) \right] - \frac{6bM_{gup}^2}{\sqrt{1-y^2b^2}r^2} + \dots + \mathcal{O} \left(\frac{M_{gup}^3}{r^3} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

identificando o y dentro do colchetes e considerando apenas os primeiros termos

$$\frac{d\phi}{dy} = \frac{-b}{\sqrt{1-y^2b^2}} (1 + 2M_{gup}y). \quad (\text{A.19})$$

Agora podemos integrar a equação acima facilmente para calcular o ângulo de deflexão

$$\chi = 2 \int_0^{y_0} \frac{b}{\sqrt{1-y^2b^2}} (1 + 2M_{gup}y) dy - \pi, \quad (\text{A.20})$$

no limite $M/r \ll 1$ onde $y_0 \rightarrow 1/b$ temos,

$$\chi = \frac{4M}{b} \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right). \quad (\text{A.21})$$

Assim, o resultado clássico para seção de espalhamento diferencial no limite de ϑ pequeno é dado por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{16M^2}{\vartheta^4} \left(1 - \frac{2\alpha}{M} + \frac{4\beta}{M^2} \right). \quad (\text{A.22})$$

Apêndice B

Análise da aproximação WKB

Aqui faremos uma revisão mais detalhada do método WKB para o cálculo dos modos quasinormais, abordando a análise inicial feita por Schutz [87] sem as correções que foram introduzidas posteriormente [88, 109, 89]. Como já foi discutido no Capítulo 5 a motivação para utilizar esse método vem da semelhança entre as equações para teoria de perturbações para buracos negros e a teoria unidimensional da equação de Schrödinger. Em ambos os casos a equação central tem a seguinte forma:

$$\epsilon^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} + Q(x) \psi(x) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Temos na equação acima um parâmetro de perturbação ϵ que será importante mais à frente. Lembrando que para o caso do buraco negro, ψ representa a parte radial da variável perturbada, assumindo uma dependência temporal $e^{-i\omega t}$ e uma dependência angular apropriada ao buraco negro em estudo. A coordenada x está relacionada a coordenada tartaruga, com o intervalo de $-\infty$ no horizonte de eventos e $+\infty$ no infinito espacial, a função $Q(x)$ é constante em $x = \pm\infty$ e tem um máximo em $x = x_0$.

A expansão assintótica da aproximação WKB para os infinitos $\pm\infty$ tem a seguinte forma geral $\psi \sim e^{s(x)/\epsilon}$ onde $s(x)$ é uma expansão em série de potência em termos do parâmetro de perturbação ϵ da forma

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n s_n(x), \quad (\text{B.2})$$

aplicando em (B.1),

$$\epsilon^2 \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{n-1} s'_n(x) \right)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{n-1} s''_n(x) \right] + Q(x) = 0, \quad (\text{B.3})$$

lembrando que as aspas representam as derivadas primeira e segunda ordem, com relação a x . Abrindo os primeiros termos do somatório e organizando em termos de ϵ da seguinte forma,

$$(s'_0(x))^2 + \epsilon [2s'_0(x)s'_1(x) + s''_0(x)] = -Q(x). \quad (\text{B.4})$$

Assim, a igualdade na equação (B.4) é satisfeita tal que:

$$(s'_0(x))^2 = -Q(x), \quad 2s'_0(x)s'_1(x) + s''_0(x) = 0. \quad (\text{B.5})$$

As soluções para as duas equações acima são definidas da seguinte forma. A equação para s_0 é chamada de equação eikonal,

$$s_0(x) = \pm i \int_a^x \sqrt{Q(\eta)} d\eta, \quad (\text{B.6})$$

e a equação para s_1 é chamada de equação transporte,

$$s_1(x) = -\frac{1}{4} \log Q(x). \quad (\text{B.7})$$

Combinado (B.6) e (B.7) temos um par de soluções aproximadas da equação (B.1) um para cada sinal de $s_0(x)$

$$\begin{aligned} \psi &\sim \exp \left[\frac{s_0(x)}{\epsilon} + s_1(x) \right], \\ \psi &\sim \mathcal{C}_1 Q^{-1/4} \exp \left[\frac{i}{\epsilon} \int_a^x \sqrt{Q(\eta)} d\eta \right] + \mathcal{C}_2 Q^{-1/4} \exp \left[\frac{-i}{\epsilon} \int_a^x \sqrt{Q(\eta)} d\eta \right], \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

onde \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são constantes a serem determinadas pelas condições de contorno e a é um ponto arbitrário de integração. Esta expressão é a primeira aproximação WKB para a solução da equação radial. Difere da solução exata pelos termos de ordem ϵ na região onde $Q(x) \neq 0$. Podemos dizer ainda que os sinais (\pm) em (B.6) correspondem as ondas de entrada e saída em qualquer um dos infinitos. Assim quando $x \rightarrow \infty$ $Q(x) \rightarrow \omega^2$ é a ordem dominante, tal que $s_0(x) \rightarrow +i\omega x$ para a onda que saem para o infinito e $s_0(x) \rightarrow -i\omega x$ para a onda que vem do infinito (região I) Fig B.1. De forma semelhante temos no horizonte $x \rightarrow -\infty$, $s_0(x) \rightarrow +i\omega x$ para a onda que vem do horizonte e $s_0(x) \rightarrow -i\omega x$ para a onda que se estende até o horizonte de eventos (região III) Fig B.1. Podemos assim descrever a solução geral da seguinte forma:

$$\psi \sim Z_{ent}^I \psi_-^I + Z_{sai}^I \psi_+^I, \quad \text{na região I,} \quad (\text{B.9})$$

$$\psi \sim Z_{ent}^{III} \psi_+^{III} + Z_{sai}^{III} \psi_-^{III}, \quad \text{na região III.} \quad (\text{B.10})$$

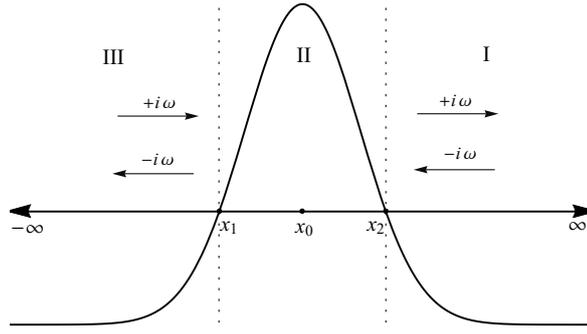


Figura B.1: Gráfico da função $Q(x)$ onde as três regiões estão separadas pelos pontos x_1 e x_2 .

onde (*ent*) e (*sai*) esta relacionado as ondas de entrada e saída respectivamente. Agora temos que determinar uma formula que conecte as amplitudes próximas de $+\infty$ com aquelas próximas de $-\infty$, em outras palavras determinar os coeficientes da relação linear dada por

$$\begin{pmatrix} Z_{sai}^{III} \\ Z_{ent}^{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{sai}^I \\ Z_{ent}^I \end{pmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Para isso, consideramos a solução na região II. A aproximação WKB é valida exceto próximo a “pontos de retorno clássicos” pontos onde $Q(x) = 0$, no entanto é possível conectar as soluções WKB que são validas nas proximidades dos pontos de retorno usando a junções assintóticas. Se os pontos de retorno estão próximos, ou seja $-Q(x)_{max} \ll Q(\pm\infty)$, então a solução na região II pode ser bem aproximada por uma série de Taylor sobre o ponto x_0

$$Q(x) = Q_0 + \frac{Q_0''(x - x_0)^2}{2} + \frac{Q_0'''(x - x_0)^3}{6} + \dots + \mathcal{O}(x - x_0)^4, \quad (\text{B.12})$$

onde x_0 é o ponto máximo para a função $Q(x)$, além disso temos que $Q_0 = Q(x_0)$ e aqui ($''$) e ($'''$) representa a segunda e terceira derivada com respeito a x no ponto $x = x_0$. Se assumimos que $z \equiv x - x_0$ temos e substituído a serie de Q truncando até o segundo termo na equação (B.1) temos

$$\epsilon^2 \frac{d^2 \psi}{dz^2} + \left(Q_0 + \frac{Q_0'' z^2}{2} \right) \psi = 0, \quad (\text{B.13})$$

$$\epsilon^2 \frac{d^2 \psi}{dz^2} + \kappa (-z_0^2 + z^2) \psi = 0, \quad (\text{B.14})$$

onde definimos que $\kappa = \frac{Q_0''}{2}$ e $z_0 = \sqrt{-\frac{2Q_0}{Q_0''}}$. Uma forma de solucionar a equação (B.14) é redefinindo novamente uma nova variável, se fizemos $t \equiv (4\kappa)^{1/4} e^{i\pi/4} z$ organizamos a equação da forma,

$$\begin{aligned}
2\sqrt{\kappa}e^{i\pi/2}\frac{d^2\psi}{dt^2} + \kappa\left(\frac{t^2e^{-i\pi/2}}{2\sqrt{\kappa}} - z_0^2\right)\psi &= 0, \\
\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(-\frac{t^2}{4} + \frac{i\sqrt{\kappa}z_0^2}{2}\right)\psi &= 0, \\
\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{t^2}{4}\right)\psi &= 0,
\end{aligned} \tag{B.15}$$

onde $\nu + 1/2 = i\sqrt{\kappa}z_0^2/2 = -iQ_0/\sqrt{2Q_0''}$. Assim a solução geral para a equação (B.15) pode ser escrita em termos de funções parabólicas cilíndricas $D_\nu(t)$

$$\psi = AD_\nu(t) + BD_{-\nu-1}(t), \tag{B.16}$$

obtendo assim uma solução assintótica para $|t|$ muito grande [110]

$$\begin{aligned}
\psi &\approx Be^{-3i\pi(\nu+1)/4}(4\kappa)^{-(\nu+1)/4}(x-x_0)^{-(\nu+1)}e^{i\sqrt{\kappa}(x-x_0)^2/2} \\
&+ \left[A + \frac{B\sqrt{2\pi}e^{-i\nu\pi/2}}{\Gamma(\nu+1)}\right]e^{i\pi\nu/2}(4\kappa)^{\nu/4}(x-x_0)^\nu e^{-i\sqrt{\kappa}(x-x_0)^2/2}, \quad x \gg x_2
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
\psi &\approx Ae^{-3i\pi\nu/4}(4\kappa)^{\nu/4}(x-x_0)^\nu e^{-i\sqrt{\kappa}(x-x_0)^2/2} \\
&+ \left[B - \frac{iA\sqrt{2\pi}e^{-i\nu\pi/2}}{\Gamma(-\nu)}\right]e^{i\pi(\nu+1)/4}(4\kappa)^{-(\nu+1)/4}(x-x_0)^{-(\nu+1)}e^{i\sqrt{\kappa}(x-x_0)^2/2}, \quad x \ll x_1
\end{aligned} \tag{B.18}$$

onde $\Gamma(\nu)$ é uma função gama. Igualando os coeficientes das funções correspondentes, temos as equações:

$$\begin{pmatrix} Z_{sai}^{III} \\ Z_{ent}^{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\pi\nu} & \frac{iR^2e^{i\pi\nu}\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\nu+1)} \\ \frac{R^{-2}\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} & -e^{i\pi\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{sai}^I \\ Z_{ent}^I \end{pmatrix}, \tag{B.19}$$

onde $R = (\nu+1)^{(\nu+1/2)/2}e^{-(\nu+1/2)/2}$. Temos em (B.19) a matriz que conecta as amplitudes para as soluções WKB sendo que essa matriz conserva sua forma mesmo expandindo para ordens maiores o método WKB, embora o valor de R seja diferente porém dependente apenas de ν . O resultado é aplicado ao caso do tunelamento na mecânica quântica próximo ao pico de uma barreira potencial, bem como as oscilações de buracos negros. Note que se $Q(x)$ é real como na mecânica quântica onde o potencial e energia são reais, temos que $\nu + 1/2$ é imaginário, as consequências disso são as seguinte relações,

$$(e^{i\pi\nu})^* = -e^{i\pi\nu}, \quad R^* = e^{-i(\nu+1/2)/2}R^{-1}. \tag{B.20}$$

Assim, os coeficientes da matriz M (B.11) se relacionam da seguinte forma:

$$M_{11}^* = M_{22}, \quad M_{12}^* = M_{21}, \quad |M_{21}|^2 - |M_{11}|^2 = 1. \tag{B.21}$$

Se imaginarmos um tunelamento para uma barreira potencial da região I para a região III, considerando que para um buraco negro não temos ondas “refletidas do horizonte” de modo que $Z_{ent}^{III} = 0$ de (B.11) temos

$$\begin{aligned} Z_{sai}^{III} &= M_{11}Z_{sai}^I + M_{12}Z_{ent}^I, \\ 0 &= M_{21}Z_{sai}^I + M_{22}Z_{ent}^I, \end{aligned}$$

onde temos que $Z_{ent}^I/Z_{sai}^I = -M_{21}/M_{22}$ e portanto usando as relações (B.21) temos $Z_{sai}^{III}/Z_{ent}^I = 1/M_{21}$, desta forma podemos encontrar os coeficientes de transmissão $T \equiv |Z_{sai}^{III}|^2/|Z_{ent}^I|^2$ e reflexão $\mathcal{R} \equiv 1 - T$ em termos de (B.20)

$$T = (1 + e^{2i\pi(\nu+1/2)})^{-1}, \quad (\text{B.22})$$

$$\mathcal{R} = (1 + e^{-2i\pi(\nu+1/2)})^{-1}. \quad (\text{B.23})$$

Com estes resultados possibilita o estudo de espalhamento pela aproximação WKB. A equação (B.19) podem ser usadas para determinar as frequências quasinormais, aplicando as condições de contorno apropriadas, tal que não haja ondas vindo do infinito $Z_{ent}^I = 0$. Assim, para que essas condições sejam satisfeitas temos que $M_{21} = 0$, ou seja, $\frac{R^2\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)}$ na matriz (B.19) tem que ser igual a zero, isto é possível se $\Gamma(-\nu)$ seja muito grande, por sua vez para que isso ocorra ν deve ser inteiro positivo. Portanto, sendo $Q(x)$ em geral dependente da frequência, $\nu + 1/2 = -iQ_0/\sqrt{2Q_0''}$ é escrito da foram

$$n + \frac{1}{2} = \frac{-i(\omega_n^2 - V_0)}{\sqrt{-2V_0''}}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (\text{B.24})$$

Esta é a forma mais simples para o estudo dos modos quasinormais usando a aproximação WKB, melhorias na precisão dos resultados obtidos podem ser feitas considerando mais termos na serie de Taylor (B.12) obtendo termos de correção que são acrescentados a equação (B.24), como por exemplo

$$\frac{iQ_0}{\sqrt{2Q_0''}} - \Lambda(n) - \Omega(n) = n + \frac{1}{2}, \quad (\text{B.25})$$

onde

$$\begin{aligned}
\Omega(n) &= \frac{n+1/2}{2Q_0''} \left[\frac{5}{6912} \left(\frac{Q_0'''}{Q_0''} \right)^4 (77 + 188v^2) - \frac{1}{385} \left(\frac{(Q_0''')^2 Q_0^{(4)}}{(Q_0'')^3} \right) (51 + 100v^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2304} \left(\frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \right)^2 (67 + 68v^2) + \frac{1}{288} \left(\frac{(Q_0''')^2 Q_0^{(5)}}{(Q_0'')^2} \right) (19 + 28v^2) - \frac{1}{288} \left(\frac{Q_0^{(6)}}{Q_0''} \right) (5 + 4v^2) \right], \\
\Lambda(n) &= \frac{1}{\sqrt{2Q_0''}} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \right) \left(\frac{1}{4} + v^2 \right) - \frac{1}{288} \left(\frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \right)^2 (7 + 60v^2) \right].
\end{aligned} \tag{B.26}$$

(B.27)

Aqui da mesma forma que as aspas os subscritos entre parênteses também definem a ordem da derivada em Q no ponto x_0 e $v = n + 1/2$. Nesta tese usamos as correções até sexta ordem que podem ser encontradas no apêndice do artigo do Konoplya [89].

Apêndice C

Equação esférica

Neste apêndice iremos mostrar que a equação diferencial para o caso não-comutativo (5.45) pode ser escrita como uma equação de onda esférica, as soluções para esse tipo de equação são conectadas por uma relação de recorrência de três termos. procedimento poder ser aplicado também para o caso GUP. Assim, seguindo os procedimentos feitos por Leaver para os casos de Schwarzschild e Kerr [111]. A equação de onda esférica generalizada tem a seguinte forma

$$u(u - u_0) \frac{d^2 y}{du^2} + (D_1 + D_2 u) \frac{dy}{du} + [\bar{\omega}^2 u(u - u_0) - 2\eta \bar{\omega}(u - u_0) + D_3] y = 0, \quad (\text{C.1})$$

onde aqui D_1 , D_2 , D_3 , $\bar{\omega}$ e u_0 são constantes. Reescrevendo a equação radial para um buraco negro não-comutativo (5.45), da forma

$$(r - r_-)(r - r_+) \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{(r(r_+ + r_-) - 2r_- r_+)}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left[\frac{\omega^2 r^4}{(r - r_-)(r - r_+)} - \frac{(r(r_+ + r_-) - 2r_- r_+)}{r^2} - l(l + 1) \right] R(r) = 0, \quad (\text{C.2})$$

Assim, o objetivo é mostrar que podemos transformar a equação (C.2) da forma (C.1). Vamos começar fazendo algumas mudanças, como por simplicidade escrevemos os raios do horizonte (5.42) e (5.43) da forma $r_{\pm} = (1 \pm \varrho_{\theta})/2$ onde $\varrho_{\theta} = \sqrt{1 - 16\sqrt{\theta/\pi}}$ considerando $2M = 1$. Inicialmente temos que encontrar uma transformação adequada. Vamos usar a seguinte solução

$$R(r) = r(r - r_-)^{\bar{\alpha}}(r - r_+)^{\bar{\beta}} y(r - r_-), \quad (\text{C.3})$$

onde $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são parâmetros a serem determinados. Além disso vamos assumir que $u = r - r_-$ onde $u \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow r_-$ e $u \rightarrow \varrho_{\theta}$ quando $r \rightarrow r_+$. Fazendo essas alterações temos

que a equação (C.2) pode ser escrita da forma

$$u(u - \varrho_\theta) \frac{d^2 y}{du^2} + [\varrho_\theta(1 + \bar{\alpha}) + 2(1 + \bar{\alpha} + \bar{\beta})u] \frac{dy}{du} + U(u)y = 0, \quad (\text{C.4})$$

onde $U(u) = \frac{\omega^2(-1 + \varrho_\theta - 2u)^4}{16(u - \varrho_\theta)u} + \frac{\varrho_\theta \bar{\alpha}^2}{u} + \frac{\bar{\beta}^2 u}{(u - \varrho_\theta)} + \bar{\alpha} + 2\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta} + 2\bar{\alpha} - l(l+1)$. Podemos organizar $U(u)$ da seguinte forma

$$U(u) = - \frac{[(\varrho_\theta - 1)^4 \omega^2 + 16\varrho_\theta^2 \bar{\alpha}^2]}{16\varrho_\theta u} + \frac{[(\varrho_\theta + 1)^4 \omega^2 + 16\varrho_\theta^2 \bar{\beta}^2] u}{16\varrho_\theta^2 (u - \varrho_\theta)} + \frac{(\varrho_\theta - 1)^3 (1 + 7\varrho_\theta) \omega^2}{16\varrho_\theta^2} \\ + (2 - \varrho_\theta)u\omega^2 + u^2\omega^2 + \bar{\alpha} + 2\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta} + 2\bar{\alpha} - l(l+1), \quad (\text{C.5})$$

para que a equação (C.4) tenha a forma (C.1) $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ tem que ser tal que satisfaça $(\varrho_\theta - 1)^4 \omega^2 + 16\varrho_\theta^2 \bar{\alpha}^2 = 0$ e $(1 + \varrho_\theta)^4 \omega^2 + 16\varrho_\theta^2 \bar{\beta}^2 = 0$, resolvendo essas igualdades temos

$$\bar{\alpha} = \pm \frac{i(\varrho_\theta - 1)^2 \omega}{4\varrho_\theta}, \quad \bar{\beta} = \pm \frac{i(\varrho_\theta + 1)^2 \omega}{4\varrho_\theta}. \quad (\text{C.6})$$

Lembrando que $r_+ = (1 + \varrho_\theta)/2$ e $r_- = (1 - \varrho_\theta)/2$, assim, substituindo os valores de $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ na (C.4)

$$u(u - \varrho_\theta) \frac{d^2 y(u)}{du^2} + \left[-\varrho_\theta + 2ir_-^2 \omega + \frac{2}{\varrho_\theta} (\varrho_\theta - i\omega(r_-^2 + r_+^2))u \right] \frac{dy(u)}{du} + \left[\omega^2(u - \varrho_\theta)u \right. \\ \left. + 2\omega^2(u - \varrho_\theta) + \frac{\omega^2}{4\varrho_\theta} (-1 + 4\varrho_\theta + 4\varrho_\theta^2 + \varrho_\theta^4) - \frac{i\omega}{2\varrho_\theta} (\varrho_\theta^2 + 1) - l(l+1) \right] y(u) = 0. \quad (\text{C.7})$$

Assim, mostramos que a equação radial (C.2) pode ser transformada em uma equação esferoïdal generalizada, onde comparando com (C.1) temos:

$$\bar{\omega} = \omega, \quad \eta = -\omega, \quad D_1 = -\varrho_\theta + 2ir_-^2 \omega, \quad D_2 = \frac{2}{\varrho_\theta} (\varrho_\theta - i\omega(r_-^2 + r_+^2)) \quad \text{e} \\ D_3 = \frac{\omega^2}{4\varrho_\theta^2} (-1 + 4\varrho_\theta^2 + 4\varrho_\theta^3 + \varrho_\theta^4) - \frac{i\omega}{2\varrho_\theta} (\varrho_\theta^2 + 1) - l(l+1). \quad (\text{C.8})$$

Dessa forma usando a solução de Jeffe para $y(u)$ como em [111] (pg 12) para uma equa o de onda esferoïdal generalizada temos

$$y(u) = e^{i\omega u} u^{-1+i\omega(r_-^2+r_+^2)/\varrho_\theta+i\omega} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{u - \varrho_\theta}{u} \right)^k. \quad (\text{C.9})$$

A soluço (C.3) pode ser reescrita, usando os valores de $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ e a soluço (C.9) da forma

$$R(r) = \frac{r}{r - r_-} (r - r_-)^{i\omega} \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right)^{\frac{-i\omega r_+^2}{\varrho_\theta}} e^{i\omega(r-r_-)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right)^k, \quad (\text{C.10})$$

temos então, a soluço (5.53) do Capítulo 5, lembrando que aqui $r_+ + r_- = 1$ e $r_+ - r_- = \varrho_\theta$. Temos apenas uma pequena diferença, a presença de $e^{-i\omega r_-}$ que é uma constante e

não vai influenciar na relação de recorrência. Assim, da mesma forma que temos três coeficientes em (41)[111], obtemos três coeficientes para a relação de recorrência usando (C.9) em (C.7) temos

$$A_k = (1+k) [\varrho_\theta(1+k) - 2ir_+^2\omega] / \varrho_\theta, \quad (\text{C.11})$$

$$B_k = -r_+ [1+l(l+1) + 2k(k+1) - 8r_+^2 - 4i\omega r_+ - 8i\omega k r_+] / \varrho_\theta \quad (\text{C.12})$$

$$+ r_- [1+l(l+1) + 2k(k+1) - 2i\omega r_+ - 4i\omega k r_+] / \varrho_\theta,$$

$$C_k = (k - 2i\omega) (\varrho_\theta k - 2i\omega r_+^2) / \varrho_\theta. \quad (\text{C.13})$$

Apêndice D

Método computacional

Para calcularmos os coeficientes de reflexão e posteriormente a absorção usamos o software Mathematica, com a seguinte abordagem:

- 1 O primeiro passo é estabelecer as condições iniciais, para isso admitimos uma expansão em série no horizonte da forma,

$$R(r) = e^{-i\omega x} \sum_{k=0}^{\infty} y_k (r - r_h)^k, \quad (\text{D.1})$$

onde os coeficientes y_k podem ser encontrados analiticamente, isso pode ser feito com um pacote de álgebra simbólica no Mathematica e utilizando o método de Frobenius na equação radial;

- 2 Seguindo determina-se numericamente a solução da equação radial no nosso caso com o comando NDSolve usando um esquema de Runge-Kutta de quarta ordem, com as seguintes condições iniciais $R(r_{min})$ e a sua derivada em termos de r $R'(r_{min})$ onde r_{min} é o valor inicial de r , ou seja, o valor bem próximo do valor numérico do horizonte de eventos ;
- 3 Nesta etapa obtém-se os coeficiente A_{ent} e A_{sai} que esta relacionado as ondas de entrada e saída, comparando o resultado numérico com as seguintes expansões analíticas no infinito

$$R(r) \sim A_{sai} e^{i\omega x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{r^k} + A_{ent} e^{-i\omega x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k^*}{r^k}, \quad (\text{D.2})$$

$$R^{(ent)}(r) = e^{-i\omega x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{r^k}, \quad R^{(sai)}(r) = e^{i\omega x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k^*}{r^k}, \quad (\text{D.3})$$

onde os coeficientes z_k e z_k^* podem ser encontrados da mesma forma do item 1. Os valores de A_{ent} e A_{sai} podem ser encontrados resolvendo o seguinte sistema para r muito distante do raio do horizonte,

$$\begin{cases} A_{ent}R^{(ent)}(r_{max}) + A_{sai}R^{(sai)}(r_{max}) = H(r_{max}), \\ A_{ent}R'^{(ent)}(r_{max}) + A_{sai}R'^{(sai)}(r_{max}) = H'(r_{max}), \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

aqui os valores $R(r_{max})$ e $R'(r_{max})$ resultam da interação numérica para r máximo;

- 4 Com os valores de A_{ent} e A_{sai} calculados, podemos encontrar o deslocamento de fase e posteriormente a seção de choque de absorção

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi}{\omega} \sum_{l=0} (2l+1) (1 - |e^{2i\delta_l}|^2), \quad \text{onde} \quad e^{2i\delta_l} = (-1)^{l+1} \frac{A_{sai}}{A_{ent}}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. In: *Euclidean quantum gravity*. World Scientific, 1975. p. 167–188.
- [2] GREEN, M. B.; SCHWARZ, J. H.; WITTEN, E. *Superstring theory: volume 2, loop amplitudes, anomalies and phenomenology*. Cambridge university press, 2012.
- [3] GOGBERASHVILI, M. Hierarchy problem in the shell-universe model. *International Journal of Modern Physics D*, v. 11, n. 10, p. 1635–1638, 2002.
- [4] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical review letters*, v. 83, n. 17, p. 3370, 1999.
- [5] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 4690–4693, Dec 1999.
- [6] HARRIS, C. M.; KANTI, P. Hawking radiation from a $(4+n)$ -dimensional black hole: Exact results for the schwarzschild phase. *Journal of High Energy Physics*, v. 2003, n. 10, p. 014, 2003.
- [7] ROVELLI, C. *Quantum gravity*. Cambridge university press, 2004.
- [8] SMOLIN, L. Loop quantum gravity and planck scale phenomenology. In: *Planck Scale Effects in Astrophysics and Cosmology*. Springer, 2005. p. 363–408.
- [9] BIANCHI, E.; MODESTO, L.; ROVELLI, C.; SPEZIALE, S. Graviton propagator in loop quantum gravity. *arXiv preprint gr-qc/0604044*, 2006.
- [10] MODESTO, L. Fractal structure of loop quantum gravity. *arXiv preprint arXiv:0812.2214*, 2008.

- [11] THIEMANN, T. Lectures on loop quantum gravity. In: *Quantum gravity*. Springer, 2003. p. 41–135.
- [12] ASHTEKAR, A. New variables for classical and quantum gravity. *Physical review letters*, v. 57, n. 18, p. 2244, 1986.
- [13] VYAS, R. P.; JOSHI, M. J. The barbero immirzi parameter: an enigmatic parameter of loop quantum gravity. *arXiv preprint arXiv:2206.00458*, 2022.
- [14] NICOLINI, P. Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: a review. *International Journal of Modern Physics A*, Singapore, v. 24, n. 07, p. 1229–1308, 2009.
- [15] GROENEWOLD, H. J. On the principles of elementary quantum mechanics. In: *On the principles of elementary quantum mechanics*. Springer, 1946. p. 1–56.
- [16] MOYAL, J. E. Quantum mechanics as a statistical theory. In: . c1949. v. 45. p. 99–124.
- [17] KEMPF, A. Non-pointlike particles in harmonic oscillators. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 30, n. 6, p. 2093, 1997.
- [18] MAGUEIJO, J.; SMOLIN, L. Generalized lorentz invariance with an invariant energy scale. *Physical Review D*, v. 67, n. 4, p. 044017, 2003.
- [19] DAS, S.; VAGENAS, E. C. Phenomenological implications of the generalized uncertainty principle. *Canadian Journal of Physics*, v. 87, n. 3, p. 233–240, 2009.
- [20] SPRENGER, M.; NICOLINI, P.; BLEICHER, M. Physics on the smallest scales: an introduction to minimal length phenomenology. *European Journal of Physics*, Bristol, v. 33, n. 4, p. 853, 2012.
- [21] KEMPF, A.; MANGANO, G.; MANN, R. B. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Physical Review D*, v. 52, n. 2, p. 1108, 1995.
- [22] TOWNSEND, P. K. Black holes. *arXiv preprint gr-qc/9707012*, 1997.
- [23] FUTTERMAN, J.; HANDLER, F.; MATZNER, R. A. Scattering from black holes. *Cambridge; New York: Cambridge University Press*, 1988.

- [24] FROLOV, A. V.; KRISTJANSSON, K. R.; THORLACIUS, L. Semiclassical geometry of charged black holes. *Physical Review D*, v. 72, n. 2, p. 021501, 2005.
- [25] MATZNER, R. A.; RYAN JR, M. P. Low-frequency limit of gravitational scattering. *Physical Review D*, v. 16, n. 6, p. 1636, 1977.
- [26] DORAN, C.; LASENBY, A. Perturbation theory calculation of the black hole elastic scattering cross section. *Physical Review D*, v. 66, n. 2, p. 024006, 2002.
- [27] PETERS, P. Differential cross sections for weak-field gravitational scattering. *Physical Review D*, v. 13, n. 4, p. 775, 1976.
- [28] DOLAN, S. R. Scattering of long-wavelength gravitational waves. *Physical Review D*, v. 77, n. 4, p. 044004, 2008.
- [29] STAROBINSKII, A.; CHURILOV, S. M. Amplification of electromagnetic and gravitational waves scattered by a rotating "black hole". *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, v. 38, p. 1, 1974.
- [30] GIBBONS, G. W. Vacuum polarization and the spontaneous loss of charge by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, v. 44, n. 3, p. 245–264, 1975.
- [31] PAGE, D. N. Particle emission rates from a black hole. ii. massless particles from a rotating hole. *Physical Review D*, v. 14, n. 12, p. 3260, 1976.
- [32] STAROBINSKII, A.; CHURILOV, S. Amplification of electromagnetic and gravitational waves scattered by a rotating black hole. *Zh. eksp. teor. Fiz*, v. 65, n. 3, p. 3–11, 1973.
- [33] CRISPINO, L. C.; OLIVEIRA, E. S.; MATSAS, G. E. Absorption cross section of canonical acoustic holes. *Physical Review D*, v. 76, n. 10, p. 107502, 2007.
- [34] ANACLETO, M.; BRITO, F.; CAMPOS, J.; PASSOS, E. Higher-derivative analogue aharonov–bohm effect, absorption and superresonance. *International Journal of Modern Physics A*, Singapore, v. 35, n. 21, p. 2050112, 2020.
- [35] DOLAN, S. R.; OLIVEIRA, E. S.; CRISPINO, L. C. Scattering of sound waves by a canonical acoustic hole. *Physical Review D*, v. 79, n. 6, p. 064014, 2009.

- [36] OLIVEIRA, E. S.; DOLAN, S. R.; CRISPINO, L. C. Absorption of planar waves in a draining bathtub. *Physical Review D*, v. 81, n. 12, p. 124013, 2010.
- [37] ANACLETO, M.; BRITO, F.; PASSOS, E. Gravitational aharonov–bohm effect due to noncommutative btz black hole. *Physics Letters B*, Amsterdam, v. 743, p. 184–188, 2015.
- [38] JUNG, E.; PARK, D. Effect of scalar mass in the absorption and emission spectra of schwarzschild black hole. *Classical and Quantum Gravity*, v. 21, n. 15, p. 3717, 2004.
- [39] CASTINEIRAS, J.; CRISPINO, L. C.; MEIRA FILHO, D. P. Source coupled to the massive scalar field orbiting a stellar object. *Physical Review D*, v. 75, n. 2, p. 024012, 2007.
- [40] BENONE, C. L.; DE OLIVEIRA, E. S.; DOLAN, S. R.; CRISPINO, L. C. Absorption of a massive scalar field by a charged black hole. *Physical Review D*, v. 89, n. 10, p. 104053, 2014.
- [41] DORAN, C.; LASENBY, A.; DOLAN, S.; HINDER, I. Fermion absorption cross section of a schwarzschild black hole. *Physical Review D*, v. 71, n. 12, p. 124020, 2005.
- [42] MOURA, F. Scattering of spherically symmetric d-dimensional α -corrected black holes in string theory. *Journal of High Energy Physics*, v. 2013, n. 9, p. 1–30, 2013.
- [43] SANCHEZ, N. Absorption and emission spectra of a schwarzschild black hole. *Physical Review D*, v. 18, n. 4, p. 1030, 1978.
- [44] ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T. et al. Ligo scientific and virgo collaborations. *Phys. Rev. Lett*, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- [45] ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R.; ADYA, V. B. et al. Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical review letters*, v. 119, n. 16, p. 161101, 2017.

- [46] REGGE, T.; WHEELER, J. A. Stability of a schwarzschild singularity. *Physical Review*, New York, v. 108, n. 4, p. 1063, 1957.
- [47] PRESS, W. H. Long wave trains of gravitational waves from a vibrating black hole. *The Astrophysical Journal*, v. 170, p. L105, 1971.
- [48] COLLABORATION, E. H. T. et al. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *arXiv preprint arXiv:1906.11238*, 2019.
- [49] AKIYAMA, K.; ALBERDI, A.; ALEF, W.; ASADA, K.; AZULAY, R.; BACZKO, A.-K.; BALL, D.; BALOKOVIĆ, M.; BARRETT, J.; BINTLEY, D. et al. First m87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 875, n. 1, p. L4, 2019.
- [50] CUNHA, P. V.; HERDEIRO, C. A. Shadows and strong gravitational lensing: a brief review. *General Relativity and Gravitation*, v. 50, n. 4, p. 1–27, 2018.
- [51] KONOPLYA, R. Shadow of a black hole surrounded by dark matter. *Physics Letters B*, Amsterdam, v. 795, p. 1–6, 2019.
- [52] BISNOVATYI-KOGAN, G. S.; TSUPKO, O. Y. Shadow of a black hole at cosmological distances. *Physical Review D*, v. 98, n. 8, p. 084020, 2018.
- [53] VAGNOZZI, S.; VISINELLI, L. Hunting for extra dimensions in the shadow of m87. *Physical Review D*, v. 100, n. 2, p. 024020, 2019.
- [54] ÖVGÜN, A.; SAKALLI, İ.; SAAVEDRA, J. Shadow cast and deflection angle of kerr-newman-kasuya spacetime. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2018, n. 10, p. 041, 2018.
- [55] SZABO, R. J. Symmetry, gravity and noncommutativity. *Classical and Quantum Gravity*, v. 23, n. 22, p. R199, 2006.
- [56] NICOLINI, P.; SMILAGIC, A.; SPALLUCCI, E. Noncommutative geometry inspired schwarzschild black hole. *Physics Letters B*, Amsterdam, v. 632, n. 4, p. 547–551, 2006.

- [57] NOZARI, K.; MEHDIPOUR, S. H. Hawking radiation as quantum tunneling from a noncommutative schwarzschild black hole. *Classical and Quantum Gravity*, v. 25, n. 17, p. 175015, 2008.
- [58] GOTTFRIED, K. *Quantum mechanics: fundamentals*. CRC Press, 2018.
- [59] YENNIE, D.; RAVENHALL, D. G.; WILSON, R. Phase-shift calculation of high-energy electron scattering. *Physical Review*, New York, v. 95, n. 2, p. 500, 1954.
- [60] COTĂESCU, I. I.; CRUCEAN, C.; SPOREA, C. A. Partial wave analysis of the dirac fermions scattered from schwarzschild black holes. *The European Physical Journal C*, Les Ulis, v. 76, n. 3, p. 1–19, 2016.
- [61] DAS, S. R.; GIBBONS, G.; MATHUR, S. D. Universality of low energy absorption cross sections for black holes. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 78, n. 3, p. 417, 1997.
- [62] CRISPINO, L. C.; DOLAN, S. R.; OLIVEIRA, E. S. Scattering of massless scalar waves by reissner-nordström black holes. *Physical Review D*, v. 79, n. 6, p. 064022, 2009.
- [63] WALD, R. M. *General relativity*, chicago, usa: Univ, 1984.
- [64] MATZNER, R. A.; DEWITTE-MORETTE, C.; NELSON, B.; ZHANG, T.-R. Glory scattering by black holes. *Physical Review D*, v. 31, n. 8, p. 1869, 1985.
- [65] MACEDO, C. F.; DE OLIVEIRA, E. S.; CRISPINO, L. C. Scattering by regular black holes: planar massless scalar waves impinging upon a bardeen black hole. *Physical Review D*, v. 92, n. 2, p. 024012, 2015.
- [66] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical table*. *US Department of Commerce; National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*, v. 55, 1965.
- [67] ANACLETO, M.; BRITO, F.; CAMPOS, J.; PASSOS, E. Absorption and scattering of a noncommutative black hole. *Physics Letters B*, Amsterdam, v. 803, p. 135334, 2020.

- [68] BARDEEN, J. M. Non-singular general-relativistic gravitational collapse. In: . c1968. v. 174. p. 174.
- [69] HUANG, H.; LIAO, P.; CHEN, J.; WANG, Y. Absorption and scattering cross section of regular black holes. *Journal of Gravity*, v. 2014, 2014.
- [70] KHODADI, M.; NOZARI, K.; HAJIZADEH, A. Some astrophysical aspects of a schwarzschild geometry equipped with a minimal measurable length. *Physics Letters B*, Amsterdam, v. 770, p. 556–563, 2017.
- [71] MATHUR, S. D. The fuzzball proposal for black holes: An elementary review. *Fortschritte der Physik: Progress of Physics*, v. 53, n. 7-8, p. 793–827, 2005.
- [72] BELTRACCHI, P.; GONDOLO, P. Formation of dark energy stars. *Physical Review D*, v. 99, n. 4, p. 044037, 2019.
- [73] BANERJEE, S.; GHOSH, S.; PAUL, N.; RAHAMAN, F. Study of gravastars in finslerian geometry. *The European Physical Journal Plus*, v. 135, n. 2, p. 1–15, 2020.
- [74] BRAUNSTEIN, S. L.; PIRANDOLA, S.; ZYCZKOWSKI, K. Better late than never: information retrieval from black holes. *Physical review letters*, v. 110, n. 10, p. 101301, 2013.
- [75] ALMHEIRI, A.; MAROLF, D.; POLCHINSKI, J.; SULLY, J. Black holes: complementarity or firewalls? *Journal of High Energy Physics*, v. 2013, n. 2, p. 1–20, 2013.
- [76] MEDVED, A.; VAGENAS, E. C. When conceptual worlds collide: the generalized uncertainty principle and the bekenstein-hawking entropy. *Physical Review D*, v. 70, n. 12, p. 124021, 2004.
- [77] CARR, B.; MUREIKA, J.; NICOLINI, P. Sub-planckian black holes and the generalized uncertainty principle. *Journal of High Energy Physics*, v. 2015, n. 7, p. 1–24, 2015.
- [78] TAWFIK, A.; DIAB, A. Generalized uncertainty principle: Approaches and applications. *International Journal of Modern Physics D*, v. 23, n. 12, p. 1430025, 2014.

- [79] DARWIN, C. G. The gravity field of a particle. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, v. 249, n. 1257, p. 180–194, 1959.
- [80] ANACLETO, M. A.; BRITO, F. A.; CAMPOS, J.; PASSOS, E. Quantum-corrected scattering and absorption of a schwarzschild black hole with gup. *Physics Letters B*, Amsterdam, v. 810, p. 135830, 2020.
- [81] MODESTO, L.; PREMONT-SCHWARZ, I. Self-dual black holes in loop quantum gravity: Theory and phenomenology. *Physical Review D*, v. 80, n. 6, p. 064041, 2009.
- [82] MODESTO, L. Semiclassical loop quantum black hole. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 49, n. 8, p. 1649–1683, 2010.
- [83] SANTOS, V.; MALUF, R.; ALMEIDA, C. Quasinormal frequencies of self-dual black holes. *Physical Review D*, v. 93, n. 8, p. 084047, 2016.
- [84] CRUZ, M.; SILVA, C.; BRITO, F. Gravitational axial perturbations and quasinormal modes of loop quantum black holes. *The European Physical Journal C*, Les Ulis, v. 79, n. 2, p. 1–10, 2019.
- [85] ANACLETO, M.; BRITO, F.; CAMPOS, J.; PASSOS, E. Absorption and scattering by a self-dual black hole. *General Relativity and Gravitation*, v. 52, n. 10, p. 1–17, 2020.
- [86] VISHVESHWARA, C. Scattering of gravitational radiation by a schwarzschild black-hole. *Nature*, London, v. 227, n. 5261, p. 936–938, 1970.
- [87] SCHUTZ, B. F.; WILL, C. M. Black hole normal modes: a semianalytic approach. *The Astrophysical Journal*, v. 291, p. L33–L36, 1985.
- [88] IYER, S.; WILL, C. M. Black-hole normal modes: A wkb approach. i. foundations and application of a higher-order wkb analysis of potential-barrier scattering. *Physical Review D*, v. 35, n. 12, p. 3621, 1987.
- [89] KONOPLYA, R. Quasinormal behavior of the d-dimensional schwarzschild black hole and the higher order wkb approach. *Physical Review D*, v. 68, n. 2, p. 024018, 2003.

- [90] LEAVER, E. W. An analytic representation for the quasi-normal modes of kerr black holes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, v. 402, n. 1823, p. 285–298, 1985.
- [91] KONOPLYA, R.; ZHIDENKO, A.; ZINHAILO, A. Higher order wkb formula for quasinormal modes and grey-body factors: recipes for quick and accurate calculations. *Classical and Quantum Gravity*, v. 36, n. 15, p. 155002, 2019.
- [92] LEAVER, E. W. Quasinormal modes of reissner-nordström black holes. *Physical Review D*, v. 41, n. 10, p. 2986, 1990.
- [93] GAUTSCHI, W. Computational aspects of three-term recurrence relations. *SIAM review*, v. 9, n. 1, p. 24–82, 1967.
- [94] NOLLERT, H.-P. Quasinormal modes of schwarzschild black holes: The determination of quasinormal frequencies with very large imaginary parts. *Physical Review D*, v. 47, n. 12, p. 5253, 1993.
- [95] KONOPLYA, R.; ZHIDENKO, A. Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory. *Reviews of Modern Physics*, Woodbury, v. 83, n. 3, p. 793, 2011.
- [96] GUNDLACH, C.; PRICE, R. H.; PULLIN, J. Late-time behavior of stellar collapse and explosions. i. linearized perturbations. *Physical Review D*, v. 49, n. 2, p. 883, 1994.
- [97] WILSON, A. H. A generalised spheroidal wave equation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, v. 118, n. 780, p. 617–635, 1928.
- [98] CAMPOS, J.; ANACLETO, M.; BRITO, F.; PASSOS, E. Quasinormal modes and shadow of noncommutative black hole. *Scientific Reports*, v. 12, n. 1, p. 1–16, 2022.
- [99] ANACLETO, M.; CAMPOS, J.; BRITO, F.; PASSOS, E. Quasinormal modes and shadow of a schwarzschild black hole with gup. *Annals of Physics*, New York, v. 434, p. 168662, 2021.

- [100] AKIYAMA, K.; ALBERDI, A.; ALEF, W.; ALGABA, J. C.; ANANTUA, R.; ASADA, K.; AZULAY, R.; BACH, U.; BACZKO, A.-K.; BALL, D. et al. First sagittarius a* event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole in the center of the milky way. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 930, n. 2, p. L12, 2022.
- [101] SYNGE, J. The escape of photons from gravitationally intense stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, London, v. 131, n. 3, p. 463–466, 1966.
- [102] BARDEEN, J. M. Timelike and null geodesics in the kerr metric. *Black holes*, v. 215, 1973.
- [103] MASHHOON, B. Stability of charged rotating black holes in the eikonal approximation. *Physical Review D*, v. 31, n. 2, p. 290, 1985.
- [104] CARDOSO, V.; MIRANDA, A. S.; BERTI, E.; WITEK, H.; ZANCHIN, V. T. Geodesic stability, lyapunov exponents, and quasinormal modes. *Physical Review D*, v. 79, n. 6, p. 064016, 2009.
- [105] STEFANOV, I. Z.; YAZADJIEV, S. S.; GYULCHEV, G. G. Connection between black-hole quasinormal modes and lensing in the strong deflection limit. *Physical review letters*, v. 104, n. 25, p. 251103, 2010.
- [106] CARTER, B. Global structure of the kerr family of gravitational fields. *Physical Review*, New York, v. 174, n. 5, p. 1559, 1968.
- [107] VAZQUEZ, S. E.; ESTEBAN, E. P. Strong field gravitational lensing by a kerr black hole. *arXiv preprint gr-qc/0308023*, 2003.
- [108] KONOPLYA, R.; STUHLÍK, Z. Are eikonal quasinormal modes linked to the unstable circular null geodesics? *Physics Letters B*, Amsterdam, v. 771, p. 597–602, 2017.
- [109] SEIDEL, E.; IYER, S. Black-hole normal modes: A wkb approach. iv. kerr black holes. *Physical Review D*, v. 41, n. 2, p. 374, 1990.
- [110] ORSZAG, S.; BENDER, C. M. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill New York, NY, USA, 1978.

- [111] LEAVER, E. W. Solutions to a generalized spheroidal wave equation: Teukolsky's equations in general relativity, and the two-center problem in molecular quantum mechanics. *Journal of mathematical physics*, v. 27, n. 5, p. 1238–1265, 1986.