



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DOUTORADO ACADÊMICO EM FÍSICA

O Colapso da Função de Onda e o Confinamento de Férmions na Inflação Taquiônica

Julio Cesar Marques da Rocha

João Pessoa-PB
Fevereiro de 2022

Julio Cesar Marques da Rocha

O Colapso da Função de Onda e o Confinamento de Férmions na Inflação Taquiônica

Tese de doutorado apresentada ao Programa
de Pós-graduação em Física da Universidade
Federal da Paraíba como requisito parcial
para a obtenção do grau de Doutor em Física.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Francisco de Assis Brito

João Pessoa - PB

Fevereiro/2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R672c Rocha, Julio Cesar Marques da.
O colapso da função de onda e o confinamento de
férmions na inflação taquiônica / Julio Cesar Marques
da Rocha. - João Pessoa, 2022.
81 f. : il.

Orientação: Francisco de Assis Brito.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Teoria da inflação taquiônica. 3.
Função de onda - Colapso. 4. Confinamento férmion. I.
Brito, Francisco de Assis. II. Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Júlio Cesar Marques da
Rocha**, candidato ao Título de Doutor em Física
na Área de Gravitação e Cosmologia.

1 Aos quatro dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e dois, às 14:00, reuniram-
2 se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o
3 candidato ao grau de Doutor em Física na área de Gravitação e Cosmologia, **Júlio Cesar**
4 **Marques da Rocha**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores:
5 Francisco de Assis Brito, orientador e presidente da banca examinadora, Dionísio Bazeia
6 Filho (UFPB), Albert Petrov (UFPB), Amílcar R. Queiroz (UFCG), Carlos Alberto S. de
7 Almeida (UFC). Dando início aos trabalhos, o Prof. Francisco de Assis Brito comunicou
8 aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato
9 fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "O Colapso da Função de
10 Onda e o Confinamento de Férmions na Inflação Taquiónica". Concluída a exposição, o
11 candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer:
12 **"aprovado"**. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo
13 diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Bethyanne Leite Aragão,
14 redigi esta ata que vai assinada por mim e por todos os membros da Banca Examinadora. João
15 Pessoa, Paraíba, 04 de fevereiro de 2022.

16 Prof Francisco de Assis Brito

Orientador – PPGF/UFPB

Prof Dionísio Bazeia Filho

PPGF/UFPB

Prof Albert Petrov

PPGF/UFPB

Prof. Amílcar R. Queiroz

UFCG

Prof. Carlos Alberto S. de Almeida

UFC

17 Link da reunião
18 Bethyanne Leite Aragão
19

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por todas as conquistas. Ao professor Francisco de Assis de Brito pela orientação e oportunidade de realização deste trabalho. A todos os professores que contribuíram com minha formação acadêmica. Aos amigos do departamento de física pelas discussões e apoio. Ao programa de pós graduação em física da UFPB pela oportunidade de realização do doutorado em física. A CAPES pelo apoio financeiro.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

Resumo

Nesta tese abordamos o modelo de colapso por localização espontânea na teoria da inflação taquiônica. Após uma breve imersão no modelo cosmológico padrão, adentramos na teoria da inflação dirigida por um campo escalar taquiônico, que, ao mesmo tempo em que gera a expansão inicial, suas flutuações no vácuo são responsáveis pela emergência de perturbações primordiais, necessárias para a formação das estruturas em larga escala observadas hoje. Em meio a transição entre a fase quântica e a fase clássica, nos deparamos com o problema da medida, o qual consiste em explicar como ocorre o colapso da função de onda neste contexto. Uma solução proposta foi a teoria de colapso por localização espontânea, a qual mostrou-se viável e de acordo com as observações atuais. Ao estudar o regime inflacionário em baixas energias, podemos analisar o confinamento de férmions na matéria taquiônica e a correlação entre a temperatura de confinamento e a temperatura de reaquecimento na transição inflação-radiação.

Palavras-chave: inflação. problema da medida. Confinamento de férmions.

Abstract

In this thesis we approach the spontaneous location collapse model in the tachyonic inflation theory. After a brief immersion in the standard cosmological model, we enter the theory of inflation driven by a tachyonic scalar field, which, while generating the initial expansion, its fluctuations in vacuum are responsible for the emergence of primordial perturbations, necessary for the formation of large-scale structures observed today. In the midst of the transition between the quantum phase and the classical phase, we are faced with the measurement problem, which consists of explaining how the collapse of the wave function occurs in this context. A proposed solution was the theory of collapse by spontaneous location, which proved to be viable and in accordance with current observations. By studying the inflationary regime at low energies, we can analyze the confinement of fermions in tachyonic matter and the correlation between the confinement temperature and the reheat temperature in the inflation-radiation transition.

Keywords: inflation. measurement problem. fermions confinement.

Lista de ilustrações

Figura 1 – A relação entre a distância própria e a coordenada radial comoviente para os casos $K = +1, 0, -1$	18
Figura 2 – Diagrama original de Hubble acerca da relação velocidade-distância entre galáxias. Fonte: (HUBBLE, 1929).	20
Figura 3 – Potencial secante hiperbólico para alguns valores de λ	34
Figura 4 – O comportamento dos parâmetros slow-roll (2.25) (à esquerda) e (2.32) (à direita).	35
Figura 5 – O comportamento do potencial β -exponencial para diferentes valores de β , com $\lambda = 0.1$ (à esquerda) e $\lambda = 0.05$ (à direita).	37
Figura 6 – O comportamento dos parâmetros slow-roll usual (ε e η) e taquiônico (ε_1 e ε_2) em função do número de e-folds, N , para o potencial β -exponencial para diferentes valores de β . Em ordem, temos $\beta = 0.01$ (superior esquerdo), $\beta = 0.05$ (superior direito), $\beta = 0.1$ (inferior esquerdo), $\beta = 0.9$ (inferior direito).	38
Figura 7 – Plano $n_s - r$ para alguns valores de f	49
Figura 8 – Plano $n_s - r$ para alguns valores de β	49
Figura 9 – Modificação do espectro de potências com o parâmetro α	63
Figura 10 – Comportamento de α em função de f	63
Figura 11 – Comportamento de β em função de α	64
Figura 12 – Plano $n_s - r$ para alguns valores de δ para o potencial efetivo.	71

Lista de abreviaturas e siglas

RG	Relatividade Geral
RCF	Radiação Cósmica de Fundo
CLE	Colapso por Localização Espontânea

Lista de símbolos

H	Parâmetro de Hubble
M_p	Massa de Planck - $M_p = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} \sim 2.4 \times 10^{18} \text{ GeV}$
ε_1	Parâmetro slow-roll taquiônico
ε	Parâmetro slow-roll usual
Θ	Campo escalar taquiônico
ϕ	Campo escalar usual
λ_k	Parâmetro de colapso

Sumário

	INTRODUÇÃO	14
I	INOMOGENEIDADES NO UNIVERSO: A INFLAÇÃO TAQUIÔNICA	16
1	O UNIVERSO INFLACIONÁRIO	17
1.1	O Princípio Cosmológico	17
1.2	Equações de Campo	20
1.3	Componentes do Universo	24
1.3.1	Radiação	24
1.3.2	Matéria	24
1.3.3	Energia Escura	25
1.4	Problemas do Modelo Cosmológico e a Inflação	25
2	A INFLAÇÃO TAQUIÔNICA	29
2.1	Táquions	29
2.2	Condensação taquiônica	30
2.3	O modelo inflacionário	32
2.4	Potenciais taquiônicos	34
2.4.1	Potencial do tipo secante hiperbólica quadrática	34
2.4.2	Potencial tipo β -exponencial	36
3	PERTURBAÇÕES NA INFLAÇÃO TAQUIÔNICA	39
3.1	A métrica perturbada	39
3.2	Invariância de calibre	40
3.3	Perturbações escalares	41
3.4	Perturbações tensoriais	44
3.5	Espectro de potências e índices espectrais	45
3.6	Fenomenologia	47
3.6.1	Potencial secante hiperbólico quadrático	48
3.6.2	Potencial β -exponencial	48

II	O COLAPSO DA FUNÇÃO DE ONDA NO UNIVERSO PRIMORDIAL	51
4	O PROBLEMA DA MEDIDA	52
4.1	Os postulados da mecânica quântica	52
4.2	O problema da medida na mecânica quântica	54
4.3	Tratamento semiclássico	54
5	COLAPSO POR LOCALIZAÇÃO ESPONTÂNEA	57
5.1	Equação de Schrödinger modificada	57
5.2	Espectro de potências escalar	59
6	O CONFINAMENTO DE FÉRMIONS NA INFLAÇÃO TAQUIÔNICA	65
6.1	Condensação taquiônica e confinamento	65
6.2	Breve Revisão Sobre Mecânica Estatística Quântica	66
6.3	Férmions em Temperatura Finita	67
6.4	Confinamento de férmions durante a inflação	69
	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	72
	REFERÊNCIAS	73
	APÊNDICES	78
	APÊNDICE A – TEORIA DAS PERTURBAÇÕES	79
	ANEXOS	81
	ANEXO A – PUBLICAÇÕES	82

Introdução

O advento da cosmologia moderna, conhecido como *modelo padrão da cosmologia*, é baseado na renomada teoria da relatividade geral, apresentada por Albert Einstein em 1915 e publicada em 1916 (EINSTEIN, 1916). Os elementos fundamentais do modelo cosmológico são o *princípio cosmológico*, que estabelece que o universo é homogêneo e isotrópico em largas escalas, e as *equações de Einstein*, que estabelece a relação entre conteúdo material e geometria do espaço tempo. Por intermédio desses princípios, podemos descrever a evolução do universo desde o passado até o futuro e, possivelmente, o estado inicial deste. A base fenomenológica que se seguiu com a descoberta da *radiação cósmica de fundo* na faixa de microondas (PENZIAS; WILSON, 1965), em 1964, veio a trazer uma importante confirmação experimental para o modelo do *Big Bang*, modelo este que prevê que o universo originou-se de um estado muito quente e denso e cuja expansão afetou a estrutura do espaço tempo. Contudo, o modelo do Big Bang apresentou alguns problemas, tais como o problema do horizonte, o problema da planura, o problema dos monopolos magnéticos, entre outros, os quais tiveram solução proposta por Alan Guth, em 1981, com o modelo inflacionário (GUTH, 1981).

O mecanismo inflacionário, além de solucionar os problemas mencionados, possibilita o estudo das perturbações cosmológicas primordiais, que são flutuações do vácuo que atuam como as sementes das estruturas em largas escalas que observamos hoje. Estas, ao ultrapassar a era da radiação, deixa assinaturas na radiação cósmica de fundo, permitindo uma comprovação experimental. Em cenários mais simples, a inflação ocorre quando um campo escalar rola lentamente para o mínimo do seu potencial, o que causa uma expansão exponencial do fator de escala com o tempo e, ao mesmo tempo, produz perturbações de densidade com um espectro de potências quase invariante com a escala. Entre os vários campos escalares utilizados, daremos ênfase ao *campo taquiônico*, que aparecem em vários contextos, tal como na Teoria das Cordas.

O táquion é uma partícula hipotética cuja velocidade excede a velocidade da luz. Embora não seja possível acelerar uma partícula com massa até que ela atinja ou ultrapasse a velocidade da luz, segundo a Teoria da Relatividade Especial, esta não impede a existência de partículas com velocidade superior à da luz em seu estado natural. Os modelos com campo taquiônico possuem um termo cinético não canônico, ou seja o termo cinético possui altas derivadas (M.; L., 1934) e são usualmente chamados de *k*-inflação (ARMENDÁRIZ-PICÓN; DAMOUR; MUKHANOV, 1999). No tratamento da Teoria Quântica de Campos, táquions são entendidos como uma instabilidade do sistema, ao passo que, em teoria das cordas a ação efetiva resultante do decaimento de D-branas gera modos taquiônicos que se comportam como um campo escalar (SEN, 2002a; KLUSON, 2000). Tal descrição pode ser

utilizada para descrever o universo inflacionário e o surgimento das flutuações primordiais, estas, por sua vez, passarão de um regime quântico, em seguida um regime semi-clássico até se tornarem perturbações clássicas, responsáveis pela formação das estruturas no universo observável. No entanto, essa passagem da fase quântica para a fase clássica traz à tona o chamado *problema da medida*: flutuações homogêneas descritas por um estado quântico colapsam e se tornam inomogêneas, descritas por uma perturbação. A origem do problema remonta estudos mais gerais sobre a interpretação de Copenhague e a mecânica quântica (ZUREK, 2003; KRISTIAN, 2009; PEIERLS, 1991).

Neste trabalho, vamos investigar a ocorrência do colapso da função de onda na inflação taquiônica através do *colapso por localização espontânea*, um dos modelos de colapso mais aceitos atualmente e que descreve o colapso como uma modificação da equação de Schrödinger e, por consequência, tratando uma evolução temporal modificada. Dada a relação entre as perturbações e o espectro de potências, é possível obter a modificação deste último e, com isso, relacionar fenomenologicamente o parâmetro de colapso e os índices espectrais, que são medidos pelo Planck. Portanto, esse trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 faremos uma revisão acerca do modelo cosmológico padrão e os motivos que levaram ao estudo da inflação do universo. No capítulo 2 é inserida a inflação taquiônica, desde a sua derivação a partir da teoria das cordas, a condensação em teorias D-branas, o modelo efetivo que descreve inflação, a inflação slow-roll e possíveis potenciais que concordam com as observações atuais. No capítulo 3 trataremos das perturbações cosmológicas a níveis escalar, vetorial e tensorial, a fim de obter os espectros de potências e os índices espectrais, além de verificar fenomenologicamente os potenciais descritos no capítulo 2. No capítulo 4 daremos ênfase ao problema da medida, sua origem e implicações, tanto na mecânica quântica como na inflação. No capítulo 5 é introduzido o modelo de colapso por localização espontânea e sua correlação com as observações. No capítulo 6 estudaremos o confinamento de férmions no cenário em que a inflação se encerra e ocorre o reaquecimento, possibilitando a transição do cenário inflacionário para a era da radiação. E, finalmente, apresentaremos nossas considerações finais e perspectivas.

Em todo o trabalho adotamos a assinatura da métrica como $(-, +, +, +)$ e $\hbar = c = k_B = 1$.

Parte I

Inomogeneidades no Universo: A Inflação Taquiônica

1 O Universo inflacionário

A inflação primordial, introduzida pela primeira vez por Guth em 1981 (GUTH, 1981), foi amplamente estudada nas últimas décadas, fornecendo uma imagem sólida dos primeiros estágios do universo. Sua ocorrência acontece antes da nucleossíntese, a geração dos elementos leves, de modo que o modelo do Big Bang subsequentemente dá uma descrição essencialmente correta do universo. Neste cenário, o universo passa por uma expansão espacial rápida e acelerada, que rapidamente dilui todos os conteúdos nele presentes e faz com que todas as regiões se conectem causalmente. Neste capítulo, revisaremos o modelo padrão da cosmologia, sua ocorrência, seus problemas e a solução inflacionária que descreve com sucesso os momentos iniciais de nosso universo.

1.1 O Princípio Cosmológico

O princípio cosmológico afirma que nós não ocupamos uma posição privilegiada no Universo, ou seja, observadores na terra mediriam as mesmas propriedades do Universo independente de sua localização. A este princípio estão associados os conceitos de homogeneidade e isotropia do espaço. Evidências observacionais como, por exemplo, a análise do catálogo de galáxias disponibilizado pela equipe do *Sloan Digital Sky Survey* (Blanton, 2017), mostram que a distribuição de galáxias é homogênea em escalas maiores que 300 milhões de anos luz, o que mostra a homogeneidade em grandes escalas, enquanto que dados da temperatura da radiação cósmica de fundo evidenciam que o Universo é isotrópico (PLANCKVII, 2020). Isso implica que a geometria do espaço deve ser descrita por uma métrica que é globalmente homogênea e isotrópica. Tal métrica foi derivada separadamente por Friedmann (FRIEDMAN, 1922), Robertson (ROBERTSON, 1935) e Walker (WALKER, 1937), chamada métrica FRW, e dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.1)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e r e Ω são a coordenada radial e o ângulo sólido, respectivamente, do sistema de coordenadas esférico. A constante K está relacionada com a curvatura espacial, correspondendo a universo aberto ($K = -1$), universo plano ($K = 0$) e universo fechado ($K = +1$). Aqui ds representa a distância infinitesimal entre dois eventos separados no espaço tempo e é dependente do tempo próprio no qual é medido. Isso é esperado em um Universo em expansão ou contração, uma vez que as distâncias próprias irão mudar com o tempo, embora as coordenadas (comóveis) não mudem seus valores. Ao lidar com separações finitas, o problema de calcular distâncias próprias geralmente é bastante desafiador. No entanto, o problema pode ser simplificado fazendo-se uso da

homogeneidade das hipersuperfícies tipo espaço. Dados dois pontos em tal hipersuperfície, podemos sempre escolher um deles para ser a origem das coordenadas. O outro estará, então, em algum valor da coordenada comoviente $r = \chi$, em uma direção fixa, especificada por valores de θ e ϕ . Nesse caso, os dois pontos estão ligados por um caminho puramente radial que sempre será um caminho geodésico. Ao longo do caminho radial temos $d\theta = d\phi = 0$ e a distância será dada por

$$s(t) = \int_0^\chi \frac{a(t)dr}{(1 - Kr^2)^{1/2}}. \quad (1.2)$$

Se K é $+1$, 0 ou -1 , teremos valores bem conhecidos:

$$s(t) = \begin{cases} a(t) \sin^{-1} \chi & \text{se } K = +1, \\ a(t) \chi & \text{se } K = 0, \\ a(t) \sinh^{-1} \chi & \text{se } K = -1. \end{cases} \quad (1.3)$$

Essas três relações são ilustradas na Figura 1. Podemos notar que todas se comportam de modo similar para pequenos valores de χ , contudo diferem próximo de $\chi = 1$, ponto no qual $\sin^{-1} \chi$ diverge. Essas diferenças são, naturalmente, o resultado da curvatura intrínseca das hipersuperfícies.

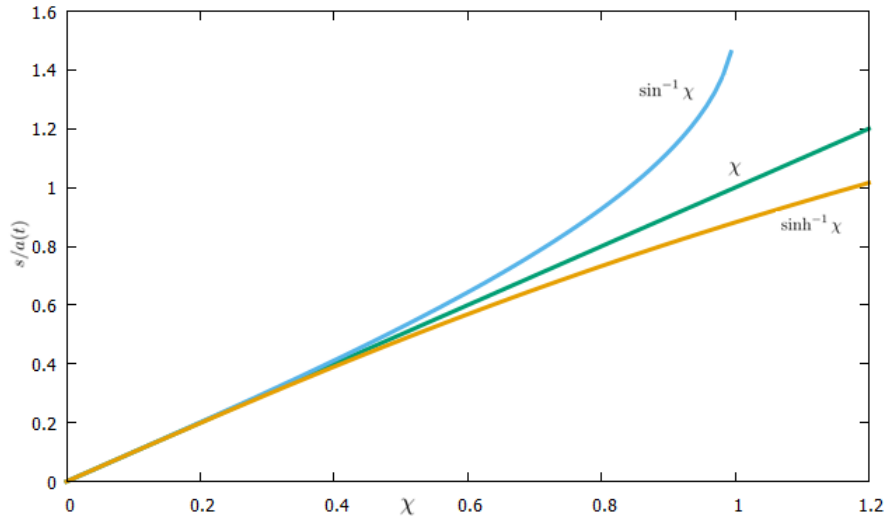


Figura 1 – A relação entre a distância própria e a coordenada radial comoviente para os casos $K = +1, 0, -1$.

Apesar de obtermos o valor de s , na prática não medimos diretamente seu valor, ao invés disso, medimos o quão rápido a distância própria entre observadores muda como resultado de uma expansão ou contração. Definindo a velocidade radial própria como sendo a taxa de mudança da distância própria em relação ao tempo cósmico, temos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} s, \quad (1.4)$$

em que trocamos χ por s/a . Escrito de outra forma,

$$v_p = \frac{ds}{dt} = H(t)d_p, \quad (1.5)$$

onde $d_p = s$ representa a distância própria e $H(t)$ é o parâmetro de Hubble, definido pela relação

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.6)$$

com $\dot{a} = da/dt$. A equação (1.5) nos diz que, em qualquer tempo cósmico t , todo observador fundamental está movendo-se radialmente em relação a todos os outros observadores fundamentais em uma velocidade própria que é proporcional a distância própria que os separa. Podemos relacionar isso a uma característica da expansão chamada *redshift*. A luz que recebemos é esticada devido a expansão, logo, se uma onda eletromagnética é emitida em um tempo t_{em} e com comprimento de onda λ_{em} e recebida na terra em um tempo t_0 e com comprimento de onda λ_{rec} , então

$$\lambda_{em} = \frac{a_0}{a_{rec}} \lambda_{rec} = \frac{1}{a_{rec}} \lambda_{rec}, \quad (1.7)$$

e então podemos escrever o redshift

$$z(t_{em}) \equiv \frac{\lambda_{rec} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{1}{a_{em}} - 1, \quad (1.8)$$

o que significa que podemos relacionar o fator de escala do universo com o redshift, isto é

$$a = \frac{1}{1+z}, \quad (1.9)$$

que permite trabalhar com o redshift ao invés do fator de escala e é muito utilizado nos modelos cosmológicos para medir distâncias no universo.

Na década de 1920, medindo a velocidade radial de galáxias, Edwin Hubble observou que a maioria dos desvios espectrais é para o vermelho, indicando que as galáxias estão afastando-se umas das outras. Ele concluiu que o parâmetro definido em (1.6) é constante, de modo que a velocidade de recessão é diretamente proporcional à distância de afastamento (HUBBLE, 1929). Assim, ele expressou a lei que leva seu nome na forma

$$v = H_0 d, \quad (1.10)$$

onde a constante $H_0 = H(t_0)$ tem dimensão do inverso do tempo e sua estimativa é um valor aproximado para a idade do universo. Na Figura 2 temos os dados obtidos por Hubble em 1929, o que lhe conferiu um valor estimado de $H_0 = 500 \text{ km/s/Mpc}$, valor cerca de sete vezes maior do que o medido atualmente. Os dados atuais obtidos pela missão Planck da ESA (agência espacial europeia) (PLANCKVI, 2020) fornecem um valor atual da constante de Hubble dada por:

$$H_0 = (67.66 \pm 0.42) \text{ km/s/Mpc}, \quad (1.11)$$

com nível de confiança de 68% CL.

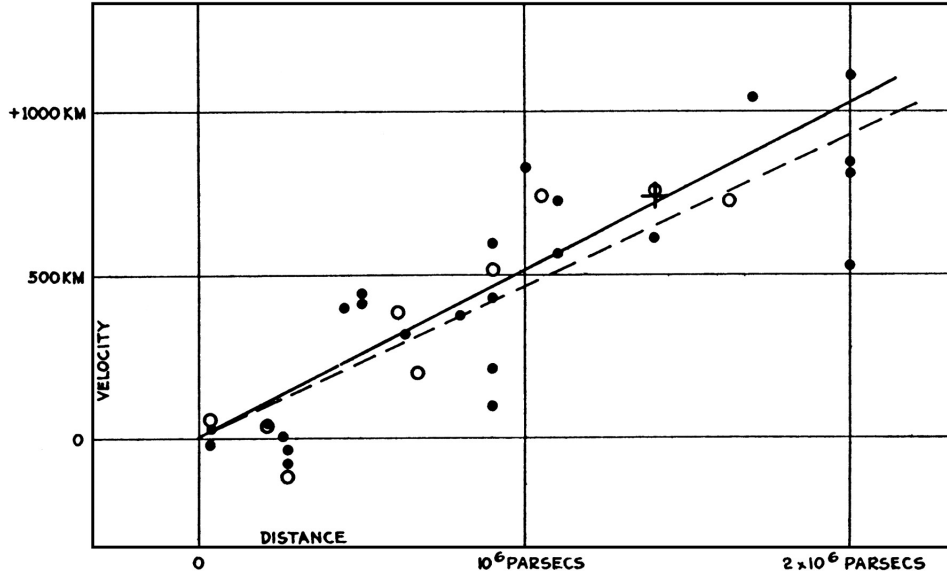


Figura 2 – Diagrama original de Hubble acerca da relação velocidade-distância entre galáxias. Fonte: (HUBBLE, 1929).

1.2 Equações de Campo

A Teoria da Relatividade Geral é uma teoria geométrica da gravitação em que a gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço tempo, causada pela presença de matéria ou energia. A dinâmica da geometria pode ser obtida a partir da ação de Einstein-Hilbert:

$$S_{EH} = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (1.12)$$

onde $\kappa^2 = 8\pi G = M_p^{-2}$, g é o determinante do tensor métrico, Λ é a constante cosmológica e $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci, dado pela contração do tensor de Ricci. Por outro lado, o conteúdo material do Universo pode ser obtido pela ação geral

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (1.13)$$

que inclui matéria ordinária ou campos escalares. A ação total

$$S = S_{EH} + S_m \quad (1.14)$$

descreve, portanto, a dinâmica da expansão do Universo e é o ponto de partida para a cosmologia moderna.

Considerando a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ como um campo gravitacional externo, podemos aplicar o *princípio da mínima ação*,

$$\delta S = 0, \quad (1.15)$$

para derivar as equações de campo. Dessa forma, temos

$$\delta S = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \left[\delta \left(\sqrt{-g} R \right) - 2\Lambda \delta \sqrt{-g} \right] + \int d^4x \delta \left(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m \right). \quad (1.16)$$

Para o cálculo das variações, vamos considerar as relações válidas para um tensor A_μ^α geral:

$$4!|A_\mu^\nu| = 4!A = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}A_\alpha^\mu A_\beta^\nu A_\gamma^\sigma A_\delta^\rho \quad (1.17)$$

e

$$3!A_\mu^\alpha A = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}A_\beta^\nu A_\gamma^\sigma A_\delta^\rho. \quad (1.18)$$

Logo, diferenciando (1.17) temos

$$4!dA = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}4d(A_\alpha^\mu)A_\beta^\nu A_\gamma^\sigma A_\delta^\rho \quad (1.19)$$

substituindo (1.18) em (1.19), obtemos

$$4!dA = 4(3!)A_\mu^\alpha Ad(A_\alpha^\mu), \quad (1.20)$$

portanto

$$dA = AA_\mu^\alpha d(A_\alpha^\mu), \quad (1.21)$$

de modo que se nosso tensor A_μ^α for $g_{\mu\nu}$, temos

$$dg = gg_{\mu\nu}dg^{\mu\nu}, \quad (1.22)$$

e, portanto,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\frac{\delta g}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (1.23)$$

Para a variação do escalar de Ricci

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \quad (1.24)$$

vamos usar a identidade de Palatini

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \delta \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha \quad (1.25)$$

que nos leva a relação

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\nabla_\alpha (g^{\mu\nu}\delta \Gamma_{\nu\mu}^\alpha) - \sqrt{-g}\nabla_\nu (g^{\mu\nu}\delta \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha). \quad (1.26)$$

Pelo teorema de Gauss esta expressão anula-se no contorno, então

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}. \quad (1.27)$$

Por fim, temos

$$\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m) = \sqrt{-g}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\right)\delta g^{\mu\nu}. \quad (1.28)$$

Inserindo (1.23), (1.27) e (1.28) em (1.16) obtemos

$$\delta S = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m \right) \delta g^{\mu\nu}$$

e, aplicando o princípio da mínima ação $\delta S = 0$, obtemos as equações de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{M_p^2} T_{\mu\nu}, \quad (1.29)$$

onde definimos $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ e

$$T_{\mu\nu} \equiv -2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m. \quad (1.30)$$

é o tensor energia momento. A correspondência (1.29) mostra que o conteúdo material do universo causa uma curvatura no espaço tempo e vice-versa. Comumente utiliza-se a forma mista da equação de Einstein, isto é

$$G^\mu_\nu + \Lambda \delta^\mu_\nu = \frac{1}{M_p^2} T^\mu_\nu, \quad (1.31)$$

cujas componentes podem ser obtidas ao inserir-se a métrica (1.1) em (1.31). As componentes do tensor de Einstein são:

$$\begin{aligned} G^0_0 &= -3H^2 - \frac{3K}{a^2} \\ G^i_j &= -\left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2}\right) \delta^i_j, \end{aligned} \quad (1.32)$$

onde i e j são os índices espaciais, variando de 1 a 3, o índice 0 corresponde a parte temporal da métrica e o parâmetro de Hubble é dado por $H = \dot{a}/a$.

Para encontrar a forma do tensor energia momento vamos considerar um observador movendo-se com o fluido material perfeito com densidade ρ , pressão p e quadri-velocidade u_μ . O tensor energia momento é dado por

$$T^\mu_\nu = (\rho + p) u^\mu u_\nu + p \delta^\mu_\nu, \quad (1.33)$$

onde, para um observador em repouso com relação ao fluido temos $u_0 = -1$ e $u_i = 0$, e consequentemente $T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$, de modo que, se ρ e p não sofrerem variação espacial, esta forma do tensor T^μ_ν é consistente com a homogeneidade e isotropia.

Substituindo as componentes do tensor energia momento e do tensor de Einstein (1.32) na equação (1.31), obtemos

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3M_p^2} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.34)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_p^2}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.35)$$

chamadas *equação de Friedmann* e *equação da aceleração*, respectivamente.

Na ausência de curvatura e constante cosmológica ($K = \Lambda = 0$), a equação de Friedmann nos dá uma relação direta entre a taxa de expansão (medida pelo parâmetro de Hubble) a densidade de energia, o que significa que a presença de energia no Universo causará expansão ou contração deste. Similarmente, a equação da aceleração nos mostra que, para $\Lambda = 0$, o universo é acelerado quando $\rho + 3p < 0$ e desacelerado quando $\rho + 3p > 0$.

A conservação do tensor energia momento,

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\mu_\lambda = 0, \quad (1.36)$$

nos dá a equação da conservação da energia

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (1.37)$$

que é a equação da continuidade para um fluido no sistema comóvel. Em geral, admite-se que a pressão depende exclusivamente das características do seu componente, isto é, $p = \omega\rho$, onde ω depende do tipo de componente que domina a expansão. Para ω constante, a solução da equação (1.37) é dada por

$$\rho(a) = \rho_i \left(\frac{a}{a_i} \right)^{-3(1+\omega)}, \quad (1.38)$$

onde ρ_i é o valor inicial de ρ quando $a = a_i$. A densidade depende, portanto, da componente, cujas mais conhecidas são matéria (poeira) com $\omega = 0$, de modo que $\rho_m \propto a^{-3}$, radiação, para a qual temos $\omega = 1/3$, temos $\rho_r \propto a^{-4}$ e constante cosmológica, onde $\omega = -1$, para a qual $\rho_\Lambda = \text{constante}$. Para identificar o efeito da curvatura e da constante cosmológica, podemos escrever a equação de Friedmann na forma

$$H^2 = \frac{1}{3M_p^2} \rho_{total} = \frac{1}{3M_p^2} [\rho_m + \rho_r + \rho_K + \rho_\Lambda], \quad (1.39)$$

onde ρ_{total} é a densidade total do Universo, ρ_K é a densidade de curvatura e ρ_Λ é a densidade da constante cosmológica. Assim, seja a densidade crítica do Universo

$$\rho_{crit} = 3M_p^2 H_0^2, \quad (1.40)$$

onde H_0 é o valor atual da constante de Hubble e considerando $\Omega = \rho/\rho_{crit}$ a fração do universo contida em cada componente, podemos ainda reescrever a equação (1.39) na forma

$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r0}}{a^4} + \frac{\Omega_{K0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda0} \right], \quad (1.41)$$

ou, em termos do redshift $a = 1/(1+z)$, temos

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{K0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda0} \right], \quad (1.42)$$

com estimativas atuais $\Omega_{m0} = 0.3111 \pm 0.0056$ e $\Omega_{K0} = 0.007 \pm 0.0019$ do *Planck* 2018 (PLANCKVI, 2020).

1.3 Componentes do Universo

No modelo cosmológico padrão, as principais componentes são a radiação, a matéria e a energia escura, que evoluem de maneira diferente. Dadas a equação de estado (1.38) e a equação de Friedmann (1.42) então, para cada era teremos comportamentos distintos.

1.3.1 Radiação

A radiação pode ser modelada como um gás de fótons, com equação de estado

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r, \quad (1.43)$$

ou seja $\omega_r = 1/3$. Logo

$$\rho_r = \rho_{r0}a^{-4}, \quad (1.44)$$

e, de (1.41), obtemos a evolução do fator de escala

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_{r0}}\right)^{1/2}, \quad (1.45)$$

em que definimos $t_{r0} = (2H_0\sqrt{\Omega_{r0}})^{-1}$. Nesta era o campo de radiação, possuindo altas temperaturas, impossibilitava a formação de átomos, algo que ocorre após o chamado desacoplamento da radiação com a matéria

1.3.2 Matéria

A componente de matéria é dividida em matéria bariônica e matéria escura fria. A equação de estado é a dada na forma de um gás não relativístico com pressão nula e $\omega_m = 0$. De (1.38) temos

$$\rho_m = \rho_{m0}a^{-3}, \quad (1.46)$$

e o fator de escala evolui no tempo de acordo com a relação

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_{m0}}\right)^{1/2}, \quad (1.47)$$

com $t_{m0} = 2/(3H_0\sqrt{\Omega_{m0}})$, em que $\Omega_{m0} = \Omega_{b0} + \Omega_{c0}$, isto é, carrega as componentes bariônica e matéria escura fria. À medida que o universo se expandiu, o mesmo esfriou, permitindo assim que átomos de hidrogênio formados se mantivessem, período este chamado de recombinação. Uma vez que se deu a recombinação, há uma quantidade muito menor de elétrons livres no universo. O desacoplamento é o período em que o parâmetro de Hubble fica maior do que a razão com que os fótons sofrem espalhamento pelos elétrons, o que

permitiu a formação dos primeiros elementos. Chegamos então a última superfície de espalhamento, em que os fótons sofreram seu último espalhamento devido a elétrons livres e formaram a partir daí um fundo de radiação chamado radiação cósmica de fundo (RCF). Atualmente muitas medições são feitas acerca da RCF, uma vez que esta fornece uma ampla janela de observações do universo primordial (CHALLINOR, 2012).

1.3.3 Energia Escura

A descoberta da expansão acelerada do universo levou a busca da energia escura, um tipo de fluido que causa aceleração da expansão e que não é interagente com a matéria conhecida. Uma tentativa de solução foi a inclusão da constante cosmológica nas equações de campo. Esta componente possui uma equação de estado $\omega_\Lambda = -1$, o que leva a uma pressão negativa, acarretando assim em uma expansão acelerada, com o fator de escala evoluindo na forma $a(t) \propto \exp Ht$. Este é o modelo mais simples que tenta explicar a expansão atual.

1.4 Problemas do Modelo Cosmológico e a Inflação

- (i) **Problema da planura:** consiste em explicar o motivo pelo qual a densidade total de energia do universo é igual a densidade crítica. Para entender como isso ocorre, vamos escrever a equação de Friedmann (1.39) na forma

$$\Omega - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}. \quad (1.48)$$

O parâmetro $|\Omega - 1|$ cresce nas eras da radiação e da matéria e, dado que hoje $\Omega \approx 1$, então Ω deve ter um ajuste muito fino para conseguirmos um valor inicial tão preciso.

- (ii) **Problema do Horizonte:** A distribuição observada do fundo de microondas revela uma grande isotropia. O problema, no entanto, é que estas regiões distantes não teriam condições de ter tido contato causal antes da época em que a radiação se desacoplou da matéria (última superfície de espalhamento). Em outras palavras, o problema do horizonte aponta que diferentes regiões do universo não "entraram em contato" entre si por causa das grandes distâncias entre elas, mas, no entanto, têm a mesma temperatura e outras propriedades físicas. Isto não deve ser possível, uma vez que a transferência de informação (ou energia, calor, etc.) pode ocorrer, no máximo, à velocidade da luz. Em outras palavras, por que o universo é tão homogêneo e isotrópico?
- (ii) **Problema dos monopolos magnéticos:** Nas teorias de grande unificação é postulada a existência de relíquias tais como os monopolos magnéticos, que aparecem devido a quebra de simetria logo após a era de Planck. É conjecturado que a massa

desses monopolos é muito grande. Assim, à medida que o universo esfriou, a interação desses monopolos cessou, mantendo-se estável. O resultado seria uma abundância de monopolos magnéticos, o que não é observado.

Proposta inicialmente por Alan Guth ([GUTH, 1981](#)), a teoria da inflação traz a ideia de que o universo primordial passou por um período no qual houve uma expansão exponencial, impulsionada por um campo escalar (chamado *ínflaton*) e capaz de diluir a curvatura inicial do universo, resolvendo o problema da planura, e expandir drasticamente o horizonte, permitindo o contato causal de regiões distantes, o que resolve o problema do horizonte. Além disso, os monopolos são separados por uma escala de comprimento dada pelo produto da velocidade de propagação (c) com o tempo de Hubble (H_0^{-1}), ou seja, a densidade dos monopolos decai com o volume de Hubble, de modo que há uma diluição dos monopolos causada pela rápida expansão.

Por ser um período de expansão acelerada, o fator de escala possui uma taxa de crescimento positiva, ou seja, $\ddot{a} > 0$. A equação da aceleração, dada em (1.34), nos diz que $\rho + 3p < 0$, o que significa um parâmetro de estado $\omega < -1/3$, isto é, a inflação é realizada por um fluido com pressão negativa. Um dos mecanismos que descrevem este período é dado por meio de um campo escalar que, sob algumas condições, é capaz de gerar um potencial com o comportamento de uma constante cosmológica. Neste sentido, consideramos a densidade de energia do universo primordial sendo dominada pelo campo escalar ϕ , chamado de “ínflaton” e descrito por um potencial $V(\phi)$. Uma vez que a física da inflação não pode, ainda, ser testada em um acelerador de partículas aqui na terra, devido a escala de energia extremamente alta, a forma do potencial $V(\phi)$ é relativamente desconhecida, o que dá a possibilidade de vários modelos serem testados.

A ação para o campo escalar, minimamente acoplado à gravidade é dada por

$$S_{inf} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_p^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \partial_\sigma \phi \partial_\rho \phi - V(\phi) \right], \quad (1.49)$$

cujas variação em relação à métrica nos fornece o tensor energia momento:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \partial_\sigma \phi \partial_\rho \phi + V(\phi) \right], \quad (1.50)$$

e cujas componentes são $T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$, onde

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \\ p_\phi &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \end{aligned} \quad (1.51)$$

são a densidade e a pressão, respectivamente. Com isso as equações de Friedmann podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{\rho_\phi}{3M_p^2} = \frac{1}{3M_p^2} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{1}{6M_p^2} (\rho + 3p) = -\frac{1}{3M_p^2} (\dot{\phi}^2 - V(\phi)), \end{aligned} \quad (1.52)$$

as quais estabelecem uma relação entre o campo escalar e o fator de escala. A dinâmica do campo escalar é dada pela equação

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{\phi} = 0, \quad (1.53)$$

na qual $V_{\phi} = \partial V / \partial \phi$. O segundo termo da equação acima atua como um termo de atrito, de tal modo que o potencial é minimizado.

Uma condição importante para haver inflação é a rolagem lenta do campo escalar em torno do potencial suficientemente plano até alcançar o estado de mínima energia. Para isto, devemos ter

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} \ll V(\phi) \quad \text{e} \quad |\ddot{\phi}| \ll 3H|\dot{\phi}|, \quad (1.54)$$

chamadas condições slow-roll. Das equações (1.52) podemos escrever

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_p^2}, \quad (1.55)$$

enquanto que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \varepsilon), \quad (1.56)$$

onde definimos o primeiro parâmetro slow-roll

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (1.57)$$

de modo que a inflação ocorre enquanto $\varepsilon < 1$ e encerra-se em $\varepsilon = 1$. Portanto, segundo as condições slow-roll, as equações (1.53) e (1.52) são escritas na forma

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{V_{\phi}}{3H}, \quad (1.58)$$

$$H^2 \simeq \frac{V}{3M_p^2}, \quad (1.59)$$

e com isso obtemos

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{V}, \quad (1.60)$$

que, em termos do potencial, pode ser escrito

$$\varepsilon = \frac{M_p^2}{2} \left(\frac{V_{\phi}}{V} \right)^2, \quad (1.61)$$

que equivale à primeira condição slow-roll. Um segundo parâmetro, que equivale à segunda condição slow-roll é dado por

$$\eta = M_p^2 \left(\frac{V_{\phi\phi}}{V} \right). \quad (1.62)$$

de modo geral, ε caracteriza inclinação e η caracteriza curvatura do potencial.

Uma outra quantidade importante a ser definida é o número de e-folds, N , que nos diz a quantidade de vezes em que a potência do fator de escala cresce com o fator e :

$$N = \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right) = \int_{a_i}^{a_f} H dt. \quad (1.63)$$

Em termos do potencial, temos

$$N = \int_{\phi_*}^{\phi_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi = \frac{1}{M_p^2} \int_{\phi_f}^{\phi_*} \frac{V}{V_\phi} d\phi, \quad (1.64)$$

onde ϕ_* é o valor do campo escalar para algum valor inicial de N . Em geral a descrição do regime inflacionário é dada através destes parâmetros, os quais são relacionados a outros parâmetros que podem ser medidos pelas observações, como veremos mais adiante.

2 A Inflação Taquiônica

Dentre os modelos que descrevem a expansão inflacionária, os inspirados em teoria de cordas são muito considerados na cosmologia atual, já que a inflação ocorre próxima da escala de Planck (GAROUSI; SAMI; TSUJIKAWA, 2004). Alguns destes modelos utilizam o *campo taquiônico*, um campo escalar associado a *D-branas*, onde a inflação é descrita por uma corda aberta descrevendo a posição da brana nas dimensões extras (DVALI; TYE, 1999). Uma das características apresentadas pela inflação taquiônica é sua generalidade, se comparada com a teoria da inflação usual, uma vez que apresenta um termo cinético com derivadas de ordem mais alta. Partindo da teoria de branas, vamos encontrar uma teoria do tipo Dirac-Born-Infeld (DBI), na qual o campo taquiônico pode assumir uma rolagem lenta, necessária para tornar a inflação possível. Neste capítulo analisaremos essa teoria, obtendo os parâmetros necessários para a descrição inflacionária.

2.1 Táquions

O primeiro argumento teórico sobre a possibilidade de existência de partículas com momento tipo espaço pode ser encontrado em um artigo de Wigner, no qual a classificação de representações unitárias irredutíveis do grupo de Poincaré foi feita pela primeira vez (WIGNER, 1939). Ele mostrou que as equações da mecânica quântica correspondentes a tais representações unitárias descrevem partículas com massa de repouso imaginária movendo-se mais rápidas do que a luz. As partículas foram denominadas *táquions* e tanto a descrição cinemática (BILANIUK; DESHPANDE; SUDARSHAN, 1962) quanto a descrição via teoria quântica de campos (FEINBERG, 1967) foram teorizadas.

Essas proposições imediatamente encontraram fortes objeções relacionadas ao princípio da causalidade. A primeira devido ao fato de que, ao usar táquions como portadores de informação, pode-se construir um laço causal, tornando possível a transferência de informações para o tempo passado de um observador, o que é incompatível com o princípio da causalidade da teoria da relatividade especial (NEWTON, 1967). A segunda é devida à instabilidade do vácuo que, devido a sua configuração, torna impossível a existência de táquions como partícula (FANCHI, 1990).

Felizmente, ambos os problemas mostraram-se mutuamente conectados e algumas abordagens foram feitas combinando a hipótese do táquion com a cosmologia moderna, que estabelece o referencial comóvel, em que a distribuição da matéria no universo, bem como a radiação cósmica de fundo, são isotrópicas. No referencial comoviente os táquions são responsáveis pela propagação dos sinais através do espaço. Esses sinais acabam sendo ordenados pela causalidade retardada no referencial. Por exemplo, táquions poderiam ter

sido criados juntamente no início do universo, ou então serem criados por algum processo quântico similar ao processo de criação de pares de partículas-antipartículas. Em qualquer caso a velocidade dessas partículas seria, em toda a sua existência, sempre maior que a da luz – não há nisso qualquer contradição com a teoria da relatividade, já que ninguém teve de acelerá-las!

Além disso, em paralelo com a ordem causal da propagação do táquion, é possível obter um vácuo taquiônico estável que apresenta o mínimo do hamiltoniano e parece, no referencial comovente, ser um conjunto de táquions na camada de massa com energia zero, mas momento finito, propagando-se isotropicamente. Os limites deste vácuo confina os táquions acausais.

2.2 Condensação taquiônica

Os modelos de Randall-Sundrum (RSI e RSII) pertencem a classe de modelos de brana, que são baseados na ideia de que a matéria ordinária está confinada em uma hipersuperfície, chamada brana, localizada em um espaço tempo possuindo dimensões extras, conhecido como bulk ([RANDALL; SUNDRUM, 1999a](#); [RANDALL; SUNDRUM, 1999b](#)). Embora o modelo RSI tenha sido proposto inicialmente como uma solução do problema da hierarquia (a discrepância entre a força da gravidade e as demais forças) em física de partículas, ao introduzir uma dimensão extra compactificada em um círculo, o modelo mostrou-se plausível para estudos em outras áreas como astrofísica, buracos negros e cosmologia. O segundo modelo de Randall-Sundrum (RSII) consiste em uma brana com tensão positiva e prevê um mecanismo para localizar gravidade sem a compactificação da dimensão extra ([RANDALL; SUNDRUM, 1999a](#)). Uma segunda brana movendo-se no bulk comporta-se efetivamente como um táquion ([BILIĆ; TUPPER, 2014](#)), o que levou a investigações mais amplas sobre o papel de tais partículas na cosmologia moderna.

Nos últimos anos temos visto um progresso dramático no entendimento de aspectos não perturbativos em teoria das cordas ([NATHAN, 1994](#); [POLCHINSKI, 1996](#); [DUFF, 1996](#)). Um importante objeto nessas investigações tem sido as branas de Dirichlet (ou D-branas), estados não perturbativos nos quais existem uma corda aberta e nos quais cordas fechadas, incluindo estados Ramond-Ramond (RR), podem se acoplar. As cordas abertas que terminam na D-brana podem ser interpretadas como modos dinâmicos da D-brana. Para calcular o espectro desses estados de corda aberta, podemos impor condições de contorno de Dirichlet ao longo da direção transversal e condições de Neumann ao longo da direção paralela à brana. Uma D-brana com direções espaciais tangenciais p é chamada D p -brana ([BLUMENHAGEN et al., 2009](#)).

As teorias de corda tipo II possuem dois tipos de D-branas, as D p -branas BPS para p par (ímpar) e as D p -branas não BPS para p ímpar (par) em teorias IIA (IIB) ([WITTEN,](#)

1996). As branas BPS são sólitons estáveis que quebram metade das supersimetrias espaço-temporais e suas dinâmicas são descritas em teoria de campos pela ação de Dirac-Born-Infeld (DBI) (LEIGH, 1989; CALLAN et al., 1988), e pela ação de Chern-Simons (LI, 1996). As Dp-branas não BPS, por outro lado, descrevem modos taquiônicos de corda aberta cuja massa faz com que a brana seja instável no espaço tempo plano. No entanto, existem outros termos no potencial taquiônico que o tornam limitado por baixo. Consequentemente, as branas não BPS decaem para o mínimo do potencial taquiônico. Pela conjectura de Sen, em um ponto estacionário do potencial taquiônico, a energia mínima negativa mais a energia positiva da tensão da brana é exatamente zero (SEN, 1998). Por isso as branas não BPS instáveis no vácuo devem decair para o vácuo verdadeiro da teoria no qual não existem branas. Em outras palavras, não existem soluções de onda plana para as equações de movimento linearizadas ao redor do mínimo do potencial taquiônico. Além disso, se deixarmos o campo taquiônico rolar começando com qualquer configuração inicial espacialmente homogênea, ele evoluirá assintoticamente em direção ao seu mínimo, em vez de oscilar em torno do mínimo, de modo que a pressão tende a zero (SEN, 2002a; SEN, 2002b). Este estudo foi realizado em (SEN; ZWIEBACH, 2000) no cenário de teoria de cordas.

De modo geral, a teoria que descreve uma D-brana não BPS (teoria tipo II) inclui um vetor A_a de massa nula com simetria $U(1)$, um conjunto de escalares x^i descrevendo oscilações transversais, um estado taquiônico Θ e seus parceiros fermiônicos (SEN, 2000). A ação de baixa energia para os campos de massa nula corresponde a uma redução dimensional de uma teoria de Yang-Mills de dez dimensões. Como usual em teoria de cordas, existem correções de ordem mais alta $\alpha' = l_s^2$, onde l_s é a escala e comprimento da corda. Contanto que as derivadas das forças de campo (e derivadas segundas dos escalares) sejam pequenas comparado a l_s , a ação toma a forma de uma ação do tipo Dirac-Born-Infeld (DBI) (LEIGH, 1989; KITAZAWA, 1987):

$$S_{DBI} = - \int d^{p+1}x V(\Theta) e^{-\varsigma} \sqrt{-\det(g_{ab} + 2\pi\alpha'(F_{ab} + \partial_a\Theta\partial_b\Theta))}, \quad (2.1)$$

onde ς , g_{ab} e F_{ab} são o dÍlaton, a métrica e o tensor de Maxwell, respectivamente. O potencial $V(\Theta)$ deve satisfazer condições específicas (STEER; VERNIZZI, 2004)

$$V(0) < \infty, \quad \frac{dV}{d\Theta}(\Theta > 0) < 0, \quad V(|\Theta| \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Muitos modelos cosmológicos consideram um cenário com uma D3 brana no espaço compacto, onde a inflação surge da interação desta com sua anti D3 brana (KACHRU et al., 2003). A inflação surge então na configuração na qual a D3 brana inicia seu movimento em direção à anti D3 brana. Ao atingir uma distância crítica, o campo escalar se converte em um modo taquiônico que causa aniquilação brana-anti-brana, produzindo radiação (BARNABY; CLINE, 2004). A ação neste caso deve ser uma ação efetiva em 4 dimensões

do tipo

$$S_{ef} = - \int d^4x V(\Theta) \sqrt{-\det(g_{ab} + \alpha' \partial_a \Theta \partial_b \Theta)}, \quad (2.3)$$

onde desconsideramos o dÍlaton e o tensor de Maxwell. Podemos ainda reescrever esta ação na forma

$$S_{ef} = - \int d^4x \sqrt{-g} V(\Theta) \sqrt{1 + \alpha' g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Theta \partial_\beta \Theta}, \quad (2.4)$$

onde fizemos o cálculo do determinante. Temos então uma ação que é uma generalização da teoria usual da inflação com campo escalar, o que motiva a estudar mais possibilidades dentro deste cenário.

2.3 O modelo inflacionário

A ação mais geral para o estudo da inflação taquiônica é dada pela soma da ação de Einstein-Hilbert com a ação efetiva:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_p^2}{2} R - V(\Theta) \sqrt{1 + \alpha' g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Theta \partial_\beta \Theta} \right], \quad (2.5)$$

cujas variações da ação de Einstein-Hilbert em relação ao tensor métrico já calculamos

$$\delta S_{EH} = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

enquanto que a variação da ação do campo taquiônico nos dá

$$\begin{aligned} \delta S_\Theta &= - \int d^4x \left[\delta \sqrt{-g} V(\Theta) \sqrt{1 + \alpha' g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Theta \partial_\beta \Theta} + \sqrt{-g} V(\Theta) \delta \sqrt{1 + \alpha' g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Theta \partial_\beta \Theta} \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} V(\Theta) \left[\frac{g_{\mu\nu} (1 + \alpha' g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Theta \partial_\beta \Theta) - \alpha' \partial_\mu \Theta \partial_\nu \Theta}{2 \sqrt{1 + \alpha' g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Theta \partial_\beta \Theta}} \right] \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

de forma que o princípio da mínima ação nos fornece as equações de campo

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{M_p^2} T_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

onde o tensor energia momento é, portanto,

$$T_{\mu\nu} = V(\Theta) \left[\frac{g_{\mu\nu} (1 + \alpha' g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Theta \partial_\beta \Theta) - \alpha' \partial_\mu \Theta \partial_\nu \Theta}{\sqrt{1 + \alpha' g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Theta \partial_\beta \Theta}} \right]. \quad (2.9)$$

Considerando o tensor energia momento isotrópico, isto é, $T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$ e a dependência apenas temporal do campo $\Theta = \Theta(t)$, obtemos a densidade e a pressão na forma

$$\rho_\Theta = \frac{V(\Theta)}{\sqrt{1 - \alpha' \dot{\Theta}^2}} \quad (2.10)$$

$$p = -V(\Theta) \sqrt{1 - \alpha' \dot{\Theta}^2}, \quad (2.11)$$

e, logo o parâmetro de estado pode ser escrito como sendo

$$\omega = \frac{p_\Theta}{\rho_\Theta} = -1 + \alpha' \dot{\Theta}^2 \equiv -c_s^2, \quad (2.12)$$

em que c_s é a velocidade do som no meio, que pode ser inserida dada a presença de um termo cinético não canônico (KHOURY; PIAZZA, 2009). Para obter a equação da dinâmica do campo escalar em si, faz-se necessário o uso da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\Theta}{\partial \Theta} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\Theta}{\partial (\partial_\mu \Theta)} \right) = 0, \quad (2.13)$$

que, aplicada à densidade lagrangiana $\mathcal{L}_\Theta = -V(\Theta)\sqrt{1 + \alpha' g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Theta \partial_\beta \Theta}$, nos dá como resultado

$$\sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \Theta} \sqrt{1 + \alpha' g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Theta \partial_\beta \Theta} - \partial_\mu \left(\frac{\sqrt{-g} V(\Theta) \alpha' \partial^\mu \Theta}{\sqrt{1 + \alpha' g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Theta \partial_\beta \Theta}} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Assumindo uma dependência temporal $\Theta = \Theta(t)$, obtemos

$$\frac{\ddot{\Theta}}{1 - \alpha' \dot{\Theta}^2} + 3H\dot{\Theta} + \frac{V_\Theta}{\alpha' V} = 0 \quad (2.15)$$

e, assumindo um regime *slow-roll*, $\alpha' \dot{\Theta}^2 \ll 1$ e $|\ddot{\Theta}| \ll 3H|\dot{\Theta}|$, conjuntamente com a equação de Friedmann, obtemos

$$\begin{cases} 3H\dot{\Theta} + \frac{V_\Theta}{\alpha' V} \approx 0, \\ H^2 \approx \frac{V}{3M_p^2} \\ \dot{H} \approx -\frac{\alpha' V \dot{\Theta}^2}{2M_p^2} \end{cases} \quad (2.16)$$

Agora podemos encontrar os parâmetros *slow-roll*, definidos por (STEER; VERNIZZI, 2004)

$$\varepsilon_1 \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_{i+1} \equiv \frac{\dot{\varepsilon}_i}{H\varepsilon_i} \quad (i \geq 1) \quad (2.18)$$

cujos primeiros parâmetros são

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{M_p^2}{2\alpha'} \frac{V_\Theta^2}{V^3} \\ \varepsilon_2 &= \frac{M_p^2}{\alpha'} \left(-\frac{2V_{\Theta\Theta}}{V^2} + \frac{3V_\Theta^2}{V^3} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Um outro parâmetro importante para quantificar a inflação é o *número de e-folds*, definido por

$$N(\Theta_k, \Theta_f) = \int_{t_k}^{t_f} H(t) dt = \int_{\Theta_k}^{\Theta_f} \frac{H}{\dot{\Theta}} d\Theta = \frac{\alpha'}{M_p^2} \int_{\Theta_f}^{\Theta_k} \frac{V^2}{V_\Theta} d\Theta, \quad (2.20)$$

em que Θ_f é dado quando $\varepsilon_1(\Theta_f) \sim 1$, ou seja, no fim da inflação. A medida do número de e-folds depende da equação de estado durante a transição entre a inflação e as eras da radiação e da matéria e um valor aceito atualmente é de $N \approx 50 - 60$ para inflação.

Na próxima seção aplicaremos a inflação slow-roll para alguns possíveis potenciais que podem descrever o comportamento do campo taquiônico.

2.4 Potenciais taquiônicos

Nesta seção analisaremos o regime inflacionário dirigido pelo campo escalar descrito pelos potenciais *secante hiperbólica quadrática* e *beta exponencial*, a fim de obter os parâmetros slow-roll e número de e-folds, necessários para uma descrição fenomenológica da teoria. O primeiro potencial não apresenta um estado de vácuo, motivo pelo qual é denominado potencial *vacuumless* (CHO; VILENKIN, 1998), contudo o seu mínimo é localizado no infinito, o que lhe permite suportar soluções do tipo vórtice

2.4.1 Potencial do tipo secante hiperbólica quadrática

Dado o potencial

$$V(\Theta) = V_0 \operatorname{sech}^2(\lambda\Theta), \quad (2.21)$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 3, obtemos

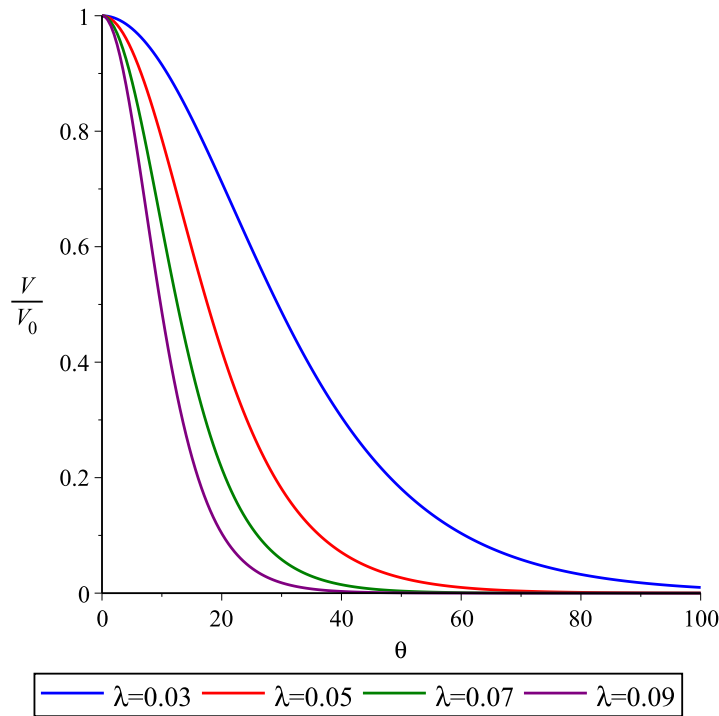


Figura 3 – Potencial secante hiperbólico para alguns valores de λ .

$$\varepsilon_1 = \frac{2M_p^2\lambda^2}{\alpha'V_0} \sinh^2(\lambda\Theta) \quad \varepsilon_2 = \frac{4M_p^2\lambda^2}{\alpha'V_0} \cosh^2(\lambda\Theta), \quad (2.22)$$

enquanto que

$$N = f^2 [\ln(\tanh(\lambda\Theta_f)) - \ln(\tanh(\lambda\Theta_k))] , \quad (2.23)$$

onde definimos $f^2 = \alpha'V_0/2M_p^2\lambda^2$. Considerando $\varepsilon_1(\Theta_f) = 1$, encontramos $\tanh(\lambda\Theta_f) = f$, logo

$$\tanh(\lambda\Theta_f) = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \approx 1$$

e, portanto, podemos escrever (2.23) na forma

$$\tanh(\lambda\Theta_k) = e^{-N/f^2}. \quad (2.24)$$

Dessa maneira, podemos reescrever os parâmetros (2.22) em termos de p e N utilizando as definições anteriores.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2f^2} \left[\coth\left(\frac{N}{f^2}\right) - 1 \right] \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{f^2} \left[\coth\left(\frac{N}{f^2}\right) + 1 \right], \quad (2.26)$$

cujos comportamentos em função de N é mostrado na Figura 4. Na inflação usual, o potencial

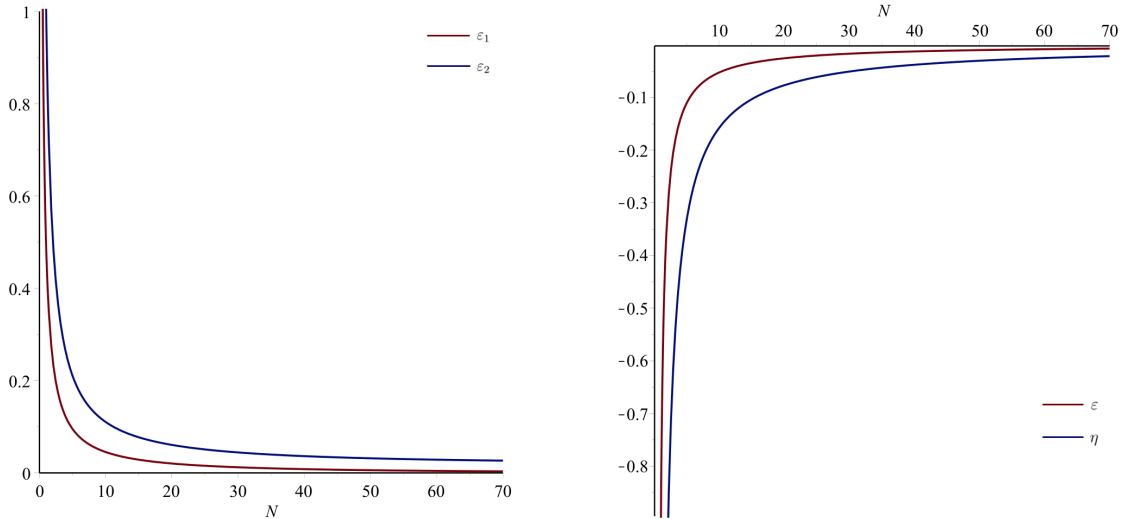


Figura 4 – O comportamento dos parâmetros slow-roll (2.25) (à esquerda) e (2.32) (à direita).

equivalente é dado por

$$V(\Theta) = V_0 \operatorname{sech}^2(\lambda\phi/M_p), \quad (2.27)$$

cujos parâmetros slow-roll são

$$\varepsilon = 2\lambda^2 \tanh^2(\lambda\phi/M_p), \quad \eta = \frac{2\lambda^2[2\cosh^2(\lambda\phi/M_p) - 3]}{\cosh^2(\lambda\phi/M_p)}, \quad (2.28)$$

onde o fim da inflação ocorre para um valor do campo escalar ϕ_f tal que

$$\tanh^2(\lambda\phi_f/M_p) = \frac{1}{2\lambda^2}. \quad (2.29)$$

O número de e-folds é dado por

$$N = -\frac{1}{2\lambda^2} \ln \left(\frac{\sinh^2(\lambda\phi_k/M_p)}{\sinh^2(\lambda\phi_f/M_p)} \right), \quad (2.30)$$

de modo que

$$\sinh(\lambda\phi_k/M_p) = \sinh(\lambda\phi_f/M_p) e^{-2N\lambda^2}, \quad (2.31)$$

e portanto, os parâmetros slow-roll podem ser escritos em função de N :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{2\lambda^2}{1 + (2\lambda^2 - 1)e^{4N\lambda^2}} \\ \eta &= 2\lambda^2 \left[\frac{2 - (2\lambda^2 - 1)e^{4N\lambda^2}}{1 + (2\lambda^2 - 1)e^{4N\lambda^2}} \right], \end{aligned} \quad (2.32)$$

com o comportamento mostrado na Figura 4. Observe que este potencial leva a parâmetros slow-roll negativos para valores de N entre 0 e 70, o que não ocorre no modelo taquiônico. Portanto, modelos deste tipo não são comportados na inflação usual.

2.4.2 Potencial tipo β -exponencial

O potencial β -exponencial, inicialmente proposto no contexto da cosmologia de branas, é uma classe de potenciais inseridos como uma generalização do potencial exponencial usual (ALCANIZ; CARVALHO, 2007; SANTOS et al., 2018). No contexto da inflação taquiônica podemos considerar

$$V(\Theta) = V_0(1 - \beta\lambda\Theta)^{1/\beta}, \quad (2.33)$$

como uma generalização do potencial exponencial, $\lim_{\beta \rightarrow 0} V(\Theta) = \exp(-\lambda\Theta)$, e cujo comportamento é dado na Figura 5 para alguns valores de β . Para o potencial (2.33) os parâmetros slow-roll são

$$\varepsilon_1(\Theta) = \frac{M_p^2 \lambda^2}{2\alpha' V_0} (1 - \beta\lambda\Theta)^{-2-1/\beta}, \quad \varepsilon_2(\Theta) = \frac{M_p^2 \lambda^2 (1 - 2\beta)}{\alpha' V_0} (1 - \beta\lambda\Theta)^{-2-1/\beta} \quad (2.34)$$

O número de e-folds é dado por

$$N = \frac{\alpha' V_0}{M_p^2 \lambda^2 (1 + 2\beta)} \left[(1 - \beta\lambda\Theta_k)^{2+1/\beta} - (1 - \beta\lambda\Theta_f)^{2+1/\beta} \right] \quad (2.35)$$

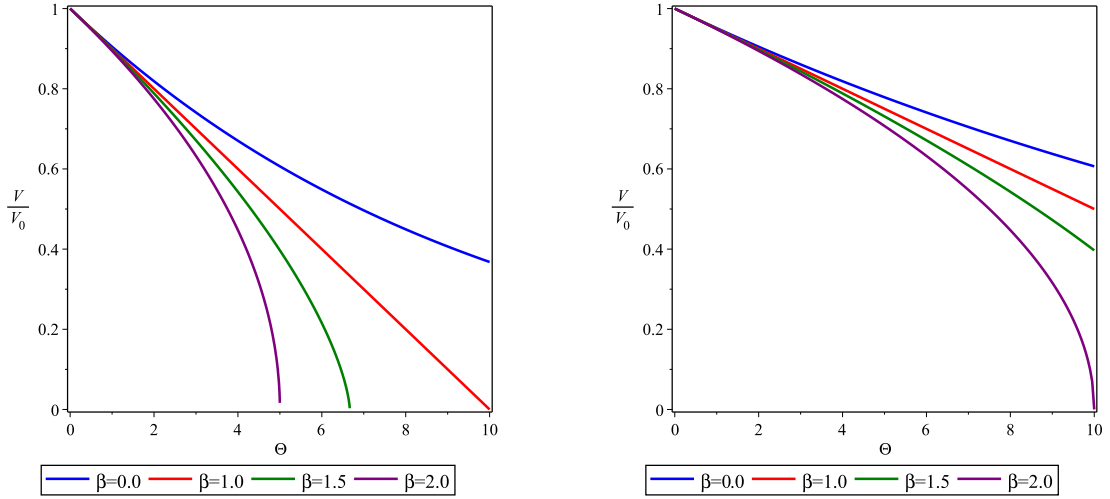


Figura 5 – O comportamento do potencial β -exponencial para diferentes valores de β , com $\lambda = 0.1$ (à esquerda) e $\lambda = 0.05$ (à direita).

onde Θ_f é o valor de Θ quando a inflação termina, i.e. $\varepsilon_1(\Theta_f) = 1$. Então

$$(1 - \beta\lambda\Theta_k)^{2+1/\beta} = \frac{M_p^2\lambda^2}{2\alpha'V_0} [1 + 2N(1 + 2\beta)] \quad (2.36)$$

e, portanto, podemos escrever os parâmetros slow-roll em função de N :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1 + 2N(1 + 2\beta)} \quad \varepsilon_2 = \frac{2 + 4\beta}{1 + 2N(1 + 2\beta)}, \quad (2.37)$$

cujo comportamento é mostrado na Figura 6 para alguns valores de β .

Na teoria da inflação usual, temos (SANTOS et al., 2018)

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2}{2(1 - \beta\lambda\phi/M_p)^2} \quad \eta = \frac{\lambda^2(1 - \beta)}{(1 - \beta\lambda\phi/M_p)^2}, \quad (2.38)$$

com o número de e-folds dado por

$$N = \left[\frac{\beta}{2} \left(\frac{\phi}{M_p} \right)^2 - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\phi}{M_p} \right) \right]_{\phi_f}^{\phi_*}, \quad (2.39)$$

onde ϕ_f é o valor do campo no final da inflação, isto é, $\varepsilon(\phi_f) = 1$, satisfazendo a relação

$$\left(1 - \frac{\beta\lambda\phi_f}{M_p} \right)^2 = \frac{\lambda^2}{2}. \quad (2.40)$$

Como resultado, podemos escrever ϕ_* em função de N na forma

$$\frac{\phi_*}{M_p} = \frac{1}{\beta\lambda} - \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{1}{2} + 2N\beta} \quad (2.41)$$

e, conseqüentemente, os parâmetros slow-roll podem ser escritos como

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + 4N\beta} \quad \eta = \frac{2(1 - \beta)}{1 + 4N\beta}, \quad (2.42)$$

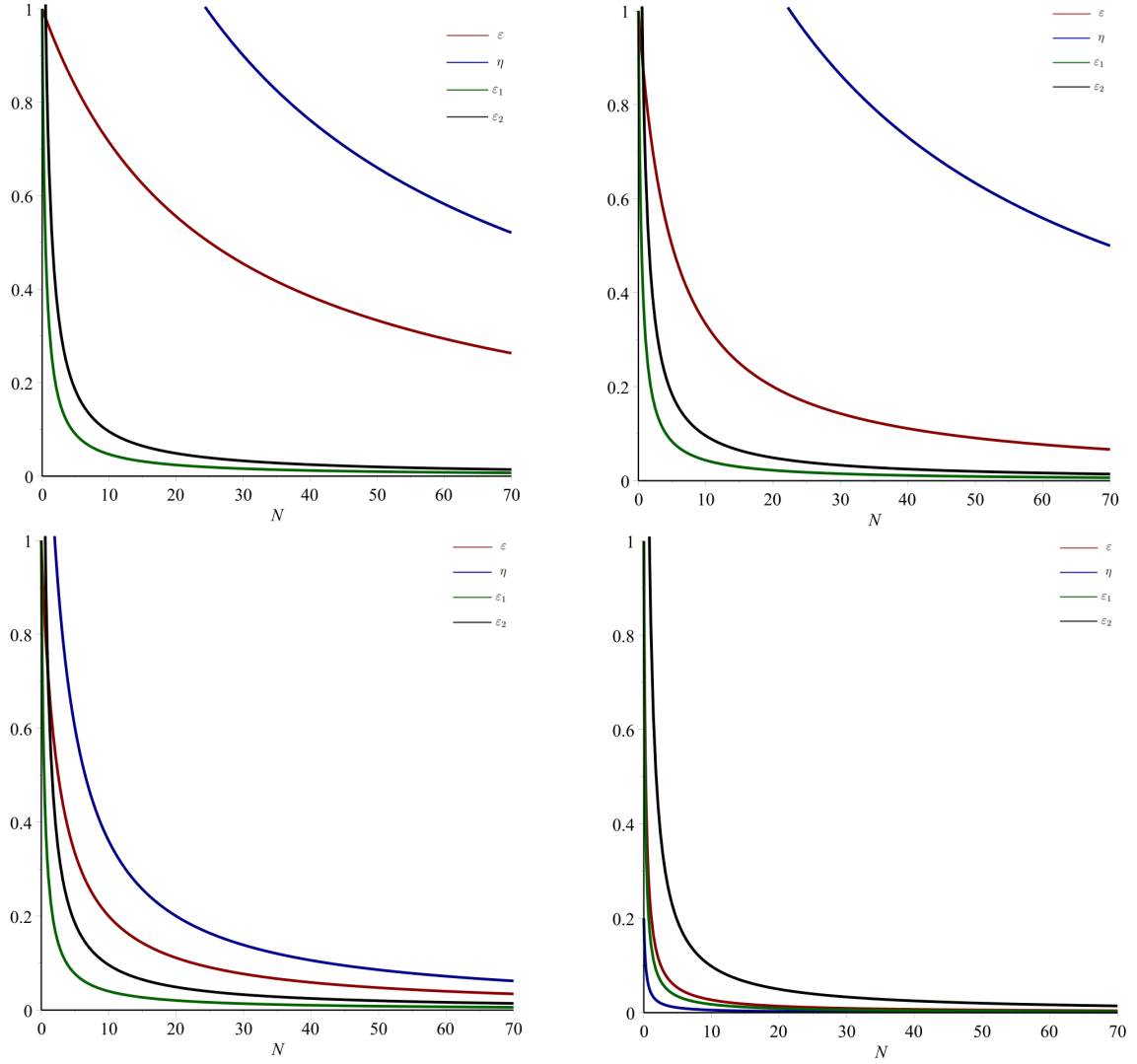


Figura 6 – O comportamento dos parâmetros slow-roll usual (ε e η) e taquiônico (ε_1 e ε_2) em função do número de e-folds, N , para o potencial β -exponencial para diferentes valores de β . Em ordem, temos $\beta = 0.01$ (superior esquerdo), $\beta = 0.05$ (superior direito), $\beta = 0.1$ (inferior esquerdo), $\beta = 0.9$ (inferior direito).

mostrados na Figura 6 para alguns valores de β .

As discrepâncias entre a teoria usual e a teoria taquiônica são maiores para valores pequenos de β e menores à medida que β tende a 1. Isso reflete-se nos índices espectrais, que no caso do potencial β -exponencial tende a aproximar-se à medida que o valor de β cresce, como veremos no próximo capítulo.

3 Perturbações na inflação taquiônica

A teoria da inflação é bem respaldada no tocante a observação de fenômenos conectados com as flutuações quânticas geradas nesse período, tais como a anisotropia da RCF, as ondas gravitacionais primordiais e a estrutura em larga escala. Genericamente, as perturbações primordiais podem ser decompostas em três tipos: perturbações escalar, vetorial e tensorial. As perturbações escalares causam as anisotropias da RCF e a formação de estruturas em larga escala e são também denominadas *modos E*; As perturbações vetoriais correspondem a vórtices que decaem rapidamente durante a expansão do Universo e podem ser negligenciadas em um tempo posterior; já as perturbações tensoriais, isto é, as ondas gravitacionais primordiais imprimem uma assinatura no espectro de potências da RCF produzindo polarização do tipo *modos B* (SAYRE et al., 2020; JEONG; KAMI-ONKOWSKI, 2020). Neste capítulo, estudaremos as perturbações inflacionárias, obtendo o espectro de potências e os índices espectrais, vinculando alguns potenciais à luz das observações recentes.

3.1 A métrica perturbada

No tratamento das perturbações vamos considerar o tensor métrico expandido em uma base $\bar{g}_{\mu\nu}$ e na perturbação $\delta g_{\mu\nu}$, tal que o elemento de linha pode ser escrita como

$$ds^2 = (\bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu. \quad (3.1)$$

A métrica de fundo $\bar{g}_{\mu\nu}$, espacialmente plana, homogênea e isotrópica, possui um certo número de simetrias que permite com que as perturbações $\delta g_{\mu\nu}$ sejam caracterizadas em três diferentes tipos: escalar, vetorial e tensorial. Em um dado instante de tempo, a métrica de fundo é invariante sob rotações e translações espaciais. A componente δg_{00} se comporta como um escalar sob rotações, logo

$$\delta g_{00} = -2A(x^\mu), \quad (3.2)$$

onde $A(x^\mu)$ é uma função escalar. As componentes δg_{0i} podem ser decompostas em

$$\delta g_{0i} = \partial_i B + S_i, \quad (3.3)$$

onde B é um escalar e S_i é um vetor de divergência nula, $\partial_i S^i = 0$. Já as componentes δg_{ij} são escritas como uma combinação mais geral do tipo

$$\delta g_{ij} = a^2(-2D\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j E + \partial_i F_j + \partial_j F_i + h_{ij}), \quad (3.4)$$

em que D e E são funções escalares, o vetor F_i tem divergência nula, $\partial_i F^i = 0$ e h_{ij} é um tensor de traço nulo, $h^i_i = 0$ e é transversal, $\partial_i h^i_j = 0$. Portanto, o elemento de linha (3.1) pode ser decomposta em três partes:

i) **Perturbações escalares:** escrita como

$$ds^2 = -(1 + 2A)dt^2 + 2\partial_i B dx^i dt + a^2(t) [(1 - 2D)\delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E] dx^i dx^j \quad (3.5)$$

ii) **Perturbações vetoriais:**

$$ds^2 = -dt^2 + 2S_i dx^i dt + a^2(t) [\delta_{ij} + \partial_i F_j + \partial_j F_i] dx^i dx^j \quad (3.6)$$

iii) **Perturbações tensoriais:**

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \quad (3.7)$$

3.2 Invariância de calibre

A invariância de calibre está relacionada com a forma pela qual definimos as “fatias” do espaço tempo perturbado. Ao transformar a perturbação em uma nova variável temporal, devemos escolher esta última como uma variável que é insensível frente a essa transformação, isto é, que seja invariante. Dessa maneira, para qualquer função escalar f no espaço tempo, podemos definir uma nova função perturbada tal que

$$f'(t') = f(t), \quad (3.8)$$

logo, para primeira ordem em Δt , temos

$$f'(t') = f'(t - \Delta t) \approx f(t) - \dot{f}\Delta t. \quad (3.9)$$

De maneira mais rigorosa podemos escrever a perturbação de qualquer quantidade física como sendo a diferença entre o valor dessa variável no espaço tempo físico, que é não homogêneo e anisotrópico, e o valor no espaço tempo de fundo, que é homogêneo e isotrópico. As transformações de calibre são transformações de coordenadas entre dois referenciais, o que significa que fixar um calibre é o mesmo que escolher um sistema de coordenadas. Assim podemos generalizar o conceito aplicado para a função f para um campo escalar geral $q(x^\mu)$, na forma

$$\delta q' = \delta q - \partial_\mu q \delta x^\mu. \quad (3.10)$$

Para um tensor, vale a relação

$$\delta g'_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - \partial_\gamma g_{\mu\nu} \delta x^\gamma - g_{\mu\gamma} \partial_\nu \delta x^\gamma - g_{\gamma\nu} \partial_\mu \delta x^\gamma. \quad (3.11)$$

Podemos usar as transformações de calibre para simplificar as equações de movimento, usando para isto combinações invariantes, como as adotadas em alguns trabalhos na literatura, conhecidas como potenciais de Bardeen, dados por

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv -A - \frac{d}{dt} (B - a\dot{E}) \\ \zeta &\equiv -D - \frac{1}{6} \nabla^2 E + B - a\dot{E}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Além destes, existe outra função invariante de calibre que descreve as perturbações conhecida como perturbação de curvatura, definida por

$$\mathcal{R} \equiv \zeta - \frac{H}{\bar{\rho} + \bar{p}} \delta q, \quad (3.13)$$

onde δq é a parte escalar do tensor T_i^0 , ou seja, $T_i^0 = \partial_i \delta q$. A perturbação de curvatura pode ser interpretada como uma medida da curvatura espacial das hipersuperfícies comoventes e, para aquelas em que $\delta q = 0$, reduz-se ao potencial gravitacional ζ .

3.3 Perturbações escalares

Um calibre muito utilizado é o calibre Newtoniano, onde as quantidades perturbadas da métrica são substituídas pelos potenciais de Bardeen na forma

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + a^2(t)(1 - 2\zeta)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.14)$$

de modo que as equações de Einstein perturbadas, $\delta G_\nu^\mu = \delta T_\nu^\mu/M_p^2$, são dadas por (ver Apêndice A)

$$6H\dot{\zeta} - 2\frac{\nabla^2 \zeta}{a^2} + 6H^2\Phi = -\frac{\delta\rho}{M_p^2} \quad (3.15)$$

$$\left[6H^2\Phi + 4\dot{H}\Phi + 2H\dot{\Phi} + 6H\dot{\zeta} + 2\ddot{\zeta} + \frac{\nabla^2(\Phi - \zeta)}{a^2} \right] \delta_j^i - \frac{\delta^{il}\partial_l\partial_j(\Phi - \zeta)}{a^2} = \frac{\delta p}{M_p^2} \quad (3.16)$$

$$\partial_i(\dot{\zeta} + H\Phi) = \frac{\alpha'\bar{\rho}\dot{\Theta}\partial_i\delta\Theta}{2M_p^2}. \quad (3.17)$$

Uma vez que o tensor energia momento é diagonal, isto é o tensor é nulo para $i \neq j$, obtemos

$$\delta^{il}\partial_l\partial_j(\Phi - \zeta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi = \zeta,$$

o que simplifica nossas equações de movimento, as quais se tornam

$$3H\dot{\Phi} + 3H^2\Phi - \frac{\nabla^2\Phi}{a^2} = -\frac{\delta\rho}{2M_p^2} \quad (3.18)$$

$$\ddot{\Phi} + 3H^2\Phi + 2\dot{H}\Phi + 4H\dot{\Phi} = \frac{\delta p}{2M_p^2} \quad (3.19)$$

$$\dot{\Phi} + H\Phi = \frac{\alpha'\bar{\rho}\dot{\Theta}\delta\Theta}{2M_p^2}, \quad (3.20)$$

onde

$$\bar{\rho} = \frac{V(\bar{\Theta})}{\sqrt{1 - \alpha'\dot{\bar{\Theta}}^2}} \quad \bar{p} = -V(\bar{\Theta})\sqrt{1 - \alpha'\dot{\bar{\Theta}}^2} \quad (3.21)$$

e

$$\begin{aligned}\delta\rho &= \frac{V_\Theta}{V}\bar{\rho}\delta\Theta + \frac{\alpha'\bar{\rho}\dot{\Theta}\delta\dot{\Theta}}{1-\alpha'\dot{\Theta}^2} + \frac{2M_p^2\dot{H}\Phi}{1-\alpha'\dot{\Theta}^2} \\ \delta p &= \frac{V_\Theta}{V}\bar{p}\delta\Theta + \alpha'\dot{\Theta}\bar{\rho}\delta\dot{\Theta} + 2M_p^2\dot{H}\Phi,\end{aligned}\quad (3.22)$$

provenientes da perturbação do tensor energia momento. Além destas relações obtidas para as equações de campo, temos também outras duas relações advindas da perturbação da equação de movimento. Uma das formas de obtê-las é através da equação de conservação do tensor energia momento, isto é,

$$\partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_\nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda^\mu = 0, \quad (3.23)$$

e, aplicando os símbolos de Christoffel obtidos no Apêndice A, obtemos

$$\delta\dot{\rho} + 3H(\delta\rho + \delta p) - 3(\bar{\rho} + \bar{p})\dot{\Phi} = \frac{\alpha'\bar{\rho}\dot{\Theta}\nabla^2\delta\Theta}{a^2} \quad (3.24)$$

$$\alpha'\dot{\Theta}\bar{\rho}\partial_i\delta\dot{\Theta} + \frac{V_\Theta}{V}\bar{p}\partial_i\delta\Theta + \alpha'\partial_i\delta\Theta = (\bar{\rho} + \bar{p})\partial_i\Phi, \quad (3.25)$$

que completam nosso conjunto de equações perturbadas. Dessa maneira, usando o conjunto de equações podemos obter a equação de movimento para a perturbação de curvatura na forma

$$\frac{1}{az^2}\frac{d}{dt}\left(az^2\dot{\mathcal{R}}\right) - \frac{c_s^2}{a^2}\nabla^2\mathcal{R} = 0, \quad (3.26)$$

onde

$$z = \frac{\sqrt{3\alpha'}M_p a\dot{\Theta}}{\sqrt{1-\alpha'\dot{\Theta}^2}}. \quad (3.27)$$

Transformando o tempo físico em tempo conforme e definindo uma nova variável $v = z\mathcal{R}$, denominada variável de Mukhanov-Sasaki, obtemos

$$v'' - c_s^2\nabla^2v - \frac{z''}{z}v = 0, \quad (3.28)$$

com

$$\frac{z''}{z} \approx a^2H^2\left(2 - \varepsilon_1 + \frac{3}{2}\varepsilon_2\right). \quad (3.29)$$

Em modos de Fourier, a relação se torna

$$v_k'' + \left(c_s^2k^2 - \frac{q^2 - 1/4}{\eta^2}\right)v_k = 0, \quad (3.30)$$

na qual

$$q^2 = \frac{9}{4} - \varepsilon_1 + \frac{3}{2}\varepsilon_2$$

e cuja solução geral é dada por

$$v_k(\eta) = \sqrt{-\eta} \left[C_{1k} H_q^{(1)}(-c_s k \eta) + C_{2k} H_q^{(2)}(-c_s k \eta) \right], \quad (3.31)$$

onde $H_q^{(1),(2)}(x)$ são as funções de Hankel de primeiro e segundo tipo e C_{1k} e C_{2k} são constantes de integração, que podem ser obtidas a partir da condição $v_k v_k^{*'} - v_k' v_k^* = i$. Adotando o vácuo de Bunch-Davies (BUNCH; DAVIES, 1978), podemos escolher $C_{2k} = 0$ e a solução se torna

$$v_k(\eta) = \sqrt{\frac{-\pi\eta}{4}} H_q^{(1)}(-c_s k \eta). \quad (3.32)$$

Temos dois limites a considerar:

- Quando $c_s k \gg aH$ ($-c_s k \eta \gg 1$), a função de Hankel se torna

$$H_q^{(1)}(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \pi q/2 - \pi/4)}, \quad (3.33)$$

o que implica que a solução se comporta como ondas planas:

$$v_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2c_s k}} e^{-i(c_s k \eta - q\pi/2 - \pi/4)}, \quad (3.34)$$

e esse limite é chamado de sub-horizonte, no qual o comprimento físico da perturbação é muito menor do que o raio de Hubble.

- Quando $c_s k \ll aH$ ($-c_s k \eta \ll 1$), a função de Hankel se torna

$$H_q^{(1)}(x \ll 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\pi/2} 2^{q-3/2} \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(3/2)} x^{-q}, \quad (3.35)$$

e a solução,

$$v_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2c_s k}} 2^{q-3/2} \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(3/2)} (-c_s k \eta)^{1/2-q}, \quad (3.36)$$

possui este comportamento no limite chamado de super-horizonte, no qual o comprimento físico da perturbação é muito maior do que o raio de Hubble.

Portanto, no limite sub-horizonte os modos de perturbação de curvatura comportam-se como $|\mathcal{R}_k| = |v_k|/z$, onde

$$|v_k|^2 = \frac{1}{2c_s k}, \quad z^2 = \frac{2M_p^2 a^2 \varepsilon_1}{c_s^2}, \quad (3.37)$$

ou seja

$$|\mathcal{R}_k|^2 = \frac{H^2}{4c_s k^3 M_p^2 \varepsilon_1} \left(\frac{c_s k}{aH} \right)^2. \quad (3.38)$$

Por outro lado, no limite super-horizonte temos

$$|v_k|^2 = \frac{1}{2c_s k} 2^{2q-3} \frac{\Gamma^2(q)}{\Gamma^2(3/2)} (1 - \varepsilon_1)^{2q-1} \left(\frac{c_s k}{aH} \right)^{1-2q} \quad (3.39)$$

e logo

$$|\mathcal{R}_k|^2 = \frac{H^2}{c_s k^3 M_p^2 \varepsilon_1} 2^{2q-5} \frac{\Gamma^2(q)}{\Gamma^2(3/2)} (1 - \varepsilon_1)^{2q-1} \left(\frac{c_s k}{aH} \right)^{3-2q} \quad (3.40)$$

3.4 Perturbações tensoriais

Para perturbações tensoriais, vamos considerar o elemento de linha

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j, \quad (3.41)$$

onde h_{ij} satisfaz as condições $h_i^i = 0$ (traço nulo) e $\partial_i h^{ij} = 0$ (divergente nulo). A equação para h_{ij} em primeira ordem é dada por

$$\ddot{h}_{ij} + 3H\dot{h}_{ij} - \frac{\nabla^2 h_{ij}}{a^2} = 0. \quad (3.42)$$

A homogeneidade e isotopia da métrica de fundo permitem decompor as perturbações tensoriais em modos de Fourier na forma:

$$h_{ij}(t, x) = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \epsilon_{ij}^s(k) h_k(t) e^{ik \cdot x}, \quad (3.43)$$

em que $\epsilon_{ij}^s(k)$ é o tensor de polarização e s representa a helicidade. O tensor de polarização satisfaz as condição de normalização: $\epsilon_{ij}^r(k) \epsilon_{ij}^{s*}(k) = 2\delta^{rs}$. Em termos dos modos de Fourier, a equação (3.42) pode ser expressa como

$$\ddot{h}_k + 3H\dot{h}_k + \frac{k^2}{a^2} h_k = 0. \quad (3.44)$$

Em termos da variável de Mukhanov-Sasaki $u_k = ah_k$, temos

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) u_k = 0, \quad (3.45)$$

onde

$$\frac{a''}{a} = 2a^2 H^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{2} \right). \quad (3.46)$$

A solução é dada por

$$u_k(\eta) = \sqrt{\frac{-\pi\eta}{4}} H_q^{(1)}(-k\eta). \quad (3.47)$$

Na próxima seção vamos calcular o espectro de potências associados aos modos escalares e tensoriais.

3.5 Espectro de potências e índices espectrais

O espectro de perturbações de curvatura ou espectro de potências é uma função de correlação entre a perturbação de curvatura, $\mathcal{R}$, entre dois pontos diferentes no espaço, dada por

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{R}}(\vec{x}, \eta) \hat{\mathcal{R}}(\vec{y}, \eta) | 0 \rangle \equiv \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k, \eta) \frac{\sin(kr)}{kr}, \quad (3.48)$$

que nos dá

$$\mathcal{P}(k, \eta) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\mathcal{R}_k(\eta)|^2. \quad (3.49)$$

Temos então o espectro de potências escalar, dado por

$$\mathcal{P}_s(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{v_k}{z} \right|^2, \quad (3.50)$$

onde v_k é dado pela equação (3.30), e o espectro de potências tensorial, dado por

$$\mathcal{P}_t(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u_k}{z} \right|^2, \quad (3.51)$$

os quais permitem relacionar a teoria da inflação com os experimentos. Nesse sentido, usando (3.40), obtemos

$$\mathcal{P}_s(k) = \frac{H^2(1 - \varepsilon_1)^{2q-1}}{\pi^2 M_p^2 c_s \varepsilon_1} 2^{2q-6} \frac{\Gamma^2(q)}{\Gamma^2(3/2)} \left(\frac{c_s k}{aH} \right)^{3-2q}, \quad (3.52)$$

que pode ser aproximado para (STEER; VERNIZZI, 2004)

$$\mathcal{P}_s(k) = \left[1 - \left(\frac{5}{3} + 2C \right) \varepsilon_1 - C\varepsilon_2 \right] \frac{H^2}{8\pi^2 M_p^2 \varepsilon_1} \Big|_{c_s k = aH}, \quad (3.53)$$

enquanto que o espectro de perturbações tensorial é dado por

$$\mathcal{P}_t(k) = [1 - 2(1 + C)\varepsilon_1] \frac{2H^2}{\pi^2 M_p^2} \Big|_{c_s k = aH}, \quad (3.54)$$

onde $C = -2 + \ln 2 + \gamma \simeq -0.72$ é uma constante e γ é a constante de Euler-Mascheroni. Sem perda de generalidade, podemos escrever

$$\mathcal{P}_s(k) = \mathcal{A}_s \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1}, \quad (3.55)$$

e

$$\mathcal{P}_t(k) = \mathcal{A}_t \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_t}, \quad (3.56)$$

onde $\mathcal{A}_s$ e $\mathcal{A}_t$ são os valores de $\mathcal{P}_s$ e $\mathcal{P}_t$ quando $k = k_* = aH/c_s$, respectivamente, e definidos pelas relações

$$\mathcal{A}_s \equiv \frac{H^2}{8\pi^2 M_p^2 \varepsilon_1}, \quad \mathcal{A}_t \equiv \frac{2H^2}{\pi^2 M_p^2}, \quad (3.57)$$

e medidos experimentalmente.

Para vincular a teoria às observações fazemos uso dos índices espectrais, definidos da seguinte maneira:

$$n_s = 1 + \frac{d \ln \mathcal{P}_s}{d \ln k} \quad (3.58)$$

$$r = \frac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_s} \quad (3.59)$$

$$\alpha_s = \frac{dn_s}{d \ln k} \quad (3.60)$$

$$n_t = 1 + \frac{d \ln \mathcal{P}_t}{d \ln k}, \quad (3.61)$$

que são medidos por diferentes experimentos, tais como o Planck 2018 (PLANCKX, 2020), os dados obtidos acerca das oscilações acústicas de bárions (BEUTLER et al., 2011; ROSS et al., 2015; ALAM et al., 2017), a colaboração Bicep2/Keck Array X (BICEP2/KECK, 2018) sobre os modos B, o ACTPol+WMAP (WMAP, 2013) com dados do WMAP e o SPT3G+WMAP (SPT-3G, 2021) que é um conjunto de dados provenientes dos satélites WMAP e *South Pole Telescope*. Em termos dos parâmetros slow-roll, os índices espectrais podem ser escritos na forma

$$n_s = 1 - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad (3.62)$$

$$r = 16\varepsilon_1, \quad (3.63)$$

$$\alpha_s = -2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3, \quad (3.64)$$

$$n_t = -2\varepsilon_1, \quad (3.65)$$

para a teoria com campo taquiônico. Na teoria usual, temos (KOSOWSKY; TURNER, 1995)

$$n_s = 1 - 6\varepsilon + 2\eta, \quad (3.66)$$

$$r = 16\varepsilon, \quad (3.67)$$

$$\alpha_s = 16\varepsilon\eta - 24\varepsilon^2 - 2\zeta^2, \quad (3.68)$$

$$n_t = -2\varepsilon, \quad (3.69)$$

e com isso, dado um potencial, podemos encontrar os parâmetros slow-roll e consequentemente relacionar o potencial às observações.

A teoria da inflação prediz flutuações de temperatura estatisticamente isotrópicas, cujo espectro de potências teórico e experimental é costumeiramente representado em termos de harmônicos esféricos como

$$\frac{\Delta T(\hat{n})}{T} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm} Y_{lm}(\hat{n}), \quad (3.70)$$

onde $\hat{n} \equiv (\theta, \varphi)$ é o vetor unitário, a_{lm} são os coeficientes da expansão e $Y_{lm}(\hat{n})$ são os harmônicos esféricos normalizados. Assumindo flutuações distribuídas em forma gaussiana, então cada a_{lm} é independente, ou seja:

$$\langle a_{lm}^* a_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l, \quad (3.71)$$

em que C_l é o espectro de potências angular. Na prática, C_l é calculado através de uma função de correlação angular

$$C(\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2) = \left\langle \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}_1) \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}_2) \right\rangle = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} C_l P_l(\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2), \quad (3.72)$$

onde P_l são os polinômios de Legendre. A medida do espectro de potências angular é uma prova cosmológica robusta acerca dos modelos cosmológicos, da posição e amplitude dos picos e sendo sensível a importantes parâmetros cosmológicos. Já que o espalhamento de Thomson de um campo de radiação anisotrópico também gera polarização linear (HU; DODELSON, 2002), existe também espectro de potências angular devido a polarização. A polarização pode ser dividida em partes, provenientes da parte rotacional (modos B) e da parte divergente (modos E), gerando quatro espectros de potências angular independentes: $C_l^{TT}, C_l^{EE}, C_l^{TE}, C_l^{BB}$. O espectro de potências $\mathcal{P}(k)$ está relacionado com o espectro de potências angular C_l através da relação:

$$C_l^{XX'} \propto \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k) T_l^X(k) T_l^{X'}(k), \quad (3.73)$$

na qual T_l^X é a função de transferência e X representa ou temperatura ou polarização.

3.6 Fenomenologia

Para relacionar os parâmetros de um dado potencial com as observações, vamos utilizar os dados fornecidos pelo Planck 2018, considerando como modelo cosmológico o modelo $\Lambda\text{CDM}+r+\alpha_s$ com o conjunto de dados (PlanckTT,TE,EE+lowE+lensing+BK14+BAO)¹,

¹ vide Tabela 3 de (PLANCKX, 2020)

dados por

$$n_s = 0.9658 \pm 0.0038 \quad (3.74)$$

$$r < 0.072 \quad (3.75)$$

$$\alpha_s = -0.0065 \pm 0.0066 \quad (3.76)$$

$$\mathcal{A}_s = 2.09 \times 10^{-9} \quad (3.77)$$

$$\mathcal{A}_t < 1.584 \times 10^{-10} \quad (3.78)$$

$$V_0^{1/4} < 1.7 \times 10^{16} \text{ GeV}, \quad (3.79)$$

onde V_0 é a escala de energia da inflação.

3.6.1 Potencial secante hiperbólico quadrático

Para o potencial (2.21) encontramos

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2f^2} \left[\coth \left(\frac{N}{f^2} \right) - 1 \right] \quad (3.80)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{f^2} \left[\coth \left(\frac{N}{f^2} \right) + 1 \right], \quad (3.81)$$

logo os índices espectrais são dados por

$$n_s = 1 - \frac{2}{f^2} \coth \left(\frac{N}{f^2} \right), \quad (3.82)$$

$$r = \frac{8}{f^2} \left[\coth \left(\frac{N}{f^2} \right) - 1 \right], \quad (3.83)$$

o que significa que, para cada valor de f e de N , temos um par (n_s, r) que pode ser inserido no plano $n_s - r$ que é a região com nível de confiança de 68% das medidas e cujos valores estão dispostos na Figura 7 abaixo.

Através da relação (3.53), encontramos

$$\mathcal{P}_s = \frac{V_0}{72\pi^2 M_p^4} \sinh \left(\frac{N}{f^2} \right) \left[5 + 6f^2 - (5 + 12f^2) \cosh \left(\frac{N}{f^2} \right) \right] (e^{N/f^2} - 1), \quad (3.84)$$

que, conjuntamente com a relação (3.80) para n_s , nos dá $f \approx 11.04$ e $N = 63.7$, valores que concordam com os dados do Planck.

3.6.2 Potencial β -exponencial

Para o potencial β -exponencial obtemos as relações (2.37) para o modelo taquiônico e (2.42) para o modelo usual, de modo que os índices espectrais são

$$n_s = 1 - \frac{4(1 + \beta)}{1 + 2N(1 + 2\beta)}, \quad r = \frac{16}{1 + 2N(1 + 2\beta)}, \quad (3.85)$$

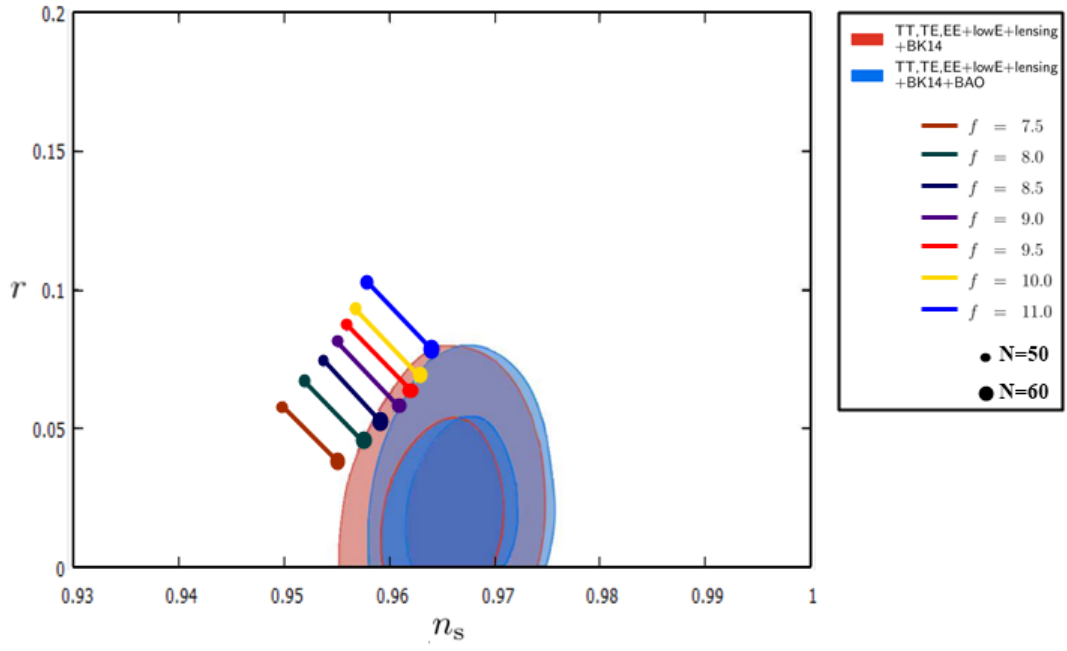


Figura 7 – Plano $n_s - r$ para alguns valores de f .

e

$$n_s = 1 - \frac{2(1+2\beta)}{1+4N\beta}, \quad r = \frac{16}{1+4N\beta}, \quad (3.86)$$

respectivamente e cujo plano $n_s - r$ é mostrado na Figura 8.

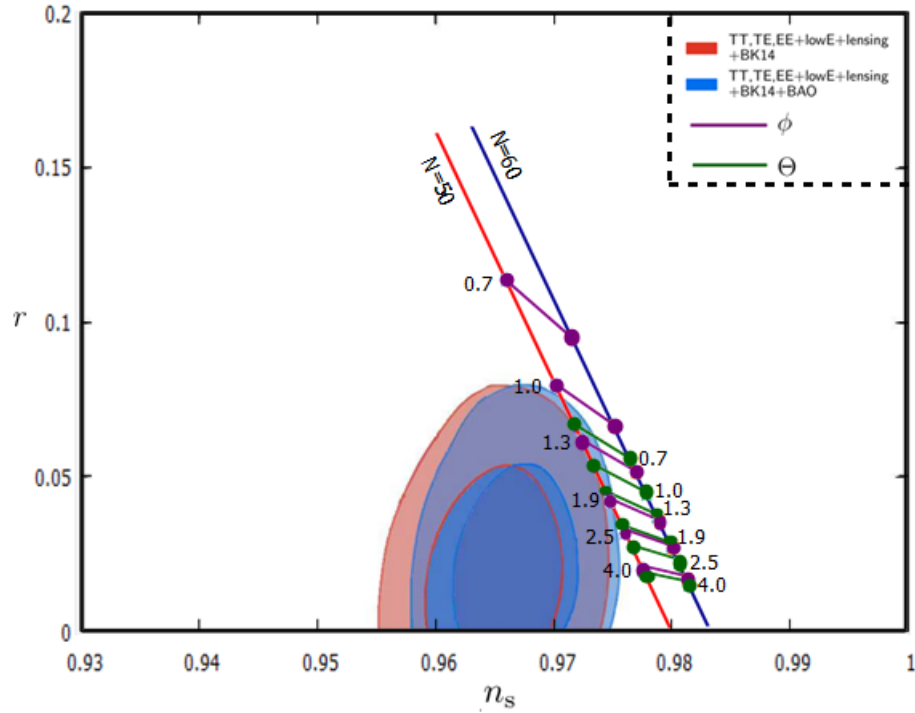


Figura 8 – Plano $n_s - r$ para alguns valores de β .

Os espectros de potências (3.53) e (3.54), para o modelo taquiônico, são dados por

$$\mathcal{A}_s = \frac{V_0}{24\pi^2 M_p^4} \left\{ p^{\frac{1}{1+\beta}} [1 + 2N(1 + 2\beta)] \right\}^{\frac{2\beta+2}{2\beta+1}} \quad (3.87)$$

e

$$\mathcal{A}_t = \frac{2V_0}{3\pi^2 M_p^4} \left\{ p^2 [1 + 2N(1 + 2\beta)] \right\}^{\frac{1}{2\beta+1}}, \quad (3.88)$$

onde definimos $p^2 = M_p^2 \lambda^2 / 2\alpha' V_0$. Considerando $N = 50$, $\mathcal{A}_s = 2.09 \times 10^{-9}$ e $\mathcal{A}_t < 1.584 \times 10^{-10}$, obtemos

$$p^2 < 0.0362, \quad \beta > 0.9, \quad (3.89)$$

o que corresponde a

$$\lambda < 1.05 \times 10^{-12}, \quad \beta > 0.9. \quad (3.90)$$

Para o campo escalar usual, temos a relação

$$\frac{V}{\varepsilon} = \frac{2V_0}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\beta \lambda \phi_*}{M_p} \right)^{2+1/\beta}, \quad (3.91)$$

que pode ser escrita em termos de β e N através da equação (2.41), logo

$$\mathcal{A}_s = \frac{V}{24\pi^2 M_p^4 \varepsilon} = \frac{V_0 \lambda^{1/\beta}}{12\pi^2 M_p^4} \left(\frac{1}{2} + 2N\beta \right)^{\frac{1+2\beta}{2\beta}}, \quad (3.92)$$

enquanto que

$$\mathcal{A}_t = \frac{2V}{3\pi^2 M_p^4} = \frac{2V_0 \lambda^{1/\beta}}{3\pi^2 M_p^4} \left(\frac{1}{2} + 2N\beta \right)^{\frac{1}{2\beta}}, \quad (3.93)$$

e considerando $N = 50$, $\mathcal{A}_s = 2.09 \times 10^{-9}$ e $\mathcal{A}_t < 1.584 \times 10^{-10}$, obtemos

$$\lambda < 0.08, \quad \beta > 1.4, \quad (3.94)$$

valores dos parâmetros do modelo.

Até aqui trabalhamos com perturbações inflacionárias considerando os limites sub-horizonte, onde as flutuações são quânticas, e super-horizonte, onde as perturbações são clássicas e evoluem para formar estruturas em largas escalas. Nos próximos capítulos, veremos como ocorre a transição quântica-clássica e como o espectro de potências é modificado.

Parte II

O Colapso da Função de Onda no Universo Primordial

4 O Problema da Medida

O problema da medição, em mecânica quântica, é um problema não resolvido de como acontece o colapso da função de onda. A incapacidade de observar esse processo diretamente deu origem as diversas interpretações da mecânica quântica, e possui um conjunto chave de questões que cada interpretação devem responder. Naturalmente, tal problema estende-se também pela cosmologia, em especial na inflação, uma vez que as flutuações, inicialmente quânticas, tornam-se clássicas. Neste capítulo abordaremos brevemente o problema e os argumentos que levam a busca de modificações que tornem o colapso da função de onda compreensível.

4.1 Os postulados da mecânica quântica

A mecânica quântica padrão pode ser resumida nos seguintes postulados:

1. Todo sistema físico S está associado a um espaço de Hilbert, com os estados físicos de S sendo representados por vetores normalizados (ou autovetores) $|\psi\rangle$ do espaço. Um observável físico O é representado por operadores auto adjuntos no espaço de Hilbert e as possíveis medidas de O são dadas pelos autovalores o_n , isto é

$$O |o_n\rangle = o_n |o_n\rangle . \quad (4.1)$$

Já que O é um operador auto adjunto, seus autovalores o_n são reais e seus autovetores $|o_n\rangle$ formam um conjunto ortonormal completo.

2. Para determinar o estado $|\psi(t_0)\rangle$ do sistema S em um dado tempo inicial t_0 , um conjunto completo de observáveis que comutam entre si é medido e o vetor estado inicial é então o único auto estado em comum. Sua evolução temporal é governada pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle , \quad (4.2)$$

onde H é o operador hamiltoniano.

3. A probabilidade de obter, ao realizar uma medida em um dado tempo t , o autovalor o_n , é dada por:

$$P[o_n] = |\langle o_n | \psi(t) \rangle|^2 . \quad (4.3)$$

4. O efeito de uma medida sobre o sistema S é alterar drasticamente seu vetor de estado de $|\psi(t)\rangle$ para $|o_n\rangle$, ou seja,

$$|\psi(t)\rangle \text{ antes da medida} \rightarrow |o_n\rangle \text{ após a medida} \quad (4.4)$$

conhecido como postulado de redução do pacote de onda ou interpretação de Copenhague, onde a medida causa o *colapso* da função de onda.

A equação de Schrödinger (4.2) possui duas propriedades básicas. A primeira é que se trata de uma equação diferencial de primeira ordem no tempo, o que significa que, dado um estado inicial $|\psi(t_0)\rangle$ do sistema, sua evolução futura é completamente determinada, ou seja é perfeitamente determinística, tal como na mecânica clássica. A solução da equação (4.2) pode ser escrita como

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle , \quad (4.5)$$

onde $U(t, t_0)$ é o operador evolução temporal. Sua expressão formal é

$$U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar} . \quad (4.6)$$

A segunda propriedade da equação de Schrödinger é sua linearidade: se $|\psi(t_1)\rangle$ e $|\psi(t_2)\rangle$ são duas possíveis soluções de (4.2), então $\alpha |\psi(t_1)\rangle + \beta |\psi(t_2)\rangle$ também é uma possível solução. Isso é chamado princípio da superposição.

O postulado 3 descreve uma evolução não linear do vetor de estado, já que transforma o estado $\alpha |\psi(t_1)\rangle + \beta |\psi(t_2)\rangle$ em qualquer um dos estados $|\psi(t_1)\rangle$ ou $|\psi(t_2)\rangle$, com probabilidades $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$, respectivamente. Em geral não podemos saber para qual dos auto estados de O o vetor de estado de S irá colapsar ao ser realizada uma medida; a teoria determina apenas a probabilidade de colapso.

Suponha agora que temos um sistema descrito por um conjunto de vetores $\{|\psi_i\rangle\}$, com probabilidade p_i de obter um dado vetor $|\psi_i\rangle$ entre todos os vetores do sistema. Isso é equivalente a ter um ensemble de N sistemas, com uma fração N_1 dos quais são descritos pelo vetor $\{|\psi_1\rangle\}$, uma fração N_2 pelos vetores $\{|\psi_2\rangle\}$ e assim por diante. A probabilidade de se obter um sistema do conjunto é $p_i = N_i/N$. O operador estatístico, também conhecido como matriz de densidade, é dado por

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| . \quad (4.7)$$

Os postulados 2-4 podem ser expressos em uma nova linguagem. A equação de evolução para ρ é:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [H, \rho(t)] , \quad (4.8)$$

enquanto que a probabilidade de medida de um observável O é dada por:

$$P[o_n] = \text{Tr} [P_n \rho(t)] , \quad (4.9)$$

onde P_n é o operador projeção associado ao auto-valor o_n . O colapso da função de onda é representado neste cenário por

$$\rho(t) \text{ antes da medida} \rightarrow \sum_n P_n \rho P_n \text{ após a medida.} \quad (4.10)$$

4.2 O problema da medida na mecânica quântica

O primeiro exemplo explícito da descrição quântica de um processo de medida foi apresentada por John Von Neumann (NEUMANN, 1996), que propôs o seguinte argumento. Vamos considerar um sistema microscópico S e um dos seus observáveis O , em que o_n são os auto-valores e $|o_n\rangle$ são os auto-vetores. Vamos denominar M o instrumento medidor que possui um estado $|A_0\rangle$ pronto para medir a propriedade considerada, mais um conjunto de estados mutuamente ortogonais $|A_n\rangle$ correspondendo a diferentes configurações macroscópicas do instrumento. Assumindo uma interação linear entre S e M , e que existe uma correlação perfeita entre o estado inicial de S e o estado final do instrumento, isto é,

$$\text{Estado inicial: } |o_n\rangle \otimes |A_0\rangle \rightarrow \text{Estado final: } |o_n\rangle \otimes |A_n\rangle ; \quad (4.11)$$

desta forma temos a certeza de que se o estado final é $|A_n\rangle$, o estado final da partícula será $|o_n\rangle$ e o observável O tem um valor o_n .

O problema da medida aparece quando o estado inicial da partícula, antes da medição, não é apenas um dos auto-vetores $|o_n\rangle$ como na equação (4.11), mas uma superposição de todos, por exemplo,

$$|m+l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|o_m\rangle + |o_l\rangle], \quad (4.12)$$

que pode ser facilmente preparado no laboratório. Neste caso, o estado final será

$$|m+l\rangle \otimes |A_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|o_m\rangle + |o_l\rangle] \otimes |A_0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}[|o_m\rangle \otimes |A_m\rangle + |o_l\rangle \otimes |A_l\rangle] \quad (4.13)$$

Tal estado está, portanto, entrelaçado e não podemos ter a certeza de que obtivemos um único estado final, já que pode ser

$$|o_m\rangle \otimes |A_m\rangle \quad \text{ou} \quad |o_l\rangle \otimes |A_l\rangle. \quad (4.14)$$

4.3 Tratamento semiclássico

Como vimos no capítulo anterior, as perturbações escalares são governadas pelas equações (3.18), de tal maneira que o comportamento da perturbação Φ está intimamente relacionado com a perturbação do campo taquiônico $\delta\Theta$, e escrito em modos de Fourier por

$$3H\dot{\Phi} + 3H^2\Phi + \frac{k^2\Phi}{a^2} = -\frac{\delta\rho}{2M_p^2} \quad (4.15)$$

$$\ddot{\Phi} + 3H^2\Phi + 2\dot{H}\Phi + 4H\dot{\Phi} = \frac{\delta p}{2M_p^2} \quad (4.16)$$

$$\dot{\Phi} + H\Phi = \frac{\alpha'\bar{\rho}\dot{\Theta}\delta\Theta}{2M_p^2}, \quad (4.17)$$

assim temos equações linearizadas. Combinando essas equações e trocando o tempo t pelo tempo conforme, $dt = a(\eta)d\eta$, obtemos

$$\Phi_k = \sqrt{\frac{3\alpha'\varepsilon_1}{2}} \frac{H^2}{c_s^2 k^2} a \langle \delta\hat{\Theta}' \rangle. \quad (4.18)$$

Este resultado indica que, quando o estado é o vácuo, ou seja $\langle 0|\delta\hat{\Theta}'|0\rangle = 0$, não existem perturbações em qualquer escala k , isto é $\Phi_k = 0$. Somente quando o colapso da função de onda acontece é que o valor esperado satisfaz $\langle 0|\delta\hat{\Theta}'|0\rangle \neq 0$ e então dá origem às perturbações primordiais.

Por outro lado, o tratamento quântico para o campo $\delta\hat{\Theta}$ pode ser introduzido reescalando a variável $y = z\delta\Theta$, com $z = \sqrt{3\alpha'}M_p a\dot{\Theta}/c_s$ e expandindo a ação em segunda ordem em y , de modo que

$$S = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left[y'^2 - c_s^2 (\partial_i y)^2 - 2 \frac{z'}{z} y y' + \frac{z'^2}{z^2} y^2 \right], \quad (4.19)$$

Onde os campos, y e o momento canônico conjugado $\pi = \partial\delta\mathcal{L}^{(2)}/\partial y' = y' - (z'/z)y = z\delta\hat{\Theta}'$ satisfazem as relações de comutação $[\hat{y}(\mathbf{x}, \eta), \hat{\pi}(\mathbf{x}', \eta)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, $[\hat{y}(\mathbf{x}, \eta), \hat{y}(\mathbf{x}', \eta)] = [\hat{\pi}(\mathbf{x}, \eta), \hat{\pi}(\mathbf{x}', \eta)] = 0$. A hamiltoniana é então dada por

$$\delta H^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\pi^2(\mathbf{x}) + c_s^2 (\nabla y(\mathbf{x}))^2 + \frac{z'}{z} y(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{x}) \right] \quad (4.20)$$

Em modos de Fourier, os campos são escritos como

$$\begin{aligned} y(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k [y(\mathbf{k})a(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + y^*(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \\ \pi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k [\pi(\mathbf{k})a(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \pi^*(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \end{aligned} \quad (4.21)$$

e com isso podemos escrever a hamiltoniana do sistema na forma

$$\delta H^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3k \left[\pi(\mathbf{k})\pi^*(\mathbf{k}) + c_s^2 k^2 y(\mathbf{k})y^*(\mathbf{k}) + \frac{z'}{z} (y(\mathbf{k})\pi^*(\mathbf{k}) + y^*(\mathbf{k})\pi(\mathbf{k})) \right] \quad (4.22)$$

e os campos $y(\mathbf{k})$ e $\pi(\mathbf{k})$ satisfazem $[y(\mathbf{k}), \pi(\mathbf{k}')] = i\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. Tal hamiltoniana representa uma coleção de osciladores harmônicos modificados independentes, com cada modo evoluindo independentemente.

A hipótese do colapso assume que em um certo tempo $\eta_{\mathbf{k}}^c$ a parte do estado que caracteriza o modo k “salta” randomicamente para um novo estado, o qual deixa de ser homogêneo e isotrópico. O colapso opera de modo similar a uma “medida” imprecisa, já que não existem observadores externos ou detectores envolvidos. Portanto, é razoável trabalhar com operadores hermitianos, suscetíveis a uma medida direta em mecânica quântica usual. Assim podemos separar $y(\mathbf{k})$ e $\pi(\mathbf{k})$ em suas partes real e imaginária

$y(\mathbf{k}) = y^R(\mathbf{k}) + iy^I(\mathbf{k})$ e $\pi(\mathbf{k}) = \pi^R(\mathbf{k}) + i\pi^I(\mathbf{k})$, tal que os operadores $y^{R,I}(\mathbf{k})$ e $\pi^{R,I}(\mathbf{k})$ sejam hermitianos. Logo a hamiltoniana (4.22) pode ser escrita como

$$\delta H^{(2)} = \int d^3k \left(H_{\mathbf{k}}^R + H_{\mathbf{k}}^I \right), \quad (4.23)$$

onde os índices R e I denotam as partes real e imaginária, respectivamente, e

$$H_{\mathbf{k}}^{R,I} = \frac{1}{2} \left[\pi_{\mathbf{k}}^{R,I} \pi_{\mathbf{k}}^{*R,I} + c_s^2 k^2 y_{\mathbf{k}}^{R,I} y_{\mathbf{k}}^{*R,I} + \frac{z'}{z} \left(y_{\mathbf{k}}^{R,I} \pi_{\mathbf{k}}^{*R,I} + y_{\mathbf{k}}^{*R,I} \pi_{\mathbf{k}}^{R,I} \right) \right] \quad (4.24)$$

é a densidade hamiltoniana que, juntamente com a relação de comutação $[y_{\mathbf{k}}^{R,I}, \pi_{\mathbf{k}'}^{R,I}] = i\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, permite a descrição quântica da teoria. Efetivamente introduzimos uma nova variável cuja consideração pode ser feita em termos da hamiltoniana a ser quantizada facilmente.

A função de onda das perturbações, neste caso, pode ser assumida como sendo gaussiana, dado que a hamiltoniana é quadrática. Isso, conjuntamente ao fato de que as perturbações comportam-se como osciladores harmônicos, vide (3.34), claramente determina valores esperados nulos para as variáveis $y_{\mathbf{k}}$ e $\pi_{\mathbf{k}}$, o que significa que $\Phi_k = 0$, segundo (4.18). Em conclusão, a mecânica quântica usual aplicada para descrever a evolução das perturbações não se aplica, sendo necessária uma modificação, como veremos no próximo capítulo.

5 Colapso por Localização Espontânea

As teorias de colapso são as teorias físicas que explicam o colapso da função de onda de uma superposição de estados do problema da medida na mecânica quântica assumindo um colapso da função de onda real para ocorrer o estado observado. Dentre várias teorias, abordaremos a teoria de colapso por localização espontânea, na qual a equação de Schrödinger é modificada para uma forma que torna o colapso induzido. A aplicação desta teoria à transição da era quântica para a era clássica das perturbações permite estabelecer vínculos entre os potenciais inflacionários e o parâmetro de colapso.

5.1 Equação de Schrödinger modificada

O modelo de colapso CLE é baseado em uma modificação não linear da equação de Schrödinger que induz o colapso da função de onda para um dos autoestados de um operador $\hat{C}$, chamado operador de colapso, com uma certa taxa λ (PICCIRILLI et al., 2019; CANATE; PEARLE; SUDARSKY, 2013). A evolução temporal de um estado inicial é dado por

$$|\Psi, t\rangle = \hat{T} \exp \left\{ - \int_{t_0}^t dt' \left[i\hat{H} + \frac{(\mathcal{W}(t') - 2\lambda\hat{C})^2}{4\lambda} \right] \right\} |\Psi, t_0\rangle \quad (5.1)$$

onde $\hat{T}$ é o operador ordenamento temporal e $\mathcal{W}(t)$ é o ruído de fundo que pode ser considerado como um processo estocástico com tempo contínuo. A probabilidade associada a uma realização particular de $\mathcal{W}(t)$ é

$$P[\mathcal{W}(t), t] D\mathcal{W}(t) = \langle \Psi, t | \Psi, t \rangle \prod_{t_i=t_0}^t \frac{d\mathcal{W}(t_i)}{\sqrt{2\pi\lambda/dt}}. \quad (5.2)$$

A norma do estado $|\Psi, t\rangle$ evolui dinamicamente e o estado mais provável será aquele que possui a maior norma. Usando as equações (5.1) e (5.2), podemos calcular a matriz de densidade, dada por

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \int P D\mathcal{W}(t) \frac{|\Psi, t\rangle \langle \Psi, t|}{\langle \Psi, t | \Psi, t \rangle} = \int D\mathcal{W}(t) |\Psi, t\rangle \langle \Psi, t| \\ &= \hat{T} \exp \left\{ - \int_{t_0}^t dt' \left[i(\hat{H}_E - \hat{H}_D) + \frac{\lambda}{2} (\hat{C}_E - \hat{C}_D)^2 \right] \right\} \rho(t_0), \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde E e D significam que os operadores associados estão colocados à esquerda e à direita de $\rho(t_0)$. A equação de evolução da matriz de densidade é portanto a equação de Lindblad

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i [\hat{H}, \rho(t)] - \frac{\lambda}{2} [\hat{C}, [\hat{C}, \rho(t)]] . \quad (5.4)$$

O operador matriz de densidade pode ser usado para obter a média no ensemble do valor esperado de um observador $\overline{\langle \hat{O} \rangle} = \text{Tr} \hat{O} \rho(t)$, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \overline{\langle \hat{O} \rangle} = -i \overline{[\hat{O}, \hat{H}]} - \frac{\lambda}{2} \overline{[\hat{C}, [\hat{C}, \hat{O}]]}. \quad (5.5)$$

Com o objetivo de aplicar esse formalismo ao regime inflacionário, precisamos estabelecer quais são os observáveis apropriados que emergem da teoria quântica da inflação. Vimos que a equação (4.18) relaciona a perturbação clássica com a variável momento quantizada, isto é,

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{k}} &= \sqrt{\frac{3\alpha'\varepsilon_1}{2}} \frac{H^2}{c_s^2 k^2} a \langle \delta \hat{\Theta}' \rangle \\ &= \sqrt{\frac{3\alpha'\varepsilon_1}{2}} \frac{a H^2}{c_s^2 k^2 z} \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}} \rangle, \end{aligned} \quad (5.6)$$

consequentemente podemos considerar o operador de colapso $\hat{C}$ como sendo nosso momento $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}$. Desse modo, se o estado inicial é o estado de vácuo de Bunch-Davies

$$\langle \pi_{\mathbf{k}}^{R,I} | 0, \tau \rangle \propto \exp \left[-\frac{(\pi_{\mathbf{k}}^{R,I})^2}{2c_s k} \right], \quad (5.7)$$

então $\langle 0 | \pi_{\mathbf{k}}^{R,I} | 0 \rangle = 0$ e, como consequência de (5.6), a perturbação de curvatura é $\Phi_{\mathbf{k}} = 0$, o que significa que o espaço tempo é perfeitamente homogêneo e isotrópico. Somente após o estado evoluir de acordo com o mecanismo CLE é que teremos $\langle 0 | \pi_{\mathbf{k}}^{R,I} | 0 \rangle \neq 0$ e a perturbação de curvatura surge. Isto ilustra como o colapso auto induzido gera perturbações primordiais.

Dessa maneira, a evolução do vetor de estado caracterizando cada modo do campo taquiônico, escrito em tempo conforme, será

$$|\Psi_{\mathbf{k}}^{R,I}, \eta\rangle = \hat{T} \exp \left\{ -\int_{\tau}^{\eta} d\eta' \left[i \hat{H}_{\mathbf{k}}^{R,I} + \frac{(\mathcal{W}(\eta') - 2\lambda_k \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2}{4\lambda_k} \right] \right\} |\Psi_{\mathbf{k}}^{R,I}, \tau\rangle \quad (5.8)$$

com $\hat{H}_{\mathbf{k}}^{R,I}$ dado em (4.24). Além do mais, a equação de movimento (5.5), avaliada para $\hat{C} \equiv \pi_{\mathbf{k}}^{\hat{R},I}$, é dada por

$$\frac{d}{d\eta} \overline{\langle \hat{O}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle} = -i \overline{[\hat{O}_{\mathbf{k}}^{R,I}, \hat{H}_{\mathbf{k}}^{R,I}]} - \frac{\lambda_k}{2} \overline{[\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I}, [\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I}, \hat{O}_{\mathbf{k}}^{R,I}]]}. \quad (5.9)$$

As equações (5.8) e (5.9) nos dão a descrição completa do mecanismo CLE na inflação. Podemos então calcular o valor esperado do operador de colapso e relacionar os parâmetros de colapso com o espectro de potências, o que permite vincular estes parâmetros com os dados observacionais.

5.2 Espectro de potências escalar

Tendo estabelecido a relação entre o valor esperado do operador de colapso com o valor clássico da perturbação (5.6), podemos obter o espectro de potências escalar a partir da definição

$$\overline{\Phi_{\mathbf{k}}\Phi_{\mathbf{k}'}^*} = \frac{3\alpha'\varepsilon_1}{2} \frac{a^2 H^4}{z^2 k^4} \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}} \rangle \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}'}^* \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\Phi}(k) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (5.10)$$

onde $\mathcal{P}_{\Phi}(k)$ é o espectro de potências escalar adimensional, que é relacionado com o espectro de potências $\mathcal{P}_s(k)$ através da relação

$$\mathcal{P}_{\Phi}(k) = \frac{H^2}{\dot{\Theta}^2} \mathcal{P}_s(k) \quad (5.11)$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}} \rangle \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}'}^* \rangle &= \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^R + i\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^I \rangle \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}'}^R - i\hat{\pi}_{\mathbf{k}'}^I \rangle \\ &= \left(\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^R \rangle^2 + \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^I \rangle^2 \right) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (5.12)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\Phi}(k) &= \frac{3\alpha'\varepsilon_1}{4\pi^2} \frac{a^2 H^4}{z^2} \frac{\left(\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^R \rangle^2 + \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^I \rangle^2 \right)}{k} \\ &= \frac{3\alpha'c_s^2 H^4}{8\pi^2 M_p^2} \frac{\left(\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^R \rangle^2 + \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^I \rangle^2 \right)}{k}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

na qual a relação $z = \sqrt{3\alpha'} M_p a \dot{\Theta} / c_s$ foi utilizada. O valor esperado $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}} \rangle^2$ pode ser obtido pela forma

$$\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}} \rangle^2 = \int PD\mathcal{W}(\eta) \frac{\langle \Psi, \eta | \hat{\pi}_{\mathbf{k}} | \Psi, \eta \rangle^2}{\langle \Psi, \eta | \Psi, \eta \rangle^2} = \int D\mathcal{W}(\eta) \frac{\langle \Psi, \eta | \hat{\pi}_{\mathbf{k}} | \Psi, \eta \rangle^2}{\langle \Psi, \eta | \Psi, \eta \rangle} \quad (5.14)$$

no entanto não é tão simples calcular diretamente. Porém, podemos obter uma relação entre $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}} \rangle^2$ e $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^2 \rangle$ que torna nosso trabalho mais fácil. Uma vez que o estado inicial é gaussiano e a hamiltoniana (4.24) é quadrática, podemos assumir que o vetor de estado é dado por

$$\Psi^{R,I}(\eta, \pi_{\mathbf{k}}^{R,I}) = \exp[-A_k(\eta)(\pi_{\mathbf{k}}^{R,I})^2 + B_k(\eta)\pi_{\mathbf{k}}^{R,I} + C_k(\eta)], \quad (5.15)$$

com as condições iniciais dadas por $A_k(\tau) = 1/2k$, $B_k(\tau) = C_k(\tau) = 0$, o que corresponde ao vácuo de Bunch-Davies. Logo, para esse estado, temos

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \eta | \Psi, \eta \rangle &= \int d\pi_{\mathbf{k}} e^{-(A_k + A_k^*)(\pi_{\mathbf{k}}^-)^2 + (B_k + B_k^*)\pi_{\mathbf{k}}^- + (C_k + C_k^*)} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{A_k + A_k^*}} \exp \left[\frac{(B_k + B_k^*)^2}{4(A_k + A_k^*)} \right] e^{C_k + C_k^*}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

enquanto que

$$\begin{aligned}\langle \Psi, \eta | \hat{\pi}_{\mathbf{k}} | \Psi, \eta \rangle &= \int d\pi_{\mathbf{k}} \pi_{\mathbf{k}} e^{-(A_k + A_k^*)(\pi_{\vec{k}})^2 + (B_k + B_k^*)\pi_{\vec{k}} + (C_k + C_k^*)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{A_k + A_k^*}} \frac{(B_k + B_k^*)}{(A_k + A_k^*)} \exp \left[\frac{(B_k + B_k^*)^2}{4(A_k + A_k^*)} \right] e^{C_k + C_k^*},\end{aligned}\quad (5.17)$$

ou seja,

$$\overline{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}} \rangle^2} = \int D\mathcal{W}(\eta) \sqrt{\frac{\pi}{A_k + A_k^*}} \left(\frac{(B_k + B_k^*)}{2(A_k + A_k^*)} \right)^2 \exp \left[\frac{(B_k + B_k^*)^2}{4(A_k + A_k^*)} \right] e^{C_k + C_k^*}. \quad (5.18)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\overline{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^2 \rangle} &= \int D\mathcal{W}(\eta) \langle \Psi, \eta | \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^2 | \Psi, \eta \rangle \\ &= \int D\mathcal{W}(\eta) \int d\pi_{\mathbf{k}} \pi_{\mathbf{k}} e^{-(A_k + A_k^*)(\pi_{\vec{k}})^2 + (B_k + B_k^*)\pi_{\vec{k}} + (C_k + C_k^*)} \\ &= \int D\mathcal{W}(\eta) \sqrt{\frac{\pi}{A_k + A_k^*}} \left[\frac{1}{2(A_k + A_k^*)} + \left(\frac{(B_k + B_k^*)}{2(A_k + A_k^*)} \right)^2 \right] \exp \left[\frac{(B_k + B_k^*)^2}{4(A_k + A_k^*)} \right] e^{C_k + C_k^*} \\ &= \overline{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}} \rangle^2} + \int D\mathcal{W}(\eta) \frac{1}{2(A_k + A_k^*)} \sqrt{\frac{\pi}{A_k + A_k^*}} \exp \left[\frac{(B_k + B_k^*)^2}{4(A_k + A_k^*)} \right] e^{C_k + C_k^*} \\ &= \frac{1}{2(A_k + A_k^*)} + \overline{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}} \rangle^2},\end{aligned}\quad (5.19)$$

onde no último passo usamos $\langle \Psi, \eta | \Psi, \eta \rangle = 1$ em (5.16). Podemos concluir então que

$$\overline{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle^2} = \overline{\langle (\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2 \rangle} - \frac{1}{4\text{Re}[A_k(\eta)]}, \quad (5.20)$$

o que significa que $(4\text{Re}[A_k(\eta)])^{-1}$ representa o desvio padrão do quadrado do operador momento. Assim, para calcular $\overline{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle^2}$, utilizaremos a equação (5.9) para obter o primeiro termo e a equação (5.8) para obter o segundo termo.

Por simplicidade, vamos definir as quantidades : $Q \equiv \overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^2 \rangle}$, $R \equiv \overline{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^2 \rangle}$ e $S \equiv \overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}} \hat{\pi}_{\mathbf{k}} + \hat{\pi}_{\mathbf{k}} \hat{y}_{\mathbf{k}} \rangle}$. Logo, as equações de evolução de Q , R e S são dadas por:

$$Q' = S + 2\frac{z'}{z}Q + \lambda_k, \quad (5.21)$$

$$R' = -c_s^2 k^2 S - 2\frac{z'}{z}R, \quad (5.22)$$

$$S' = 2R - 2c_s^2 k^2 Q, \quad (5.23)$$

que é um sistema de equações diferenciais acopladas cuja solução é dada pela soma da solução homogênea (com $\lambda_k = 0$) com a solução particular, e possui as condições iniciais dadas pelo vácuo de Bunch-Davies, $Q(\tau) = 1/(2k)$, $R(\tau) = k/2$ e $S(\tau) = 0$. A solução para $R(\eta)$ é dada por

$$\begin{aligned}R(\eta) &= c_s^2 k^2 (-c_s k \eta) \left[C_1 J_{\nu_s}^2(-c_s k \eta) + C_2 J_{-\nu_s}^2(-c_s k \eta) + C_3 J_{\nu_s}(-c_s k \eta) J_{-\nu_s}(-c_s k \eta) \right] \\ &+ \frac{\lambda_k c_s^2 k^2 \eta}{4\nu_s},\end{aligned}\quad (5.24)$$

que é uma equação exata, com $\nu_s = 1/2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2/2$. Expandindo no limite assintótico $-c_s k \eta \rightarrow 0$, obtemos

$$R(\eta) \simeq \frac{c_s k}{\pi} 2^{2\nu_s-2} \Gamma^2(\nu_s) \left[1 + \lambda_k \sin \beta_k \cos \beta_k - \frac{\lambda_k c_s k \tau}{2} \left(\frac{3}{\nu_s + 1} \sin^2 \beta_k + \frac{\cos^2 \beta_k}{\nu_s} \right) \right] (-c_s k \eta)^{-2\nu_s+1}, \quad (5.25)$$

com $\beta_k \equiv -c_s k \tau - \nu_s \pi/2 - 3\pi/4$. Esse é o primeiro termo do segundo membro da equação (5.20). Para encontrar o segundo termo, vamos derivar a equação (5.8) com respeito ao tempo conforme:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} |\Psi_{\mathbf{k}}, \eta\rangle = -i H_{\mathbf{k}} |\Psi_{\mathbf{k}}, \eta\rangle - \left[\frac{\mathcal{W}^2(\eta)}{4\lambda_k} - \mathcal{W}(\eta) \pi_{\mathbf{k}} + \lambda_k \pi_{\mathbf{k}}^2 \right] |\Psi_{\mathbf{k}}, \eta\rangle, \quad (5.26)$$

que é a equação de Schrödinger modificada pela presença do termo de colapso. Inserindo a solução gaussiana (5.15), temos

$$\frac{\partial}{\partial \eta} |\Psi_{\mathbf{k}}, \eta\rangle = \left[-A'_k (\pi_{\mathbf{k}})^2 + B'_k \pi_{\mathbf{k}} + C'_k \right] |\Psi_{\mathbf{k}}, \eta\rangle, \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{k}} |\Psi_{\mathbf{k}}, \eta\rangle &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - 4c_s^2 k^2 A_k^2 - 4i \frac{z'}{z} A_k \right) \pi_k^2 + \left(4c_s^2 k^2 A_k B_k + 2i \frac{z'}{z} B_k \right) \pi_k \right. \\ &\quad \left. + c_s^2 k^2 (2A_k^2 - B_k^2) + i \frac{z'}{z} \right] |\Psi_{\mathbf{k}}, \eta\rangle, \end{aligned} \quad (5.28)$$

ou seja, reunindo os termos em π_k^2 , obtemos

$$A'_k = \frac{i}{2} + \lambda_k - 2ic_s^2 k^2 A_k^2 + 2 \frac{z'}{z} A_k, \quad (5.29)$$

com solução

$$A_k(\eta) = \frac{b}{2ic_s^2 k^2} \left[\frac{J_{\nu_s+1}(-b\eta) + e^{-i\pi\nu_s} J_{-\nu_s-1}(-b\eta)}{J_{\nu_s}(-b\eta) - e^{-i\pi\nu_s} J_{-\nu_s}(-b\eta)} \right], \quad (5.30)$$

onde $b^2 \equiv c_s^2 k^2 (1 - 2i\lambda_k)$. Para o limite assintótico $-c_s k \eta \rightarrow 0$, temos

$$A_k(\eta) \simeq \frac{i\nu_s}{c_s^2 k^2 \eta} \left[1 + (-b\eta)^{2\nu_s} \nu_s 2^{-2\nu_s} \frac{\Gamma(-\nu_s)}{\Gamma(\nu_s + 1)} e^{i\pi\nu_s} \right], \quad (5.31)$$

logo,

$$\frac{1}{4\text{Re}[A_k(\eta)]} \simeq \frac{c_s k 2^{2\nu_s-2} \zeta_k^{-2\nu_s} \sin(\pi\nu_s) \Gamma^2(\nu_s) (-c_s k \eta)^{-2\nu_s+1}}{\pi \sin(2\nu_s \theta_k + \pi\nu_s)}, \quad (5.32)$$

em que

$$\zeta_k \equiv (1 + 4\lambda_k^2)^{1/4}, \quad \theta_k \equiv -\frac{1}{2} \arctan(2\lambda_k).$$

Com os resultados (5.25), para o primeiro termo, e (5.32), para o segundo termo, inserindo em (5.20), obtemos finalmente

$$\overline{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle^2} \simeq \frac{c_s k}{\pi} 2^{2\nu_s-2} \Gamma^2(\nu_s) (-c_s k \eta)^{-2\nu_s+1} \mathcal{F}(\lambda_k, \nu_s), \quad (5.33)$$

onde definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\lambda_k, \nu_s) &= 1 + \lambda_k \sin \beta_k \cos \beta_k - \frac{\lambda_k c_s k \tau}{2} \left(\frac{3}{\nu_s + 1} \sin^2 \beta_k + \frac{\cos^2 \beta_k}{\nu_s} \right) \\ &\quad - \frac{\zeta_k^{-2\nu_s} \sin(\pi \nu_s)}{\sin(2\nu_s \theta_k + \pi \nu_s)}.\end{aligned}\quad (5.34)$$

O espectro de potências (5.13) resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\Phi(k) &= \frac{3\alpha' H^4}{4\pi^2 M_p^2 c_s} 2^{2\nu_s-2} \Gamma^2(\nu_s) (-c_s k \eta)^{-2\nu_s+1} \mathcal{F}(\lambda_k, \nu_s), \\ &= \frac{3\alpha' H^4}{4\pi^2 M_p^2 c_s} 2^{2\nu_s-2} \Gamma^2(\nu_s) (1 - \varepsilon_1)^{-2\nu_s+1} \left(\frac{c_s k}{aH} \right)^{-2\nu_s+1} \mathcal{F}(\lambda_k, \nu_s),\end{aligned}\quad (5.35)$$

onde na última passagem eliminamos a dependência em η . Reescrevendo em termos de $\mathcal{P}_s(k)$, através de (5.11), obtemos

$$\mathcal{P}_s(k) = \mathcal{A}_s(k) \mathcal{F}(\lambda_k, \nu_s) \left(\frac{c_s k}{aH} \right)^{n_s-1}, \quad (5.36)$$

mostrando que a presença do colapso altera o comportamento do espectro de potências.

Pode ser mostrado que, quando $\lambda_k = \lambda_0/c_s k$, o espectro de potências se torna quase invariante de escala, o que motiva a escrever a expressão para λ_k na forma

$$\lambda_k = \lambda_0 \left(\frac{1}{c_s k} + \frac{\alpha}{(c_s k)^2} \right), \quad (5.37)$$

na qual $\lambda_0 = 1/|\tau| \simeq 6.41 \times 10^{-9} \text{ Mpc}^{-1}$. Sabendo que $\nu_s = 1 - n_s/2$, podemos escrever (5.34) em termos de n_s , λ_0 e α , isto é

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\lambda_k, \nu_s) &= 1 + \lambda_k \sin \beta_k \cos \beta_k - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{c_s k} \right) \left(\frac{4}{6 - n_s} \sin^2 \beta_k + \frac{2 \cos^2 \beta_k}{2 - n_s} \right) \\ &\quad - \frac{\zeta_k^{n_s-2} \sin(\pi - \pi n_s/2)}{\sin[(2 - n_s)\theta_k + \pi - \pi n_s/2]},\end{aligned}\quad (5.38)$$

com

$$\beta_k = -c_s k |\tau| - \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{n_s}{2} \right) - \frac{3\pi}{4}, \quad (5.39)$$

$$\zeta_k = \left[1 + \frac{4\lambda_0^2}{c_s^2 k^2} + \frac{8\lambda_0^2 \alpha}{c_s^3 k^3} + \frac{4\lambda_0^2 \alpha^2}{c_s^4 k^4} \right]^{1/4}, \quad (5.40)$$

$$\theta_k = -\frac{1}{2} \arctan \left[\frac{2\lambda_0^2}{c_s k} + \frac{2\lambda_0 \alpha}{c_s^2 k^2} \right]. \quad (5.41)$$

Podemos observar o comportamento da função de colapso em função de $c_s k$ na Figura 9 para alguns valores de α , considerando $\lambda_0 = 6.41 \times 10^{-9} \text{ Mpc}^{-1}$ e $n_s = 0.9658$. Note que, para $\alpha = 0$ temos $\mathcal{F} = 1$, ou seja, recuperamos o resultado em que o espectro de potências é quase invariante de escala, resultado da cosmologia usual.

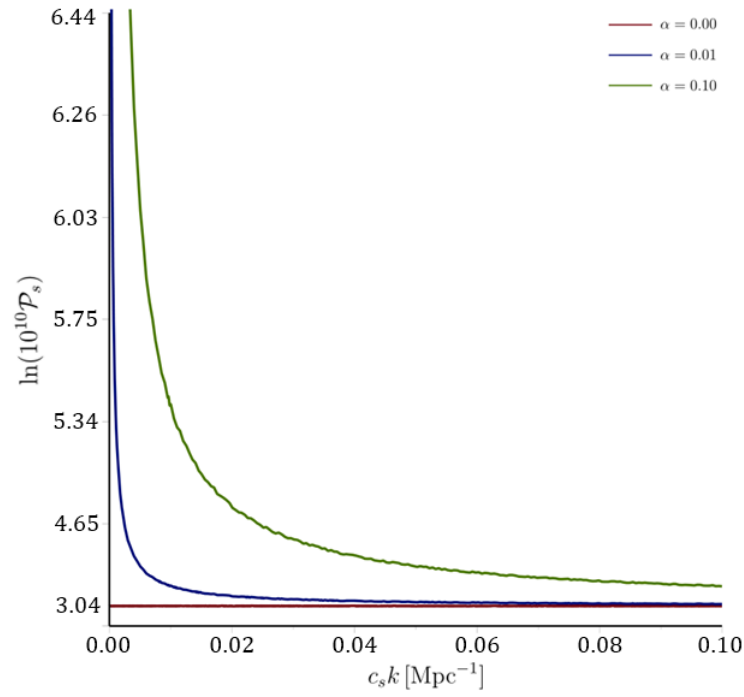


Figura 9 – Modificação do espectro de potências com o parâmetro α .

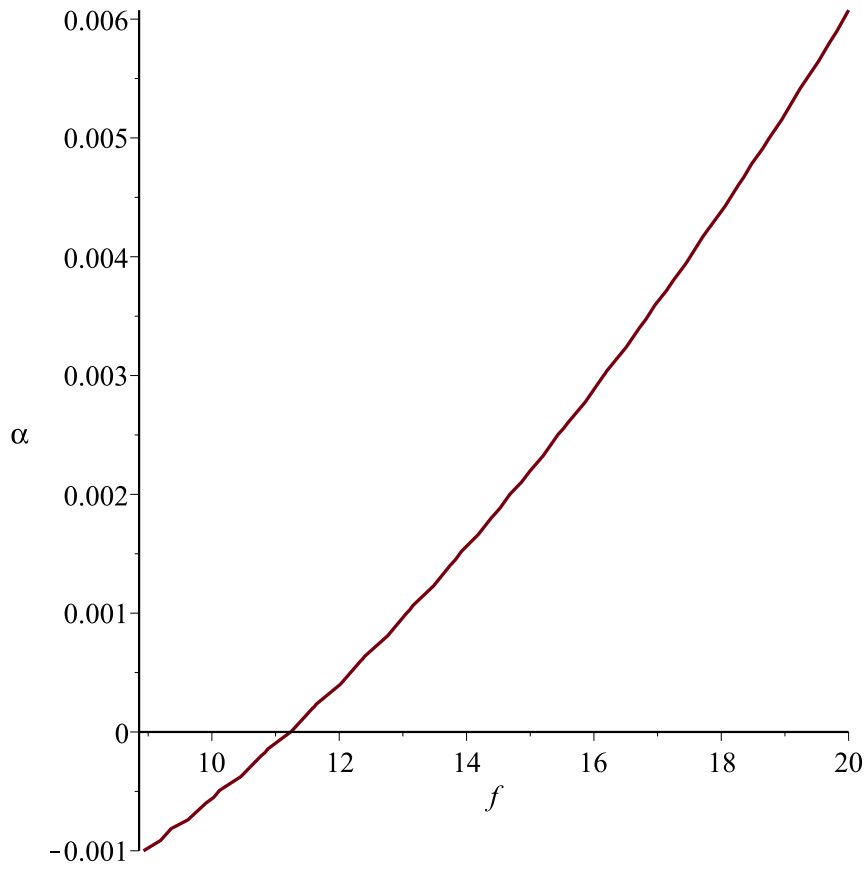


Figura 10 – Comportamento de α em função de f .

Para o potencial secante hiperbólico quadrático, obtivemos em (3.84) a expressão para $\mathcal{A}_s$. Logo, considerando (5.36) para $k = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$ e $N = 63.5$, podemos obter

uma relação implícita entre os valores de f e α . Tal relação é mostrada na Figura 10.

De forma análoga, podemos obter uma relação entre β e α para o potencial β -exponencial. Dada a expressão (3.87), para $N = 50$ obtemos o gráfico abaixo (Figura 11).

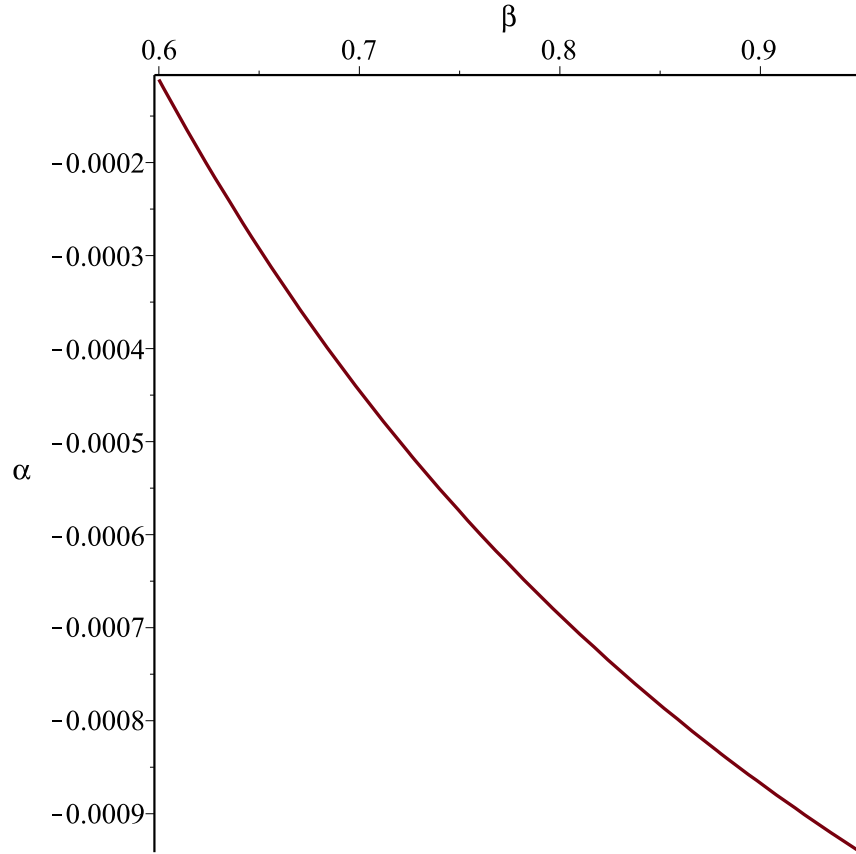


Figura 11 – Comportamento de β em função de α .

Portanto podemos observar que o parâmetro de colapso α altera de forma significativa os parâmetros do potencial inflacionário, bem como a forma do espectro de potências. O fato de que λ_k deve ser positivo leva ao requerimento de $\alpha > -c_s k$, ou seja, valores não tão grandes.

6 O Confinamento de Férmiões na Inflação Taquiônica

O confinamento de quarks $\bar{q}q$ é um importante objeto de estudos acerca da matéria na CDQ (cromodinâmica quântica) e da fase de plasma quark-gluon(FQG) ([SARKAR; SATZ; SINHA, 2010](#)). No contexto da inflação os modelos que caracterizam confinamento são abordados na fase de pré inflação, na qual modos oscilatórios induzem a formação inicial de matéria. Neste capítulo discorreremos sobre a teoria quântica de campos em temperatura finita, aplicada ao estudo de correções térmicas na fase inflacionária do universo, de modo que a tarefa principal é o cálculo da função de partição.

6.1 Condensação taquiônica e confinamento

Vimos no Capítulo 2 que a inflação taquiônica surge ao considerar teorias de D-branas com ação efetiva do tipo DBI:

$$S_{ef} = - \int d^4x \sqrt{-g} V(\Theta) \sqrt{1 + \alpha' g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Theta \partial_\beta \Theta}, \quad (6.1)$$

que caracteriza a evolução do campo taquiônico. Para variações lentas do campo, podemos escrever

$$\begin{aligned} S_{ef} &= - \int d^4x \sqrt{-g} V(\Theta) \left(1 + \frac{1}{2} \alpha' g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Theta \partial_\beta \Theta + \dots \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) + \dots \right), \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde escrevemos $V(\Theta) = \phi_\Theta^2$. Os campos escalares são então relacionados por $\phi = f(\Theta)$ e esta abordagem permite a fase de confinamento na qual temos baixa energia ([BAZEIA; BRITO; NASCIMENTO, 2003](#)).

A densidade lagrangiana para o estudo de confinamento dos férmions será ([ISSIFU; ROCHA; BRITO, 2021](#))

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) - \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m_q G(\phi)) \psi, \quad (6.3)$$

onde m_q é a massa do quark e $G(\phi) = 2a^2\phi^2$ é chamada função dielétrica. O potencial é dado por

$$V(\phi) = \frac{\lambda\phi^4}{4} - \frac{m_q^2\phi^2}{2}, \quad (6.4)$$

de modo a gerar confinamento na presença de temperatura.

6.2 Breve Revisão Sobre Mecânica Estatística Quântica

Em mecânica estatística, o conceito de *ensembles térmicos* é de grande importância. O ensemble *grand canônico* será particularmente útil para descrever um sistema em equilíbrio no qual a teoria quântica de campos em temperatura diferente de zero é introduzida.

Considere um sistema dinâmico caracterizado por um hamiltoniano $\mathcal{H}$. O estado de equilíbrio do sistema é descrito pelo operador canônico de densidade

$$\rho = \exp -\beta(\mathcal{H} - \mu\hat{N}), \quad (6.5)$$

onde $\beta = 1/k_B T$ e μ é o potencial químico. A função de partição

$$Z = \text{Tr} \rho \quad (6.6)$$

permite definir quantidades termodinâmicas importantes, tais como a pressão, o número de partículas e a entropia, por exemplo.

Na teoria quântica de campos com temperatura nula, o valor esperado de um operador A é dado por:

$$\langle A \rangle_0 = \sum_n \langle n | A | n \rangle \quad (6.7)$$

em que $|n\rangle$ são um conjunto completo de estados ortonormais. Em temperatura não nula, temos

$$\langle A \rangle_\beta = \frac{1}{Z} \sum_n \langle n | A | n \rangle e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu\hat{N})} = \frac{\text{Tr}(A\rho)}{\text{Tr}\rho}. \quad (6.8)$$

Considere agora a função de correlação de dois pontos

$$\begin{aligned} \langle \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{y}, 0) \rangle_\beta &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu\hat{N})} \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{y}, 0)] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[\phi(\mathbf{x}, t) e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu\hat{N})} e^{\beta(\mathcal{H} - \mu\hat{N})} \phi(\mathbf{y}, 0) e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu\hat{N})}] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[\phi(\mathbf{x}, t) e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu\hat{N})} e^{i(-\beta(\mathcal{H} - \mu\hat{N}))} \phi(\mathbf{y}, 0) e^{-i(-\beta(\mathcal{H} - \mu\hat{N}))}] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[\phi(\mathbf{x}, t) e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu\hat{N})} \phi(\mathbf{y}, -i\beta)] \\ &= \langle \phi(\mathbf{y}, -i\beta) \phi(\mathbf{x}, t) \rangle_\beta, \end{aligned} \quad (6.9)$$

onde usamos a propriedade de permutação cíclica do operador traço. Definindo a variável de tempo imaginária

$$\tau = it, \quad (6.10)$$

temos a relação

$$\langle \phi(\mathbf{x}, \tau) \phi(\mathbf{y}, 0) \rangle_\beta = \langle \phi(\mathbf{y}, \beta) \phi(\mathbf{x}, \tau) \rangle_\beta, \quad (6.11)$$

conhecida como a relação de Kubo-Martin-Schwinger (KMS). Segue-se então que

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \pm \phi(\mathbf{x}, \beta), \quad (6.12)$$

com os sinais $\pm$ correspondendo aos casos bosônico ou fermiônico. Em termos da expansão em série de Fourier

$$\phi(\mathbf{x}, \tau) = \sum_n \phi(\mathbf{x}, \omega_n) e^{i\omega_n \tau}, \quad (6.13)$$

a relação (6.12) implica na condição

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \quad \text{para campos bosônicos} \quad (6.14)$$

$$\omega_n = \frac{2\pi(n+1)}{\beta} \quad \text{para campos fermiônicos}, \quad (6.15)$$

denominada frequências de Matsubara.

Podemos agora desenvolver o formalismo da integral de caminho para a função de partição. Dado que

$$e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu\hat{N})} = \exp(-i \int_0^{\beta} (\mathcal{H} - \mu\hat{N}) dt) = \exp(- \int_0^{\beta} (\mathcal{H} - \mu\hat{N}) d\tau), \quad (6.16)$$

a função de partição pode ser escrita na forma

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \langle \phi | e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu\hat{N})} | \phi \rangle \quad (6.17)$$

em que todos os caminhos satisfazem a condição (6.12).

6.3 Férmions em Temperatura Finita

Utilizando a lagrangiana (6.3) podemos integrar sobre o campo fermiônico através da função de partição (6.17)

$$Z_{\bar{\psi}\psi} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int_0^{\beta} d\tau \int_V d^3x (\mathcal{H} - \mu\hat{N} - i\pi\partial_0\psi) \right\}, \quad (6.18)$$

onde $\pi = i\gamma^0\bar{\psi}$ é o momento conjugado. Substituindo $\mathcal{H} = \pi\partial_0\psi - \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\vec{\gamma}\cdot\nabla + m_q G(\phi))\psi$ e $\pi \rightarrow i\pi = \gamma^0\bar{\psi}$, obtemos

$$Z_{\bar{\psi}\psi} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int_0^{\beta} d\tau \int_V d^3x \bar{\psi} (i\gamma^0\partial_0 - i\vec{\gamma}\cdot\nabla - m_q G - \mu\gamma^0) \psi \right\}, \quad (6.19)$$

É conveniente expandir o campo fermiônico no espaço dos momentos, com o vínculo $\psi(\tau = \beta) = -\psi(\tau = 0)$, e escrito como

$$\psi(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}, n} e^{i(\omega_n \tau + \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \psi(\omega_n, \mathbf{p}), \quad (6.20)$$

com $\omega_n = (2n + 1)\pi/\beta$. Assim podemos escrever a função de partição

$$Z_{\bar{\psi}\psi} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \beta \sum_{\mathbf{p}, n} \bar{\psi}(\omega_n, \mathbf{p}) \hat{D}_{\mathbf{p}} \psi(\omega_n, \mathbf{p}) \right\}, \quad (6.21)$$

na qual $\hat{D}_{\mathbf{p}} = i\omega_n \gamma^0 + i\gamma^i p_i + m_q G(\phi) - \mu \gamma^0$ é o operador no espaço dos momentos. Utilizando a identidade

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(-\bar{\psi} M \psi) = \det M, \quad (6.22)$$

obtemos como resultado

$$Z_{\bar{\psi}\psi} = \det(-\beta \hat{D}_{\mathbf{p}}) = \beta^4 ((i\omega_n + \mu) + E_{\mathbf{p}}^2)^2, \quad (6.23)$$

com $E_{\mathbf{p}}^2 = \mathbf{p}^2 + m_q^2 G^2(\phi)$. Portanto

$$\ln Z_{\bar{\psi}\psi} = \sum_{\mathbf{p}, n} \ln [\beta^4 ((i\omega_n + \mu) + E_{\mathbf{p}}^2)^2]. \quad (6.24)$$

No limite contínuo

$$\begin{aligned} \ln Z_{\bar{\psi}\psi} &= 2V \sum_n \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln [\beta^4 ((i\omega_n + \mu) + E_{\mathbf{p}}^2)] \\ &= 2V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} [\beta E_{\mathbf{p}} + \ln(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)})], \end{aligned} \quad (6.25)$$

o qual, em termos da energia livre de Helmholtz, $\Omega = -k_B T \ln Z$, podemos calcular o potencial termodinâmico

$$\Phi_{q\bar{q}} = \frac{\Omega_{\bar{\psi}\psi}}{V} = -\frac{\nu_q T}{\pi^2} \int_0^\infty p^2 dp [\beta E_{\mathbf{p}} + \ln(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)})], \quad (6.26)$$

onde ν_q é a degenerescência. Consequentemente, o potencial efetivo pode ser escrito na forma

$$V_{ef}(\phi) = \Phi_{q\bar{q}} + V(\phi). \quad (6.27)$$

Podemos mudar a base de energia subtraindo o termo $\beta E_{\mathbf{p}}$ e integrar (6.26) por partes, de modo que

$$\Phi_{q\bar{q}} = -\frac{\nu_q}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{E_{\mathbf{p}}} \left[\frac{1}{1 + e^{\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu)}} + \frac{1}{1 + e^{\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)}} \right]. \quad (6.28)$$

No limite relativístico $E_{\mathbf{p}} \sim p$ obtemos

$$\Phi_{q\bar{q}} = \frac{\nu_q}{\pi^2 \beta^4} [\text{Li}_4(-e^{\beta\mu}) + \text{Li}_4(-e^{-\beta\mu})], \quad (6.29)$$

em que

$$\text{Li}_s(z) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - z} dx \quad (6.30)$$

é a *função polilogarítmica*. Expandindo em termos de μ , temos

$$\begin{aligned}\Phi_{q\bar{q}} &\simeq -\frac{\nu_q}{12\pi^2\beta^4} \left(\frac{7\pi^4}{30} + \pi^2\beta^2\mu^2 \right) \\ &= -\frac{7\pi^2\nu_q T^4}{360} - \frac{\nu_q\mu^2 T^2}{12}.\end{aligned}\quad (6.31)$$

O potencial efetivo é então

$$\begin{aligned}V_{ef} &= \frac{\lambda\phi^4}{4} - \frac{m_q^2\phi^2}{2} - \frac{7\pi^2\nu_q T^4}{360} - \frac{\nu_q\mu^2 T^2}{12} \\ &= \frac{\lambda\phi^4}{4} - \frac{m_{ef}^2\phi^2}{2} + a^2,\end{aligned}\quad (6.32)$$

no qual

$$m_{ef}^2 = m_q^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right) \quad (6.33)$$

é a massa efetiva,

$$T_c^2 \equiv \frac{6m_q^2\phi^2}{\nu_q\mu^2} \quad (6.34)$$

é a temperatura efetiva e

$$a^2 = -\frac{\nu_q\mu^2 T^2}{6} - \frac{7\pi^2\nu_q T^4}{360} \quad (6.35)$$

6.4 Confinamento de férmons durante a inflação

O reaquecimento do universo após a inflação configura uma base para a teoria quântica da criação de partículas. Acredita-se que a maior parte da matéria constituinte do universo tenha origem neste período. Durante a inflação toda a energia é centralizada no movimento slow-roll do campo ínflaton. Imediatamente após a inflação, o campo oscila próximo do mínimo do potencial efetivo em $T \gg T_c$, levando a criação de muitas partículas elementares (DOLGOV; LINDE, 1982).

No estado inicial da inflação houve um rápido decaimento não perturbativo conhecido como pré aquecimento, onde espera-se que partículas estejam confinadas (KOFMAN; LINDE; STAROBINSKY, 1994). Nesse sentido, podemos estudar a evolução slow-roll do campo escalar ϕ , utilizando o potencial efetivo (6.31). Na teoria usual, os parâmetros slow-roll são dados por:

$$\varepsilon = \frac{M_p^2}{2} \left(\frac{V_\phi}{V} \right)^2, \quad \eta = M_p^2 \left(\frac{V_{\phi\phi}}{V} \right), \quad (6.36)$$

enquanto que o número de e-folds é dado pela relação

$$N = \frac{1}{M_p^2} \int_{\phi_f}^{\phi_k} \frac{V}{V_\phi} d\phi. \quad (6.37)$$

Para o potencial efetivo, temos

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{8M_p^2\phi^2(\lambda\phi^2 - m_{ef}^2)^2}{(\lambda\phi^4 - 2m_{ef}^2\phi^2 + 4a^2)^2} \\ &\sim \frac{8(\phi/M_p)^2(\delta(\phi/M_p)^2 - 1)^2}{(\delta(\phi/M_p)^4 - 2(\phi/M_p)^2 + 4\sigma^2)^2},\end{aligned}\quad (6.38)$$

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{4M_p^2(3\lambda\phi^2 - m_{ef}^2)}{(\lambda\phi^4 - 2m_{ef}^2\phi^2 - 4a^2)} \\ &= \frac{4(3\delta(\phi/M_p)^2 - 1)}{\delta(\phi/M_p)^4 - 2(\phi/M_p)^2 + 4\sigma^2},\end{aligned}\quad (6.39)$$

onde definimos $\delta = \lambda M_p^2/m_{ef}^2$ e $\sigma^2 = a^2/m_{ef}^2 M_p^2$. Calculando N , temos

$$\begin{aligned}N &= \frac{1}{M_p} \int_{\phi_f}^{\phi_k} \left[\frac{\delta(\phi/M_p)^4 - 2(\phi/M_p)^2 + 4\sigma^2}{4(\phi/M_p)(\delta(\phi/M_p)^2 - 1)} \right] d\phi \\ &= \frac{\phi_k^2}{4M_p^2} + \frac{\delta\phi_k^4}{16M_p^4} - \sigma^2 \ln(\phi_k/M_p) - \frac{\delta\sigma^2\phi_k^2}{2M_p^2} - N_f,\end{aligned}\quad (6.40)$$

com

$$N_e = \frac{\phi_f^2}{4M_p^2} + \frac{\delta\phi_f^4}{16M_p^4} - \sigma^2 \ln(\phi_f/M_p) - \frac{\delta\sigma^2\phi_f^2}{2M_p^2}, \quad (6.41)$$

e

$$\frac{\phi_f^2}{M_p^2} = \frac{1 + 2\delta\sigma^2 + \sqrt{1 - 8\sigma^2 - 12\delta\sigma^2 + 4\delta^2\sigma^4}}{1 + 2\delta}. \quad (6.42)$$

Podemos então obter os índices espectrais:

$$\begin{aligned}n_s &= 1 - 6\varepsilon + 2\eta \\ &= 1 - \frac{8}{(\phi_k/M_p)^2} + 2\delta - \frac{8\sigma^2(\delta(\phi_k/M_p)^2 - 5)}{(\phi_k/M_p)^4}\end{aligned}\quad (6.43)$$

e

$$\begin{aligned}r &= 16\varepsilon \\ &= \frac{32}{(\phi_k/M_p)^2} - 32\delta + \frac{64\sigma^2(\delta(\phi_k/M_p)^2 - 2)}{(\phi_k/M_p)^4},\end{aligned}\quad (6.44)$$

cujo plano $n_s - r$ é mostrado na Figura 12. Os valores que concordam com os dados do Planck, $n_s = 0.9658$, $r < 0.072$ são $\delta > 0.0027$ e $\phi_k = 14.21 M_p$, o que corresponde a $N < 44.43$. Por outro lado, a amplitude do espectro de potências escalar, escrito em termos do campo ϕ_k , é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_s &= \frac{V_{ef}}{24\pi^2 M_p^4 \varepsilon} \\ &= \frac{m_{ef}^2 (\delta(\phi_k/M_p)^4 - 2(\phi_k/M_p)^2 + 4\sigma^2)^3}{768\pi^2 M_p^2 (\phi_k/M_p)^2 (\delta(\phi_k/M_p)^2 - 1)^2},\end{aligned}\quad (6.45)$$

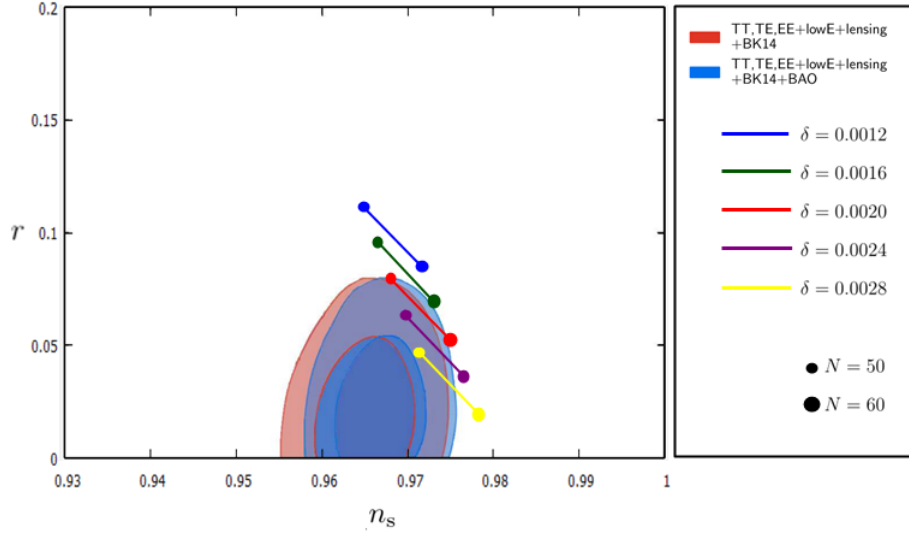


Figura 12 – Plano $n_s - r$ para alguns valores de δ para o potencial efetivo.

tal que, para $\mathcal{A}_s = 2.09 \times 10^{-9}$, $\phi_k = 14.21 M_p$, $\sigma = 0.005$ e $\delta = 0.0027$, obtemos $m_{ef}^2 \approx 1.19 \times 10^{-12} M_p^2$, ou seja, $m_{ef} \approx 2.62 \times 10^{12} \text{ GeV}$.

Investigações sobre a anomalia no traço do tensor energia momento na cromodinâmica quântica levam ao resultado

$$\theta_\mu^\mu = 4V - \phi \frac{dV}{d\phi} = B_0 = 4a^2 - m_{ef}^2 \phi_0^2, \quad (6.46)$$

onde B_0 é a densidade de energia do vácuo, com um valor $B_0 = (300 \text{ MeV})^4$ (BRODSKY; SHROCK, 2011). Da expressão 6.35, temos

$$B_0 = (4\sigma^2 M_p^2 - \phi_0^2) m_{ef}^2, \quad (6.47)$$

ou seja

$$m_{ef}^2 = \frac{B_0}{(4\sigma^2 M_p^2 - \phi_0^2)}, \quad (6.48)$$

logo

$$\text{Para } m_{ef}^2 > 0 \quad (T < T_c) \quad \phi_0^2 < 4\sigma^2 M_p^2 \quad (6.49)$$

$$\text{Para } m_{ef}^2 < 0 \quad (T > T_c) \quad \phi_0^2 > 4\sigma^2 M_p^2, \quad (6.50)$$

correspondendo a uma temperatura crítica de confinamento

$$T_c^2 = \frac{6m_q^2 \phi_0^2}{\nu_q \mu^2} = \frac{24m_q^2 \sigma^2 M_p^2}{\nu_q \mu^2} = \frac{6m_q^2 M_p^2}{\nu_q \mu^2 \delta}, \quad (6.51)$$

onde utilizamos o valor mínimo do potencial $\phi_0^2 = m_{ef}^2 / \lambda = M_p^2 / \delta$. Dessa forma podemos estimar um valor

$$T_c = (47.14 M_p) \left(\frac{m_q}{\mu} \right) \quad (6.52)$$

para a temperatura crítica.

Conclusões e Perspectivas

Nesta tese abordamos a teoria da inflação taquiônica como descritora da expansão inicial do universo, na qual cenários como o problema da medida e o confinamento na matéria surgiram. Vimos que o campo taquiônico surge das teorias das cordas e apresenta características que o tornam plausível na descrição da inflação. Ao mesmo tempo em que gera a inflação, flutuações primordiais surgem do vácuo quântico, dando origem a perturbações que são a semente para a formação posterior de estruturas em larga escala. Ao aplicar para alguns potenciais, conseguimos vincular seus parâmetros com as observações, obtendo valores expressivos em concordância com os dados mais recentes.

Por outro lado, a transição quântica-clássica trouxe à tona o problema da medida, em que o colapso da função de onda apresenta descrição incompleta na mecânica quântica padrão. O modelo de colapso por localização espontânea mostrou-se viável e pudemos compreender melhor a transição, vinculando os parâmetros da teoria com os dados observacionais. O espectro de perturbações, necessário para fazer a ponte entre a teoria e as observações, é modificado pela função de colapso e seu comportamento altera-se significativamente para valores da função longe do limite invariante de escala.

O estudo do confinamento de férmions na inflação foi abordado a partir das correções térmicas do potencial que caracteriza este efeito. A inflação, dirigida pelo campo escalar, é um bom laboratório no qual teorias como a CDQ podem ser testadas. A partir da função de partição obtivemos o potencial efetivo, de modo a inserir a temperatura na teoria. O resultado é uma dependência dos parâmetros do potencial com a temperatura, onde a temperatura crítica depende do potencial químico e determina as fases de confinamento ou desconfinamento. A partir deste estudo, modelos de transição de fase na CDQ no universo primordial podem ser abordadas, levando a um melhor entendimento dos processos iniciais do universo.

Referências

- ALAM, S. et al. The clustering of galaxies in the completed sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: cosmological analysis of the dr12 galaxy sample. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 470, p. 2617–2652, 2017. doi:[10.1093/mnras/stx721](https://doi.org/10.1093/mnras/stx721). Citado na página 46.
- ALCANIZ, J. S.; CARVALHO, F. C. β -exponential inflation. *IOP Publishing*, v. 79, p. 39001, 2007. doi:[10.1209/0295-5075/79/39001](https://doi.org/10.1209/0295-5075/79/39001). Citado na página 36.
- ARMENDÁRIZ-PICÓN, C.; DAMOUR, T.; MUKHANOV, V. k-inflation. *Physics Letters B*, v. 458, p. 209–218, 1999. doi:[10.1016/S0370-2693\(99\)00603-6](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)00603-6). Citado na página 14.
- BARNABY, N.; CLINE, J. M. Creating the universe from brane-antibrane annihilation. *Phys. Rev. D*, v. 70, p. 023506, 2004. doi:[10.1103/PhysRevD.70.023506](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.023506). Citado na página 31.
- BAZEIA, D.; BRITO, F. A.; NASCIMENTO, J. R. Supergravity brane worlds and tachyon potentials. *Phys. Rev. D*, v. 68, p. 085007, 2003. doi:[10.1103/PhysRevD.68.085007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.68.085007). Citado na página 65.
- BEUTLER, F. et al. The 6df galaxy survey: baryon acoustic oscillations and the local hubble constant. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 416, p. 3017–3032, 2011. doi:[10.1111/j.1365-2966.2011.19250.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19250.x). Citado na página 46.
- BICEP2/KECK. Constraints on primordial gravitational waves using *planck*, *wmap*, and new *bicep2/keck* observations through the 2015 season. *Phys. Rev. Lett.*, v. 121, p. 221301, 2018. doi:[10.1103/PhysRevLett.121.221301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.221301). Citado na página 46.
- BILANIUK, O. M. P.; DESHPANDE, V. K.; SUDARSHAN, E. C. G. “meta” relativity. *Amer. J. Phys.*, v. 30, p. 718–723, 1962. doi:[10.1119/1.1941773](https://doi.org/10.1119/1.1941773). Citado na página 29.
- BILIĆ, N.; TUPPER, G. Ads braneworld with backreaction. *Centr. Eur. J. Phys.*, v. 12, p. 147–159, 2014. doi:[10.2478/s11534-013-0325-y](https://doi.org/10.2478/s11534-013-0325-y). Citado na página 30.
- Blanton, M. R. e. a. . A. . . Sloan digital sky survey iv: Mapping the milky way, nearby galaxies, and the distant universe. *The Astronomical Journal*, v. 154, 2017. doi:[10.3847/1538-3881/aa7567](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa7567). Citado na página 17.
- BLUMENHAGEN, R. et al. d-brane instantons in type ii orientifolds. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, v. 59, p. 269–296, 2009. doi:[10.1146/annurev.nucl.010909.083113](https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.010909.083113). Citado na página 30.
- BRODSKY, S. J.; SHROCK, R. Condensates in quantum chromodynamics and the cosmological constant. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 108, p. 45–50, 2011. doi:[10.1073/pnas.1010113107](https://doi.org/10.1073/pnas.1010113107). Citado na página 71.
- BUNCH, T. S.; DAVIES, P. C. W. Quantum field theory in de sitter space: renormalization by point-splitting. *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 360, p. 117 – 134, 1978. doi:[10.1098/rspa.1978.0060](https://doi.org/10.1098/rspa.1978.0060). Citado na página 43.

- CALLAN, C. G. et al. Loop corrections to superstring equations of motion. *Nucl. Phys. B*, v. 308, p. 221–284, 1988. doi:[10.1016/0550-3213\(88\)90565-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90565-2). Citado na página 31.
- CANATE, P.; PEARLE, P.; SUDARSKY, D. Continuous spontaneous localization wave function collapse model as a mechanism for the emergence of cosmological asymmetries in inflation. *Phys. Rev. D*, v. 28, 2013. doi:[10.1103/PhysRevD.87.104024](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.104024). Citado na página 57.
- CHALLINOR, A. Cmb anisotropy science: a review. *Proceedings of the International Astronomical Union*, v. 8, p. 42–52, 2012. doi:[10.1017/S1743921312016663](https://doi.org/10.1017/S1743921312016663). Citado na página 25.
- CHO, I.; VILENKIN, A. Vacuum defects without a vacuum. *Phys. Rev. D*, v. 59, p. 021701, 1998. doi:[10.1103/PhysRevD.59.021701](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.59.021701). Citado na página 34.
- DOLGOV, A.; LINDE, A. Baryon asymmetry in the inflationary universe. *Phys. Lett. B*, v. 116, p. 329–334, 1982. doi:[10.1016/0370-2693\(82\)90292-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90292-1). Citado na página 69.
- DUFF, M. M theory (the theory formerly known as strings). *International Journal of Modern Physics A*, v. 11, p. 5623–5641, 1996. doi:[10.1142/S0217751X96002583](https://doi.org/10.1142/S0217751X96002583). Citado na página 30.
- DVALI, G.; TYE, S. H. Cosmology from a rolling massive scalar field on the anti-d3 brane of de sitter vacua. *Phys. Rev. D*, v. 450, 1999. doi:[10.1016/S0370-2693\(99\)00132-X](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)00132-X). Citado na página 29.
- EINSTEIN, A. Die grundlage der allgemeiner relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, n. 1, p. 1 – 49, 1916. Citado na página 14.
- FANCHI, J. R. Tachyon kinematics in parametrized relativistic quantum mechanics. *Foundations of Physics*, v. 20, p. 224, 1990. doi:[10.1007/BF00731646](https://doi.org/10.1007/BF00731646). Citado na página 29.
- FEINBERG, G. Possibility of faster-than-light particles. *Phys. Rev.*, v. 159, p. 1089–1105, 1967. doi:[10.1103/PhysRev.159.1089](https://doi.org/10.1103/PhysRev.159.1089). Citado na página 29.
- FRIEDMAN, A. On the curvature of space. *Z. Phys.*, v. 10, 1922. doi:[10.1007/BF01332580](https://doi.org/10.1007/BF01332580). Citado na página 17.
- GAROUSHI, M. R.; SAMI, M.; TSUJIKAWA, S. Cosmology from a rolling massive scalar field on the anti-d3 brane of de sitter vacua. *Phys. Rev. D*, v. 70, 2004. doi:[10.1103/PhysRevD.70.043536](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.043536). Citado na página 29.
- GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, v. 23, p. 347 – 356, 1981. doi:[10.1103/PhysRevD.23.347](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.347). Citado 3 vezes nas páginas 14, 17 e 26.
- HU, W.; DODELSON, S. Cosmic microwave background anisotropies. *Annu. Rev. of Astron. Astrophys.*, v. 40, p. 171–216, 2002. doi:[10.1146/annurev.astro.40.060401.093926](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.40.060401.093926). Citado na página 47.
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 15, p. 168–173, 1929. doi:[10.1073/pnas.2536799100](https://doi.org/10.1073/pnas.2536799100). Citado 3 vezes nas páginas 9, 19 e 20.

- ISSIFU, A.; ROCHA, J. C. M.; BRITO, F. A. Confinement of fermions in tachyon matter at finite temperature. *Advances in High Energy Physics*, v. 2021, p. 6645678, 2021. doi:[10.1155/2021/6645678](https://doi.org/10.1155/2021/6645678). Citado na página 65.
- JEONG, D.; KAMIONKOWSKI, M. Gravitational waves, cmb polarization, and the hubble tension. *Phys. Rev. Lett.*, v. 124, 2020. doi:[10.1103/PhysRevLett.124.041301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.041301). Citado na página 39.
- KACHRU, S. et al. Towards inflation in string theory. *IOP Publishing*, v. 2003, p. 013–013, 2003. doi:[10.1088/1475-7516/2003/10/013](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2003/10/013). Citado na página 31.
- KHOURY, J.; PIAZZA, F. Rapidly-varying speed of sound, scale invariance and non-gaussian signatures. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2009, 2009. doi:[10.1088/1475-7516/2009/07/026](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2009/07/026). Citado na página 33.
- KITAZAWA, Y. Effective lagrangian for the open superstring from a 5-point function. *Nucl. Phys. B*, v. 289, p. 599–608, 1987. doi:[10.1016/0550-3213\(87\)90396-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(87)90396-8). Citado na página 31.
- KLUSON, J. Proposal for non-bogomol'nyi-prasad-sommerfield d-brane action. *Phys. Rev. D*, v. 62, 2000. doi:[10.1103/PhysRevD.62.126003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.126003). Citado na página 14.
- KOFMAN, L.; LINDE, A.; STAROBINSKY, A. A. Reheating after inflation. *Phys. Rev. Lett.*, v. 73, p. 3195–3198, 1994. doi:[10.1103/PhysRevLett.73.3195](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.3195). Citado na página 69.
- KOSOWSKY, A.; TURNER, M. S. Cbr anisotropy and the running of the scalar spectral index. *Phys. Rev. D*, v. 52, p. R1739–R1743, 1995. doi:[10.1103/PhysRevD.52.R1739](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.R1739). Citado na página 46.
- KRISTIAN, C. Constructing the myth of the copenhagen interpretation. *Perspectives on Science*, v. 17, 2009. doi:[10.1162/posc.2009.17.1.26](https://doi.org/10.1162/posc.2009.17.1.26). Citado na página 15.
- LEIGH, R. G. Dirac-born-infeld action from dirichlet sigma model. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 4, p. 2767, 1989. doi:[10.1142/S0217732389003099](https://doi.org/10.1142/S0217732389003099). Citado na página 31.
- LI, M. Boundary states of d-branes and dy-strings. *Nucl. Phys. B*, v. 460, p. 221–284, 1996. doi:[10.1016/0550-3213\(95\)00630-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00630-3). Citado na página 31.
- M., B.; L., I. Foundations of the new field theory. *Proc. R. Soc. Lond*, v. 144, p. 425–451, 1934. doi:[10.1098/rspa.1934.0059](https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0059). Citado na página 14.
- NATHAN, S. Exact results on the space of vacua of four-dimensional susy gauge theories. *Phys. Rev. D*, v. 49, p. 6857–6863, 1994. doi:[10.1103/PhysRevD.49.6857](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.6857). Citado na página 30.
- NEUMANN, J. von. Mathematische grundlagen der quantenmechanik. *Springer*, v. 2, p. IX, 262, 1996. doi:[10.1007/978-3-642-61409-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61409-5). Citado na página 54.
- NEWTON, R. G. Causality effects of particles that travel faster than light. *Phys. Rev.*, v. 162, p. 1274–1274, 1967. doi:[10.1103/PhysRev.162.1274](https://doi.org/10.1103/PhysRev.162.1274). Citado na página 29.
- PEIERLS, R. In defence of "measurement". *Physics World*, v. 4, 1991. doi:[10.1088/2058-7058/4/1/19](https://doi.org/10.1088/2058-7058/4/1/19). Citado na página 15.

- PENZIAs, A. A.; WILSON, R. W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *Astrophysical Journal*, v. 142, n. 1, p. 419 – 421, 1965. Citado na página 14.
- PICCIRILLI, M. P. et al. Constraining quantum collapse inflationary models with current data: The semiclassical approach. *International Journal of Modern Physics D*, v. 87, 2019. doi:[10.1142/S021827181950041X](https://doi.org/10.1142/S021827181950041X). Citado na página 57.
- PLANCKVI. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *Astronomy and Astrophysics*, v. 641, 2020. doi:[10.1051/0004-6361/201833910](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910). Citado 2 vezes nas páginas 19 e 23.
- PLANCKVII. Planck 2018 results. vii. isotropy and statistics of the cmb. *Astronomy and Astrophysics*, v. 641, 2020. doi:[10.1051/0004-6361/201935201](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201935201). Citado na página 17.
- PLANCKX. Planck 2018 results. x. constraints on inflation. *Astronomy and Astrophysics*, v. 641, p. 61, 2020. doi:[10.1051/0004-6361/201833887](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833887). Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.
- POLCHINSKI, J. String duality. *Rev. Mod. Phys.*, v. 68, p. 1245–1258, 1996. doi:[10.1103/RevModPhys.68.1245](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.68.1245). Citado na página 30.
- RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 4690–4693, 1999. doi:[10.1103/PhysRevLett.83.4690](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.4690). Citado na página 30.
- RANDALL, L.; SUNDRUM, R. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 3370–3373, 1999. doi:[10.1103/PhysRevLett.83.3370](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.3370). Citado na página 30.
- ROBERTSON, H. P. Kinematics and world-structure. *Astrophysical Journal*, v. 82, 1935. doi:[10.1086/143681](https://doi.org/10.1086/143681). Citado na página 17.
- ROSS, A. J. et al. The clustering of the sdss dr7 main galaxy sample – i. a 4 per cent distance measure at $z = 0.15$. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 449, p. 835–847, 2015. doi:[10.1093/mnras/stv154](https://doi.org/10.1093/mnras/stv154). Citado na página 46.
- SANTOS, M. A. et al. CMB constraints on β -exponential inflationary models. *IOP Publishing*, v. 2018, p. 023–023, 2018. doi:[10.1088/1475-7516/2018/03/023](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/03/023). Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- SARKAR, S.; SATZ, H.; SINHA, B. The physics of the quark-gluon plasma. *Lecture Notes in Physics*, v. 785, p. 369, 2010. doi:[10.1007/978-3-642-02286-9](https://doi.org/10.1007/978-3-642-02286-9). Citado na página 65.
- SAYRE, J. T. et al. Measurements of b -mode polarization of the cosmic microwave background from 500 square degrees of sptpol data. *Phys. Rev. D*, v. 101, 2020. doi:[10.1103/PhysRevD.101.122003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.122003). Citado na página 39.
- SEN, A. Stable non-BPS bound states of BPS d-branes. *Journal of High Energy Physics*, v. 08, p. 010, 1998. doi:[10.1088/1126-6708/1998/08/010](https://doi.org/10.1088/1126-6708/1998/08/010). Citado na página 31.
- SEN, A. Non-BPS d-branes in string theory. *IOP Publishing*, v. 17, p. 1251–1256, 2000. doi:[10.1088/0264-9381/17/5/334](https://doi.org/10.1088/0264-9381/17/5/334). Citado na página 31.
- SEN, A. Rolling tachyon. *Journal of High Energy Physics*, v. 2002, p. 048–048, 2002. doi:[10.1088/1126-6708/2002/04/048](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2002/04/048). Citado 2 vezes nas páginas 14 e 31.

- SEN, A. Tachyon matter. *Journal of High Energy Physics*, v. 2002, p. 065–065, 2002. doi:[10.1088/1126-6708/2002/07/065](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2002/07/065). Citado na página 31.
- SEN, A.; ZWIEBACH, B. Tachyon condensation in string field theory. *Journal of High Energy Physics*, v. 03, p. 002, 2000. doi:[10.1088/1126-6708/2000/03/002](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2000/03/002). Citado na página 31.
- SPT-3G. Measurements of the e -mode polarization and temperature- e -mode correlation of the cmb from spt-3g 2018 data. *Phys. Rev. D*, v. 104, p. 022003, 2021. doi:[10.1103/PhysRevD.104.022003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.022003). Citado na página 46.
- STEER, D. A.; VERNIZZI, F. Tachyon inflation: Tests and comparison with single scalar field inflation. *Phys. Rev. D*, v. 70, 2004. doi:[10.1103/PhysRevD.70.043527](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.043527). Citado 3 vezes nas páginas 31, 33 e 45.
- WALKER, A. G. On milne’s theory of world-structure. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1937. doi:[10.1112/plms/s2-42.1.90](https://doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.90). Citado na página 17.
- WIGNER, E. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. *Ann. Math.*, v. 40, p. 149–204, 1939. doi:[10.2307/1968551](https://doi.org/10.2307/1968551). Citado na página 29.
- WITTEN, E. Bound states of strings and p-branes. *Nucl. Phys. B*, v. 460, p. 335–350, 1996. doi:[10.1016/0550-3213\(95\)00610-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00610-9). Citado na página 31.
- WMAP. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological parameter results. *American Astronomical Society*, v. 208, p. 19, 2013. doi:[10.1088/0067-0049/208/2/19](https://doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/19). Citado na página 46.
- ZUREK, W. H. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Rev. Mod. Phys.*, v. 75, 2003. doi:[10.1103/RevModPhys.75.715](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.715). Citado na página 15.

Apêndices

APÊNDICE A – Teoria das perturbações

A métrica perturbada pode ser escrita como

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.1})$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ é a métrica de fundo com componentes

$$\bar{g}_{00} = -1, \quad \bar{g}_{0i} = \bar{g}_{i0} = 0, \quad \bar{g}_{\mu\nu} = a^2(t)\delta_{ij} \quad (\text{A.2})$$

e $\delta g_{\mu\nu} \ll \bar{g}_{\mu\nu}$ é uma pequena perturbação na métrica que satisfaz a seguinte relação

$$\delta g^{\mu\nu} = -\bar{g}^{\mu\rho}\bar{g}^{\nu\lambda}\delta g_{\rho\lambda}. \quad (\text{A.3})$$

Para o calibre Newtoniano, temos as componentes componentes

$$\begin{aligned} \delta g_{00} &= -2\Phi, & \delta g_{i0} &= \delta g_{0i} = 0, & \delta g_{ij} &= -2a^2(t)\zeta\delta_{ij}, \\ \delta g^{00} &= 2\Phi, & \delta g^{0i} &= \delta g^{i0} = 0, & \delta g^{ij} &= 2a^{-2}(t)\zeta\delta^{ij}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Os símbolos de Christoffel são obtidos pela definição

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}(\partial_{\nu}g_{\mu\alpha} + \partial_{\mu}g_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.5})$$

e possuem componentes dadas por

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \dot{\Phi}, \quad \Gamma_{0i}^0 = \partial_i\Phi, \quad \Gamma_{00}^i = \frac{1}{a^2}\partial_i\Phi, \quad \Gamma_{jk}^i = \delta^{il}(\partial_l\zeta\delta_{jk} - \partial_k\zeta\delta_{jl} - \partial_j\zeta\delta_{lk}), \\ \Gamma_{0j}^i &= (H - \dot{\zeta})\delta_j^i, \quad \Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}(1 - 2\Phi - 2\zeta)\delta_{ij} - a^2\dot{\zeta}\delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Para o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\rho\mu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} \quad (\text{A.7})$$

temos as componentes

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3(\dot{H} + H^2) + 3\ddot{\zeta} + 3H\dot{\Phi} + 6H\dot{\zeta} + \frac{\nabla^2\Phi}{a^2} \\ R_{i0} &= 2\partial_i(\dot{\zeta} + H\Phi) \\ R_{ij} &= a^2\left[(\dot{H} + 3H^2)(1 - 2\Phi - 2\zeta) - H\dot{\Phi} - 6H\dot{\zeta} - \ddot{\zeta} + \frac{\nabla^2\zeta}{a^2}\right]\delta_{ij} \\ &\quad - \partial_i\partial_j(\Phi - \zeta). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Logo o escalar de Ricci será:

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2) - 6H\dot{\Phi} - 6\ddot{\zeta} - \frac{2\nabla^2(\Phi - 2\zeta)}{a^2} - 24H\dot{\zeta} - 24H^2\Phi - 12\dot{H}\Phi. \quad (\text{A.9})$$

Com estes resultados, as componentes do tensor de Einstein são

$$\begin{aligned}
G_0^0 &= -3H^2 + 6H\dot{\zeta} - \frac{2\nabla^2\zeta}{a^2} + 6H^2\Phi \\
G_i^0 &= \partial_i(\dot{\zeta} + H\Phi) \\
G_j^i &= \left[-2\dot{H} - 3H^2 + 6H^2\Phi + 4\dot{H}\Phi + 2H\dot{\Phi} + 6H\dot{\zeta} + 2\ddot{\zeta} + \frac{\nabla^2(\Phi - \zeta)}{a^2} \right] \delta_j^i \\
&\quad - \frac{\partial^i\partial_j(\Phi - \zeta)}{a^2}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

A perturbação no tensor energia momentum é dada por

$$\begin{aligned}
T_0^0 &= -\frac{(V(\bar{\Theta}) + V_{\Theta}\delta\Theta)}{\sqrt{1 - \alpha'\dot{\bar{\Theta}}^2}} + \frac{\alpha'\dot{\bar{\Theta}}V(\bar{\Theta})(\dot{\bar{\Theta}}\Phi - \delta\dot{\Theta})}{(1 - \alpha'\dot{\bar{\Theta}}^2)^{3/2}} \\
T_i^0 &= -\frac{\alpha'\dot{\bar{\Theta}}V(\bar{\Theta})\partial_i\delta\Theta}{\sqrt{1 - \alpha'\dot{\bar{\Theta}}^2}} \\
T_j^i &= \left[-(V(\bar{\Theta}) + V_{\Theta}\delta\Theta)\sqrt{1 - \alpha'\dot{\bar{\Theta}}^2} - \frac{\alpha'\dot{\bar{\Theta}}V(\bar{\Theta})(\dot{\bar{\Theta}}\Phi - \delta\dot{\Theta})}{\sqrt{1 - \alpha'\dot{\bar{\Theta}}^2}} \right] \delta_j^i
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Anexos

ANEXO A – Publicações

Hindawi
Advances in High Energy Physics
Volume 2021, Article ID 6645678, 22 pages
<https://doi.org/10.1155/2021/6645678>



Research Article

Confinement of Fermions in Tachyon Matter at Finite Temperature

Adamu Issifu ¹, Julio C. M. Rocha ¹ and Francisco A. Brito ^{1,2}

¹Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, Caixa Postal 5008, 58051-970 João Pessoa, Paraíba, Brazil

²Departamento de Física, Universidade Federal de Campina, Grande Caixa Postal 10071, 58429-900 Campina Grande, Paraíba, Brazil

Correspondence should be addressed to Francisco A. Brito; fabrito@df.ufcg.edu.br

Received 2 January 2021; Revised 13 February 2021; Accepted 7 April 2021; Published 5 May 2021

Academic Editor: Edward Sarkisyan Grinbaum

Copyright © 2021 Adamu Issifu et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited. The publication of this article was funded by SCOAP³.

We study a phenomenological model that mimics the characteristics of QCD theory at finite temperature. The model involves fermions coupled with a modified Abelian gauge field in a tachyon matter. It reproduces some important QCD features such as confinement, deconfinement, chiral symmetry, and quark-gluon-plasma (QGP) phase transitions. The study may shed light on both light and heavy quark potentials and their string tensions. Flux tube and Cornell potentials are developed depending on the regime under consideration. Other confining properties such as scalar glueball mass, gluon mass, glueball-meson mixing states, and gluon and chiral condensates are exploited as well. The study is focused on two possible regimes, the ultraviolet (UV) and the infrared (IR) regimes.