



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física

Um Estudo Sobre a Energia Gravitacional na Abordagem do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

Victor Rodrigues Gonçalves

Tese de Doutorado

João Pessoa

2022

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física

Um Estudo Sobre a Energia Gravitacional na Abordagem do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

Victor Rodrigues Gonçalves

Tese de Doutorado

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação Stricto Sensu em Física do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física na Área de Concentração de Gravitação e Cosmologia

Orientador: Jansen Brasileiro Formiga

João Pessoa

2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

G635e Gonçalves, Victor Rodrigues.

Um estudo sobre a energia gravitacional na abordagem
do teleparalelismo equivalente à relatividade geral /
Victor Rodrigues Gonçalves. - João Pessoa, 2022.
145 f. : il.

Orientação: Jansen Brasileiro Formiga.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Teleparalelismo. 3. Energia
gravitacional - Localização. 4. Referencial
teleparalelo. I. Formiga, Jansen Brasileiro. II. Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)

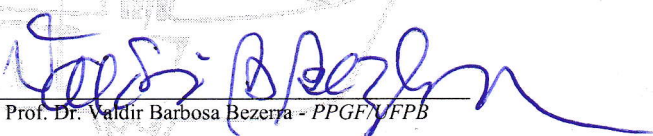


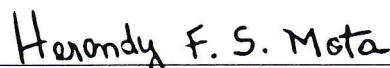
Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física

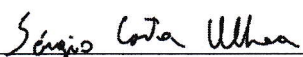
Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado**
do aluno **Victor Rodrigues Gonçalves**, candidato ao
Título de Doutor em Física na Área de Concentração
Gravitação e Cosmologia.

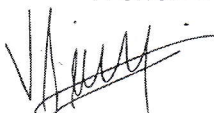
1 Aos **vinte e sete dias de julho de dois mil e vinte e dois**, às quinze horas, reuniram-se, na
2 Sala Virtual do Google Meet, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar
3 o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Gravitação e Cosmologia, **Victor**
4 **Rodrigues Gonçalves**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores:
5 *Jansen Brasileiro Formiga* (UFPB) - orientador e presidente da banca examinadora, *Valdir*
6 *Barbosa Bezerra* (UFPB), *Herondy Francisco Santana Mota* (UFPB), *Sérgio Costa Ulhoa*
7 (UNB), *Victor Ignácio Afonso* (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Professor Jansen
8 Brasileiro Formiga comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a
9 palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado
10 “*Um Estudo sobre a Energia Gravitacional na Abordagem do Teleparalelismo Equivalente*
11 *à Relatividade Geral*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca
12 Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade
13 Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para
14 constar, eu, Maria do Socorro de Oliveira Souza, Assistente em Administração, lavrei a
15 presente ata que será assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora.

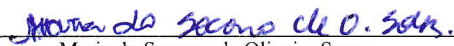

Prof. Dr. Jansen Brasileiro Formiga Orientador -
PPGF/UFPB


Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra - PPGF/UFPB


Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota -
PPGF/UFPB


Prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa - UNB


Prof. Dr. Victor Ignácio Afonso - UFCG


Maria do Socorro de Oliveira Souza
Assistente em Administração


Victor Rodrigues Gonçalves
Discente

Este trabalho é dedicado, principalmente, à minha mãe, Iracema Lisboa Rodrigues; mas, também, a todos os outros membros da minha família que tanto amo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre estar iluminando a minha vida e protegendo a minha família e amigos. Acredito que tudo tem um propósito e Deus pode interceder na vida de cada um da melhor forma possível. Por mais que existam coisas horríveis pelo mundo, talvez até a pior das crueldades, ou a mais triste das tristezas, possam ter tido um motivo maior, de alguma forma.

Em segundo lugar, gostaria de agradecer à Universidade Federal da Paraíba, principalmente ao departamento de física (incluo aqui todos os professores), e a CNPq, por tornarem possível a realização desta etapa tão importante da minha formação que é meu doutorado. Quando cito aqui a CNPq, também estou agradecendo aos governos que propiciaram o financiamento desse órgão, bem como da própria universidade, e, principalmente, aos trabalhadores de bem que contribuem com o orçamento deste país através do pagamento de impostos.

Agradeço muito ao meu orientador, Jansen Brasileiro Formiga, pela orientação e por todos os ensinamentos ao longo desse ciclo do doutorado, desde comandos de programas computacionais às discussões sobre conceitos físicos. Agradeço pela paciência e por ter sido sempre tão solícito quando precisei, além de ser um exemplo de dedicação e comprometimento com o que faz.

Gostaria de agradecer também a toda minha família, por sempre me apoiar em tudo que faço, especialmente à minha mãe, Iracema Lisboa Rodrigues, que nunca mediu esforços para fazer o melhor por mim e sempre estar me incentivando e me confortando em todos os momentos. Agradeço demais às minhas duas irmãs, Sabrina Krüger e Bruna Gonçalves, por terem me dado amparo sempre que precisei. Bem como aos meus irmãos Geovanni Gonçalves, Henrique Krüger, Lucas Gonçalves, Kayky Krüger e Lucas Krüger. Agradecimento especial por todo suporte também ao meu pai José Carlos Gonçalves, ao meu padrasto, que também o considero como pai, Wallace Krüger e à minha querida madrastra Simone Gonçalves.

Por fim, gostaria de agradecer a todos os meus amigos e colegas de curso que contribuíram de alguma maneira em minha formação, seja por meio de discussões sobre os assuntos das disciplinas ou por conselhos acadêmicos. E também agradecer à Laura Lylian da Cunha por tornar a fase final do meu doutorado mais leve e descontraída, além de ser sempre muito compreensiva.

“Sendo humanos, os cientistas às vezes também se envolvem na falácia de selecionar as observações: gostam de se lembrar daqueles casos em que tinham razão e esquecer as vezes em que estavam errados. Mas, em muitos exemplos, o que está “errado” é parcialmente certo, ou estimula os outros a descobrir o que está certo.”
(**Carl Sagan**, *O mundo assombrado pelos demônios*.)

Resumo

O objetivo desta tese é avaliar a consistência da energia do campo gravitacional obtida quando o formalismo do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral é empregado, bem como qual referencial teleparalelo é mais adequado para esse fim. Com esse intuito, usamos essa abordagem para calcular a energia do campo gravitacional do espaço-tempo de Schwarzschild e obter o tensor densidade de energia-momento gravitacional para os espaços-tempos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. No primeiro caso, utilizamos tetradas adaptadas às coordenadas de Kruskal e às de Novikov. Obtivemos que a energia do buraco negro/branco é o famoso Mc^2 quando a garganta do buraco de minhoca está fechada. Nesse resultado, verificamos que a singularidade não contribui para a energia, o que indica que a energia obtida é puramente gravitacional. Já para o segundo caso, encontramos o tensor densidade de energia-momento gravitacional do universo a partir da tetrada adapta às coordenadas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Decompomos esse tensor em sua parte simétrica e antissimétrica, analisando cada uma delas. A parte simétrica obedece uma equação de estado tipo-radiação, depois pontuamos que, na verdade, essa é uma característica geral do tensor densidade energia-momento gravitacional, já que o mesmo tem traço nulo. Já a parte antissimétrica não contribui para a energia do universo. Observamos que as equações de campo tem um vácuo bem definido e que, para universos com seção espacial plana, a densidade de energia total do universo é nula. No penúltimo capítulo, verificamos que o 4-momento do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral pode ser visto como uma generalização do 4-momento do formalismo ADM. Ao final desse capítulo, discutimos a ideia de que o referencial mais adequado para analisar o problema da energia gravitacional seja o referencial adaptado à partículas livres e que esteja livre de propriedades artificiais. Concluimos, a partir dos resultados obtidos nesta tese, que o Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral é bastante propício no cálculo da energia gravitacional desde que se use um referencial teleparalelo adequado.

Palavras-chaves: teleparalelismo; energia gravitacional; localização da energia gravitacional; referencial teleparalelo.

Abstract

The objective of this thesis is to evaluate the consistency of the gravitational energy obtained when the Teleparallel Equivalent of General Relativity is applied, as well as which teleparallel frame is more suitable for this purpose. In order to do that, we have used this approach to calculate the energy of the gravitational field of the Schwarzschild spacetime and to obtain the gravitational energy-momentum tensor of the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker spacetimes. In the first case, we have used tetrads adapted to Kruskal and Novikov coordinates. We have obtained that the energy of the black/white hole is the famous Mc^2 when the wormhole throat is closed. In this result, we have verified that the singularity does not contribute to the energy, which indicates that the energy obtained is purely gravitational. For the second case, we have found the gravitational energy-momentum density tensor of the universe from the tetrad adapted to the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker coordinates. We have decomposed this tensor into its symmetrical and antisymmetrical parts, and we have analysed each one of them. The symmetrical part obeys a radiation-like equation of state, then we have pointed out that, actually, this is a general characteristic of the gravitational energy-momentum density tensor, since it is traceless. The antisymmetric part does not contribute to the energy of the universe. We have observed that the field equations have a well-defined vacuum and that, for spatially flat universes, the total energy density of the universe is zero. In the penultimate chapter, we have also verified the 4-momentum of the Teleparallel Equivalent of General Relativity can be made to coincide with that of the ADM formalism. In this chapter, we discuss the idea that the best frame to analyze the gravitational energy is a frame adapted to free particles and that is free from artificial properties. Based on the results obtained in this thesis, we have concluded the Teleparallel Equivalent of General Relativity is quite suitable for calculating gravitational energy as long as a suitable teleparallel frame is used.

Key-words: teleparallelism; gravitational energy; localization of the gravitational energy; teleparallel frame.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Um homeomorfismo φ_A aplicando $\mathcal{C}_A$ em um subconjunto aberto $\mathcal{C}'_A \subset \mathbb{R}^n$, fornecendo coordenadas ao ponto $p \in \mathcal{C}_A$, enquanto o homeomorfismo de φ_B aplica $\mathcal{C}_B$ em um subconjunto aberto $\mathcal{C}'_B \subset \mathbb{R}^n$, que fornece outras coordenadas ao mesmo ponto p , que também pertence à $\mathcal{C}_B$. Se $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B \neq \emptyset$, a transição de um sistema de coordenadas para outro é suave.	21
Figura 2	– Uma curva c em M , dada pelo intervalo aberto (a, b) , cuja representação de coordenada é fornecida por $\varphi \circ c$	22
Figura 3	– Uma curva c e uma função f na variedade M , as quais definem um vetor tangente ao longo da curva, dado por $\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right _{t=0}$. A representação de coordenada é fornecida pela carta $(\mathcal{C}, \varphi)$	23
Figura 4	– Diagrama espaço-tempo nas coordenadas de Kruskal-Szekeres. As curvas azuis são curvas de r constante, quando $r > 2m$. As retas pretas grossas são os horizontes de eventos, enquanto as curvas pretas finas representam curvas com r constante no interior do buraco negro/branco ($r < 2m$). As curvas vermelhas grossas correspondem as singularidades passada e futura em $r = 0$. (As linhas vermelhas finas indicam regiões proibidas $r < 0$). As linhas de universo de um conjunto de observadores de Kruskal com mesmo valor de X são dadas pela reta verde.	90
Figura 5	– Uma hipersuperfície de simultaneidade é mostrada em verde escuro (linha grossa na horizontal), a qual representa a região onde a integral $\int_V d^3x e t^{0a}$ é avaliada.	94
Figura 6	– Diagrama espaço-tempo nas coordenadas de Novikov. As curvas azuis são curvas de r constante, quando $r > 2m$. As curvas pretas grossas representam os horizontes de eventos, enquanto as curvas pretas finas correspondem as curvas de r constante dentro do buraco negro/branco ($r < 2m$). As curvas vermelhas grossas correspondem as singularidades passada e futura em $r = 0$. (As linhas vermelhas finas indicam regiões proibidas $r < 0$). As linhas de universo de um conjunto de observadores de Novikov com mesmo valor de R são dadas pela reta verde.	98
Figura 7	– Uma hipersuperfície de simultaneidade é indicada em verde escuro (linha grossa na horizontal), a qual representa a região onde a integral $\int_V d^3x e t^{0a}$ é avaliada.	102

Lista de abreviaturas e siglas

ADM	Sigla associada aos autores Richard Arnowitt, Stanley Deser e Charles W. Misner.
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.
TEGR	Teleparalelismo equivalente à relatividade geral.
TRG	Teoria da relatividade geral.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Notações e convenções	19
2	GEOMETRIA DE RIEMANN-CARTAN	20
2.1	Espaço-tempo como uma variedade diferenciável	20
2.2	Curvas e funções	22
2.3	Vetores	23
2.4	Vetor dual	24
2.5	Tensores	26
2.6	Derivada de Lie	27
2.7	Tensor métrico	29
2.8	Derivada covariante e conexão afim	31
2.8.1	A derivada covariante	31
2.8.2	A conexão afim	32
2.8.3	Derivada covariante de 1-formas e tensores em geral	33
2.8.4	Transporte paralelo e geodésicas afim	34
2.8.5	Transformação de coordenadas dos coeficientes da conexão	35
2.9	A conexão métrica	35
2.10	Curvatura e torção	37
2.10.1	O tensor de Ricci e o escalar de curvatura	38
2.11	Bases não coordenadas	39
2.11.1	O frame local	39
2.12	Alguns objetos expandidos em bases não coordenadas	40
2.12.1	Parenteses de Lie	40
2.12.2	A conexão	40
2.12.3	Curvatura e torção	41
3	RELATIVIDADE GERAL	42
3.1	A conexão de Levi-Civita	42
3.1.1	Geodésicas	42
3.1.2	Tensor de curvatura e de Einstein	44
3.2	As equações de campo da TRG	46
3.2.1	As equações de campo a partir do princípio variacional	47
3.3	Espaço-tempo de Schwarzschild	50
3.3.1	Propriedades da solução de Schwarzschild	50
3.3.1.1	Buraco negro	52

3.3.1.2	Coordenadas de Kruskal-Szekeres	54
3.3.1.3	Coordenadas de Novikov	56
3.4	Decomposição de Eckart do tensor de energia-momento	57
3.5	Cosmologia relativística	59
3.5.1	Espaço-tempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	60
3.5.2	Equações de campo	61
3.6	Folheação do espaço-tempo	61
3.6.1	Decomposição 3 + 1 dimensional	62
3.6.2	Curvatura extrínseca	63
3.6.3	O formalismo ADM	64
3.7	Pseudo-tensores para o campo gravitacional	65
3.8	Tetrada, sistema de referência e sistema de coordenadas	68
4	O EQUIVALENTE TELEPARALELO DA RELATIVIDADE GERAL .	70
4.1	Teleparalelismo	70
4.2	Equações de campo do TEGR	71
4.2.1	As equações de campo a partir do princípio variacional	73
4.3	O TEGR no formalismo de tetrada puro	73
4.3.1	Formulação hamiltoniana	75
4.3.2	Outra forma de expressar as quantidades do TEGR	76
4.4	Frames como referenciais	76
4.5	O problema da escolha do frame teleparalelo	77
4.5.1	Frames problemáticos	78
4.5.2	O frame ideal	80
4.6	Maquinário Híbrido	82
4.6.1	Misturando vetores unitários cartesianos e esféricos	83
4.7	Referenciais acelerados radialmente no espaço-tempo de Schwarzschild	87
5	ENERGIA DE BURACOS NEGROS/BRANCOS DE SCHWARZSCHILD	89
5.1	Kruskal-Szekeres	89
5.1.1	O frame adaptado às coordenadas de Kruskal-Szekeres	89
5.1.2	Torção	91
5.1.3	A conexão de Levi-Civita e o tensor de aceleração antissimétrico	92
5.1.4	O superpotencial	92
5.1.5	A energia no nosso universo	93
5.1.5.1	A ausência de gravidade (limite l_2)	95
5.1.6	Relação entre os frames de Schwarzschild e de Kruskal para $X < 0$	96
5.2	Novikov	97

5.2.1	O frame adaptado às coordenadas de Novikov	97
5.2.2	Torção, conexão de Levi-Civita, tensor de aceleração antissimétrico e o superpotencial	98
5.2.3	Comportamento do frame de Novikov	100
5.2.4	Energia e momento	102
5.2.4.1	A energia do nosso universo	103
5.2.4.2	Momento angular gravitacional	105
5.2.4.3	A energia do universo espelho	106
5.2.5	A relação entre os observadores de Novikov e os de Schwarzschild	108
5.2.5.1	Velocidade relativa no horizonte de eventos	108
5.2.5.2	O pico da trajetória	109
5.2.5.3	O limite $\tau \rightarrow \pm\infty$	109
5.2.5.4	O limite $m \rightarrow 0$	110
5.3	Resultados e discussão final	110
6	O TENSOR DENSIDADE DE ENERGIA-MOMENTO GRAVITACIONAL DO UNIVERSO	113
6.1	O frame fundamental dos espaços-tempos de FLRW	113
6.1.1	Frame fundamental	114
6.1.2	Torção de Weitzenböck	115
6.1.3	Coeficientes da conexão de Levi-Civita e o superpotencial	117
6.1.4	A energia do Universo	117
6.2	Tensor energia-momento gravitacional	118
6.2.1	Decomposição do tensor densidade de energia gravitacional	119
6.2.1.1	Decomposição da parte simétrica	120
6.2.1.2	Decomposição da parte antissimétrica	121
6.2.2	Equações de campo	122
6.2.3	Energia e momento gravitacional	124
6.2.3.1	Universo espacialmente plano ($k = 0$)	124
6.2.3.2	Universos espacialmente esférico ($k = +1$) e convexo ($k = -1$)	125
6.3	Vácuo absoluto	125
6.4	Resultados e discussão final	126
7	A GENERALIZAÇÃO DA ENERGIA E DO MOMENTO GRAVITACIONAL ADM	128
7.1	O TEGR e o formalismo ADM	128
7.1.1	O gauge temporal	130
7.2	A energia e o momento do TEGR no gauge temporal	130
7.3	O tensor densidade de energia-momento gravitacional do TEGR versus o pseudo-tensor de Landau-Lifshitz	133

7.4	Dificuldades com o momento angular do TEGR	134
7.5	Resultados e discussão final	137
8	RESUMO E PERSPECTIVAS	138
	REFERÊNCIAS	140
	APÊNDICES	145
	APÊNDICE A – FORMULAÇÃO DE MØLLER	146

1 Introdução

De uma forma geral, as teorias teleparalelas para gravitação são objetos de interesse de vários pesquisadores. Um dos primeiros a utilizar essa abordagem foi Albert Einstein [1, 2]. Einstein utilizou o teleparalelismo em uma tentativa de unificar o campo eletromagnético com o gravitacional¹. A partir de então, as teorias teleparalelas não tiveram muito destaque, até que, em 1961, Møller indica a possibilidade de resolução do problema da localização da energia gravitacional por meio da utilização de campos de tetrada para formular a teoria gravitacional [3]. Em novembro de 1976, Cho obteve a lagrangiana do teleparalelismo a partir da teoria de gauge da translação com uso da lagrangiana quadrática mais simples do tipo Yang-Mills [4]. Depois disso, em 1977, Hayashi mostra que a teoria de gauge do grupo das translações é uma teoria gravitacional baseada no espaço de Weitzenböck [5], o mesmo do teleparalelismo usado por Einstein. Uma dessas teorias que está contida no quadro geométrico de Weitzenböck é o chamado equivalente teleparalelo da relatividade geral [6], a qual serve de base para os estudos realizados nesta tese.

O teleparalelismo equivalente à relatividade geral, ou o equivalente teleparalelo da relatividade geral, denotado pela sigla em inglês TEGR, é uma teoria muito bem fundamentada, inclusive por meio de uma formulação hamiltoniana, como pode ser observado em vários trabalhos [7–11]. Na formulação hamiltoniana do TEGR tem-se a definição clara de um 4-momento para o espaço-tempo através do momento canonicamente conjugado da teoria, além de um objeto que obedece a álgebra de momento angular e é interpretado como sendo o momento angular do campo gravitacional [6]. Como o nome sugere, essa teoria é equivalente à relatividade geral, pois ambas têm equações de campo equivalentes; no entanto, com uma perspectiva totalmente nova que leva a uma percepção alternativa sobre o campo gravitacional.

Como sabemos, a relatividade geral é uma teoria da gravitação formulada a partir de uma geometria pseudoriemanniana em que a variedade diferenciável é dotada de um tensor métrico e de uma conexão de Levi-Civita, onde o elemento fundamental da teoria é a métrica. Contudo, como bem sabemos, nas equações de Einstein não existe nenhuma informação explícita sobre o campo gravitacional, tal qual energia e momento. O lado esquerdo das equações tem informação apenas sobre a curvatura enquanto o lado direito sobre os campos de matéria do espaço-tempo. Nesse panorama, há uma dificuldade muito grande em se definir algum objeto na teoria que forneça informação sobre as quantidades

¹ Como os campos de tetrada têm 16 graus de liberdade, 6 a mais do que a métrica, ele acreditou que poderia usar esses graus de liberdade a mais para dar conta do campo eletromagnético. Entretanto, ele percebeu que isso não era possível.

físicas do campo gravitacional. Nesse cenário, o máximo que se conseguiu foi a definição dos nomeados pseudotensores do campo gravitacional [12,13], porém esses objetos são problemáticos, já que são dependentes da escolha do sistema de coordenadas. Agora, quando consideramos a abordagem do TEGR, nas equações de campo já existe um objeto que é identificado como sendo o tensor densidade de energia-momento do campo gravitacional, o qual é invariante sob transformação de coordenadas.

Na abordagem do TEGR a variedade diferenciável é dotada de um tensor métrico e duas conexões afins, a conexão de Levi-Civita e a conexão de Weitzenböck. A conexão de Weitzenböck tem torção, mas não tem curvatura, diferentemente da de Levi-Civita, que tem curvatura, mas não tem torção. As equações de campo da teoria são escritas em termos de um superpotencial, do tensor densidade de energia-momento gravitacional e do tensor energia-momento da matéria, onde os dois primeiros são escritos em termos da torção, que por sua vez é dada a partir da escolha do frame teleparalelo². A quantidade fundamental do TEGR é o frame teleparalelo, o qual é descrito por um campo de tetradas, uma base de quatro vetores ortonormais entre si. No teleparalelismo, a tetrada exerce o mesmo papel que é exercido pela métrica na relatividade geral, isto é, o papel de campo fundamental.

Observe que a existência de um tensor densidade de energia-momento do campo gravitacional poderia significar localizar a energia desse campo. Alguns autores afirmam que não é possível localizar a energia do campo gravitacional devido o princípio da equivalência (veja, por exemplo, a página 466, seção 20.4, da Ref. [12]), no entanto essa não é uma questão totalmente resolvida. O próprio conceito de localidade também pode ser algo controverso [14,15]. O fato é que resultados consistentes tem sido obtidos em relação a energia gravitacional com o uso do TEGR, como pode ser observado na Ref. [6], além dos resultados dos capítulos 5, 6 e 7 desta tese.

A grande questão do TEGR no que diz respeito à energia gravitacional é identificar qual frame teleparalelo em cada espaço-tempo leva a resultados consistentes, uma vez que, dada a métrica de um espaço-tempo, existe uma infinidade de referenciais (tetradas) que poderiam ser escolhidos como o referencial teleparalelo; o tensor que supostamente identifica a energia do campo gravitacional depende dessa escolha, fornecendo resultados não físicos para escolhas inapropriadas [16]. O ideal seria que existisse um princípio, ou prescrição, que determinasse as características que um frame deve ter para que leve a resultados corretos da energia e momento do campo gravitacional. Nesse sentido, o nosso objetivo é estudar o tensor de energia-momento do campo gravitacional definido por Maluf [6] a luz da tetrada teleparalela. Essas questões em relação a escolha do frame teleparalelo são discutidas na seção 4.5 do capítulo 4. No capítulo 7 exaltamos o fato de que a tetrada teleparalela está adaptada a algum sistema físico, e, conseqüentemente,

² Veja a definição de frame teleparalelo na seção 4.1.

está associado a congruências de curvas de observadores (tratados, aqui, como partículas testes), e que, portanto, ao menos suas características qualitativas devem ser levadas em consideração na hora de analisar a energia do campo gravitacional. Nesse capítulo, é apresentado um argumento a favor da ideia de que o frame teleparalelo mais adequado para medir efeitos gravitacionais deve estar adaptado à partículas em queda livre cuja a tetrada é livre de efeitos artificiais (efeitos que não estão associados ao estado de movimento das partículas do sistema).

Com a intenção de darmos um embasamento sobre os assuntos necessários para compreensão dos temas abordados nesta tese, nós fazemos uma breve revisão teórica nos dois próximos capítulos. No capítulo 2 apresentamos os principais elementos da geometria de Riemann-Cartan enquanto no capítulo 3 fazemos uma apresentação sucinta dos principais tópicos da teoria da relatividade geral que são necessários à tese. Em seguida, no capítulo 4, apresentamos o formalismo do TEGR, mostrando sua equivalência com a teoria da relatividade geral. Também apresentamos a visão da tetrada como um referencial, o qual está adaptado a um conjunto de observadores, e fazemos uma discussão sobre a questão da escolha do frame teleparalelo. Ainda no capítulo do TEGR apresentamos um método que será utilizado nas contas dos capítulos 5 e 6, com o objetivo de simplificá-las e compactificá-las.

No capítulo 5, exibimos os resultados obtidos para o valor da energia e do momento do campo gravitacional no espaço-tempo de Schwarzschild no nosso universo e no outro universo quando utilizamos como frame teleparalelo os frames adaptados a observadores de Kruskal e de Novikov. Vemos que, com o uso de tais frames e da superfície de simultaneidade adequada em cada caso, obtemos o valor de Mc^2 no nosso universo quando a garganta do buraco negro está fechada, o que é um resultado consistente. Também verificamos que a singularidade não contribui para a energia total, isto é, a energia do espaço-tempo é puramente gravitacional. Por completeza, neste capítulo, ainda estudamos as propriedades de cada frame. Finalizamos o capítulo fazendo uma discussão sobre os resultados obtidos.

Já no capítulo 6, usando como frame teleparalelo o frame adaptado aos observadores de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), nós calculamos o tensor densidade de energia-momento do campo gravitacional desse espaço-tempo. Analisamos esse tensor através do método de decomposição de Eckart [17]. Vemos que a parte simétrica leva a uma equação de estado do tipo-radiação³ e que a parte antissimétrica não contribui nem para a energia e nem para o momento do campo gravitacional do universo. Em seguida, encontramos qual seria a energia e o momento do campo gravitacional nos três casos possíveis de FLRW, ou seja, para universos espacialmente plano, espacialmente esfé-

³ No capítulo 7, mostramos que essa é uma condição geral do tensor densidade de energia-momento gravitacional do TEGR.

rico e espacialmente convexo; observando que no caso do universo espacialmente plano nós temos uma densidade de energia total do universo igual a zero, o que está de acordo com a visão adotada por Tryon [18]. Depois, pontuamos que os resultados obtidos satisfazem o conceito de vácuo absoluto introduzido na Ref. [16] e, por fim, fazemos uma discussão final sobre os resultados obtidos nesse capítulo.

No capítulo 7, fazemos uma comparação entre o tensor de energia-momento do campo gravitacional do TEGR com o do formalismo ADM [19]. Nós verificamos que usando a condição de gauge temporal de Schwinger [20] para a tetrada, o 4-momento total do TEGR generaliza o do formalismo ADM. Em seguida, usando o fato de que o pseudotensor de Landau e Lifshitz é compatível com a energia e o momento do formalismo ADM [12, 19], nós comparamos esse pseudotensor com o tensor densidade de energia-momento gravitacional do TEGR, verificando que este último é muito mais conveniente do que o primeiro. Posteriormente, nós avaliamos que, com o uso do gauge temporal, a quantidade que é interpretada por Maluf [6] como sendo a densidade de momento angular gravitacional para o TEGR é nula qualquer que seja o espaço-tempo. Por fim, no capítulo 7, nós argumentamos sobre a plausibilidade do uso de frames teleparalelos adaptados à partículas livres para identificar a energia do campo gravitacional e encerramos com uma discussão final sobre os resultados obtidos ao longo do capítulo.

1.1 Notações e convenções

As componentes do tensor métrico expandido em uma base coordenada são denotadas por $g_{\mu\nu}$ enquanto em uma base de tetrada (frame) são denotadas por η_{ab} . O frame e o co-frame são denotados, respectivamente, por e_a e ϑ^a , os quais satisfazem a relação $\langle \vartheta^a, e_b \rangle \equiv \vartheta^a(e_b) = \delta_b^a$. Usamos letras gregas para representar índices de espaço-tempo e letras latinas para representar índices do espaço tangente, com exceção das letras latinas do meio do alfabeto ($i, j, k, \dots$), que são usadas tanto para índices espaciais do espaço-tempo quanto para índices espaciais do espaço tangente (quando entre parênteses). Nós distinguimos índices explícitos do espaço tangente dos índices do espaço-tempo os colocando entre parênteses; desta forma, índices explícitos do espaço tangente são indicados por $a = (0), (j)$, enquanto índices explícitos do espaço-tempo por $\mu = 0, j$. As componentes do frame e_a e do co-frame ϑ^a expandidas em uma base coordenada são denotadas, respectivamente, por e_a^μ e e^a_μ . Nós utilizamos as convenções $A_{[ab]} \equiv (1/2)(A_{ab} - A_{ba})$ e $A_{(ab)} \equiv (1/2)(A_{ab} + A_{ba})$, bem como $A^{[a|b|c]} \equiv (1/2)(A^{abc} - A^{cba})$.

Ao longo desta tese, a assinatura da métrica que usamos é a $(+, -, -, -)$, com exceção da seção 3.6 e do capítulo 7, onde utilizamos a assinatura $(-, +, +, +)$. O determinante das componentes do tensor métrico é representado por $g = \det(g_{\mu\nu})$ enquanto o determinante do campo de tetradas por $e = \det(e^a_\mu)$.

2 Geometria de Riemann-Cartan

Haja vista que vamos estudar uma teoria geométrica do espaço-tempo alternativa à Relatividade geral, porém equivalentes, em que ambas são casos especiais da geometria de Riemann-Cartan, faremos neste capítulo uma breve revisão dos principais elementos geométricos dessa geometria, que são essenciais para o desenvolvimento desta tese. O principal guia que seguiremos para a elaboração deste capítulo é a segunda edição do livro de Nakahara [21], com pequenas mudanças na notação usada. A única alteração em relação as convenções será para a assinatura da métrica, a qual utilizamos a assinatura $(+, -, -, -)$. Os subíndices A e B que são usados neste capítulo, bem como a “linha”, são apenas rótulos.

2.1 Espaço-tempo como uma variedade diferenciável

A abordagem mais moderna para o estudo de teorias gravitacionais com bases geométricas é a interpretação do espaço-tempo como uma variedade diferenciável, a qual se usa um formalismo independente de coordenadas. A ideia de se usar um formalismo independente de coordenadas está embasada no princípio da covariância, que diz que as leis da física devem ser independentes do sistema de coordenadas. Por variedade se entende um espaço topológico que localmente se parece com o $\mathbb{R}^n$, para uma variedade n -dimensional. Quando uma variedade está representando um espaço-tempo, localmente ela é tida como o espaço-tempo de Minkowski, $\mathbb{M}^4$.

Dada uma variedade M com n dimensões, um conjunto de pontos dessa variedade pode ser mapeado por uma ou mais cartas. Por carta se entende o par $(\mathcal{C}_A, \varphi_A)$, onde $\mathcal{C}_A$ é a chamada vizinhança coordenada, que cobre o dado conjunto de pontos da variedade, e φ_A é a função coordenada, que se traduz como um homeomorfismo¹ de n funções $\{x^1(p), \dots, x^n(p)\}$ para um subconjunto aberto $\mathcal{C}'_A$ do $\mathbb{R}^n$ (ou do $\mathbb{M}^4$, se a variedade estiver representando um espaço-tempo), ao qual é atribuído um sistema de coordenadas x^μ . Assim, basicamente, o que uma carta faz é atribuir um sistema de coordenadas a uma dada região da variedade. A variedade pode ser mapeada por uma ou mais cartas. A família de cartas, $\{(\mathcal{C}_A, \varphi_A)\}$, que cobre toda a variedade é chamada de atlas.

Quando duas vizinhanças coordenadas se sobrepõem, digamos $\mathcal{C}_A$ e $\mathcal{C}_B$, em uma dada variedade M n -dimensional, como indicado na figura 1, dois sistemas de coordenadas são atribuídos aos pontos de $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B$. Digamos que à carta $(\mathcal{C}_B, \varphi_B)$ está conferido o

¹ Uma aplicação entre dois espaços topológicos é dita um homeomorfismo se ela for contínua e possuir uma inversa que também é contínua. (Para uma definição formal tanto de espaços topológicos quanto de homeomorfismo, veja, por exemplo, as seções 2.3 e 2.4 da Ref. [21])

sistema de coordenadas y^μ . Pode-se, então, construir uma aplicação $\psi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B^{-1}$ a cada

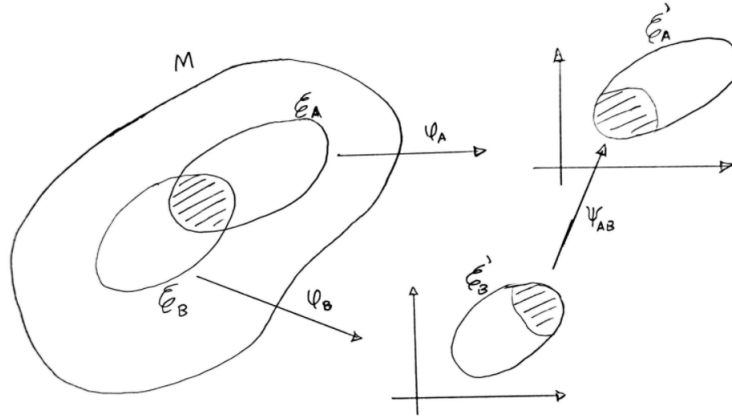


Figura 1 – Um homeomorfismo φ_A aplicando $\mathcal{U}_A$ em um subconjunto aberto $\mathcal{U}'_A \subset \mathbb{R}^n$, fornecendo coordenadas ao ponto $p \in \mathcal{U}_A$, enquanto o homeomorfismo φ_B aplica $\mathcal{U}_B$ em um subconjunto aberto $\mathcal{U}'_B \subset \mathbb{R}^n$, que fornece outras coordenadas ao mesmo ponto p , que também pertence à $\mathcal{U}_B$. Se $\mathcal{U}_A \cap \mathcal{U}_B \neq \emptyset$, a transição de um sistema de coordenadas para outro é suave.

ponto da interseção, que faz a transição do sistema de coordenada y para o x , $x^\mu = x^\mu(y)$, dada por n funções de n variáveis.

Com o que já foi mencionado até agora nesse capítulo, podemos definir o que é uma variedade diferenciável. M é uma variedade diferenciável n -dimensional se [21]

- 1) M é um espaço topológico;
- 2) M é dada com uma família de cartas $\{(\mathcal{U}_A, \varphi_A)\}$;
- 3) $\{\mathcal{U}_A\}$ é uma família de conjuntos abertos que cobrem M , isto é, $\cup_A \mathcal{U}_A = M$. φ_A é um homeomorfismo de $\mathcal{U}_A$ em um conjunto aberto $\mathcal{U}'_A$ de $\mathbb{R}^n$ (figura 1); e
- 4) dado $\mathcal{U}_A$ e $\mathcal{U}_B$, tal que $\mathcal{U}_A \cap \mathcal{U}_B \neq \emptyset$, a aplicação $\psi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B^{-1}$ de $\varphi_B(\mathcal{U}_A \cap \mathcal{U}_B)$ para $\varphi_A(\mathcal{U}_A \cap \mathcal{U}_B)$ é infinitamente diferenciável.

A condição 4) assegura que a transição de um sistema de coordenadas para um outro é suave. As funções de transformações das coordenadas $x^\mu = x^\mu(y)$ são a forma explícita da aplicação $\psi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B^{-1}$. Assim, a diferenciabilidade foi definida no sentido usual do cálculo: a transformação de coordenadas é diferenciável se cada função $x^\mu(y)$ é diferenciável em relação a cada y^ν .

Em alguns casos, a condição da vizinhança coordenada $\mathcal{U}_A$ ser homeomorfa a um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ é restritiva demais e nós precisamos relaxar um pouco essa condição. Surge, então, o conceito de variedade com contorno. Se um espaço topológico M é coberto por uma família de conjuntos abertos $\{\mathcal{U}_A\}$, sendo cada um homeomorfo a um conjunto aberto de $H^n \equiv \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^n \geq 0\}$, M é dito ser uma variedade com

contorno. O conjunto de pontos que são aplicados para pontos com $x^n = 0$ é denominado de contorno de M , denotado por ∂M . As coordenadas de ∂M podem ser dadas por $n - 1$ números $(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)$. Agora, a aplicação $\psi_{AB} : \varphi_B(\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B) \rightarrow \varphi_A(\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B)$ é definida em um conjunto aberto de H^n em geral, e ψ_{AB} é dita ser suave se é infinitamente diferenciável em um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ que contenha $\varphi_B(\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B)$.

Podemos definir vários tipos de aplicação aos pontos de uma variedade diferenciável e, por meio destas, atribuir a ela várias estruturas, tal qual curvas, funções, vetores, tensores etc. Um dos objetos que caracteriza um espaço-tempo é o tensor métrico, além de uma estrutura que relaciona vetores em diferentes pontos, denominada de conexão afim. Vamos discorrer um pouco sobre essas estruturas que podem ser equipadas à uma variedade diferenciável.

2.2 Curvas e funções

Uma curva aberta em uma variedade M n -dimensional é uma aplicação $c : (a, b) \rightarrow M$, onde (a, b) é um intervalo aberto que contenha o zero, por conveniência, ou seja, $a < 0 < b$. Assume-se que a curva não se intersecta com ela própria (ver figura 2). Podemos tomar a como sendo $-\infty$ e b como $+\infty$. Sobre uma carta $(\mathcal{C}, \varphi)$, a curva $c(t)$ tem uma representação coordenada dada por $x = \varphi \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo t um ponto contido no intervalo.

Uma função f sobre M é uma aplicação suave de M para $\mathbb{R}$. Assim, sobre uma carta $(\mathcal{C}, \varphi)$, a representação coordenada de f é dada por $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a qual é uma função de valor real de n variáveis bem comportada. O conjunto de funções suaves sobre a variedade M é denotado por $\mathcal{F}(M)$.

Com os conceitos de curvas e funções em uma variedade, nós podemos definir outros objetos geométricos, como vetores, vetores duais e tensores.

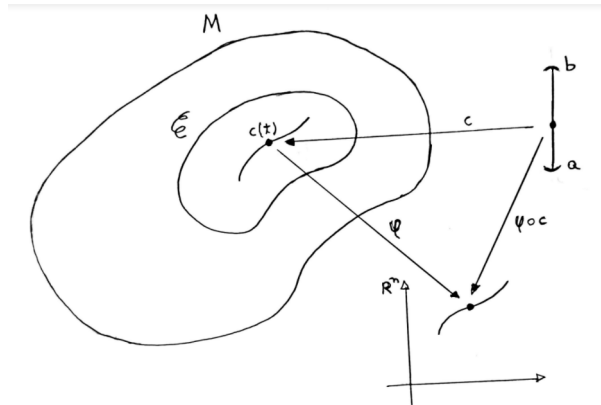


Figura 2 – Uma curva c em M , dada pelo intervalo aberto (a, b) , cuja representação de coordenada é fornecida por $\varphi \circ c$.

2.3 Vetores

Em uma variedade diferenciável um vetor é definido como sendo um vetor tangente a uma curva da variedade. Dada uma curva $c : (a, b) \rightarrow M$ e uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ da variedade, onde (a, b) é um intervalo aberto contendo $t = 0$, nós definimos um vetor tangente da curva, em $c(0)$, como uma derivada direcional de uma função $f(c(t))$ ao longo da curva $c(t)$ em $t = 0$. A taxa de mudança de $f(c(t))$ em $t = 0$ ao longo da curva é

$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.1)$$

Considerando que a curva c está contida em uma carta $(\mathcal{C}, \varphi)$ da variedade M (ver figura 3), em termos da coordenada local a eq. (2.1) pode ser escrita como

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0}, \quad (2.2)$$

onde, por praticidade, está sendo usado um abuso de notação, na realidade $\partial f / \partial x^\mu$ significa $\partial(f \circ \varphi^{-1}(x)) / \partial x^\mu$. Logo, podemos ver que $df(c(t))/dt$ é obtida através de um operador diferencial X à f , sendo

$$X = X^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right), \text{ com } X^\mu = \left. \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.3)$$

Ou seja,

$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} = X^\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) \equiv X[f]. \quad (2.4)$$

Assim, é agora $X = X^\mu \partial / \partial x^\mu$ que é definido como o vetor tangente à M no ponto $p = c(0)$ ao longo da direção dada pela curva $c(t)$.

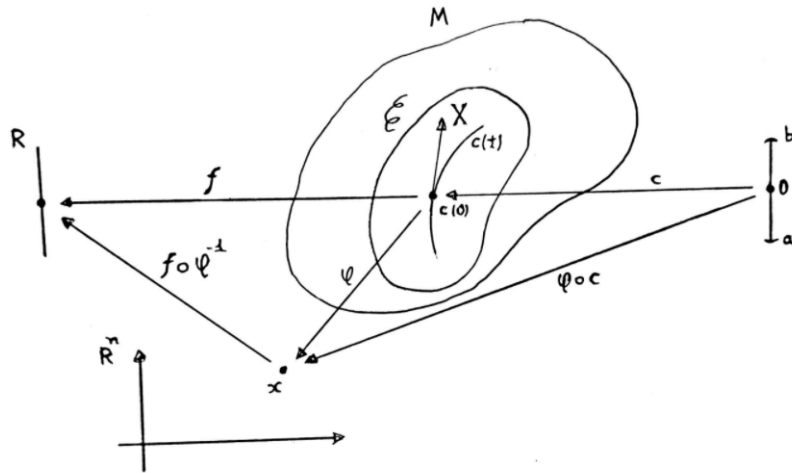


Figura 3 – Uma curva c e uma função f na variedade M , as quais definem um vetor tangente ao longo da curva, dado por $\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0}$. A representação de coordenada é fornecida pela carta $(\mathcal{C}, \varphi)$.

No mesmo ponto p da variedade podem passar diferentes curvas, as quais são atribuídas outros vetores tangentes, operadores diferenciais. O conjunto de todos esses vetores tangentes em p formam um espaço vetorial, que é chamado de espaço tangente de M no ponto p , denotado por $T_p M$. Evidentemente, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ formam uma base vetorial de $T_p M$, a qual é chamada de base coordenada. Se um vetor $V \in T_p M$ é escrito como $V = V^\mu \partial_\mu$, os números V^μ são identificados como componentes de V em relação a base $\{\partial_\mu\}$.

Por construção, um vetor V de $T_p M$ existe na variedade diferenciável independentemente da especificação de um sistema de coordenadas, pois há uma equação análoga a eq. (2.4) para o mesmo. A atribuição de um sistema de coordenadas à variedade na região em que o vetor está é somente feita por nossa conveniência, para que possamos realizar os cálculos. Essa independência de sistemas de coordenadas para um vetor nos permite encontrar as propriedades de transformação das suas componentes em relação a diferentes sistemas de coordenadas. Por exemplo, se o ponto p é coberto por duas cartas $(\mathcal{C}_A, \varphi_A)$ e $(\mathcal{C}_B, \varphi_B)$, sendo $x = \varphi_A(p)$ e $y = \varphi_B(p)$, nós teremos duas expressões para $V \in T_p M$,

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \tilde{V}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}. \quad (2.5)$$

Assim, usando a regra da cadeia, a eq. (2.5) nos mostra que as componentes V^μ e $\tilde{V}^\mu$ estão relacionadas por

$$\tilde{V}^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu. \quad (2.6)$$

Ou seja, as componentes de um vetor se transformam de tal maneira que deixam o mesmo invariante.

Quando um vetor V é atribuído a cada ponto da variedade, temos um campo vetorial de V sobre M . Isso equivale a dizer que $V[f] \in \mathcal{F}(M)$ para qualquer $f \in \mathcal{F}(M)$. O conjunto de campos vetoriais sobre M é denotado por $\mathcal{V}(M)$. Um campo vetorial X em $p \in M$ é denotado por $X|_p$, o qual é um elemento de $T_p M$.

2.4 Vetor dual

Dado que $T_p M$ é um espaço vetorial, então, existe um espaço vetorial dual a $T_p M$, onde cada elemento é uma função linear de $T_p M$ para $\mathbb{R}$ (ver secção 2.2 da Ref. [21]). Esse espaço vetorial dual no ponto p é chamado de espaço cotangente, e é denotado por $T_p^* M$. Um elemento ω de $T_p^* M$ é chamado de vetor dual, vetor cotangente ou, no contexto de formas diferenciais, de 1-forma. Obviamente, quando existe um campo vetorial sobre a variedade, temos também um campo vetorial dual associado ao mesmo. O conjunto de campos vetoriais duais sobre a variedade é denotado por $\Omega(M)$.

Como um elemento ω do espaço dual faz essencialmente a aplicação $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ e, para um vetor $V \in T_p M$ e $f \in \mathcal{F}(M)$, nós temos que $V[f] \in \mathbb{R}$, pode-se observar que a diferencial de f , df , é naturalmente um elemento do espaço vetorial dual. Para ver isso, nós podemos considerar um dado sistema de coordenadas x , o qual nos fornece $df = (\partial f / \partial x^\mu) dx^\mu$ e $V = V^\mu (\partial / \partial x^\mu)$. Logo, nós teremos o equivalente a $V[f]$, se nós definirmos a operação $\langle df, V \rangle \equiv V[f]$. Ou seja, para

$$\begin{aligned} \langle df, V \rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu, V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^\mu} V^\nu \left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^\mu} V^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^\mu} V^\nu \delta_\nu^\mu \\ &= V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nós, naturalmente, obtemos dx^μ como uma base vetorial dual de $T_p^* M$. E, que o operador $\langle, \rangle$ é linear aos elementos de $T_p^* M$ e $T_p M$, agindo somente em suas bases, como feito na eq. (2.7). Assim, um vetor dual arbitrário ω pode ser escrito como

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu, \quad (2.8)$$

onde ω_μ são suas componentes.

Embora não seja necessário ver a operação que denotamos por $\langle, \rangle$ como um produto interno, vamos tratá-lo como tal. Portanto, seja $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ um elemento arbitrário de $T_p^* M$ e $V = V^\mu (\partial / \partial x^\mu)$ um elemento arbitrário de $T_p M$, o produto interno $\langle, \rangle : T_p^* M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$\langle \omega, V \rangle = \omega_\mu V^\nu \left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \omega_\mu V^\nu \delta_\nu^\mu = \omega_\mu V^\mu. \quad (2.9)$$

Isto é, o produto interno é definido entre um vetor e um vetor dual, não entre dois vetores ou entre dois vetores duais.

Um elemento de $T_p^* M$ também é independente de sistema de coordenadas. Portanto, bem como vimos para o caso dos vetores, nós podemos usar esse fato para obter como as componentes desse elemento se transformam quando mudamos de sistema de coordenadas. Para um ponto $p \in \mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B$ da variedade, com $x = \varphi_A(p)$ e $y = \varphi_B(p)$, nós temos

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \tilde{\omega}_\mu dy^\mu. \quad (2.10)$$

Assim, uma vez que $x^\mu = x^\mu(y)$, nós encontramos

$$\tilde{\omega}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} \omega_\nu. \quad (2.11)$$

2.5 Tensores

Vimos, por meio do produto interno, que um vetor leva uma 1-forma (vetor dual) a um número real, o que equivale a uma 1-forma também levar um vetor para um número real. Um tensor nada mais é do que uma generalização do conceito de vetores e 1-formas. Assim, um tensor do tipo (q, r) é um objeto multilinear, também independente de sistemas de coordenadas, que leva q elementos de T_p^*M e r elementos de T_pM para um número real. Um tensor também pode ser definido ao longo de toda a variedade diferenciável, o que fornece um campo tensorial. O conjunto de todos os tensores do tipo (q, r) é denotado por $\mathcal{T}_r^q(M)$, e $\mathcal{T}_r^q|_p(M)$ indica o conjunto de tensores do tipo (q, r) em um ponto p da variedade.

Se T é um elemento de $\mathcal{T}_r^q|_p(M)$, para um sistema de coordenadas x , nós temos que T é escrito em termos das bases coordenadas como

$$T = T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_{r-1}} \otimes dx^{\nu_r}, \quad (2.12)$$

onde o símbolo $\otimes$ é usado para estabelecer a ordem de atuação dos vetores das bases coordenadas (vetorial e dual) do tensor nos vetores das bases dos elementos de T_p^*M e T_pM . Por exemplo, se T está atuando em q 1-formas e em r vetores, essa aplicação é escrita como $T(\omega_1, \dots, \omega_q; V_1, \dots, V_r)$, a qual leva ao número real

$$T(\omega_1, \dots, \omega_q; V_1, \dots, V_r) = T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} \omega_{1\mu_1} \dots \omega_{q\mu_q} V_1^{\nu_1} \dots V_r^{\nu_r}, \quad (2.13)$$

onde se usou $\omega_1 = \omega_{1\alpha_1} dx^{\alpha_1}$, $V_1 = V_1^{\alpha_1} (\partial/\partial x^{\alpha_1})$, etc. Assim, nessa notação, nós temos que o produto interno é $\langle \omega, V \rangle = \omega(V)$.

Quando um tensor T de $\mathcal{T}_r^q|_p(M)$ está numa região da variedade coberta por mais de um sistema de coordenadas, a transformação de coordenadas das suas componentes, $T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r}$, são obtidas de forma análoga ao que já foi feito para vetores e 1-formas, usando o fato de $\otimes$ ser linear. Logo, considerando sistemas de coordenadas x e y , pode-se ver que a transformação de coordenadas das componentes de T é dada por

$$\tilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} = \frac{\partial y^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial y^{\mu_q}}{\partial x^{\alpha_q}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial y^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_r}}{\partial y^{\nu_r}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_q}_{\beta_1 \dots \beta_r}, \quad (2.14)$$

onde $\tilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r}$ são as componentes de T quando este é expandido na base coordenada de y .

2.6 Derivada de Lie

Quando consideramos uma carta $(\mathcal{C}, \varphi)$ sobre M , cuja o sistema de coordenadas é $x = \varphi(p)$, um campo vetorial de M nessa carta é escrito como

$$U = U^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (2.15)$$

onde

$$U^\mu = U^\mu(x(t)) = \frac{dx^\mu(t)}{dt}. \quad (2.16)$$

Nós podemos, então, utilizar esta equação (eq. (2.16)) para definir uma congruência de curvas sobre a variedade, chamadas de órbitas ou trajetórias de U^μ [22]. A congruência de curvas é obtida ao resolvermos tal equação diferencial ordinária. O teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias garante a solução, pelo menos para algum subconjunto dos reais.

Dada uma congruência de curvas na variedade, associada a um campo vetorial, a ideia da derivada de Lie é usar esta congruência para diferenciar outros vetores ou tensores em geral, incluindo 1-formas. Como bem sabemos, a ideia de derivada envolve uma subtração, e numa variedade só podemos subtrair vetores (ou tensores) que estejam no mesmo ponto. O que é feito, então, na derivada de Lie, é usar as curvas da congruência para definir um arrasto de um dado vetor, em um ponto, para outro ponto próximo, cujos os pontos estão sobre a mesma curva. Por exemplo, considerando um ponto P da variedade, com coordenadas x^μ , e um outro ponto Q da variedade, com coordenadas $x^\mu + \Delta x^\mu$, que estão sobre uma mesma curva da congruência de curvas, oriunda do campo vetorial $U^\mu(x)$, nós definimos um arrasto de um dado vetor V do ponto P para o ponto Q . Sendo V um outro campo vetorial, ele está definido tanto em P quanto em Q . Denotando as componentes do campo vetorial V em P e Q , respectivamente, por V_P^μ e V_Q^μ , nós denotamos as componentes do vetor arrastado de P para Q por $V_{P \rightarrow Q}^\mu$. Logo, podemos fazer a subtração de $V_{P \rightarrow Q}^\mu$ por V_Q^μ , já que se encontram no mesmo ponto.

A técnica de arrasto é feita ao ver a transformação de coordenadas do ponto P para Q de forma ativa, e aplicar a lei de transformação de coordenadas usual para as componentes de vetores (tensores) [22]. Note que não há mudança de sistemas de coordenadas, apesar de usarmos tal lei de transformação. Baseado na eq. (2.16), nós podemos considerar a seguinte transformação de ponto:

$$x'^\mu = x^\mu + \Delta t U^\mu(x), \quad (2.17)$$

onde Δt é pequeno. Essa transformação é considerada como uma transformação ativa que leva o ponto P para o ponto Q . Derivando a eq. (2.17), nós obtemos

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu + \Delta t \partial_\nu U^\mu, \quad (2.18)$$

onde usamos $\partial_\nu = \partial/\partial x^\nu$. Utilizando a transformação da eq. (2.17) e a lei transformação da eq. (2.6), nós obtemos que a componente do vetor V arrastado de P para Q é dada por

$$\begin{aligned} V_{P \rightarrow Q}^\mu(x + \Delta x) &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V_P^\nu(x) \\ &= (\delta_\nu^\mu + \Delta t \partial_\nu U^\mu) V_P^\nu(x) \\ &= V_P^\mu(x) + \Delta t \partial_\nu U^\mu V_P^\nu. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nós também podemos fazer uma expansão em primeira ordem em série de Taylor da componente do campo vetorial V , que já estava no ponto Q , em torno do ponto P , ou seja,

$$\begin{aligned} V_Q^\mu(x + \Delta x) &= V^\mu(x + \Delta x) \\ &= V^\mu(x^\lambda + \Delta t U^\lambda) \\ &= V^\mu(x) + \Delta t U^\nu \partial_\nu V^\mu(x). \end{aligned} \quad (2.20)$$

A derivada de Lie do campo vetorial V com respeito ao campo vetorial U , denotada por $\mathcal{L}_U V$, é definida por

$$\mathcal{L}_U V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_Q^\mu(x + \Delta x) - V_{P \rightarrow Q}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2.21)$$

Logo, das eqs. (2.19) e (2.20), nós encontramos

$$\mathcal{L}_U V = (U^\nu \partial_\nu V^\mu - V^\nu \partial_\nu U^\mu) \partial_\mu. \quad (2.22)$$

Considerando uma função $f \in \mathcal{F}(M)$, nós podemos definir os parenteses de Lie $[U, V]$ por [21]

$$[U, V]f = U[V[f]] - V[U[f]], \quad (2.23)$$

Desenvolvendo essa equação, obtemos

$$[U, V] = (U^\nu \partial_\nu V^\mu - V^\nu \partial_\nu U^\mu) \partial_\mu, \quad (2.24)$$

ou seja, $[U, V] = \mathcal{L}_U V$. Além disso, usando as ideias empregadas nessa seção e a definição da derivada de Lie, é possível mostrar que [22]:

1) A derivada de Lie de um campo de 1-formas $\omega \in \Omega(M)$ com respeito ao campo vetorial U é dada por

$$\mathcal{L}_U \omega = (U^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu U^\nu) dx^\mu. \quad (2.25)$$

2) A deriva de Lie de um campo tensorial arbitrário do tipo (q, r) , $T \in \mathcal{T}_r^q(M)$, com respeito ao campo vetorial U , é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_U T = & \left(U^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{q-1} \mu_q}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{r-1} \nu_r} - \partial_\lambda T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_{q-1} \mu_q}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{r-1} \nu_r} U^{\mu_1} - \right. \\ & \dots - \partial_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{q-1} \lambda}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{r-1} \nu_r} U^{\mu_q} + T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{q-1} \mu_q}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_{r-1} \nu_r} \partial_{\nu_1} U^\lambda + \\ & \left. \dots + T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{q-1} \mu_q}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{r-1} \lambda} \partial_{\nu_r} U^\lambda \right) \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_r}. \quad (2.26) \end{aligned}$$

3) A derivada de Lie é linear. Por exemplo, se temos $V, W \in \mathcal{V}(M)$, então

$$\mathcal{L}_U(aV + bW) = a\mathcal{L}_U V + b\mathcal{L}_U W, \quad (2.27)$$

onde a e b são contantes.

4) A derivada de Lie satisfaz a regra de Leibniz. Ou seja, se T_1 e T_2 são campos tensoriais de tipos arbitrários, nós temos que

$$\mathcal{L}_U(T_1 \otimes T_2) = (\mathcal{L}_U T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\mathcal{L}_U T_2). \quad (2.28)$$

2.7 Tensor métrico

Uma vez que estamos interessados em descrever espaços-tempos, precisamos do conceito de métrica, que apresentamos nesta seção. Com uma variedade dotada de um tensor métrico, nós definimos, em cada espaço tangente $T_p M$, o produto interno entre dois vetores da variedade. No caso da geometria de Riemann-Cartan, se M é uma variedade diferenciável que está representando o espaço-tempo e $U, V \in T_p M$, o tensor métrico $\mathbf{g}$, que também é chamado simplesmente de métrica, é definido como sendo um campo tensorial do tipo $(0, 2)$ sobre M que satisfaz as seguintes propriedades [21]:

- 1) $\mathbf{g}_p(U, V) = \mathbf{g}_p(V, U)$,
- 2) Se $\mathbf{g}_p(U, V) = 0$ para todo $U \in T_p M$, então $V = 0$.

Onde usamos $\mathbf{g}_p = \mathbf{g}|_p$. A primeira condição diz que o tensor métrico é simétrico e a segunda garante que $\mathbf{g}_p$ não é degenerado.

Para entender como o tensor métrico $\mathbf{g}$ define o produto interno entre dois vetores de $T_p M$, nós observamos o seguinte. Já que $\mathbf{g}_p$ é uma aplicação $T_p M \otimes T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, nós podemos definir uma aplicação linear $\mathbf{g}_p(U, \cdot) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ usando V , ao fazer $V \mapsto \mathbf{g}_p(U, V)$. Desta forma, $\mathbf{g}_p(U, \cdot)$ é identificado como o vetor dual de U , que pode ser assinalado por $\omega_U \in T_p^* M$. Ou seja, $\mathbf{g}_p(U, V) \equiv \langle \omega_U, V \rangle$. Da mesma forma, V também induz um vetor dual $\omega_V \in T_p^* M$, e, como $\mathbf{g}_p(U, V) = \mathbf{g}_p(V, U)$, nós temos que $\mathbf{g}_p(V, U) \equiv \langle \omega_V, U \rangle$. Isso fornece $\langle \omega_V, U \rangle = \langle \omega_U, V \rangle$. Assim, o tensor métrico $\mathbf{g}_p$ dá origem a um isomorfismo entre $T_p M$ e $T_p^* M$.

Considerando uma carta $(\mathcal{C}, \varphi)$ em M , cujas as coordenadas são $\{x^\mu\}$, o tensor métrico é expandido em termos da base coordenada dual num ponto p como

$$\mathbf{g}_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (2.29)$$

Logo, usando a notação mencionada na seção anterior, verificamos que

$$g_{\mu\nu}(p) = \mathbf{g}_p \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = g_{\nu\mu}. \quad (2.30)$$

Isto é, as componentes da métrica são simétricas. Vamos, a partir de agora, parar de ficar explicitando que as análises estão sendo feitas em determinado ponto p , a menos que isso cause alguma confusão. As componentes do tensor métrico podem ser vistas como elementos de uma matriz $(g_{\mu\nu})$, cuja a (μ, ν) -ésima entrada é justamente $g_{\mu\nu}$. Uma vez que $(g_{\mu\nu})$ tem determinante diferente de zero, ela tem uma inversa, a qual é denotada por $(g^{\mu\nu})$. Assim, temos que $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = g^{\lambda\nu} g_{\nu\mu} = \delta_\mu^\lambda$. O determinante $\det(g_{\mu\nu})$ é escrito como g , consequentemente $\det(g^{\mu\nu}) = g^{-1}$. Visto que, em cada ponto da variedade, $(g_{\mu\nu})$ é uma matriz simétrica de números reais, então, existe uma transformação que a reduz a forma diagonal, com autovalores $+1$ ou -1 . O excesso de sinais de $+$ ou $-$ determinam a assinatura da métrica. Realizando esse processo, em um dado ponto da variedade, nós terminamos com a métrica de Minkowski $(g_{\mu\nu})|_p = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. O isomorfismo entre T_p^*M e T_pM , agora, pode ser expresso como

$$\begin{aligned} U_\mu &= g_{\mu\nu} U^\nu, \\ U^\mu &= g^{\mu\nu} U_\nu, \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde U_μ e U^μ são, respectivamente, as componentes da 1-forma $\omega_U \in T_p^*M$ e do vetor $U_\omega \in T_pM$ expandidas em alguma base coordenada. Esta operação também está definida para baixar e subir índices das componente de tensores. Desta forma, nós temos, por exemplo, que

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta\lambda\gamma} &= g^{\lambda\nu} T^{\alpha\beta}{}_\nu{}^\gamma, \\ T_\alpha{}^{\beta\lambda\gamma} &= g_{\alpha\nu} T^{\nu\beta\lambda\gamma}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

etc.

O espaço-tempo corresponde a uma variedade M dotada de uma métrica $\mathbf{g}$ pseudo-riemanniana. Nesse caso, se U pertence a T_pM , então ele pode ser classificado em:

- 1) $\mathbf{g}(U, U) > 0 \rightarrow U$ é do tipo tempo.
- 2) $\mathbf{g}(U, U) = 0 \rightarrow U$ é do tipo luz (ou nulo).
- 3) $\mathbf{g}(U, U) < 0 \rightarrow U$ é do tipo espaço.

Onde a norma de $U \in T_p M$ é fornecida por $\|U\| = \sqrt{|\mathbf{g}_p(U, U)|}$. Considerando um vetor deslocamento no espaço-tempo, $dx^\mu \partial / \partial x^\mu \in T_p M$, nós temos que sua norma ao quadrado é equivalente ao famoso intervalo espaço-tempo ds^2 . Portanto, nós podemos escrever

$$\begin{aligned} ds^2 &= \mathbf{g} \left(dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = dx^\mu dx^\nu \mathbf{g} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \quad (2.33)$$

As vezes, em alguns textos, o intervalo ds^2 é que é chamado de métrica do espaço-tempo. A classificação dos tipos de intervalos, em intervalos do tipo tempo, luz ou espaço, é análoga a de vetores. Ou seja, $ds^2 > 0$ representa um intervalo tipo tempo, e assim por diante.

2.8 Derivada covariante e conexão afim

No espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, a derivada de um campo vetorial $V = V^\mu \mathbf{e}_\mu$ em relação a x^μ , onde $\mathbf{e}_\mu$ é uma base ortonormal fixa (análoga a i, j, k no $\mathbb{R}^3$), tem sua μ -ésima componente dada por

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(\dots, x^\nu + \Delta x^\nu, \dots) - V^\mu(\dots, x^\nu, \dots)}{\Delta x^\nu}. \quad (2.34)$$

Do lado direito da equação, o primeiro termo do numerador está definido no ponto $x + \Delta x = (x^1, \dots, x^\nu + \Delta x^\nu, \dots, x^n)$, enquanto o segundo está definido em $x = (x^\mu)$. Assim, para realizar a subtração entre $V^\mu(x + \Delta x)$ e $V^\mu(x)$, é necessário transportar $V^\mu(x)$ de x para $x + \Delta x$ sem o alterar e efetuar a diferença. Esse transporte de um vetor é chamado de transporte paralelo. No espaço euclidiano, quando realizamos essa operação, nós, implicitamente, assumimos que o transporte paralelo de $V|_x$ para $x + \Delta x$ o deixa com a mesma componente $V^\mu(x)$. Contudo, em uma variedade diferenciável mais complexa, isso não é tão simples. Nós precisamos especificar como um vetor é transportado paralelamente de um ponto para outro. Isso é feito definindo um novo objeto na variedade, a conexão afim.

2.8.1 A derivada covariante

Considerando que a variedade é coberta por uma carta $(\mathcal{C}, \varphi)$ de coordenadas $x = x^\mu$, vamos denotar por $\tilde{V}|_{x+\Delta x}$ um vetor $V|_x$ da variedade que foi transportado paralelamente do ponto com coordenadas x para o ponto com coordenadas $x + \Delta x$. É razoável exigir que suas componentes $\tilde{V}^\mu$ satisfaçam

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x) \propto \Delta x, \quad (2.35)$$

$$\widetilde{(V^\mu + W^\mu)}(x + \Delta x) = \tilde{V}^\mu(x + \Delta x) + \tilde{W}^\mu(x + \Delta x). \quad (2.36)$$

Pode-se verificar que essas duas condições são satisfeitas se tomarmos

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) = V^\mu(x) - V^\lambda(x)\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x)\Delta x^\nu. \quad (2.37)$$

Desta forma, a derivada covariante de V com respeito a x^ν é definida por

$$\lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - \tilde{V}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + V^\lambda \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (2.38)$$

onde expandimos $V^\mu(x + \Delta x)$ em série de Taylor até primeira ordem. Como $V|_{x+\Delta x}$ e $\tilde{V}|_{x+\Delta x}$ são vetores definidos no ponto com coordenadas $x + \Delta x$, a deriva covariante também é um vetor nesse ponto, já que a diferença de vetores no mesmo ponto da variedade também é um vetor. Existe muitas regras distintas de transportes paralelos possíveis, uma para cada escolha de Γ .

2.8.2 A conexão afim

Uma conexão afim ∇ é uma aplicação $\nabla : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M)$, representada por $(U, V) \mapsto \nabla_U V$, que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\nabla_U (V + W) = \nabla_U V + \nabla_U W, \quad (2.39)$$

$$\nabla_{(U+V)} W = \nabla_U W + \nabla_V W, \quad (2.40)$$

$$\nabla_{(fU)} V = f \nabla_U V, \quad (2.41)$$

$$\nabla_U (fV) = U[f]V + f \nabla_U V, \quad (2.42)$$

onde $U, V, W \in \mathcal{V}(M)$ e $f \in \mathcal{F}(M)$.

Considerando uma carta $(\mathcal{C}, \varphi)$ com coordenadas $x = \varphi(p)$ sobre M , os coeficientes da conexão afim $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ são n^3 funções definidas por

$$\nabla_\mu \partial_\nu \equiv \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda, \quad (2.43)$$

onde $\{\partial_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ é a base coordenada em $T_p M$. Os coeficientes da conexão especificam como os vetores da base mudam de ponto pra ponto. Uma vez que a atuação de ∇ é definida sobre a base coordenada, nós podemos calcular a ação de ∇ sobre qualquer vetor. Se tomarmos $V = V^\mu \partial_\mu$ como sendo um vetor da variedade expandido para o sistema de coordenadas x , podemos observar que

$$\begin{aligned} \nabla_\nu V &= \nabla_\nu (V^\mu \partial_\mu) = (\partial_\nu [V^\mu] \partial_\mu + V^\mu \nabla_\nu \partial_\mu) \\ &= \left(\frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} V^\mu \right) \partial_\lambda. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Esta equação coincide com a definição da derivada covariante dada pela eq. (2.38). Ou seja, a conexão afim ∇ determina a derivada covariante de um determinado vetor, quando este é transportado paralelamente ao longo da direção de um dado vetor da base ∂_ν . Na

verdade, a conexão fornece a derivada covariante ao longo da direção de qualquer vetor. Por “ao longo da direção”, entende-se ao longo da curva da variedade a qual tal vetor é definido como vetor tangente. Por exemplo, considerando agora os vetores arbitrários $V = V^\mu \partial_\mu$ e $W = W^\nu \partial_\nu$ da variedade, nós teremos que

$$\begin{aligned}\nabla_V W &= V^\mu \nabla_\mu (W^\nu \partial_\nu) = V^\mu (\partial_\mu [W^\nu] \partial_\nu + W^\nu \nabla_\mu \partial_\nu) \\ &= V^\mu \left(\frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} W^\nu \right) \partial_\lambda.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Novamente, como esperado, pela sua própria definição, ∇ atuou sobre os dois vetores e os transformou em um novo vetor, cujas componentes, expandidas na base coordenada $\{\partial_\mu\}$, são $V^\mu \nabla_\mu W^\lambda$, onde

$$\nabla_\mu W^\lambda \equiv \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} W^\nu. \quad (2.46)$$

Lemos $\nabla_V W$ como: derivada covariante de W ao longo de V .

2.8.3 Derivada covariante de 1-formas e tensores em geral

Uma vez que ∇_V , de certa forma, tem o sentido de uma derivada direcional na variedade, é natural definir a derivada covariante de $f \in \mathcal{F}(M)$ por uma derivada direcional ordinária

$$\nabla_V f = V[f]. \quad (2.47)$$

Assim, a eq. (2.42) toma a forma da regra de Leibnitz,

$$\nabla_V (fW) = (\nabla_V f)W + f \nabla_V W. \quad (2.48)$$

Nós, então, exigimos que isso seja válido para qualquer produto de tensores,

$$\nabla_V (T_1 \otimes T_2) = (\nabla_V T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_V T_2), \quad (2.49)$$

onde T_1 e T_2 são campos tensoriais de tipos arbitrários. Dessa forma, para um sistema de coordenadas $x = x^\mu$, nós podemos calcular quem é a derivada covariante de uma 1-forma $\omega \in \Omega(M)$. Para isso, já que $\langle \omega, W \rangle \in \mathcal{F}(M)$, sendo $W \in \mathcal{V}(M)$, nós notamos que

$$V[\langle \omega, W \rangle] = \nabla_V [\langle \omega, W \rangle] = \langle \nabla_V \omega, W \rangle + \langle \omega, \nabla_V W \rangle. \quad (2.50)$$

Logo, usando as propriedades do produto interno e da conexão afim, nós obtemos

$$\nabla_V \omega = V^\mu \nabla_\mu \omega_\nu dx^\nu, \quad (2.51)$$

onde

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda. \quad (2.52)$$

Ou seja, a derivada covariante de uma 1-forma também é uma 1-forma. Particularmente, se $\omega = dx^\nu$, nós temos

$$\nabla_\mu dx^\lambda = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu} dx^\nu, \quad (2.53)$$

que é a equação análoga a eq. (2.43).

Sabendo qual a cara da derivada covariante para vetores e 1-formas ao longo da direção de um determinado vetor $V \in T_p M$, fica fácil generalizar esses resultados para um campo tensorial T qualquer da variedade. Considerando um campo tensorial do tipo (q, r) , teremos que

$$\begin{aligned} \nabla_V T = V^\mu \nabla_\mu T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{q-1} \alpha_q}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{r-1} \beta_r} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_2}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_{q-1}}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_q}} \otimes dx^{\beta_1} \\ \otimes dx^{\beta_2} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_{r-1}} \otimes dx^{\beta_r}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{q-1} \alpha_q}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{r-1} \beta_r} = & \partial_\mu \left(T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{q-1} \alpha_q}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{r-1} \beta_r} \right) \\ & + \Gamma^{\alpha_1}_{\mu\nu} T^{\nu \alpha_2 \dots \alpha_{q-1} \alpha_q}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{r-1} \beta_r} + \dots \\ & \dots + \Gamma^{\alpha_q}_{\mu\nu} T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{q-1} \nu}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{r-1} \beta_r} \\ & - \Gamma^\nu_{\mu\beta_1} T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{q-1} \alpha_q}_{\nu \beta_2 \dots \beta_{r-1} \beta_r} - \dots \\ & \dots - \Gamma^\nu_{\mu\beta_r} T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{q-1} \alpha_q}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{r-1} \nu}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.8.4 Transporte paralelo e geodésicas afim

Dada uma curva $c : (a, b) \rightarrow M$ sobre a variedade M , a qual tem sua imagem, por simplicidade, coberta por uma única carta $(\mathcal{C}, \varphi)$, cuja o sistema de coordenadas é $x = \varphi(p)$, nós podemos definir o transporte paralelo de um vetor sobre essa curva. Considerando W como um campo vetorial, definido pelo menos ao longo da curva,

$$W|_{c(t)} = W^\mu(c(t)) \partial_\mu|_{c(t)}, \quad (2.56)$$

dizemos que W é transportado paralelamente ao longo de $c(t)$, para qualquer $t \in (a, b)$, se:

$$\nabla_V W = 0, \quad (2.57)$$

onde $V = d/dt = (dx^\mu(c(t))/dt) \partial_\mu|_{c(t)}$ é o vetor tangente à $c(t)$. Esta condição, escrita em termos de suas componentes, se torna

$$\frac{dW^\lambda}{dt} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} W^\nu = 0. \quad (2.58)$$

Se o vetor tangente $V(t)$ à curva $c(t)$ é ele próprio transportado paralelamente ao longo da mesma, ou seja,

$$\nabla_V V = 0, \quad (2.59)$$

dizemos que a curva $c(t)$ é uma geodésica afim. Isso traz a ideia de ser a curva mais “reta” possível na variedade [21]. Em termos das componentes, a equação da geodésica é escrita como:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0, \quad (2.60)$$

onde $\{x^\mu\}$ são as coordenadas da curva geodésica $c(t)$.

2.8.5 Transformação de coordenadas dos coeficientes da conexão

Sendo $V, W \in TpM$, vimos que a aplicação $\nabla_V W$ da origem a um novo vetor. Uma vez que um vetor é um objeto independente do sistema de coordenadas, podemos o expandir em diferentes sistemas de coordenadas. Por exemplo, considerando duas cartas $(\mathcal{C}_A, \varphi_A)$ e $(\mathcal{C}_B, \varphi_B)$, onde $x = \varphi_A(p)$, $y = \varphi_B(p)$ e $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B \neq \emptyset$, temos que

$$\nabla_V W = V^\mu \left(\frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} W^\nu \right) \partial_\lambda, \quad (2.61)$$

quando expandido na base coordenada da carta $(\mathcal{C}_A, \varphi_A)$, e

$$\nabla_V W = \tilde{V}^\mu \left(\frac{\partial \tilde{W}^\lambda}{\partial y^\mu} + \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} \tilde{W}^\nu \right) \tilde{\partial}_\lambda, \quad (2.62)$$

quando expandido na base coordenada da carta $(\mathcal{C}_B, \varphi_B)$, onde $\tilde{\partial}_\lambda = \partial/\partial y^\lambda$. Desta forma, os coeficientes da conexão devem se transformar de tal maneira que a igualdade entre as eqs. (2.61) e (2.62) continue sendo válida. Como $y^\mu = y^\mu(x^\nu)$, podemos usar a eq. (2.6) nas componentes $\tilde{V}^\mu$ e $\tilde{W}^\lambda$ da eq. (2.62), além de $\tilde{\partial}_\lambda = (\partial x^\alpha / \partial y^\lambda) \partial_\alpha$, para obter dessa igualdade que

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\gamma} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\gamma}. \quad (2.63)$$

Ou seja, frente a uma mudança de sistema de coordenadas, os coeficientes da conexão, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, devem se transformar como indicado pela eq. (2.63), para que $\nabla_V W$ se mantenha independente do sistema de coordenadas escolhido.

2.9 A conexão métrica

Na geometria de Riemann-Cartan, nós impomos que o tensor métrico seja covariante constante, isto é, se dois vetores V e W são transportados paralelamente ao

longo de qualquer curva, então o produto interno entre eles permanece constante sob o transporte paralelo. Assim, seja U um vetor tangente de uma curva arbitrária, ao longo da qual V e W são transportados paralelamente, essa imposição se traduz como ²

$$\begin{aligned}\nabla_U[\mathbf{g}(V, W)] &= (\nabla_U \mathbf{g})(V, W) + \mathbf{g}(\nabla_U V, W) + \mathbf{g}(V, \nabla_U W) \\ &= U^\lambda V^\mu W^\nu \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0,\end{aligned}\quad (2.64)$$

onde usamos que $\nabla_U V = \nabla_U W = 0$, já que, por construção, V e W são transportados paralelamente ao longo da direção de U . Como a eq. (2.64) é sempre válida para qualquer curva e vetores, isso significa que

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.65)$$

Usando a eq. (2.55), podemos escrever

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\gamma g_{\gamma\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\gamma g_{\mu\gamma} = 0. \quad (2.66)$$

Com esta exigência, a conexão afim ∇ é dita ser compatível com a métrica, ou é simplesmente chamada de conexão métrica. Esta condição, representada pela eq. (2.66), traz algumas restrições aos coeficientes da conexão afim. Fazendo uma permutação cíclica dos índices (λ, μ, ν) , nós temos

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^\gamma g_{\gamma\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\gamma g_{\nu\gamma} = 0, \quad (2.67)$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\gamma g_{\gamma\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\gamma g_{\lambda\gamma} = 0. \quad (2.68)$$

Assim, somando as eqs. (2.67) e (2.68) e subtraindo o resultado pela eq. (2.66), após algumas manipulações, obtemos

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + K_{\mu\nu}^\lambda, \quad (2.69)$$

onde usamos as definições:

$$\mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\gamma} (\partial_\mu g_{\nu\gamma} + \partial_\nu g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}), \quad (2.70)$$

$$K_{\mu\nu}^\lambda \equiv -\frac{1}{2} (T_{\mu\nu}^\lambda + T_{\nu\mu}^\lambda - T_{\mu\nu}^\lambda), \quad (2.71)$$

$$T_{\mu\nu}^\lambda \equiv 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda \equiv \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (2.72)$$

$\mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ são os conhecidos símbolos de Christoffel, $K_{\mu\nu}^\lambda$ é chamado de tensor de contorção e $T_{\mu\nu}^\lambda$ são as componentes do tensor de torção, que será definido na próxima seção. Pode-se notar dessas expressões que $K_{\lambda\mu\nu} = -K_{\nu\mu\lambda}$ e $T_{\lambda\mu\nu} = -T_{\lambda\nu\mu}$.

² A partir de agora, com o objetivo de deixar a leitura mais dinâmica, a menos que isso possa causar alguma confusão, não vamos mais especificar que estamos em uma região da variedade que é coberta por uma carta, a qual está associada um sistema de coordenadas x ou y e que os campos vetoriais e tensoriais são cobertos pela mesma, etc. Isso já deve ficar subentendido quando usarmos as componentes de tais objetos.

2.10 Curvatura e torção

Com o uso da conexão e dos parenteses de Lie, podemos agora definir dois objetos de fundamental importância, além do tensor métrico, para caracterizar uma variedade diferenciável, e consequentemente um espaço-tempo. Os tensores de curvatura, $\mathbf{R} : \mathcal{V}(M) \otimes \mathcal{V}(M) \otimes \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M)$, e de torção, $\mathbf{T} : \mathcal{V}(M) \otimes \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M)$, são definidos por [21]

$$\mathbf{R}(U, V, W) \equiv \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \nabla_U W - \nabla_{[U, V]} W, \quad (2.73)$$

$$\mathbf{T}(U, V) \equiv \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V]. \quad (2.74)$$

Também é comum escrever $\mathbf{R}(U, V)W$ ao invés de $\mathbf{R}(U, V, W)$, de modo que $\mathbf{R}$ pareça um operador atuando em W . As eqs. (2.73) e (2.74) deixam claro que

$$\mathbf{R}(U, V, W) = -\mathbf{R}(V, U, W), \quad (2.75)$$

$$\mathbf{T}(U, V) = -\mathbf{T}(V, U). \quad (2.76)$$

Em relação a base coordenada $\{\partial_\mu\}$ e a base dual $\{dx^\mu\}$, as componentes do tensor de curvatura são dadas por

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\mu\nu} &= \langle dx^\alpha, \mathbf{R}(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\beta \rangle = \langle dx^\alpha, \nabla_\mu \nabla_\nu \partial_\beta - \nabla_\nu \nabla_\mu \partial_\beta \rangle \\ &= \langle dx^\alpha, \nabla_\mu (\Gamma^\lambda_{\nu\beta} \partial_\lambda) - \nabla_\nu (\Gamma^\lambda_{\mu\beta} \partial_\lambda) \rangle \\ &= \langle dx^\alpha, (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\beta}) \partial_\lambda + \Gamma^\lambda_{\nu\beta} \Gamma^\delta_{\mu\lambda} \partial_\delta - (\partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\beta}) \partial_\lambda - \Gamma^\lambda_{\mu\beta} \Gamma^\delta_{\nu\lambda} \partial_\delta \rangle \\ &= \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\lambda_{\nu\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\beta} \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

enquanto que as componentes da torção são

$$\begin{aligned} T^\lambda_{\mu\nu} &= \langle dx^\lambda, \mathbf{T}(\partial_\mu, \partial_\nu) \rangle \\ &= \langle dx^\lambda, \nabla_\mu \partial_\nu - \nabla_\nu \partial_\mu \rangle \\ &= \langle dx^\lambda, \Gamma^\delta_{\mu\nu} \partial_\delta - \Gamma^\delta_{\nu\mu} \partial_\delta \rangle \\ &= \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Das eqs. (2.75) e (2.76), nós temos, respectivamente,

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = -R^\alpha_{\beta\nu\mu}, \quad (2.79)$$

$$T^\lambda_{\mu\nu} = -T^\lambda_{\nu\mu}. \quad (2.80)$$

O tensor de curvatura é quem dá a noção intrínseca de curvatura da variedade [21]. Por exemplo, se transportamos paralelamente um vetor de um ponto P da variedade para um outro ponto Q da variedade, por meio de uma curva c , e transportarmos paralelamente o mesmo vetor, novamente, de P para Q , mas agora por meio de outra curva

c' , a diferença, no ponto Q , entre esses dois vetores transportado é dada pelo tensor de curvatura. Já o tensor de torção, mede a falha de fechamento do paralelogramo formado por vetores deslocamentos pequenos, definidos num mesmo ponto, que são transportados paralelamente um ao longo do outro.

2.10.1 O tensor de Ricci e o escalar de curvatura

A partir do tensor de curvatura $\mathbf{R}$, nós construímos dois novos tensores através da contração de índices, os tensores de Ricci e o escalar de curvatura. O tensor de Ricci $\mathbf{Ric}$ é um tensor do tipo $(0, 2)$ definido por [21]

$$\mathbf{Ric}(U, V) \equiv \langle dx^\mu, \mathbf{R}(\partial_\mu, V)U \rangle, \quad (2.81)$$

cujas componentes são

$$R_{\mu\nu} = \mathbf{Ric}(\partial_\mu, \partial_\nu) = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}. \quad (2.82)$$

Ou seja,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + \Gamma^\sigma_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}. \quad (2.83)$$

Usando $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ dado pela eq. (2.69), nós obtemos a partir da eq. (2.83) a seguinte identidade:

$$R_{\mu\nu} = \mathring{R}_{\mu\nu} + \mathring{\nabla}_\alpha K^\alpha_{\nu\mu} - \mathring{\nabla}_\nu K^\alpha_{\alpha\mu} + K^\alpha_{\alpha\lambda} K^\lambda_{\nu\mu} - K^\alpha_{\nu\lambda} K^\lambda_{\alpha\mu}, \quad (2.84)$$

onde o sinal “ $\circ$ ” indica que o objeto é dado em termos da conexão de Levi-Civita. Esta expressão será útil no capítulo de revisão do TEGR.

O escalar de curvatura R é obtido pela contração dos índices restantes no tensor de Ricci com as componentes do tensor métrico, isto é,

$$R \equiv g^{\mu\nu} \mathbf{Ric}(\partial_\mu, \partial_\nu) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.85)$$

Ou, em termos da eq. (2.84), pode ser escrito como

$$R = \mathring{R} + \mathring{\nabla}_\alpha K^\alpha_{\mu}{}^\mu - \mathring{\nabla}_\mu K^\lambda_{\lambda}{}^\mu + K^\alpha_{\alpha\lambda} K^\lambda_{\mu}{}^\mu - K^{\alpha\mu\lambda} K_{\lambda\alpha\mu}, \quad (2.86)$$

onde usamos $\mathring{R} \equiv \mathring{R}^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$ e o fato de $g_{\mu\nu}$ ser constante frente a derivada covariante. Se usarmos a expressão de $K^{\lambda\mu\nu}$, dada pela eq. (2.71), nós obtemos

$$R = \mathring{R} - \mathring{\nabla}_\lambda T^\lambda + \frac{1}{4} T^{\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\lambda\mu\nu} T_{\mu\lambda\nu} - T_\lambda T^\lambda, \quad (2.87)$$

sendo $T^\lambda \equiv T^\sigma{}_\sigma{}^\lambda$.

2.11 Bases não coordenadas

Em uma base coordenada, os elementos de $T_p M$ são expandidos em $\{\partial_\mu\}$, enquanto os elementos de $T_p^* M$ são expandidos por $\{dx^\mu\}$. Nós podemos usar o tensor métrico $\mathbf{g}$ para construirmos uma base alternativa. Por exemplo, considerando a combinação linear

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu, \quad (2.88)$$

onde $a = (0), (1), (2)$ ou (3) e $\det e_a^\mu > 0$, nós impomos que $\{e_a\}$ sejam ortonormais, ou seja,

$$\mathbf{g}(e_a, e_b) = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab}. \quad (2.89)$$

η_{ab} é o tensor métrico de Minkowski. Nós podemos inverter a eq. (2.89) para obter

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}, \quad (2.90)$$

onde e^a_μ é a inversa de e_a^μ ; isto é, $e^a_\mu e_a^\nu = \delta_\mu^\nu$, $e^a_\mu e^\mu_b = \delta_b^a$. Como V é um objeto intrínseco da variedade, ele não depende da base vetorial em que é expandido, nós temos $V = V^\mu \partial_\mu = V^a e_a = V^a e_a^\mu \partial_\mu$. Logo, encontramos

$$V^\mu = e_a^\mu V^a, \quad (2.91)$$

$$V^a = e^a_\mu V^\mu. \quad (2.92)$$

Nós também podemos introduzir uma base dual $\{\vartheta^a\}$ definida por $\langle \vartheta^a, e_b \rangle = \delta_b^a$. ϑ^a pode ser expandido pela base dual da base coordenada. Assim,

$$\vartheta^a = e^a_\mu dx^\mu. \quad (2.93)$$

Em termos da base dual $\{\vartheta^a\}$, o tensor métrico é dado por

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{ab} \vartheta^a \otimes \vartheta^b. \quad (2.94)$$

As bases $\{e_a\}$ e $\{\vartheta^a\}$ são bases não coordenadas que chamaremos de “tetrada”³, nós usamos índices latinos para denotar as bases não coordenadas, e, quando os valores dos índices são escritos explicitamente, nós os escrevemos entre parênteses.

2.11.1 O frame local

Na verdade, existem inúmeras bases não coordenadas que fornecem o mesmo tensor métrico. Essas bases estão relacionadas entre si por meio de rotações ortogonais locais; no caso de um espaço-tempo, essas rotações correspondem ao grupo $SO(3, 1)$. Um elemento

³ A palavra tetrada é um neologismo de “tetrad”, palavra de origem inglesa que significa *tétrade*.

do subgrupo $SO^+(3,1)$ é chamado de transformação de Lorentz ortócrona própria e é denotado por Λ^a_b .

Passamos a chamar essas bases não coordenadas de frame, enquanto suas respectivas bases duais são chamadas de co-frame, ou tetradas. Assim, dados dois frames e_a e $\tilde{e}_a$, e seus respectivos co-frames ϑ^a e $\tilde{\vartheta}^a$, nós temos

$$e_a = \Lambda_a^b \tilde{e}_b, \quad (2.95)$$

$$\tilde{e}_a = \Lambda_a^b e_b, \quad (2.96)$$

$$\vartheta^a = \Lambda^a_b \tilde{\vartheta}^b, \quad (2.97)$$

$$\tilde{\vartheta}^a = \Lambda_b^a \vartheta^b, \quad (2.98)$$

onde $\Lambda_a^b = (\Lambda^{-1})^b_a$, ou seja, $\Lambda_c^a \Lambda_b^c = \delta_b^a$ ($\Lambda^T \Lambda = \mathbb{I}$). Ao contrário dos índices de coordenadas, os quais se transformam sob uma mudança de sistema de coordenadas, os índices dos frames e co-frames se transformam apenas sob uma rotação ortogonal local e são inalterados sob mudanças de coordenadas. Ou seja, os frames uma vez definidos, constituem uma base vetorial ortonormal que ganha um caráter intrínseco, independente de sistemas de coordenadas.

2.12 Alguns objetos expandidos em bases não coordenadas

2.12.1 Parenteses de Lie

Considerando a definição dos parenteses de Lie, dada pela eq. (2.23), nós temos que os parenteses de Lie de um frame são dados por

$$[e_a, e_b] = (e_a^\mu \partial_\mu e_b^\nu - e_b^\mu \partial_\mu e_a^\nu) e_c^\nu e_c. \quad (2.99)$$

A partir dos parêntese de Lie, podemos definir a seguinte quantidade:

$$\Omega_{bc}^a \equiv -\langle \vartheta^a, [e_b, e_c] \rangle, \quad (2.100)$$

que é chamada de função de estrutura de e_a , ou objeto de não-holonomia. (O leitor deve estar atento para a variação de sinal na literatura, uma vez que o objeto da eq. (2.100) é definido com um sinal de menos.)

2.12.2 A conexão

Os coeficientes da conexão afim em relação a um frame $\{e_a\}$ são definidos como

$$\omega_{bc}^a \equiv \langle \vartheta^a, \nabla_b e_c \rangle. \quad (2.101)$$

Lembrando que $e_a = e_a^\mu \partial_\mu$, vemos que sua derivada covariante pode ser escrita na forma

$$e_b^\mu \left(\partial_\mu e_c^\nu + e_c^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) \partial_\lambda = \omega_{bc}^a e_a^\lambda \partial_\lambda, \quad (2.102)$$

que fornece

$$\omega^a_{bc} = e^a_{\nu} e_b^{\mu} \nabla_{\mu} e_c^{\nu}, \quad (2.103)$$

onde

$$\nabla_{\mu} e_c^{\nu} = \partial_{\mu} e_c^{\nu} + e_c^{\lambda} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}. \quad (2.104)$$

2.12.3 Curvatura e torção

Usando as definições dos tensores de curvatura e torção, dadas pelas eqs. (2.73) e (2.74), nós teremos que as componentes dos tensores de curvatura e torção em relação a uma base não coordenada são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} R^a_{bcd} &= \langle \vartheta^a, \mathbf{R}(e_c, e_d)e_b \rangle \\ &= e_c[\omega^a_{db}] - e_d[\omega^a_{cb}] + \omega^e_{db} \omega^a_{ce} - \omega^e_{cb} \omega^a_{de} + \Omega^e_{cd} \omega^a_{eb} \end{aligned} \quad (2.105)$$

e

$$\begin{aligned} T^a_{bc} &= \langle \vartheta^a, \mathbf{T}(e_b, e_c) \rangle \\ &= \omega^a_{bc} - \omega^a_{cb} + \Omega^a_{bc} \equiv 2\omega^a_{[bc]} + \Omega^a_{bc}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Esta última equação nos leva a uma identidade bem conhecida:

$$\omega^a_{bc} = \frac{1}{2} (\Omega_{bc}^a + \Omega_{cb}^a - \Omega_{bc}^a) + K^a_{bc}. \quad (2.107)$$

Também é interessante notar que nós temos

$$\begin{aligned} R^a_{bcd} &= e^a_{\lambda} e_b^{\mu} e_c^{\nu} e_d^{\sigma} R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}, \\ T^a_{bc} &= e^a_{\lambda} e_b^{\mu} e_c^{\nu} T^{\lambda}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

ou

$$\begin{aligned} R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} &= e_a^{\lambda} e_{\mu}^b e_{\nu}^c e_{\sigma}^d R^a_{bcd}, \\ T^{\lambda}_{\mu\nu} &= e_a^{\lambda} e_{\mu}^b e_{\nu}^c T^a_{bc}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

3 Relatividade Geral

Neste capítulo, vamos fazer uma revisão sucinta dos principais tópicos da Teoria da Relatividade Geral (TRG) que mantém relação próxima com o objeto de estudo desta tese. Começamos fazendo uso dos conceitos desenvolvidos no capítulo anterior, falando da conexão de Levi-Civita, a qual é a conexão usada na teoria da relatividade geral. Em seguida, apresentamos as equações de campo da teoria, comentando um pouco sobre suas bases. Prosseguimos exibindo as soluções de Schwarzschild e de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Também discutimos um pouco sobre o problema da TRG em expressar um tensor energia-momento para o campo gravitacional. E, finalizamos este capítulo, comentando sobre a relação entre sistema de referência e sistema de coordenadas.

3.1 A conexão de Levi-Civita

Como mencionado no capítulo anterior, a TRG é uma teoria geométrica da gravitação e consiste de um caso especial da geometria de Riemann-Cartan, onde se usa uma conexão especial, chamada de conexão de Levi-Civita, a qual é simétrica. Uma conexão ∇ é dita ser simétrica se o tensor de torção é nulo [21]. Assim, em uma base coordenada, os coeficientes da conexão de Levi-Civita satisfazem

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}. \quad (3.1)$$

O teorema fundamental da geometria pseudo-Riemanniana diz que em uma variedade dotada de uma métrica (tensor métrico) existe uma única conexão simétrica que é compatível com a métrica. Esta conexão é a conexão de Levi-Civita. Como não há torção, o tensor de contorção $K^\lambda_{\mu\nu}$ é nulo. Logo, da eq. (2.69), obtemos

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\gamma} (\partial_\mu g_{\nu\gamma} + \partial_\nu g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}). \quad (3.2)$$

3.1.1 Geodésicas

Com o uso da conexão de Levi-Civita, a equação da geodésica ganha um significado a mais. Além de ser a curva mais reta possível numa variedade, ela também passa a ser a curva que extremiza o intervalo espaço-tempo entre dois pontos da variedade, isso é visto por meio do cálculo variacional. Por exemplo, se considerarmos o intervalo espaço-tempo entre dois pontos, P e Q , sobre uma curva c como

$$s = \int_P^Q ds, \quad (3.3)$$

onde a curva c tem suas equações paramétricas, em um certo sistema de coordenadas, dadas por $x^\mu = x^\mu(u)$, sendo u um parâmetro qualquer, usando a eq. (2.33), nós podemos escrever

$$s = \int_P^Q \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du}} du. \quad (3.4)$$

Agora, uma vez que, do cálculo das variações, nós temos

$$s = \int_P^Q L du, \quad (3.5)$$

sendo $L = L(x^\mu, \dot{x}^\mu, u)$, com $\dot{x}^\mu = dx^\mu/du$, a Lagrangeana do sistema, nós identificamos

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}. \quad (3.6)$$

Portanto, a partir do principio variacional, nós temos que as equações que extremizam a curva do intervalo espaço-tempo são dadas pelas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0. \quad (3.7)$$

Em geral, para facilitar as contas, a eq. (3.7) é reescrita como

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\mu} = 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{dL}{du}. \quad (3.8)$$

Usando a expressão de L , dada pela eq. (3.6), na eq. (3.8) e observando também que $L = ds/du = \dot{s}$, nós obtemos

$$\ddot{x}^\lambda + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \dot{x}^\lambda \frac{\ddot{s}}{\dot{s}}. \quad (3.9)$$

Se, particularmente, nós escolhermos um parâmetro t que seja linearmente relacionado ao intervalo s , isto é,

$$t = as + b, \quad (3.10)$$

onde a e b são contantes, o lado direito da eq. (3.9) desaparece, o que nos fornece

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0. \quad (3.11)$$

Esta equação coincide com a eq. (2.60). Ou seja, resumindo, quando usamos o princípio da mínima ação para encontrar a curva que extremiza o intervalo espaço-tempo, nós verificamos que a conexão de Levi-Civita surge naturalmente na expressão da curva, e esta equação também é a equação da geodésica afim, definida na secção 2.8.4.

No caso especial em que o parâmetro u é igual a s , nós temos

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (3.12)$$

e

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1, \quad (3.13)$$

onde assumimos $ds \neq 0$. Na verdade, estas equações que obtemos (eqs. (3.11) e (3.12)), são expressões de uma geodésica tipo-tempo. Para uma geodésica tipo-espaço, resultados análogos são obtidos, a menos de uma mudança de sinal, mas em geral nós substituímos s por σ , onde [22]

$$d\sigma^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.14)$$

Também existe geodésicas para as quais o intervalo espaço-tempo é zero, as chamadas geodésicas nulas. É possível ser mostrado que essas curvas podem ser parametrizadas por um parâmetro especial u , chamado de parâmetro afim, tal que as equações dessa geodésica são [22]

$$\frac{d^2 x^\lambda}{du^2} + \dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du} = 0, \quad (3.15)$$

onde

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0. \quad (3.16)$$

De forma geral, da eq. (3.8), podemos perceber que, se tomarmos um parâmetro u como sendo um parâmetro afim, nós podemos definir uma quantidade K por

$$K \equiv g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \alpha, \quad (3.17)$$

ou seja, $K = L^2$. Desta maneira, a forma mais útil da equação geodésica é dada por

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial K}{\partial x^\mu} = 0, \quad (3.18)$$

onde $K = \alpha$, e $\alpha = 1, -1$ ou 0 , dependendo se a geodésica é do tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz, respectivamente. No caso de ser do tipo-tempo nós tomamos u como sendo s , e se for do tipo-espaço nós tomamos u como sendo σ .

3.1.2 Tensor de curvatura e de Einstein

As componentes do tensor de curvatura em termos da conexão de Levi-Civita também são dadas pela eq. (2.77), trocando $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ por $\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$. O uso da conexão de Levi-Civita reduz significativamente o número de componentes independentes do tensor de curvatura; em n dimensões, elas passam de n^4 para $(1/12)n^2(n^2 - 1)$ [21, 22]. Por exemplo, com o emprego da conexão de Levi-Civita pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} \dot{R}_{\sigma\lambda\mu\nu} = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\mu}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} \right) \\ & + g_{\alpha\beta} \left(\dot{\Gamma}^\alpha_{\sigma\mu} \dot{\Gamma}^\beta_{\lambda\nu} - \dot{\Gamma}^\alpha_{\sigma\nu} \dot{\Gamma}^\beta_{\lambda\mu} \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde $\mathring{R}_{\sigma\lambda\mu\nu} \equiv g_{\sigma\alpha}\mathring{R}^\alpha_{\lambda\mu\nu}$, o que nos fornece imediatamente as seguintes simetrias:

$$\mathring{R}_{\sigma\lambda\mu\nu} = -\mathring{R}_{\sigma\lambda\nu\mu}, \quad (3.20)$$

$$\mathring{R}_{\sigma\lambda\mu\nu} = -\mathring{R}_{\lambda\sigma\mu\nu}, \quad (3.21)$$

$$\mathring{R}_{\sigma\lambda\mu\nu} = \mathring{R}_{\mu\nu\sigma\lambda}. \quad (3.22)$$

Também é possível ver que o tensor de Ricci se torna simétrico, ou seja, se utilizarmos $\mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ no lugar de $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ na eq. (2.83), nós encontramos

$$\mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{R}_{\nu\mu}. \quad (3.23)$$

Além disso, a utilização da conexão de Levi-Civita dá origem as identidades de Bianchi; um teorema que diz que, se $\mathring{\mathbf{R}}$ é o tensor de curvatura definido com respeito da conexão de Levi-Civita, então, $\mathring{\mathbf{R}}$ satisfaz as seguintes identidades [21]:

$$\begin{aligned} \mathring{\mathbf{R}}(X, Y)Z + \mathring{\mathbf{R}}(Z, X)Y + \mathring{\mathbf{R}}(Y, Z)X &= 0 \\ (\text{Primeira identidade de Bianchi}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} (\mathring{\nabla}_X \mathring{\mathbf{R}})(Y, Z)V + (\mathring{\nabla}_Z \mathring{\mathbf{R}})(X, Y)V + (\mathring{\nabla}_Y \mathring{\mathbf{R}})(Z, X)V &= 0 \\ (\text{Segunda identidade de Bianchi}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde X, Y, Z e V são campos vetoriais. Para vetores de uma base coordenada, essas identidades são escritas em termos das componentes como

$$\begin{aligned} \mathring{R}^\sigma_{\lambda\mu\nu} + \mathring{R}^\sigma_{\mu\nu\lambda} + \mathring{R}^\sigma_{\nu\lambda\mu} &= 0 \\ (\text{Primeira identidade de Bianchi}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \mathring{\nabla}_\sigma \mathring{R}^\xi_{\lambda\mu\nu} + \mathring{\nabla}_\mu \mathring{R}^\xi_{\lambda\nu\sigma} + \mathring{\nabla}_\nu \mathring{R}^\xi_{\lambda\sigma\mu} &= 0 \\ (\text{Segunda identidade de Bianchi}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

A segunda identidade de Bianchi é especialmente importante, haja vista que ela dá origem a equação de conservação covariante do famoso tensor de Einstein, $\mathring{G}^{\mu\nu}$. Podemos ver este fato, primeiramente contraindo o índice ξ com o índice μ na eq. (3.27), fazendo uso da eq. (3.20), o que nos fornece

$$\mathring{\nabla}_\sigma \mathring{R}_{\lambda\nu} + \mathring{\nabla}_\mu \mathring{R}^\mu_{\lambda\nu\sigma} - \mathring{\nabla}_\nu \mathring{R}_{\lambda\sigma} = 0. \quad (3.28)$$

Em seguida, fazendo uso da eq. (3.21), nós contraímos os índices λ e ν , o que nos fornece

$$\mathring{\nabla}_\mu \left(\mathring{R}^\mu_\sigma - 2\mathring{R}^\mu_\sigma \right) = 0, \quad (3.29)$$

ou

$$\mathring{\nabla}_\mu \mathring{G}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.30)$$

onde

$$\mathring{G}^{\mu\nu} \equiv \mathring{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathring{R} \quad (3.31)$$

é justamente a definição do tensor de Einstein.

3.2 As equações de campo da TRG

Albert Einstein chegou as equações de campo da teoria da relatividade geral dez anos após a elaboração da teoria da relatividade restrita, em 1915. Se trata de uma das teorias mais bem sucedidas na física clássica, haja vista que teve inúmeras previsões confirmadas e explica vários fenômenos gravitacionais, tais como o avanço do periélio de Mercúrio, o desvio gravitacional para o vermelho, as ondas gravitacionais, a dependência do tempo medido por relógios em relação ao campo gravitacional, a existência de buracos negros, etc. Embora tenha alguns problemas conceituais, tal como a dificuldade em se definir um tensor energia-momento para o campo gravitacional, o que será discutido mais adiante neste capítulo.

A teoria da relatividade geral é construída fundamentalmente a partir dos seguintes princípios, propostos por Einstein (veja, por exemplo, a seção 7.10 da Ref. [21]):

(I) Princípio da Relatividade Geral: Todas as leis da física tomam sempre a mesma forma qualquer que seja o sistema de coordenadas.

(II) Princípio da equivalência: ¹ Existe um sistema de coordenadas no qual os efeitos do campo gravitacional desaparecem localmente.

Assim, embasado principalmente pelo princípio da equivalência, uma das formas de se chegar as equações de Einstein da relatividade geral, é analisando o desvio geodésico² entre duas partículas testes em queda livre sujeitas a um campo gravitacional não uniforme. Tal procedimento é muito bem explicado no capítulo 10 da Ref. [22]. Essencialmente, o que é feito é obter a equação newtoniana do desvio para essas duas partículas testes, a qual resulta numa equação análoga a equação de campo gravitacional newtoniana para um espaço vazio, a equação de Laplace. E, então, se busca a generalização relativística dessa equação. Considerando que as duas partículas testes em queda livre viajam sobre geodésicas tipo-tempo e utilizando os conceitos desenvolvidos no capítulo 2, mais a ideia de um operador projeção (ver seção 10.3 da Ref. [22]), é possível obter a versão quadri-dimensional, ou relativística, da equação newtoniana do desvio; a partir da qual, pode-se extrair a informação do espaço tridimensional, o que irá sugerir que as equações de campo do vácuo da relatividade geral deveriam ser dadas por [22]

$$\mathring{R}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.32)$$

¹ Para uma discussão detalhada sobre o princípio da equivalência, o leitor pode consultar as referências Refs. [14, 23].

² Entende-se por desvio geodésico entre duas partículas testes a alteração do vetor que conecta essas duas partículas quando as mesmas viajam sobre geodésicas tipo-tempo.

Ou, alternativamente, observando que o desaparecimento do tensor de Ricci implica no desaparecimento do tensor de Einstein, também podemos escrever

$$\mathring{G}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.33)$$

As eqs. (3.32) e (3.33), são justamente as equações que Einstein propôs para serem as equações de campo do vácuo para a relatividade geral.

Para chegarmos nas equações de campo completas da TRG, ou seja, aquelas que levam em conta o conteúdo material em um determinado espaço-tempo, podemos fazer uso do princípio do acoplamento gravitacional mínimo; um princípio que não é fundamental, mas foi usado implicitamente por Einstein [22]. Trata-se de um princípio de simplicidade, ou navalha de Occam, o qual essencialmente diz que não se deveria adicionar termos desnecessários ao se fazer uma transição da teoria da relatividade especial para a geral. Assim, por exemplo, a lei de conservação do tensor energia-momento da matéria na relatividade especial, nas coordenadas de Minkowski dada por

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.34)$$

tem como generalização mais simples para a teoria geral, envolvendo gravitação, tomar a equação tensorial

$$\mathring{\nabla}_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.35)$$

Agora, como vimos da eq. (3.30), a segunda identidade de Bianchi implica que a derivada covariante do tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$ também é nula. Dessa forma, as eqs. (3.30) e (3.35), sugerem que esses dois tensores são proporcionais e, portanto, que as equações completas da relatividade geral são dadas por

$$\mathring{G}^{\mu\nu} = \varkappa T^{\mu\nu}, \quad (3.36)$$

onde $\varkappa$ é uma constante de proporcionalidade chamada de constante de acoplamento. De fato, a eq. (3.36) são as famosas equações de campo de Einstein. O valor de $\varkappa$ é determinado pelo princípio da correspondência, haja vista que estas equações devem se reduzir a equação de Poisson da gravitação newtoniana num limite apropriado (o limite de campo fraco e baixas velocidades).

3.2.1 As equações de campo a partir do princípio variacional

Considerando que a teoria da relatividade geral descreve a dinâmica da geometria do espaço-tempo, e que essa dinâmica é dada por $g_{\mu\nu}$, as equações de Einstein também podem ser obtidas a partir do uso do princípio variacional ao fazermos variações em relação a $g_{\mu\nu}$. A ação que leva às equações de Einstein é conhecida como ação de Einstein-Hilbert,

S_{EH} , e é a suposição de invariante mais simples que descreve a dinâmica da métrica. Nós definimos esta ação como

$$S_{EH} \equiv \frac{1}{\varkappa} \int \dot{R} \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.37)$$

onde a constante $\varkappa$ é introduzida para reproduzir o limite newtoniano quando os campos de matéria são introduzido, $\dot{R}$ é o escalar de curvatura e $\sqrt{-g} d^4x$ é o elemento de volume invariante. Para verificarmos que $\delta S_{EH} = 0$ fornece as equações de Einstein no vácuo, nós observamos que

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \frac{1}{\varkappa} \int \delta (\dot{R} \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \frac{1}{\varkappa} \int \left(\sqrt{-g} \delta \dot{R} - \frac{\dot{R}}{2} \frac{\delta g}{\sqrt{-g}} \right) d^4x = 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

em que vamos analisar cada termo separadamente. Primeiramente, observando a identidade matricial $\det A = \exp(\text{tr} \ln A)$, sendo A uma matriz diagonalizável, nós verificamos que

$$\begin{aligned} \delta \det A &= \exp(\text{tr} \ln A) \delta(\text{tr} \ln A) \\ &= \text{tr}(\delta \ln A) \det A \\ &= \text{tr}(A^{-1} \delta A) \det A. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Assim, usando esta relação para as componentes da métrica, nós temos

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (3.40)$$

Já para o termo $\sqrt{-g} \delta \dot{R}$, nós temos

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \delta \dot{R} &= \sqrt{-g} \delta (g^{\mu\nu} \dot{R}_{\mu\nu}) \\ &= \sqrt{-g} \dot{R}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \dot{R}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

A variação de $\dot{R}_{\mu\nu}$ pode ser feita diretamente na eq. (2.83), tendo em mente que agora estamos lidando apenas com a conexão de Levi-Civita, a qual nos fornece que

$$\begin{aligned} \delta \dot{R}_{\mu\nu} &= \partial_\lambda \delta \dot{\Gamma}^\lambda_{\nu\mu} - \partial_\nu \delta \dot{\Gamma}^\lambda_{\lambda\mu} + \dot{\Gamma}^\sigma_{\nu\mu} \delta \dot{\Gamma}^\lambda_{\lambda\sigma} + \dot{\Gamma}^\lambda_{\lambda\sigma} \delta \dot{\Gamma}^\sigma_{\nu\mu} - \dot{\Gamma}^\sigma_{\lambda\mu} \delta \dot{\Gamma}^\lambda_{\nu\sigma} - \dot{\Gamma}^\lambda_{\nu\sigma} \delta \dot{\Gamma}^\sigma_{\lambda\mu} \\ &= \left(\partial_\lambda \delta \dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + \dot{\Gamma}^\lambda_{\lambda\sigma} \delta \dot{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} - \dot{\Gamma}^\sigma_{\lambda\mu} \delta \dot{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} - \dot{\Gamma}^\sigma_{\lambda\nu} \delta \dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\sigma} \right) - \left(\partial_\nu \delta \dot{\Gamma}^\lambda_{\lambda\mu} - \dot{\Gamma}^\sigma_{\nu\mu} \delta \dot{\Gamma}^\lambda_{\lambda\sigma} \right) \\ &= \dot{\nabla}_\lambda \delta \dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} - \dot{\nabla}_\nu \delta \dot{\Gamma}^\lambda_{\lambda\mu}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Logo, da condição de compatibilidade do tensor métrico, podemos observar que

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \dot{R}_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[\dot{\nabla}_\lambda (\delta \dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}) - \dot{\nabla}_\nu (\delta \dot{\Gamma}^\lambda_{\lambda\mu}) \right] \\ &= \sqrt{-g} \dot{\nabla}_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}) - \sqrt{-g} \dot{\nabla}_\nu (g^{\mu\nu} \delta \dot{\Gamma}^\lambda_{\lambda\mu}). \end{aligned} \quad (3.43)$$

E, portanto, usando a identidade $\sqrt{-g} \mathring{\nabla}_\mu V^\mu = \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu)$, nós encontramos que

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \mathring{R}_{\mu\nu} = \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} \right) - \partial_\nu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \mathring{\Gamma}^\lambda_{\lambda\mu} \right). \quad (3.44)$$

Desta forma, concluímos que o segundo termo da eq. (3.41) não contribui para a variação da ação da eq. (3.38), haja vista que o mesmo dá origem a termos de superfície (os campos não variam no infinito). Assim, substituindo $\sqrt{-g} \delta \mathring{R} = \sqrt{-g} \mathring{R}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ e $\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ na eq. (3.38), nós temos

$$\begin{aligned} & \int \left(\sqrt{-g} \mathring{R}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{\mathring{R}}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \right) d^4x = 0 \\ \Rightarrow & \int \left(\sqrt{-g} \mathring{R}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\mathring{R}}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \right) d^4x = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

E, usando $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} \delta g_{\lambda\sigma}$, já que $g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$, nós obtemos

$$\int \left(-\mathring{R}^{\mu\nu} + \frac{\mathring{R}}{2} g^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (3.46)$$

Uma vez que $\delta g_{\mu\nu}$ é uma variação arbitrária, nós concluímos que devemos ter

$$\mathring{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathring{R} = 0, \quad (3.47)$$

que são as equações de Einstein para o vácuo.

Caso desejarmos considerar campos de matéria, nós podemos definir a ação que descreve a matéria como sendo

$$S_M \equiv \int \mathcal{L}_M d^4x, \quad (3.48)$$

onde $\mathcal{L}_M$ é a densidade lagrangiana da teoria. Se a ação da matéria também muda sob variações de $g_{\mu\nu}$, o tensor energia momento da matéria, $T^{\mu\nu}$, é definido por

$$\delta S_M = \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.49)$$

Observamos que, uma vez que $\delta g_{\mu\nu}$ é simétrico, $T^{\mu\nu}$ também é tomado como simétrico. Desta maneira, agora, temos que a ação completa da teoria é dada por $S_{EH} + S_M$, e ao fazermos a variação

$$\delta(S_{EH} + S_M) = 0, \quad (3.50)$$

sob uma variação $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, nós obtemos a forma completa das equações de Einstein

$$\mathring{G}_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.51)$$

Na verdade, as equações de Einstein da relatividade geral podem ter ainda mais informações. Nós podemos subtrair um escalar extra à constante de curvatura, sem prejudicar a invariância da ação. A constante que é subtraída é a famosa constante cosmológica, Λ , a qual faz com que a ação de Einstein-Hilbert seja reescrita como

$$\tilde{S}_{EH} = \frac{1}{\kappa} \int (\dot{R} - \Lambda) \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.52)$$

Agora, a extremização da ação $\tilde{S}_{EH} + S_M$ nos fornece

$$\dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{R} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.53)$$

que são as equações de Einstein com constante cosmológica. Esta última equação é usada principalmente para estudar modelos de universo, como veremos na seção 3.5.

3.3 Espaço-tempo de Schwarzschild

O espaço-tempo de Schwarzschild foi a primeira solução não trivial exata que se obteve das equações de campo da relatividade geral. Ela foi obtida por Karl Schwarzschild em 1916, pouco tempo após Einstein publicar suas equações. Trata-se de uma solução das equações de campo no vácuo para um espaço-tempo que tem simetria esférica. Essa simetria esférica é devida a suposição de que tal espaço-tempo é gerado por um corpo esfericamente simétrico de massa M , que não está rotacionando e não tem carga elétrica.

Nas coordenadas de Schwarzschild, fazendo a velocidade da luz igual a 1, o elemento de linha da solução é escrito por [22]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.54)$$

que é o famoso elemento de linha Schwarzschild. A constante $-2m$ é escolhida por conveniência durante a resolução, de modo que m possa ser interpretada como a massa do corpo gerador do espaço-tempo, em unidades relativísticas, como explicitado na seção seguinte. As coordenadas r, θ e ϕ são as coordenadas esféricas usuais, enquanto t é coordenada temporal.

3.3.1 Propriedades da solução de Schwarzschild

Dado um corpo qualquer com simetria esférica, que não rotacione nem seja dotado de carga elétrica, como algum planeta ou estrela, por exemplo, a solução de Schwarzschild pode sempre representar os espaço-tempo formado por esses corpos em sua região exterior³. E um resultado interessante é que a solução de Schwarzschild da origem ao teorema de Birkhoff, que diz que uma solução do vácuo esfericamente simétrica na região exterior

³ Estamos considerando aqui neste parágrafo a região $r > 2m$, que é tida como região exterior.

é necessariamente estática. Por solução estática, nós queremos dizer uma solução que não tem dependência temporal e é invariante sob reversão temporal, ou seja, nada do espaço-tempo gerado pelo corpo muda ou evolui. Desta maneira, mesmo que uma fonte pulse, como, por exemplo, uma estrela, mas não altere sua simetria esférica, isso não levará a qualquer efeito nas vizinhanças espaciais. Não teria propagação de ondas gravitacionais, por exemplo.

Outra característica da solução de Schwarzschild é que ela representa um espaço-tempo assintoticamente plano. Verificamos isso ao fazermos $r \rightarrow \infty$ na eq. (3.54), o que nos fornece

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.55)$$

que é o elemento de linha da relatividade especial em coordenadas esféricas. Este resultado está totalmente de acordo com a nossa intuição, de que os efeitos gravitacionais oriundos de um corpo são imperceptíveis se estivermos a uma distância suficientemente grande do mesmo.

Uma vez que definimos o tempo próprio τ , em unidades relativísticas, por $d\tau = ds$, também fica evidente, da eq. (3.54), que os observadores que estão em repouso nas coordenadas r, θ e ϕ medem tempos próprios diferentes conforme t evolui, a depender do valor de r em que se encontram. Quando observadores estão em repouso em relação às coordenadas espaciais de um dado sistema de coordenadas, dizemos que estes observadores estão adaptados a tal sistema de coordenadas. (Ou, de maneira inversa, dizemos que as coordenadas estão adaptadas a esses observadores.) No caso em questão, chamamos esses observadores de observadores de Schwarzschild.

Além disso, podemos usar o limite newtoniano, de campo fraco e baixas velocidades, para interpretar a constante m definida para a solução de Schwarzschild. Assim, uma vez que esse limite é dado por [22]

$$g_{00} \simeq 1 + \frac{2\phi}{c^2}, \quad (3.56)$$

onde c é o módulo da velocidade da luz e ϕ representa o potencial gravitacional newtoniano, que para um corpo de massa M centrado na origem do sistema de coordenadas é dado por $\phi = -GM/r$ (sendo G a constante gravitacional newtoniana). Ou seja, o limite de campo fraco é escrito como

$$g_{00} \simeq 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (3.57)$$

Logo, comparando essa equação com o g_{00} do elemento de linha de Schwarzschild da eq. (3.54), nós identificamos

$$m = \frac{GM}{c^2}. \quad (3.58)$$

Portanto, quando interpretamos a solução de Schwarzschild como uma partícula pontual situada na origem, a constante m é simplesmente a massa da partícula em unidades relativísticas ($G = c = 1$). (Vale a pena salientar, entretanto, que interpretar uma partícula puntiforme como sendo uma singularidade no espaço-tempo é problemático, como apontado por Einstein na Ref. [24]) As vezes m também é chamada de massa geométrica, já que, claramente da eq. (3.54), m tem dimensão de comprimento.

3.3.1.1 Buraco negro

Olhando para a solução de Schwarzschild, eq. (3.54), nós podemos perceber que esse espaço-tempo tem algo muito peculiar em $r = 2m$, o elemento de linha se degenera. Tal valor de r marca uma clara divisão do espaço-tempo em duas regiões: a região $r > 2m$, que caracteriza a coordenada t como sendo do tipo-tempo e r como do tipo-espaço, e a região $r < 2m$, na qual r passa a ser do tipo-tempo e t do tipo-espaço. Além disso, vemos que o elemento de linha diverge em $r = 0$. O valor $r = 2m$ é chamada de singularidade coordenada, e está associada a uma limitação do sistema de coordenadas usado. Enquanto que $r = 0$ é uma singularidade física, intrínseca, é um problema do próprio espaço-tempo.

Uma forma de se estudar um espaço-tempo é analisando a estrutura dos seus cones de luz, já que por meio destes podemos ver em qual região do dado espaço-tempo partículas materiais podem se mover em relação a observadores que são adaptados ao sistema de coordenadas no qual o cone de luz é desenhado.

Para analisarmos as propriedades dos cones de luz nas coordenadas de Schwarzschild, nós consideramos as geodésicas radiais nulas que são dadas por

$$ds^2 = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0. \quad (3.59)$$

Ou seja, estamos considerando apenas os raios luminosos que estão na direção radial, ou se distanciando do centro ($r = 0$) ou se aproximando. Podemos, então, calcular essas geodésicas usando a eq. (3.18), onde

$$K = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 0, \quad (3.60)$$

e o ponto indica uma derivada em relação a um parâmetro afim u ao longo da geodésica nula. Desta forma, a equação de Euler-Lagrange, eq. (3.18), para $\mu = 0$, nos fornece

$$\frac{d}{du} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0. \quad (3.61)$$

Integrando esta equação, obtemos

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (3.62)$$

sendo k a constante de integração. Elevando esta equação ao quadrado e substituindo o resultado de $\dot{t}^2$ na eq. (3.60), nós encontramos

$$\dot{r} = \pm k. \quad (3.63)$$

Assim, podemos obter uma equação na forma $t = t(r)$, ao notarmos que

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt/du}{dr/du} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}}. \quad (3.64)$$

Logo, usando as eqs. (3.62) e (3.63), nós temos

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}, \quad (3.65)$$

cujas a integração nos fornece

$$t = \pm (r + 2m \ln |r - 2m| + \text{constante}). \quad (3.66)$$

Esta equação nos dá as congruências que definem os cones de luz no diagrama espaço-tempo das coordenadas de Schwarzschild. Podemos notar que, para $r > 2m$, nós temos $dr/dt > 0$, por isso o sinal de '+' na eq. (3.66) define congruências das geodésicas nulas radiais ascendentes, enquanto o sinal de '-' define congruências das geodésicas nulas radiais descendentes. No entanto, para $r < 2m$, nós temos $dr/dt < 0$, o que faz com o que o cone de luz se volte para a direção $r = 0$, pois r agora é uma coordenada tipo-tempo nessa região. Isto é, tanto as geodésicas nulas descendentes quanto as ascendentes, na verdade, agora vão na direção da singularidade $r = 0$. E, obviamente, qualquer corpo material também deve atingir a singularidade. Daí surge a ideia de buraco negro, pois nada que chegue a região $r < 2m$ consegue escapar, nem mesmo a luz, tudo é arrastado para a singularidade $r = 0$.

Da eq. (3.66) também podemos notar que, a medida que $r \rightarrow \infty$, os ângulos entre os cones de luz fazem 45° , como era de se esperar, visto que o espaço-tempo é assintoticamente plano. Agora, ao passo que r vai diminuindo até tender a $2m$, nós temos que $t \rightarrow -\infty$. Ou seja, é como se uma dada geodésica nula descendente levasse um tempo coordenado infinito para chegar em $r = 2m$, e não fosse capaz de alcançar a região $r < 2m$. Ou, pensando nas geodésicas nulas ascendentes, é como se algum sinal luminoso enviado radialmente por algum observador de Schwarzschild próximo a $r = 2m$, levasse um tempo coordenado infinito para alcançar outro observador de Schwarzschild em um $r \gg 2m$. Desta forma, a superfície formada por $r = 2m$ é chamada de horizonte de eventos do buraco negro.

Contudo, é enganosa essa perspectiva dos observadores de Schwarzschild de que um raio luminoso descendente, ou muito menos uma partícula material, não atravesse o valor de $r = 2m$, e esse problema é devido a uma limitação do sistema de coordenadas

em descrever esse espaço-tempo. Para constataremos isso, podemos analisar o caminho percorrido por uma partícula caindo livremente na direção radial, a qual deve seguir uma geodésica tipo-tempo. Assim, das eqs. (3.17) e (3.18), nós temos, respectivamente,

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 1, \quad (3.67)$$

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (3.68)$$

onde usamos $\alpha = 1$ na eq. (3.17) e fizemos $\mu = 0$ na eq. (3.18), usando como parâmetro afim o tempo próprio da partícula. Portanto, fazendo $k = 1$ na eq. (3.68), o que é equivalente a soltar a partícula do infinito espacial com velocidade inicial igual a zero, nós encontramos das eqs. (3.67) e (3.68) que

$$\left(\frac{d\tau}{dr}\right)^2 = \frac{r}{2m}. \quad (3.69)$$

Logo, tomando a raiz negativa dessa equação, já que r deve diminuir a medida que o tempo próprio da partícula passe, nós encontramos

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} \left(r_0^{3/2} - r^{3/2}\right), \quad (3.70)$$

onde τ_0 corresponde ao tempo que a partícula mede quando está em r_0 . Dessa maneira, se fizermos $r = 0$, verificamos que a partícula atinge a singularidade em um tempo finito $\tau = (1/3)(\sqrt{2/m})r_0^{3/2} - \tau_0$. Isto é, na perspectiva da partícula, ela não sente nada de diferente em $r = 2m$.

Como já mencionado, o valor de $r = 2m$ é problemático devido a uma limitação do sistema de coordenadas em si, e não do espaço-tempo. No entanto, existem transformações de coordenadas que acabam com essas dificuldades encontradas pelas coordenadas de Schwarzschild. Duas transformações de coordenadas são especialmente importantes: uma construída independentemente por Kruskal e Szekeres, em 1960, e a outra obtida por Novikov, em 1963; as quais são tratadas a seguir.

3.3.1.2 Coordenadas de Kruskal-Szekeres

As conhecidas coordenadas de Kruskal-Szekeres correspondem a uma extensão analítica maximal⁴ da solução de Schwarzschild, as quais foram construídas independentemente por Kruskal e Szekeres em 1960 [12]. No diagrama espaço-tempo bidimensional dessas coordenadas (suprimindo os eixos das coordenadas angulares e usando unidades naturais), todos os cones de luz são formados por linhas retas, as geodésicas nulas ascendentes e descendentes, que fazem um ângulo de 45° com o eixo coordenado da coordenada espacial (ver figura 31.3 da Ref. [12]). Essa característica do cone de luz e a análise do

⁴ A definição de maximal pode ser vista na página 230 da Ref. [22].

diagrama ajudam a ter novos insights sobre os aspectos do espaço-tempo. Nessas coordenadas também não temos o problema da singularidade coordenada de Schwarzschild em $r = 2m$.

O elemento de linha nas coordenadas de Kruskal-Szekeres pode ser escrito como [12]

$$ds^2 = F^2 (dT^2 - dX^2) - r^2 d\Omega^2, \quad (3.71)$$

onde temos que

$$F = \sqrt{\frac{32m^3}{r}} e^{-r/(4m)}, \quad (3.72)$$

$$X^2 - T^2 = [r/(2m) - 1] e^{r/(2m)}, \quad (3.73)$$

sendo r e $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ as coordenadas usuais do sistema de coordenadas de Schwarzschild. Observamos que a eq. (3.73) gera o diagrama da figura 4 e fornece as seguintes relações entre as coordenadas de Kruskal-Szekeres e as coordenadas de Schwarzschild, a depender de qual região do espaço tempo estamos considerando:

$$\begin{cases} T = \sqrt{\left(\frac{r}{2m} - 1\right)} e^{r/(4m)} \sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \\ X = \sqrt{\left(\frac{r}{2m} - 1\right)} e^{r/(4m)} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right) \end{cases}, \quad (3.74)$$

$$\begin{cases} T = -\sqrt{\left(\frac{r}{2m} - 1\right)} e^{r/(4m)} \sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \\ X = -\sqrt{\left(\frac{r}{2m} - 1\right)} e^{r/(4m)} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right) \end{cases}, \quad (3.75)$$

$$\begin{cases} T = \sqrt{\left(1 - \frac{r}{2m}\right)} e^{r/(4m)} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right) \\ X = \sqrt{\left(1 - \frac{r}{2m}\right)} e^{r/(4m)} \sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \end{cases}, \quad (3.76)$$

$$\begin{cases} T = -\sqrt{\left(1 - \frac{r}{2m}\right)} e^{r/(4m)} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right) \\ X = -\sqrt{\left(1 - \frac{r}{2m}\right)} e^{r/(4m)} \sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \end{cases}, \quad (3.77)$$

onde t é a coordenada temporal de Schwarzschild. A eq.(3.74) é para a região externa ao buraco negro/branco ($r > 2m$) do nosso universo, a eq.(3.75) é para a região externa ao buraco negro/branco ($r > 2m$) do outro universo, a eq.(3.76) é para o interior do buraco negro ($r < 2m$) de ambos os universos⁵ e a eq.(3.77) é para o interior do buraco branco ($r < 2m$) de ambos os universos⁶. A coordenada $r = r(T, X)$ já é dada em termos de T e

⁵ Notar que um valor negativo de t indica que estamos no buraco negro do outro universo.

⁶ Neste caso um valor negativo da coordenada t indica que estamos no interior do buraco branco do nosso universo.

X implicitamente pela eq.(3.73), a qual é válida para qualquer região do espaço-tempo. A coordenada $t = t(T, X)$ é dada em termos de T e X através das seguintes equações:

$$t = 4m \operatorname{arctanh} \left(\frac{T}{X} \right), \quad (3.78)$$

$$t = 4m \operatorname{arctanh} \left(\frac{X}{T} \right), \quad (3.79)$$

onde a eq.(3.78) corresponde as regiões externas ao buraco negro/branco, dos dois universos, e a eq.(3.79) é para o interior do buraco branco e do buraco negro de ambos os universos.

3.3.1.3 Coordenadas de Novikov

Esse sistema de coordenadas foi usado pela primeira vez por Novikov, em 1963. Ele consiste em usar uma coordenada comóvel, R , para descrever partículas testes que são ejetadas radialmente da singularidade ($r = 0$) do buraco branco, atingem uma altura máxima, $r_{\text{máx}}$ (que pode ser maior ou igual a $r = 2m$), e retornam para a singularidade do, agora, buraco negro; como a coordenada R é comóvel à partícula, durante toda a sua trajetória uma determinada partícula teste tem sempre o mesmo valor R . Por construção, a coordenada R é dada em termos da altura máxima da trajetória da partícula [12]

$$R = \sqrt{\frac{r_{\text{máx}}}{2m} - 1}. \quad (3.80)$$

(Sendo r a coordenada de Schwarzschild usual). A coordenada temporal que é usada neste sistema de coordenadas é o tempo próprio τ das partículas testes, e ele é normalizado para que as partículas tenham $\tau = 0$ no momento em que atingem a altura máxima de suas órbitas. Além disso, todas as partículas testes, que podem atingir as mais variadas alturas, são ejetadas de tal maneira que todas atingem o pico de sua trajetória no tempo coordenado de Schwarzschild $t = 0$.

Nas coordenadas de Novikov, o elemento de linha é dado por [12]

$$ds^2 = d\tau^2 - N(\tau, R)^2 dR^2 - r(\tau, R)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.81)$$

onde

$$N = \frac{\sqrt{1 + R^2}}{R} \frac{\partial r}{\partial R}, \quad (3.82)$$

e⁷

$$\frac{\tau}{2m} = \pm (R^2 + 1) B^{1/2} \sqrt{\frac{r}{2m}} \pm (R^2 + 1)^{3/2} \arccos \sqrt{A}, \quad (3.83)$$

⁷ Essa é a eq. (31.12b) da Ref. [12], exceto pelo sinal $\pm$ no segundo termo do lado direito, o qual está faltando na eq. (31.12b).

sendo

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{r/(2m)}{R^2 + 1}, \\ B &\equiv 1 - A. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Nessas coordenadas, o nosso universo é representado por $R > 0$, a garganta do buraco de minhoca está em $R = 0$ e o universo espelho está na região $R < 0$. A eq. (3.83) gera o diagrama da figura 6, e, como esse diagrama indica, a eq. (3.83) implica que $\partial r / \partial R > 0$ para $R > 0$ e $\partial r / \partial R < 0$ para $R < 0$. Assim, N é positivo em ambos os universos.

3.4 Decomposição de Eckart do tensor de energia-momento

O tensor energia-momento da matéria pode ser obtido basicamente de duas formas. Em geral, ou é obtido de uma forma *ad hoc* por meio de suposições sobre a disposição e dinâmica dos campos de matéria e energia a serem considerados, ou é obtido a partir do princípio variacional através de lagrangianas propostas para os campos de matérias e energia, como visto nas eqs. (3.48) e (3.49). Também é possível fazer uma combinação dessas duas maneiras para se obter um tensor energia-momento dos campos de matérias a serem considerados numa teoria.

Mesmo que não seja feito nenhuma suposição sobre a forma do tensor energia-momento da matéria, dada uma congruência tipo-tempo, que represente, por exemplo, um conjunto de observadores com 4-velocidade u^μ , nós sempre podemos decompô-lo em termos das suas componentes próprias em relação a esse conjunto de observadores. Um dos primeiros a realizar esse tipo de decomposição do tensor energia-momento foi Eckart [17], em 1940. Para isto, Eckart, considerando a 4-velocidade u^μ de um conjunto de partículas materiais (observadores), tal que

$$u_\mu u^\mu = 1, \quad (3.85)$$

definiu um tensor

$$h_\mu{}^\nu = \delta_\mu^\nu - u_\mu u^\nu, \quad (3.86)$$

de tal modo que um vetor F^μ qualquer do espaço-tempo da origem a um escalar e um vetor tipo-espaço por meio das equações:

$$f = u_\mu F^\mu, \quad (3.87)$$

$$f^\mu = h_\nu{}^\mu F^\nu. \quad (3.88)$$

Desta forma, é evidente que o escalar f é a projeção de F^μ sobre o eixo do tempo-próprio e f^μ é um vetor tipo-espaço, contido na hipersuperfície tipo-espaço que é ortogonal as

congruências de u^μ . Ou seja, o tensor $h_\mu{}^\nu$ é um tensor de projeção, que pega qualquer quantidade de uma variedade e projeta na hipersuperfície tipo-espaço ortogonal as congruência de u^μ . Também é facilmente verificado que

$$F^\mu = f u^\mu + f^\mu, \quad (3.89)$$

além de

$$\begin{aligned} u_\nu h_\mu{}^\nu &= 0, \\ u^\nu h_\nu{}^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

O tensor $h_\mu{}^\nu$ tem várias propriedades importantes, tais como [17]

$$\begin{aligned} h_\nu{}^\mu h_\lambda{}^\nu &= h_\lambda{}^\mu, \\ h^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu, \\ h^{\mu\nu} &= h^{\mu\lambda} h_\lambda{}^\nu = h_\sigma{}^\mu g^{\sigma\lambda} h_\lambda{}^\nu. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Por conseguinte, da eq. (3.85), nós podemos observar, por exemplo, que

$$h^{\mu\nu} F_\mu F_\nu = g^{\lambda\sigma} f_\lambda f_\sigma \leq 0, \quad (3.92)$$

onde a igualdade só é obtida quando $F_\mu = f u_\mu$.

A partir do campo vetorial u^μ e do tensor de projeção $h^{\mu\nu}$, pode-se, então, decompor qualquer tensor energia-momento simétrico $T^{\mu\nu}$ em termos de componentes próprias, onde essas componentes são definidas por:

$$\rho = T^{\mu\nu} u_\mu u_\nu, \quad (3.93)$$

$$q^\mu = h_\nu{}^\mu T^{\nu\lambda} u_\lambda. \quad (3.94)$$

$$\omega^{\mu\nu} = h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu T^{\alpha\beta}. \quad (3.95)$$

Dessa forma, nós temos que o tensor energia-momento pode ser expresso como

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + 2q^{(\mu} u^{\nu)} + \omega^{\mu\nu}. \quad (3.96)$$

As componentes próprias ρ , q^μ e $\omega^{\mu\nu}$ tem interpretações físicas convenientes. A componente ρ é interpretada como a densidade de energia, o vetor q^μ representa o fluxo de calor e o tensor simétrico $\omega^{\mu\nu}$ é entendido como o tensor stress.

O tensor stress pode ser escrito como

$$\omega^{\mu\nu} = \pi^{\mu\nu} - p h^{\mu\nu}, \quad (3.97)$$

onde

$$p = -(1/3)\omega_\mu{}^\mu = -(1/3)T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \quad (3.98)$$

é definido apropriadamente como a pressão isotrópica e $\pi^{\mu\nu}$, que satisfaz os vínculos

$$\begin{aligned}\pi_{\mu\nu}u^\mu &= 0, \\ \pi_{\mu\nu}g^{\mu\nu} &= 0, \\ \pi_{\mu\nu} &= \pi_{\nu\mu},\end{aligned}\tag{3.99}$$

é tido como a pressão não isotrópica. Assim, usando a eq. (3.97), o tensor energia-momento passar a ser expresso por

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu - p h^{\mu\nu} + 2q^{(\mu} u^{\nu)} + \pi^{\mu\nu}.\tag{3.100}$$

Logo, se u^μ representar a 4-velocidade das partículas de um fluido, esta equação representa o tensor energia-momento desse fluido. E, se considerarmos que não há fluxo de calor e nem pressão não isotrópica, isto é, se fizermos $q^\mu = \pi^{\mu\nu} = 0$, nós obtemos o tensor energia-momento de um fluido ideal

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu},\tag{3.101}$$

onde foi usado a eq. (3.91).

3.5 Cosmologia relativística

A chamada cosmologia relativística consiste no estudo da dinâmica e estrutura do universo como um todo, a partir dos fundamentos da teoria da relatividade geral. Ela se baseia em três suposições para dar origem a modelos de universos, ou também chamados modelos cosmológicos. A primeira suposição é o chamado princípio cosmológico, o qual assume que, em larga escala, o universo é homogêneo e isotrópico. Ou seja, não importa em que região do universo nós pudéssemos estar, em larga escala, nós sempre teríamos a mesma percepção ao observá-lo. A segunda suposição, a qual é derivada do postulado de Weyl, é que o universo como um todo pode ser encarado como um fluido perfeito, um substrato, no qual as galaxias são tidas como partículas fundamentais desse fluido. E a terceira suposição é que a dinâmica do universo é dada pelas equações da relatividade geral, eq. (3.53).

O princípio cosmológico é um princípio de simplicidade, mas é uma boa aproximação em escalas da ordem de 10^8 anos luz ou maior [12, 22]. Para formalizar as ideias de homogeneidade e isotropia do universo, assume-se que existe um tempo cósmico t e, então, se formula o princípio em cada hipersuperfície tipo-espaco t constante. Desta forma, o princípio cosmológico exige que o espaço-tempo seja folheado em hipersuperfícies tipo-espaco que sejam esfericamente simétricas em qualquer ponto sobre elas.

O postulado de Weyl diz que as partículas do substrato repousam no espaço-tempo sobre congruências de geodésicas tipo-tempo, partindo de um ponto no passado finito ou

infinito, onde essas geodésicas são ortogonais a uma família de hipersuperfícies tipo-espaço de uma coordenada temporal t constante. Assim, podemos introduzir um sistema de coordenadas (t, x^1, x^2, x^3) tal que (x^1, x^2, x^3) descrevam essas hipersuperfícies tipo-espaço e sejam coordenadas constantes ao longo das geodésicas. Dessa forma, t desempenha o papel de tempo cósmico, e também de tempo próprio das partículas do substrato.

3.5.1 Espaço-tempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

A condição de ortogonalidade das geodésicas tipo-tempo em relação às hipersuperfícies tipo-espaço, juntamente com o princípio cosmológico, implica que o elemento de linha do universo pode ser escrito como

$$ds^2 = dt^2 - [S(t)]^2 d\sigma^2, \quad (3.102)$$

onde $S(t)$ é o conhecido fator de escala do universo e $d\sigma^2 = g_{ij}(x^k)dx^i dx^j$ da a geometria das hipersuperfícies tipo-espaço. O fator de escala multiplicando a geometria da parte espacial, $d\sigma$, a qual é independente do tempo, indica que a razão das distâncias espaciais entre pequenos deslocamentos permanece a mesma o tempo todo. E, como a geometria da parte espacial deve satisfazer a exigência de homogeneidade e isotropia para todo e qualquer tempo, resulta que $d\sigma$ deve ter curvatura constante. Desta forma, obtêm-se que [22]

$$d\sigma^2 = \frac{1}{1 - K\bar{r}^2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.103)$$

onde $\bar{r}, \theta$ e ϕ são as coordenadas esféricas usuais e K é uma constante, a constante de curvatura, que pode ser positiva, negativa ou zero. Logo, o elemento de linha da cosmologia relativística é escrito como

$$ds^2 = dt^2 - [S(t)]^2 \left(\frac{1}{1 - K\bar{r}^2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right). \quad (3.104)$$

Em geral, absorve-se a arbitrariedade da magnitude de K na coordenada radial e no fator de escala. Para isso, assumindo $K \neq 0$, defini-se um k , tal que $K = |K|k$; ou seja, k é $+1$ ou -1 , dependendo se K é positivo ou negativo, respectivamente. E, introduz-se uma nova coordenada radial $\tilde{r}$, dada por

$$\tilde{r} = \sqrt{|K|} \bar{r}. \quad (3.105)$$

Assim, o elemento de linha passa a ser escrito como

$$ds^2 = dt^2 - [a(t)]^2 \left(\frac{1}{1 - k\tilde{r}^2} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right), \quad (3.106)$$

onde $a(t)$ passa a ser o novo fator de escala do universo, sendo $a(t) = S(t)/\sqrt{|K|}$, se $K \neq 0$, e $a(t) = S(t)$, se $K = 0$.

Além disso, também se pode definir uma nova coordenada radial r , relacionada a $\tilde{r}$ por

$$\tilde{r} = \frac{r}{1 + \frac{1}{4}kr^2} . \quad (3.107)$$

Esta nova definição nos permite escrever o elemento de linha da cosmologia relativística como sendo

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{a(t)}{1 + \frac{1}{4}kr^2} \right)^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (3.108)$$

o qual é tido como o famoso espaço-tempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

3.5.2 Equações de campo

Uma vez que, a partir do postulado de Weyl, o universo pode ser encarado como um fluido perfeito, nós temos que o tensor energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho_m + p_m)u_\mu u_\nu - p_m g_{\mu\nu} , \quad (3.109)$$

onde u_μ é a 4-velocidade das partículas do fluido e ρ_m e p_m são, respectivamente, a densidade de energia e a pressão isotrópica desse fluido, como visto na seção 3.4. Desta forma, usando o elemento de linha de FLRW, eq. (3.108), e esse tensor energia-momento do universo na eq. (3.53), nós obtemos que as equações de campo que governam como o fator de escala evolui no tempo são dadas por [22]

$$\frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) - \Lambda = 8\pi\rho_m , \quad (3.110)$$

$$\frac{1}{a^2}(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) - \Lambda = -8\pi p_m , \quad (3.111)$$

onde o ponto denota derivada em relação ao tempo t .

3.6 Folheação do espaço-tempo

Esta seção está voltada a uma breve revisão sobre os conceitos das funções *lapse* e *shift* e de curvatura extrínseca, com o intuito de dar suporte ao capítulo 7 desta tese, o qual fala sobre a energia e o momento gravitacional do formalismo ADM. Em virtude disso, como no capítulo 7 usamos a assinatura +2, nesta seção também utilizaremos tal assinatura. No decorrer da tese, excetuando o capítulo 7, nós voltamos a utilizar a assinatura -2.

3.6.1 Decomposição 3 + 1 dimensional

Fornecido um espaço-tempo, nós podemos escolher um sistema de coordenadas tal que tenhamos uma família de hipersuperfícies tipo-espaço (3-geometria), as quais também são hipersuperfícies de simultaneidade, que folheiam todo espaço-tempo. Se t é a coordenada temporal, nós temos que duas hipersuperfícies tipo-espaço estão infinitesimalmente próximas se uma estiver dada para um valor t e a outra em $t + dt$. Por praticidade, vamos denominar a hipersuperfície em $t=\text{constante}$ por “inferior” e a em $t + dt=\text{constante}$ por “superior”, analogamente a denominação que é feita na Ref. [12]. As faces das hipersuperfícies inferior e superior formam uma espécie de sanduíche do espaço-tempo, o qual tem uma grossura infinitesimal. No entanto, a 3-geometria de cada uma dessas hipersuperfícies não fornece de cara qual é a 4-geometria do espaço-tempo que está entre elas. É preciso analisar como conectar essas duas hipersuperfícies, de tal modo que esse procedimento possa fornecer a 4-geometria do espaço-tempo nesse sistema de coordenadas.

Se a métrica da 3-geometria da hipersuperfície inferior nesse sistema de coordenadas é dada por

$${}^3g_{ij}(t, x^1, x^2, x^3)dx^i dx^j, \quad (3.112)$$

o que fornece a distância entre um ponto e outro dessa hipersuperfície, temos que a 3-geometria da hipersuperfície superior é dada por

$${}^3g_{ij}(t + dt, x^1, x^2, x^3)dx^i dx^j. \quad (3.113)$$

O índice 3 nas eqs. (3.112) e (3.113) indica que a métrica é tridimensional, e, a partir de agora, as quantidades com prefixo 3 , que tenham índices contravariantes, indicam que esses índices foram levantados por ${}^3g^{ij}$, a inversa de ${}^3g_{ij}$. Supõe-se, então, que essas duas hipersuperfícies estão unidas por conectores que são perpendiculares a elas, formando uma estrutura rígida, onde o valor do comprimento próprio, ou tempo próprio, do conector que se baseia no ponto (x^1, x^2, x^3) da hipersuperfície inferior, no instante t , é

$$N(t, x^1, x^2, x^3)dt. \quad (3.114)$$

Ou seja, esta é a distância própria entre uma hipersuperfície e outra. Agora, o ponto da hipersuperfície superior, onde esse conector deve ser anexado, é dado por

$$x_{\text{superior}}^i(x^j) = x^i - N^i(t, x^1, x^2, x^3)dt. \quad (3.115)$$

A distância própria na hipersuperfície inferior onde a base desse conector deve ser anexada em relação ao ponto (x^1, x^2, x^3) dessa hipersuperfície é $dx^i + N^i dt$ (ver figura 21.2 da Ref. [12]). Assim, a 4-geometria do espaço-tempo que preenche o sanduíche formado pelas duas hipersuperfícies, e conseqüentemente a 4-geometria de todo espaço-tempo, pode ser

dada a partir do teorema de Pitágoras em sua forma quadridimensional (em um espaço-tempo) [12]:

$$ds^2 = {}^3g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) - (N dt)^2. \quad (3.116)$$

Como o elemento de linha para uma métrica quadridimensional é

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.117)$$

comparando a eq. (3.116) com a eq. (3.117), nós obtemos que

$$\begin{pmatrix} g_{00} & g_{0j} \\ g_{i0} & g_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N_k N^k - N^2) & N_j \\ N_i & {}^3g_{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.118)$$

onde usamos que $N_i = {}^3g_{ij}N^j$. A função N é denominada de função *lapse* e N^i é chamada de função *shift*. Desta forma, nesse sistema de coordenadas, conhecendo as funções *lapse* e *shift*, a métrica quadridimensional pode ser construída a partir da métrica tridimensional das hipersuperfícies tipo-espaço desse espaço-tempo.

Se é dado N_j , nós obtemos N^j usando que $N^j = {}^3g^{ji}N_i$, lembrando que ${}^3g^{ij}$ é a inversa de ${}^3g_{ij} = g_{ij}$. Assim, a métrica quadridimensional recíproca é fornecida por

$$\begin{pmatrix} g^{00} & g^{0j} \\ g^{i0} & g^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1/N^2) & N^j/N^2 \\ N^i/N^2 & ({}^3g^{ij} - N^i N^j/N^2) \end{pmatrix}. \quad (3.119)$$

E, o elemento de volume tem a forma $\sqrt{-g} = N\sqrt{{}^3g}$.

3.6.2 Curvatura extrínseca

O conceito de curvatura extrínseca de uma hipersuperfície $(n-1)$ -dimensional é dado quando essa hipersuperfície se encontra imersa em um espaço n -dimensional, ela depende de que forma essa hipersuperfície está envelopada no espaço maior. Dado um campo vetorial unitário U^μ que seja normal a esta hipersuperfície, se fizermos o transporte paralelo de um vetor U^μ de um ponto P , com coordenadas x^α , para um ponto Q , com coordenadas $x^\alpha + dx^\alpha$, a curvatura extrínseca mede a mudança de direção de U^μ , transportado paralelamente, em relação ao vetor normal que já estava em Q . Em outras palavras, definimos a curvatura extrínseca K_{ij} dessa hipersuperfície Σ , onde i e j estão restritos à Σ , como sendo

$$K_{ij} = -\hat{\nabla}_j U_i. \quad (3.120)$$

Restringindo ao caso de uma hipersuperfície t constante, o campo vetorial U^μ será do tipo-tempo. A partir de agora, denotamos esse campo vetorial por n^μ . Logo, é evidente que n^μ deve satisfazer a relação

$$n_\mu n^\mu = -1, \quad (3.121)$$

e, em termos da função *lapse*, ele poder ser escrito na forma

$$n_\mu = -N\delta_\mu^0. \quad (3.122)$$

(Lembre-se que, nesta seção, estamos usando a assinatura $(-, +, +, +)$. Portanto, a eq. (3.121) indica que n^μ é do tipo-tempo.) Levantando o índice, com uso da eq. (3.119), obtemos que

$$n^\mu = \frac{1}{N}\delta_0^\mu - \frac{1}{N}(N^1\delta_1^\mu + N^2\delta_2^\mu + N^3\delta_3^\mu). \quad (3.123)$$

Assim, a curvatura extrínseca da hipersuperfície é dada pela parte espacial do tensor

$$K_{\mu\nu} = -\overset{\circ}{\nabla}_{(\nu}n_{\mu)}, \quad (3.124)$$

onde $\overset{\circ}{\nabla}$ representa a conexão de Levi-Civita.

Para Arnowitt, Deser e Misner (ADM) [19], a curvatura extrínseca da folheação do espaço-tempo tem uma importância fundamental, pois é a partir dela que se obtém o momento conjugado⁸, ${}^3\pi^{ij}$, à g_{ij} , o qual por sua vez é usado na definição do momento total do espaço-tempo, como vemos a seguir.

3.6.3 O formalismo ADM

O chamado formalismo ADM consiste de uma formulação hamiltoniana para a relatividade geral, a qual é colocada em sua forma canônica. Nessa teoria, usa-se a lagrangiana empregada na eq. (3.37), isto é, $\mathcal{L} = \dot{R}\sqrt{-g}$, para se obter a forma canônica das equações de movimento. Isso é feito reformulando a lagrangiana para que as equações de movimento tenham duas das características de equações canônicas: uma que elas sejam equações de primeira ordem nas derivadas do tempo, e, a segunda, que a coordenada temporal seja o tempo de uma decomposição dimensional na forma $3 + 1$ [19]. A primeira característica pode ser obtida na relatividade geral, já que sua lagrangiana pode ser escrita em uma forma linear nas derivadas do tempo, enquanto a segunda é alcançada a partir de uma decomposição $3 + 1$ dimensional das quantidades quadridimensionais, decomposição essa que é a mesma apresentada na seção 3.6.1. Uma vez que a forma canônica das equações de movimento são obtidas, a interpretação das quantidades físicas da teoria, como energia e momento, seguem a forma padrão do formalismo hamiltoniano.

Dessa maneira, no formalismos ADM, obtém-se que a energia total do espaço-tempo é dada pela seguinte integral de superfície [19]:

$$P^0 = \kappa \oint_S dS_i (g_{ij,j} - g_{jj,i}), \quad (3.125)$$

⁸ Não confundir o π usado aqui, com o π da eq. (3.97).

onde a convenção da soma para índices repetidos é assumida e a superfície bidimensional S deve estar no infinito espacial. Por sua vez, o momento total do espaço-tempo é fornecido por

$$P^i = -2\kappa \oint_S dS_j {}^3\pi^{ij}, \quad (3.126)$$

sendo ${}^3\pi^{ij}$ o momento conjugado à g_{ij} .

Temos que ${}^3\pi^{ij}$ pode ser escrito em termos da curvatura extrínseca da hipersuperfície $t = \text{constante}$ como

$${}^3\pi^{ij} = -\sqrt{{}^3g} ({}^3K^{ij} - {}^3g^{ij} {}^3K). \quad (3.127)$$

Onde essa curvatura extrínseca, ${}^3K^{ij}$, é obtida a partir da parte espacial da eq. (3.124). (Não devemos esquecer que, por definição, ${}^3K^{ij} \equiv {}^3g^{ip} {}^3g^{jq} K_{pq}$.)

O 4-momento, definido pelas eqs. (3.125) e (3.126), é bem definido apenas para espaços-tempos assintoticamente planos e para sistemas de coordenadas assintoticamente retangulares. Caso o leitor esteja interessado em mais detalhes sobre o formalismo ADM, o mesmo pode consultar a Ref. [19] ou a seção 21.7 da Ref. [12].

3.7 Pseudo-tensores para o campo gravitacional

Como podemos perceber das equações de Einstein, eq. (3.36), o lado esquerdo contém informações sobre a geometria do espaço-tempo enquanto o lado direito sobre a energia e o momento dos campos de matéria, no entanto, não há nada especificamente sobre a energia e o momento do campo gravitacional. Contudo, essas informações sobre o campo gravitacional são de fundamental importância para as leis de conservação do 4-momento total e momento angular total de um espaço-tempo, mesmo que, na pior das hipóteses, seja considerado apenas sua contribuição global.

No caso de espaços-tempos assintoticamente planos, com o intuito de se obter leis de conservação para o 4-momento total e o momento angular intrínseco total desses espaços-tempos e pegando as integrais de fluxo gaussianas da teoria eletrodinâmica como guia, pode-se escrever as equações de Einstein linearizadas como sendo [12]

$$\partial_\alpha \partial_\beta H^{\mu\alpha\nu\beta} = 16\pi T^{\mu\nu}, \quad (3.128)$$

onde estamos usando o valor explícito da constante κ em unidades naturais e

$$H^{\mu\alpha\nu\beta} \equiv -(\bar{h}^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta} - \bar{h}^{\alpha\nu} \eta^{\mu\beta} - \bar{h}^{\mu\beta} \eta^{\alpha\nu}), \quad (3.129)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1), \quad (3.130)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (3.131)$$

$$h \equiv h^\mu_\mu = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}. \quad (3.132)$$

Da eq. (3.129), podemos perceber que a quantidade $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ é antissimétrica nos dois últimos índices. Logo, da eq. (3.128), segue que a lei de conservação da teoria linearizada é dada por

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} \partial_\nu \partial_\alpha \partial_\beta H^{\mu\alpha\nu\beta} = 0. \quad (3.133)$$

Essa antissimetria em ν e β também permite escrever uma expressão para o 4-momento P^μ total do espaço-tempo em termos de uma integral de fluxo gaussiana:

$$\begin{aligned} P^\mu &= \int_V T^{\mu 0} d^3x = \frac{1}{16\pi} \int_V \partial_\alpha \partial_\beta H^{\mu\alpha 0\beta} d^3x = \frac{1}{16\pi} \int_V \partial_\alpha \partial_j H^{\mu\alpha 0j} \\ &= \frac{1}{16\pi} \oint_S \partial_\alpha H^{\mu\alpha 0j} d^2S_j, \end{aligned} \quad (3.134)$$

onde V indica o volume espacial para a coordenada temporal x^0 constante e S é a superfície de contorno desse volume, que engloba completamente a fonte. Um calculo similar pode fornecer a integral do fluxo para o momento angular total em relação a origem do sistema de coordenada (Ver eq. (20.8) da Ref. [12]). A eq. (3.133) pode ser considerada análoga à equação de Maxwell para a carga elétrica, em que a informação da carga elétrica é obtida a partir do fluxo do campo elétrico na superfície da integral de superfície; ou à equação da teoria newtoniana que obtém o valor da massa de um corpo a partir da integral de superfície que calcula o fluxo do campo gravitacional produzido por esse corpo. No caso, aqui, a informação sobre o campo gravitacional de todo o volume que a superfície engloba também estaria contabilizado na integral de superfície, longe da fonte.

Na verdade, uma vez que o campo gravitacional de uma fonte isolada tem o mesmo comportamento na região assintoticamente plana, não importando se ela é uma fonte forte (corpo massivo que gera uma campo gravitacional forte) ou fraca, a equação

$$P^\mu = \frac{1}{16\pi} \oint_S \partial_\alpha H^{\mu\alpha 0j} d^2S_j \quad (3.135)$$

pode ser usada para calcular o 4-momento de fontes fortes, desde que a superfície S esteja na região assintoticamente plana e coordenadas assintoticamente minkowskianas sejam usada [12]; o que não seria possível se fossemos usar a integral de volume.

O chamado pseudo-tensor do campo gravitacional surge quando, usando como base a teoria linearizada, se quer converter as integrais de superfície de volta para as integrais de volume na teoria completa (sem ser linearizada). Para isso, coloca-se as equações de campo de Einstein na forma [12]

$$\partial_\alpha \partial_\beta H^{\mu\alpha\nu\beta} = 16\pi T_{efetivo}^{\mu\nu}, \quad (3.136)$$

que é análoga a eq. (3.128), mas agora $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ é definido em termos de $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ na eq. (3.129), mesmo na região dentro da fonte, ou próximo a ela, onde $|h_{\mu\nu}|$ pode ser maior que 1. Desta maneira, fazendo o processo inverso que foi feito na eq. (3.134), pode-se obter

$$P^\mu = \int_V T_{efetivo}^{\mu 0} d^3x. \quad (3.137)$$

A forma de $T_{efetivo}^{\mu\nu}$ pode ser calculada ao usar o fato que $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ é uma aproximação linearizada do tensor de Einstein. Então, define-se a correção não linear por [12]

$$16\pi t^{\mu\nu} \equiv \partial_\alpha \partial_\beta H^{\mu\alpha\nu\beta} - 2\mathring{G}^{\mu\nu}. \quad (3.138)$$

Deste modo, das eqs. (3.138) e (3.136), podemos notar que

$$\partial_\alpha \partial_\beta H^{\mu\alpha\nu\beta} = 16\pi t^{\mu\nu} + 2\mathring{G}^{\mu\nu} = 16\pi(t^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}), \quad (3.139)$$

de maneira que

$$T_{efetivo}^{\mu\nu} = t^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}. \quad (3.140)$$

O objeto $t^{\mu\nu}$ é o chamado pseudo-tensor do campo gravitacional. Novamente, da antissimetria dos dois últimos índices de $H^{\mu\alpha\nu\beta}$, pode-se observar a lei de conservação

$$\partial_\nu T_{efetivo}^{\mu\nu} = \partial_\nu(t^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}) = 0. \quad (3.141)$$

As quantidades $H^{\mu\alpha\nu\beta}$, $T_{efetivo}^{\mu\nu}$ e $t^{\mu\nu}$ são dependentes de suas definições e da escolha do sistema de coordenadas, sempre com a condição do sistema de coordenadas ser assintoticamente minkowskiano ($g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$). Qualquer nova quantidade $H_{novo}^{\mu\alpha\nu\beta}$ que corresponda a $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ na região de campo fraco assintótica fornecerá o mesmo valor que $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ forneceria para as integrais de superfície do 4-momento total P^μ [12].

Na literatura existem várias propostas da definição de $T_{efetivo}^{\mu\nu}$, os chamados complexos de energia-momento. Observe que dar uma definição de $T_{efetivo}^{\mu\nu}$ corresponde a dar uma cara ao lado esquerdo da eq. (3.136), o que também determina os pseudo-tensores do campo gravitacional. Por exemplo, Landau e Lifshitz definiram [12]

$$H_{L-L}^{\mu\alpha\nu\beta} = \sqrt{-g}(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}), \quad (3.142)$$

o que leva ao complexo de energia-momento de Landau-Lifshitz $L^{\mu\nu}$ ($T_{efetivo}^{\mu\nu}$)

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi(-g)} H_{L-L}^{\mu\alpha\nu\beta}. \quad (3.143)$$

O pseudo-tensor do campo gravitacional obtido a partir de $H_{L-L}^{\mu\alpha\nu\beta}$ é [12]

$$\begin{aligned} (-g)t_{L-L}^{\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi} & \left[\partial_\lambda \mathfrak{g}^{\alpha\beta} \partial_\mu \mathfrak{g}^{\lambda\mu} - \partial_\lambda \mathfrak{g}^{\alpha\lambda} \partial_\mu \mathfrak{g}^{\beta\mu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} \partial_\rho \mathfrak{g}^{\lambda\nu} \partial_\nu \mathfrak{g}^{\rho\mu} \right. \\ & - (g^{\alpha\lambda} g_{\mu\nu} \partial_\rho \mathfrak{g}^{\beta\nu} \partial_\lambda \mathfrak{g}^{\mu\rho} + g^{\beta\lambda} g_{\mu\nu} \partial_\rho \mathfrak{g}^{\alpha\nu} \partial_\lambda \mathfrak{g}^{\mu\rho}) + g^{\nu\rho} g_{\lambda\mu} \partial_\nu \mathfrak{g}^{\alpha\lambda} \partial_\rho \mathfrak{g}^{\beta\mu} \\ & \left. \frac{1}{8} (2g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu}) (2g_{\nu\rho} g_{\sigma\tau} - g_{\rho\sigma} g_{\nu\tau}) \partial_\lambda \mathfrak{g}^{\nu\tau} \partial_\mu \mathfrak{g}^{\rho\sigma} \right], \end{aligned} \quad (3.144)$$

onde $\mathfrak{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$.

Outras definições de complexo energia-momento podem ser encontradas na Ref. [13]. Nessa referência, por exemplo, usa-se a quantidade

$$\Psi^{\nu\alpha\beta\rho} = -g(g^{\nu\beta}g^{\alpha\rho} - g^{\alpha\beta}g^{\nu\rho}) \quad (3.145)$$

para a escrever a definição do complexo energia-momento de Einstein como sendo

$$E_\mu^\nu = \frac{1}{16\pi} \partial_\alpha \Theta_\mu^{\nu\alpha}, \quad (3.146)$$

onde

$$\Theta_\mu^{\nu\alpha} = \frac{g_{\mu\beta}}{\sqrt{-g}} \partial_\rho \Psi^{\nu\alpha\beta\rho}. \quad (3.147)$$

Ou escrever a definição do complexo energia-momento de Bergmann e Thomson (B-T) como

$$B^{\beta\nu} = \frac{1}{16\pi} \partial_\alpha \Xi^{\beta\nu\alpha}, \quad (3.148)$$

onde

$$\Xi^{\beta\nu\alpha} = g^{\beta\mu} X_\mu^{\nu\alpha} \quad (3.149)$$

com

$$X_\mu^{\nu\alpha} = -X_\mu^{\alpha\nu} = \frac{g_{\mu\beta}}{\sqrt{-g}} \partial_\rho \Psi^{\nu\alpha\beta\rho}. \quad (3.150)$$

O que todas essas definições tem em comum é que elas não são invariantes frente a transformações de coordenadas; ou seja, o valor de quantidades como a densidade de energia podem mudar mesmo quando fazemos uma mudança apenas nas coordenadas espaciais, o que obviamente não é algo aceitável⁹. Vamos ver no próximo capítulo que na abordagem do teleparallelismo é possível obter um tensor energia-momento para o campo gravitacional que é invariante por transformações de coordenadas.

3.8 Tetrada, sistema de referência e sistema de coordenadas

Como enfatizado por J. D. Norton (págs. 835-836 da Ref. [25]), um sistema de coordenadas é uma atribuição suave e invertível de quatro números a eventos em uma vizinhança do espaço-tempo. Por sua vez, a noção de sistema de referência está ligada a um sistema físico idealizado que é usado para atribuir esses números. Está claro, portanto, que há uma relação íntima entre sistemas de coordenadas e referenciais; mais do que isso, está claro que referenciais não são meras abstrações matemáticas, eles estão relacionados a algum sistema físico.

Na visão mais antiga de referenciais, era natural pensar que uma mudança de referencial se dava através de uma mudança de coordenadas que mudasse o estado de movimento das partículas que compõe o referencial. Assim, faria sentido a energia depender

⁹ Note que transformações de coordenadas que não mexem com a coordenada temporal não mudam o estado de movimento dos observadores. Portanto, não faz sentido a energia depender deste tipo de transformação de coordenadas.

de mudanças no sistema de coordenadas, desde que essa mudança mexesse com a coordenada temporal, como ocorre nas transformações de Lorentz da Relatividade Especial, onde a energia de um elétron é alterada pela simples mudança de coordenada associada a um “boost”.

De qualquer forma, na visão mais moderna (pág. 837 da Ref. [25].), um sistema de referência (“frame of reference”) é visto como sendo fornecido pela especificação de um conjunto de quatro vetores mutualmente ortonormais sobre o espaço-tempo. Esse conjunto é o que temos chamado de tetrada. Assim, consideramos natural que a energia do campo gravitacional possa depender apenas do campo de tetradas e de transformações de coordenadas que mexam na parte temporal, nunca de transformações de coordenadas do espaço tridimensional.

Como um sistema de referência é feito por partículas de matéria, ele deve estar adaptado às linhas de universo de cada partícula que o compõe. Assim, por trás de todo referencial há um sistema caracterizado por um certo estado de movimento. Esse sistema pode ser um conjunto de partículas livres ou partículas interagentes; pode ser quase rígido, elástico etc. A ideia importante aqui, e que é apontada por Norton, é que todo sistema de coordenadas pode ser visto como estando adaptado a algum referencial e, conseqüentemente, ao estado de movimento de um conjunto de partículas. Dizemos que um sistema de coordenadas está adaptado a um “frame of reference” se as curvas do frame coincidem com as curvas determinadas pelos valores constantes das coordenadas espaciais.

Como veremos mais adiante, a formulação hamiltoniana do teleparalelismo permite a construção de um 4-momento, tanto para o campo gravitacional quanto para o espaço-tempo, que depende apenas da tetrada e da superfície de simultaneidade escolhida para calcular a energia, não dependendo de mudanças de coordenadas do espaço tridimensional. Além disso, no teleparalelismo, a análise do problema da localização da energia do campo gravitacional fica bem mais clara.

4 O Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral

Neste capítulo, apresentamos o formalismo do chamado Equivalente Teleparalelo da relatividade geral (TEGR, da sigla em inglês), o qual tem como campo fundamental da teoria os campos de tetrada, não a métrica, diferentemente da relatividade geral. Começamos apresentando a noção geral de teleparalelismo, para depois poder especificar o que seria o TEGR. A partir daí, apresentamos as principais características do formalismo, como o porquê dele ser equivalente à teoria da relatividade geral, no entanto conceitualmente diferente, e as definições de suas quantidades, tais quais a torção, o superpotencial e o tensor densidade de energia-momento gravitacional. Em seguida, fazemos uma discussão sobre a escolha do frame teleparalelo, de tal modo que esse frame possa levar a resultados consistentes, ou seja, que as quantidades definidas a partir desse frame predigam resultados corretos. E, por último, finalizamos apresentando um método que foi desenvolvido na Ref. [26] com o intuito de facilitar os cálculos envolvendo campos de tetradas e obter expressões compactas das grandezas definidas no TEGR.

4.1 Teleparalelismo

O teleparalelismo é uma configuração geométrica que permite estabelecer a noção de paralelismo a distância [6]. Para isso, é preciso fixar um frame particular e_a . Dada uma variedade M e uma conexão afim ∇ , isso é feito exigindo-se que $\nabla_{d/ds}e_a = (dx^\mu/ds)\nabla_\mu e_a = 0$ se mantenha para toda e qualquer curva $x^\mu(s)$, o que implica que

$$\nabla_\mu e_a = 0 \quad (\omega^a_{bc} = 0) \quad (4.1)$$

seja sempre válido. Uma conexão desse tipo é conhecida como *conexão de Weitzenböck*. Desta forma, nós temos que todos os e_a , definidos por todos os pontos de M , são ditos estarem teleparalelos entre si. Assim, a noção de teleparalelismo a distância é estabelecido a partir dessa base. Dizemos que dois vetores em pontos distantes são teleparalelos, ou simplesmente paralelos, entre si, se eles tem componentes idênticas em relação as tetradas locais nos pontos considerados. Por exemplo, se V , em um ponto P , e U , em um ponto Q , são teleparalelos um com o outro, então $V^a(x)|_P = U^a(x)|_Q$, onde $V^a(x)|_P = e^a_\mu(x)|_P V^\mu(x)|_P$ e $U^a(x)|_Q = e^a_\mu(x)|_Q U^\mu(x)|_Q$.

A eq. (4.1) não é invariante por transformações locais de Lorentz, ou seja, ela só é válida para um conjunto de frames pré-determinados que se relacionam entre si por transformações globais de Lorentz, qualquer outro frame que se relacione com esse último

via uma transformação local de Lorentz não irá satisfazer tal equação. Por simplicidade, optamos por chamar o frame que satisfaz a eq. (4.1) de “frame teleparalelo”. A partir do frame teleparalelo e_a , podemos obter a métrica, usando a eq. (2.90), e o tensor de torção, que passa a ser dado por

$$T^a_{\mu\nu} = \partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu, \quad (4.2)$$

depois de fazer $\omega^a_{bc} = 0$ na eq. (2.106) e contraí-la com e^b_μ e e^c_ν .

4.2 Equações de campo do TEGR

De uma forma geral, teorias teleparalelas arbitrárias da gravidade são definidas a partir da densidade lagrangiana $\mathcal{L} = e(AI_1 + BI_2 + CI_3)$, onde $e = \det(e^a_\mu) = \pm\sqrt{-g}$, A , B e C são constantes arbitrárias e $I_1 = T^{abc}T_{abc}$, $I_2 = T^{abc}T_{bac}$ e $I_3 = T^a T_a$ ($T^a = T^b{}_b{}^a$) são os invariantes de Weitzenböck [6, 27]. O TEGR é obtido quando calculamos as equações de movimento dessa lagrangiana variando a ação em relação a $e_a{}^\mu$ com $A = 1/4$, $B = 1/2$ e $C = -1$.

Aqui, não vamos deduzir as equações de Einstein na forma teleparalela a partir do princípio variacional. Em vez disso, usaremos uma forma alternativa. Através das identidades das eqs. (2.84) e (2.87) e da condição da eq. (4.1), chegaremos as equações do TEGR escritas no frame teleparalelo.

Usando a eq. (4.1) na expressão do tensor de curvatura, eq. (2.73), nós vemos que esse tensor se anula. Isto significa que as componentes do tensor de curvatura R^a_{bcd} são nulas qualquer que seja a base, incluindo as bases coordenadas. (Aliás, como apontado por Goenner na Ref. [2], pág. 73, Eisenhart estabeleceu em 1927 que a condição necessária e suficiente para o paralelismo distante com uma certa conexão afim é a nulidade do tensor de curvatura dessa conexão.) Consequentemente, também temos que $R_{\mu\nu} = 0$ e $R = 0$. Dessa forma, fazendo $R = 0$ na eq. (2.87), nós obtemos

$$\mathring{R} = \mathring{\nabla}_\lambda T^\lambda - \left(\frac{1}{4} T^{\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\lambda\mu\nu} T_{\mu\lambda\nu} - T_\lambda T^\lambda \right). \quad (4.3)$$

Como $\mathring{\nabla}_\lambda T^\lambda = \partial_\lambda T^\lambda + \mathring{\Gamma}^\lambda_{\lambda\mu} T^\mu$, multiplicando essa igualdade por e e usando a identidade $\partial_\lambda e = e \mathring{\Gamma}^\mu_{\mu\lambda}$, podemos escrever

$$e \mathring{R} = 2\partial_\lambda (e T^\lambda) - e \left(\frac{1}{4} T^{\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\lambda\mu\nu} T_{\mu\lambda\nu} - T_\lambda T^\lambda \right), \quad (4.4)$$

onde $e = \det(e^a_\mu) = \pm\sqrt{-g}$. Se definirmos o tensor

$$\Sigma^{\lambda\mu\nu} \equiv \frac{1}{4} (T^{\lambda\mu\nu} + 2T^{[\mu|\lambda|\nu]}) + g^{\lambda[\nu} T^{\mu]}, \quad (4.5)$$

nós podemos reescrever a eq. (4.4) como

$$e \mathring{R} = 2\partial_\lambda (e T^\lambda) - e T, \quad (4.6)$$

sendo $T = \Sigma^{\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu} = \Sigma^{abc} T_{abc}$ o escalar da torção. O tensor $\Sigma^{a\mu\nu}$ é chamado de super-potencial [7]; podemos reparar que ele é antissimétrico nos dois últimos índices.

Agora, com o auxílio de $\Sigma^{\lambda\mu\nu}$ e da eq. (2.71), pode-se notar que

$$K^{\alpha\nu\mu} = -2\Sigma^{\nu\mu\alpha} + g^{\nu\alpha}T^\mu - g^{\mu\nu}T^\alpha. \quad (4.7)$$

Logo, como $R_{\mu\nu} = 0$ na eq. (2.84), se isolarmos $\mathring{R}_{\mu\nu}$ e usarmos a expressão acima do tensor de contorção, pode-se obter a identidade [16]¹

$$\mathring{R}^{\mu\nu} = 2e_b{}^\nu \left(\partial_\alpha \Sigma^{b\mu\alpha} + \mathring{\Gamma}^\lambda_{\lambda\alpha} \Sigma^{b\mu\alpha} \right) - 2\Sigma^{ab\mu} T_{ab}{}^\nu + g^{\mu\nu} \mathring{\nabla}_\alpha T^\alpha + 2\omega^c_{\alpha b} e_c{}^\nu \Sigma^{b\mu\alpha}, \quad (4.8)$$

onde foi usada a identidade

$$\partial_\alpha e_b{}^\nu + \Gamma^\nu_{\alpha\lambda} e_b{}^\lambda - \omega^c_{\alpha b} e_c{}^\nu = 0, \quad (4.9)$$

que é decorrente da eq. (4.1).² Multiplicando a eq. (4.8) por e e usando novamente a identidade $\partial_\lambda e = e \mathring{\Gamma}^\mu_{\mu\lambda}$, nós encontramos

$$e \mathring{R}^{\mu\nu} = 2e_b{}^\nu \partial_\alpha \left(e \Sigma^{b\mu\alpha} \right) - 2e \Sigma^{ab\mu} T_{ab}{}^\nu + g^{\mu\nu} \partial_\alpha (e T^\alpha) + 2e \omega^c_{\alpha b} e_c{}^\nu \Sigma^{b\mu\alpha}. \quad (4.11)$$

Substituindo $\mathring{R}$ e $\mathring{R}^{\mu\nu}$, dados respectivamente pelas eqs. (4.6) e (4.11), na eq. (3.31), nós encontramos que o tensor de Einstein pode ser dado por

$$e \mathring{G}^{\mu\nu} = 2e_b{}^\nu \partial_\lambda \left(e \Sigma^{b\mu\lambda} \right) - \frac{e}{2\kappa} \epsilon^{\mu\nu}, \quad (4.12)$$

onde temos

$$\epsilon^{\mu\nu} = t^{\mu\nu} - 4\kappa e_c{}^\nu \omega^c_{\lambda b} \Sigma^{b\mu\lambda}, \quad (4.13)$$

sendo

$$t^{\mu\nu} = \kappa (4\Sigma^{ab\mu} T_{ab}{}^\nu - T g^{\mu\nu}). \quad (4.14)$$

A constante κ é igual a $1/(16\pi)$ em unidades naturais.

Os dois termos do lado direito da eq. (4.12), separadamente, se transformam como tensores sob uma transformação de coordenadas, mas não sob uma transformação local de Lorentz. No entanto, a soma deles se transformam como tensor nas duas situações.

¹ Caso o leitor tenha interesse, a demonstração dessa identidade está feita no apêndice A da referência citada.

² Desta última expressão, podemos observar que as componentes da conexão de Weitzenböck numa base coordenada podem ser dadas por

$$\Gamma^\nu_{\alpha\lambda} = e_c{}^\nu e^b{}_\lambda \omega^c_{\alpha b} + e_b{}^\lambda \partial_\alpha e^b{}_\nu. \quad (4.10)$$

Essa conexão $\omega^a_{\mu b}$, as vezes chamada de conexão de spin, é utilizada para estabelecer uma densidade lagrangiana que seja invariante sob transformações locais de Lorentz [28]. O TEGR pode ser dado a partir de duas abordagens: a primeira, chamada de formalismo de tetrada puro, em que $\omega^a_{\mu b} = 0$; e a segunda, em que é dado em termos de campos de tetrada e dessa conexão independente. Nesta tese, nós trabalhamos com o TEGR na abordagem do formalismo de tetrada puro, que corresponde a usar apenas o referencial teleparalelo.

4.2.1 As equações de campo a partir do princípio variacional

A densidade lagrangiana do TEGR é obtida a partir da eq. (4.6) desprezando o termo de superfície $2\partial_\mu(eT^\mu)$. Ou seja, nós saímos da densidade lagrangiana de Einstein-Hilbert $\mathcal{L}_{EH} = \kappa e \mathring{R}$ para a densidade lagrangiana³ $\mathcal{L}_{TEGR} = -e\kappa T$. Assim, definindo a densidade lagrangiana total por

$$\mathcal{L}_{Total} \equiv \mathcal{L}_{TEGR} - \mathcal{L}_M \quad (4.15)$$

e variando a ação com respeito ao campo de tetrada e_a^μ , obtêm-se [29]

$$\mathring{G}^{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa} T^{\mu\nu}, \quad (4.16)$$

onde $\mathring{G}^{\mu\nu}$ pode ser escrito na forma dada pela eq. (4.12) e

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{e} e_a^\mu \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e^{a\nu}} = \frac{2}{e} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.17)$$

é o tensor usual de energia-momento da matéria. Note que a constante $\varkappa$, usada na eq. (3.36) e nas demais equações daquele capítulo, é dada por $\varkappa = 1/(2\kappa)$.

4.3 O TEGR no formalismo de tetrada puro

No formalismo de tetrada puro trabalhamos apenas com o referencial teleparalelo. Deste modo, os coeficientes da conexão de Weitzenböck expandidos na base de tetrada são nulos, isto é, $\omega^c_{\lambda b} = 0$, portanto, $\epsilon^{\mu\nu} = t^{\mu\nu}$. Logo, usando $\mathring{G}^{\mu\nu}$, dado pela eq. (4.12), na eq. (4.16), nós obtemos que as equações de campo nesse formalismo podem ser escritas como

$$\partial_\nu(e\Sigma^{a\mu\nu}) = \frac{e}{4\kappa}(t^{\mu a} + T^{\mu a}), \quad (4.18)$$

onde fizemos uma contração com e^a_λ , lembre-se que $e^a_\lambda t^{\mu\lambda} = t^{\mu a}$. O tensor $t^{\mu a}$, dado pela eq. (4.14), é interpretado como o tensor de energia-momento gravitacional. A forma com a qual a eq. (4.18) está escrita pode ser motivada através do formalismo hamiltoniano, pois, como veremos mais adiante, o momento canônico conjugado à variável $e_{a\mu}$ está relacionado com o superpotencial escrito na forma $\Sigma^{a0\nu}$. Portanto, a identificação de $t^{\mu a}$ com a energia do campo gravitacional flui de forma natural. Observe que também poderíamos ter considerado a teoria com a constante cosmológica, nesse caso as equações de campo podem ser escritas como

$$\partial_\nu(e\Sigma^{a\mu\nu}) = \frac{e}{4\kappa}(t^{\mu a} + T^{\mu a} + 2\kappa\Lambda e^{a\mu}). \quad (4.19)$$

³ É importante destacar que a ausência do termo de superfície faz com que $\mathcal{L}_{TEGR}$ não seja invariante por transformações locais de Lorentz.

Dado que o superpotencial $\Sigma^{a\mu\nu}$ é antissimétrico nos dois últimos índices, se aplicarmos a derivada parcial ∂_μ em ambos os lados da igualdade da eq. (4.18), obtemos a lei de conservação energia-momento

$$\partial_\mu [e(t^{\mu a} + T^{\mu a})] = 0. \quad (4.20)$$

Note que, ao contrário da eq. (3.141), a eq. (4.20) não é uma aproximação; ela é exata, e válida para qualquer espaço-tempo. Se integrarmos essa equação em uma região espacial tridimensional V que não contenha singularidades, obteremos, após algumas manipulações (incluindo a aplicação do teorema de Stokes), a seguinte equação de continuidade:

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x e (t^{0a} + T^{0a}) = - \oint_S dS_i e (t^{ia} + T^{ia}), \quad (4.21)$$

sendo S a superfície de contorno do volume V . A quantidade do lado esquerdo desta última equação,

$$P^a \equiv \int_V d^3x e (t^{0a} + T^{0a}), \quad (4.22)$$

é interpretada como o 4-vetor energia-momento total⁴ do espaço-tempo [6], onde

$$P_g^a = \int_V d^3x e t^{0a} \quad (4.23)$$

é o 4-vetor energia-momento do campo gravitacional e

$$P_M^a = \int_V d^3x e T^{0a} \quad (4.24)$$

é o 4-vetor energia-momento dos campos de matéria. Podemos notar, integrando a eq. (4.18) na mesma região V , que o 4-vetor energia-momento total P^a também pode ser dado em termos do superpotencial:

$$P^a = 4\kappa \oint_S dS_j e \Sigma^{a0j}, \quad (4.25)$$

onde fizemos $\mu = 0$ e utilizamos o fato de que $\Sigma^{a00} = 0$, haja vista que $\Sigma^{a\mu\nu} = -\Sigma^{a\nu\mu}$. Novamente, S é a superfície bidimensional que contorna o volume V .

Note que, para poder usar o teorema de Stokes, é preciso excluir singularidades. Isso traz o seguinte questionamento, como ficam os espaços-tempos que possuem singularidades? Em princípio, não somos capazes de fornecer uma resposta definitiva para o caso geral. Porém, mostramos na Ref. [30] que a singularidade do Buraco Negro não contribui para a energia total, como mostraremos no capítulo 5.

Podemos usar o seguinte argumento heurístico para defender a tese de que as singularidades não contribuem para a energia total do espaço-tempo. Ao contrário do que

⁴ Aqui, a palavra total se refere a soma de todas as formas de energia e momento, não necessariamente a energia e o momento contidos em todo o espaço-tempo.

acontece na eletrodinâmica clássica, onde a singularidade do campo elétrico de uma carga puntiforme de fato pertence a variedade de Minkowski, na relatividade geral, a singularidade está fora do espaço-tempo; logo, integrar em todo o espaço-tempo não implica incluir a singularidade. Assim, é natural acreditar que nenhuma energia venha da singularidade. Uma vez que tomamos o limite que a fronteira interna que remove a singularidade vai a zero, acreditamos que a contribuição advinda da singularidade se anulará. Essa ideia ficará mais clara quando tratarmos do caso do buraco negro, tanto nas coordenadas de Kruskal quanto nas de Novikov.

4.3.1 Formulação hamiltoniana

É possível perceber que a eq. (4.18), poderia ser expressa de outras formas e, consequentemente, também poderíamos escolher outras definições de superpotencial, de 4-vetores energias-momentos e do tensor energia-momento gravitacional. Por exemplo, usando a derivada do lado esquerdo da equação, se fizéssemos $\Sigma^{a\mu\nu} = e^a{}_\lambda \Sigma^{\lambda\mu\nu}$, aplicando a regrado do produto, nós poderíamos reescrever essa equação como sendo $\partial_\nu(e\Sigma^{\lambda\mu\nu}) = (e/(4\kappa))(\tilde{t}^{\mu\lambda} + T^{\mu\lambda})$, onde agora teríamos que o tensor densidade de energia-momento gravitacional seria $\tilde{t}^{\mu\lambda} = t^{\mu\lambda} - 4\kappa \Sigma^{\alpha\mu\nu} e_a{}^\lambda \partial_\nu e_a{}^\alpha$, que obviamente é diferente de $t^{\mu\lambda}$, note também que $t^{\mu\lambda} = e_a{}^\lambda t^{\mu a} \neq \tilde{t}^{\mu\lambda}$. Um exemplo histórico dessa possibilidade é a forma com a qual Møller [3] escreveu as equações do teleparalelismo: ele escreveu o lado esquerdo da eq. (4.18) na forma $\partial_\nu(e\Sigma_\mu{}^{\lambda\nu})$. Contudo, a forma da eq. (4.18), e dessa maneira a definição de $t^{\mu\nu}$, dada pela eq. (4.14), parecem ser, realmente, a forma mais apropriada. Isso é sustentado principalmente pela formulação hamiltoniana do TEGR desenvolvida nas Refs. [7, 9–11], além dos resultados obtidos nesta tese e em trabalhos como [6, 31–33].

Na formulação hamiltoniana, com $\mathcal{L}_M = 0$, verifica-se que o momento canonicamente conjugado à variável dinâmica $e_{a\mu}$ é dado por [6]

$$\Pi^{a\mu} = \frac{\delta \mathcal{L}_{Total}}{\delta \dot{e}_{a\mu}} = -4\kappa e \Sigma^{a0\mu}, \quad (4.26)$$

onde o ponto indica uma derivada em relação a coordenada temporal, observe também que $\Pi^{a0} = 0$ (já que $\Sigma^{a\mu\nu}$ é antissimétrico nos dois últimos índices).

Analisando-se a estrutura do formalismo hamiltoniano do TEGR e os vínculos associados à teoria, obtém-se que o 4-vetor energia-momento do espaço-tempo em um certo volume V pode ser consistentemente definido por [6]

$$P^a = - \int_V d^3x \partial_i \Pi^{ai} = - \oint_S dS_i \Pi^{ai}, \quad (4.27)$$

que corresponde exatamente a eq. (4.25); novamente, admitimos que o integrando da integral volumétrica não contém singularidades.

Outra quantidade que surge a partir das equações de vínculos da teoria, a qual é interpretada como o tensor densidade de momento angular gravitacional, é dada por [6]

$$M^{ab} = 2\Pi^{[ab]} = -4ke \left(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a} \right). \quad (4.28)$$

Tal quantidade permite definir o momento angular do campo gravitacional contido num volume espacial V como sendo

$$L^{ab} \equiv - \int_V d^3x M^{ab}. \quad (4.29)$$

É imediato notar que $M^{ab} = -M^{ba}$, e por consequência $L^{ab} = -L^{ba}$. As componentes $L^{(i)(j)}$ são interpretadas como o momento angular propriamente dito, enquanto que as componentes $L^{(0)b}$ podem ser interpretadas como o momento do centro de massa gravitacional [6].

4.3.2 Outra forma de expressar as quantidades do TEGR

Como já mencionado, no formalismo de tetrada puro $\omega^a_{bc} = 0$. Logo, da eq. (2.106) no frame teleparalelo, nós temos que $T^a_{bc} = \Omega^a_{bc}$. Por sua vez, a conexão de Levi-Civita pode ser dada na forma $\dot{\omega}^a_{bc} = (1/2)(\Omega_{bc}^a + \Omega_{cb}^a - \Omega^a_{bc})$. Assim, podemos escrever

$$\dot{\omega}^a_{bc} = \frac{1}{2} (T_{bc}^a + T_{cb}^a - T^a_{bc}). \quad (4.30)$$

Dessa maneira, uma forma alternativa de expressar o superpotencial e o tensor densidade de energia-momento gravitacional é dada, respectivamente, por [16]

$$\Sigma_{abc} = \frac{1}{2} \dot{\omega}_{cab} + \dot{\omega}^d_{d[c} \eta_{b]a} \quad (4.31)$$

e

$$t^b_a = 2\kappa \left(2\dot{\omega}^c_{[ad]} \dot{\omega}^b_c{}^d - 2\dot{\omega}^b_{[ad]} \dot{\omega}^c_c{}^d - \dot{\omega}^c_{ca} \dot{\omega}^d_d{}^b + \delta^b_a \dot{\omega}^c_{[c|f} \dot{\omega}^d_{|d]}{}^f \right). \quad (4.32)$$

Perceba que, quando usamos o frame teleparalelo, a energia do campo gravitacional fica determinada univocamente pelos coeficientes da conexão de Levi-Civita expandidos nesse frame.

4.4 Frames como referenciais

Como vimos no capítulo 2, e discutimos no final do capítulo 3, um frame consiste sempre de três vetores tipo-espaco, a tríade $e_{(i)}$, e um tipo-tempo, o vetor $e_{(0)}$. Uma vez que um frame sempre vai possuir um vetor tipo-tempo, então, nós sempre podemos associar a esse frame um conjunto de observadores que possuem uma 4-velocidade dada pelo vetor $e_{(0)}$. Desse modo, um frame sempre pode ser visto como um referencial local adaptado a esse conjunto de observadores, o que dá a ideia de frame de referência.

Dado um sistema de coordenadas, a linha de universo de um desses observadores pode ser expressa por $x^\mu(\tau)$, onde τ corresponde ao tempo próprio do observador. Logo, a 4-velocidade desse observador ao longo de sua linha de universo pode ser escrita como $u^\mu(\tau) = dx^\mu/d\tau$. Assim, usando unidades naturais, nós identificamos $u^\mu(\tau) = e_{(0)}^\mu$. E, dessa forma, a 4-aceleração a^μ desse observador é dada por

$$a^\mu = \frac{De_{(0)}^\mu}{D\tau} = e_{(0)}^\nu \overset{\circ}{\nabla}_\nu e_{(0)}^\mu, \quad (4.33)$$

onde $D/D\tau$ indica a derivada absoluta ao longo da linha de universo do observador, definida com a conexão de Levi-Civita. Considerando que o observador com 4-velocidade $e_{(0)}$ transporta o frame e_a , seguindo o que é feito na literatura [12, 34, 35], nós podemos escrever as acelerações do frame e_a como sendo

$$\frac{De_a^\mu}{D\tau} = \phi_a^b e_b^\mu, \quad (4.34)$$

onde ϕ_{ab} é o tensor de aceleração antissimétrico; $\phi_{(0)(i)}$ é identificado como a aceleração $a_{(i)}$ de translação do frame ao longo da linha de universo do observador e $\phi_{(i)(j)}$ a frequência de rotação da tríade do frame em relação a um frame que não rotaciona, isto é, em relação a um frame que está sob o transporte de Fermi-Walker [36]. Desta ultima equação, notamos que ϕ_{ab} pode ser escrito como

$$\phi_a^b = e^b_\mu \frac{De_a^\mu}{D\tau} = e^b_\mu e_{(0)}^\nu \overset{\circ}{\nabla}_\nu e_a^\mu. \quad (4.35)$$

Como $\overset{\circ}{\nabla}_\nu e_a^\mu = \partial_\nu e_a^\mu + \overset{\circ}{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} e_a^\lambda$, usando a identidade $\partial_\nu e_a^\mu + \overset{\circ}{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} e_a^\lambda - \dot{\omega}^c_{\nu a} e_c^\mu = 0$ e que, da eq. (2.69), $\dot{\omega}^a_{\mu b} = -K^a_{\mu b}$ no formalismo de tetrada puro, pode-se obter que [6, 16]

$$\phi_{ab} = \frac{1}{2}(T_{(0)ab} + T_{a(0)b} - T_{b(0)a}). \quad (4.36)$$

Ou, utilizando a eq. (4.30), também podemos escrever

$$\phi_b^a = \dot{\omega}^a_{(0)b}. \quad (4.37)$$

Assim, uma vez que definimos o frame teleparalelo e calculamos a torção associada a ele, nós também temos toda a informação do seu estado de movimento. Se $\phi_{ab} = 0$ dizemos que o frame, e consequentemente o conjunto de observadores associados a ele, está em queda livre e não rotacionando.

4.5 O problema da escolha do frame teleparalelo

No formalismo de tetrada puro doTEGR, a priori, nós poderíamos escolher qualquer frame como frame teleparalelo, pois as equações de campo são invariantes por mudanças na tetrada. Todavia, uma escolha inadequada impossibilitará uma interpretação

adequada de quantidades como as das eqs. (4.23), (4.25), (4.29), (4.32) etc. Portanto, no cálculo da energia gravitacional, é preciso assegurar que o frame teleparalelo a ser usado seja capaz de fornecer resultados físicos confiáveis, permitindo assim que os objetos que dependem do referencial teleparalelo possam ser interpretados de maneira consistente. Assim sendo, dado um espaço-tempo a ser estudado, nosso principal objetivo é saber qual o melhor (ou melhores, caso haja mais de um) frame para analisar a energia do campo gravitacional.

4.5.1 Frames problemáticos

Em 1961, Møller percebeu que certos tipos de tetradas não podem ser usadas para analisar o problema da energia do campo gravitacional [3]. Embora o complexo de energia usado pelo Møller não seja o mesmo obtido por Maluf [6], que é o que estamos usando aqui, a conclusão de Møller também se aplica ao nosso caso. Já se sabe, por exemplo, que tetradas cuja tríade possui certos tipos de rotações fornecerão previsões inconsistentes para a energia do campo gravitacional [3, 37]. A explicação dada na Ref. [16] para esse problema é a seguinte. Embora todo campo de tetrada esteja adaptado a um sistema físico, nem todas as propriedades do campo de tetrada estão necessariamente vinculadas ao estado de movimento do sistema. Por exemplo, a tetrada pode conter rotações que não estão associadas às rotações de um sistema físico e, como consequência, essas rotações introduzem efeitos artificiais nos objetos que são usados para calcular a energia do campo gravitacional. Chamaremos esse tipo de rotação de rotação espúria. Abaixo, daremos um exemplo para que o leitor possa entender melhor o que queremos dizer com “rotações artificiais (espúrias)”.

Se tomarmos

$$\begin{aligned} e_a &= (\partial_t, \partial_r, \frac{1}{r}\partial_\theta, \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi), \\ \vartheta^a &= (dt, dr, r d\theta, r \sin\theta d\phi), \end{aligned} \quad (4.38)$$

como sendo o frame teleparalelo para a métrica de Minkowski, descobrimos que a torção de Weitzenböck têm componentes não nulas, dadas por [16]: $T^{(2)}_{(1)(2)} = T^{(3)}_{(1)(3)} = 1/r$, $T^{(3)}_{(2)(3)} = \cos\theta/(r\sin\theta)$, o que leva à $\Sigma^{(0)01} = -1/r$ e a uma energia $E = -r$ (energia dentro de uma esfera de raio r). Uma vez que o espaço-tempo de Minkowski não têm campos de matéria nem campo gravitacional⁵, este resultado mostra que o frame da eq. (4.38) não é uma boa escolha de frame teleparalelo para analisar o problema da energia gravitacional. Qual seria, então, o problema com o frame da eq. (4.38)? Para um t constante, os vetores que compõem a tríade ($e_{(1)}$, $e_{(2)}$ e $e_{(3)}$) mudam suas orientações para pontos espaciais diferentes, e essa rotação não está vinculada à nenhuma mudança

⁵ Nesta tese, usamos a visão moderna, devido a Synge, de que o campo gravitacional corresponde à curvatura de Levi-Civita [38].

de estado de movimento, pois as coordenadas esféricas em questão estão adaptadas a um conjunto de observadores inerciais, não há nada de fato rotacionando. Portanto, essa rotação é artificial, ela não vem da mudança no vetor velocidade de nenhuma partícula do sistema; não é, por exemplo, a mudança no momento angular de um giroscópio devido à ação de um torque.

Outro tipo de frame que parece não ser um bom candidato para detectar o campo gravitacional, pelo menos localmente, é o chamado “frame de referência próprio”, o qual consiste em um frame adaptado as coordenadas próprias de um dado observador. Foi demonstrado na Ref. [16] que, quando usamos o frame de referência próprio de um observador particular (seja ele acelerado ou não) como frame teleparalelo, o tensor densidade de energia-momento gravitacional, $t^{\lambda\mu}$, sempre zera ao longo da linha de universo desse dado observador. Então, uma vez que podemos fazer $t^{\lambda\mu}$ zerar ao longo de qualquer curva que nós queiramos, este tipo de frame não permitirá a detecção da energia gravitacional localmente. Embora este resultado pareça uma afirmação do princípio da equivalência, ele não é, pois a nulidade de $t^{\lambda\mu}$ ao longo da curva do observador é independente do referencial estar ou não em queda livre. Na verdade, este resultado estaria mais de acordo com a visão de Synge [38], que defendeu de forma eloquente que gravitação não é inércia, mas sim curvatura riemanniana (Levi-Civita). Portanto, se a energia do campo gravitacional não for local, como se acredita, ela não poderá ser nula apenas ao longo da linha de universo de observadores em queda livre; ela deverá zerar para qualquer linha de universo. Nesse sentido, o referencial próprio tem significado físico e talvez possa ser usado para analisar o problema da energia gravitacional, mas não para estudar seu valor local (ou quase local). Foi argumentado na Ref. [16] que a razão para o desaparecimento da energia gravitacional nesse tipo de referencial estaria na “rigidez” do sistema físico ao qual as coordenadas próprias estão adaptadas; nesse tipo de sistemas há interações não gravitacionais que se opõe ao desvio geodésico, e essa seria a razão do porquê os efeitos da gravidade seriam cancelados nesse tipo de referencial. Por outro lado, referenciais adaptados à partículas em queda livre não apresentariam esse problema, e a energia não será nula. (Para maiores detalhes sobre essa interpretação, veja o tópico 6 da Ref. [16].)

Mesmo quando um frame tem uma triáde que não sofre rotações espúrias, e também não é um frame de referência próprio, ele ainda pode levar a resultados divergentes da energia e do momento do espaço-tempo, inclusive para espaços-tempos assintoticamente planos. Isso pode ocorrer, por exemplo, para frames que não têm condições de contorno assintoticamente planas adequadas; ou seja, frames em que quando zeramos os parâmetros físicos, como massa e carga elétrica, não obtemos $T^a_{\mu\nu} = 0$ [39]. À vista disso, com o intuito de contornar esse problema, alguns procedimentos de regularização da energia-momento foram propostos [39, 40]. Por exemplo, na Ref. [39], Maluf *et al.* definiram a energia-momento P^a_R regularizada de um espaço-tempo assintoticamente plano

como sendo

$$P_R^a = - \int_V d^3x \partial_k [\Pi^{ak}(e) - \Pi^{ak}(E)], \quad (4.39)$$

onde $\Pi^{ak}(e) = -4\kappa e \Sigma^{a0k}(e)$ indica que $\Sigma^{a0k}(e)$ foi obtido pela torção $T_{\mu\nu}^a(e) = \partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a$, sendo e_a o frame teleparalelo, e $\Pi^{ak}(E) = -4\kappa e \Sigma^{a0k}(E)$ indica que $\Sigma^{a0k}(E)$ foi calculado a partir de $T_{\mu\nu}^a(E) = \partial_\mu E_\nu^a - \partial_\nu E_\mu^a$, em que E_a é o frame obtido a partir de e_a quando se zera os parâmetros físicos desse frame. No entanto, em geral, os procedimentos de regularização tem como único objetivo encontrar resultados com valores finitos para energia e o momento, e isso é feito de uma forma *ad hoc*. Assim, fica menos confiável, por exemplo, analisar o tensor densidade de energia-momento gravitacional obtido de um frame teleparalelo que precisa que sua energia-momento seja regularizada. É muito mais confiável analisar $t^{a\mu}$ de um frame que leve a resultados consistentes sem nenhum procedimento de regularização.

4.5.2 O frame ideal

Em princípio, o frame ideal para analisar o problema da energia gravitacional, a ser tomado como frame teleparalelo, seria aquele que mede efeitos puramente gravitacionais, isto é, que não seja afetado por efeitos inerciais (acelerações) nem contabilize efeitos artificiais, como os das rotações espúrias. Uma análise minuciosa desse tipo de frame é feita na Ref. [16]. A definição de frame ideal nessa referencia é dada com base no conceito de *tetrada apropriada* introduzido na Ref. [41]. Uma tetrada, ou frame, é chamada de tetrada apropriada se na ausência de parâmetros físicos como massa, carga elétrica, etc. ela se torna holonômica (tenha torção nula). Ou seja, ela é definida no espaço-tempo curvo (Levi-Civita) com a condição de que quando anulamos a curvatura da conexão de Levi-Civita ela vire um referencial inercial global. Contudo, no espaço-tempo com curvatura, uma tetrada apropriada não é univocamente definida pela métrica. Como pontuado na Ref. [16], muitos tipos de frames acelerados por forças externas (não gravitacionais) podem se tornar referenciais inerciais globalmente, bastando, para isso, que a força externa vá a zero junto com os parâmetros físicos. Por exemplo, se em Schwarzschild deixarmos um referencial livre, ele cairá. Mas se aplicarmos uma força por unidade de massa dada por $a^r = M/r^2$, onde M é a massa do buraco negro, ele não cairá, pois a força externa está impedindo a queda [31]. O interessante desse caso é que no limite que M vai a zero (logo a curvatura de Levi-Civita também vai a zero), a força não gravitacional também vai a zero. Portanto, esse frame não estará acelerado em Minkowski e, dependendo de como a tríade do frame foi ajustada, ele será um referencial inercial global após o limite ser tomado. Desse exemplo simples, fica claro que a condição de “tetrada apropriada” feita na Ref. [41] não é suficiente para fixar um único frame.

O que pode ser feito para remover a ambiguidade citada acima é impor restrições

extras. Uma restrição que já foi adotada na literatura é a seguinte [10, 16]:

$$e_{(i)}^0, \quad (4.40)$$

$$e_{(i)j} = e_{(j)i} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4.41)$$

onde a primeira restrição acima é conhecida como “time gauge” [20]. Esse conjunto de restrições foi adotado por Maluf et al. na Ref. [10]. Nessa referência, é imposto que o sistema de coordenadas usado na eq. (4.40) seja do tipo cartesiano. Já na Ref. [16], foi imposto que a tetrada deveria ser do tipo tetrada apropriada e satisfazer a condição acima em algum sistema de coordenadas e, caso isso não definisse a tetrada univocamente, escolheríamos a mais cartesiana possível. A motivação para usar essas condições é que elas são características que estão presentes no espaço-tempo de Minkowski. Um referencial inercial no espaço-tempo de Minkowski pode ser univocamente caracterizado por essas condições, o qual não tem nenhum efeito de inércia ou espúrio. Desta forma, admite-se que, mesmo para uma espaço-tempo curvo, só existiria um sistema de coordenadas onde essas condições são satisfeitas e, conseqüentemente, definiria de forma unívoca um frame de referência [10]. Além disso, elas permitiriam ao frame ser o mais cartesiano possível, se zerássemos os parâmetros físicos nós obteríamos $e_{(0)} = \partial_t$, $e_{(1)} = \partial_x$, $e_{(2)} = \partial_y$ e $e_{(3)} = \partial_z$.

Vale ressaltar que as condições das eqs. (4.40) e (4.41) não estão dizendo que a energia do campo gravitacional depende do sistema de coordenadas. Ela dependerá só do referencial, o sistema de coordenadas está apenas permitindo escrever a tetrada nessa forma particular. Mas, uma vez que encontramos a tetrada própria, podemos ir pra qualquer sistema de coordenadas. Essas condições funcionam como um princípio, ou postulado, para se fixar uma tetrada apropriada.

Na Ref. [16] se afirma que, se for verdade que uma tetrada apropriada que satisfaz as condições das eqs. (4.40) e (4.41) é única, então, em princípio, esse frame será o mais próximo possível que poderíamos chegar de um frame de Lorentz global em um espaço-tempo curvo. E, também, o que poderíamos interpretá-lo como o único frame que carrega apenas efeitos gravitacionais e realmente separa a inércia da gravitação. À vista disso, na Ref. [16], uma tetrada apropriada que satisfaz as condições das eqs. (4.40) e (4.41) é chamada de *frame fundamental*. Embora não haja certeza se de fato as condições das eqs. (4.40) e (4.41) fornecem o frame fundamental para análise do problema da energia gravitacional, pois dúvidas acerca dessas condições serão levantadas na seção 7.4, vamos adotar essa nomenclatura aqui, pois os espaços-tempos tratados aqui não farão parte da controvérsia que será apresentada na seção 7.4.

A proposta de um frame ideal para ser usado como frame teleparalelo é dada a partir da ideia de frame fundamental. Na Ref. [16], esse frame ideal é definido por $\Lambda_a^b e_b$ (ou $\Lambda_a^b e_b$), onde e_b é o frame fundamental em um dado espaço-tempo e Λ_a^b é uma transformação que não introduz rotações artificiais e depende apenas da coordenada temporal

do sistema de coordenadas que possibilitou escrever o frame fundamental conforme as condições da eq. (4.40). Obviamente que, nestas definições, o frame fundamental também é um frame ideal.

É importante destacar que o frame ideal pode ser adaptado a um observador com aceleração qualquer. Essa definição de frame ideal só traz restrição sobre as congruências de curvas que devem ser construídas a partir desse observador, elas são construídas de tal forma que, para um dado valor fixo da coordenada temporal⁶, a 4-velocidade de um frame ideal qualquer em relação ao frame fundamental seja a mesma em diferentes pontos do espaço-tempo. (Note que, para t fixo, Λ^b_a é constante. Portanto, não só a 4-velocidade, mas como também qualquer rotação da tríade que possa existir será constante.)

Em resumo, o que a Ref. [16] propõe é: dado um espaço-tempo qualquer, a partir da métrica, obtemos um frame que acreditamos que esteja livre de efeitos inerciais e forneça previsões consistentes para a energia do campo gravitacional; chamamos esse frame de frame fundamental. Caso queiramos analisar a energia do campo gravitacional junto com efeitos inerciais, causados pela aceleração da linha de universo de um dado observador que não está em repouso no frame fundamental, então usamos a definição de frame ideal, pois ela permite fazer a passagem do frame fundamental para esse outro frame.

Nesta tese, avaliamos os resultados do uso de alguns frames teleparalelos, nos espaços-tempos de Schwarzschild e de FLRW. Também investigamos resultados de se tomar frames teleparalelos que satisfaçam a condição de gauge temporal. Vale salientar também, como pode ser percebido da eq. (4.25), que o valor da energia e do momento também dependem da superfície de simultaneidade tomada, discutiremos essa questão nos capítulos 5 e 7.

4.6 Maquinário Híbrido

Nesta seção, fazemos uma revisão do maquinário híbrido desenvolvido na Ref. [26] para poder facilitar o cálculo dos objetos definidos no TEGR apresentados anteriormente; como, por exemplo, o superpotencial, o tensor de aceleração antissimétrico, o tensor densidade de energia-momento gravitacional, etc. Ele nada mais é do que um método em que as componentes dos objetos, como os citados, são expandidas em termos de componentes de vetores unitários. Além de simplificar os cálculos destas quantidades, ele também propicia uma mudança imediata na natureza dos índices destes objetos; por exemplo, se conheço quem é Σ^{abc} , também conheço imediatamente $\Sigma^{a\mu\nu}$. Caso não estivéssemos fazendo uso do maquinário, nós precisaríamos usar e_b^μ para fazer o enfadonho cálculo $\Sigma^{a\mu\nu} = e_b^\mu e_c^\nu \Sigma^{abc}$. Está praticidade acontece, justamente, porque os objetos (na verdade, suas componentes)

⁶ A coordenada temporal do sistema de coordenadas que possibilitou a definição do frame fundamental a partir das condições das eqs. (4.40) e (4.41).

são escritos em termos das componentes dos vetores unitários, como será explicado no decorrer desta seção. Obviamente, esse método só será útil se houver a necessidade de calcular vários objetos que dependam da tetrada, em especial, quando é conveniente usar as direções de um sistema de coordenadas escritas em termos das coordenadas de outro sistema, daí o nome “maquinário híbrido”.

4.6.1 Misturando vetores unitários cartesianos e esféricos

Quando estamos trabalhando em coordenadas esféricas, mas queremos fixar os vetores da tríade espacial do frame, para que cada um sempre fique o mais próximo possível da direção dos vetores da base do sistema de coordenadas cartesiano, ∂_x , ∂_y e ∂_z , em que no limite da ausência de gravidade eles coincidam perfeitamente (pelos motivos discutidos na seção 4.5.2), as seguintes convenções ajudam a compactificar as expressões de forma significativa

$$\begin{aligned}\hat{t}^a &\equiv \delta_{(0)}^a, \quad \hat{x}^a \equiv \delta_{(1)}^a, \quad \hat{y}^a \equiv \delta_{(2)}^a, \quad \hat{z}^a \equiv \delta_{(3)}^a, \\ \hat{r}^a &\equiv \sin \theta (\cos \phi \hat{x}^a + \sin \phi \hat{y}^a) + \cos \theta \hat{z}^a, \\ \hat{\theta}^a &\equiv \partial_\theta \hat{r}^a = \cos \theta (\cos \phi \hat{x}^a + \sin \phi \hat{y}^a) - \sin \theta \hat{z}^a, \\ \hat{\phi}^a &\equiv \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi \hat{r}^a = -\sin \phi \hat{x}^a + \cos \phi \hat{y}^a.\end{aligned}\tag{4.42}$$

E, sem perda de generalidade, nós podemos definir a ação de baixar e subir os índices dessas quantidades usando a métrica de Minkowski: $\hat{t}_a \equiv \eta_{ab} \hat{t}^b = \delta_a^{(0)}$, $\hat{x}_a \equiv \eta_{ab} \hat{x}^b = -\delta_a^{(1)}$ e assim sucessivamente. Consequentemente, é fácil verificar algumas relações desses objetos, como que $\hat{t}_a = \hat{t}^a$, $\hat{r}_a = -\hat{r}^a$, etc; além de $\hat{t}^a \hat{t}_a = 1$, $\hat{r}^a \hat{r}_a = -1$, $\hat{r}^a \hat{\theta}_a = 0$ e assim por diante. Outras relações que são importantes de serem assinaladas, a partir desses objetos, são as relações:

$$\begin{aligned}\partial_\theta \hat{\theta}^a &= -\hat{r}^a, \quad \partial_\phi \hat{\theta}^a = \cos \theta \hat{\phi}^a, \\ \partial_\theta \hat{\phi}^a &= 0, \quad \partial_\phi \hat{\phi}^a = -\sin \theta \hat{r}^a - \cos \theta \hat{\theta}^a, \\ \partial_\mu \hat{t}^a &= 0.\end{aligned}\tag{4.43}$$

É possível notar que as quantidades definidas na eq. (4.42) podem ser percebidas como componentes vetoriais. Por exemplo, no espaço tempo de Minkowski, $\hat{t}^a$, $\hat{x}^a$, $\hat{y}^a$ e $\hat{z}^a$, podem ser vistas como as componentes dos vetores unitários do sistema de coordenadas cartesianas (mais a coordenada temporal), $\hat{t} = \partial_t$, $\hat{x} = \partial_x$, $\hat{y} = \partial_y$ e $\hat{z} = \partial_z$; para isso, basta observar que nós podemos escrever $\hat{t} = \hat{t}^a e_a$, $\hat{x} = \hat{x}^a e_a$, $\hat{y} = \hat{y}^a e_a$ e $\hat{z} = \hat{z}^a e_a$, onde usamos $e_{(0)} = \partial_t$, $e_{(1)} = \partial_x$, $e_{(2)} = \partial_y$ e $e_{(3)} = \partial_z$. E, como a notação sugere, $\hat{r}^a$, $\hat{\theta}^a$ e $\hat{\phi}^a$ podem ser interpretados como as componentes dos três vetores unitários do sistema de coordenadas esféricas. No entanto, em espaço-tempos curvos, esses vetores unitários não irão necessariamente coincidir com os vetores correspondentes do espaço-tempo de Minkowski, por exemplo, $\hat{x}$ não será obrigatoriamente igual a ∂_x .

Como, para um dado espaço-tempo curvo $g_{\mu\nu}$, nós podemos adotar um determinado campo de tetradas como sendo o frame teleparalelo, tal que $g_{\mu\nu} = e_{a\mu}e^a_\nu$, então podemos utilizar as seguintes definições:

$$\begin{aligned}\hat{t}^\mu &\equiv e_a^\mu \hat{t}^a, \\ \hat{r}^\mu &\equiv e_a^\mu \hat{r}^a, \\ \hat{\theta}^\mu &\equiv e_a^\mu \hat{\theta}^a, \\ \hat{\phi}^\mu &\equiv e_a^\mu \hat{\phi}^a,\end{aligned}\tag{4.44}$$

onde, agora, esses novos objetos irão carregar as informações do espaço-tempo em questão. Essas definições também nos fornecem $\hat{t}_\mu \hat{t}^\mu = e_{a\mu} e_b^\mu \hat{t}^a \hat{t}^b = \eta_{ab} \hat{t}^a \hat{t}^b = \hat{t}_a \hat{t}^a = 1$ e $\hat{r}_\mu \hat{r}^\mu = \hat{\theta}_\mu \hat{\theta}^\mu = \hat{\phi}_\mu \hat{\phi}^\mu = -1$. Devemos notar que esses campos vetoriais dependerão do frame escolhido para satisfazer as relações definidas na eq. (4.44); pois, por definição, $\hat{t}^a$, $\hat{x}^a$, $\hat{r}^a$, etc. sempre serão dados pela eq. (4.42). Ou seja, as componentes destes campos vetoriais numa base de tetrada, independentemente da tetrada escolhida, sempre serão dadas pela eq. (4.42), por definição. Por exemplo, se e_a e e_a' são dois frames distintos, então $\hat{t} = \hat{t}^a e_a$ e $\hat{t}' = \hat{t}^a e_a'$ serão diferentes um do outro, mas suas componentes, expandidas tanto em $\{e_a\}$ quanto em $\{e_a'\}$, serão, respectivamente, as mesmas, $\hat{t}^a = \delta^a_{(0)}$. Nós não trabalharemos com valores diferentes para $\hat{t}^a$, $\hat{x}^a$, $\hat{r}^a$ etc., eles sempre serão dados pela eq. (4.42). Evidentemente, se nós quiséssemos realizar uma transformação de Lorentz de e_a para $\bar{e}_a$, onde $\bar{e}_a = \Lambda^b_a e_b$, e escrever as componentes de, por exemplo, $\hat{t}$ nessa nova tetrada, nós deveremos ter $\bar{t}^a = \Lambda^a_b \hat{t}^b$ como a nova componente, pois a mesma assegura que $\hat{t} = \hat{t}^a e_a = \bar{t}^a \bar{e}_a$. Contudo, não vamos utilizar transformações do tipo $\bar{t}^a = \Lambda^a_b \hat{t}^b$ aqui: nós vamos escrever esses vetores unitários ou numa base coordenada, ∂_μ , ou em termos do campo de tetrada que é utilizado na eq. (4.44).

Para ajudar a visualizar melhor as definições feitas na eq. (4.44), nós podemos substituir $\hat{r}^a$, dado pela eq. (4.42), na segunda definição da eq. (4.44). Assim, já que $\hat{x}^a$, $\hat{y}^a$ e $\hat{z}^a$ são deltas de Kronecker, nós imediatamente obtemos que $\hat{r}^\mu = \sin \theta \cos \phi e_{(1)}^\mu + \sin \theta \sin \phi e_{(2)}^\mu + \cos \theta e_{(3)}^\mu$, que são as componentes coordenadas do campo vetorial unitário $\hat{r}$; portanto, para obter $\hat{r}$, basta contrair essas componentes coordenadas, $\hat{r}^\mu$, com a base coordenada, ∂_μ . Fazendo isso e usando que $e_a = e_a^\mu \partial_\mu$, nós também podemos notar que $\hat{r} = \sin \theta \cos \phi e_{(1)} + \sin \theta \sin \phi e_{(2)} + \cos \theta e_{(3)}$; ou seja, vemos que esse vetor unitário é, simplesmente, uma combinação linear da tríade espacial do campo de tetrada e_a . Em Minkowski, nós podemos assumir que $e_a = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$, o que nos leva a $\hat{r} = \partial_r$. E, seguindo a mesma linha de raciocínio, nós também encontramos $\hat{\theta} = (1/r)\partial_\theta$ e $\hat{\phi} = [1/(r \sin \theta)]\partial_\phi$ em Minkowski. É interessante notar que o “vetor temporal” $\hat{t}$, a partir das definições usadas (eqs. (4.42) e (4.44)), não é nada mais do que o campo vetorial tipo-tempo $e_{(0)}$. Então, em Minkowski, se nós assumirmos que $e_{(0)} = \partial_t$, nós teremos que $\hat{t} = \partial_t$.

Um comentário que deve ser feito aqui a respeito da interpretação de $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{r}$ etc., como os vetores unitários dos sistemas de coordenadas cartesianas/esféricas, é que esses vetores irão coincidir com ∂_x , ∂_y , ∂_r etc., se e_a recair no frame de Lorentz (∂_t , ∂_x , ∂_y , ∂_z) quando a curvatura da conexão de Levi Civita desaparecer. No entanto, em relação ao formalismo do maquinário híbrido, não há nenhum problema em usar frames que não satisfaçam essa propriedade. Mesmo assim, é conveniente usar esses frames que se tornam o frame de Lorentz, na ausência de curvatura, não apenas para manter uma relação próxima de $\hat{t}$, $\hat{x}$ etc. com ∂_t , ∂_x etc., mas, também, porque é comum o TEGR não fornecer previsões consistentes para a energia gravitacional em um frame que não satisfaça essas condições [16].

Observando que esses campos vetoriais unitários, $\hat{t}$, $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$, formam uma base no espaço-tempo, nós podemos expandir o campo de tetrada em termos dos mesmos. Fazendo isso e usando as definições da eq. (4.44), obtemos

$$e_a{}^\mu = \hat{t}_a \hat{t}^\mu - \hat{r}_a \hat{r}^\mu - \hat{\theta}_a \hat{\theta}^\mu - \hat{\phi}_a \hat{\phi}^\mu \quad (4.45)$$

e

$$e^a{}_\mu = \hat{t}^a \hat{t}_\mu - \hat{r}^a \hat{r}_\mu - \hat{\theta}^a \hat{\theta}_\mu - \hat{\phi}^a \hat{\phi}_\mu. \quad (4.46)$$

Assim, usando as eqs. (4.45) e (4.46) em $g_{\mu\nu} = e_{a\mu} e^a{}_\nu$ e $\eta_{ab} = e_a{}^\mu e_{b\mu}$, vemos que

$$g_{\mu\nu} = \hat{t}_\mu \hat{t}_\nu - \hat{r}_\mu \hat{r}_\nu - \hat{\theta}_\mu \hat{\theta}_\nu - \hat{\phi}_\mu \hat{\phi}_\nu \quad (4.47)$$

e

$$\eta_{ab} = \hat{t}_a \hat{t}_b - \hat{r}_a \hat{r}_b - \hat{\theta}_a \hat{\theta}_b - \hat{\phi}_a \hat{\phi}_b. \quad (4.48)$$

Por conveniência, usaremos a torção de Weitzenböck expandida na forma

$$T^a{}_{\mu\nu} = T^{\hat{t}}{}_{\mu\nu} \hat{t}^a - T^{\hat{r}}{}_{\mu\nu} \hat{r}^a - T^{\hat{\theta}}{}_{\mu\nu} \hat{\theta}^a - T^{\hat{\phi}}{}_{\mu\nu} \hat{\phi}^a, \quad (4.49)$$

onde $T^{\hat{t}}{}_{\mu\nu} \equiv T^a{}_{\mu\nu} \hat{t}_a$, $T^{\hat{r}}{}_{\mu\nu} \equiv T^a{}_{\mu\nu} \hat{r}_a$, $T^{\hat{\theta}}{}_{\mu\nu} \equiv T^a{}_{\mu\nu} \hat{\theta}_a$ e $T^{\hat{\phi}}{}_{\mu\nu} \equiv T^a{}_{\mu\nu} \hat{\phi}_a$.

Na verdade, apesar de nós termos usado direções que estão “adaptadas” às coordenadas cartesianas e esféricas para construir esses campos vetoriais unitários, $\hat{t}$, $\hat{x}$, $\hat{\theta}$ etc., nós, até agora, ainda não fixamos nenhum sistema de coordenadas. Vale ressaltar, então, que nós podemos escrever $\{\hat{t}^\mu, \hat{r}^\mu, \hat{\theta}^\mu, \hat{\phi}^\mu\}$ em qualquer sistema de coordenadas que nós queiramos, realizando ou não uma mudança na base coordenada. Por exemplo, nós podemos escrever $\hat{t} = \hat{t}^t(u, v, w, q) \partial_t + \hat{t}^r(u, v, w, q) \partial_r + \hat{t}^\theta(u, v, w, q) \partial_\theta + \hat{t}^\phi(u, v, w, q) \partial_\phi$, onde (u, v, w, q) é algum sistema de coordenada; ou também escrever $\hat{t} = \hat{t}^u(u, v, w, q) \partial_u + \hat{t}^v(u, v, w, q) \partial_v + \hat{t}^w(u, v, w, q) \partial_w + \hat{t}^q(u, v, w, q) \partial_q$ e assim por diante. Essa liberdade nos dá a oportunidade de realizar os cálculos da maneira mais conveniente possível. Caso escolhamos trabalhar apenas com coordenadas esféricas, então, ao substituir a eq. (4.46)

em $T^a_{\mu\nu} = \partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu$, observamos que as componentes da torção na eq. (4.49) podem ser dadas por:

$$\begin{aligned} T^{\hat{t}}_{\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu}\hat{t}_{\nu]}, \\ T^{\hat{r}}_{\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu}\hat{r}_{\nu]} - 2\delta_{[\mu}^2\hat{\theta}_{\nu]} - 2\sin\theta\delta_{[\mu}^3\hat{\phi}_{\nu]}, \\ T^{\hat{\theta}}_{\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu}\hat{\theta}_{\nu]} + 2\delta_{[\mu}^2\hat{r}_{\nu]} - 2\cos\theta\delta_{[\mu}^3\hat{\phi}_{\nu]}, \\ T^{\hat{\phi}}_{\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu}\hat{\phi}_{\nu]} + 2\cos\theta\delta_{[\mu}^2\hat{r}_{\nu]} + 2\sin\theta\delta_{[\mu}^3\hat{\theta}_{\nu]}; \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde os deltas da equação acima também podem ser escritos em termos das componentes coordenadas dos vetores unitários, mas sua forma explícita depende do frame escolhido e do sistema de coordenadas usado, como será melhor explicado mais a frente.

Nesse formalismo, como vimos das eqs. (4.47) e (4.48), em que escrevemos as componentes do tensor métrico, se torna fácil ir de uma base coordenada para uma base de tetrada e vice-versa. Assim, para simplificar os cálculos com o uso deste formalismo, basta que os objetos, com o quais estamos trabalhando, estejam escritos em termos das componentes dos vetores unitários. Se conseguirmos escrever as componentes da torção em termos apenas das componentes desses vetores unitários, será uma questão meramente algébrica escrever os outros objetos de interesse.

Como mencionado no parágrafo anterior, uma vez que nós conseguimos expandir as componentes da torção em termos apenas das componentes dos vetores unitários, é fácil ver que a maioria das outras componentes dos objetos do TEGR também as serão, já que as mesmas são definidas algebricamente em termos de e_a^μ , $g_{\mu\nu}$ e $T^a_{\mu\nu}$, ou de definições algébricas indiretas de e_a^μ , $g_{\mu\nu}$ e $T^a_{\mu\nu}$; por exemplo, $\hat{\omega}^a_{bc}$, dado pela eq. (4.30), Σ_{abc} , dado pela eq. (4.31), e t^b_a , dado pela eq. (4.32). Assim sendo, como os cálculos, a partir da obtenção das componentes da torção até a obtenção das componentes do tensor densidade de energia-momento gravitacional, são essencialmente algébricos, nota-se que o uso das relações existentes entre as componentes dos vetores unitários, como, por exemplo, $\hat{t}^\mu\hat{r}_\mu = 0$, $\hat{\theta}^\mu\hat{\theta}_\mu = -1$ etc., facilitam muito os cálculos. Outra coisa, é que escrever as quantidades em termos das componentes dos vetores unitários, também nos permite uma troca imediata da natureza dos índices dessas quantidades, sem a necessidade de usarmos e_a^μ ou e^a_μ para fazer isso, o que também agiliza muito os cálculos. Por exemplo, se nós temos que $T^a_{\mu\nu} = (\hat{t}^a\hat{t}_{[\mu}\hat{r}_{\nu]})$, então, sabemos imediatamente que $T^a_{bc} = (\hat{t}^a\hat{t}_{[b}\hat{r}_{c]})$, $T^\lambda_{b\nu} = (\hat{t}^\lambda\hat{t}_{[b}\hat{r}_{\nu]})$ etc. Agora, é claro que se alguém deseja calcular apenas $T^a_{\mu\nu}$, o uso desse formalismo pode não ser conveniente. Contudo, se nós desejarmos calcular o superpotencial, o momento angular gravitacional, o tensor de aceleração antissimétrico, o tensor densidade de energia-momento gravitacional etc., ele com certeza será.

Caso o leitor esteja interessado em mais detalhes, incluindo a versão para a assinatura $(-+++)$, veja a Ref. [26].

4.7 Referenciais acelerados radialmente no espaço-tempo de Schwarzschild

Nesta seção, faremos uso do maquinário híbrido para obtermos um frame com aceleração radial arbitrária no espaço-tempo de Schwarzschild. Além de exemplificarmos a conveniência desse artifício descrito na seção anterior, a obtenção de tal frame será útil em algumas análises que serão feitas no próximo capítulo, onde comentaremos a relação entre referenciais adaptados as coordenadas de Kruskal-Szekeres e de Novikov com o referencial adaptado as coordenadas de Schwarzschild.

A partir do elemento de linha de Schwarzschild, eq. (3.54), usando a relação vista na eq. (2.94), podemos identificar imediatamente o seguinte co-frame:

$$\begin{aligned}\vartheta^{(0)} &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dt, \\ \vartheta^{(1)} &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} dr, \\ \vartheta^{(2)} &= r d\theta, \\ \vartheta^{(3)} &= r \sin \theta d\phi.\end{aligned}\tag{4.51}$$

Recorrendo as definições feitas na eq. (4.42), podemos reescrever esse co-frame na forma compacta

$$\vartheta^a = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{t}^a dt + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \hat{x}^a dr + r \hat{y}^a d\theta + r \sin \theta \hat{z}^a d\phi.\tag{4.52}$$

(É importante destacar que os elementos $\hat{x}^a$, $\hat{y}^a$ e $\hat{z}^a$ na equação acima não representam direções cartesianas. De qualquer forma, isso não é um problema. Eles estão sendo usados apenas por conveniência, em lugar dos deltas.) Como $\langle \vartheta^a, e_b \rangle = \delta_b^a$, da eq. (4.52) e das relações de ortonormalidade entre $\hat{t}^a$, $\hat{x}^a$, $\hat{y}^a$ e $\hat{z}^a$, teremos

$$e_a = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \hat{t}_a \partial_t - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{x}_a \partial_r - \frac{1}{r} \hat{y}_a \partial_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \hat{z}_a \partial_\phi.\tag{4.53}$$

Como o vetor $e_{(1)}$ aponta na direção radial, que na eq. (4.53) é indicada por $\hat{x}^a = \delta_{(1)}^a$, um campo de tetradas $\check{e}_a$ radialmente acelerado no espaço-tempo de Schwarzschild pode ser obtido aplicando a transformação de Lorentz local [31]

$$\Lambda_a^b = (f\hat{t}_a - g\hat{x}_a)\hat{t}^b + (g\hat{t}_a - f\hat{x}_a)\hat{x}^b - \hat{y}_a\hat{y}^b - \hat{z}_a\hat{z}^b,\tag{4.54}$$

onde $f = f(t, r)$ e $g = g(t, r)$ são funções que satisfazem a relação $f^2 - g^2 = 1$, sendo f o fator de Lorentz e $g = \beta f$, onde β é a velocidade em relação aos observadores estáticos nas coordenadas de Schwarzschild. Assim, aplicando essa transformação no frame da eq. (4.53), $\check{e}_a = \Lambda_a^b e_b$, encontramos

$$\check{e}_a = (f\hat{t}_a - g\hat{x}_a)W^{-1/2}\partial_t + (g\hat{t}_a - f\hat{x}_a)W^{1/2}\partial_r - \frac{1}{r}\hat{y}_a\partial_\theta - \frac{1}{r \sin \theta}\hat{z}_a\partial_\phi,\tag{4.55}$$

onde fizemos $W = 1 - (2m)/r$. Uma vez que não especificamos as funções f e g , o referencial acima tem uma aceleração radial arbitrária. No entanto, podemos perceber que a tríade do mesmo muda de direção para diferentes pontos do espaço-tempo e essas mudanças nada tem a ver com o estado de movimento desse referencial, são as chamadas rotações espúrias discutidas na seção 4.5.1. Recorrendo novamente as definições da eq. (4.42), removemos essas rotações espúrias aplicando em $\check{e}_a$ a transformação

$$\hat{\Lambda}_a{}^b = \hat{t}_a \hat{t}^b - \hat{r}_a \hat{x}^b - \hat{\theta}_a \hat{y}^b - \hat{\phi}_a \hat{z}^b. \quad (4.56)$$

Dessa forma, o frame radialmente acelerado e livre de rotações artificiais, $\hat{e}_a = \hat{\Lambda}_a{}^b \check{e}_b$, é dado por

$$\hat{e}_a = \left(W^{-1/2} f \partial_t + W^{1/2} g \partial_r \right) \hat{t}_a - \left(W^{-1/2} g \partial_t + W^{1/2} f \partial_r \right) \hat{r}_a - \frac{1}{r} \hat{\theta}_a \partial_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\phi}_a \partial_\phi, \quad (4.57)$$

o qual corresponde ao frame da equação (18) da Ref. [31]. Podemos notar que, se tomarmos $m = 0$ e $f = 1$ (frame em repouso nas coordenadas de Schwarzschild), a tríade de $\hat{e}_a$ fica alinhada as direções cartesianas. Essa é uma das vantagens de se usar o maquinário, escrevemos o frame em coordenadas esféricas, mas com direções “quase cartesianas”, de forma compacta. Perceba que se não fosse isso, a eq. (4.57) teria uma cara muito mais complicada.

O referencial da eq. (4.57) está adaptado a observadores que estão acelerados radialmente e que não necessariamente são estáticos. Já o sistema de coordenadas está adaptado aos observadores que são necessariamente estáticos nas coordenadas de Schwarzschild (para maiores detalhes sobre a relação entre sistema de coordenadas e referenciais, veja a seção 3.8). A aceleração desses observadores pode ser escrita na forma [31]

$$a^0 = \frac{g}{\sqrt{W}} \partial_r \sqrt{(1 + g^2)W} + \frac{g}{W} \partial_t g, \quad (4.58)$$

$$a^1 = \frac{1}{2} \partial_r \left[(1 + g^2) W \right] + \sqrt{1 + g^2} \partial_t g. \quad (4.59)$$

Para o caso particular no qual a velocidade é nula, isto é $g = 0$, obtemos $a^1 = m/r^2$. Isso mostra que os observadores estáticos de Schwarzschild estão de fato sob a ação de alguma força não gravitacional que os mantém “parados”. Portanto, as coordenadas de Schwarzschild estão adaptadas a um sistema físico de partículas interagentes. No entanto, no limite no qual m vai a zero, essa interação desaparece, pois o referencial é construído de tal forma que a interação não gravitacional se ajusta aos efeitos da curvatura da conexão de Levi-Civita.

No próximo capítulo, estudaremos dois casos particulares: os observadores de Kruskal, que têm aceleração voltada para o buraco negro (ao contrário dos estáticos), portanto são empurrados por alguma força não gravitacional na direção da singularidade, e os observadores de Novikov, que têm aceleração nula, portanto formam um sistema físico de partículas não interagentes.

5 Energia de buracos negros/brancos de Schwarzschild

Daremos início, agora, a apresentação dos resultados de nossas pesquisas. Neste capítulo, começamos com a análise que fizemos da energia do buraco negro/branco de Schwarzschild. Essa análise e seus resultados foram publicados no artigo da Ref. [30].

É bem conhecido da literatura que a energia do buraco negro é Mc^2 , onde M é sua massa e c a velocidade da luz. Esse resultado pode ser obtido facilmente a partir do formalismo ADM [19], desde que nos limitemos a um sistema de coordenadas que forneça as componentes da métrica de Minkowski em coordenadas cartesianas infinitamente longe do buraco negro. Aqui, abordaremos dois casos nos quais o formalismo ADM não pode ser aplicado, a saber, a métrica nas coordenadas de Kruskal e nas coordenadas de Novikov. Faremos isso usando a energia-momento definida no contexto do formalismo hamiltoniano do TEGR. Para tal, usaremos tetradas adaptadas a esses sistemas de coordenadas, pelo menos no que diz respeito às congruências das partículas que compõe o sistema (“removeremos” as rotações das coordenadas angulares, por serem espúrias).

O primeiro frame a ser estudado é o frame adaptado¹ as coordenadas de Kruskal, e o segundo é o frame adaptado as coordenadas de Novikov. Para cada um deles, calculamos o valor de P^a contido em uma hipersuperfície de simultaneidade definida pela coordenada temporal, e discutimos esse valor no nosso universo e no outro universo, aprofundando a análise principalmente no caso de Novikov. Em ambos os casos, observamos que o fato de a garganta do buraco de minhocas estar ou não fechada influencia no valor da energia obtida. Além disso, nós discutimos algumas propriedades de cada um destes dois frames e em alguns pontos os relacionamos com o frame adaptado as coordenadas de Schwarzschild.

5.1 Kruskal-Szekeres

5.1.1 O frame adaptado às coordenadas de Kruskal-Szekeres

A partir da métrica da eq. (3.71), vemos que um frame adaptado ao conjunto de observadores que são estáticos ao sistema de coordenadas de Kruskal-Szekeres pode ser dado por $e_{(0)} = (1/F)\partial_T$, $e_{(1)} = (1/F)\partial_X$, $e_{(2)} = (1/r)\partial_\theta$ e $e_{(3)} = (1/(r \sin \theta))\partial_\phi$. Estes observadores serão chamados de observadores de Kruskal, já aqueles que são estáticos ao sistema de coordenadas de Schwarzschild serão chamados de observadores de Schwarzs-

¹ Entende-se por frame adaptado a um determinado sistema de coordenadas o frame cujo vetor tipo tempo, $e_{(0)}$, está na direção do vetor da base da coordenada temporal. No caso da tríade, faremos uma imersão no $\mathbb{R}^3$ para definir um sistema cartesiano, e ajustaremos a tríade à essas direções cartesianas.

child. Na figura 4, a linha de universo de um observador de Kruskal é representada pela linha vertical verde. Assim, vemos que esse observador sai da singularidade do passado e chega na singularidade do futuro em um tempo finito ΔT . E, também, é interessante notar que os observadores de Kruskal não cobrem a região interna do buraco negro/branco para $T = 0$: neste instante, eles cobrem apenas a região $r \geq 2m$; a região inteira para $r > 0$ só é coberta para $|T| \geq 1$, isto é, quando a garganta do buraco de minhoca se fecha.

Para um mesmo conjunto de observadores pode haver inúmeras tríades espaciais. No entanto, com o intuito de obter uma tetrada adequada para a análise da energia, nós devemos buscar por uma tríade que não sofra rotações espúrias ao longo da variedade devido ao sistema de coordenadas. Uma tríade desse tipo para os observadores de Kruskal pode ser obtida através da aplicação da transformação de Lorentz

$$\hat{\Lambda}_a{}^b = \hat{t}_a \hat{t}^b - \hat{r}_a \hat{x}^b - \hat{\theta}_a \hat{y}^b - \hat{\phi}_a \hat{z}^b \quad (5.1)$$

em e_a , onde $\hat{t}^a$, $\hat{r}^a$, $\hat{x}^a$, etc., são dados pela eq. (4.42). Assim, usando $\tilde{e}_a = \hat{\Lambda}_a{}^b e_b$, nós temos que o novo frame para os observadores de Kruskal é dado por

$$\tilde{e}_a = \frac{\hat{t}_a}{F} \partial_T - \frac{\hat{r}_a}{F} \partial_X - \frac{\hat{\theta}_a}{r} \partial_\theta - \frac{\hat{\phi}_a}{r \sin \theta} \partial_\phi \quad (5.2)$$

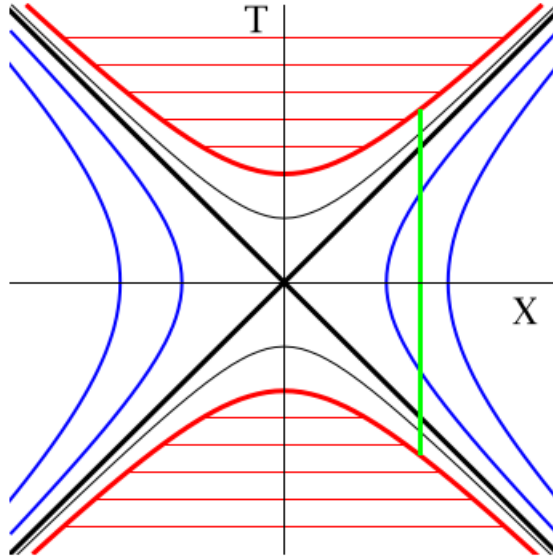


Figura 4 – Diagrama espaço-tempo nas coordenadas de Kruskal-Szekeres. As curvas azuis são curvas de r constante, quando $r > 2m$. As retas pretas grossas são os horizontes de eventos, enquanto as curvas pretas finas representam curvas com r constante no interior do buraco negro/branco ($r < 2m$). As curvas vermelhas grossas correspondem as singularidades passada e futura em $r = 0$. (As linhas vermelhas finas indicam regiões proibidas $r < 0$). As linhas de universo de um conjunto de observadores de Kruskal com mesmo valor de X são dadas pela reta verde.

o qual é utilizado como frame teleparalelo para avaliarmos a consistência de sua escolha como tal. (Perceba a forma compacta com a qual a eq. (5.1) está escrita, graças ao método apresentado na seção 4.6.)

5.1.2 Torção

Observando que $\tilde{e}_a = \tilde{e}_a^\mu \partial_\mu$ e usando a eq. (5.2), vemos que as componentes da tetrada na base das coordenadas de Kruskal podem ser dadas na forma

$$\tilde{e}_a^\mu = \frac{\hat{t}_a}{F} \delta_0^\mu - \frac{\hat{r}_a}{F} \delta_1^\mu - \frac{\hat{\theta}_a}{r} \delta_2^\mu - \frac{\hat{\phi}_a}{r \sin \theta} \delta_3^\mu; \quad (5.3)$$

e, comparando a eq. (5.3) com a eq. (4.45), nós obtemos

$$\begin{aligned} \hat{t}^\mu &= \frac{1}{F} \delta_0^\mu, \\ \hat{r}^\mu &= \frac{1}{F} \delta_1^\mu, \\ \hat{\theta}^\mu &= \frac{1}{r} \delta_2^\mu, \\ \hat{\phi}^\mu &= \frac{1}{r \sin \theta} \delta_3^\mu. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Usando as componentes da métrica, dadas pelo elemento de linha da eq. (3.71), nós obtemos imediatamente

$$\begin{aligned} \hat{t}_\mu &= F \delta_\mu^0, \\ \hat{r}_\mu &= -F \delta_\mu^1, \\ \hat{\theta}_\mu &= -r \delta_\mu^2, \\ \hat{\phi}_\mu &= -r \sin \theta \delta_\mu^3. \end{aligned} \quad (5.5)$$

De posse da eq. (5.5), nós podemos calcular os elementos da eq. (4.50) para obter a torção. Então, usando a eq. (5.5) na eq. (4.50), encontramos

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mu\nu}^{\hat{t}} &= -2F' \delta_{[\mu}^0 \delta_{\nu]}^1, \\ \tilde{T}_{\mu\nu}^{\hat{r}} &= -2\dot{F} \delta_{[\mu}^0 \delta_{\nu]}^1, \\ \tilde{T}_{\mu\nu}^{\hat{\theta}} &= -2\dot{r} \delta_{[\mu}^0 \delta_{\nu]}^2 + 2(F - r') \delta_{[\mu}^1 \delta_{\nu]}^2, \\ \tilde{T}_{\mu\nu}^{\hat{\phi}} &= 2 \sin \theta \left[-\dot{r} \delta_{[\mu}^0 \delta_{\nu]}^3 + (F - r') \delta_{[\mu}^1 \delta_{\nu]}^3 \right], \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde $\dot{F} \equiv \partial_T F$, $F' \equiv \partial_X F$, $\dot{r} \equiv \partial_{Tr}$ e $r' \equiv \partial_X r$. E, usando mais uma vez a eq. (5.5), agora para eliminar os deltas da eq. (5.6), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mu\nu}^{\hat{t}} &= \frac{2F'}{F^2} \hat{t}_{[\mu} \hat{r}_{\nu]}, \\ \tilde{T}_{\mu\nu}^{\hat{r}} &= \frac{2\dot{F}}{F^2} \hat{t}_{[\mu} \hat{r}_{\nu]}, \\ \tilde{T}_{\mu\nu}^{\hat{\theta}} &= \frac{2}{rF} \left[\dot{r} \hat{t}_{[\mu} \hat{\theta}_{\nu]} + (F - r') \hat{r}_{[\mu} \hat{\theta}_{\nu]} \right], \\ \tilde{T}_{\mu\nu}^{\hat{\phi}} &= \frac{2}{rF} \left[\dot{r} \hat{t}_{[\mu} \hat{\phi}_{\nu]} + (F - r') \hat{r}_{[\mu} \hat{\phi}_{\nu]} \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Assim, finalmente usando a eq. (5.7) na eq. (4.49), chegamos a expressão

$$\begin{aligned}\tilde{T}^a_{\mu\nu} = & -\frac{W_+F}{8m^2} \left(X\hat{t}_{[\mu}\hat{r}_{\nu]}\hat{t}^a + T\hat{t}_{[\mu}\hat{r}_{\nu]}\hat{r}^a \right) + \frac{2}{r} \left[\frac{FT}{4m}\hat{t}_{[\mu}\hat{\theta}_{\nu]} + \left(\frac{FX}{4m} - 1 \right) \hat{r}_{[\mu}\hat{\theta}_{\nu]} \right] \hat{\theta}^a \\ & + \frac{2}{r} \left[\frac{FT}{4m}\hat{t}_{[\mu}\hat{\phi}_{\nu]} + \left(\frac{FX}{4m} - 1 \right) \hat{r}_{[\mu}\hat{\phi}_{\nu]} \right] \hat{\phi}^a,\end{aligned}\quad (5.8)$$

onde usamos as relações $\dot{F}/F^2 = (1 + 2m/r) FT/(16m^2)$, $F'/F^2 = -(1 + 2m/r) FX/(16m^2)$, $\dot{r} = -F^2T/(4m)$ e $r' = F^2X/(4m)$, as quais foram obtidas das eqs. (3.72) e (3.73), e fizemos a definição $W_+ \equiv 1 + 2m/r$.

5.1.3 A conexão de Levi-Civita e o tensor de aceleração antissimétrico

De posse das componentes da torção, podemos obter as componentes da conexão de Levi-Civita utilizando a eq. (4.30). Assim, substituindo $\tilde{T}^a_{\mu\nu}$, dado pelo eq. (5.8), na eq. (4.30), obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^a_{bc} = & \frac{W_+F}{8m^2} \left(X\hat{t}_b\hat{t}^{[a}\hat{r}_{c]} + T\hat{r}_b\hat{t}^{[a}\hat{r}_{c]} \right) - \frac{2}{r} \left[\frac{FT}{4m}\hat{t}^{[a}\hat{\theta}_{c]} + \left(\frac{FX}{4m} - 1 \right) \hat{r}^{[a}\hat{\theta}_{c]} \right] \hat{\theta}_b \\ & - \frac{2}{r} \left[\frac{FT}{4m}\hat{t}^{[a}\hat{\phi}_{c]} + \left(\frac{FX}{4m} - 1 \right) \hat{r}^{[a}\hat{\phi}_{c]} \right] \hat{\phi}_b,\end{aligned}\quad (5.9)$$

onde, para realizar este cálculo, foi preciso apenas focar na permutação das componentes de $\{\hat{t}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$. Por exemplo, foi usado que o termo $\hat{t}_{[c}\hat{r}^{a]}\hat{t}_b + \hat{t}_{[b}\hat{r}^{a]}\hat{t}_c - \hat{t}_{[b}\hat{r}_{c]}\hat{t}^a$ pode ser simplificado para o termo $-2\hat{t}_b\hat{t}^{[a}\hat{r}_{c]}$, e assim por diante. (Estamos usando a convenção $A^{[a}B_{b]} = 1/2(A^aB_b - A_bB^a)$.)

As componentes do tensor de aceleração antissimétrico, $\tilde{\phi}_a{}^b$, oriundo do frame de $\tilde{e}_a$, é obtido de maneira direta a partir dos coeficientes da conexão de Levi-Civita do frame de Kruskal, já que $\tilde{\phi}_a{}^b = \tilde{\omega}^b_{(0)a}$. Dessa forma, tomando $b = 0$ na eq. (5.9) e usando as relações da eq. (4.42), nós encontramos

$$\tilde{\phi}_a{}^b = \frac{1}{8m^2} FXW_+\hat{t}^{[b}\hat{r}_{a]}, \quad (5.10)$$

lembrando que $W_+ = 1 + 2m/r$. Mais especificamente, nós temos que $a^b = \tilde{\phi}_{(0)}{}^b$ corresponde a aceleração do frame, enquanto que $\tilde{\phi}_{(i)}{}^{(j)}$ corresponde as rotações da tríade. Então, da eq. (5.10), observamos que $a^b = -W_+FX\hat{r}^b/(16m^2)$ e $\tilde{\phi}_{(i)}{}^{(j)} = 0$.

Usando a eq. (5.4), podemos ver que $a^X = a^1 = -W_+X/(16m^2)$ e $a^T = a^\theta = a^\phi = 0$. Ou seja, temos que a componente a^X aponta sempre na direção $X = 0$, já que ela é negativa na região na região $X > 0$ (no nosso universo) e é positiva na região $X < 0$ (no outro universo); e ela é nula na garganta ($X = 0$), para $r \neq 0$. E, por fim, podemos verificar que a magnitude da aceleração é dada por $a = \sqrt{-a^b a_b} = W_+F|X|/(16m^2)$.

5.1.4 O superpotencial

Todas as componentes do superpotencial advindo do frame $\tilde{e}_a$ podem ser calculadas através da eq. (4.31), utilizando-se as componentes da conexão de Levi-Civita da

eq. (5.9) na mesma. No entanto, como, para o caso do frame de Kruskal, estamos interessados apenas no cálculo da energia, nós vamos calcular apenas as componentes $\Sigma^{(0)0j}$ do superpotencial. Assim sendo, primeiramente, da eq. (4.31), observamos que podemos escrever

$$\tilde{\Sigma}^{(0)0j} = \frac{1}{2}\tilde{\omega}^{j(0)0} + \frac{1}{2}\left(\tilde{\omega}^d{}_d{}^j\tilde{e}^{(0)0} - \tilde{\omega}^d{}_d{}^0\tilde{e}^{(0)j}\right), \quad (5.11)$$

onde, da eq.(5.3), vemos que $\tilde{e}^{(0)0} = 1/F$ e $\tilde{e}^{(0)j} = 0$ (note que $\hat{r}^{(0)} = \hat{\theta}^{(0)} = \hat{\phi}^{(0)} = 0$ e $\hat{t}^{(0)} = 1$). Por outro lado, da eq. (5.9), encontramos que $\tilde{\omega}^{j(0)0} = (W_+FX/(16m^2))(\hat{t}^j\hat{r}^0 - \hat{t}^0\hat{r}^j)$. Como, da eq. (5.4), $\hat{t}^j = 0$, $\hat{t}^0 = 1/F$, $\hat{r}^0 = 0$ e $\hat{r}^j = (1/F)\delta_1^j$, teremos

$$\tilde{\omega}^{j(0)0} = -\frac{W_+X}{16m^2F}\delta_1^j. \quad (5.12)$$

Contraindo a com b na eq. (5.9) e usando as relações de ortonormalidade $\hat{t}^b\hat{t}_b = 1$, $\hat{r}^b\hat{r}_b = \hat{\theta}^b\hat{\theta}_b = \hat{\phi}^b\hat{\phi}_b = -1$, $\hat{t}^b\hat{r}_b = \hat{r}^b\hat{\theta}_b = 0$ etc., também obtemos

$$\tilde{\omega}^d{}_d{}^j = \frac{W_+X}{16m^2}\delta_1^j - \frac{2}{rF}\left(\frac{FX}{4m} - 1\right)\delta_1^j, \quad (5.13)$$

onde novamente foi usado $r^j = 1/F$, da eq. (5.4). Portanto, usando as eqs. (5.12) e (5.13) na eq. (5.11), chegamos em

$$\tilde{\Sigma}^{(0)0j} = \frac{1}{rF^2}\left(1 - \frac{XF}{4m}\right)\delta_1^j. \quad (5.14)$$

Como a energia do espaço-tempo pode ser calculada a partir da eq. (4.25) (fazendo $a = (0)$), nós podemos, então, utilizar a eq. (5.14) na mesma, para obter a energia associada ao frame de Kruskal, $\tilde{e}_a$. Vamos fazer isso logo em seguida.

5.1.5 A energia no nosso universo

Para calcular a energia contida em uma hipersuperfície de simultaneidade no nosso universo², nós usamos a configuração mostrada na figura 5. Nós podemos fazer isso de duas maneiras diferentes: a primeira, seria usar a eq. (4.19) para obter a componente $\tilde{t}^{(0)}$ do tensor densidade de energia-momento gravitacional, já que na geometria de Schwarzschild $T^{\mu a} = \Lambda = 0$, e, então, usa-lá na integral de volume da eq. (4.23), integrando de X_i até X , onde X_i é o valor mínimo de X no nosso universo (podemos excluir a singularidade tomando X_i ligeiramente diferente do valor que fornece a singularidade); a segunda maneira, seria simplesmente usar a integral de superfície da eq. (4.25). No caso da integral de superfície, o cálculo é feito sobre dois contornos: uma casca esférica em X_i e outra em X ; assim a região envolvida exclui não só o outro universo, quando a garganta do buraco de minhoca está aberta, mas como também a singularidade. (Para evitar que a singularidade faça parte da região envolvida após o fechamento da garganta, basta tomar

² Note que, aqui, não estamos nos referindo a universo no sentido cosmológico.

X_i ligeiramente diferente do valor que fornece a singularidade.) Usando a eq. (4.25), para $a = (0)$, nós temos que a energia obtida para o frame de Kruskal na região entre X_i e X pode ser escrita na forma

$$\tilde{E} = 4\kappa \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\phi e(X) \tilde{\Sigma}^{(0)01}(X) - 4\kappa \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\phi e(X_i) \tilde{\Sigma}^{(0)01}(X_i), \quad (5.15)$$

onde o determinante da tetrada é dado por $e = 32m^3 e^{-r/(2m)} r \sin \theta$. Substituindo o determinante na expressão acima, teremos

$$\tilde{E} = 128m^3 \kappa \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{-r/(2m)} r \tilde{\Sigma}^{(0)01} - \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{-r_i/(2m)} r_i \tilde{\Sigma}^{(0)01} \right), \quad (5.16)$$

sendo $r_i \equiv r(T, X_i)$. Usando a eq. (5.14) com $j = 1$, chegamos à energia

$$\tilde{E} = r \left(1 - \sqrt{\frac{2m}{r}} e^{-r/(4m)} X \right) - r_i \left(1 - \sqrt{\frac{2m}{r_i}} e^{-r_i/(4m)} X_i \right), \quad (5.17)$$

onde usamos $\kappa = 1/(16\pi)$. Note que a eq. (5.17) corresponde ao valor da energia prevista em uma região finita. Mais adiante, tomaremos o limite no qual $X \rightarrow \infty$ com T constante.

Quando publicamos nosso artigo, Ref. [30], não percebemos um resultado interessante que está presente na eq. (5.17) e também no caso de Novikov, que veremos mais adiante. A singularidade está sendo excluída da região pelo contorno interno. Por sua vez a contribuição desse contorno é exatamente o segundo termo do lado direito da eq. (5.17). Perceba que no limite no qual r_i vai a zero, o segundo termo também vai a zero, pois X_i é sempre finito neste caso. Assim, podemos concluir que a singularidade não contribui para

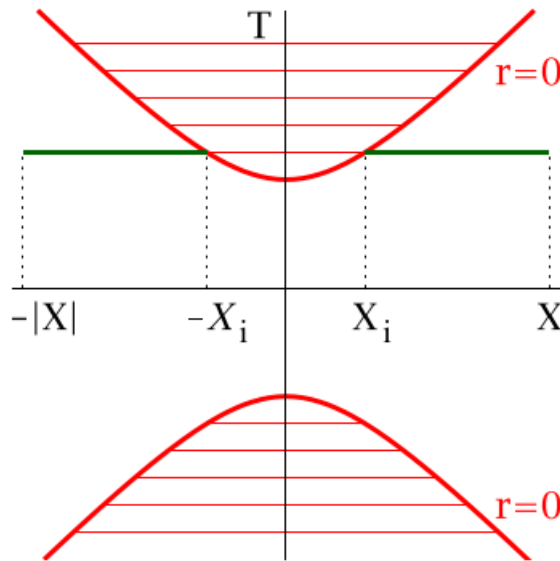


Figura 5 – Uma hipersuperfície de simultaneidade é mostrada em verde escuro (linha grossa na horizontal), a qual representa a região onde a integral $\int_V d^3x e t^{0a}$ é avaliada.

a energia. Portanto, podemos afirmar categoricamente que a energia do espaço-tempo do buraco negro é puramente gravitacional, não há matéria contribuindo, seja na forma finita ou singular.

Além do caso mencionado acima, há pelo menos dois limites interessantes para analisarmos: um quando $X \rightarrow \infty$ mantendo T contante, que nós denotaremos por l_1 ; e outro para $m \rightarrow 0$, enquanto as coordenadas de Schwarzschild são mantidas constantes/finitas, que nós denotaremos por l_2 . O limite l_2 define o que nós chamamos de “ausência de gravidade” e é crucial para determinar se o frame é uma tetrada dita “apropriada” ou não; ou seja, se a tetrada recai no frame de Lorentz na ausência de gravidade.

Para calcular o limite l_1 da eq. (5.17), nós precisamos conhecer como X e r se comportam. Podemos analisar esse comportamento através da eq. (3.73), a qual nos mostra que conforme fazemos $X \rightarrow \infty$ com T fixo, a coordenada r de Schwarzschild vai para ∞ . Assim, nós temos que, para um r e X suficientemente grandes, a eq. (3.73) implica que

$$\sqrt{\frac{2m}{r}} e^{-r/(4m)} X \approx \pm (1 - 2m/r)^{1/2}, \quad (5.18)$$

onde nós tomaremos o sinal de mais para avaliarmos o limite l_1 no nosso universo. E, então, substituindo a eq. (5.18) na eq. (5.17) e tomando o limite $r \rightarrow \infty$, nós obtemos que o valor da energia nesse limite é dado por

$$\tilde{E}(l_1) = m - r_i \left(1 - \sqrt{\frac{2m}{r_i}} e^{-r_i/(4m)} X_i \right). \quad (5.19)$$

Para $|T| < 1$, podemos tomar $X_i = 0$ (ver figura 5). Portanto, quando a garganta do buraco de minhocas está aberta, nós temos $\tilde{E}(l_1) = m - r_i$; e, mais especificamente, quando $T = 0$ temos $\tilde{E}(l_1) = -m$ ($= -Mc^2$), já que $r_i = 2m$ neste caso. Esse valor da energia, do limite l_1 em $T = 0$, é compatível com o fato de que os observadores de Kruskal cobrem apenas a região $r \geq 2m$, nesse instante, e a energia gravitacional da região exterior é negativa. Por outro lado, para $|T| \geq 1$, podemos tomar $r_i = 0$; nesse caso, teremos $\tilde{E}(l_1) = m$ ($= Mc^2$), que é o resultado esperado para uma partícula de massa M . Ou seja, a energia contida dentro da hipersuperfície T constante, para o limite l_1 , é a energia de uma partícula de massa M apenas quando a garganta está completamente fechada.

5.1.5.1 A ausência de gravidade (limite l_2)

Como mencionado anteriormente, vamos examinar o que o limite de $m \rightarrow 0$, com t e r mantidos fixos, revela sobre o frame de Kruskal, $\tilde{e}_a$. Para isso, podemos analisar o que acontece com a aceleração do frame nesse limite. Na seção (5.1.3), vimos que a magnitude da aceleração do frame de Kruskal é dada por $a = W_+ F |X| / (16m^2)$; logo, no

nosso universo ($X > 0$), esta equação é simplesmente

$$a = \frac{1}{16m^2} W_+ F X. \quad (5.20)$$

Considerando que $r > 2m$, nessa região a coordenada X é dada em termos das coordenadas de Schwarzschild pela eq. (3.74), e usando F dado pela eq. (3.72) e $W_+ = 1 + 2m/r$, nós observamos que a eq. (5.20) pode ser escrita como

$$a = \left(1 + \frac{2m}{r}\right) \sqrt{16m^2 - \frac{32m^3}{r}} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right). \quad (5.21)$$

Portanto, mantendo t e r constantes e fazendo $m \rightarrow 0$ na eq. (5.21), nós verificamos que a aceleração do frame diverge nesse limite, já que a função $\cosh$ cresce exponencialmente enquanto o termo da raiz vai pra zero mais lentamente, o que resulta que o frame $\tilde{e}_a$ não é uma tetrada “apropriada”.

Apesar do frame de Kruskal não ser uma tetrada apropriada, o resultado fornecido para a energia foi bastante consistente, conforme vimos quando avaliamos o limite l_1 . Assim, não está claro se esse resultado consistente é uma propriedade geral de qualquer frame cuja a energia gravitacional é avaliada numa hipersuperfície de simultaneidade adequada. Talvez, nós possamos entender essa consistência ao notar duas circunstâncias: a primeira é que, se escrevermos o lado direito da eq. (5.2) em termos da base coordenada de Schwarzschild, com os coeficientes também escritos em termos dessas coordenadas, e, então, tomarmos primeiramente $t = 0$, aplicando em seguida o limite l_2 , nós obtemos $\tilde{e}_a = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$; e a segunda é que, conforme pode ser observado na figura 31.3 da Ref. [12], para uma linha horizontal ($T = \text{constante}$) no diagrama, o valor da coordenada t vai pra zero, independentemente do valor de T , no limite l_1 . Desse modo, poderíamos dizer que a contribuição para o valor da energia vem dessa região, onde o frame $\tilde{e}_a$ é bem comportado. Nós vamos ver em seguida, na próxima seção, que esse não é o caso para o outro universo.

5.1.6 Relação entre os frames de Schwarzschild e de Kruskal para $X < 0$

As coordenadas de Schwarzschild também são bem definidas no outro universo para $r > 2m$. Nessa região, as coordenadas de Kruskal são dadas em termos das de Schwarzschild pela eq. (3.75). Dessas expressões, nós encontramos que

$$\partial_T = \frac{8m^2}{r} e^{-r/(2m)} \left(\frac{X}{W} \partial_t - T \partial_r \right), \quad (5.22)$$

$$\partial_X = \frac{8m^2}{r} e^{-r/(2m)} \left(-\frac{T}{W} \partial_t + X \partial_r \right), \quad (5.23)$$

onde $W \equiv 1 - 2m/r$. Assim, substituindo (5.22) e (5.23) na eq. (5.2) e eliminando T e X , usando novamente a eq. (3.75), nós obtemos que o frame de Kruskal no outro universo,

escrito em termos das coordenadas de Schwarzschild, é dado por

$$\begin{aligned}\tilde{e}_a = & -\hat{t}_a \left(\frac{\cosh \alpha}{\sqrt{W}} \partial_t - \sqrt{W} \sinh \alpha \partial_r \right) + \hat{r}_a \left(-\frac{\sinh \alpha}{\sqrt{W}} \partial_t + \sqrt{W} \cosh \alpha \partial_r \right) \\ & - \frac{1}{r} \hat{\theta}_a \partial_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\phi}_a \partial_\phi,\end{aligned}\quad (5.24)$$

onde $\alpha \equiv t/(4m)$.

No nosso universo, o resultado da eq. (5.24) seria muito parecido: a diferença seria, apenas, que nós teríamos um sinal de mais antes de $\hat{t}_a$ e um sinal de menos antes de $\hat{r}_a$, o que corresponderia a eq. (4.57). Neste caso, se estivéssemos considerando o nosso universo, ao comparar a eq. (5.24) com a eq. (4.57), nós identificaríamos que o f (fator de Lorentz) e o g (velocidade vezes o fator de Lorentz) da eq. (4.57) dessa referência correspondem, respectivamente, a $\cosh \alpha$ e $-\sinh \alpha$ da eq. (5.24); de modo que, no nosso universo, os frames de Kruskal e de Schwarzschild estão relacionados um ao outro por meio de uma transformação ortócrona de Lorentz. Contudo, no outro universo, há reflexões nos eixos temporal e radial, as quais são as responsáveis pela diferença de sinal entre a eq. (5.24) e a eq. (4.57). Devido a inversão radial, nós vamos chamar o outro universo de “universo espelho”.

Conforme pode facilmente ser visto, diretamente da eq. (5.24), o frame de Kruskal não se torna o frame de Lorentz, $(\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$, quando m vai pra zero, ou seja, não é uma tetrad apropriada. E, nesse caso, nem mesmo se nós tomássemos primeiro $t = 0$ pra depois tomar m indo pra zero, diferentemente do que acontece quando fazemos isso no nosso universo, como mencionado na seção 5.1.5.1. Isso, então, sugere que não é possível obter um resultado consistente para o valor da energia no outro universo usando o frame de Kruskal. Nós vamos deixar uma análise um pouco mais profunda desse problema quando estivermos analisando o resultado da energia para o frame de Novikov.

5.2 Novikov

5.2.1 O frame adaptado às coordenadas de Novikov

Nós denominamos de observadores de Novikov os observadores que estão em repouso nas coordenadas espaciais desse sistema de coordenadas. Um frame imediato associado a esses observadores é $\check{e}_{(0)} = \partial_\tau$, $\check{e}_{(1)} = (1/N)\partial_R$, $\check{e}_{(2)} = (1/r)\partial_\theta$ e $\check{e}_{(3)} = [1/(r \sin \theta)]\partial_\phi$. E, usando novamente a transformação de Lorentz da eq. (5.1) para minimizar rotações espúrias da tríade espacial desse frame devido ao sistema de coordenadas, nós teremos que o frame de Novikov será dado por $\bar{e}_a = \hat{\Lambda}_a{}^b \check{e}_b$. Assim, nós obtemos

$$\bar{e}_a = \hat{t}_a \partial_\tau - \frac{1}{N} \hat{r}_a \partial_R - \frac{1}{r} \hat{\theta}_a \partial_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\phi}_a \partial_\phi. \quad (5.25)$$

Novamente, perceba a “elegância” da eq. (5.25). Esta é uma das vantagens do formalismo híbrido: $\bar{e}_a$ está ajustado às “direções cartesianas”, mas escrito em “coordenadas esféricas”; tudo isso sem que apreça um “amontoado” de funções trigonométricas, e cabendo em apenas uma linha.

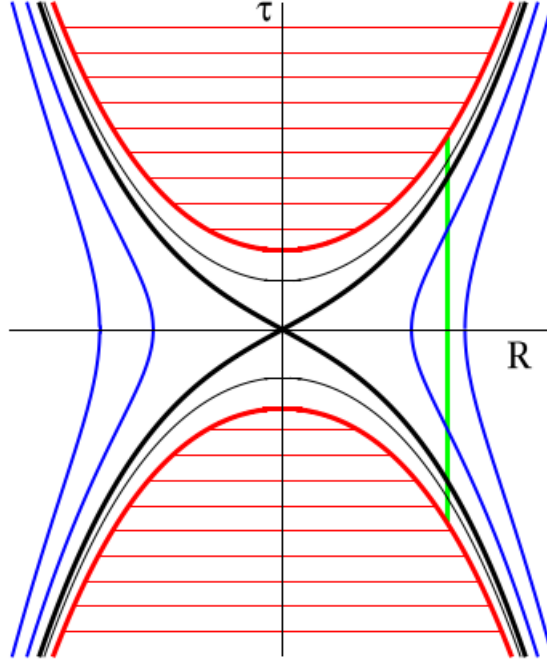


Figura 6 – Diagrama espaço-tempo nas coordenadas de Novikov. As curvas azuis são curvas de r constante, quando $r > 2m$. As curvas pretas grossas representam os horizontes de eventos, enquanto as curvas pretas finas correspondem as curvas de r constante dentro do buraco negro/branco ($r < 2m$). As curvas vermelhas grossas correspondem as singularidades passada e futura em $r = 0$. (As linhas vermelhas finas indicam regiões proibidas $r < 0$). As linhas de universo de um conjunto de observadores de Novikov com mesmo valor de R são dadas pela reta verde.

5.2.2 Torção, conexão de Levi-Civita, tensor de aceleração antissimétrico e o superpotencial

Vamos mais uma vez utilizar o Maquinário Híbrido, para calcular a torção e demais quantidades associadas ao frame de Novikov. Como $\bar{e}_a = \bar{e}_a^\mu \partial_\mu$, da eq. (5.25), vemos facilmente que

$$\bar{e}_a^\mu = \hat{t}_a \delta_0^\mu - \frac{\hat{r}_a}{N} \delta_1^\mu - \frac{\hat{\theta}_a}{r} \delta_2^\mu - \frac{\hat{\phi}_a}{r \sin \theta} \delta_3^\mu; \quad (5.26)$$

e, tendo em vista que $\bar{e}_a{}^\mu$ pode ser escrito na forma da eq. (4.45), nós identificamos

$$\begin{aligned}\hat{t}^\mu &= \delta_0^\mu, \\ \hat{r}^\mu &= \frac{1}{N}\delta_1^\mu, \\ \hat{\theta}^\mu &= \frac{1}{r}\delta_2^\mu, \\ \hat{\phi}^\mu &= \frac{1}{r\sin\theta}\delta_3^\mu.\end{aligned}\tag{5.27}$$

Baixando os índices desses elementos da eq. (5.27), com as componentes da métrica, oriundas do elemento de linha de Novikov (eq. (3.81)), nós obtemos

$$\begin{aligned}\hat{t}_\mu &= \delta_\mu^0, \\ \hat{r}_\mu &= -N\delta_\mu^1, \\ \hat{\theta}_\mu &= -r\delta_\mu^2, \\ \hat{\phi}_\mu &= -r\sin\theta\delta_\mu^3.\end{aligned}\tag{5.28}$$

A partir do uso da eq. (5.28), nós podemos seguir basicamente os mesmos passos realizados no caso de Kruskal para obter as demais quantidades de interesse, calculadas em relação ao frame de Novikov. Assim, seguindo os passos anteriores, nós encontramos que as componentes da torção para o frame $\bar{e}_a$ são

$$\bar{T}^a{}_{\mu\nu} = -\frac{2\dot{N}}{N}\hat{r}^a\hat{t}_{[\mu}\hat{r}_{\nu]} - \frac{2\dot{r}}{r}\left(\hat{\theta}^a\hat{t}_{[\mu}\hat{\theta}_{\nu]} + \hat{\phi}^a\hat{t}_{[\mu}\hat{\phi}_{\nu]}\right) - \frac{2}{r}\left(1 - \frac{r'}{N}\right)\left(\hat{\theta}^a\hat{r}_{[\mu}\hat{\theta}_{\nu]} + \hat{\phi}^a\hat{r}_{[\mu}\hat{\phi}_{\nu]}\right),\tag{5.29}$$

onde, agora, $\dot{N}$, $\dot{r}$ e r' correspondem, respectivamente, à $\partial N/\partial\tau$, $\partial r/\partial\tau$ e $\partial r/\partial R$. A partir da torção, obtemos que as componentes da conexão de Levi-Civita são

$$\bar{\omega}^a{}_{bc} = \frac{2\dot{N}}{N}\hat{r}_b\hat{t}^{[a}\hat{r}_{c]} + \frac{2\dot{r}}{r}\left(\hat{\theta}_b\hat{t}^{[a}\hat{\theta}_{c]} + \hat{\phi}_b\hat{t}^{[a}\hat{\phi}_{c]}\right) + \frac{2}{r}\left(1 - \frac{r'}{N}\right)\left(\hat{\theta}_b\hat{r}^{[a}\hat{\theta}_{c]} + \hat{\phi}_b\hat{r}^{[a}\hat{\phi}_{c]}\right),\tag{5.30}$$

o que nos permite concluir que as componentes do tensor de aceleração antissimétrico, $\bar{\phi}_a{}^b = \bar{\omega}^b{}_{(0)a}$, são todas nulas, confirmando que o frame de Novikov está em queda livre³.

De posse das componentes da conexão, eq. (5.30), obtemos o superpotencial

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}^{abc} &= \frac{2}{r}\left(1 - \frac{r'}{N}\right)\hat{t}^a\hat{t}^{[b}\hat{r}^{c]} + \frac{2\dot{r}}{r}\hat{r}^a\hat{t}^{[b}\hat{r}^{c]} + \left(\frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{r}}{r}\right)\left(\hat{\theta}^a\hat{t}^{[b}\hat{\theta}^{c]} + \hat{\phi}^a\hat{t}^{[b}\hat{\phi}^{c]}\right) \\ &\quad + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{r'}{N}\right)\left(\hat{\theta}^a\hat{r}^{[b}\hat{\phi}^{c]} + \hat{\phi}^a\hat{r}^{[b}\hat{\phi}^{c]}\right).\end{aligned}\tag{5.31}$$

³ Aqui, vale a pena fazer uma observação importante. Como apontado na Ref. [42], um referencial em queda livre não necessariamente é um referencial inercial local. Uma coisa é termos um referencial adaptado a partículas livres, como o de Novikov, outra totalmente diferente é termos um referencial adaptado as coordenadas próprias de um observador em queda livre (referencial inercial local).

Logo, como pode ser visto da eq. (4.25), para se estudar a energia total e o momento linear total dentro de uma dada hipersuperfície de simultaneidade, basta utilizar os dois últimos índices da eq. (5.31) como índices coordenados, fazendo o segundo igual a 0 e o terceiro igual a j , ou seja, tomando $\bar{\Sigma}^{a0j}$. Assim, fazendo uso da eq. (5.27), vemos que

$$\bar{\Sigma}^{a0j} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r'}{N} \right) \hat{t}^a \hat{r}^j + \frac{\dot{r}}{r} \hat{r}^a \hat{r}^j + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{r}}{r} \right) (\hat{\theta}^a \hat{\theta}^j + \hat{\phi}^a \hat{\phi}^j). \quad (5.32)$$

Usando essas componentes mais o determinante da tetrada na eq. (4.25), seremos capazes de obter a energia gravitacional. Faremos esse cálculo um pouco mais adiante, na seção 5.2.4. Porém, analisaremos primeiro qual é o comportamento do frame de Novikov no que diz respeito a ser ou não ser um referencial apropriado para o cálculo da energia gravitacional.

5.2.3 Comportamento do frame de Novikov

Veremos nesta seção que o frame de Novikov é uma tetrada apropriada apenas no nosso universo.

Nós podemos provar que o frame de Novikov é uma tetrada apropriada apenas no nosso universo, mostrando que $\bar{\omega}^a_{bc}$, dada pela eq. (5.30), se anula⁴ quando nós tomamos o limite $m \rightarrow 0$ com τ e r finitos na região $R > 0$ apenas. Observamos que τ e r não podem divergir nesse limite de ausência de gravidade ($m \rightarrow 0$), porque a coordenada τ é o tempo próprio dos observadores e r é a coordenada radial de Schwarzschild, as quais são bem definidas nesse limite; no entanto, a coordenada R diverge neste caso. Para ver que R diverge nós usamos a eq. (3.83). Analisando essa equação, fica claro que $R^2 \geq r/(2m) - 1$; e, portanto, uma vez que r é finito, tem-se que $|R|$ vai pra infinito a medida que m tende a zero.

Notando, da eq. (3.82), que $1 - r'/N = 1 - R/\sqrt{R^2 + 1}$, nós vemos que essa expressão se anula para $R \rightarrow \infty$ e fornece 2 para $R \rightarrow -\infty$ (universo espelho). Assim, nós já podemos ver de imediato, olhando para a eq. (5.30), que $\bar{\omega}^a_{bc}$ não se anula no outro universo; ou seja, $\bar{e}_a$ não é uma tetrada apropriada no universo espelho. No nosso universo, nós ainda precisamos avaliar o comportamento de $\dot{N}$ e $\dot{r}$; sendo que, para obter o comportamento de $\dot{N}$, primeiramente, nós precisamos conhecer a cara de r' . Obtemos $\dot{r}$ e r' derivando a eq. (3.83), respectivamente, em relação a τ e R , o que nos fornece

$$\dot{r} = \mp \sqrt{\frac{2m}{r}} B^{1/2}, \quad (5.33)$$

$$r' = 2mR \left(3 - A + 3\sqrt{\frac{B}{A}} \arccos \sqrt{A} \right). \quad (5.34)$$

⁴ O fato de a conexão de Levi-Civita de um frame se anular implica que este frame é uma tetrada apropriada, ver teorema VI.3 da Ref. [16].

Como $A = r/[2m(R^2 + 1)]$ e $B = 1 - A$, para avaliarmos o comportamento de $\dot{r}$ e r' no limite de $m \rightarrow 0$ com τ e r finitos, nós vamos analisar o limite

$$L = \lim_{m \rightarrow 0} r/[2m(R^2 + 1)] = (\bar{r}/2) \lim_{m \rightarrow 0} (mR^2)^{-1}, \quad (5.35)$$

onde $\bar{r} = \lim_{m \rightarrow 0} r$ é finito. Como o domínio do arco cosseno é de -1 a 1 e o argumento na eq. (3.83) é positivo, então está claro que $0 \leq A \leq 1$. Assim, só há duas possibilidades para L : teremos $L = 0$, se $mR^2 \rightarrow \infty$; ou teremos $L = L_0 \neq 0$, se $\lim_{m \rightarrow 0} mR^2$ for finito. Das eq. (3.83) e (3.84), vemos que a primeira possibilidade não é possível, pois ela leva a um tempo próprio infinito (nós vemos que $\tau \rightarrow \pm\infty$ se $mR^2 \rightarrow \infty$). Por isso, concluimos que mR^2 deve ser finito. Portanto, temos que o limite da eq. (5.35) é finito e diferente de zero; logo, A e B também são finitos no limite que estamos estudando, e já vemos de imediato que $\dot{r}$ é zero nesse limite. Como concluimos que mR^2 deve ser finito, então, também podemos concluir que $mR \rightarrow 0$. Isso implica que r' também vai pra zero nesse limite.

Falta, agora, apenas analisar o termo $\dot{N}/N$. Como $\dot{N} = (\sqrt{1 + R^2}/R) (\partial r'/\partial \tau)$, nós precisamos derivar r' , dado pela eq. (5.34), parcialmente em relação a τ . Fazendo isso e usando $\partial r'/\partial \tau$ na expressão de $\dot{N}/N$, após alguns cálculos e manipulações, nós encontramos

$$\frac{\dot{N}}{N} = \pm \frac{3}{2} \frac{\left[\frac{\sqrt{B}}{3m(R^2+1)} + \frac{A+B}{2m(R^2+1)A^{3/2}} \arccos \sqrt{A} + \frac{\sqrt{B}}{r} \right] \sqrt{\frac{2m}{r}}}{3 - A + 3\sqrt{\frac{B}{A}} \arccos \sqrt{A}}. \quad (5.36)$$

E, como já vimos, A , B e mR^2 são finitos no limite em questão, o que implica que a parte que multiplica $\sqrt{2m/r}$ é finita. Logo, a eq. (5.36) mostra claramente que a medida que m vai para zero $\dot{N}/N$ também vai pra zero. Portanto, verificamos que $\bar{\omega}^a_{bc}$ é zero no limite de ausência de gravidade, o que prova que o frame de Novikov é uma tetrad adequada na região $R > 0$.

Outra coisa que também podemos pontuar aqui, é que o frame de Novikov, assim como o de Kruskal, no nosso universo, também se relaciona com o frame de Schwarzschild por meio de uma transformação ortócrona de Lorentz. Assim, escrevendo o frame de Novikov em termos da base coordenada de Schwarzschild e o comparando com a eq. (4.57), para identificar o fator de Lorentz, nós vemos que o frame de Novikov pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \bar{e}_a = \hat{t}_a \left(\frac{R}{\sqrt{1+R^2}} W^{-1} \partial_t \mp \sqrt{\frac{2m}{r}} \sqrt{B} \partial_r \right) - \hat{r}_a \left(\mp \sqrt{\frac{2m}{r}} \sqrt{B} W^{-1} \partial_t + \frac{R}{\sqrt{1+R^2}} \partial_r \right) \\ - \frac{1}{r} \hat{\theta}_a \partial_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\phi}_a \partial_\phi, \end{aligned} \quad (5.37)$$

lembrando que $W = 1 - 2m/r$. Usaremos rapidamente a eq. (5.37) na próxima seção. De qualquer forma, voltaremos a falar da relação entre o frame de Novikov e o de Schwarzschild na seção 5.2.5.

5.2.4 Energia e momento

Vamos calcular o 4-momento na região $R \in [R_i, R]$, com τ constante (ver figura 7), onde R_i é o valor mínimo que R pode assumir no nosso universo. (Assim como no caso de Kruskal, podemos tomar R_i ligeiramente diferente do valor que fornece a singularidade, para podermos usar o teorema de Stokes.) Nós vamos denotar o 4-momento restrito a essa região por P_+^a . Para obter P_+^a , nós podemos usar tanto a eq. (4.25) quanto a eq. (4.23). Nós efetuamos o cálculo de ambas as maneiras e verificamos que P_+^a pode ser dado pela integral de superfície sobre dois contornos: uma casca esférica em R_i e outra em R .

Como no caso de Kruskal usamos a eq. (4.25), aqui, vamos exibir a conta por outro caminho equivalente, usando as eqs. (4.23) e (4.18). Dessa última equação, podemos escrever

$$et^{0a} = 4\kappa\partial_\nu(e\Sigma^{a0\nu}). \quad (5.38)$$

Substituindo o determinante da tetrada

$$e = Nr^2 \sin \theta \quad (5.39)$$

e a eq. (5.32) nessa equação e usando a eq. (5.27), obtemos

$$et^{0a} = 4\kappa \left[\partial_R \left(\frac{1}{2} r^2 \sin \theta f_1(\tau, R) \hat{t}^a \right) + \partial_R (r \dot{r} \sin \theta \hat{r}^a) \right. \\ \left. + \partial_\theta (Nr \sin \theta f_2(\tau, R) \hat{\theta}^a) + \partial_\phi (Nr f_2(\tau, R) \hat{\phi}^a) \right], \quad (5.40)$$

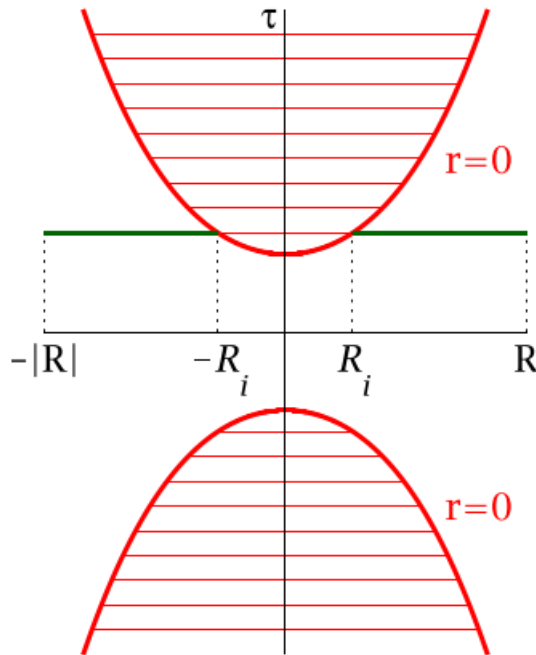


Figura 7 – Uma hipersuperfície de simultaneidade é indicada em verde escuro (linha grossa na horizontal), a qual representa a região onde a integral $\int_V d^3x et^{0a}$ é avaliada.

onde

$$\begin{aligned} f_1(\tau, R) &= \frac{2}{r} \left(1 - \frac{r'}{N} \right), \\ f_2(\tau, R) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{r}}{r} \right), \end{aligned} \quad (5.41)$$

(lembrando que ‘ponto’ e ‘linha’ indicam, respectivamente, derivadas parciais em relação a τ e R). Integrando et^{0a} na região que vai de $R = R_i$ (ligeiramente diferente do valor que fornece a singularidade) até um certo R com τ constante (curva verde do lado direito da figura 7), para obter o 4-momento dado pela eq. (4.23), teremos

$$\begin{aligned} \bar{P}_+^a &= 4\kappa \left[\frac{1}{2} (r^2 f_1(\tau, R)) \Big|_{R_i}^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi \hat{t}^a + (r\dot{r}) \Big|_{R_i}^R \mathfrak{J}_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_{R_i}^R N r f_2(\tau, R) dR \mathfrak{J}_2 + \int_{R_i}^R N r f_2(\tau, R) dR \mathfrak{J}_3 \right], \end{aligned} \quad (5.42)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \hat{r}^a d\theta d\phi, \\ \mathfrak{J}_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \partial_\theta (\sin \theta \hat{\theta}^a) d\theta d\phi, \\ \mathfrak{J}_3 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \partial_\phi (\hat{\phi}^a) d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (5.43)$$

É imediato notar que $\mathfrak{J}_2 = 0$ e, usando as eqs. (4.42) e (4.43), também notaremos que $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_3 = 0$. Dessa forma, da eq. (5.42), usando $f_1(\tau, R)$ dado pela eq. (5.41), encontramos que o 4-momento no nosso universo é

$$\bar{P}_+^a = \left[r \left(1 - \frac{R}{\sqrt{1+R^2}} \right) - r_i \left(1 - \frac{R_i}{\sqrt{1+R_i^2}} \right) \right] \hat{t}^a, \quad (5.44)$$

onde nós usamos que $k = 1/(16\pi)$ e $r_i \equiv r(\tau, R_i)$.

5.2.4.1 A energia do nosso universo

Para calcular a energia de todo o nosso universo, contida dentro da hipersuperfície de simultaneidade de um determinado τ constante, nós calculamos o limite $R \rightarrow \infty$, mantendo τ fixo. Isso pode ser feito facilmente ao notarmos que, da eq. (3.83), para τ permanecer constante, o valor de A , nesse limite, deve ir pra 1, caso contrário τ divergiria⁵. Assim, da eq. (3.84), nós devemos ter que $\lim_{R \rightarrow \infty} r/R^2 = 2m$. E, portanto, usando esse fato, ao fazermos $R \rightarrow \infty$ na eq. (5.44), nós obtemos que

$$\bar{P}_+^a = \left[m - r_i \left(1 - R_i/\sqrt{1+R_i^2} \right) \right] \hat{t}^a. \quad (5.45)$$

⁵ Isso ocorreria porque os dois termos do lado direito da eq. (3.83) têm o mesmo sinal, logo cada um desses termos deve ser finito. Assim, por exemplo, o segundo termo será finito apenas se o $\arccos \sqrt{A}$ for pra zero de tal maneira que $R^3 \arccos \sqrt{A}$ seja finito, o que implica em $A \rightarrow 1$.

Como pode ser verificado da eq. (3.83), uma vez que escolhemos tomar R_i como o menor valor de R no nosso universo, nós devemos ter $R_i = 0$ para $\tau \in [-\pi m, \pi m]$. Esta é a região entre as singularidades com $R = 0$, a chamada garganta do buraco de minhoca (ver figuras 6 e 7). Portanto, a eq. (5.45) prediz que, neste intervalo de tempo τ , em que a garganta do buraco de minhoca está aberta, a energia e o momento dentro de uma dada hipersuperfície de simultaneidade no nosso universo é

$$\bar{P}_+^a = (m - r_i) \hat{t}^a, \quad (5.46)$$

sendo $r_i \in [2m, 0)$. Assim, da eq. (5.46), observamos que, nos instantes $\tau = \pm(1 + \pi/2)m$ e $\tau = 0$, a energia é, respectivamente, zero e $-m$; pois, da eq. (3.83), vemos que $r_i = m$, nos instantes $\tau = \pm(1 + \pi/2)m$, e $r_i = 2m$ no instante $\tau = 0$ (onde a hipersuperfície de simultaneidade é externa à região dos buracos brancos e negros do nosso universo).

Por outro lado, para qualquer valor de $|\tau| \geq \pi m$ nós temos $r_i = 0$ (como indicado na figura 7) e, portanto, o valor da energia, fornecido pela eq. (5.45), para esses valores de τ (quando a garganta do buraco de minhoca está fechada), é m , o que corresponde ao famoso Mc^2 no sistema de unidades internacional. Desse modo, podemos concluir que a eq. (5.45) prediz que a energia dentro da hipersuperfície de simultaneidade é a mesma energia daquela de uma partícula com massa m somente quando a garganta do buraco de minhoca está completamente fechada, ou seja, quando a hipersuperfície cobre toda a região $r > 0$ (Note que as hipersuperfícies para $\tau \in (-\pi m, \pi m)$ não estão cobrindo o espaço para r_i imediatamente maior que zero; apesar de $R_i = 0$ temos $r_i \in (0, 2m]$).

Algo interessante de se notar é que, para qualquer região finita com $r > 2m$, quando $\tau = T = 0$, tanto os observadores de Kruskal quanto os observadores de Novikov, fornecem o mesmo resultado, para a energia do nosso universo, que os observadores de Schwarzschild, subtraída da energia do interior do horizonte de eventos (ver seção 4.1 da Ref. [31]). No caso de Kruskal, isso pode ser visto facilmente utilizando a relação entre as coordenadas de Kruskal e de Schwarzschild, isto é, as relações dadas pela eq. (3.74), na eq. (5.17), com $r_i = 2m$ e $t = 0$. Já no caso de Novikov, isso pode ser visto usando a eq. (3.83) para encontrar que $\tau = 0$ implica em $R_0 = \sqrt{r_0/(2m) - 1}$, onde R_0 e r_0 são, respectivamente, os valores de R e r nesse instante. Assim, quando escrevemos tanto a eq. (5.17) quanto a eq. (5.44) em termos de r_0 , vemos que a energia em ambos os casos será $E_0 = r_0 \left(1 - W_0^{1/2}\right) - 2m$, onde $W_0 \equiv 1 - 2m/r_0$. Esta é a mesma expressão que obtêm-se utilizando os observadores de Schwarzschild, menos a energia dentro do horizonte de eventos (ver Ref. [31]). A razão do porque há esse $-2m$ na expressão é devido ao fato que as coordenadas de Kruskal e Novikov não cobrem a região interna do buraco negro/branco em $T = \tau = 0$. Isso ocorre devido ao fato de que as coordenadas de Kruskal e Novikov são adaptadas a observadores em repouso em relação a coordenada r no instante $t = \tau = T = 0$, e, como um observador não pode ter um r contante dentro de um buraco negro/branco, as coordenadas não podem cobrir essa região nesse instante.

O valor da energia obtido para o frame de Novikov, igual a Mc^2 quando a garganta está fechada, é diferente do resultado obtido por Maluf et. al. [43], os quais obtiveram um valor nulo para a energia em decorrência do frame e/ou superfície de simultaneidade utilizados. Embora os observadores de Novikov não sejam os mesmos observadores usados por Maluf et. al. [43], existe uma conexão interessante entre esses dois conjuntos de observadores. Veremos, na seção 5.2.5.3, que os observadores de Novikov se tornam os observadores usados por Maluf *et al.* [43] ao passo que $\tau \rightarrow \infty$ e r é mantido constante no nosso universo. Algo que também podemos observar, a partir da eq. (5.44), é que a “energia” dentro de uma casca esférica com um r constante vai pra zero à medida que τ aumenta⁶, o que concorda com o resultado de Maluf *et al.* [43]. No entanto, isso não significa que os observadores sejam equivalentes nesse limite, haja vista que a energia total do nosso universo predita pelos observadores de Novikov é Mc^2 , independentemente se τ é grande ou pequeno.

Um aspecto interessante do resultado nulo da “energia” no caso de Novikov, quando tomamos $\tau \rightarrow \infty$ ($R \rightarrow \infty$) com r constante na eq. (5.44), é que o intervalo $\Delta R = R - R_i$, isto é, a região indicada na figura 7, desaparece nesse limite. Para ver isso, nós podemos utilizar a eq. (3.83): Tomando o limite dessa equação conforme $r \rightarrow 0$, nós temos $\tau/(\pi m) = (R_i^2 + 1)^{3/2}$. Assim, como o limite de $\tau \rightarrow \infty$ com r constante leva a $R \rightarrow \infty$, o que também implica num R_i muito grande, nós podemos simplificar a equação anterior ainda mais e escrever que $R_i \approx [\tau/(\pi m)]^{1/3}$. Seguindo o mesmo raciocínio, mas agora sem tomar o limite de quando $r \rightarrow 0$ (ou seja, para um valor constante qualquer de r não nulo), nós obtemos que $R \approx R_i + f(r)(m/\tau)^{2/3}$. Portanto, temos que ΔR tende à zero à medida que τ cresce e r é mantido fixo.

5.2.4.2 Momento angular gravitacional

Como vimos anteriormente, a eq. (5.44) corresponde a energia, para $a = 0$, e o momento linear do campo gravitacional, para $a = 1, 2$ ou 3 . Vamos agora, por completude, também calcular o momento angular desse campo, segundo os observadores de Novikov. Para isso, vamos primeiramente utilizar as componentes do superpotencial, dadas pela eq. (5.31), na expressão da definição da densidade de momento angular gravitacional, eq. (4.28). Relembrando as vantagens do “maquinário híbrido”, podemos reescrever a eq. (5.32) na forma

$$\bar{\Sigma}^{a0b} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r'}{N} \right) \hat{t}^a \hat{r}^b + \frac{\dot{r}}{r} \hat{r}^a \hat{r}^b + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{r}}{r} \right) (\hat{\theta}^a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b) . \quad (5.47)$$

⁶ Da eq. (3.83), podemos observar que, se fizermos r constante, quando $\tau \rightarrow \infty$ teremos $R \rightarrow \infty$, como as curvas azuis do lado direito da figura 6 estão ilustrando; e assim, da eq. (5.44), é possível ver que a energia, de fato, vai pra zero nesse limite.

Substituindo essa expressão na eq. (4.28), chegamos a

$$\bar{M}^{ab} = -8kNr(1 - r'/N) \sin \theta \hat{t}^{[a} \hat{r}^{b]}, \quad (5.48)$$

onde foi usado $e = Nr^2 \sin \theta$. Portanto, da eq. (5.48) e $\hat{t}^a \equiv \delta_{(0)}^a$, vemos imediatamente que $\bar{M}^{(i)(j)} = 0$, isto é, a densidade de momento angular usual gravitacional é nula. Veremos na seção 7.4 que essa é uma propriedade geral para tetradas que satisfazem o “time gauge”. Além disso, integrando $\bar{M}^{ab}$ num volume tridimensional espacial V , nós encontramos, conforme a eq. (4.29) vislumbra, que o momento angular total do campo gravitacional, $\bar{L}^{ab}$, é nulo.

5.2.4.3 A energia do universo espelho

Como vimos anteriormente, na seção 5.2.3, o frame de Novikov, $\bar{e}_a$, não é uma tetrada apropriada no universo espelho, mas nada nos impede de conferirmos os resultados obtidos se o considerarmos em tal universo, para avaliarmos suas consistências ou inconsistências. Assim, utilizando o frame de Novikov para calcularmos a energia do universo espelho, nós vemos que os cálculos não são muito diferentes do cálculo que fizemos para a energia do nosso universo. Obviamente, utilizamos o mesmo superpotencial, eq. (5.32), mas, desta vez, nós utilizamos a linha horizontal verde do lado esquerdo da figura 7, que representa o volume espacial da hipersuperfície de simultaneidade entre o contorno das duas cascas esféricas do universo espelho em $-|R|$ e $-R_i$ (estamos considerando $R_i > 0$). Portanto, utilizando a eq. (4.25) para calcular o 4-vetor energia-momento entre essas cascas esféricas, teremos

$$\bar{P}_-^a = 4\kappa \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[e(-R_i) \bar{\Sigma}^{a01}(-R_i) - e(-|R|) \bar{\Sigma}^{a01}(-|R|) \right] d\theta d\phi. \quad (5.49)$$

E, substituindo as eqs. (5.32) e (5.39) nessa expressão, obtemos

$$\bar{P}_-^a = \left[-r \left(1 + \frac{|R|}{\sqrt{1+R^2}} \right) + r_i \left(1 + \frac{R_i}{\sqrt{1+R_i^2}} \right) \right] \hat{t}^a. \quad (5.50)$$

Este resultado é equivalente a calcular a integral volumétrica espacial de $e \bar{t}^{0a}$, eq. (4.23), de $-|R|$ até $-R_i$.

Podemos observar, da eq. (5.50), que $\bar{P}_-^a$ vai pra $-\infty$ quando tomamos $R \rightarrow -\infty$ com τ e m fixos, uma vez que, nessas condições, como podemos ver da eq. (3.83), $R \rightarrow -\infty$ implica em $r \rightarrow \infty$. Isso está nos dizendo que a energia total⁷ do universo espelho é infinita, o que é um absurdo; logo tal resultado é inconsistente. Além disso, quando consideramos a ausência de gravidade, isto é, $m \rightarrow 0$ com r finito, o que implica em $R \rightarrow -\infty$ (como já discutido no segundo parágrafo da seção 5.2.3), obtemos que a eq. (5.50) fornece uma energia diferente de zero, a qual também diverge quando tomamos o limite assintótico

⁷ Total, no sentido de ser ao longo de toda a extensão do universo.

$r \rightarrow \infty$. Consequentemente este resultado também não é plausível. Muito provavelmente, esses resultados obtidos para a “energia”, que não são aceitáveis, estão ligados ao fato de que o frame de Novikov não é uma tetrada apropriada no universo espelho. Portanto, está claro que a eq. (5.50) não pode fornecer a energia correta para o universo espelho.

Poderíamos usar o procedimento de regularização do Maluf, Ref. [6], para chegar a conclusão de que a energia do universo espelho é a mesma que a do nosso universo. No entanto, quando executamos esse procedimento, perdemos a conexão entre a energia e o frame. Desta forma, não seríamos capazes de saber a relação entre o valor obtido de P^a e o frame que está sendo utilizado, no caso, o frame de Novikov. Assim, ao invés de utilizar tal artifício para obter a energia correta do universo espelho, vamos usar um novo frame, o qual é um frame de Novikov com uma inversão radial e temporal. Este novo frame é representado por $\bar{e}'_a$ e o denominamos de TRNF⁸.

A motivação para usar o TRNF é que, assim como o frame de Kruskal, o frame de Novikov também tem uma inversão temporal e radial em relação ao frame de Schwarzschild no outro universo. No entanto, se nós morássemos no universo espelho, nós acharíamos natural usar um vetor radial que apontasse na direção de ∂_r , não na direção de $-\partial_r$, como é o caso de ∂_R ⁹. Nós podemos ajustar o frame de Novikov para encontrar esse ponto de vista de “Schwarzschild” trocando $\hat{r}_a$ por $-\hat{r}_a$ na eq. (5.25), que é o mesmo que trocar N por $-N$ em todas as equações seguintes à eq. (5.25) que tem N escrito explicitamente. Isso é suficiente para transformar o frame da eq. (5.25) em uma tetrada apropriada, haja vista que a conexão de Levi-Civita, eq. (5.30), vai pra zero quando tomamos o limite $m \rightarrow 0$ e $R \rightarrow -\infty$ se nós mudamos N para $-N$. Contudo, esse novo frame tem um determinante negativo. Assim, nós também trocamos $\hat{t}_a$ por $-\hat{t}_a$ na eq. (5.25), que nos dá o TRNF. Pode ser verificado nas contas que esse último passo não afeta o valor da energia, mas nós ainda o tomamos para manter e positivo.

O TRNF, isto é, $\bar{e}'_a$, é adaptado aos observadores de Novikov que estão voltando no tempo τ , mas vão para o futuro de t . Calculando $\bar{P}'^a_-$ na mesma região que calculamos $\bar{P}^a_-$ (eq. (5.50)), a linha horizontal do lado esquerdo da figura 7, nós obtemos $\bar{P}'^a_- = -\bar{P}^a_+$, ou seja, a energia do universo espelho, quando utilizamos o TRNF como frame teleparalelo, seria o negativo da energia do nosso universo. Esta não é a energia que os observadores de Schwarzschild no universo espelho iriam predizer, pois esses observadores não iriam integrar $e\bar{t}'^{0a}$ da esquerda para a direita (de $-|R|$ para $-R_i$) no lado direito da figura 7; eles integrariam no sentido oposto, o que forneceria o resultado esperado $\bar{P}'^a_- = \bar{P}^a_+$.

O principal ponto das análises que fizemos até aqui é que os observadores (frames) que são definidos globalmente, como os de Kruskal e Novikov, não fornecem a energia correta em ambos os universos “simultaneamente”. Em resumo, nós concluimos que os

⁸ Do inglês: time-reversed and radial-inverted Novikov frame.

⁹ Note que a eq. (5.34) implica em $\partial_R = ()\partial_t - |r'|\partial_r$, para $R < 0$.

frames que cobrem toda a região $R \in (-\infty, \infty)$ dão resultados consistentes apenas em um dos universos. E, ao aplicarmos uma reflexão sobre ∂_r , nós mudamos o universo onde o frame é uma tetrad apropriada e dá o valor correto da energia.

Vale apenas notar aqui que a reflexão na direção radial, que acontece quando passamos através do buraco de minhoca, não é uma transformação de paridade, pois ela não muda os sinais dos dois últimos termos das equações (5.24) e (5.37). Se isso acontecesse, juntamente com a reflexão no eixo temporal, tanto a eq. (5.24) quanto a eq. (5.37) forneceriam $(-\partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z)$, quando $m \rightarrow 0$ (sendo $t = 0$ para Kruskal), no universo espelho, e a energia predita por esses frames seria finita. Então, se possível, seria interessante encontrar um sistema de coordenadas que naturalmente fornecesse uma transformação de paridade. Talvez, um frame adequado adaptado a esse sistema de coordenadas nos permitisse avaliar a energia em ambos os universos ao mesmo tempo.

5.2.5 A relação entre os observadores de Novikov e os de Schwarzschild

Usando $\partial_\tau = \dot{t}\partial_t + \dot{r}\partial_r$ e $\partial_R = t'\partial_t + r'\partial_r$ na eq. (5.25) e a comparando com a eq. (4.57), encontramos, para $R > 0$, que $\dot{r} = gW^{1/2}$ e $r'/N = fW^{1/2}$. Então, usando as eqs. (3.82) e (5.33), obtemos

$$\begin{aligned} g &= \mp \sqrt{\frac{2m}{r}} B^{1/2} W^{-1/2}, \\ f &= \frac{R}{\sqrt{1+R^2}} W^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

onde f é o fator de Lorentz e $g = \beta f$. Vale apenas mencionar que, se isolarmos $R/\sqrt{1+R^2}$ na eq. (5.51) e substituirmos o resultado na eq. (5.44) tomando $r_i = 0$ (garganta fechada), obtemos a eq. (43) da Ref. [31], que corresponde a energia-momento obtida com o frame da eq. (4.57).

Da eq. (5.51), nós obtemos que a velocidade dos observadores de Novikov em relação aos observadores de Schwarzschild é

$$\beta = \mp \sqrt{\frac{2m}{r}} \frac{\sqrt{1+R^2} - r/(2m)}{R}. \quad (5.52)$$

Façamos, agora, uma análise dessa última equação.

5.2.5.1 Velocidade relativa no horizonte de eventos

Tomando $r = 2m$, nós obtemos $\beta = \mp 1$, onde estamos assumindo $R > 0$ (nosso universo). O caso $\beta = -1$ corresponde aos observadores de Novikov atravessando o horizonte de evento de fora pra dentro, ou seja, entrando no buraco negro; enquanto o caso $\beta = 1$ corresponde aos observadores de Novikov atravessando o horizonte de eventos de dentro pra fora, ou seja, emergindo do buraco branco. É interessante notar que o horizonte

de eventos é, então, exatamente a região onde o valor da velocidade relativa entre esses observadores atinge a velocidade da luz.

5.2.5.2 O pico da trajetória

Os observadores de Novikov, linha verde da figura 6, emergem da singularidade ($r = 0$) do buraco branco e seguem radialmente até atingirem uma altura máxima e depois retornam a singularidade, agora, do buraco negro. O valor máximo dessa trajetória ocorre em $\tau = 0$ e é dada por $R_0 = \sqrt{r_0/(2m) - 1}$ [12]. E, como era de se esperar, a eq. (5.52) deixa claro, ao substituímos R por R_0 e fazer $r = r_0$, que a velocidade relativa entre os observadores de Novikov e os de Schwarzschild é nula nesse instante.

5.2.5.3 O limite $\tau \rightarrow \pm\infty$

Para um determinado valor de r , finito, nós podemos avaliar a velocidade relativa entre os observadores de Schwarzschild, que estão nesse valor fixo de r (linhas azuis da figura 6), e os observadores de Novikov, que estão passando por esses observadores de Schwarzschild após (ou antes de) atingirem um pico de trajetória extremamente alto ($r_0 \rightarrow \infty$); ou seja, os observadores de Novikov que estão numa posição $R = R_0 \rightarrow \infty$ e que, quando passam por esses observadores de Schwarzschild que estão em r , medem nos seus relógios um tempo $\tau \rightarrow \pm\infty$ (“−” durante a subida e “+” durante a descida). Isso é feito, então, tomando o limite de $R \rightarrow \infty$ na eq. (5.52), com r constante, o que corresponde a $\tau \rightarrow \pm\infty$ e nos fornece

$$\beta = \mp \sqrt{\frac{2m}{r}}. \quad (5.53)$$

Dessa maneira, podemos observar que, para $\tau > 0$ (sinal de cima da eq. (5.53)), essa velocidade coincide com a velocidade dos observadores usados por Maluf *et al.* na Ref. [43]. Portanto, os observadores de Novikov que estão passando por um determinado observador de Schwarzschild num certo r tendem aos observadores usados por Maluf *et al.* [43] a medida que o tempo passa. E, como mencionado no último parágrafo da seção 5.2.4.1, a “energia” predita por esses observadores é nula, o que está de acordo com o fato do lado direito da eq. (5.44) zerar no limite $\tau \rightarrow \infty$ ao longo das curvas r constante.

A diferença dos resultados obtidos para o valor da energia entre os observadores de Novikov e os observadores usados por Maluf *et al.* [43] pode ser interpretado da seguinte maneira: Para os observadores de Novikov, a energia é “medida” por um conjunto de observadores que têm o mesmo tempo próprio constante e seus relógios estão globalmente sincronizados. Por outro lado, para os observadores usados por Maluf *et al.* [43], o relógio desses observadores não estão sincronizados e a hipersuperfície de simultaneidade usada é a mesma da dos observadores de Schwarzschild, a qual é diferente da usada pelos

observadores de Novikov. Assim, essas circunstâncias podem indicar que a escolha da hipersuperfície correta e a sincronização dos relógios dos observadores tem um papel muito importante na predição correta do valor da energia gravitacional.

5.2.5.4 O limite $m \rightarrow 0$

É de esperar que, para algum dado valor finito de r diferente de zero, a velocidade relativa entre os observadores de Novikov e os de Schwarzschild seja nula no limite de ausência de gravidade ($m \rightarrow 0$). Podemos fazer essa constatação observando que a eq. (5.52) pode ser reescrita como $\beta = \mp(1/R)\sqrt{2m/r + 2mR^2/r - 1}$. Logo, usando que mR^2 é finito e que $R \rightarrow \infty$ nesse limite, como discutido na seção 5.2.3, vemos diretamente que $\lim_{m \rightarrow 0} \beta = 0$, como esperado.

5.3 Resultados e discussão final

Neste capítulo estudamos o problema da energia gravitacional de um buraco negro/branco em dois universos que estão parcialmente ligados pela garganta do chamado buraco de minhoca. Tal estudo foi feito analisando os resultados oriundos dos frames de Kruskal e Novikov. O resultado principal obtido foi que tanto o frame acelerado de Kruskal quanto o frame em queda livre de Novikov dão a energia correta assintoticamente em um universo por vez. Esse resultado consistente foi obtido ao usarmos uma hipersuperfície de simultaneidade adequada e remover a reflexão sobre a direção radial que ocorre quando mudamos de universo. Nós também mostramos que, enquanto a garganta do buraco de minhoca está aberta, tanto os observadores de Kruskal quanto os observadores de Novikov predizem uma energia total do espaço-tempo de $E = m - r_i$ dentro da hipersuperfície de simultaneidade no nosso universo. Além disso, nós analisamos as propriedades dos frames de Kruskal e Novikov e apontamos que o frame de Novikov tem algumas similaridades em relação ao frame em queda livre usado por Maluf *et al* na Ref. [43]. Também mostramos que a hipersuperfície de simultaneidade que usamos no caso de Novikov encolhe para zero, no limite em que o frame de Novikov se torna equivalente ao frame usado por Maluf *et al* na Ref. [43], o que explica o valor nulo obtido nessa referência.

Os resultados obtidos aqui contribuem para o estudo de um dos maiores problemas para o conceito de energia e momento gravitacional, que é o problema de como nós deveríamos arranjar os observadores em um certo instante de tempo [16]. Eles sugerem que se deveria usar uma hipersuperfície de simultaneidade que esteja de acordo com as perspectivas dos observadores, a qual talvez possa ser alcançada ao fixar uma coordenada temporal adequada que seja próxima ao tempo próprio dos observadores. No entanto, uma definição precisa dessa hipersuperfície ainda não está clara e, talvez, os resultados consistentes obtidos aqui sejam apenas coincidências. Por exemplo, se τ_k for o tempo pró-

prio de um observador de Kruskal em um determinado valo de X , então, nós teremos que $d\tau_k = F(r(T, X))dT$, o que significa que o intervalo de tempo $d\tau_k$ entre duas hipersuperfície é diferente para diferentes valores de X ; por isso, o relógio dos observadores de Kruskal não podem ser sincronizados. Por outro lado, os relógios dos observadores de Novikov podem ser sincronizados e o frame usado neste caso é uma tetradada apropriada. Mas, mesmo nesse caso, nós poderíamos argumentar que um cálculo completo e que tenha significado pode apenas ser atingido se a hipersuperfície de simultaneidade for definida com um conjunto completo de coordenadas próprias, como no caso do frame de referência próprio (PRF¹⁰). Essa abordagem está em concordância com a ideia de que, em um espaço-tempo curvo, tudo deveria ser definido localmente, e as únicas coordenadas com significado físico são coordenadas próprias. Contudo, se essa abordagem for a correta, em um espaço-tempo geral, nós estaríamos limitados a perspectiva de um único observador e seu PRF; e, além disso, ela tem a desvantagem de implicar que a energia gravitacional não pode ser localizada por um tensor densidade de energia-momento $t^{\mu a}$, pois $t^{\mu a}$ se anula ao longo da linha de universo do observador, independentemente da aceleração, como demonstrado pelo teorema VI.1 da Ref. [16].

Nós também podemos usar os resultados obtidos pra fazer algumas análises em relação a formulação ADM da energia e do momento, a qual exige que o espaço-tempo seja assintoticamente plano. Na Ref. [19], Arnowitt *et al.* argumentaram que essa é a exigência básica para uma energia ser bem definida. No entanto, a expressão da energia-momento padrão da formulação ADM, equações (5.1) e (5.2) da Ref. [19], é também limitada a um sistema de coordenadas no qual as componentes da métrica se aproximam do valor de Lorentz no infinito espacial. As componentes da métrica das coordenadas de Kruskal e Novikov claramente não satisfazem essa última restrição, mas elas de fato representam um espaço-tempo que é assintoticamente plano. Isso significa que a energia total delas deveria ser bem definida, de acordo com Arnowitt *et al.* E, uma vez que P^a , dado pela eq. (4.25), pode fornecer resultados consistentes para superfícies de simultaneidade adequadas assintoticamente, além de também ser aplicado à regiões não assintóticas tal qual a garganta do buraco de minhocas, nós podemos dizer que P^a estende as equações (5.1) e (5.2) da Ref. [19], ao invés de contradizê-las. Essa questão será analisada de forma mais detalhada no capítulo 7.

Assim como no caso de Kruskal, a singularidade também não forneceu nenhuma contribuição para a energia do espaço-tempo. Usando a integração de superfície, chegamos ao mesmo resultado da eq. (5.44), onde o segundo termo do lado direito vem justamente do contorno interno (o que exclui $r = 0$). Como este termo vai a zero no limite $r_i \rightarrow 0$, não há contribuição da singularidade. Embora não possamos provar que esse resultado seja geral, podemos especular que ele seja. O argumento a favor dessa ideia é o seguinte.

¹⁰ Do inglês: proper reference frame

No espaço-tempo de Minkowski, ou mesmo o euclidiano, as singularidades fazem parte do espaço, pois o espaço não se deforma, ele é absolutamente rígido e indiferente a energia da matéria. Assim, é natural que a singularidade de um certo campo nesses espaços, como o campo elétrico de uma partícula puntiforme, contribua para o fluxo através de uma casca esférica, mesmo quando tomamos o limite que o raio vai a zero; aliás, é até conceitualmente válido falarmos em uma delta de Dirac localizada na singularidade. Entretanto, no caso da relatividade geral, a singularidade não faz parte do espaço-tempo e, rigorosamente falando, não podemos atribuir uma delta de Dirac para um campo de matéria nessa singularidade, pois não há espaço-tempo lá. Desse argumento heurístico, podemos conjecturar que nenhuma singularidade contribuirá para a energia total do espaço-tempo, e que os resultados obtidos neste capítulo refletem essa propriedade geral.

Por fim, é oportuno fazer um comentário à respeito das diferentes abordagens com uso de tetradas para o problema da energia e do momento. Assim, vamos analisar mais especificamente a formulação usada por Møller na Ref. [3]. Poderia-se pensar que a eq. (4.19) é a mesma que a eq. (67) da Ref. [3], pois o superpotencial de Møller $U_{\alpha\mu\nu}$ é relacionado a $\Sigma_{\alpha\mu\nu}$ por $U_{\alpha\mu\nu} = 4\kappa e \Sigma_{\alpha\mu\nu}$. Contudo, isso não é verdade: para substituir a eq. (4.19) pela eq. (67) da Ref. [3], nós precisamos reescrever o termo $\partial_\nu (e \Sigma^{a\lambda\nu})$ como $\partial_\nu (e \Sigma_\mu^{\lambda\nu})$. Como consequência, nem P^a nem $t^{\mu a}$ coincidem com as definições de Møller. Onde vale ressaltar aqui, que a “equivalência” entre a abordagem de Møller e a teleparalela, mostrada na Ref. [44], não é entre o complexo de Møller $\hat{t}_\mu^\nu$ e $t^{a\mu}$, nem entre $\hat{t}_\mu^\nu$ e $e_{a\mu} t^{a\nu}$. Nós verificamos que a abordagem teleparalela, usada aqui, parece ser melhor do que a abordagem de Møller [3], pelo menos para o espaço-tempo de Kruskal. Por exemplo, ao usarmos que $U_{\alpha\mu\nu} = 4\kappa e \Sigma_{\alpha\mu\nu}$ na eq. (75) da Ref. [3], sendo $\Sigma_{\alpha\mu\nu}$ o superpotencial obtido do frame de Kruskal, nós encontramos que na abordagem de Møller não obtemos Mc^2 para os observadores de Kruskal, nem usando o limite l_1 nem o limite $r \rightarrow \infty$ com t fixo.

6 O tensor densidade de energia-momento gravitacional do Universo

Neste capítulo, apresentamos os resultados que foram publicados no artigo da Ref. [45]. Trata-se da aplicação do formalismo do TEGR para espaços-tempos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) para obter o tensor densidade energia-momento do campo gravitacional. Constatamos que esse tensor não é simétrico quando a seção espacial do universo é curva. Decompomos a sua parte simétrica em densidade, pressão isotrópica, pressão anisotrópica e no 4-vetor fluxo de calor. Já a parte antissimétrica, nós a dividimos em componentes “elétricas” e “magnéticas”. No entanto, notamos que esta última, a parte antissimétrica do tensor, não contribui para a energia e o momento gravitacional do universo.

No caminho da obtenção do tensor densidade de energia-momento gravitacional, $t^{\mu a}$, nós averiguamos e discutimos algumas informações importantes como, por exemplo, a energia total do universo e a aceleração do frame teleparalelo. Depois, já de posse do tensor gravitacional e utilizando as equações de campo, nós encontramos que a densidade da energia total do universo (a soma de todas as densidades, incluindo matéria e constante cosmológica) é nula em universos espacialmente planos. Além disso, também verificamos que as equações de campo tem um vácuo bem definido; isto é, que quando zeramos todas as formas de energia obtemos o espaço-tempo de Minkowski.

6.1 O frame fundamental dos espaços-tempos de FLRW

Como mencionado na seção 4.5, a energia gravitacional é dependente do frame (da tetrada, não do sistema de coordenadas). Assim, precisamos definir um frame fundamental do espaço-tempo, o qual o utilizaremos como sendo o frame teleparalelo usado para calcular o tensor densidade de energia-momento gravitacional, $t^{\lambda \mu}$. Deste modo, temos que o tensor gravitacional é medido em relação a este referencial.

Começamos determinando o frame fundamental de FLRW a partir do seu elemento de linha. Em seguida, obtemos as componentes da torção; as componentes da conexão de spin de Levi-Civita; o tensor de aceleração antissimétrico, o qual nos permite verificar que este frame é um frame em queda livre que não rotaciona; o superpotencial e, finalmente, o tensor densidade de energia-momento gravitacional.

6.1.1 Frame fundamental

Conforme visto na seção 3.5.1, o elemento de linha de FLRW em coordenadas esféricas é dado por

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 F(r)^2 (dr^2 + r^2 \theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2),$$

$$F(r) \equiv \frac{1}{1 + \frac{kr^2}{4}}, \quad (6.1)$$

onde $a(t)$ representa o fator de escala e $k = \pm 1, 0$ é a curvatura da seção espacial.

Para encontrarmos um frame fundamental para este elemento de linha, podemos usar as relações existentes entre o sistema de coordenadas cartesianas (t, x, y, z) e o sistema de coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) ; ou seja, $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$ e $z = r \cos \theta$. Assim, podemos reescrever a eq. (6.1) como

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 F(r)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (6.2)$$

Dessa forma, observando que $\mathbf{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{ab} \vartheta^a \otimes \vartheta^b$, nós podemos tomar

$$\begin{aligned} \vartheta^{(0)} &= dt, \\ \vartheta^{(1)} &= aF dx, \\ \vartheta^{(2)} &= aF dy, \\ \vartheta^{(3)} &= aF dz \end{aligned} \quad (6.3)$$

como sendo o co-frame do frame fundamental, o qual já foi usado anteriormente na literatura (ver, por exemplo, [46] e [47], [48]). É evidente que este co-frame se torna o de Minkowski, $\vartheta^a = (dt, dx, dy, dz)$, quando $k = 0$ e $a = 1$, além de satisfazer as condições das eqs. (4.40) e (4.41). É interessante destacar aqui que esse frame é, simultaneamente, um frame que satisfaz o time gauge e está adaptado a partículas em queda livre (como será demonstrado mais adiante), além da coordenada t representar o tempo próprio de todos os observadores. Esse frame, entretanto, não é necessariamente um referencial inercial local.

Na base coordenada $dx^\mu = (dt, dr, d\theta, d\phi)$ nós podemos escrever esse co-frame como

$$\vartheta^a = \hat{t}^a dt + aF \hat{r}^a dr + aFr \hat{\theta}^a d\theta + aFr \sin \theta \hat{\phi}^a d\phi, \quad (6.4)$$

onde $\hat{t}^a$, $\hat{r}^a$, $\hat{\theta}^a$ e $\hat{\phi}^a$ são dados pela eq. (4.42). E, como $\vartheta^a = e^a_\mu dx^\mu$, podemos escrever imediatamente

$$e^a_\mu = \hat{t}^a \delta_\mu^0 + aF (\hat{r}^a \delta_\mu^1 + r \hat{\theta}^a \delta_\mu^2 + r \sin \theta \hat{\phi}^a \delta_\mu^3). \quad (6.5)$$

Assim, usando que e^a_μ também pode ser escrito como

$$e^a_\mu = \hat{t}^a \hat{t}_\mu - \hat{r}^a \hat{r}_\mu - \hat{\theta}^a \hat{\theta}_\mu - \hat{\phi}^a \hat{\phi}_\mu, \quad (6.6)$$

onde $\hat{t}_\mu \equiv e_a^\mu \hat{t}_a$, e assim por diante, identificamos

$$\begin{aligned}\hat{t}_\mu &= \delta_\mu^0, \\ \hat{r}_\mu &= -aF\delta_\mu^1, \\ \hat{\theta}_\mu &= -aFr\delta_\mu^2, \\ \hat{\phi}_\mu &= -aFr\sin\theta\delta_\mu^3.\end{aligned}\tag{6.7}$$

De posse de $\hat{t}_\mu$, $\hat{r}_\mu$, $\hat{\theta}_\mu$ e $\hat{\phi}_\mu$, nós podemos usar a métrica de FLRW para obter $\hat{t}^\mu$, $\hat{r}^\mu$, $\hat{\theta}^\mu$ e $\hat{\phi}^\mu$; isto é, usar que $\hat{t}^\mu = g^{\mu\nu}\hat{t}_\nu$ (ou $\hat{t}^\mu = e_a^\mu \hat{t}^a$), e assim por diante. Fazendo isso, obtemos

$$\begin{aligned}\hat{t}^\mu &= \delta_0^\mu, \\ \hat{r}^\mu &= \frac{1}{aF}\delta_1^\mu, \\ \hat{\theta}^\mu &= \frac{1}{aFr}\delta_2^\mu, \\ \hat{\phi}^\mu &= \frac{1}{aFr\sin\theta}\delta_3^\mu,\end{aligned}\tag{6.8}$$

que podem ser usado para escrever as componentes coordenadas do frame como

$$e_a^\mu = \hat{t}_a\delta_0^\mu - \frac{1}{aF}\left(\hat{r}_a\delta_1^\mu + \frac{1}{r}\hat{\theta}_a\delta_2^\mu + \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\phi}_a\delta_3^\mu\right),\tag{6.9}$$

uma vez que $e_a^\mu = \hat{t}_a\hat{t}^\mu - \hat{r}_a\hat{r}^\mu - \hat{\theta}_a\hat{\theta}^\mu - \hat{\phi}_a\hat{\phi}^\mu$. Portanto, como $e_a = e_a^\mu\partial_\mu$, temos que o nosso frame fundamental de FLRW pode ser escrito como

$$e_a = \hat{t}_a\partial_t - \frac{1}{aF}\hat{r}_a\partial_r - \frac{1}{aFr}\hat{\theta}_a\partial_\theta - \frac{1}{aFr\sin\theta}\hat{\phi}_a\partial_\phi.\tag{6.10}$$

Algo cabível de se pontuar do frame fundamental de FLRW, eq. (6.10), é que a sua tríade espacial, $e_{(1)}$, $e_{(2)}$ e $e_{(3)}$, não sofre rotações espúrias quando comparada a pontos diferente da variedade, pois elas estão apontando para direções cartesianas. (A eq. (6.10) está adaptada a essas direções cartesianas, porém, por conveniência escrita em coordenadas esféricas; o formalismo híbrido permite que essa combinação possa ser feita em uma forma bastante compacta.) Este fato contribui para que os resultados obtidos, da energia gravitacional, por exemplo, sejam mais confiáveis, como argumentado na seção 4.5.

6.1.2 Torção de Weitzenböck

Uma vez estabelecido o frame fundamental, consequentemente $\hat{t}_\mu$, $\hat{r}_\mu$, $\hat{\theta}_\mu$ e $\hat{\phi}_\mu$ para o nosso caso, já estamos aptos a calcular as componentes da torção, $T_{\mu\nu}^a$, usando as eqs. (4.49) e (4.50). Com este intuito, é útil isolarmos os deltas da eq. (6.7) para os vermos explicitamente, uma vez que a eq. (4.50) é escrita em termos dos mesmos e queremos

escrever todos os nossos objetos em termos apenas do conjunto dos vetores unitários $\{\hat{t}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$. Fazendo isso, observamos que

$$\begin{aligned}\delta_\mu^0 &= \hat{t}_\mu, \\ \delta_\mu^1 &= -\frac{1}{aF}\hat{r}_\mu, \\ \delta_\mu^2 &= -\frac{1}{aFr}\hat{\theta}_\mu, \\ \delta_\mu^3 &= -\frac{1}{aFr\sin\theta}\hat{\phi}_\mu.\end{aligned}\tag{6.11}$$

Assim, aplicando ∂_μ na eq. (6.7) e fazendo uso da eq. (6.11), após alguns cálculos, nós obtemos

$$\begin{aligned}2\partial_{[\mu}\hat{t}_{\nu]} &= 0, \\ 2\partial_{[\mu}\hat{r}_{\nu]} &= 2\frac{\dot{a}}{a}\hat{t}_{[\mu}\hat{r}_{\nu]}, \\ 2\partial_{[\mu}\hat{\theta}_{\nu]} &= 2\frac{\dot{a}}{a}\hat{t}_{[\mu}\hat{\theta}_{\nu]} - 2\frac{(Fr)'}{arF^2}\hat{r}_{[\mu}\hat{\theta}_{\nu]}, \\ 2\partial_{[\mu}\hat{\phi}_{\nu]} &= 2\frac{\dot{a}}{a}\hat{t}_{[\mu}\hat{\phi}_{\nu]} - 2\frac{(Fr)'}{arF^2}\hat{r}_{[\mu}\hat{\phi}_{\nu]} - 2\frac{\cos\theta}{arF^2\sin\theta}\hat{r}_{[\mu}\hat{\phi}_{\nu]},\end{aligned}\tag{6.12}$$

onde $\dot{a} = da/dt$ e $F' = dF/dr$. E, usando a eq. (6.11) novamente, nós encontramos

$$\begin{aligned}2\delta_{[\mu}^2\hat{r}_{\nu]} &= 2\frac{1}{arF}\hat{r}_{[\mu}\hat{\theta}_{\nu]}, \\ 2\sin\theta\delta_{[\mu}^3\hat{r}_{\nu]} &= 2\frac{1}{arF}\hat{r}_{[\mu}\hat{\phi}_{\nu]}, \\ 2\cos\theta\delta_{[\mu}^3\hat{\theta}_{\nu]} &= 2\frac{\cos\theta}{arF\sin\theta}\hat{\theta}_{[\mu}\hat{\phi}_{\nu]}, \\ \delta_{[\mu}^2\hat{\theta}_{\nu]} &= \delta_{[\mu}^3\hat{\phi}_{\nu]} = 0.\end{aligned}\tag{6.13}$$

Finalmente, substituindo as eqs. (6.12) e (6.13) na eq. (4.50) e usando a eq. (4.49), nós chegamos em

$$T^a_{\mu\nu} = -2H\left(\hat{t}_{[\mu}\hat{r}_{\nu]}\hat{r}^a + \hat{t}_{[\mu}\hat{\theta}_{\nu]}\hat{\theta}^a + \hat{t}_{[\mu}\hat{\phi}_{\nu]}\hat{\phi}^a\right) - 2h\left(\hat{r}_{[\mu}\hat{\theta}_{\nu]}\hat{\theta}^a + \hat{r}_{[\mu}\hat{\phi}_{\nu]}\hat{\phi}^a\right),\tag{6.14}$$

sendo

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a},\tag{6.15}$$

$$h \equiv -\frac{F'}{aF^2} = \frac{kr}{2a}.\tag{6.16}$$

Essa é a versão das eqs. (39)-(42) da Ref. [48], em coordenadas esféricas. A partir de agora as contas serão puramente algébricas e, sempre que precisarmos da forma explícita de uma componente, recorreremos as listas das eqs. (4.42), (6.7) e (6.8).

6.1.3 Coeficientes da conexão de Levi-Civita e o superpotencial

Para calcular os coeficientes da conexão de Levi-Civita, $\hat{\omega}^a_{bc}$, nós usamos a eq. (6.14) na eq. (4.30). Os dois últimos termos do parênteses da eq. (4.30) podem ser escritos como $2T^{[a|b|c]}$. Da eq. (6.14), nós encontramos que esse termo é dado por

$$2T^{[a|b|c]} = -2H \left(\hat{t}^{[a} \hat{r}^{c]} \hat{r}^b + \hat{t}^{[a} \hat{\theta}^{c]} \hat{\theta}^b + \hat{t}^{[a} \hat{\phi}^{c]} \hat{\phi}^b \right) - 2h \left(\hat{r}^{[a} \hat{\theta}^{c]} \hat{\theta}^b + \hat{r}^{[a} \hat{\phi}^{c]} \hat{\phi}^b \right). \quad (6.17)$$

Assim, substituindo as eqs. (6.14) e (6.17) na eq. (4.30), nós obtemos

$$\hat{\omega}^a_{bc} = 2H \left(\hat{t}^{[a} \hat{r}_{c]} \hat{r}_b + \hat{t}^{[a} \hat{\theta}_{c]} \hat{\theta}_b + \hat{t}^{[a} \hat{\phi}_{c]} \hat{\phi}_b \right) + 2h \left(\hat{r}^{[a} \hat{\theta}_{c]} \hat{\theta}_b + \hat{r}^{[a} \hat{\phi}_{c]} \hat{\phi}_b \right). \quad (6.18)$$

Para calcular o superpotencial, Σ^{abc} , nós vamos usar a eq. (4.31). Lembrando da ortonormalidade dos vetores unitários, vemos que a eq. (6.18) leva a

$$\hat{\omega}^a_{ab} = 3H \hat{t}_b + 2h \hat{r}_b. \quad (6.19)$$

Portanto, usando as eqs. (4.48), (6.18) e (6.19) na eq. (4.31), nós obtemos após algumas manipulações que

$$\begin{aligned} \Sigma^{abc} = & 2H \left(\hat{t}^{[b} \hat{r}^{c]} \hat{r}^a + \hat{t}^{[b} \hat{\theta}^{c]} \hat{\theta}^a + \hat{t}^{[b} \hat{\phi}^{c]} \hat{\phi}^a \right) \\ & + 2h \left(\hat{r}^{[b} \hat{\theta}^{c]} \hat{\theta}^a + \hat{r}^{[b} \hat{\phi}^{c]} \hat{\phi}^a \right) + 2h \hat{t}^{[b} \hat{r}^{c]} \hat{t}^a. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Vimos na seção 4.4, eq. (4.37), que o tensor de aceleração antissimétrico é dado por $\phi_c^a = \hat{\omega}^a_{(0)c}$, ou, equivalentemente, por $\phi_c^a = \hat{\omega}^a_{bc} \hat{t}^b$. Então, usando esta ultima relação, da contração de $\hat{t}^b$ com o $\hat{\omega}^a_{bc}$ dado pela eq. (6.18), vemos facilmente que $\phi_a^b = 0$. Por isso, o frame dado pela eq. (6.10) é um frame em “queda” livre e a tríade espacial não rotaciona ao redor da direção do movimento de um observador cuja a 4-velocidade está na direção $\hat{t} = e_{(0)}$. Em outras palavras, a tetrada da eq. (6.10) está adaptada a um sistema feito por partículas livres, que não possui interações de natureza não gravitacional. E, neste caso, não só a congruência está adaptada a esse sistema, a tríade também está, pois $e_{(1)}$ aponta na direção das partículas livres ao longo do eixo x; já $e_{(2)}$ aponta na direção das partículas que estão ao longo do eixo y etc. Qualquer variação na posição dessas partículas em relação ao que quer que seja, os eixos da tríade acompanham, sem rotações desvinculadas ao sistema. Nesse sentido, a tetrada da eq. (6.10) está presa ao sistema, o que lhe confere um significado físico.

6.1.4 A energia do Universo

É possível avaliar a energia total¹ do universo sem qualquer detalhe sobre os campos de matéria, isso já foi feito em muitos contextos diferentes (ver, por exemplo, as Refs. [46], [48], [49], [32]). Nesta seção, nós vamos revisar os resultados de Sousa *et al.* [48].

¹ O que queremos dizer com “total” é a soma de todas as formas de energia em um determinado volume espacial, não necessariamente de todo o volume espacial.

A energia total do universo obtida por Sousa *et al.*, eq. (58) da Ref. [48], dentro de uma região esférica, pode ser escrita como

$$E = k \frac{c^4}{2G} \frac{ar^3}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}, \quad (6.21)$$

onde c é a velocidade da luz e G é a constante gravitacional de Newton; o momento total é $P^{(i)} = 0$. Esse resultado é um caso especial daqueles encontrados na secção IX da Ref. [32].

Como está claro da eq. (6.21), a energia dentro da esfera se anula para $k = 0$ e, obviamente, a energia total do universo é conservada. A energia total dentro de uma esfera finita não é zero para $k = 1$, mas a energia total de todo o Universo ($r \rightarrow \infty$) sim. Contudo, para $k = -1$, a energia total do universo diverge a medida que r tende a ∞ , o que poderia ser utilizado como um argumento contrário a essa solução.

A seguir, iremos calcular e discutir a densidade de energia-momento gravitacional do Universo, para os modelos de FLRW. Até onde temos ciência, esta é a primeira vez que este tensor é completamente calculado e analisado.

6.2 Tensor energia-momento gravitacional

Para obter o tensor densidade de energia-momento gravitacional, t^{ab} , vamos primeiro calcular cada termo dos parenteses da eq. (4.32) separadamente. Assim, fazendo uso da eq. (6.18) e das relações de ortogonalidade entre nossos vetores unitários, após algumas manipulações algébricas nós encontramos que

$$\hat{\omega}_{ad}^c \hat{\omega}_c^{bd} = -H^2 \left(\hat{r}_a \hat{r}^b + \hat{\theta}_a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b \right) + h^2 \left(\hat{\theta}_a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b \right), \quad (6.22)$$

$$\hat{\omega}_{da}^c \hat{\omega}_c^{bd} = -3H^2 \hat{t}_a \hat{t}^b - 2Hr \left(\hat{t}_a \hat{r}^b + \hat{t}^b \hat{r}_a \right) - 2h^2 \hat{r}_a \hat{r}^b, \quad (6.23)$$

$$\hat{\omega}_{ad}^b \hat{\omega}_c^{cd} = -3H^2 \left(\hat{r}_a \hat{r}^b + \hat{\theta}_a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b \right) + 2h^2 \left(\hat{\theta}_a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b \right) - 2Hh \hat{t}^b \hat{r}_a, \quad (6.24)$$

$$\hat{\omega}_{da}^b \hat{\omega}_c^{cd} = -4Hh \hat{t}^{[b} \hat{r}_{a]}, \quad (6.25)$$

$$\hat{\omega}_{ca}^c \hat{\omega}_d^{db} = 9H^2 \hat{t}_a \hat{t}^b + 6Hh \left(\hat{t}_a \hat{r}^b + \hat{t}^b \hat{r}_a \right) + 4h^2 \hat{r}_a \hat{r}^b, \quad (6.26)$$

$$\delta_a^b \hat{\omega}_{cf}^c \hat{\omega}_d^{df} = \delta_b^a \left(9H^2 - 4h^2 \right), \quad (6.27)$$

$$\delta_a^b \hat{\omega}_{df}^c \hat{\omega}_c^{df} = \delta_b^a \left(3H^2 - 2h^2 \right), \quad (6.28)$$

Portanto, com o uso das expressões acima na eq. (4.32) e mais algumas manipulações, nós obtemos

$$t^{ab} = \rho \hat{t}^a \hat{t}^b + (3p + 4\kappa H^2) \hat{r}^a \hat{r}^b - 2\kappa H^2 (\hat{\theta}^a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b) - 4\kappa H h (2\hat{t}^a \hat{r}^b + \hat{t}^b \hat{r}^a), \quad (6.29)$$

onde,

$$\begin{aligned} \rho &\equiv -2\kappa(3H^2 + h^2), \\ p &= \rho/3. \end{aligned} \quad (6.30)$$

A eq. (164) da Ref. [32] se reduz a ρ quando $\varphi = 0$. Porém, o cálculo de todas as componentes de t^{ab} é um resultado novo.

A escolha das letras ρ e p na eq. (6.30) não é aleatória. Como nós veremos na seção seguinte, elas podem ser interpretadas como a densidade da energia gravitacional e a pressão isotrópica de um fluido com uma equação de estado do tipo radiação. Provaremos, no capítulo 7, que esse resultado é geral.

Note que tanto ρ quanto p são sempre negativos e se anulam se $\dot{a} = k = 0$. Também é interessante notar, a partir dos valores de H e h dados pelas eqs. (6.15) e (6.16), que o tensor t^{ab} é simétrico apenas para $k = 0$. Na teoria de campos clássica, a falta de simetria nos índices do tensor energia-momento é associada a um momento angular intrínseco (veja, por exemplo, pág. 116 da Ref. [50]), que não é o caso aqui. De qualquer forma, para o caso do campo gravitacional, isso não necessariamente é um problema, pois, segundo Bergmann e Thomson (Ref. [51], pág. 403), a única razão para exigir que o tensor de energia-momento da matéria seja simétrico nos seus índices é para garantir que não haja um torque sobre um material na ausência de forças externas. Entretanto, no caso do tensor de energia-momento do campo gravitacional, não existe, em princípio, nenhuma equação de torque que permita uma análise desse tipo. E se existir, é possível que não haja uma correlação exata entre o torque e a simetria dos índices, como no próprio caso tratado por Bergmann e o Thomson na Ref. [51]. Na próxima seção nós vamos decompor $t^{\mu\nu}$, dado pela eq. (6.29), e interpretar suas partes, incluindo a parte antissimétrica.

6.2.1 Decomposição do tensor densidade de energia gravitacional

Em princípio, nós poderíamos simetrizar t^{ab} . Contudo, nós achamos que é mais consistente trabalhar com o tensor original, dado pela eq. (6.29).

Dividindo $t^{\mu\nu}$ em partes simétricas, $t^{(\mu\nu)}$, e antissimétricas, $t^{[\mu\nu]}$, teremos que o mesmo é dado por

$$t^{\mu\nu} = t^{(\mu\nu)} + t^{[\mu\nu]}, \quad (6.31)$$

onde

$$t^{(\mu\nu)} = \rho \hat{t}^\mu \hat{t}^\nu + (3p + 4\kappa H^2) \hat{r}^\mu \hat{r}^\nu - 2\kappa H^2 (\hat{\theta}^\mu \hat{\theta}^\nu + \hat{\phi}^\mu \hat{\phi}^\nu) - 6\kappa H h (\hat{t}^\mu \hat{r}^\nu + \hat{t}^\nu \hat{r}^\mu) \quad (6.32)$$

e

$$t^{[\mu\nu]} = -2 \frac{k\kappa\dot{a}r}{a^2} \hat{t}^{[\mu} \hat{r}^{\nu]} . \quad (6.33)$$

Na última expressão, usamos h dado pela eq. (6.16). Podemos observar que essas partes não são conservadas, ou seja, $\partial_\mu (et^{(\mu\nu)}) \neq 0$ e $\partial_\mu (et^{[\mu\nu]}) \neq 0$. Mas, como veremos mais adiante, apenas a parte simétrica contribui para o 4-vetor energia-momento total do universo.

6.2.1.1 Decomposição da parte simétrica

Aplicando a decomposição da parte simétrica de $t^{\mu\nu}$, de maneira análoga a eq. (3.100), identificando $\hat{t}_\mu = u_\mu$, nós obtemos

$$t_{(\mu\nu)} = \rho \hat{t}_\mu \hat{t}_\nu - p h_{\mu\nu} + 2q_{(\mu} \hat{t}_{\nu)} + \pi_{\mu\nu} , \quad (6.34)$$

onde, como visto,

$$\rho = t_{(\mu\nu)} \hat{t}^\mu \hat{t}^\nu , \quad (6.35)$$

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \hat{t}_\mu \hat{t}_\nu = -(\hat{r}_\mu \hat{r}_\nu + \hat{\theta}_\mu \hat{\theta}_\nu + \hat{\phi}_\mu \hat{\phi}_\nu) , \quad (6.36)$$

$$p = -\frac{1}{3} t_{(\mu\nu)} h^{\mu\nu} , \quad (6.37)$$

$$q_\lambda = t_{(\mu\nu)} \hat{t}^\nu h_\lambda^\mu , \quad (6.38)$$

$$\pi_{\mu\nu} = t_{(\alpha\beta)} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta + p h_{\mu\nu} . \quad (6.39)$$

A identidade $g_{\mu\nu} = \hat{t}_\mu \hat{t}_\nu - \hat{r}_\mu \hat{r}_\nu - \hat{\theta}_\mu \hat{\theta}_\nu - \hat{\phi}_\mu \hat{\phi}_\nu$ foi usada na segunda igualdade da eq. (6.36).

Como pontuado anteriormente, ρ e p são a densidade de energia e a pressão isotrópica, respectivamente. Para checar que ρ e p , dados pela eq. (6.30), são os mesmos das eqs. (6.35) e (6.37), respectivamente; basta avaliar essas últimas equações citadas com a ajuda da eq. (6.32) e da eq. (6.36). Para obtermos a cara de q_λ e $\pi_{\mu\nu}$, basta usarmos novamente as eqs. (6.32) e (6.36), agora, nas eqs. (6.38) e (6.39), para encontrar, respectivamente, que

$$q_\lambda = -6\kappa H h \hat{r}_\lambda \quad (6.40)$$

e

$$\pi_{\mu\nu} = -\frac{4}{3} \kappa h^2 \hat{r}_\mu \hat{r}_\nu + \frac{2}{3} \kappa h^2 (\hat{\theta}_\mu \hat{\theta}_\nu + \hat{\phi}_\mu \hat{\phi}_\nu) . \quad (6.41)$$

Uma vez que h se anula para $k = 0$ (eq. (6.16)), nós concluímos, das eqs. (6.40) e (6.41), que não há nenhum fluxo de calor ou pressão anisotrópica em um “gás de grávitons” para um universo espacialmente plano.

6.2.1.2 Decomposição da parte antissimétrica

Para a parte antissimétrica, nós usamos a decomposição usual para um objeto antissimétrico.

$$t_{[\mu\nu]} = E_\mu \hat{t}_\nu - E_\nu \hat{t}_\mu + \eta_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \hat{t}_\rho B_\sigma, \quad (6.42)$$

onde $\eta_{\mu\nu\rho\sigma} = e \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ (ϵ_{0123}) representa a densidade tensorial de Levi-Civita e

$$E_\mu = t_{[\mu\nu]} \hat{t}^\nu \quad (6.43)$$

e

$$B_\mu = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} t_{[\rho\sigma]} \hat{t}^\nu \quad (6.44)$$

são os vetores “elétrico” e “magnético”, respectivamente. Os significados de E_μ e B_μ não estão claros; mas, se nós os compararmos com o tensor de energia-momento canônico da teoria clássica de campos em Minkowski, nós poderíamos interpretá-los como sendo alguma espécie de momento angular “intrínseco”. Denotando essa contribuição por $S^{a\mu\nu}$, a qual pode ser vista como um tipo de corrente de momento angular, nós podemos escrever a eq. (6.42) na forma

$$et^{[\mu a]} = \frac{1}{2} \partial_\nu (e S^{a\mu\nu}), \quad (6.45)$$

onde $S^{a\mu\nu} = (k\kappa r/a)(2\hat{t}^a \hat{r}^\mu - \hat{t}^\mu \hat{r}^a) \hat{t}^\nu$. Contudo, é importante notar que $S^{a\mu\nu} \neq S^{\mu a\nu}$; apenas após avaliar a derivada do lado direito da eq. (6.45) é que nós obtemos um objeto antissimétrico. Também é importante estar ciente de que $S^{a\mu\nu}$ não é antissimétrico nos dois últimos índices, por isso a expressão acima é dependente de coordenada e $S^{a\mu\nu}$ não é conservada. Então, talvez não seja realmente uma boa ideia interpretar $S^{a\mu\nu}$ como um momento angular real². Para descobrir se $S^{a\mu\nu}$ pode de fato ser ou não interpretado como um momento angular, nós teríamos que encontrar equações para o momento angular total que fossem similar as eqs. (2.20) e (2.21) de Bergmann e Thompson [51]. Mas esse não é o nosso propósito aqui.

Usando a eq. (6.33) nas eqs. (6.43) e (6.44), nós obtemos, respectivamente, $E_\mu = -q_\mu/3$ e $B_\mu = 0$, onde a eq. (6.40) foi utilizada na primeira igualdade (de E_μ). Podemos notar que, assim como no caso do fluxo de calor e da pressão anisotrópica, E_μ também é zero quando $k = 0$.

No caso em que k é diferente de zero, a parte antissimétrica de $t^{\mu\nu}$ não se anula. Porém, mesmo nesse caso, o valor de P^a dentro de uma volume espacial esférico permanece não afetado por $t^{[\mu\nu]}$. Para verificar isso, nós podemos avaliar o valor da integral de $et^{[0a]}$,

² Em todo caso, $S^{a\mu\nu}$ implicaria em um desaparecimento do momento angular, já que $S^{(i)j0} = 0$.

que da eq. (6.45) vemos que pode ser dada por $I = \int_V d^3x \partial_\nu (e S^{a0\nu})$. Fazendo isso, notamos que

$$\begin{aligned} I &= \int_V d^3x \partial_0 (e S^{a00}) + \int_V d^3x \partial_j (e S^{a0j}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3x (e S^{a00}) \sim \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\phi \sin \theta \hat{r}^a = 0, \end{aligned} \quad (6.46)$$

onde, na primeira igualdade, nós usamos o fato de que $S^{a0j} = 0$ e, na última igualdade, nós utilizamos a eq. (4.42) para realizar a integração. Assim, a energia e momento gravitacional dentro de uma superfície espacial esférica não dependem de $S^{a\mu\nu}$ ou, equivalentemente, de $t^{[\mu\nu]}$.

6.2.2 Equações de campo

Nós podemos escrever as equações de campo para a densidade de energia total do universo tomando $a = (0)$ e $\mu = 0$ na eq. (4.19). Fazendo isso, teremos

$$\partial_\nu (e \Sigma^{(0)0\nu}) = \frac{e}{4\kappa} (t^{0(0)} + T^{0(0)} + 2\kappa \Lambda e^{(0)0}). \quad (6.47)$$

Como discutido na seção 3.5.1, o tensor energia-momento da matéria para os espaço-tempos de FLRW é dado pela eq. (3.109). Usando que as 4-velocidades das galáxias são descritas por $e_{(0)}^\mu$ na equação desse tensor (eq. (3.109)), podemos reescrevê-la como

$$T^{\mu\nu} = (\rho_m + p_m) e_{(0)}^\mu e_{(0)}^\nu - p_m g^{\mu\nu}, \quad (6.48)$$

onde ρ_m e p_m correspondem, respectivamente, à densidade de energia e à pressão da matéria (ou demais energias que não sejam gravitacionais). Contraindo a eq. (6.48) com e^a_ν , obtemos

$$T^{\mu a} = (\rho_m + p_m) e_{(0)}^\mu \delta_{(0)}^a - p_m e^{\mu a}. \quad (6.49)$$

Notando da eq. (6.9) que $e_{(0)}^0 = \hat{t}_{(0)} \delta_0^0 = 1$ (devido a assinatura que usamos também temos $e^{(0)0} = 1$), encontramos, segundo a eq. (6.49), $T^{0(0)} = \rho_m$. Utilizando as eqs. (6.8) e (4.42), obtemos da eq. (6.29) $t^{0(0)} = \rho$. Assim, de posse de $t^{0(0)}$, $T^{0(0)}$ e $e^{(0)0}$, a eq. (6.47) é reescrita como

$$\partial_\nu (e \Sigma^{(0)0\nu}) = \frac{e}{4\kappa} (\rho + \rho_m + 2\kappa \Lambda). \quad (6.50)$$

Utilizando novamente as relações da eq. (6.8), observamos da eq. (6.20) que

$$\Sigma^{(0)0\nu} = 2h \hat{t}^{[0} \hat{r}^{\nu]}. \quad (6.51)$$

(lembrando que h é dado pela eq. (6.16).) Fazendo uso mais uma vez da eq. (6.8) e substituindo $e = a^3 F^3 r^2 \sin \theta$, após alguns cálculos, encontramos

$$\partial_\nu (e \Sigma^{(0)0\nu}) = \frac{k(3 - kr^2 F)}{2a^2 F} e. \quad (6.52)$$

Portanto, usando a equação acima na eq. (6.47), depois de mais algumas manipulações, teremos

$$(3 - kr^2 F) \frac{k}{8\pi a^2 F} = \rho + \rho_m + \frac{\Lambda}{8\pi}, \quad (6.53)$$

onde foi usado $\kappa = 1/(16\pi)$. Se usarmos o ρ dado pela eq. (6.30), pode-se verificar que esta última equação é equivalente a eq. (3.110).

Agora, tomando as componentes $a = (i)$ e $\mu = j$, a eq. (4.19) passa a ser escrita como

$$\partial_\nu(e\Sigma^{(i)j\nu}) = \frac{e}{4\kappa}(t^{j(i)} + T^{j(i)} + 2\kappa\Lambda e^{(i)j}). \quad (6.54)$$

Reparando na eq. (6.9), podemos perceber que a eq. (6.49) fornece

$$T^{j(i)} = -p_m e^{(i)j}. \quad (6.55)$$

Levantando o índice de tetrada na eq. (6.9) e a combinando com a eq. (6.8), também podemos notar que

$$e^{(i)j} = -(\hat{r}^{(i)}\hat{r}^j + \hat{\theta}^{(i)}\hat{\theta}^j + \hat{\phi}^{(i)}\hat{\phi}^j). \quad (6.56)$$

Portanto,

$$T^{j(i)} = p_m(\hat{r}^{(i)}\hat{r}^j + \hat{\theta}^{(i)}\hat{\theta}^j + \hat{\phi}^{(i)}\hat{\phi}^j). \quad (6.57)$$

Por sua vez, olhando para a eq. (6.29), teremos

$$t^{j(i)} = (3p + 4\kappa H^2)\hat{r}^{(i)}\hat{r}^j - 2\kappa H^2(\hat{\theta}^{(i)}\hat{\theta}^j + \hat{\phi}^{(i)}\hat{\phi}^j), \quad (6.58)$$

onde usamos $\hat{t}^{(i)} = \hat{t}^i = 0$. Nos voltando agora para as componentes do superpotencial, da eq. (6.20), obtemos

$$\Sigma^{(i)j\nu} = -H\hat{t}^\nu(\hat{r}^{(i)}\hat{r}^j + \hat{\theta}^{(i)}\hat{\theta}^j + \hat{\phi}^{(i)}\hat{\phi}^j) + h(\hat{r}^{[j}\hat{\theta}^{\nu]}\hat{\theta}^{(i)} + \hat{r}^{[j}\hat{\phi}^{\nu]}\hat{\phi}^{(i)}), \quad (6.59)$$

onde foi usado mais uma vez as relações das eqs. (6.8) e (4.42). Lembrando que H e h são dados, respectivamente, pelas eqs. (6.15) e (6.16), utilizando $e = a^3 F^3 r^2 \sin \theta$ e recorrendo outra vez as eqs. (6.8) e (4.42), é possível encontrar

$$\partial_\nu(e\Sigma^{(i)j\nu}) = -\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k}{2a^2 F}\right)e(\hat{r}^{(i)}\hat{r}^j + \hat{\theta}^{(i)}\hat{\theta}^j + \hat{\phi}^{(i)}\hat{\phi}^j) + \frac{k^2 r^2}{8a^2}e(\hat{\theta}^{(i)}\hat{\theta}^j + \hat{\phi}^{(i)}\hat{\phi}^j). \quad (6.60)$$

Substituindo as eqs. (6.56), (6.57), (6.58) e (6.60) na eq. (6.54) e igualando os coeficientes de bases iguais, além de usar $\kappa = 1/(16\pi)$, chegamos em

$$4H^2 + \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{k}{a^2 F} = -8\pi\left(3p + p_m - \frac{\Lambda}{8\pi}\right). \quad (6.61)$$

Pode-se notar que a eq. (6.61) é equivalente à eq. (3.111) ao usarmos p dado pela eq. (6.30).

As demais combinações de índices na eq. (4.19) levam à identidades ou à equações redundantes.

6.2.3 Energia e momento gravitacional

Das eqs. (6.29) e (6.8) e usando $h = kr/(2a)$, nós podemos ver que $t^{0a} = \rho \hat{t}^a - (4\kappa k H r/a) \hat{r}^a$. Assim, substituindo este resultado na eq. (4.23) e fazendo uso da eq. (6.40), nós temos que a energia e o momento gravitacional dentro de alguma região de volume V é dado por

$$P_g^a = \int_V d^3x e \left(\rho \hat{t}^a + \frac{4}{3} q^a \right). \quad (6.62)$$

Note que o momento gravitacional, $P_g^{(i)}$, é nulo para $k = 0$, independentemente da região de integração, já que $\hat{t}^a = \delta_{(0)}^a$ e $q^a = -6\kappa H k r/(2a) \hat{r}^a$. E, para $k \neq 0$, ele também é zero, se a integração for feita sobre uma região esférica. Contudo, a densidade de energia gravitacional, ρ , não é nula, a menos que tenhamos $H = 0$ e $k = 0$, ver eq. (6.30). Essas propriedades são consistentes com o que nós esperaríamos do tensor energia-momento gravitacional do universo.

Nós calculamos a energia gravitacional do universo, dentro de uma região esférica de raio R , usando as eqs. (6.30) e (6.40) na eq. (6.62). Fazendo isso, podemos ver que a integral da eq. (6.62) pode ser escrita como

$$E_g = P_g^{(0)} = -8\pi\kappa a^3 \left[3H^2 \int_0^R dr \frac{r^2}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} + \frac{k^2}{4a^2} \int_0^R dr \frac{r^4}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} \right], \quad (6.63)$$

onde essa equação é um caso particular da eq. (168) da Ref [32]. Vamos agora, então, rever os casos $k = 0$ e $k = \pm 1$.

6.2.3.1 Universo espacialmente plano ($k = 0$)

Usando $k = 0$ na eq. (6.63) e a integrando, nós encontramos $E_g = -8\pi\kappa a R^3 \dot{a}^2$, que, como podemos ver, é sempre negativa, independentemente do fator de escala. E, uma vez que a energia total, para $k = 0$, deve ser nula, como visto anteriormente na eq. (6.21), nós devemos ter que $E_g + E_m + E_\Lambda = 0$, onde E_m e E_Λ são, respectivamente, as energias dos campos de matéria e da constante cosmológica. Assim, como E_g é sempre negativa e E_m e E_Λ são sempre positivas, este resultado está em concordância com a visão de Tryon, de que a energia total do universo é zero [18]. Além disso, vários complexos de energia-momento diferentes predizem resultados similares; ver, por exemplo, a Ref. [49].

A densidade da energia total, para $k = 0$, também vai ser nula. Para verificarmos isso, basta fazer $k = 0$ na eq. (6.53) e observar que obtém-se $\rho + \rho_m + \frac{\Lambda}{8\pi} = 0$, o que mostra que a energia total de universos espacialmente planos também é zero localmente. Entendemos esse resultado como sendo novo, uma vez que desconhecemos algum artigo que tenha chegado a ele antes da Ref. [45].

6.2.3.2 Universos espacialmente esférico ($k = +1$) e convexo ($k = -1$)

Como já foi provado na Ref. [48], e pode ser inferido da eq. (6.21), a energia total do universo é zero para $k = +1$ quando $R \rightarrow \infty$. No entanto, a eq. (6.53) nos mostra que essa energia não se anula localmente para $k = +1$.

A densidade da energia total para o caso $k = -1$ também não desaparece, como era de se esperar. Isso está em concordância com o resultado divergente da energia total quando $R \rightarrow 2$ [48].

6.3 Vácuo absoluto

Muitas teorias físicas têm um conceito de vácuo que não é absoluto. Por exemplo, na relatividade geral, vácuo significa ausência de qualquer forma de energia que não seja gravitacional, mas nós sabemos que nesse vácuo há algum tipo de energia, como, por exemplo, no caso das forças de maré próximas ao horizonte de eventos de um buraco negro que seriam capaz de matar uma pessoa. Nós, então, analisamos a existência de um vácuo realmente absoluto, pelo menos a nível clássico, para nossas equações de campo obtidas para os universos de FLRW.

Podemos verificar que as eqs. (6.30), (6.53) e (6.61) estão em concordância com o postulado feito na Ref. [16], o qual define o conceito de vácuo absoluto. Esse postulado diz que: a métrica deve ser a métrica do espaço-tempo de Minkowski se, e somente se, tivermos $t^{\mu a} = 0$, *campos da matéria* = 0 e $\Lambda = 0$ para o frame fundamental. Assim, vamos examinar se tomar $t^{\mu\nu} = 0$, $T^{\mu\nu} = 0$ e $\Lambda = 0$ nos leva a métrica de Minkowski. Vale ressaltar que o caminho inverso do postulado, ou seja, tomar a métrica de Minkowski e verificar que ela nos leva a $t^{\mu\nu} = 0$, $T^{\mu\nu} = 0$ e $\Lambda = 0$ é trivial.

Notamos que tomar $t^{\mu a} = 0$ é equivalente a tomar $\rho = 0$ (que também fornece $p = 0$), já que isso implica em ter $H = h = 0$. Logo, como $H = \dot{a}/a$ e $h = kr/(2a)$, nós encontramos que devemos ter $a = \text{constante}$ e $k = 0$; isso já resulta na métrica de Minkowski³. Poderíamos parar por aqui, mas vale a pena mostrar que as equações são satisfeitas para o vácuo absoluto. Usando $\rho = p = 0$ e $k = \dot{a} = 0$ nas eqs. (6.53) e (6.61) obtemos $\rho_m + \Lambda/(8\pi) = 0$ e $p_m - \Lambda/(8\pi) = 0$. Como estamos supondo que o vácuo é absoluto, então $\rho_m = \Lambda = 0$. Portanto, as equações citadas estão em concordância com esta ideia de vácuo absoluto.

³ Para verificar isso, basta escolher $a = 1$ e usar $k = 0$ na eq. (6.1)

6.4 Resultados e discussão final

Nós mostramos que o frame fundamental do espaço-tempo de FLRW, eq. (6.10), não é acelerado e nem rotaciona ao longo da linha de universo dos observadores ao qual está adaptado. Também calculamos completamente o tensor densidade de energia-momento gravitacional, referente a esse frame, e o decompomos, mostrando que o campo gravitacional satisfaz uma equação de estado do tipo radiação. A análise da energia gravitacional nos revelou que, no frame fundamental, a energia do universo é nula localmente se o universo for espacialmente plano ($k = 0$). Este último resultado poderia resolver o “problema da planicidade⁴” sem recorrer a inflação, uma vez que, na visão de Tryon [18], a energia do universo ser zero é bastante natural. Em outras palavras, o universo seria espacialmente plano porque a energia do universo tem que ser zero.

Na Ref. [16] foi argumentado que o espaço-tempo deve ser o de Minkowski se, e somente se, não tivermos energia dos campos de matéria e nem energia associada ao campo gravitacional. Esse postulado pode ser usado para descartar alguns frames como possíveis candidatos a frame teleparalelo de um certo espaço-tempo. É, por isso, importante verificar se um frame fornecerá equações de campo que satisfaçam essa propriedade. Devido a isso, neste capítulo, nós provamos que o frame usado aqui leva a equações de campo com um vácuo absoluto bem definido.

Para comparar os resultados obtidos aqui com resultados anteriores, precisa-se distinguir o conceito de energia gravitacional do conceito de energia de um espaço-tempo. Em geral, o suposto 4-vetor energia-momento total de um espaço-tempo é associado com a divergência de um superpotencial, no TEGR, o lado esquerdo da eq. (4.19) leva a eq. (4.25). Por outro lado, o tensor densidade de energia-momento gravitacional do TEGR (ou os pseudotensores gravitacionais da relatividade geral), em geral, não é relacionado a essa divergência do superpotencial. Contudo, na ausência dos campos de matéria eles coincidem. Devido a essa equivalência, geralmente, usa-se a divergência do superpotencial para avaliar a energia gravitacional quando a matéria está ausente. Porém, mesmo quando os campos de matéria estão presente, as vezes, refere-se a energia do espaço-tempo como a “energia gravitacional”. Por exemplo, na Ref. [52] foi mostrado que a densidade de energia do espaço-tempo, não a gravitacional, predita pela abordagem de Einstein é nula num sistema de coordenadas conforme do espaço-tempo de FLRW para $k = 0$, isto é, para a métrica $ds^2 = \Omega(\tau)^2(d\tau^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j)$. Esse resultado é consistente com o desaparecimento do lado esquerdo da eq. (6.53) quando $k = 0$. Aqui, nós dizemos que a energia do espaço-tempo coincide com a do campo gravitacional apenas quando ρ_m e Λ desaparecem. (Note que nós assumimos que Λ vem dos campos de matéria. Na realidade, todavia, espera-se

⁴ Esse problema vem da seguinte observação. Se o universo for aproximadamente plano hoje, então ele deve ter sido ainda mais plano, absurdamente plano, no seu início; a ausência de uma explicação para isso é visto como um problema. A solução tida como padrão, é admitir que o universo passou por uma fase de expansão acelerada, a chamada expansão inflacionária.

que Λ deva ser uma constante cosmológica efetiva que tem contribuições tanto dos campos de matéria quanto do campo gravitacional.)

Uma vez que no TEGR a energia é dependente do frame, como comentário final deste capítulo, nós gostaríamos de pontuar que a “energia” calculada com um frame diferente não seria necessariamente consistente com a eq. (6.21). Um exemplo disso é a energia calculada na Ref. [53], onde nessa referencia o frame utilizado não satisfaz as condições das eqs. (4.40) e (4.41).

7 A generalização da energia e do momento gravitacional ADM

Neste capítulo, apresentamos os resultados de nossas pesquisas que estão sendo submetidos para publicação.

Começamos destacando que, a fim de compararmos nossos resultados com os de outros autores, neste capítulo, nós usaremos a assinatura do espaço-tempo como sendo $(-, +, +, +)$, que é a mesma assinatura utilizada pelos autores que são citados aqui. Aqui, defendemos a tese de que a energia e o momento gravitacional do teleparallelismo podem ser vistos como uma generalização da energia e do momento gravitacional do formalismo ADM. Para dar suporte a esta tese, nós mostramos que o 4-momento teleparalelo coincide com o 4-momento da abordagem ADM em todas as situações nas quais o 4-momento ADM pode ser aplicado. Para conseguirmos tal feito, as únicas suposições adotadas são a condição de gauge temporal para o frame teleparalelo utilizado e as restrições bem conhecidas em relação ao sistema de coordenadas usado no cálculo do 4-momento ADM.

Em seguida, nós pontuamos alguns exemplos onde o formalismo ADM não fornece resultados consistentes, enquanto a abordagem teleparalela fornece. Também exibimos as vantagens que o tensor densidade de energia-momento gravitacional do TEGR tem sobre o pseudo-tensor de Landau-Lifshitz. Por fim, nós discutimos algumas dificuldades na identificação da densidade de momento angular gravitacional, eq. (4.28). Nós mostramos que a parte espacial da densidade momento angular proposta, M^{ab} , se anula quando o frame teleparalelo satisfaz as condições do gauge temporal. E, finalizamos, apresentando nossas conclusões das discussões realizadas ao longo do capítulo.

7.1 O TEGR e o formalismo ADM

Nesta seção, fazemos um comparativo entre as definições de energia e momento usadas no formalismo ADM com as usada pelo TEGR. Para isso, escrevemos os campos de tetradas usadas do TEGR em termos das funções *lapse* e *shift*, apresentadas na seção 3.6. Reforçamos aqui que todas as convenções empregadas nessa tese, como as de índices etc., são mantidas ao longo desse capítulo, com exceção da assinatura do espaço-tempo, que aqui passa a ser $(-, +, +, +)$. Além disso, vamos denotar por ${}^3g_{ij}$ e 3e_a as versões tridimensionais da métrica e do frame quadridimensionais, isto é, de $g_{\mu\nu}$ e e_a .

Vimos no capítulo 4, na abordagem do TEGR, que as equações de campo de

Einstein (eq. (4.18)) são escritas como

$$\partial_\nu (e \Sigma^{a\mu\nu}) = \frac{e}{4\kappa} (t^{\mu a} + T^{\mu a}) . \quad (7.1)$$

Explicamos o porquê que essa forma peculiar de se escrever as equações de Einstein pode ser motivada pelo formalismo hamiltoniano do TEGR, desenvolvido por Maluf e colaboradores. Também vimos que o 4-momento do espaço-tempo pode ser escrito em termos do 4-momento do campo gravitacional mais o da matéria, isto é,

$$P^a = P_g^a + P_m^a . \quad (7.2)$$

Também vimos que, integrando a eq. (7.1) em uma região do espaço que não contenha singularidades, obtemos

$$P^a = 4\kappa \oint_S dS_j e \Sigma^{a0j} , \quad (7.3)$$

isto é, o 4-momento do espaço-tempo pode ser dado por uma integral de superfície.

Como podemos perceber, uma diferença importante entre o 4-momento do TEGR e o do formalismo ADM é o papel desempenhado pelo campo de tetradas no 4-momento do TEGR, haja vista que a eq. (7.3) depende de tal campo. Infelizmente, essa dependência vai além da dinâmica do frame. Em um certo sentido, ela se assemelha aquela do formalismo ADM em relação ao sistema de coordenadas. Quando dizemos que a dependência do campo de tetrada vai além da dinâmica do frame, queremos dizer que o 4-momento no TEGR é sensível a propriedades artificiais desse campo de tetradas, isto é, propriedades que não estão relacionadas ao estado de movimento do sistema físico, como no caso das rotações espúrias mencionadas na seção 4.5.

Uma possível solução para esse problema mencionado é fixar os eixos da tetrada a um sistema físico de uma forma consistente. Por exemplo, o campo vetorial $e_{(0)}$ pode ser fixado à geodésica tipo-tempo de uma partícula em queda livre, enquanto a tríade $e_{(j)}$ é fixada nas direções do momento angular de três giroscópios.

Com o intuito de compararmos as eqs. (3.125) e (3.126) com a eq. (7.3), nós precisamos escrever o campo de tetrada em termos das funções *lapse* e *shift* do formalismo ADM. Uma possível decomposição 3 + 1 para os campos de tetradas, no mesmo sistema de coordenadas da eq. (3.118), é dada por

$$\begin{aligned} e^a_i &= {}^3e^a_i , \\ e^a_0 &= N\eta^a + {}^3e^a_i N^i , \\ e^{ai} &= {}^3e^{ai} + \frac{N^i}{N} \eta^a , \end{aligned} \quad (7.4)$$

sendo $\eta^a \equiv -N e^{a0}$. Em seguida, nós restringimos o campo de tetrada ao gauge temporal de Schwinger e mostramos que o campo vetorial $\mathbf{n} \equiv n^\mu \partial_\mu$, onde $n^\mu \equiv g^{\mu\nu} n_\nu$ e n_ν é dado pela eq. (3.122), coincide com $e_{(0)}$ nesse gauge.

7.1.1 O gauge temporal

O gauge temporal é caracterizado por exigirmos $e_{(i)}^0 = 0$. Desta forma, nesse gauge, nós obtemos as seguintes propriedades [20]:

$$\begin{aligned}\tau_{(i)}^0 &= 0, \quad \tau_{(i)}^{(0)} = 0, \quad \tau_{(0)}^{(0)} = \frac{1}{\tau_{(0)}^0}, \\ \tau_{(0)}^{(i)} &= -\tau_{(0)}^{(0)} \tau_{(i)}^{(j)} \tau_{(0)}^j, \quad e = \tau_{(0)}^{(0)} {}^3e,\end{aligned}\tag{7.5}$$

onde, de agora em diante, nós passamos a usar $\tau_a{}^\mu$ para representar as componentes do campo de tetrada que satisfaz o gauge temporal. Passaremos a usar também um subíndice τ como rótulo nas quantidades que são dependentes do frame e estão escritas no time gauge. As condições de ortonormalidade da tetrada, quando escritas no time gauge, tomam a forma

$$\begin{aligned}\tau_{(k)}^i \tau_{(j)}^{(k)} &= \delta_j^i, \\ \tau_{(j)}^k \tau_{(i)}^{(j)} &= \delta_i^k.\end{aligned}\tag{7.6}$$

Agora, aplicando o gauge temporal ao campo de tetrada dado pela eq. (7.4) obtemos

$$\begin{aligned}\tau_{(0)}^0 &= \frac{1}{N}, \quad \tau_{(0)}^i = -\frac{N^i}{N}, \quad \tau_{(i)}^0 = 0, \\ \tau_{(i)}^j &= {}^3\tau_{(i)}^j, \quad e = N {}^3e\end{aligned}\tag{7.7}$$

e o co-frame fornece

$$\begin{aligned}\tau_{(0)}^{(0)} &= N, \quad \tau_{(i)}^{(0)} = 0, \\ \tau_{(0)}^{(i)} &= \tau_{(i)}^{(j)} N^j, \quad \tau_{(i)}^a = {}^3\tau_{(i)}^a.\end{aligned}\tag{7.8}$$

Comparando $\tau_{(0)}^\mu$, dado pela eq. (7.7), com a eq. (3.123), verificamos que $\mathbf{n} = \tau_{(0)}$, onde $\mathbf{n} = n^\mu \partial_\mu$ e $n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu$. Em outras palavras, quando assumimos o gauge temporal, o vetor $e_{(0)}$ se torna normal a hipersuperfície de simultaneidade $t=\text{constante}$, onde t é o tempo coordenado, e coincide com o vetor normal usado no formalismo ADM.

É importante notar que impor o gauge temporal no frame dado pela eq. (7.4), não significa impor uma restrição sobre o espaço-tempo, mas sim sobre o campo de tetradas. Por isso, nós sempre podemos assumir as eqs. (7.7) e (7.8), independentemente do espaço-tempo a ser estudado.

7.2 A energia e o momento do TEGR no gauge temporal

Nesta seção, mostramos que o 4-momento P^a do TEGR generaliza o 4-momento do formalismo ADM quando o frame teleparalelo satisfaz o gauge temporal. Primeiramente,

provamos que os 3-momentos das duas abordagens são os mesmos para os casos em que a energia e momento do formalismo ADM são válidos. Então, utilizamos os resultados obtidos pelas Refs. [6–8, 10] para concluir que a eq. (7.3) generaliza as eqs. (3.125) e (3.126).

Para encontrarmos a relação entre o superpotencial do TEGR e a curvatura extrínseca da hipersuperfície $t=\text{constante}$, onde t é o mesmo tempo coordenado usado na eq. (3.118), escrevemos a eq. (4.31) na forma $\Sigma^{a\mu\nu}$ e tomamos $\mu = 0$ e $\nu = i$. Isso nos fornece

$$\Sigma^{a0i} = \frac{1}{2}e_c^i e_b^0 \dot{\omega}^{cab} + \frac{1}{2}e^{a0} e_c^i \dot{\omega}_b^{bc} - \frac{1}{2}e^{ai} e_b^0 \dot{\omega}_d^{db}, \quad (7.9)$$

onde usamos que $\Sigma^{a\mu\nu} = e_b^\mu e_c^\nu \Sigma^{abc}$.

Vamos agora restringir a eq. (7.9) ao gauge temporal para o caso de $a = (j)$. Primeiramente, notamos que o segundo termo da eq. (7.9) se anula, pois $\tau^{(j)0} = 0$. Logo, só precisamos nos preocupar com os outros dois termos.

Da primeira e da terceira igualdade da eq. (7.7), nós vemos que $\tau_b^0 \dot{\omega}_\tau^{cab} = (-1/N) \dot{\omega}_\tau^{ca}_{(0)}$ e $\tau_b^0 \dot{\omega}_\tau^{db} = (-1/2) \dot{\omega}_\tau^d_{(0)}$; o rótulo “ τ ” indica que $\dot{\omega}_{bc}^a$ foi avaliado em um frame que satisfaz o gauge temporal. E, uma vez que $\dot{\omega}_{abc} = -\dot{\omega}_{cba}$, nós devemos ter $\dot{\omega}_{(0)b(0)} = 0$. Assim, as últimas duas expressões no gauge temporal podem ser reescritas como

$$\tau_c^i \tau_b^0 \dot{\omega}_\tau^{cab} = -\frac{1}{N} \tau_{(k)}^i \dot{\omega}_\tau^{(k)a}_{(0)} \quad (7.10)$$

e

$$\tau_b^0 \dot{\omega}_\tau^{db} = -\frac{1}{N} \dot{\omega}_\tau^{(k)}_{(k)(0)}, \quad (7.11)$$

onde contraímos o primeiro índice da primeira equação acima com τ_c^i .

Por sua vez, da definição de $\dot{\omega}_{ab}^c$, nós temos $\dot{\omega}_{ab}^c = e^c_\lambda e_a^\mu \dot{\nabla}_\mu e_b^\lambda$, que pode ser escrita como $\dot{\omega}_{ab}^c = e^{c\lambda} e_a^\mu \dot{\nabla}_\mu e_{b\lambda}$. Logo, desta última identidade, nós podemos ver que $\dot{\omega}_{a(0)}^{(k)} = e^{(k)\lambda} e_a^\mu \dot{\nabla}_\mu e_{(0)\lambda}$. Agora, da igualdade $\tau_{(0)\lambda} = n_\lambda$ e da eq. (3.122), nós encontramos que $\dot{\omega}_{\tau_{a(0)}}^{(k)} = N \dot{\Gamma}_{\mu\lambda}^0 \tau^{(k)\lambda} \tau_a^\mu$, onde usamos o fato de que $\tau^{(k)0} = 0$. Por outro lado, a partir das eqs. (3.124) e (3.122), vemos que a curvatura extrínseca toma a forma $K_{ij} = -N \dot{\Gamma}_{ij}^0$. Assim, chegamos a relação

$$\dot{\omega}_{\tau_{(j)(0)}}^{(k)} = -K_{pq} \tau_{(j)}^p \tau^{(k)q}. \quad (7.12)$$

Como $\tau_{(i)}^j = {}^3\tau_{(i)}^j$, nós podemos usar a primeira igualdade da eq. (7.6) para obter a relação

$$\tau_{(k)q}^{(k)q} \tau_{(k)}^p = {}^3g^{pq}. \quad (7.13)$$

Assim, contraindo k com j na eq. (7.12), obtemos

$$\dot{\omega}_{\tau}^{(k)}{}_{(k)(0)} = -{}^3K, \quad (7.14)$$

onde ${}^3K \equiv K_{pq} {}^3g^{pq}$.

A partir das eqs. (7.12) e (7.14), verificamos que as eqs. (7.10) e (7.11) podem ser reescritas, respectivamente, como $\tau_c^i \tau_b^0 \dot{\omega}_{\tau}^{c(j)b} = (1/N) {}^3K^{(j)i}$ e $\tau_b^0 \dot{\omega}_{\tau}^{d b} = {}^3K/N$, onde usamos a eq. (7.13) e ${}^3K^{(j)i} \equiv K_{pq} {}^3\tau^{(j)p} {}^3g^{iq}$ (lembrando que $\tau_{(i)}^j = {}^3\tau_{(i)}^j$). Substituindo essas expressões na eq. (7.9) com $a = (j)$ e lembrando que o segundo termo desaparece para $a = (j)$, nós chegamos em

$$\Sigma_{\tau}^{(j)0i} = \frac{1}{2N} \left({}^3K^{(j)i} - {}^3\tau^{(j)i} {}^3K \right). \quad (7.15)$$

Sabemos que $e = \sqrt{-g}$ (tetrad com um determinante positivo), onde g é o determinante da métrica. Por sua vez, também temos que $\sqrt{-g} = N\sqrt{{}^3g}$. Portanto, devemos ter $e = N\sqrt{{}^3g}$. Assim, utilizando essa identidade na eq. (7.15), obtemos

$$e\Sigma_{\tau}^{(j)0i} = \frac{1}{2}\sqrt{{}^3g} \left({}^3K^{(j)i} - \tau^{(j)i} {}^3K \right), \quad (7.16)$$

onde removemos o rótulo 3 do campo de tetradas, haja vista que $\tau_{(j)}^i = {}^3\tau_{(j)}^i$. Comparando a eq. (7.16) com a eq. (3.127) e usando o fato de que $\tau^{(j)p} = {}^3g^{pq}\tau_{(j)q}$, nós encontramos que $e\Sigma_{\tau}^{(i)0j} = (-1/2) {}^3\pi^{(i)j}$, sendo ${}^3\pi^{(i)j} \equiv \tau_{(i)k}^{(j)} {}^3\pi^{kj}$. Finalmente, usando esse resultado na eq. (7.3), chegamos finalmente a

$$P_{\tau}^{(i)} = -2\kappa \oint_S dS_j {}^3\pi^{(i)j}. \quad (7.17)$$

Fica claro da expressão acima que o momento teleparalelo no gauge temporal e o momento do formalismo ADM, eq. (3.126), vão coincidir sempre que ${}^3\pi^{(i)j}$ e ${}^3\pi^{ij}$ forem equivalentes na superfície bidimensional S . Essa equivalência acontece ou quando $\tau_{(i)k}^{(j)} = \delta_k^j$ ou quando ${}^3\pi^{ij}$ for nulo. É importante notar, contudo, que a energia P^0 ADM pode ser diferente da energia $P^{(0)}$ do TEGR mesmo nesses casos citados.

As eqs. (3.125) e (3.126) foram definidas em regiões assintoticamente planas e em um sistema de coordenadas onde as componentes da métrica tendem às de Minkowski. Nesta situação, a função *shift* vai pra zero e a função *lapse* vai pra 1. Logo, se nós assumirmos que as componentes do frame teleparalelo são escritas na base coordenada desse sistema de coordenadas especial, nós, certamente, teremos $\tau_{(i)k}^{(j)} = \delta_k^j$, assegurando a equivalência entre P^i do formalismo ADM e $P^{(i)}$ do TEGR. Um argumento similar foi usado por Maluf *et al.* [10] para mostrar que a energia do TEGR coincide com a energia ADM nessa situação, isto é, $P^0 = P^{(0)}$. Por isso, em todos os casos em que o 4-momento ADM é aplicado, podemos fazer o 4-momento do TEGR coincidir com a versão ADM ao tomarmos o frame teleparalelo como sendo um frame que satisfaz assintoticamente as condições do gauge temporal.

No entanto, há casos onde o 4-momento ADM não pode ser aplicado (e se aplicado, falha na predição da energia correta), mas o 4-momento do TEGR pode, e dá a resposta correta. Um exemplo dessa situação, como visto no capítulo 5, é o espaço-tempo de Kruskal: podemos prever a energia do espaço-tempo correta nas coordenadas de Kruskal (também em Novikov) ao usarmos a eq. (7.3), mas não a eq. (3.125). Além disso, o 4-momento do TEGR é invariante sob qualquer transformação de coordenada do espaço tridimensional, uma propriedade que o 4-momento do formalismo ADM não tem. Isso mostra que a abordagem do TEGR generaliza a do formalismo ADM.

7.3 O tensor densidade de energia-momento gravitacional do TEGR versus o pseudo-tensor de Landau-Lifshitz

Uma vez que o pseudo-tensor de Landau e Lifshitz é compatível com a energia e o momento do formalismo ADM [19], nesta seção nós comparamos tal pseudo-tensor com $t_{\mu\nu}$ do TEGR e mostramos as vantagens do último.

Nós podemos usar a decomposição de Eckart [17] do tensor energia-momento para decompor a parte simétrica de $t^{\mu\nu}$. Usando o fato de que $t_{\mu\nu}$ tem traço nulo, esse procedimento nos leva a densidade de energia $\rho \equiv t_{(\mu\nu)}e_{(0)}^{\mu}e_{(0)}^{\nu} = t_{(0)(0)}$ e a pressão isotrópica $p \equiv (1/3)t_{(\mu\nu)}h^{\mu\nu} = (1/3)t_{(0)(0)}$, sendo $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + e_{(0)\mu}e_{(0)\nu}$. Por isso, o TEGR prediz que o campo gravitacional satisfaz uma equação de estado do tipo-radiação, $p = \rho/3$, a qual é compatível com o fato de que o gráviton é uma partícula sem massa.

O resultado acima é uma consequência do fato de que qualquer tensor energia-momento de traço nulo satisfaz uma equação desse tipo, como é óbvio da prova acima. Conforme nós devemos ver resumidamente, o pseudo-tensor de Landau e Lifshitz não satisfaz essa propriedade e, por isso, não pode descrever a densidade de energia de um campo sem massa, tal qual um campo gravitacional.

Como vimos na seção 3.7, usando as eqs. (3.136) e (3.140), nós temos que, na abordagem de Landau e Lifshitz, as equações de campo de Einstein podem ser escritas na forma

$$\partial_{\alpha}\partial_{\beta}H_{L-L}^{\mu\alpha\nu\beta} = 16\pi(t_{L-L}^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}) \quad (7.18)$$

onde

$$H_{L-L}^{\mu\alpha\nu\beta} = \sqrt{-g}(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}), \quad (7.19)$$

$t_{L-L}^{\mu\nu}$ é o pseudo-tensor densidade de energia momento gravitacional de Landau-Lifshitz e a integral do lado esquerdo da eq. (7.18) fornece um 4-momento que é compatível com o do formalismo ADM.

Por uma questão de simplicidade, mas sem perda de generalidade, vamos assumir que $T^{\mu\nu}$ é nulo. Neste caso, nós temos $t_{L-L}^{\mu\nu} = (1/(16\pi))\partial_\alpha\partial_\beta H_{L-L}^{\mu\alpha\nu\beta}$. É evidente dessa expressão que $t_{L-L}^{\mu\nu}$ não tem necessariamente o traço nulo e, por esse motivo, ele não pode representar um campo sem massa.

Um outro problema com $t_{L-L}^{\mu\nu}$ é que ele é sensível a transformações de coordenadas sem significado físico, ou seja, aquelas que não mudam o estado de movimento do observador. Para ver isso, nós podemos tomar a métrica de Minkowski adaptada a um frame de referência inercial, mas em coordenadas esféricas, isto é, $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$. Assim, é imediato checar que $t_{L-L}^{00} \neq 0$.

Por outro lado, $t^{\mu\nu}$ desaparece no espaço-tempo de Minkowski para qualquer sistema de coordenadas, desde que o campo de tetrada seja inercial ou o frame de referência próprio de um observador acelerado arbitrariamente [16].

Também é interessante notar que o resultado não nulo de $t_{L-L}^{\mu\nu}$ em coordenadas esféricas é um bom exemplo do problema pontuado por Laue (ver, por exemplo, pág. 233 da Ref. [23]): a afirmação enganosa de que os símbolos de Christoffel representam as forças do campo gravitacional. O mesmo problema está presente em $t_{L-L}^{\mu\nu}$, pois ele pode ser escrito em termos dos símbolos de Christoffel (veja, por exemplo, a página 138 da Ref. [54]). Além do mais, o valor não nulo de t_{L-L}^{00} , em coordenadas esféricas, não é nem mesmo uma realização do princípio de equivalência, pois os observadores com valores constantes em tais coordenadas são observadores inerciais. Ou seja, nesse caso, o princípio da equivalência sugeriria um valor nulo. Qualquer definição razoável da energia gravitacional não deve depender de transformações de coordenadas que não alterem a coordenada temporal (o estado de movimento).

7.4 Dificuldades com o momento angular do TEGR

Como vimos no capítulo 4, no cenário do TEGR, Maluf [7] interpreta a densidade de momento angular gravitacional do espaço-tempo como sendo o tensor

$$M^{ab} = -4ke \left(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a} \right). \quad (7.20)$$

Vamos, então, nesta seção, discutir as consequências de interpretar essa quantidade M^{ab} como a densidade de momento angular.

Em princípio, não está muito claro se M^{ab} é a densidade de momento angular do espaço-tempo ou apenas do campo gravitacional (ou de algo a mais). Isso devido a não existir uma equação de conservação conhecida envolvendo M^{ab} e a densidade de momento angular da matéria. É possível que a interpretação de M^{ab} como momento angular do campo gravitacional só possa ser feita em um tipo particular de referencial. O teorema a seguir sugere fortemente essa dependência.

Teorema 7.1 *Seja τ_a um frame que satisfaz o gauge temporal, ou seja, $\tau_{(i)}^0 = 0$. Nesse frame, nós temos $M_\tau^{(i)(j)} = 0$ independentemente da métrica do espaço-tempo.*

Prova. Das eqs. (7.15) e (7.6)-(7.8), nós encontramos que $\Sigma_\tau^{(j)0(k)} = \Sigma_\tau^{(k)0(j)}$, onde usamos o fato de que $K_{\mu\nu}$ é simétrico. Como resultado, observando a eq. (7.20), vemos de imediato que $M_\tau^{(j)(k)} = 0$ para qualquer espaço-tempo. Uma outra maneira de provar isso é a partir das eqs. (4.30) e (4.31), que nos permitem reescrever a eq. (7.20) na forma $M^{ab} = -2\kappa e(T^{0ab} + e^{b0}T^a - e^{a0}T^b)$. Por sua vez, das eqs. (4.2) e (7.6)-(7.8), nós vemos que $T_\tau^{0(j)(k)}$ e $\tau^{(j)0}$ são nulos, o que leva a $M_\tau^{(j)(k)} = 0$.

Esse resultado significa que a densidade de momento angular, $M_\tau^{(j)(k)} = 0$, desaparece mesmo em espaços-tempos como os de Gödel. Então, se interpretássemos $M_\tau^{(j)(k)}$ como sendo o momento angular do espaço-tempo, poderia-se argumentar que a densidade de momento angular gravitacional é cancelada pela densidade de momento angular da matéria. Contudo, não há nenhuma equação que confirme isso. Por outro lado, se interpretarmos $M_\tau^{(j)(k)}$ como a densidade de momento angular gravitacional, nós teríamos um espaço-tempo onde a matéria tem um momento angular não nulo, mas o campo gravitacional não reage a esse momento, o que seria totalmente contraintuitivo.

Foi especulado na Ref. [16], tópico 6 da página 38, que provavelmente o referencial ideal para analisar a energia gravitacional seja um referencial adaptado a partículas livres, pois ele seria um sistema puramente gravitacional, sem qualquer interferência de outras formas de energia na estrutura do referencial. Em todos os casos tratados aqui, nesta tese, com exceção do frame de Kruskal, a tetrada está adaptada a um sistema de partículas em queda livre e, ao mesmo tempo, satisfaz o gauge temporal de Schwinger. Todavia, é improvável que seja sempre possível encontrar um referencial de partículas em queda livre¹ que satisfaça o gauge do tempo. Devido à nulidade da densidade de momento angular (parte espacial) no frame com o gauge temporal, acreditamos que em espaços-tempos com rotação, como o de Kerr, não seja possível encontrar um frame de partículas em queda livre que satisfaça o gauge do tempo.

O argumento em favor de considerar um frame em queda livre como sendo o frame ideal é a seguinte: Um frame de referência é necessariamente um sistema físico, não uma entidade abstrata. No entanto, considerando o mesmo como uma partícula de teste, nós podemos negligenciar seu tensor energia-momento e, assim, desprezar seus efeitos sobre a curvatura do espaço-tempo. Mas nós não podemos desconsiderar suas propriedades qualitativas quando estudamos sua dinâmica e a energia gravitacional do espaço-tempo. Por exemplo, as coordenadas de Schwarzschild estão relacionadas a uma aceleração que é necessária para manter as partículas testes em repouso na coordenada radial; nesse sistema de coordenadas, e portanto no frame adaptado a ele, assume-se a existência de uma força

¹ Novamente, é importante não confundir esse referencial com um referencial inercial local, pois este último só está em queda livre ao longo de uma única curva do espaço-tempo.

externa (não gravitacional). Em outras palavras, assume-se que tanto o tensor energia-momento do sistema que acelera as partículas testes quanto o tensor energia-momento das próprias partículas testes não interferem significativamente na geometria de fundo do espaço-tempo. Contudo, propriedades qualitativas tal qual “a origem do frame é acelerada” nunca podem ser negligenciadas. Então, é natural pensar em duas possibilidades. A primeira é assumir que essas interações não gravitacionais associadas ao frame acabam por impedir a interpretação adequada de $t^{\lambda\mu}$ como o tensor energia-momento gravitacional. A segunda, e talvez a mais desejável, é que $t^{\lambda\mu}$ realmente represente o tensor densidade de energia-momento gravitacional em qualquer frame livre de propriedades artificiais, mas as forças não gravitacionais mudam a energia gravitacional de uma maneira que pode ser difícil de entender, pelo menos quando desprezamos os efeitos dessas forças na geometria de fundo. Por isso, a abordagem mais segura parece ser a de tomar $t^{\lambda\mu}$ como o tensor densidade de energia-momento gravitacional apenas quando o frame está adaptado a partículas em queda livre.

Para sustentar a ideia de que essas interações não gravitacionais mudam o comportamento da gravidade, podemos pontuar que os sistemas de coordenadas que são geralmente usados para escrever uma métrica arbitrária na forma Minkowskiana localmente são todos adaptados à partículas que estão aceleradas devido a interações não gravitacionais, com exceção da partícula que está na origem. Isso ocorre porque o sistema de coordenadas normais de Fermi, que é o sistema que permite escrever a métrica na forma de Minkowski ao longo da trajetória de um observador, corresponde a um sistema localmente rígido (régua rígida, por exemplo) que está em queda livre apenas na origem; a consequência dessa rigidez é que as forças internas do sistema, digamos régua, sofrem um desequilíbrio em oposição ao desvio geodésico (ou forças de maré, na visão newtoniana), sendo essa a razão do porquê as partículas não seguirão o desvio geodésico como partículas livres seguiriam. Por outro lado, parece que sistemas de coordenadas adaptados à partículas testes em queda livre não permitem a métrica tomar a forma Minkowskiana nas vizinhanças da trajetória de uma partícula teste arbitrária em queda livre. Por isso, é natural assumir que a melhor maneira de examinar a energia gravitacional é usando um sistema de partículas em queda livre como frame teleparalelo, haja vista que este não tem interações não gravitacionais que possam interferir na informação gravitacional do espaço-tempo. Isso não significa que este tipo de frame é privilegiado, ele é apenas conveniente para identificar e interpretar a energia gravitacional.

Nós deixamos a suposição do frame em queda livre e sua relação com M^{ab} para um futuro trabalho.

7.5 Resultados e discussão final

Vimos que o 4-momento do TEGR, formulado através do formalismo hamiltoniano dessa teoria, pode ser visto como uma generalização do 4-momento do formalismo hamiltoniano da relatividade geral, conhecido como formalismo ADM. Chegamos a essa conclusão mostrando que é sempre possível fazer com que o 4-momento do TEGR coincida com o do formalismo ADM nas situações nas quais o 4-momento ADM pode ser aplicado; para isso, basta usar o gauge do tempo (time gauge). Além disso, mostramos que 4-momento do TEGR é capaz de prever corretamente a energia do buraco negro/branco com frames adaptados as coordenadas de Kruskal e Novikov, coordenadas essas que não podem ser usadas para calcular o 4-momento do formalismo ADM.

Além disso, uma vez que o tensor densidade de energia-momento gravitacional tem traço nulo, ele satisfaz uma equação de estado do tipo-radiação, o que permite descrever campos sem massa. E, por outro lado, o pseudo-tensor de Landau-Lifshitz não tem traço nulo e, por isso, não pode descrever campos sem massa.

Nós também vimos que a quantidade que, em geral, é associada a densidade de momento angular do espaço-tempo (ou gravitacional), M^{ab} , satisfaz a relação $M^{(j)(k)} = 0$ se o frame teleparalelo satisfaz o gauge temporal, isso independentemente do sistema de coordenadas usado. Deixaremos uma análise mais profunda sobre o significado de M^{ab} e sua relação com os referenciais em queda livre para um próximo trabalho.

Como observação final, gostaríamos de salientar a possibilidade de que as vantagens do 4-momento do TEGR sobre o da abordagem ADM se estenda à formulação hamiltoniana como um todo. Se for esse o caso, então a formulação Hamiltoniana do TEGR (ver Refs. [6–11]) seria uma melhoria da formulação ADM [19].

8 Resumo e perspectivas

Nesta tese pudemos notar que o TEGR, no formalismo de tetrada puro, é capaz de fornecer resultados muito consistentes em relação ao campo gravitacional para os espaços-tempos de Schwarzschild e de FLRW. Para isso, bastou que tomássemos frames apropriados como referenciais teleparalelos.

No caso de Schwarzschild, usando frames adaptados a observadores de Kruskal e Novikov, encontramos que a energia do espaço-tempo no nosso universo é Mc^2 quando a garganta do buraco de minhocas está fechada, a qual corresponde a energia de uma partícula de massa M . Para ambos os frames a singularidade não contribuiu para essa energia. Em particular, para o espaço-tempo de Schwarzschild, evidenciamos a clara vantagem que as definições do TEGR da energia-momento têm sobre as da abordagem feita por Møller [3], uma vez que esta última não é capaz de fornecer a energia correta para observadores de Kruskal enquanto o TEGR é.

No caso dos espaços-tempos de FLRW, usando como frame teleparalelo o campo de tetrada adaptado as coordenadas de FLRW, obtivemos por completo o tensor densidade de energia-momento gravitacional. O decompomos em sua parte simétrica e antissimétrica, mostrando que a parte simétrica satisfaz uma equação de estado tipo-radiação enquanto que a antissimétrica não contribui para a energia e o momento gravitacional do universo. Também calculamos as equações de campo da teoria, mostrando que elas obedecem o conceito de vácuo absoluto discutido na Ref. [16]. Apontamos para o fato de que a densidade de energia total do universo é nula para espaços-tempos de seção espacial plana, o que poderia ser usado como argumento em favor desses espaços-tempos, além de poder resolver o problema da planicidade sem recorrer a inflação e estar de acordo com a visão de Tryon [18].

Já no capítulo 7, mostramos que o 4-momento do TEGR é mais geral do que o fornecido pelo formalismo ADM. Pontuamos também que o fato de termos encontrado uma equação de estado tipo-radiação para o campo gravitacional, quando decompomos o tensor do campo gravitacional de FLRW no capítulo 6, é, na verdade, uma propriedade geral do tensor do TEGR, $t^{\mu a}$, uma vez que o mesmo tem traço nulo. Esse último resultado mostra uma clara vantagem de $t^{\mu a}$ em relação a pseudo-tensores como o de Landau-Lifshitz, já que este último não tem traço nulo e, portanto, não poderia descrever campos sem massa. Também levantamos as dificuldades em se interpretar a quantidade M^{ab} , definida na eq. (4.28), realmente como a densidade de momento angular gravitacional ou como a densidade de momento angular total do espaço-tempo quando o frame teleparalelo satisfaz o gauge temporal, uma vez que as componentes $M^{(i)(j)}$ são sempre zero independentemente

do espaço-tempo estudado. Especulamos que talvez não seja possível obter referenciais que satisfaçam o gauge temporal e concomitantemente sejam adaptados a partículas livres em espaços-tempos que os campos de matéria possuam momento angular.

De uma forma geral, avaliamos que o TEGR é uma abordagem bastante promissora no que diz respeito a estudar o campo gravitacional de diferentes espaços-tempos, desde que os referenciais tomados como frame teleparalelo sejam adequados, bem como as superfícies de simultaneidades utilizadas. Os referenciais que parecem ser mais apropriados para essa tarefa são aqueles adaptados à partículas livres, pelos motivos argumentados na seção 7.4. E, como perspectiva, pretendemos verificar se realmente não é possível obter frames adaptados à partículas livres e que satisfaçam o gauge temporal em espaços-tempos com momento angular, tais como o de Kerr e o de Gödel. Isso para avaliar melhor a interpretação de M^{ab} como sendo a densidade de momento angular gravitacional, ou do momento angular total dos espaços-tempos. Também podemos analisar melhor a questão se a energia gravitacional pode de fato ser localizada ou não. Com os resultados obtidos nesta tese, o TEGR parece ser capaz de localizar a energia do campo gravitacional, no entanto, acreditamos que é preciso avaliar os resultados fornecidos para mais espaços-tempos.

Referências

- [1] EINSTEIN, A. *Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus*. 1928. 217–221 p. Related online version (cited on 30 October 2009): http://einstein-annalen.mpiwg-berlin.mpg.de/related_texts/sitzungsberichte/B8AG2G5E. Citado na página 16.
- [2] GOENNER, H. F. On the history of unified field theories. *Living reviews in relativity*, Springer, v. 7, n. 1, p. 1–153, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 71.
- [3] MØLLER, C. Further remarks on the localization of the energy in the general theory of relativity. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 12, n. 1, p. 118–133, 1961. Citado 7 vezes nas páginas 16, 75, 78, 112, 138, 146 e 147.
- [4] CHO, Y. Einstein lagrangian as the translational yang-mills lagrangian. *Physical Review D*, APS, v. 14, n. 10, p. 2521, 1976. Citado na página 16.
- [5] HAYASHI, K. The gauge theory of the translation group and underlying geometry. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 69, n. 4, p. 441–444, 1977. Citado na página 16.
- [6] MALUF, J. W. The teleparallel equivalent of general relativity. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 525, n. 5, p. 339–357, 2013. Citado 13 vezes nas páginas 16, 17, 19, 70, 71, 74, 75, 76, 77, 78, 107, 131 e 137.
- [7] MALUF, J. W. Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 35, n. 1, p. 335–343, 1994. Citado 6 vezes nas páginas 16, 72, 75, 131, 134 e 137.
- [8] MALUF, J. W.; ROCHA-NETO, J. F. da. General relativity on a null surface: Hamiltonian formulation in the teleparallel geometry. *General Relativity and Gravitation*, v. 31, p. 173–185, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 16, 131 e 137.
- [9] MALUF, J. W.; ROCHA-NETO, J. da. Hamiltonian formulation of general relativity in the teleparallel geometry. *Physical Review D*, APS, v. 64, n. 8, p. 084014, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 16, 75 e 137.
- [10] MALUF, J. et al. Energy and angular momentum of the gravitational field in the teleparallel geometry. *Physical Review D*, APS, v. 65, n. 12, p. 124001, 2002. Citado 6 vezes nas páginas 16, 75, 81, 131, 132 e 137.
- [11] NETO, J. da R.; MALUF, J.; ULHOA, S. Hamiltonian formulation of unimodular gravity in the teleparallel geometry. *Physical Review D*, APS, v. 82, n. 12, p. 124035, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 16, 75 e 137.

- [12] MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. [S.l.]: Macmillan, 1973. Citado 14 vezes nas páginas [17](#), [19](#), [54](#), [55](#), [56](#), [59](#), [62](#), [63](#), [65](#), [66](#), [67](#), [77](#), [96](#) e [109](#).
- [13] ÖZKURT, E.; AYGÜN, S. Energy distributions of bianchi type-vi h universe in general relativity and teleparallel gravity. *Pramana*, Springer, v. 88, n. 4, p. 1–9, 2017. Citado 2 vezes nas páginas [17](#) e [67](#).
- [14] OHANIAN, H. C. What is the principle of equivalence? *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 45, n. 10, p. 903–909, 1977. Citado 2 vezes nas páginas [17](#) e [46](#).
- [15] ANDERSON, J.; GAUTREAU, R. Operational formulation of the principle of equivalence. *Physical Review*, APS, v. 185, n. 5, p. 1656, 1969. Citado na página [17](#).
- [16] FORMIGA, J. The meaning of torsion in teleparallel theories. *arXiv preprint arXiv:2004.10788v5*, 2020. Citado 19 vezes nas páginas [17](#), [19](#), [72](#), [76](#), [77](#), [78](#), [79](#), [80](#), [81](#), [82](#), [85](#), [100](#), [110](#), [111](#), [125](#), [126](#), [134](#), [135](#) e [138](#).
- [17] ECKART, C. The thermodynamics of irreversible processes. iii. relativistic theory of the simple fluid. *Physical review*, APS, v. 58, n. 10, p. 919, 1940. Citado 4 vezes nas páginas [18](#), [57](#), [58](#) e [133](#).
- [18] TRYON, E. P. Is the universe a vacuum fluctuation? *Nature*, Nature Publishing Group, v. 246, n. 5433, p. 396–397, 1973. Citado 4 vezes nas páginas [19](#), [124](#), [126](#) e [138](#).
- [19] ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 40, n. 9, p. 1997–2027, 2008. Citado 7 vezes nas páginas [19](#), [64](#), [65](#), [89](#), [111](#), [133](#) e [137](#).
- [20] SCHWINGER, J. Quantized gravitational field. *Physical Review*, APS, v. 130, n. 3, p. 1253, 1963. Citado 3 vezes nas páginas [19](#), [81](#) e [130](#).
- [21] NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. [S.l.]: CRC press, 2018. Citado 12 vezes nas páginas [20](#), [21](#), [24](#), [28](#), [29](#), [35](#), [37](#), [38](#), [42](#), [44](#), [45](#) e [46](#).
- [22] D’INVERNO, R. Book. *Introducing Einstein’s Relativity*. [S.l.]: Oxford Univ. Press, 1992. Citado 11 vezes nas páginas [27](#), [28](#), [44](#), [46](#), [47](#), [50](#), [51](#), [54](#), [59](#), [60](#) e [61](#).
- [23] NORTON, J. What was einstein’s principle of equivalence? *Studies in history and philosophy of science Part A*, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 203–246, 1985. Citado 2 vezes nas páginas [46](#) e [134](#).
- [24] EINSTEIN, A.; ROSEN, N. The particle problem in the general theory of relativity. *Physical Review*, APS, v. 48, n. 1, p. 73, 1935. Citado na página [52](#).

- [25] NORTON, J. D. General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute. *Reports on progress in physics*, IOP Publishing, v. 56, n. 7, p. 791, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.
- [26] FORMIGA, J. Revisiting the gravitational energy of the schwarzschild spacetime with a new approach to the calculations. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, v. 51, n. 6, p. 1823–1832, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 70, 82 e 86.
- [27] HAYASHI, K.; SHIRAFUJI, T. New general relativity. *Physical Review D*, APS, v. 19, n. 12, p. 3524, 1979. Citado na página 71.
- [28] MALUF, J. Dirac spinor fields in the teleparallel gravity: comment on “metric-affine approach to teleparallel gravity”. *Physical Review D*, APS, v. 67, n. 10, p. 108501, 2003. Citado na página 72.
- [29] GOLOVNEV, A.; KOIVISTO, T.; SANDSTAD, M. On the covariance of teleparallel gravity theories. *Classical and quantum gravity*, IOP Publishing, v. 34, n. 14, p. 145013, 2017. Citado na página 73.
- [30] GONALVES, V.; FORMIGA, J. The black hole energy and the energy of the other universe. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 136, n. 10, p. 1–16, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 74, 89 e 94.
- [31] FORMIGA, J. The gravitational energy–momentum density of radially accelerated observers in schwarzschild spacetime. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 532, n. 3, p. 1900507, 2020. Citado 6 vezes nas páginas 75, 80, 87, 88, 104 e 108.
- [32] FORMIGA, J. Conformal teleparallel theories and weyl geometry. *Physical Review D*, APS, v. 99, n. 6, p. 064047, 2019. Citado 5 vezes nas páginas 75, 117, 118, 119 e 124.
- [33] FORMIGA, J. B. The energy–momentum tensor of gravitational waves, wyman spacetime, and freely falling observers. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 530, n. 12, p. 1800320, 2018. Citado na página 75.
- [34] MASHHOON, B.; MUENCH, U. Length measurement in accelerated systems. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 11, n. 7, p. 532–547, 2002. Citado na página 77.
- [35] MASHHOON, B. Vacuum electrodynamics of accelerated systems: Nonlocal maxwell’s equations. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 12, n. 10, p. 586–598, 2003. Citado na página 77.

- [36] MALUF, J.; FARIA, F. On the construction of fermi-walker transported frames. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 17, n. 5, p. 326–335, 2008. Citado na página 77.
- [37] LIN, R.-H.; ZHAI, X.-H. New proper tetrad for teleparallel gravity in curved spacetimes. *Physical Review D*, APS, v. 99, n. 2, p. 024022, 2019. Citado na página 78.
- [38] SYNGE, J. L. *Relativity: the general theory*. [S.l.: s.n.], 1960. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 79.
- [39] MALUF, J.; VEIGA, M.; ROCHA-NETO, J. da. Regularized expression for the gravitational energy-momentum in teleparallel gravity and the principle of equivalence. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 39, n. 3, p. 227–240, 2007. Citado na página 79.
- [40] OBUKHOV, Y. N.; RUBILAR, G. F. Covariance properties and regularization of conserved currents in tetrad gravity. *Physical Review D*, APS, v. 73, n. 12, p. 124017, 2006. Citado na página 79.
- [41] LUCAS, T. G.; OBUKHOV, Y. N.; PEREIRA, J. Regularizing role of teleparallelism. *Physical Review D*, APS, v. 80, n. 6, p. 064043, 2009. Citado na página 80.
- [42] COMBI, L.; ROMERO, G. E. Is teleparallel gravity really equivalent to general relativity? *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 530, n. 1, p. 1700175, 2018. Citado na página 99.
- [43] MALUF, J.; FARIA, F.; ULHOA, S. On reference frames in spacetime and gravitational energy in freely falling frames. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 24, n. 10, p. 2743, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 105, 109 e 110.
- [44] ANDRADE, V. D.; GUILLEN, L.; PEREIRA, J. Gravitational energy-momentum density in teleparallel gravity. *Physical Review Letters*, APS, v. 84, n. 20, p. 4533, 2000. Citado na página 112.
- [45] FORMIGA, J.; GONÇALVES, V. The gravitational energy density of the universe. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 36, n. 18, p. 2150125, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 113 e 124.
- [46] VARGAS, T. The energy of the universe in teleparallel gravity. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 36, n. 6, p. 1255–1264, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 114 e 117.

- [47] ULHOA, S.; NETO, J. da R.; MALUF, J. The gravitational energy problem for cosmological models in teleparallel gravity. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 19, n. 12, p. 1925–1935, 2010. Citado na página [114](#).
- [48] SOUSA, A.; MOURA, J.; PEREIRA, R. Energy in an expanding universe in the teleparallel geometry. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 40, p. 1–8, 2010. Citado 5 vezes nas páginas [114](#), [116](#), [117](#), [118](#) e [125](#).
- [49] XULU, S. S. Total energy of the bianchi type i universes. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 39, n. 4, p. 1153–1161, 2000. Citado 2 vezes nas páginas [117](#) e [124](#).
- [50] SOPER, D. E. *Classical field theory*. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2008. Citado na página [119](#).
- [51] BERGMANN, P. G.; THOMSON, R. Spin and angular momentum in general relativity. *Physical Review*, APS, v. 89, n. 2, p. 400, 1953. Citado 2 vezes nas páginas [119](#) e [121](#).
- [52] ABEDI, H.; ABBASSI, A. M.; CAPOZZIELLO, S. Cosmological perturbations in gravitational energy–momentum complex. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 405, p. 54–68, 2019. Citado na página [126](#).
- [53] MALUF, J. W. On the distribution of gravitational energy in the de sitter space. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 37, n. 12, p. 6293–6301, 1996. Citado na página [127](#).
- [54] BAMBI, C. *Introduction to General Relativity: A Course for Undergraduate Students of Physics*. [S.l.]: Springer, 2018. Citado na página [134](#).

Apêndices

APÊNDICE A – Formulação de Møller

As equações de campo usadas por Møller, Ref. [3], pág. 131, eq. (70), são escritas como

$$\partial_\nu U_\mu^{\lambda\nu} = e \left(\bar{t}_\mu^\lambda + T_\mu^\lambda \right), \quad (\text{A.1})$$

sendo $\bar{t}_\mu^\lambda$ o tensor densidade de energia-momento gravitacional, T_μ^λ o tensor energia-momento da matéria e $U_\mu^{\lambda\nu}$ o superpotencial, definido por

$$U_\mu^{\lambda\nu} \equiv \frac{e}{2\kappa_\phi} \left[e_a^\lambda \nabla_\mu e^{a\nu} - e_a^\nu \nabla_\mu e^{a\lambda} + 2 \left(\delta_\mu^\lambda e^{a\nu} - \delta_\mu^\nu e^{a\lambda} \right) \nabla_\gamma e_a^\gamma \right]. \quad (\text{A.2})$$

Para encontrar a relação entre $U_\mu^{\lambda\nu}$ e $\Sigma_\mu^{\lambda\nu}$, podemos usar o fato de que

$$\nabla_\mu e_c^\nu = e_a^\nu e_\mu^b \dot{\omega}_{bc}^a. \quad (\text{A.3})$$

O que também fornece

$$\nabla_\mu e^{c\nu} = e_a^\nu e_\mu^b \dot{\omega}_{bc}^c, \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla_\mu e_c^\mu = \dot{\omega}_{dc}^d. \quad (\text{A.5})$$

Assim, usando as equações (A.3), (A.4) e (A.5) na eq. (A.2), obtemos que

$$U_\mu^{\lambda\nu} = \frac{e}{2\kappa_\phi} \left[e_a^\lambda e_b^\nu e_\mu^c \dot{\omega}_{bc}^a - e_a^\nu e_b^\lambda e_\mu^c \dot{\omega}_{bc}^a + 2 \left(\delta_\mu^\lambda e^{a\nu} - \delta_\mu^\nu e^{a\lambda} \right) \dot{\omega}_{da}^d \right]. \quad (\text{A.6})$$

Fazendo algumas manipulações nos índices dos dois primeiros termos e usando $\delta_\mu^\lambda = e_a^\lambda e_\mu^c \delta_c^a$ e $\delta_\mu^\nu = e_b^\nu e_\mu^c \delta_c^b$ no último, teremos

$$U_\mu^{\lambda\nu} = \frac{e}{2\kappa_\phi} \left[e_a^\lambda e_b^\nu e_\mu^c \left(\dot{\omega}_{bc}^a - \dot{\omega}_{cb}^a \right) + 2e_a^\lambda e_b^\nu e_\mu^c \delta_c^a \dot{\omega}_{db}^d - 2e_a^\lambda e_b^\nu e_\mu^c \delta_c^b \dot{\omega}_{da}^d \right], \quad (\text{A.7})$$

que pode ser simplificado para

$$U_{\mu\lambda\nu} = \frac{e}{2\kappa_\phi} e_\lambda^a e_\nu^b e_\mu^c \left(\dot{\omega}_{bca} - \dot{\omega}_{acb} + 2\eta_{ca} \dot{\omega}_{db}^d - 2\eta_{cb} \dot{\omega}_{da}^d \right). \quad (\text{A.8})$$

Lembrando que $\dot{\omega}_{acb} = -\dot{\omega}_{bca}$, podemos simplificar ainda mais e obter

$$U_{\mu\lambda\nu} = \frac{2e}{\kappa_\phi} e_\lambda^a e_\nu^b e_\mu^c \left(\frac{1}{2} \dot{\omega}_{bca} + \frac{1}{2} \dot{\omega}_{db}^d \eta_{ca} - \frac{1}{2} \dot{\omega}_{da}^d \eta_{cb} \right). \quad (\text{A.9})$$

Comparando com a eq. (4.31), vemos que

$$U_{\mu\lambda\nu} = \frac{2e}{\kappa_\phi} \Sigma_{\mu\lambda\nu}, \quad (\text{A.10})$$

onde $\kappa_\phi = 1/(2\kappa)$. Logo, concluímos que $U_{\alpha\mu\nu} = 4\kappa e \Sigma_{\alpha\mu\nu}$.

O 4-vetor energia-momento da formulação de Møller é definido como [3]

$$P_\mu \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_S U_\mu^{0j} n_j dS, \quad (\text{A.11})$$

em que n_j é o 3-vetor unitário perpendicular ao elemento de superfície dS . Podemos, então, usar a relação $U_{\alpha\mu\nu} = 4\kappa e \Sigma_{\alpha\mu\nu}$, para testar qual o valor da energia, $\mu = 0$, que a formulação de Møller fornece para o caso de Kruskal. Como $\Sigma_0^{0j} = e^a{}_0 \eta_{ab} \Sigma^{b0j}$, para o frame de Kruskal (eq. (4.46) com $\hat{t}_\mu, \hat{r}_\mu, \hat{\theta}_\mu$ e $\hat{\phi}_\mu$, dados pela eq. (5.5)), nós obtemos

$$\Sigma_0^{0j} = F \Sigma_{(0)}^{0j} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{XF}{4m} \right) \hat{r}^j, \quad (\text{A.12})$$

onde foi usado o valor de F dado pela eq. (3.72) e a componente do superpotencial da eq. (5.14). À vista disso, temos que a energia associada ao frame de Kruskal na formulação de Møller é dada por

$$E_\phi = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e \Sigma_0^{01}. \quad (\text{A.13})$$

Ao substituírmos $e = 32m^3 e^{-r/(2m)} r \sin \theta$ e Σ_0^{01} , dado por $j = 1$ na eq. (A.12), e integrarmos, nós obtemos que a energia, na formulação de Møller, é

$$E_\phi = 64\pi\kappa m \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2mr} e^{-\frac{r}{4m}} - 2mX e^{-\frac{r}{2m}} \right), \quad (\text{A.14})$$

a qual é nula¹ quando tomamos esse limite de $r \rightarrow \infty$; ou seja, nessa formulação não obtemos o valor Mc^2 , que seria esperado.

¹ Note, da eq. (3.74), que o segundo termo será nulo independentemente de mantermos T ou t fixos nesse limite.