Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Bugley de Farias Ramos Junior

Propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais com parâmetros dependentes do tempo

João Pessoa - PB
2022

BUGLEY DE FARIAS RAMOS JUNIOR

Propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais com parâmetros dependentes do tempo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Inácio de Almeida Pedrosa Filho.

Coorientador: Prof. Dr. Knut Bakke Filho.

João Pessoa - PB

2022

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R175p Ramos Junior, Bugley de Farias.
Propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais com parâmetros dependentes do tempo / Bugley de Farias Ramos Junior. - João Pessoa, 2022.
109 f.

Orientação: Inácio de Almeida Pedrosa Filho.
Coorientação: Knut Bakke Filho.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Ondas eletromagnéticas. 2. Meios materiais. 3. Dependência temporal. 4. Invariantes dinâmicos. 5. De Sitter. I. Pedrosa Filho, Inácio de Almeida. II. Bakke Filho, Knut. III. Título.

UFPB/BC CDU 537.86(043)

Elaborado por WALQUELINE DA SILVA ARAUJO - CRB-15/514

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Bugley de Farias Ramos Junior**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

Aos vinte e dois dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e dois, às 09:00, no Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física da Matéria Condensada, **Bugley de Farias Ramos Junior**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Inácio de Almeida Pedrosa* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Knut Bakke Filho (UFPB), coorientador do aluno, *Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos* (UFPB), *Herondy Francisco Santana Mota* (UFPB), *João Rafael Lúcio dos Santos* (UFCG) e *Humberto Belich Junior* (UFES). Dando início aos trabalhos, o Prof. *Inácio de Almeida Pedrosa* comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra ao candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "*Propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais com parâmetros dependentes do tempo*". Concluída a exposição, o candidato foi argüido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado".** Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, Bethyanne Leite Aragão, servindo de Secretário, redigiu a presente ata que vai assinada pelo mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **22 de fevereiro de 2022**.

Prof. Dr. Inácio de Almeida Pedrosa *Orientador - UFPB*	Inácio Pedrosa Filho
Prof. Dr. Knut Bakke Filho *Coorientador* - UFPB	K Bakke Filho
Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos *UFPB*	Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos
Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota *UFPB*	Herondy F. S. Mota
Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos *UFCG*	João R. S.
Prof. Dr. Humberto Belich Junior *UFES*	Humberto Belich Jr.

Link da defesa:
http://meet.google.com/cdx-rfyy-zfu

Dedico à Jéssica, minha esposa, companheira em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro. Em seguida, ao meu orientador, Professor Inácio Pedrosa, bem como, ao meu coorientador, Professor Knut Bakke, que além de inspiração e exemplo de pesquisadores e professores, me concederam todo apoio necessário para o desenvolvimento desta etapa da minha formação.

Agradeço demasiadamente os professores dos quais tive o privilégio de ser aluno em suas respectivas disciplinas: Prof. Jorge Gabriel, de mecânica quântica e física do estado sólido, Prof. Albert Petrov, de eletromagnetismo, Prof. João Plascak, de mecânica estatística e transições de fase, Prof. Valdir Bezerra, mecânica quântica relativística, Prof. Eugeno Melo, de teoria quântica de campos e o Prof. Carlos Romero, de relatividade geral e geometria diferencial. Meu agradecimento também se estende à todos os demais professores e funcionários do departamento de física e, não menos importante, a Universidade Federal da Paraíba que fornece toda a estrutura necessária.

Em especial, agradeço a Seu Mariano pelo café, o qual tem função extremamente importante para as atividades do departamento de física.

Agradeço imensamente aos amigos e colegas da PPGF, especialmente ao meu amigo Antônio Gomes. Também quero agradecer aos familiares e amigos pessoais que sempre estão apoiando minhas decisões.

Meus mais cordiais agradecimentos se destinam a minha esposa Jéssica e ao meu irmão Arthur, pois com o apoio deles tudo se torna possível.

RESUMO

Em nosso estudo sobre ondas eletromagnéticas encontramos soluções exatas para os campos elétrico e magnético em um meio material homogêneo e isotrópico com resposta linear; considerando permissividade, permeabilidade e condutividade dependentes do tempo. Esta dependência temporal das propriedades do meio permite dizer que o meio é dependente do tempo. Partindo das equações de Maxwell para um meio material e fazendo uso do calibre de Coulomb, usamos a condição periódica de contorno que permite escrever o potencial vetor em termos dos modos dentro de uma cavidade. Logo, isto resulta em uma expressão do tipo oscilador amortecido para as amplitudes dos modos, onde os coeficientes dependem do tempo. Para resolver esse problema central usamos o método dos invariantes dinâmicos de Lewis e Riesenfeld para investigar a dinâmica das amplitudes dos campos. Usando os estados de Fock, encontramos a solução da equação de Schrödinger associada ao hamiltonio dependente do tempo para o problema. Assumindo que os parâmetros variam exponencialmente com o tempo encontramos um hamiltoniano do tipo Caldirola-Kanai e obtivemos soluções exatas no regime clássico e quântico, também encontramos a fase de Berry e o ângulo de Hannay para uma evolução temporal adiabática. Por fim, comparamos a propagação da radiação em um dielétrico dependente do tempo com a propagação de um campo escalar no espaço-tempo de de Sitter.

Palavras-chave: ondas eletromagnéticas, meios materiais, dependência temporal, invariantes dinâmicos, de Sitter.

ABSTRACT

In our study on eletromagnetic waves we find exact solutions for electric and magnetic fields in an homogeneous and isotropic material media with linear response, considering time-dependent permittivity, pemeability and conductivity. This time-dependence allows one to say that the media is time-dependent. Taking Maxwell's equations in materal media and using the Coulomb gauge, we assume periodic boundary condition to solve the problem. We also considered the potential vector to obtain the modes inside the cavity. Then, we got an expretion type damping harmonic oscilator for the amplitude modos, where the coeficients are time-dependent. To solve the main problem we use the Lewis-Riesenfeld dynamical invariants to investigate the dynamics of the amplitudes. By using Fock states we find the solution for Schrödinger's equation associated to the time-dependent Hamiltonian. Assuming that the parameters varying exponentially with time, we find a Caldirola-Kanai Hamiltonian and we obtain an exact solution in classical and quantum regime. We also find the Berry's fase and Hannay's angle for an adiabatic evolution. In the end, we compare the radiation propagation in a dialetric time-dependent media and the propagation of scalar field in de Sitter spacetime.

Keywords: electromagnetic waves, material media, time-dependent, dynamical invariants, de Sitter.

Índice

Introdução **1**

1 Invariantes dinâmicos dependentes do tempo **8**

1.1 Evolução temporal e a equação de Schrödinger . . . 8
1.2 Invariantes dinâmicos de Lewis-Riesenfeld . . . 13
1.3 Invariante para o oscilador generalizado . . . 16
1.3.1 Autoestados e autovalores do invariante . . . 19
1.3.2 Solução da equação de Schrödinger e fase de Lewis . . . 21
1.3.3 Aproximação adiabática . . . 24
1.3.4 Sobre estados coerentes . . . 26

2 Ondas eletromagnéticas em meios materiais **30**

2.1 Campos elétrico e magnético . . . 30
2.1.1 Equações para os campos macroscópicos na forma estacionária . . . 31
2.1.2 Indução eletromagnética . . . 32
2.1.3 Corrente de deslocamento . . . 33
2.1.4 Equações de Maxwell . . . 34
2.1.5 Meios homogêneos, lineares e isotrópicos . . . 35
2.1.6 Potenciais . . . 35
2.2 Ondas eletromagnéticas clássica em meio condutor . . . 38
2.2.1 Hamiltoniana para meios condutores . . . 41
2.3 Método do invariante para ondas eletromagnéticas em um meio condutor . 43
2.3.1 Sobre a quantização . . . 46

3 Ondas eletromagnéticas em meios dependentes do tempo **50**

3.1 Comportamento clássico dos campos . . . 51
3.2 Quantização das ondas eletromagnéticas . . . 55
3.3 Estados coerentes . . . 58

4 Evolução adiabática e não adiabática da onda eletromagnética **60**

4.1 Abordagem clássica da onda eletromagnética . . . 60
4.1.1 Evolução não adiabática . . . 60
4.1.2 Invariante clássico . . . 63

4.1.3 Evolução adiabática 65
4.2 Abordagem quântica das ondas eletromagnéticas 67
4.2.1 Solução da equação de Schrödinger 67
4.2.2 Evolução não adiabática 69
4.2.3 Evolução adiabática 71
4.2.4 Estados coerentes para ondas eletromagnéticas 72

5 Luz em meio dielétrico e campo escalar em um espaço-tempo de de Sitter 75
5.1 Luz em um meio dielétrico dependente do tempo: análise clássica 76
5.2 Campo escalar clássico em um espaço-tempo de de Sitter 78
5.3 Campo escalar quântico em um espaço-tempo de de Sitter 80
5.4 Estados coerentes para o campo escalar quântico 83

6 Conclusões e Perspectivas 84

A Aproximação adiabática 87

B Fase geométrica 89

C Estados coerentes 90

Referências Bibliográficas 94

Introdução

Embora a nomenclatura de ondas eletromagnéticas tenha sido adotada aqui, sabe-se que estas são campos elétrico e magnético oscilantes. Também conhecidas por campo eletromagnético, radiação ou simplesmente luz. Por outro lado, essas quantidades podem ser descritas por entidades chamadas de fótons, que são partículas. Essa dualidade onda-partícula foi de grande destaque no início do século 20 com o surgimento da mecânica quântica. Além disso, a luz também contribuiu para desenvolvimento de outro aspecto importante dos fenômenos física tratados pela relatividade. Com isso a realidade sobre espaço, tempo, matéria e energia foram significativamente alterados. Essa mudança de paradigma frente a ideais da física clássica sobre o universo imutável e determinístico foram advindas das ondas eletromagneticas. Com a descrição da radiação do corpo negro e não covariância das equações do eletromagnetismo por transformação de Galileo.

A ideia de que a luz podia ser vista como uma quantidade discreta foi relevantemente defendida por Newton, mas foi descartada com os experimentos da dupla-fenda de Young e Fresnel. Com a unificação do eletromagnetismo feita por Maxwell viu-se que a luz era uma onda eletromagnética, dando um significado físico sobra a substância da qual a luz é feito. Posteriormente, partindo da premissa que cargas em movimento emitem radiação Planck introduzio a ideia de que corpo negro era constituido de osciladores não interagentes com energias descretas, no ano de 1900, e através dos princípios da termodinâmica estatística obteve a lei da radiação do corpo negro [1]. Esse era um problema experimental proposto por Kirchhoff, em que é possivel existir um corpo que completamente absorvente e que não transmiti radiação. O que inicialmente podia se pensar ser apenas um artifício matemático tornou a ideia de Planck como a origem da mecânica quântica após o trabalho de Einstein [2]. Esse colocou a realidade do quanta de energia do campo eletromagnético como a essência para a explicação do efeito fotoelétrico, com a descrição do problema dada colisões (transferência de momento). Apesar do efeito fotoelétrico não requerer a quantização da radiação, o conceito de partícula é necessário quando a descrição do fenômeno ultrapassa os limites da física clássica e a quantização se faz necessária. A detecção de um único fóton tem sido alvo de muitos experimentos nos últimos anos, onde diversos laboratórios têm se voltado para estudos da propriedade da luz no regime quântico [3].

A primeira demonstração formal da quantização dos observáveis eletromagnéticos foi feita por Dirac [4]. Desde então, a maneira mais usual de tratar a quantização é baseada no fato de que qualquer função em um intervalo finito pode ser decomposta em uma série, no caso de uma cavidade quadrática tem-se uma série de Fourier. Esse fato permite interpretar a radiação em um volume finito como sendo um conjunto de osciladores independentes, ao tomar as soluções das equações de Maxwell em termos de um potencial vetor que satisfaz uma condição de calibre de Coulomb. A quantização surge quando os coeficientes da série são promovidos a operadores de criação e aniquilação, resultando em uma expressão do tipo oscilador harmônico em termos dos operadores para a energia na cavidade, permitindo a interpretação que os autoestados de energia sejam os estados do fótons (ou seja, o quanta de energia da onda eletromagnética). No fim, toma-se o limite de um volume infinito para os campos elétrico e magnético resultando nas expressões para a radiação livre em um continuo de frequências.

Oscilações harmônicas costituem um dos temas mais interessantes da física, uma vez que, as vibrações se apresentam na realidade da natureza em si. Esse é o tipo de movimento com maior grau de universalidade. Além disso, do ponto de vista matemático, o problema aborda diversos conceitos interessantes e métodos. O grande valor prático se deve ao fato de que qualquer poço de potencial (função energia potencial em torno de um mínimo), pode ser aproximado por um oscilador harmônico simples; ele descreve desde vibrações elásticas à estruturas nucleares, onde o hamiltoniano que descreve esse movimento é a soma do quadrado de duas varáveis canonicamente conjugadas. Também sendo muito interessante do ponto de vista pedagógico, pois serve como uma abordagem inicial para a teoria de campos [5, 6].

A ideia de que a luz podia ser tratada como partícula fez com que de Broglie em 1923 pensasse que o inverso também deveria acontecer, ou seja, partículas também poderiam ser tratadas como ondas. Esse fenômeno deve acontecer em um caso especial, quando a massa é muito pequena devido a relação entre momento e comprimento de onda. A confirmação experimental veio com o experimento da dupla-fenda para elétrons [7]. Então, com essas ideias em mente e observando a analogia feita por Hamilton entre as equações da óptica e da mecânica clássica, Schrödinger [8] formulou a famosa equação que descreve a dinâmica quântica de uma partícula (obtendo níveis discretos de energia). Simultaneamente, Heisenberg [9], em parceria com Jordan e Born, também formularam uma equação que descrevia os fenômenos quânticos, porém, com um formalismo diferente. A equação Schrödinger consiste em um formalismo de equações diferenciais, enquanto que o formalismo de Heisenberg consiste em formalismo matricial. Posteriormente, Dirac formulou a mecânica quântica de forma axiomática [10], baseada em uma estrutura vetorial consistente e elegante. Essa formulação apresenta inúmeras vantagens, a qual foi a primeira a fazer uma unificação, mostrando a equivalência as formulações anteriores até então vistas como sendo distintas. O formalismo de Dirac também destaca-se pela estrutura matemática compacta.

Um outro ponto interessante a ser destacado sobre os primórdios da mecânica quântica, foi a interpretação física para as funções de onda da equação de Schrödinger.

Pois foi a analogia com o campo elétrico que levou Max Born à interpretação probabilística [11]. No experimento da dupla fenda existem faixas nas quais a luz é mais intensa, analogamente há também mais elétrons em certas faixas devido ao padrão de interferência. Como a intensidade da luz é proporcional ao quadrado do campo elétrico, Born postulou que a probabilidade de encontrar o elétron deve ser proporcional ao módulo quadrático da função de onda.

Um dos resultados mais surpreendentes das equações da mecânica quântica é energia de ponto zero, também conhecida como energia de vácuo. Mesmo para condições classicamente estacionárias os resultados quânticos apresentam flutuações. Em outras palavras, o espaço no vazio no regime quântico é dinâmico e isto tem fortes implicações fenomenológicas e experimentais, bem como teóricas; a exemplo do efeito Casimir. O caso mais conhecido é do movimento harmônico simples, cuja frequência é constante, no limite que não existe nenhum modo de vibração a energia mínima não é nula, logo, é impossível atingir a temperatura de zero absoluto.

Uma vez que, os constituintes da natureza (do universo) estão sempre em movimento e interagindo, a dinâmica de um sistema possui dependência temporal. Em termos práticos, para cada instante de tempo o sistema pode mudar de configuração, como por exemplo devido a flutuações térmicas. Isso se traduz nas equações como termos dependentes do tempo. Na maior parte dos textos básicos de física, o hamiltoniano, o operador que gera a evolução temporal de sistema, é dito como sendo independente do tempo. Por outro lado, no caso mais geral ele deve ser dependente do tempo. Em uma perspectiva mais realística, sistemas dinâmicos são mais interessantes, quanticamente e classicamente, por serem mais fenomenológicos. Sistemas que dependem explicitamente do tempo também são chamados de sistemas abertos, pois sofrem influências de campos externos.

Nosso foco é em sistemas quânticos dependentes do tempo, que são não estacionários, sendo temas de estudos que vão desde a cosmologia (formação do universo) à partículas elementares (oscilações de neutrinos). Fenômenos quânticos dependentes do tempo fazem parte de um volume expressivo de publicações na literatura, tanto teórico quanto experimental, em uma variedade de áreas, tais como: teoria da informação e computação quântica, física da matéria condensada, na spintrônica, e óptica quântica. Destaca-se também os fenômenos de transportes em nanoestruturas e tunelamento dependente do tempo. Efeitos quânticos dinâmicos também aparecem em sistemas nanoeletromecânicos, na área chamada de QED (quantum electrodynamics) de circuitos. Por fim, existem também há os sistemas mesoscópicos, os quais são sistemas intermediários, ou, semiclássicos.

Sistemas dinâmicos dependentes do tempo são temas de destaque em mecânica quântica devido a dificuldade de resolver as equações de evolução temporal. Alguns dos desenvolvimentos para estudar sistemas dinâmicos que mais se destacam são: integrais de caminhos, basicamente um reformulação da mecânica quântica feita por Richard Feymann na década de 1940, com considerações propostas por Dirac; estados coerentes e comprimidos entre 1960 e 1970; junção de Josephson que consiste no tunelamento quântico e SQUIDs em 1960; o método dos invariantes, pré-década 1970; efeito Zeno 1970; fase geométrica 1980; decoerência, perda de informação da superposição de estados microscópicos, nos anos de 1980; dinâmica de partículas em armadilhas e QED em cavidades entre 1980 e 1990 etc.

A abordagem padrão para resolver problemas quânticos com dependência temporal nos livros textos, é baseada nas seguintes considerações: i) aproximação adiabática, onde uma variação substancial nos parametros dependentes do tempo é pequena em relação aos movimentos periódicos específicos do sistema (o problema é assintoticamento estacionário); ii) aproximação súbita, onde a variação externa muito rápida em relação as características periódicas pequenas; iii) perturbação dependente do tempo, consiste em dividir o hamiltoniano em uma parte independente do tempo e outra dependente do tempo, a qual pode ser vista como uma modificação adicional no sistema previamente conhecido e consequentimente nas soluções. Esses são os métodos comuns encontrados nos livros textos de mecânica quântica [10, 12, 13]. Além das integrais de trajetória de Feymann, que é muito utilizada em física de partículas e teoria de campos.

Por outro lado, um método bastante útil que não é muito abordado nos livros básicos e que tem relevante destaque em artigos da literatura, é o método dos invariantes dinâmicos desenvolvido por H. R. Lewis e W. R. Riesenfeld, no final da década de 1960 [14, 15]. Em seus trabalhos precursores, utilizaram o método dos invariantes para encontrar as soluções da equação de Schrödinger do oscilador harmônico com frequência dependente do tempo e do movimento de um partícula carregada em um campo eletromagnético dependente do tempo. Desde então, esse método vem sendo utilizado tanto na cosmologia [16, 17] quanto em física de altas energias, e em teoria de campos [18, 19, 20].

Tal procedimento baseia-se em resolver a equação dinâmica partindo dos autoestados de uma quantidade física estacionária, que depende explicitamente do tempo mas que se conserva. Esse método possui uma estreita analogia com os sistemas de Ermakov [21], os quais já havia sido estudados há mais de um século por Ermakov [22]. Esses sistemas consistem em pares de equações acopladas dependentes do tempo, relacionadas pelo invariante de Ermakov, que é uma constante de movimento. Tais invariantes também são chamados de invariantes de Lewis-Ermakov [23]. Os invariantes de Lewis-Ermakov são aplicados em várias áreas. A título de exemplo, a promissora ótica não linear [24, 25]. Uma outra aplicação interessante é a de um pêndulo gravitando com massa crescendo exponencialmente, feito por Choi [26]. Além disso, Hartley e Ray [27, 28, 29, 30], usaram esses sistemas para encontrar uma solução exata para a equação de Schrödinger de osciladores não lineares dependentes do tempo (sistemas de Ermakov). Eles transformaram a equação de autovalor do invariante em uma equação de Schrödinger independente do tempo. Essencialmente, eles mostraram que a equação de Schrödinger para um sistema de Ermakov pode ser reduzida para uma equação de Schrödinger independente do tempo para um operador invariante. Esses exemplos, entre outros, têm mostrado que o método de Lewis e Riesenfeld é uma bela e poderosa ferramenta matemática.

Shen, mostrou uma conecção entre o método dos invariantes com método da matriz de densidade e a mecânica quântica supersimétrica [31]. Essas três formulações compartilham da mesma estrutura matemática, especificamente, satisfazem a equação de Liouville-Von Neumann e a solução da equação de Schrödinger dependente do tempo é obtida em termos dos autoestados do invariante (da quantidade conservada).

Desde que o método dos invariantes de Lewis Riesenfeld foi proposto, ele tem sido largamente utilizado para encontrar soluções exatas da equação de Schrödinger com diversos tipos de hamiltonianos dependentes do tempo [32, 33, 34, 35, 36, 37, 38]. Podemos destacar aqui a abordagem na óptica quântica, este possui uma atenção significativa uma vez que as interações do sistema emergem termos dependentes do tempo nas equações que descrevem o sistema. Entender o comportamento do campo eletromagnético em escala microscópica também tem um impacto significativo do ponto de vista tecnológico. Uma vez que, atualmente já é possível implementar transistores ópticos (ou, fóton transistores), onde estes operam com um sinal de luz, substituindo os transistores eletrônicos que dissipam muita radiação térmica devido a corrente elétrica. O desenvolvimento dos novos transistores ópticos é uma combinação de lasers, uma cavidade óptica, e um polímero orgânico específico que pode fazer a troca de estados quânticos no dispositivo [39, 40].

Entender a interação da radiação com a matéria sempre foi um desafio para a física devido o enorme grau de dificuldade em descrever os processos como um todo. Os livros de óptica quântica abordam a quantização da radiação em uma cavidade vazia ou no espaço livre [41, 42], seguindo o procedimento padrão em que cada modo é associado a um oscilador harmônico. A óptica quântica atraiu um grande interesse da comunidade científica devido aos avanços tecnológicos dos lasers e o grande interesse em computação e informação quântica [43]. Assim, a atenção de muitos físicos se voltaram para a quantização da luz se propagando em meios materiais [44, 45], devido aos experimentos em fenômenos ópticos quânticos dentro dos materiais. Com o intuito de entender melhor os processos dinâmicos com modelos mais geral, trabalhos sobre meios dielétricos com parâmetros dependentes do tempo foram surgindo [46, 47]. Várias abordagens têm sido empregadas considerando materiais com diferentes permissividades elétricas: i) real (não dispersivo) e homogênea ou inomogênea; ii) real e dependente da posição e tempo (meio dependente do tempo e não uniforme); ou iii) dependente da frequência e da posição (meio dispersivo e inomogêneo). A quantização do campo eletromagnético em meios dinâmicos com mudanças temporais pode ser de muito interesse na óptica quântica. Especificamente, nos propomos a investigar o comportamento quântico das ondas eletromagnéticas em um meio não dispersivo e homogêneo com propriedades dependentes do tempo e resposta linear aos campos.

É aparentemente natural pensar em fazer a quantização do campo eletromagnético para uma cavidade na situação mais geral, para um meio com condutividade e com parâmetros dependentes do tempo. Isto significa que as quantidades que classificam permissividade elétrica, permeabilidade magnética e condutividade elétrica do meio são váriaveis no tempo. Vale salientar que para campos intensos o meio apresenta efeitos de não linearidade, mas estes não fazem parte do estudo apresentado aqui. O problema da quantização em meios não dispersivos com permissividade, permeabilidade e condutividade tem sido estudado tanto para essa propriedades sendo constantes [48, 49] quanto para meios dependentes do tempo [50, 51]

Em um estudo feito considerando um meio linear e dependente do tempo [36] foi possível quantizar o campo eletromagnético usando o método de Lewis e Riesendeld e obter soluções exatas para o problema. Neste trabalho mostraram também que a derivada temporal da permissividade causa atenuações no campo de radiação mesmo para um dielétrico mesmo para o caso em que a condutuvidade é nula. Considerando um meio com permissividade crescendo exponencialmente com o tempo encontraram soluções exatas para os campos. Esse tipo de dependência temporal para propagação de ondas eletromagnéticas é de interesse para aplicação em física nuclear [52] e em física de plasma (efeito Unruh e efeito Casimir dinâmico) [53, 54, 55]. Esse tipo de comportamento fenomenológico para as propriedades do meio proposto em Ref. [52] tem gerado trabalhos relacionados interessantes, onde a análise de propriedades de transporte é feita com uma aproximação hidrodinâmica em um semicondutor [56], destaca-se soluções numéricas são difíceis de serem obtidas devido à termos hiperbólicos [57].

Dado que, o meio apresenta parâmetros dependentes do tempo a evolução temporal de sistema não é estacionária como de costume, onde a solução temporal dos campos são oscilações harmônicas periódicas. Veremos em nossa discussão, soluções gerais podem ser obtidas via invariantes dinâmicos. Na análise da evolução temporal, também podemos considerar evolução temporal adiabática que acarreta em discussões muito interessantes. Essencialmente, devido o sistema mudar adiabaticamente por causa da dependência temporal a fase evolutiva é dividida em duas partes.

Os capítulos iniciais 1 e 2 compõem a fundamentação teórica desta tese. Trata-se do conhecimento base de conteúdos de livros e artigos que trazem suporte para leitor entender os resultados obtidos de uma extensiva pesquisa bibliográfica que resultaram em artigos publicados em revistas internacionais de relevante destaque. Onde estes deram origem aos capítulos posteriores.

No capitulo 1 é feita uma abordagem sobre a dinâmica de um sistema físico do ponto de vista quântico, considerando o método de Lewis e Riesenfeld para resolver a equação fundamental de maneira analítica e exata. Em virtude deste ter sido o ponto de partida para o desenvolvimento deste trabalho. Para elucidar o método e para fins didáticos, com o intuito de aplicar nos capítulos posteriores, abordamos o problema do oscilador harmônico generalizado, pois esse é um modelo interessante do ponto de vista físico e matemático.

O capítulo 2 inicia com uma revisão sucinta das equações de Maxwell, com um intuito de elucidar as interações do campo eletromagnético com a matéria, resultando na equações para um meio material. Usando o procedimento padrão de escrever os campos em termos do potencial vetor para fazer a quantização da radiação, veremos como encontrar um hamiltoniano da radiação para uma cavidade de um meio homogêneo, linear e condutor, o qual é essencialmente dependente do tempo. Com isso aplicamos o método de Lewis e Riesenfeld para quantizar a luz.

No capítulo 3 abordamos o comportamento clássico e quântico de uma onda eletromagnética em um meio não dispersivo e linear com propriedades ópticas dependente do tempo. Assumimos que a permeabilidade, permissividade e condutividade são dependentes do tempo e que variam exponencialmente com uma taxa constante, de modo que a frequência e a velocidade de propagação das ondas neste meio são constantes. Construímos os estados coerentes e calculamos as flutuações quânticas das amplitudes do campo.

No capítulo 4 fizemos o uso de uma abordagem mais elegante para descrição da onda eletromagnética em um meio linear dependente do tempo, que rendeu um artigo publicado em uma revista internacional. Encontramos uma hamiltoniana do oscilador generalizado dependente do tempo para os modos da radiação e usando os invariantes dinâmicos, estudamos as soluções clássica e quântica para a evolução adiabática e não adiabática da propagação das ondas eletromagnéticas. Demonstramos que nos dois regimes a evolução adiabática apresenta uma fase geométrica, que prova uma relação direta entre o ângulo de Hannay (clássico) e a fase de Berry (quântico).

Na capítulo 5 discutimos a comportamento da luz em um meio dielétrico linear com permissividade elétrica crescendo exponencialmente a uma taxa constante e a propagação do campo escalar em um espaço-tempo de de Sitter, ambos nos regimes clássico e quântico. Notamos que os sistemas são similares e que a hamiltoniana para amplitude de ambos os campos é idêntica. Usamos o método do invariante para resolver a equação de Schrödinger associada ao hamiltoniano do campo escalar e usando os estados de Fock construimos os estados coerentes. Finalmente, calculamos as flutuações quânticas para o campo escalar e obtivemos a relação de incerteza para os modos deste campo.

Capítulo 1

Invariantes dinâmicos dependentes do tempo

As quantidades físicas que não mudam com o tempo são normalmente chamadas de constantes do movimento. Uma vez que tais grandezas não variam também é comum serem denominadas de invariantes. Constantes do movimento são quantidades de grande interesse no estudo da dinâmica, visto que elas carregam informações sobre a natureza do problema, proporcionando também simplificações matemáticas.

A seguir, será apresentado brevemente como é feita a análise da evolução temporal no contexto da mecânica quântica. Seguida pela demonstração formal dos invariantes dinâmicos, método proposto por Lewis e Riesenfeld em 1969 para encontrar a solução da equação de Schrödinger em sistemas quânticos modulados por hamiltonianos explicitamente dependentes do tempo [14, 15]. Para entender melhor o funcionamento, será apresentado um exemplo do invariante para um oscilador generalizado.

1.1 Evolução temporal e a equação de Schrödinger

Sobre a evolução temporal de um sistema, considere a seguinte análise oriunda de um dos princípais livros textos [10]. A evolução temporal de um estado físico na mecânica clássica é completamente descrito pela equação de Newton, ou o equivalente, no formalismo lagrageano e/ou hamiltoniano, as equações de Euler-Lagrange e equações de Hamilton, respectivamente. Desse modo, as soluções dessas equações fornecem toda a informação do sistema físico, logo, é possível calcular todas as quantidades de interesse a partir dessas soluções. Tais equações são conhecidas como equações fundamentais da física clássica (que para baixas velocidades é não relativística) [58].

Por outro lado, no mundo microscópico o sistema físico é governado pela denominada de mecânica quântica e as quantidades de interesse são os kets, os quais são vetores (elementos de um espaço vetorial) que representam o estado do sistema físico. Com eles é possível construir e calcular os valores do operadores observáveis. Neste contexto, a equação fundamental que descreve a dinâmica temporal é a de Schrödinger. Neste regime a posição dada pela variável de coordenada é tratada como operador, em quanto que o tempo é meramente um parâmetro e não um operador como no caso da posição. No caso da teoria quântica de campos, o espaço e o tempo são tratados de forma igualitária, mas a posição perde o status de operador.

Considere um sistema físico, o qual inicialmente encontra-se em um estado que é representado por $|\psi\rangle$, ou melhor, no instante inicial t_0 tem-se $|\psi, t_0\rangle$. De tal modo que uma evolução temporal conduz o sistema a um novo estado $|\psi, t\rangle$, onde $t > t_0$. Matematicamente é possível fazer uma conexão entre esses dois estados por meio de um operador, isto é, ao aplicar um operador em um ket tem-se um novo ket. Portanto, a evolução temporal é descrita da seguinte forma $|\psi, t\rangle = U(t, t_0)|\psi, t_0\rangle$, onde $U(t, t_0)$ é chamado de operador de evolução temporal.

A existência de tal operador deve satisfazer três critérios básicos: ser unitário, $U^\dagger U = 1$ para que a probabilidade seja conservada, isto é, $\langle\psi, t|\Psi, t\rangle = \langle\psi, t_0|\psi, t_0\rangle = 1$; composição, $U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1)U(t_1, t_0)$, onde $t_2 > t_1 > t_0$ e infinitesimal $|\psi, t_0 + dt\rangle = U(t_0 + dt, t_0)|\psi, t_0\rangle$, tomando o limite de $dt \longrightarrow 0$ tem-se $U = 1$. Todas as condições são satisfeitas fazendo $U = 1 - i\Omega dt$, com a exigência de que $\Omega = \Omega^\dagger$ seja hermitiano.

Em comparação com a mecânica clássica onde o hamiltoniano é o gerador de evolução temporal e da velha mecânica quântica onde postula-se que a energia é proporcional a frequência ω, ou seja, $E = \hbar\omega$. Logo, é intuitivo fazer $\Omega = H/\hbar$, onde $\hbar$ é a constante de Planck reduzida. Sendo o hamiltoniano o gerador das transformações temporais, a evolução temporal do estado indo de t até $t + dt$ é satisfeita fazendo

$$|\psi(t)\rangle \quad \rightarrow \quad |\psi(t + dt)\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar}H dt\right)|\psi(t)\rangle\,, \tag{1.1}$$

onde $H = H(t)$ é também chamado de operador de evolução temporal. No entanto, essa mesma transformação pode ser feita por uma expansão em série de potências, sendo dt pequeno, e expandido até primeira ordem, desprezando termos de ordem superior, tem-se

$$|\psi(t + dt)\rangle = |\psi(t)\rangle + \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle\, dt. \tag{1.2}$$

Portanto, comparando (1.1) com essa expressão, obtém-se a equação que rege a dinâmica do vetor (ket de estado),

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H(t)\,|\psi(t)\rangle\,, \tag{1.3}$$

onde o operador $H(t)$ é chamado de hamiltoniano, que identifica o problema e $|\psi(t)\rangle$ é um vetor (ket) do espaço de Hilbert que indica o estado da partícula. Assim, encontrando a função de onda, obtêm-se todas as informações do problema. É imediato observar que para um hamiltoniano indenpendente do tempo, em geral, ele represente a energia do sistema e leva a equação de evolução temporal (1.3) a ser uma equação de autovalor.

Uma maneira formal de deduzir essa equação, é a partir do grupo de transformações contínuas.

No caso geral de um hamiltoniano dependente do tempo, a dinâmica temporal do estado indo de t_0 até $t > t_0$, é feita por meio do operador de evolução temporal. Considerando uma evolução finita como sendo composta por sucessivas evoluções infinitesimais (N vezes, e tomando N tendendo ao infinito), ou seja,

$$\begin{aligned}
|\psi(t_0)\rangle \quad \rightarrow \quad |\psi(t)\rangle &= \left[1 - \frac{i}{\hbar} H dt\right] ... \left[1 - \frac{i}{\hbar} H dt\right] |\psi(t_0)\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[1 - \frac{i}{\hbar} H dt\right]^N |\psi(t_0)\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[1 - \frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{N}\int_{t_0}^{t} H(t')\, dt'\right)\right]^N |\psi(t_0)\rangle \\
|\psi(t)\rangle &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')\, dt'\right) |\psi(t_0)\rangle = U(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle\,, \quad (1.4)
\end{aligned}$$

onde

$$U(t,t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')\, dt'\right), \tag{1.5}$$

é chamado de operador de evolução temporal. Claramente, o caso anterior visto em (1.1), é uma expansão até primeira ordem do operador (1.5). Assim, derivando (1.4) com relação ao tempo obtém-se (1.3). Vale resaltar que na passagem anterior usa-se do fato que os hamiltonianos para tempos distintos comutam, porém o foco aqui estar na dedução da equação de Schrödinger que estabelece a evolução temporal do sistema. No caso em que os hamiltonianos não comutarem o operador de evolução temporal é dado pela série de Dyson, que continua senda uma solução para equação de Schrödinger [10].

Na mecânica quântica os objetos centrais de estudo são os vetores e os operadores. Como a ênfase desse trabalho é a dinâmica temporal de um sistema quântico, é válido salientar que não só os vetores evoluem no tempo, mas também os operadores. O tratamento dinâmico do sistema quântico pode ser feito em três representações equivalentes: a representação de Schrödinger, a representação de Heisenberg e a representação da Interação. Assim como a evolução temporal de um vetor é regida a equação de Schrödinger, a evolução temporal de um operador é regida pela equação de Heisenberg. A evolução é

$$O(t_0) \quad \rightarrow \quad O(t) = U^{\dagger}(t,t_0) O(t_0) U(t,t_0). \tag{1.6}$$

Portanto, derivando com relação ao tempo, encontra-se a equação que rege a dinâmica dos operadores,

$$\frac{dO(t)}{dt} = \frac{\partial O(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}\left[O(t), H\right]. \tag{1.7}$$

Essa é a equação de Heisenberg, proposta em 1924. Essas representações são equivalentes pois os valores esperados das quantidades mesuráveis são os mesmos. Mas, quando (1.7) é igual a zero, é dito que a quantidade física representada pelo operador é conservada. Isso será usado mais adiante.

Na mecânica quântica, o hamiltoniano caracteriza os níveis de energia e fornece a dinâmica temporal do sistema, desde que este operador atenda alguns axiomas físicos. Assim, para formular uma teoria quântica, física, é necessária uma estrutura matemática que atenda algumas exigências: i) possuir um espectro de energia limitado por baixo; ii) que os vetores do espaço de Hilbert, possuam um produto escalar com norma positiva definida e iii) ter uma evolução temporal unitária (a norma dos vetores deve ser preservada). O espaço vetorial da mecânica quântica é uma aplicação do espaço de Hilbert. Nesse espaço, as quantidades físicas que representam a coordenada q e momento conjugado p são promovidas à operadores, que obedecem a seguinte álgebra de comutação (também chamada de condição canônica de quantização),

$$[q, p] = i\hbar, \tag{1.8}$$

onde estes operadores possuem um espectro de autovalores, que formam dois espaços equivalentes para tratar a mecânica quântica. Nesses espaços de Hilbert, têm-se os estados (vetores) denotados por $|\psi\rangle$ e os operadores $O(q, p)$, onde qualquer quantidade física pode ser escrita como função de q e p. Como esses são operadores, logo, as quantidades físicas serão operadores. As duas representações, são:

- No espaço da posição:

$$\langle q|\lambda\rangle = \psi_\lambda(q); \quad q = q \quad \text{e} \quad p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}. \tag{1.9}$$

- No espaço do momento:

$$\langle p|\lambda\rangle = \phi_\lambda(p); \quad q = i\hbar\frac{\partial}{\partial p} \quad \text{e} \quad p = p, \tag{1.10}$$

onde $\psi_\lambda(q)$ é a função de onda no espaço das coordenadas (por exemplo, posição espacial ou angular) e $\phi_\lambda(p)$ representa o mesmo estado, sendo conhecida como função de onda no espaço dos momentos.

Essas duas representações são equivalentes, pois, uma função de onda é a transformada de Fourier da outra. Como a coordenada e o momento conjugado possuem um conjunto completo de autovetores, $|q\rangle$ e $|p\rangle$, isso significa que qualquer vetor pode ser escrito nessas bases, ou seja,

$$|\lambda\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, |p\rangle \langle p|\lambda\rangle \quad \text{ou} \quad |\lambda\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq\, |q\rangle \langle q|\alpha\rangle\,, \tag{1.11}$$

que na forma de função de onda fica,

$$\psi_\lambda(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipq/\hbar} \phi_\lambda(p) \quad \text{ou} \quad \phi_\lambda(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-ipq/\hbar} \psi_\lambda(q), \tag{1.12}$$

onde

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipq/\hbar}. \tag{1.13}$$

A mecânica quântica usual é caracterizada como sendo uma teoria hermitiana, pois a hermiticidade desempenha um papel muito importante nessa teoria. Desde a publicação do trabalho de Bender e Boettcher sobre autovalores reais em sistemas não hermitianos [59], a condição de hermiticidade tem sido muito discutida sobre a realidade física. Uma nova perspectiva sobre mecânica quântica propõe uma abrangência nessa condição, tal que, é possível construir uma teoria em que os operadores possam ser não hermitianos. É possível ver um comparativo entre essas duas abordagens equivalentes da mecânica quântica em Ref. [60]. Neste livro, os autores apresentam que, mesmo no caso de um sistema físico descrito por um hamiltoniano não hermitiano, propriedades tais como autovalores reais e conservação da norma podem ser assegurados desde que a simetria de paridade e reversão temporal não seja quebrada.

A tarefa básica da dinâmica quântica é encontrar observáveis que comutam (compatíveis) com o hamiltoniano e determinar seus autovalores. Feito isto, expandindo o ket de estado inicial em termos dos autovetores daquele observável e aplicando o operador de evolução temporal encontra-se a solução do problema. Esse último passo consiste em unicamente em mudar a fase de cada um dos coeficientes de expansão. Quando o sistema é autoestado simultâneo de Q e H, ele permanece assim por toda a evolução temporal. O máximo que pode ocorrer é uma mudança de fase $e^{-iE_nt/\hbar}$. Quando se afirma que o observável compatível com H é uma constante do movimento, ele é neste sentido. Dessa forma, a evolução temporal é

$$|\Psi, t_0\rangle = \sum c_n(t_0)|\phi_n\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi, t\rangle = \sum c_n(t)|\phi_n\rangle, \tag{1.14}$$

onde $\{|\phi_n\rangle\}$ é uma base de autovetores de uma quantidade física Q que se preserva no tempo (Ou seja, $Q|\phi_n\rangle = q_n|\phi_n\rangle$ para todo instante de tempo t). Logo, $\sum |c_n(t)|^2 = \sum |c_n(t_0)|^2$, o estado evolui em uma base rígida. Quando a quantidade física não depende explicitamente do tempo e comuta com o hamiltoniano, devido esta última, a base que diagonaliza Q também diagonaliza H. Isso sempre acontece quando o sistema não depende explicitamente do tempo. Mas o que acontece se essa quantidade compatível fosse dependente do tempo? Veremos a seguir que é possível encontrar a solução da dinâmica quântica desse tipo para o problema, mesmo no caso mais geral com o hamiltoniano dependendo explicitamente do tempo. Embora o hamiltoniano dependendo tempo possa não ser a energia do sistema ainda assim ele carrega toda a informação do problema e continua sendo o gerador de evolução temporal.

1.2 Invariantes dinâmicos de Lewis-Riesenfeld

Vejamos agora o método do invariante proposto por Lewis e Riesenfeld para encontrar a solução da equação de Schrödinger para sistemas que variam temporalmente [15]. O método é bastante seguro e tem revelado ser um eficiente procedimento, com soluções analíticas e exatas para uma ampla variedade de sistemas quânticos abertos e aplicado extensivamente na literatura. Assumindo um sistema modulado por um hamiltoniano que dependente do tempo $H(t)$ e é hermitiano, considere a existência de um operador hermitiano $I^\dagger = I$, o qual corresponde a equação

$$\frac{dI}{dt} \equiv \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I, H] = 0, \tag{1.15}$$

onde $I = I(t)$ tem dependência temporal explicita. Isso significa que o operador I representa uma quantidade conservada no tempo, o que acarreta no nome de invariante. Da equação de evolução temporal (1.3), conclui-se que $|\psi\rangle$ carrega todas as informações sobre o sistema, logo, é necessário encontrá-lo. Para investigar a correspondência de I com essa solução, multiplica-se (1.15) por $|\psi\rangle$ à direita e usa-se (1.3). Diante disso, obtem-se

$$\left(\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I, H]\right)|\psi\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial I}{\partial t}|\psi\rangle + I\left(H|\psi\rangle\right) - H\left(I|\psi\rangle\right) &= 0 \\ i\hbar\left(\frac{\partial I}{\partial t}|\psi\rangle + I\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle\right) &= H\left(I|\psi\rangle\right) \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(I|\psi\rangle\right) &= H\left(I|\psi\rangle\right). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Portanto, a aplicação de I em um vetor que satisfaz a equação de Schrödinger permance sendo uma solução, ou seja, matematicamente a estrutura do vetor não é alterada. Assim, o estado físico do sistema não mudou e validade de (1.16) é garantida mesmo para o operador possuindo derivadas temporais.

Existem certas condições nas quais os autovetores do invariante $I(t)$ satisfazem a equação de Schrödinger. No entanto, considerando que o invariante não possua termos com derivadas temporais, uma redefinição de seus autovetores por uma fase dependente do tempo pode ser feita, tal que a partir da equação de Schrödinger a solução seja compatível. Deste modo, a solução da equação de Schrödinger e os autovetores de I vão discordar devido uma fase que depende do tempo. Considerando que I tem uma base de autovetores $\{|\lambda, \kappa\rangle\}$, onde,

$$\begin{aligned} I(t)|\lambda, \kappa\rangle &= \lambda|\lambda, \kappa\rangle \\ \langle\lambda', \kappa'|\lambda, \kappa\rangle &= \delta_{\lambda'\lambda}\delta_{\kappa'\kappa}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

sendo λ são seus os autovalores. É imediato concluir que devido ao fato do invariante ser hermitiano corresponde diretamente que o mesmo possua um espectro real ($I^\dagger = I \Rightarrow \lambda^* = \lambda \in \mathbb{R}$), tal que κ são números quânticos. Tomando a derivada temporal da equação de autovalor acima, resulta

$$\frac{\partial I}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle + I\frac{\partial}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle. \tag{1.18}$$

Fazendo a multiplicação de (1.18) por $\langle\lambda',\kappa'|$ à esquerda, obtém-se

$$\begin{aligned}\left\langle\lambda',\kappa'\right|\frac{\partial I}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle + \lambda'\left\langle\lambda',\kappa'\right|\frac{\partial}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle &= \left\langle\lambda',\kappa'\right|\frac{\partial \lambda}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle + \lambda\left\langle\lambda',\kappa'\right|\frac{\partial}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle \\ \left\langle\lambda',\kappa'\right|\frac{\partial I}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle &= \frac{\partial \lambda}{\partial t}\delta_{\lambda'\lambda}\delta_{\kappa'\kappa} + (\lambda-\lambda')\left\langle\lambda',\kappa'\right|\frac{\partial}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle. \end{aligned}\tag{1.19}$$

Por outro lado, multiplicando (1.15) por $|\lambda,\kappa\rangle$ à direita,

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial I}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle + I\left(H\left|\lambda,\kappa\right\rangle\right) - H\left(I\left|\lambda,\kappa\right\rangle\right) &= 0 \\ i\hbar\frac{\partial I}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle + IH\left|\lambda,\kappa\right\rangle - \lambda H\left|\lambda,\kappa\right\rangle &= 0, \end{aligned}\tag{1.20}$$

e multiplicando este resultado por $\langle\lambda',\kappa'|$ à esquerda, obtém-se

$$\begin{aligned} i\hbar\left\langle\lambda',\kappa'\right|\frac{\partial I}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle - (\lambda'-\lambda)\left\langle\lambda',\kappa'\right|H\left|\lambda,\kappa\right\rangle &= 0 \\ i\hbar\left\langle\lambda',\kappa'\right|\frac{\partial I}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle &= (\lambda-\lambda')\left\langle\lambda',\kappa'\right|H\left|\lambda,\kappa\right\rangle. \end{aligned}\tag{1.21}$$

Então, assumindo que $\lambda = \lambda'$, essa equação fornece

$$\left\langle\lambda,\kappa'\right|\frac{\partial I}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle = 0, \tag{1.22}$$

e a Eq. (1.19) fica,

$$\left\langle\lambda,\kappa'\right|\frac{\partial I}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t}\delta_{\kappa'\kappa}. \tag{1.23}$$

Consequentemente, para $\kappa' = \kappa$, encontra-se

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0. \tag{1.24}$$

Deste modo, verifica-se que os autovalores de I são independentes do tempo. Para estabelecer a relação entre os autovetores de I e a solução da equação de Schrödinger, considere o resultado na Eq. (1.18), o qual fornece

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle + I\frac{\partial}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle &= \lambda\frac{\partial}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle \\ \frac{\partial I}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle &= (\lambda - I)\frac{\partial}{\partial t}\left|\lambda,\kappa\right\rangle. \end{aligned}\tag{1.25}$$

Fazendo a multiplicação à esquerda por $\langle\lambda',\kappa'|$,

$$\langle\lambda',\kappa'|\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda,\kappa\rangle = (\lambda-\lambda')\langle\lambda',\kappa'|\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,\kappa\rangle\,. \tag{1.26}$$

Então, substituindo (1.26) em (1.21), obtém-se

$$i\hbar(\lambda-\lambda')\langle\lambda',\kappa'|\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,\kappa\rangle = (\lambda-\lambda')\langle\lambda',\kappa'|H|\lambda,\kappa\rangle\,, \tag{1.27}$$

ou,

$$(\lambda-\lambda')\langle\lambda',\kappa'|\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t)|\lambda,\kappa\rangle\right\} = 0. \tag{1.28}$$

Portanto, para $\lambda\neq\lambda'$ resulta em,

$$i\hbar\langle\lambda',\kappa'|\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,\kappa\rangle = \langle\lambda',\kappa'|H|\lambda,\kappa\rangle\,. \tag{1.29}$$

Todavia, note que o mesmo não se verifica no caso de $\lambda=\lambda'$,

$$i\hbar\langle\lambda,\kappa'|\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,\kappa\rangle = \langle\lambda,\kappa'|H|\lambda,\kappa\rangle\,. \tag{1.30}$$

Contudo, sendo a validade da Eq. (1.29) garantida tanto para $\lambda\neq\lambda'$ quanto para $\lambda=\lambda'$, é possível concluir que $|\lambda,\kappa\rangle$ é de fato uma solução, um caso especial de $|\psi\rangle$ para a equação de Schrödinger. Então,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,\kappa\rangle = H|\lambda,\kappa\rangle\,. \tag{1.31}$$

Por fim, considerando que invariante não possui derivadas temporais, a base de seus autovetores pode ser redefinida pela multiplicação de um fator de fase, o qual deve ser arbitrário e dependente do tempo, logo,

$$|\lambda,\kappa\rangle \quad\rightarrow\quad e^{i\mu_{\lambda\kappa}(t)}|\lambda,\kappa\rangle\,, \tag{1.32}$$

onde $\mu_{\lambda\kappa}(t)$ é uma função real e arbitrária do tempo. O novo vetor não deve alterar em nada os resultados previamente discutidos. Porém, da Eq. (1.29), é obtido,

$$i\hbar\langle\lambda',\kappa'|\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,\kappa\rangle_\mu = \langle\lambda',\kappa'|H|\lambda,\kappa\rangle_\mu\,, \tag{1.33}$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,\kappa\rangle_\mu = ie^{i\mu_{\lambda\kappa}(t)}\frac{d\mu_{\lambda\kappa}(t)}{dt}|\lambda,\kappa\rangle + e^{i\mu_{\lambda\kappa}(t)}\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,\kappa\rangle\,. \tag{1.34}$$

Então, fazendo a substituição do novo autovetor em (1.30), resulta

$$\langle\lambda',\kappa'|e^{i\mu_{\lambda'\kappa'}(t)}e^{i\mu_{\lambda\kappa}(t)}\left\{-\hbar\frac{d\mu_{\lambda\kappa}(t)}{dt}|\lambda,\kappa\rangle + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right\}|\lambda,\kappa\rangle = \tag{1.35}$$

$$\langle\lambda',\kappa'|e^{i\mu_{\lambda'\kappa'}(t)}H\left(e^{i\mu_{\lambda\kappa}(t)}|\lambda,\kappa\rangle\right)\,. \tag{1.36}$$

Cancelando as exponenciais, verifica-se

$$
\begin{aligned}
-\hbar\frac{d\mu_{\lambda\kappa}(t)}{dt}\delta_{\lambda'\lambda}\delta_{\kappa'\kappa} + \langle\lambda',\kappa'|\, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\lambda,\kappa\rangle &= \langle\lambda',\kappa'|\, H\,|\lambda,\kappa\rangle \\
\hbar\frac{d\mu_{\lambda\kappa}(t)}{dt}\delta_{\lambda'\lambda}\delta_{\kappa'\kappa} &= \langle\lambda',\kappa'|\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right)|\lambda,\kappa\rangle\,.
\end{aligned} \tag{1.37}
$$

A equação (1.29) só possui validade para o caso de $\lambda \neq \lambda'$. Entretanto, com a escolha da fase, esse resultado se mantém para $\lambda = \lambda'$ na Eq. (1.30). Sedo assim, o novo autovetor de $I(t)$ satisfaz a seguinte expressão

$$
i\hbar\,\langle\lambda,\kappa'|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\lambda,\kappa\rangle_{\mu} = \langle\lambda,\kappa'|\, H\,|\lambda,\kappa\rangle_{\mu}\,, \tag{1.38}
$$

resulta em,

$$
\hbar\frac{d\mu_{\lambda\kappa}(t)}{dt}\delta_{\kappa'\kappa} = \langle\lambda,\kappa'|\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right)|\lambda,\kappa\rangle\,. \tag{1.39}
$$

O lado direito desta equação deve ser nulo para $\kappa \neq \kappa'$ com a devida escolha de $|\lambda,\kappa\rangle$, de modo que ela seja satisfeita. Portanto, a equação que determina a fase arbitrária fica dado por,

$$
\hbar\frac{d\mu_{\lambda\kappa}(t)}{dt} = \langle\lambda,\kappa|\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right)|\lambda,\kappa\rangle\,. \tag{1.40}
$$

É sempre possível fazer essa diagonalização, pois $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H$ é hermitiano, logo, possui um conjunto completo. Finalmente, uma vez que cada novo autovetor $|\lambda,\kappa\rangle_{\mu}$ de $I(t)$ contempla a equação de Schrödinger, pelo princípio da superposição, a solução geral $|\psi\rangle_{\mu}$ pode ser uma expansão na nova base, ou seja

$$
|t\rangle = \sum_{\lambda,\kappa}^{\infty} c_{\lambda\kappa}\,|\lambda,\kappa\rangle_{\mu}
$$

$$
|\Psi(t)\rangle = \sum_{\lambda,\kappa}^{\infty} c_{\lambda\kappa}e^{i\mu_{\lambda\kappa}(t)}\,|\lambda,\kappa;t\rangle\,, \tag{1.41}
$$

onde $c_{\lambda\kappa}$ são os coeficientes da expansão e independentes do tempo. A base de autovetores do operador invariante é dependente do tempo, ou seja, $|\lambda,\kappa\rangle = |\lambda,\kappa;t\rangle$; e a omissão da dependência temporal foi feita para não carregar a notação.

1.3 Invariante para o oscilador generalizado

Para elucidar como funciona o método do invariante dinâmico de Lewis e Riesenfeld, apresentado na seção anterior, considere o hamiltoniano que descreve o movimento de partícula dado por

$$H(t) = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{1}{2}m(t)\omega^2(t)q^2 + \frac{1}{2}y(t)(qp + pq), \tag{1.42}$$

onde q é a coordenada canônica, p é o momento canônico conjugado e $m(t)$ é o termo de massa que depende explicitamente do tempo, bem como os parâmetros $\omega(t)$ e $y(t)$ que aparecem neste hamiltoniano também dependem do tempo. Este tipo de hamiltoniano tem sido amplamente estudado na literatura [62, 63, 35, 64]. Das equações de Hamilton, tem-se

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} + yq \quad \text{e} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q - yp. \tag{1.43}$$

Combinando estas equações, encontra-se

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \frac{\dot{p}}{m} - \frac{\dot{m}}{m^2}p + \dot{y}q + y\dot{q} \\ \ddot{q} &= -\frac{1}{m}(m\omega^2 q + ym(\dot{q} - yq)) - \frac{\dot{m}}{m^2}m(\dot{q} - yq) + \dot{y}q + y\dot{q} \\ \ddot{q} &= -\frac{\dot{m}}{m}\dot{q} - \left(\omega^2 - y^2 - \frac{\dot{m}}{m}y - \dot{y}\right)q. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\ddot{q} + \Gamma(t)\dot{q} + \Omega^2(t)q = 0, \tag{1.44}$$

onde $\Gamma = \dot{m}/m$ é um parâmetro de amortecimento e $\Omega^2 = \omega^2 - y^2 - \Gamma y - \dot{y}$ é a frequência modificada. Ou seja, o hamiltoniano (1.42) descreve um oscilador amortecido com parâmetros dependentes do tempo, isto é, com frequência e amortecimento que variam no tempo. Destaca-se também que essa aboradagem tem sido aplicado em diversos modelos na literatura [26, 65, 66, 67].

Nesse estudo assumimos a existência de um operador invariante com uma forma quadrática dada por,

$$I(t) = \alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + \gamma(t)\{q, p\}, \tag{1.45}$$

onde α, β e γ são funções reais do tempo e $\{q, p\} = qp + pq$ é o anticomutador. Inserindo I na Eq. (1.15) que define a constância do operador a fim de encontrar o invariante em termos de quantidades conhecidas. Usando as relações de comutação

$$[q, F(p)] = i\hbar\frac{\partial F}{\partial p} \quad \text{e} \quad [p, G(q)] = -i\hbar\frac{\partial G}{\partial q}, \tag{1.46}$$

e $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, tal que

$$[q^2, p^2] = 2i\hbar\{q, p\} = -[p^2, q^2], \tag{1.47}$$

$$[\{q, p\}, q^2] = -4i\hbar q^2 = -[q^2, \{q, p\}], \tag{1.48}$$

$$[\{q,p\},p^2] = -4i\hbar p^2 = -[p^2,\{q,p\}]. \tag{1.49}$$

Então, para que a equação do invariante seja satisfeita (1.15), as seguintes expressões para os coeficientes devem existir

$$\dot{\alpha} = 2\left(\gamma m\omega^2 - \alpha y\right), \tag{1.50}$$

$$\dot{\beta} = 2\left(\beta y - \frac{\gamma}{m}\right), \tag{1.51}$$

$$\dot{\gamma} = \beta m\omega^2 - \frac{\alpha}{m}. \tag{1.52}$$

Considerando $\beta = \rho^2$ resulta em

$$\dot{\beta} = 2\rho\dot{\rho} = 2\left(\rho^2 y - \frac{\gamma}{m}\right), \tag{1.53}$$

$$\gamma = m\left(\rho^2 y - \rho\dot{\rho}\right), \tag{1.54}$$

e

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}\left[m\left(\rho^2 y - \rho\dot{\rho}\right)\right] = \rho^2 m\omega^2 - \frac{\alpha}{m}, \tag{1.55}$$

$$\alpha = \rho^2 m^2\omega^2 - m\frac{d}{dt}\left[m\left(\rho^2 y - \rho\dot{\rho}\right)\right], \tag{1.56}$$

ou

$$\alpha = m^2\left[\left(\omega^2\rho + \Gamma\dot{\rho} + \ddot{\rho}\right)\rho - \Gamma y\rho^2 - \dot{y}\rho^2 - 2y\rho\dot{\rho} + \dot{\rho}^2\right]. \tag{1.57}$$

No entanto, sendo

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}(t) &= 2\left(\gamma m\omega^2 - \alpha y\right)\\
&= 2\left\{m^2\omega^2\left(\rho^2 y - \rho\dot{\rho}\right) - ym^2\left[\left(\omega^2\rho + \Gamma\dot{\rho} + \ddot{\rho}\right)\rho - \Gamma y\rho^2 - \dot{y}\rho^2 - 2y\rho\dot{\rho} + \dot{\rho}^2\right]\right\}\\
&= -2\left\{m^2\left[\omega^2\rho\dot{\rho} + y\Gamma\dot{\rho}\rho + y\ddot{\rho}\rho - \Gamma y^2\rho^2 - y\dot{y}\rho^2 - 2y^2\rho\dot{\rho} + y\dot{\rho}^2\right]\right\}\\
&= -2\left\{m^2\left[\omega^2\rho\dot{\rho} + y\Gamma\dot{\rho}\rho + y\ddot{\rho}\rho - y^2\rho\dot{\rho} + y\dot{\rho}^2\right]\right\} + \frac{d}{dt}\left[m^2y^2\rho^2\right].
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\alpha(t) &= \frac{d}{dt}\left\{m^2\left[\left(\omega^2\rho + \Gamma\dot{\rho} + \ddot{\rho}\right)\rho - \Gamma y\rho^2 - \dot{y}\rho^2 - 2y\rho\dot{\rho} + \dot{\rho}^2\right]\right\}\\
&= \frac{d}{dt}\left\{m^2\left[\left(\omega^2 - y^2 - \Gamma y - \dot{y}\right)\rho + \Gamma\rho + \ddot{\rho}\right]\rho\right\} + \frac{d}{dt}\left[m^2\left(y^2\rho^2 - 2y\rho\dot{\rho} + \dot{\rho}^2\right)\right]\\
&= \frac{d}{dt}\left\{m^2\left[\Omega^2\rho + \Gamma\rho + \ddot{\rho}\right]\rho\right\} + \frac{d}{dt}\left[m^2y^2\rho^2\right] + \frac{d}{dt}\left[m^2\left(-2y\rho\dot{\rho} + \dot{\rho}^2\right)\right],
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Chamando

$$\eta = m^2\left(\Omega^2\rho + \Gamma\dot{\rho} + \ddot{\rho}\right), \tag{1.60}$$

e combinando com as equações de $\dot{\alpha}$ encontra-se

$$\frac{d(\eta\rho)}{dt} = -2\eta\dot{\rho} \quad \rightarrow \quad \dot{\eta}\rho = -3\eta\dot{\rho}$$

$$\eta = \frac{C}{\rho^3}. \tag{1.61}$$

Com isso, é possível escrever a seguinte relação

$$\alpha - m^2\left(\rho y - \dot{\rho}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}. \tag{1.62}$$

Observe que o invariante inicialmente continha de três funções arbitrárias e desconhecidas, e agora tem uma função que simplifica a expressão do invariante. Logo, usando esse resultado para simplificar a expressão do invariante, produz

$$I(t) = \frac{1}{2}\left\{\frac{q^2}{\rho^2} + \left[\rho p - (\dot{\rho} - y\rho)q\right]^2\right\}, \tag{1.63}$$

onde ρ satisfaz a equação de Milne-Piney [68, 69], ou seja,

$$\ddot{\rho} + \Gamma(t)\dot{\rho} + \Omega^2(t)\rho = \frac{1}{m^2(t)\rho^3}. \tag{1.64}$$

É possível escolher $C = 1$, sem perdas de generalidade, de modo que a equação (1.64) é satisfeita. Uma vez que, o invariante é hermitiano, conclui-se que $\rho(t)$ deve ser uma função real. Logo, qualquer solução de (1.64) pode ser usada para construir o invariante, sendo assim, existe uma família de invariantes.

A equação de Milne-Pinney também é conhecida como equação de Ermakov, onde em 1880 ele mostrou que as equações para o oscilador harmonico (1.64) e (1.44) são acopladas pela frequência. O que leva a uma quantidade invariante por eliminação de ω^2, como pode ser visto em Ref. [22]. Esse processo faz com que alguns autores chamem o invariante dinâmico de invariante de Ermakov [70], ou ainda, invariante de Lewis-Ermakov.

Algumas propriedades do invariante são extraordinárias. Pois, este é uma constante de movimento para sistema com frequência dependente do tempo, mesmo a hamiltoniana correspondente não possuindo essa propriedade. Não depende da massa e tem dimensão de ação, não de energia. O invariante existe para determinados sistemas dissipativos dos quais a hamiltoniana convencional pode não existir. Além disso, a fatorização do opeador correspondente ao invariante pemite generalizar os operadores de criação e aniquilação [70].

1.3.1 Autoestados e autovalores do invariante

Usando a condição de quantização $p = -i\hbar\partial/\partial q$, o invariante torna-se um operador, de modo que a equação de autovalor corresponde a uma equação diferencial. E os autovetores correspondem a funções de onda, ou seja,

$$I\left(q, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}, t\right)\phi(q,t) = \lambda\phi(q,t), \tag{1.65}$$

onde $\phi(q,t) = \langle q|\phi, t\rangle$, sendo $|\phi, t\rangle = |\lambda, \kappa; t\rangle$ os autoestados do invariante. Para simplificar a equação de autovalor, considere o seguinte operador unitário [33]

$$U = \exp\left[-i\frac{m(t)}{2\hbar\rho}\left(\dot{\rho} - y\rho\right)q^2\right], \tag{1.66}$$

onde $U^\dagger = U^{-1}$. Aplicando U na equação de autovalor do invariante, $U(I\phi) = U(\lambda\phi)$, e usando o fato de U ser unitário, resulta

$$U(IU^\dagger U\phi) = U(\lambda\phi) \quad \Rightarrow \quad (UIU^\dagger)U\phi = \lambda U\phi$$

$$I'\phi' = \lambda\phi', \tag{1.67}$$

onde $\phi'(q,t) = U\phi(q,t)$ e $I' = UIU^\dagger$. O que resulta na seguinte expressão para o invariante atuando em $I'\phi'$,

$$I'\phi' = -\frac{\hbar^2}{2}\rho^2\frac{\partial^2\phi'}{\partial q^2} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\rho^2}\phi'. \tag{1.68}$$

Note que, fazendo uma transformação de similaridade, encontra-se uma equação de autovalor equivalente com o mesmo espectro. Por simplicidade, considere $\sigma = q/\rho$, tal que $\phi'(q,t) = N\varphi(\sigma)$, sendo N um fator de normalização, resultando em

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi^\dagger\phi dq = \int_{-\infty}^{\infty}|N^2|\varphi^\dagger\varphi\rho d\sigma = |N^2|\rho\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^\dagger\varphi d\sigma = 1, \tag{1.69}$$

onde,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^\dagger\varphi d\sigma = 1 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{\sqrt{\rho}}. \tag{1.70}$$

Deste modo,

$$\phi'(q,t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\varphi(\sigma) \quad \text{e} \quad I' = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2}. \tag{1.71}$$

A equação de autovalor para esse operador fica com uma aparência conhecida,

$$-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2\varphi_n(\sigma)}{\partial\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_n(\sigma) = \lambda\varphi_n(\sigma). \tag{1.72}$$

Assim, transformando a equação de autovalor do invariante na equação de Schrödinger do oscilador harmônico independente do tempo. Com solução conhecida, dada por,

$$\varphi_n(\sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}2^n n!}\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\hbar}\right)H_n\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\hbar}}\right), \tag{1.73}$$

e com espectro de autovalores dado por

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar. \tag{1.74}$$

Portanto, a solução do invariante original é

$$\phi_n(q,t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} U^{-1}\varphi(q/\rho)$$

$$\phi_n(q,t) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar 2^n n! \rho}}\right) \exp\left[-\frac{m}{2\hbar\rho}\left(\frac{1}{m\rho} + i(\dot{\rho} - y\rho)\right) q^2\right] H_n\left(\frac{q}{\sqrt{\hbar}\rho}\right). \tag{1.75}$$

Observe que a enorme vantagem de usar o método do invariante é que encontramos uma solução analítica para um problema que é explicitamente dependente do tempo, sem fazer uso de aproximações pertubativas. Consideramos aqui apenas a abordagem feita por Hartley e Hay [27, 28, 29, 30]. Para encontrar a fase faremos essa abordagem na próxima seção.

1.3.2 Solução da equação de Schrödinger e fase de Lewis

Para encontrar a solução completa da equação de Schrödinger associada ao hamiltoniano (1.42) através do método de Lewis é necessário encontrar a fase (1.40). Mas vamos considerar o processo introduzido por Dirac para o oscilador harmônico indenpendente do tempo. Analogamente, é possível definir o operador de aniquilação e criação generalizados, dados por

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left\{\frac{q}{\rho} + i\left[\rho p - (\dot{\rho} - y\rho)q\right]\right\}, \tag{1.76}$$

$$a^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left\{\frac{q}{\rho} - i\left[\rho p - (\dot{\rho} - y\rho)q\right]\right\}, \tag{1.77}$$

tal que, fazendo uma inversão, resulta

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\rho(a^\dagger + a) \tag{1.78}$$

$$p = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left\{\left[\frac{i}{\rho} + m(\dot{\rho} - y\rho)\right]a^\dagger + \left[-\frac{i}{\rho} + m(\dot{\rho} - y\rho)\right]a\right\}. \tag{1.79}$$

Considerando (1.8), os novos operadores de criação e aniquilação satisfazem a relação de comutação $[a(t), a^\dagger(t)] = 1$. Portanto, é possível fatorizar o invariante, do modo que

$$I(t) = \left(a^\dagger(t)a(t) + \frac{1}{2}\right)\hbar, \tag{1.80}$$

onde

$$a\,|\phi_n(t)\rangle = \sqrt{n}\,|\phi_{n-1}(t)\rangle \quad \text{e} \quad a^\dagger\,|\phi_n(t)\rangle = \sqrt{n+1}\,|\phi_{n+1}(t)\rangle\,, \tag{1.81}$$

$$a^\dagger(t)a(t)\,|\phi_n(t)\rangle = n\,|\phi_n(t)\rangle\,. \tag{1.82}$$

O que fornece a seguinte expressão,

$$I(t)\,|\phi_n(t)\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\,|\phi_n(t)\rangle\,. \tag{1.83}$$

Para encontrar a fase é necessário encontrar os termos diagonais de $H(t)$ e $i\hbar\partial/\partial t$. Assim, para encontrar o termo de derivada temporal no cálculo da fase de Lewis, é necessário fazer uma pequena álgebra com as equações (1.81), isto é,

$$\langle\phi_{n-1}|\left(\frac{\partial a}{\partial t}\,|\phi_n\rangle + a\frac{\partial}{\partial t}\,|\phi_n\rangle\right) = \sqrt{n}\,\langle\phi_{n-1}|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\phi_{n-1}\rangle$$

$$\langle\phi_n|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\phi_n\rangle = \langle\phi_{n-1}|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\phi_{n-1}\rangle + \frac{1}{\sqrt{n}}\,\langle\phi_{n-1}|\,\frac{\partial a}{\partial t}\,|\phi_n\rangle\,, \tag{1.84}$$

ou,

$$\langle\phi_n|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\phi_n\rangle = \langle\phi_{n-1}|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\phi_{n-1}\rangle + \frac{1}{\sqrt{n}}\,\langle\phi_n|\,\frac{\partial a^\dagger}{\partial t}\,|\phi_{n-1}\rangle\,. \tag{1.85}$$

Tomando a derivada do operador de criação e usando a equação auxiliar,

$$\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} = \frac{i}{2}\left\{\left[\frac{1}{m\rho^2} - m\left(\omega_d^2\rho^2 - \dot{\rho}^2\right)\right]a^\dagger + \left[-\frac{2\dot{\rho}}{\rho^2} + i\frac{1}{m\rho^2} - im\left(\omega_d^2\rho^2 - \dot{\rho}^2\right)\right]a\right\}, \tag{1.86}$$

onde

$$\omega_d^2 = \omega^2 - y^2. \tag{1.87}$$

Ou seja

$$\langle\phi_n|\,\frac{\partial a^\dagger}{\partial t}\,|\phi_{n-1}\rangle = \sqrt{n}\frac{i}{2}\left[\frac{1}{m\rho^2} - m\left(\omega_d^2\rho^2 - \dot{\rho}^2\right)\right]. \tag{1.88}$$

Sendo assim,

$$\langle\phi_n|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\phi_n\rangle = \langle\phi_{n-1}|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\phi_{n-1}\rangle + \frac{i}{2}\left[\frac{1}{m\rho^2} - m\left(\omega_d^2\rho^2 - \dot{\rho}^2\right)\right]. \tag{1.89}$$

Uma vez que n começa em zero, essa relação de recorrência resulta em

$$\langle\phi_1|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\phi_1\rangle = \langle\phi_0|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\phi_0\rangle + \frac{i}{2}\left[\frac{1}{m\rho^2} - m\left(\omega_d^2\rho^2 - \dot{\rho}^2\right)\right]$$

$$\langle\phi_2|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\phi_2\rangle = \langle\phi_1|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\phi_1\rangle + \frac{i}{2}\left[\frac{1}{m\rho^2} - m\left(\omega_d^2\rho^2 - \dot{\rho}^2\right)\right]$$

$$\langle\phi_2|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_2\rangle = \langle\phi_0|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_0\rangle + \frac{i}{2}(2)\left[\frac{1}{m\rho^2} - m\left(\omega_d^2\rho^2 - \dot{\rho}^2\right)\right]$$

$$\vdots$$

$$\langle\phi_n|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle = \langle\phi_0|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_0\rangle + \frac{i}{2}n\left[\frac{1}{m\rho^2} - m\left(\omega_d^2\rho^2 - \dot{\rho}^2\right)\right]. \tag{1.90}$$

Deste modo, escolhendo o calibre

$$\langle\phi_0|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_0\rangle = \frac{i}{4}\left[\frac{1}{m\rho^2} - m\left(\omega_d^2\rho^2 - \dot{\rho}^2\right)\right], \tag{1.91}$$

encontra-se o primeiro termo da fase de Lewis, dado por

$$\langle\phi_n|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle = \frac{i}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{m\rho^2} - m\left(\omega_d^2\rho^2 - \dot{\rho}^2\right)\right]. \tag{1.92}$$

Para encontrar os elementos diagonais correspondentes ao hamiltoniano, é conveniente escrevê-lo em termos dos operadores de criação e aniquilação, cada termo fica

$$\begin{aligned}\frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar}{4m}\Bigg\{ &\left[-\frac{1}{\rho^2} + 2i\frac{\rho}{m}(\dot{\rho} - y\rho) + m(\dot{\rho} - y\rho)^2\right](a^\dagger)^2 \\ &+ \left[\frac{1}{\rho^2} + m(\dot{\rho} - y\rho)^2\right](a^\dagger a + a a^\dagger) \\ &\left[-\frac{1}{\rho^2} - 2i\frac{\rho}{m}(\dot{\rho} - y\rho) + m(\dot{\rho} - y\rho)^2\right] a^2 \Bigg\},\end{aligned} \tag{1.93}$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{\hbar}{4}m\omega^2\rho^2\left((a^\dagger)^2 + a^\dagger a + a a^\dagger + a^2\right), \tag{1.94}$$

$$\begin{aligned}\frac{y}{2}\{q,p\} = \frac{\hbar y}{2}\Big\{ &[i + m(\dot{\rho} - y\rho)](a^\dagger)^2 + m\rho(\dot{\rho} - y\rho)(a^\dagger a + a a^\dagger) \\ &[i + m(\dot{\rho} - y\rho)] a^2 \Big\}.\end{aligned} \tag{1.95}$$

Consequentemente, os termos diagonais para o hamiltoniano são

$$\langle\phi_n| H |\phi_n\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{m\rho^2} + m\left(\omega_d^2\rho^2 - \dot{\rho}^2\right)\right]. \tag{1.96}$$

Observe que o hamiltoniano possui elementos fora da diagonal devido aos termos quadráticos dos operadores de criação e aniquilação, isto se deve ao fato de que os operadores $I(t)$ e $H(t)$ não comutarem. Logo, a base que diagonaliza o invariante não diagonaliza o hamiltoniano. A fase de Lewis é

$$\hbar\frac{d\mu_n(t)}{dt} = i\hbar\langle\phi_n|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle - \langle\phi_n|H|\phi_n\rangle$$
$$\hbar\frac{d\mu_n(t)}{dt} = -\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{m(t)\rho^2(t)}, \tag{1.97}$$

ou seja,

$$\mu_n(t) = -\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{m(t')\rho^2(t')}dt'. \tag{1.98}$$

Portanto, a solução completa para a dinâmica do oscilador generalizado dependente do tempo é dada pelas funções de onda escritas da seguinte forma,

$$\psi_n(q,t) = \mathrm{e}^{i\mu_n(t)}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}2^n n!\rho}\right)\exp\left[-\frac{m}{2\hbar\rho}\left(\frac{1}{m\rho}+i(\dot{\rho}-y\rho)\right)q^2\right]H_n\left(\frac{q}{\sqrt{\hbar}\rho}\right), \tag{1.99}$$

onde a fase é dada por (1.98) e a solução geral é a soma sobre todos os n's.

1.3.3 Aproximação adiabática

A adiabaticidade é limite entre fenômenos estacionários, onde o estado do sistema não muda, e dinâmicos, onde o estado do sistema muda devido as influências de campos externos. Vale lembrar que Berry mostrou que nesses processos a fase adiabática que surge na evolução temporal é uma fase geométrica, que ficou conhecida como fase de Berry [61]. No regime em que as mudanças são muito lentas, conforme pode ser visto no apêndice B, o sistema adiabático adquire dois fatores de fase, um que corresponde a mudanças devido a evolução temporal e outro devido a evolução adiabática. Uma vez que as mudanças ocorrem nos parâmetros do sistema, para tomar o limite adiabático, pode-se fazer $d/dt = \epsilon d/d\tau$, tal que o parâmetro adiabático $\epsilon \ll 1$. Neste caso, considere que a seguinte expansão pode ser feita [62]

$$\rho(t) = \rho_0(t) + \epsilon\rho_1(t) + \epsilon^2\rho_2(t) + \ldots, \tag{1.100}$$

onde ϵ é o parâmetro adiabático. Logo, a equação auxiliar (1.64) fornece

$$\left[\epsilon^2\frac{d^2}{d\tau^2} + \epsilon^2\frac{1}{m}\frac{dm}{d\tau}\frac{d}{d\tau} + \left(\omega^2(t) - y^2 - y\epsilon\frac{1}{m}\frac{dm}{d\tau} - \epsilon\frac{dy}{d\tau}\right)\right]\times$$
$$\left(\rho_0(t) + \epsilon\rho_1(t) + \epsilon^2\rho_2(t) + \ldots\right) = \frac{1}{m^2(t)\left(\rho_0(t) + \epsilon\rho_1(t) + \epsilon^2\rho_2(t) + \ldots\right)^3}. \tag{1.101}$$

Como ϵ é muito pequeno, isso permite a seguinte aproximação

$$\frac{1}{\left(\rho_0(t) + \epsilon\rho_1(t) + \theta(\epsilon^2)\right)^3} = \frac{1}{\rho_0^3\left(1 + \epsilon\rho_1 + \theta(\epsilon^2)\right)^3}$$
$$\simeq \frac{1}{\rho_0^3}\left(1 - 3\epsilon\frac{\rho_1}{\rho_0} + \theta(\epsilon^2)\right). \tag{1.102}$$

Logo,

$$\theta(\epsilon^2) + \left[\omega_d^2(t) - \epsilon\frac{1}{m}\left(y\frac{dm}{d\tau} + m\frac{dy}{d\tau}\right)\right]\rho_0\left(1 + \epsilon\frac{\rho_1}{\rho_0} + \theta(\epsilon^2)\right) = \frac{1}{m^2\rho_0^3}\left(1 - 3\epsilon\frac{\rho_1}{\rho_0} + \theta(\epsilon^2)\right), \tag{1.103}$$

onde $\omega_d^2(t) = \omega^2(t) - y^2(t)$. Desse modo, comparando os termos da equação acima, em ordem de ϵ, encontra-se

$$\omega_d^2\rho_0 = \frac{1}{m^2\rho_0^3} \quad \Rightarrow \quad \omega_d^2 = \frac{1}{m^2\rho_0^4}, \quad \text{ou} \quad \rho_0^4 = \frac{1}{m^2\omega_d^2}. \tag{1.104}$$

Indo até primeira ordem, também resulta

$$\begin{aligned} \omega_d^2\rho_1 - \frac{1}{m}\left(y\frac{dm}{d\tau} + m\frac{dy}{d\tau}\right)\rho_0 &= -3\frac{\rho_1}{m^2\rho_0^4} \\ 4\frac{\rho_1}{m^2\rho_0^4} &= \frac{1}{m}\left(\frac{d}{d\tau}my\right)\rho_0 \\ \frac{\rho_1}{\rho_0} &= \frac{\rho_0^4}{4}m\left(\frac{d}{d\tau}my\right). \end{aligned} \tag{1.105}$$

Lembrando que a forma geral da fase adiabática é $\gamma(T) = i\int\langle n|\partial/\partial t|n\rangle$, logo, da Eq. (1.92) o termo integrante fica

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{1}{m\rho^2} - m\left(\omega_d^2\rho^2 - \dot{\rho}^2\right) \\ &= \frac{1}{m\rho^2} - m\omega_d^2\rho^2 - \theta(\epsilon^2) \\ &= \frac{1}{m\left(\rho_0 + \epsilon\rho_1 + \theta(\epsilon^2)\right)^2} - m\omega_d^2\left(\rho_0 + \epsilon\rho_1 + \theta(\epsilon^2)\right)^2 - \theta(\epsilon^2) \\ &\simeq \frac{1}{m\rho_0^2}\left(1 - 2\epsilon\frac{\rho_1}{\rho_0} + ...\right) - m\omega_d^2\rho_0^2\left(1 + 2\epsilon\frac{\rho_1}{\rho_0} + ...\right), \end{aligned} \tag{1.106}$$

ou seja,

$$\mathcal{I} \simeq -4\epsilon\frac{1}{m\rho_0^2}\frac{\rho_1}{\rho_0} + \theta(\epsilon^2). \tag{1.107}$$

Portanto, usando este resultado em (1.92) e combinando com (1.104) a fase fica

$$\begin{aligned} \langle\phi_n|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle &= -\frac{i}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)4\epsilon\frac{1}{m\rho_0^2}\frac{\rho_1}{\rho_0} + \theta(\epsilon^2) \\ \langle\phi_n|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle &= -\frac{i}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\epsilon\rho_0^2\left(\frac{d}{d\tau}my\right), \end{aligned} \tag{1.108}$$

ou seja,

$$\gamma_n(T) = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^T \frac{1}{m\omega_d}\left(\frac{d}{dt'}my\right)dt. \tag{1.109}$$

Nota-se que no regime adiabático a fase de Lewis é composta por dois termos, que representam as fases dinâmica e geométrica. Isso pode ser observado diretamente da solução dada pela Eq. (1.98), para tanto, é possível reescrever a Eq. (1.64) na forma,

$$\ddot{\rho} + \Gamma\dot{\rho} + \left[\omega^2 - y^2 - \frac{1}{m}\frac{d}{dt}(my)\right]\rho = \frac{1}{m^2\rho^3}. \tag{1.110}$$

Uma vez que no regime adiabático as mudanças são lentas, tem-se que $\dot{\rho} \sim \epsilon$ e pode ser descartado. Então,

$$\frac{1}{m\rho^2} = \left[\omega^2 - y^2 - \frac{1}{m}\frac{d}{dt}(my)\right]^{1/2}, \tag{1.111}$$

ou ainda,

$$\frac{1}{m\rho^2} = \omega_d^2\left[1 - \frac{1}{m\omega_d^2}\frac{d}{dt}(my)\right]^{1/2}. \tag{1.112}$$

Sendo a derivada temporal uma pertubação pequena, permite-se fazer uma expansão até primeira ordem na a raiz e substituindo o resultado em (1.98), encontra-se

$$\mu_n(T) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^T \omega_d(t)dt + \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^T \frac{1}{2m\omega_d}\frac{d}{dt}(my)dt. \tag{1.113}$$

Portanto, no regime adiabático a fase de Lewis é dividida em duas parte, uma fase dinâmica e outra geométrica [62, 63].

1.3.4 Sobre estados coerentes

Os estados coerentes foram incialmente propostos por Schrödinger como forma de entender o limite em que os estados quânticos correspondiam ao comportamento clássico do movimento de uma partícula [71]. O apêndice C apresenta um tratamento feito para o caso estacionário do oscilador harmônico simples. Veja agora como esses estados são obtidos utilizando o método do invariante.

Como foi visto anteriormente, é possível tornar a álgebra do invariante no caso conhecido do oscilador harmônico. Então, por simplicidade nos cálculos, considere novamente o operador unitário (1.66). Fatorizando o invariante I' fornece

$$I'(t) = U(t)I(t)U^{-1}(t) = \hbar\left(b^\dagger(t)b(t) + \frac{1}{2}\right), \tag{1.114}$$

onde

$$b(t) = U(t)a(t)U^{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\frac{q}{\rho} + i\rho p\right), \tag{1.115}$$

sendo $[b, b^\dagger] = 1$ satisfeita. A saber,

$$bb^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\frac{q}{\rho} + i\rho p\right)\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\frac{q}{\rho} - i\rho p\right)$$

$$bb^\dagger = \frac{1}{2\hbar}\left(\frac{q^2}{\rho^2} - i(qp - pq) + \rho^2 p^2\right), \tag{1.116}$$

e

$$b^\dagger b = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\frac{q}{\rho} - i\rho p\right)\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\frac{q}{\rho} + i\rho p\right)$$

$$b^\dagger b = \frac{1}{2\hbar}\left(\frac{q^2}{\rho^2} + i(qp - pq) + \rho^2 p^2\right), \tag{1.117}$$

logo,

$$bb^\dagger - b^\dagger b = \frac{1}{2\hbar}\left(-2i(qp - pq)\right) = 1. \tag{1.118}$$

Então, a partir do operador aniquilação (1.115) é possível construir os estados coerentes. Uma vez que os estados coerentes são autoestados do operador de aniquilação, tem-se

$$b\left|\alpha\right\rangle = \alpha\left|\alpha\right\rangle, \tag{1.119}$$

sendo esses estados uma expansão na base dos autoestados de I', que resulta em

$$\left|\varphi_\alpha\right\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left|\varphi_n\right\rangle. \tag{1.120}$$

No entanto, sabendo que $|\phi_n\rangle = U^{-1}\rho^{-1/2}|\varphi\rangle$, encontra-se

$$U^{-1}\rho^{-1/2}\left|\varphi_\alpha\right\rangle = \left(U^{-1}\rho^{-1/2}\right)e^{-|\alpha|^2/2}\sum\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left|\varphi_n\right\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left(U^{-1}\rho^{-1/2}\left|\varphi_n\right\rangle\right)$$

$$\left|\phi_\alpha\right\rangle = U^{-1}\rho^{-1/2}\left|\varphi_\alpha\right\rangle$$

$$\left|\phi_\alpha\right\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left|\phi_n\right\rangle, \tag{1.121}$$

sendo,

$$a\left|\phi_\alpha\right\rangle = \alpha\left|\phi_\alpha\right\rangle. \tag{1.122}$$

Portanto, a partir dos estados coerentes construídos com autoestados do invariante, é possível obter os estados coerentes na base das soluções da equação de Schödinger (1.3). A saber

$$\left|\phi_n\right\rangle \quad \to \quad \left|\psi_n\right\rangle = e^{i\mu_n(t)}\left|\phi_n\right\rangle$$

$$e^{i\mu_n(t)}\left|\phi_\alpha\right\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{i\mu_n(t)}\left|\phi_n\right\rangle$$

$$\left|\psi_\alpha\right\rangle \equiv e^{i\mu_n(t)}\left|\phi_\alpha\right\rangle$$

$$|\psi_\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\psi_n\rangle \,. \tag{1.123}$$

Para encontrar os autovalores com dependência temporal, basta fazer

$$a\,|\psi_\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i\mu_n(t)} a\,|\phi_n\rangle \,, \tag{1.124}$$

onde $a|\phi_n\rangle = \sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle$, então, fazendo uma substituição $n \to n+1$ no somatório, resulta

$$a\,|\psi_\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \sqrt{n+1} e^{i\mu_{n+1}(t)} |\phi_n\rangle$$

$$a\,|\psi_\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \alpha e^{i\mu_n(t)} e^{i2\mu_0(t)} |\phi_n\rangle$$

$$a\,|\psi_\alpha\rangle = \alpha e^{i2\mu_0(t)} |\psi_\alpha\rangle \,. \tag{1.125}$$

Note que

$$\mu_{n+1}(t) = -\left(n+1+\frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{1}{m(t')\rho^2(t')}\,dt'$$

$$\mu_{n+1}(t) = -\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{1}{m(t')\rho^2(t')}\,dt' - \int_0^t \frac{1}{m(t')\rho^2(t')}\,dt' = \mu_n(t) + 2\mu_0(t)$$

$$\mu_0(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{m(t')\rho^2(t')}\,dt'. \tag{1.126}$$

Ou seja,

$$a\,|\psi_\alpha\rangle = \alpha(t)\,|\psi_\alpha\rangle \,; \alpha(t) = \alpha e^{2i\mu_0(t)}, \tag{1.127}$$

tem-se que $|\psi_\alpha\rangle$ são os estados coerentes com dependência temporal e com autovalores $\alpha(t) = \alpha e^{i2\mu_0(t)}$. Com esse resultado é possível calcular o valor esperado da posição e do momento para os estados coerentes. Para isso, basta fazer o sanduíche de (1.78) no estado (1.123), resultando em,

$$\langle\psi_\alpha|q|\psi_\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\rho\,\langle\psi_\alpha|\left(\alpha e^{2i\mu_0(t)} + \alpha^* e^{-2i\mu_0(t)}\right)|\psi_\alpha\rangle \tag{1.128}$$

$$\langle\psi_\alpha|q|\psi_\alpha\rangle = \left(2\hbar|\alpha|^2\rho^2\right)^{1/2}\cos(-2\mu_0(t)+\delta), \tag{1.129}$$

onde $\alpha = |\alpha|e^{-i\delta}$. Ou seja, de fato esses estados correspondem ao comportamento clássico, fica mais claro quanto reescritos da forma

$$\langle q\rangle_\alpha = \left(2\hbar|\alpha|^2\rho^2\right)^{1/2}\cos\left(\theta(t)+\delta\right), \tag{1.130}$$

onde

$$\theta(t) = -2\mu_0(t) = \int_0^t \frac{dt'}{m\rho^2}. \tag{1.131}$$

Para o momento segue o mesmo procedimento usando (1.79), ou usando as equações de movimento (teorema de Ehrenfest)

$$\langle p \rangle = m\frac{d\langle q \rangle}{dt} + y\langle q \rangle, \tag{1.132}$$

obtem-se

$$\langle p \rangle = \left(2\hbar|\alpha|^2\right)^{1/2}\left[\frac{1}{\rho}\mathrm{sen}\left(\theta(t)+\delta\right) + m(\dot{\rho} - y\rho)\cos\left(\theta(t)+\delta\right)\right]. \tag{1.133}$$

Estes resultados imitam as soluções clássicas para a posição e o momento do oscilador. Além disso, tomando $y = 0$ os resultados obtidos para o oscilador generalizado reproduz os resultados encontrados em Ref. [33]. Finalmente, para massa e frequência constantes no tempo, de modo que $\rho = 1/\sqrt{m\omega}$ e $H_0 = \omega_0 I_0$, tem-se os resultados do oscilador harmônico independente do tempo e os estados coerentes coincidem com os que são apresentados no apêndice C.

Capítulo 2

Ondas eletromagnéticas em meios materiais

O entendimento da radiação demanda um abordagem tanto da mecânica quântica quanto da física clássica. Entender o comportamento dos campos elétrico e magnético é de fundamental importância para observar e compreender os fenômenos da natureza. Haja visto, que o desenvolvimento de novas tecnologias para dispositivos miniaturizados (tais como, nanotecnologias etc) exige intensivos estudos experimentais e teóricos, pois tais sistemas podem ser um interface entre o microscópico (regime quântico) e o macroscópico (regime clássico).

O enfoque aqui é na dinâmica dos campos elétrico e magnético que se propagam no interior de uma cavidade, meio material. Destacando-se os comportamentos clássico e quântico. Neste capítulo é apresentada uma importante abordagem da radiação em meios materiais, feita a partir de livros-texto [41, 72]. Inicialmente, veremos um panorama geral das equações que regem o comportamento dos campos elétrico e magnético, isto é, as equações de Maxwell na matéria. Considerando, então, a teoria da resposta linear para um meio homogêneo, isotrópico e com condutividade, vamos fazer o procedimento padrão para encontrar as soluções dos campos. Usando a abordagem do potencial vetor em uma cavidade com condições periódicas de contorno veremos como é feita a quantização da radiação.

2.1 Campos elétrico e magnético

Eletricidade e magnetismo eram entendidos como fenômenos distintos da matéria e foram sendo desenvolvidos independentemente. Mas foram as observações de Oersted que deram inicio ao eletromagnetismo, unificando então tais fenômenos em um único campo de estudo. Antes dessas observações, pensava-se que cargas elétricas correspondiam a fenômenos elétricos e imãs correspondiam a fenômenos magnéticos. Essencialmente, Oersted notou que correntes elétricas, cargas em movimento, movimentavam o ponteiro da bússola (imã), produzindo efeitos magnéticos.

A carga elétrica é uma propriedade fundamental da matéria e o espaço em volta dela é permeado por campos elétrico e magnético. Um outra carga na presença desses campos sentem a ação de uma força; regida por $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ que é chamada de força de Lorentz, onde q é a carga elétrica, $\vec{v}$ é a velocidade de uma carga em movimento, $\vec{E}$ é o campo elétrico e $\vec{B}$ é o campo magnético. No entanto, os campos podem existir em regiões do espaço em que não existem fontes, assim, eles têm significado próprio, ou seja, eles interagem com a matéria ordinária por meio da carga elétrica. Os campos podem carregar energia, momento linear, momento angular orbital e spin. As ondas eletromagnéticas são noções clássicas do caso limite da descrição quântica em termos de fótons. A descrição quântica é necessária para entender emissão de radiação por um átomo, ou qualquer sistema em escala atômica e molecular, com baixa densidade de fótons.

Os fenômenos elétricos e magnéticos, de forma geral, são governados pelas seguintes equações

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{2.2}$$

Nestas equações está contida a equação de continuidade, sendo ϱ a densidade de distribuição de carga total e $\vec{J}$ a densidade de corrente total.

2.1.1 Equações para os campos macroscópicos na forma estacionária

No estudo preliminar de campos elétrico e magnético estacionários utiliza-se as leis empíricas de Coulomb e Biot-Savart, respectivamente, as quais estabelecem que os campos são produzidos por carga e corrente (carga em movimento). Essas leis podem ser substituídas pelas lei de Gauss (2.3) e Ampère (2.4), que envolvem um formalismo matemático mais elegante e completo a respeito de tais fenômenos, juntamente com as equações homogêneas. Uma vez conhecida a distribuição de carga, dada pela densidade de carga ϱ e pela densidade de corrente $\vec{J}$, é possível encontrar as expressões para os campos. Portanto, o problema consiste em resolver as seguintes equações

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \tag{2.4}$$

Mas para aglomerados macroscópicos de matéria o procedimento é inviável.

Devido a natureza discreta da matéria as equações de Maxwell sofrem modificações para o comportamento dos campos no interior de material. Portanto, invés de enxergarmos os campos individualmente para cara carga no interior do material, por simplicidade podemos tomar os campos como a média dos campos [72].

Para um número muito grande de fontes, elétrons e núcleos, as flutuações macroscópicas dos campos em distâncias atômicas podem ser descartadas. A média do campo ou da carga (e/ou corrente) em um volume grande comparado ao tamanho do átomo é o mais relevante. Os campos macroscópicos e as fontes macroscópicas são dadas por,

$$\vec{D} = \varepsilon_{(0)}\vec{E} + \vec{P} + \hat{e}_\alpha \sum_\beta \frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + ... \tag{2.5}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_{(0)}}\vec{B} - \vec{M} + ... \tag{2.6}$$

onde $\vec{P}$ é o momento de dipolo elétrico médio macroscópico, $\vec{M}$ é o momento de dipolo magnético médio macroscópico, $Q_{\alpha\beta}$ é o momento de quadrupolo elétrico médio macroscópico etc. Sendo as fontes médias macroscópicas da densidade de carga e de corrente livres no meio. As cargas e correntes induzidas aparecem devido a $\vec{P}$, $\vec{M}$, $Q_{\alpha\beta}$ etc. Além disso, $\varepsilon_{(0)}$ e $\mu_{(0)}$ são a permissividade e a permeabilidade no vácuo.

O conjunto de equações que nos permite entender tais fenômenos na forma estacionária é

$$\nabla \cdot \vec{D} = \varrho \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{2.7}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}. \tag{2.8}$$

As equações homegêneas permitem que a abordagem para os campos possa ser simplificada introduzindo os potenciais escalar e vetor. Deste modo, é possível definir

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad \text{e} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \tag{2.9}$$

De modo que o problema se reduz à equação de Poisson. No vácuo, tem-se $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ e $\vec{H} = \mu_0\vec{B}$, logo

$$\vec{\nabla}^2\Phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla}^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}, \tag{2.10}$$

onde Φ é o potencial escalar e $\vec{A}$ é o potencial vetor, sendo a última composta por três equações, uma para cada componente do vetor densidade de corrente.

2.1.2 Indução eletromagnética

As primeiras observações envolvendo campos elétrico e magnético variáveis no tempo foram feitas por Faraday (1831) em seus experimentos com circuitos percorridos por corrente elétrica. Em resumo, a descoberta de Faraday sobre campos variáveis pode ser enunciada da seguinte forma: a variação do fluxo de campo magnético sobre a área de um circuito induz uma força eletromotriz que movimenta as cargas do circuito. Essa descoberta pode ser quantitativamente expressa por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_M}{dt}, \tag{2.11}$$

onde $\mathcal{E}$ é a força eletromotriz e ϕ_M é o fluxo magnético. O sinal negativo é proveniente da lei de Lenz, estabelecendo que a corrente induzida, e respectivamente o fluxo, tem o sentido oposto a modificação do fluxo através do circuito. Seja o circuito um caminho C delimitado por uma superfície aberta S, o fluxo magnético acoplado ao circuito é

$$\phi_M = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS, \tag{2.12}$$

onde $\hat{n}$ é um vetor unitário normal a superfície S, e a força eletromotriz é ao longo de C

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}. \tag{2.13}$$

Portanto,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS. \tag{2.14}$$

Usando o teorema de Stokes é possível transformar a integral de linha em uma integral de superfície, logo, a expressão acima fica

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS = 0, \tag{2.15}$$

ou seja,

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \tag{2.16}$$

Note que esse resultado é uma generalização de $\nabla \times \vec{E} = 0$ para campos dependentes de tempo.

2.1.3 Corrente de deslocamento

Estimulado pelo trabalho de Faraday, Maxwell observou que para fenômenos dinâmicos a lei Ampère estava incompleta, pois a conservação da carga estava sendo violada. A equação de continuidade é dada por,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{2.17}$$

Sendo assim, aplicando o divergente na lei Ampère (2.8),

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right) = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}, \tag{2.18}$$

ou seja, claramente o divergente da corrente deveria ser diferente de zero. De modo que, observando a lei de Gauss e a equação de continuidade, resulta

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{2.19}$$

isto é,

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \tag{2.20}$$

Portanto, o termo de corrente na lei de Ampère pode ser generalizado como

$$\vec{J} \rightarrow \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{2.21}$$

e, ao considerar campos dependentes do tempo tem-se

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{2.22}$$

Essa importante descoberta levou a equação acima a ser denominada como lei de Ampère-Maxwell. Com isso, Maxwell fechou as equações básicas que descrevem todos os fenômenos eletromagnéticos e como consequência era possível extrair toda a ótica geométrica a partir delas. Ao combinar essas equações, Maxwell também mostrou que a velocidade de uma onda eletromagnética era $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$, ou seja, só dependia das propriedades ópticas do meio, e que a luz era uma onda eletromagnética. Isto levou a constatação de que o olho é um aparelho elétrico.

2.1.4 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell na matéria são escritas da seguinte forma,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad , \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2.23}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}. \tag{2.24}$$

Para resolver as equações é necessário conhecer as relações constituintes $\vec{D} = \vec{D}[\vec{E}, \vec{B}]$ e $\vec{H} = \vec{H}[\vec{E}, \vec{B}]$, além da lei de Ohm $\vec{J} = \vec{J}[\vec{E}, \vec{B}]$ para meios condutores. Na maioria dos materiais a resposta do meio aos campos são dadas pelas fontes de dipolo, ou seja, os momento de dipolos induzidos devido a presença de campos elétricos e magnéticos, sendo os momentos de ordem mais altas desprezíveis (como quadrupolo, octapolo etc). Logo, $\vec{D} = \varepsilon_{(0)}\vec{E} + \vec{P}$ é o vetor deslocamento elétrico, que depende da densidade de polarização, e $\vec{H} = \vec{B}/\mu_{(0)} - \vec{M}$ que o vetor campo magnético, que depende da densidade de magnetização.

As contribuições de Faraday e Maxwell trouxeram fortes implicações sobre fenômenos eletromagnéticos, com o prospecto de que campo magnético gera campo elétrico e vice-versa. Ou seja, eles coexistem e são independentes de fontes. Maxwell também mostrou que no espaço vazio, na ausência de matéria, os campos existem e têm significado próprio. No vázio clássico, as fontes e polarizações são nula, mas os campos são diferentes de zero. Portanto, os campos existem independentemente das cargas.

2.1.5 Meios homogêneos, lineares e isotrópicos

A homogeneidade de material significa que suas propriedades são as mesmas tem todos os pontos do seu interior. A linearidade significa que a resposta do material a presença de campos é diretamente proporcional, ou seja, é uma função linear. Na maioria dos materiais, considerando que os campos são suficientemente fracos, temos que a reposta ao campo aplicado é linear, ou seja,

$$D_\alpha = \sum_\beta \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta \quad \text{e} \quad H_\alpha = \sum_\beta \mu'_{\alpha\beta} B_\beta, \tag{2.25}$$

e

$$\vec{J} = \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta} \vec{E}, \tag{2.26}$$

onde $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e $\mu'_{\alpha\beta}$ são os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética inversa. Para materiais mais simples a resposta pode ser isotrópica, logo, as componentes não se misturam e temos

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \text{e} \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}. \tag{2.27}$$

Materiais que apresentam resposta linear também tem as polarizações dadas por,

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad \text{e} \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}. \tag{2.28}$$

Logo,

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H}, \tag{2.29}$$

que comparando as expressões tem-se a relação entre a permissividade e a suscetibilidade dada por $\varepsilon = \varepsilon_{(0)}(1+\chi_e)$ e $\mu = \mu_{(0)}(1+\chi_m)$. No caso geral, tais quantidades são complexas, mas vamos cosiderar aqui apenas o caso em que elas são reais. Isto tem um forte significado aqui, o qual veremos mais adiante. Um fator interessante é que a teoria da resposta linear permite incorporar os efeitos da presença da matéria aos campos por meio das propriedades ε e μ.

2.1.6 Potenciais

Agora que estamos considerando campos variáveis, introduzidos pelas alterações das equações dos fenômenos estacionários, vejamos como os campos em termos os potenciais também sofrem alterações. No caso da equação $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ permanece válido $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$. Por outro lado, da lei de Faraday resulta que

$$\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$$

$$\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0. \tag{2.30}$$

Portanto,

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\Phi, \tag{2.31}$$

ou,

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \tag{2.32}$$

Vale salientar que esse resultado é devido as equações homogêneas e o comportamento dinâmico dos potenciais é proveniente das equações não homogêneas.

Invariância de gauge

Das equações sem fontes, homogeneas, sabemos que os campos podem ser expressos a partir de potenciais, ou seja,

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\quad\text{e}\quad\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \tag{2.33}$$

As outras equações, então, fornecem a dinâmica dos potencial. Essas equações regem como o potencial deve ser comportar. Desse modo, aqui consideramos que o meio é homogêneo, linear e isotrópico, resultando em

$$\nabla\cdot\varepsilon\left(-\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\rho$$

$$\nabla^2\Phi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{2.34}$$

e

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}=\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)+\mu\vec{J}$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=\mu\vec{J}. \tag{2.35}$$

Uma vez que os potenciais são arbitrários, as transformações de calibre $\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}g$ e $\Phi'=\Phi-\partial_t g$ tornam os campos invariantes por calibre, ou seja, $\vec{E}'=\vec{E}$ e $\vec{B}'=\vec{B}$. Isto permite uma escolha (que seja mais apropriada) para os potenciais, tal que as equações fiquem desacopladas. Uma escolha conveniente é

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0. \tag{2.36}$$

Resultando em

$$\vec{\nabla}^2\Phi-\frac{1}{\mu\epsilon}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.37}$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}. \tag{2.38}$$

Vantagem óbvia, desacoplamento das equações para os potenciais escalar e vetorial. Segunda vantagem é a invariância de Lorentz (transformações de Lorentz), devido a presença do operador D'Alambertiano. Terceira vantagem, no espaço ilimitado a solução é simples. A escolha (2.36) é denominada condição de Lorentz, e é sempre possível fazer a escolha dessa condição desde que a função de calibre g satisfaça as relações

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A'}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\vec{\nabla}^2 g-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=0$$

$$\vec{\nabla}^2 g-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=0.$$

Uma outra escolha, a qual é mais relevante para discussão feita aqui, é a do calibre de Coulomb, também chamado de calibre da radiação ou transversal, que é expresso da seguinte forma,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0, \tag{2.39}$$

resultando em

$$\vec{\nabla}^2\Phi=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.40}$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}+\vec{\nabla}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right), \tag{2.41}$$

que, apesar de não ser obviamente invariante sob transformação de Lorentz, estão efetivamente desacopladas e são ainda mais fáceis de resolver do que as do gauge de Lorentz. O potencial escalar satisfaz a equação de Poisson e é exatamente o potencial coulombiano, por isso a denominação *calibre de Coulomb*. A densidade de corrente pode ser escrita como a contribuição de dois termos $\vec{J}=\vec{J}_l+\vec{J}_t$ (isso é válido para qualquer vetor), um termo longitudinal ou irrotacional $\vec{\nabla}\times\vec{J}_l=0$ e outro transversal $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_t=0$, tal que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_l, \tag{2.42}$$

e

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(-\varepsilon\vec{\nabla}^2\Phi)=-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\frac{\partial\varepsilon\Phi}{\partial t}. \tag{2.43}$$

Logo, a parte que envolve o gradiente (2.41) é equivalente ao termo irrotacional da corrente, ou seja,

$$\vec{\nabla}\frac{\partial \varepsilon \Phi}{\partial t} = \vec{J}_l, \tag{2.44}$$

tal que

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} + \mu \vec{J}_l \tag{2.45}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{J}_t, \tag{2.46}$$

onde $\vec{J}_t$ é a corrente transversal, por isso a denominação calibre transversal.

Quando não há cargas estáticas é possível fazer $\Phi = 0$, ficando o campos de radiação descritos pelo potencial vetor e são gerados por correntes transversais. É conveniente na descrição quântica dos fótons usar o gauge de radiação, onde $\Phi = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, tal que ficamos apenas com a quantificação do potencial vetor, ou melhor, o votencial vetor será nossa variável dinâmica a qual fornece a solução para o problema. Sendo os campos obtidos a partir do potencial vetor.

2.2 Ondas eletromagnéticas clássica em meio condutor

A maioria dos livros textos de óptica o campo eletromagnético se propaga em um meio não dissipativo, considerando condutividade nula. Aqui vamos fazer o tratamento para um campo em um meio com condutividade e veremos qual o efeito deste termo na solução para os campos. As equações de Maxwell em um meio material não carregado, ou seja, com densidade de carga $\rho = 0$, são

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad &, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad &, \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

onde $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ e $\vec{J} = \sigma \vec{E}$. Aqui, ε, σ e μ são propriedades constantes de um meio homogêneo, linear e isotrópico. Neste caso o meio não é dispersivo, pois os parâmetros são reais. Para o caso em que a permeabilidade e a permissividade do meio são constantes, da lei de Gauss tem-se $\nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = 0$, ou seja, $\nabla \cdot \vec{E} = 0$. Já a lei de Ampère-Maxwell fornece,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{J}, \tag{2.48}$$

onde a velocidade da onda no meio é constante $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ e dependente das propriedades do meio.

Neste tratamento das equações de Maxwell para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é conveniente usar o gauge de Coulomb. Isso garante que o vetor $\vec{A}$ seja transverso, logo, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, e o potencial escalar é nulo para um sistema sem a presença de uma distribuição de carga. Assim, o campo elétrico $\vec{E}$ e o campo magnético $\vec{B}$ podem ser expressos em termos de $\vec{A}$, a saber,

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \tag{2.49}$$

Usando a resposta linear e as expressões acima nas equações de Maxwell obtem-se uma equação de onda amortecida para $\vec{A}$, cuja forma é

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - \sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu}\left(\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}\right) = -\varepsilon\frac{\partial_2 \vec{A}}{\partial t^2} - \sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \mu\sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{2.50}$$

Essa equação pode ser resolvida por separação de variáveis, onde é possível escrever $\vec{A}(\vec{r}, t)$ em termos dos modos $\vec{u}_l(\vec{r})$ e amplitudes $q_l(t)$, ou seja,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_l \vec{u}_l(\vec{r})q_l(t). \tag{2.51}$$

Este é um procedimento usual encontrado no livro-texto [41] e que possui muitas vantagens devido a simplificação do problema. A partir da equação de onda amortecida (2.50) obtêm-se

$$\nabla^2\vec{u}_l(\vec{r}) + \frac{\omega_l^2}{c^2}\vec{u}_l(\vec{r}) = 0, \tag{2.52}$$

$$\frac{d^2q_l}{dt^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{dq_l}{dt} + \omega_l^2 q_l = 0, \tag{2.53}$$

onde ω_l é uma constante de separação e representa as frequências naturais dos modos l, sendo $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ a velocidade da luz no meio. Portanto, o problema se reduziu a duas equações conhecidas, sendo (2.52) a equação de Helmholtz e (2.53) a equação de um oscilador harmônico amortecido. Os campos armazenados na cavidade fornecem,

$$\mathcal{U} = E_{cavidade} = \frac{1}{2}\int_{cav}\left(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B}\right)d^3x = \frac{1}{2}\int_{cav}\left(\varepsilon\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu}\vec{B}^2\right)d^3x, \tag{2.54}$$

sendo,

$$\vec{E} = -\sum_{l} \vec{u}_l \dot{q}_l \quad \text{e} \quad \vec{B} = \sum_{l} (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l) q_l. \tag{2.55}$$

Então,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{l,l'} \left(\int_{cav} \vec{u}_l \cdot \vec{u}_{l'} d^3x \right) \dot{q}_l \dot{q}_{l'} + \frac{1}{2\mu} \sum_{l,l'} \left(\int_{cav} (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{l'}) d^3x \right) q_l q_{l'}, \tag{2.56}$$

usando a identidade matemática

$$(\vec{\nabla} \times \vec{u}_l) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l) = \vec{u}_l \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}_{l'} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_l \times \vec{\nabla} \times \vec{u}_{l'}), \tag{2.57}$$

de tal modo que a integral do segundo termo da energia fica

$$\int_{cav} (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{l'}) d^3x = \int_{cav} \vec{u}_l \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}_{l'}) d^3x - \int_{cav} (\vec{u}_l \times \vec{\nabla} \times \vec{u}_{l'}) \cdot d\vec{S}. \tag{2.58}$$

Onde no segundo termos foi utilizado o teorema da divergência. Agora, utilizando as condições de contorno dos campos na superfície da cavidade $\vec{E} \cdot \hat{t} = 0$ e $\vec{B} \cdot \hat{n} = 0$, sendo $\hat{t}$ e $\hat{n}$ vetores unitários tangente e normal a superfície da cavidade, respectivamente, tal que

$$\vec{u}_l \cdot \hat{t} = 0 \quad \text{e} \quad (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l) \cdot \hat{n} = 0. \tag{2.59}$$

Fazendo com que a integral de superfície seja nula. Por outro lado, do calibre de Coulomb, resulta $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_l = 0$, logo,

$$\int_{cav} \vec{u}_l \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}_{l'}) d^3x = \int_{cav} \vec{u}_l \cdot \left(\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{l'}) - \vec{\nabla}^2 \vec{u}_{l'} \right) d^3x, \tag{2.60}$$

combinando esse resultado e sabendo que cada l é independente,

$$\int_{cav} \vec{u}_l \cdot \vec{u}_{l'} d^3x = \delta_{l,l'}, \tag{2.61}$$

com a equação que determina os modos (2.52), a energia na cavidade fica

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{l,l'} \delta_{l,l'} \dot{q}_l \dot{q}_{l'} + \frac{1}{2\mu} \sum_{l,l'} \frac{\omega_l^2}{c^2} \delta_{l,l'} q_l q_{l'}, \tag{2.62}$$

ou seja,

$$\mathcal{U} = \sum_{l} \left(\frac{1}{2}\varepsilon \dot{q}_l^2 + \frac{1}{2}\varepsilon \omega_l^2 q_l^2 \right). \tag{2.63}$$

Assim, a energia de cada modo de amplitude é

$$E_l = \frac{1}{2}\varepsilon \dot{q}_l^2 + \frac{1}{2}\varepsilon \omega_l^2 q_l^2, \tag{2.64}$$

ou seja, a radiação na cavidade pode ser entendida como um conjunto de osciladores desacoplados. Lembrando que para o sistema dissipativo a energia pode não coincidir com a hamiltoniana. Para entender a dinâmica clássica e quântica do problemas é necessário conhecer a hamiltoniana. Pois o problema se reduziu a dinâmica de um oscilador, Eq. (2.53).

2.2.1 Hamiltoniana para meios condutores

Seguindo o procedimento adotado por Choi [48] para a obtenção da hamiltoniana dos modos, introduzindo a força generalizada

$$Q_l = -\frac{\partial V_l}{\partial q_l} + Q_l', \tag{2.65}$$

onde Q_l' é a força de fricção não conservativa. Logo,

$$Q_l = \varepsilon \frac{d^2 q_l}{dt^2} = -\varepsilon \omega_l^2 q_l - \sigma \frac{dq_l}{dt}. \tag{2.66}$$

Lembrando que a força generalizada está relacionada com o potencial generalizado da seguinte forma,

$$Q_l = \frac{d}{dt}\frac{\partial U_l}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial U_l}{\partial q_l}, \tag{2.67}$$

que resulta em

$$U_l(\dot{q}_l, q_l) = \frac{1}{2}\varepsilon \dot{q}_l^2 \left(1 - e^{\sigma t/\varepsilon}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon q_l^2. \tag{2.68}$$

Onde este é o temo de energia potencial generalizada para as amplitudes dos modos. Definindo o termo cinético como

$$T_l = \frac{1}{2}\varepsilon \dot{q}_l^2, \tag{2.69}$$

finalmente, obtem-se a lagrangeana do problema, cuja forma é

$$L_l = T_l - U_l = e^{\sigma t/\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\varepsilon \dot{q}_l^2 - \frac{1}{2}\varepsilon q_l^2\right). \tag{2.70}$$

O momento canônico conjugado, por definição é

$$p_l = \frac{\partial L_l}{\partial \dot{q}_l} = e^{\sigma t/\varepsilon}\varepsilon \dot{q}_l. \tag{2.71}$$

A hamiltoniana é a transformada de Legendre da lagrangeana, dada por

$$H_l = \frac{\partial L_l}{\partial \dot{q}_l}\dot{q}_l - L_l. \tag{2.72}$$

Portanto, a hamiltoniana que descreve o movimento da amplitude dos modos, reproduzindo a equação (2.53), é da seguinte forma

$$H_l = \frac{p_l^2}{2\varepsilon}e^{-\sigma t/\varepsilon} + \frac{1}{2}e^{\sigma t/\varepsilon}\varepsilon\omega_l^2 q_l^2. \tag{2.73}$$

Note que essa hamiltoniana descreve processos dissipativos do tipo oscilador harmônico amortecido [73, 74], onde a permissividade desempenha o papel da massa que cresce exponencialmente com o tempo. Usando o formalismo hamiltoniano, das equações de Hamilton resulta que

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H_l}{\partial p_l} = e^{-\sigma t/\varepsilon}\frac{p_l}{\varepsilon} \quad \dot{p}_l = -\frac{\partial H_l}{\partial q_l} = -e^{-\sigma t/\varepsilon}\varepsilon\omega_l^2 q_l$$

$$\ddot{q}_l = e^{-\sigma t/\varepsilon}\left(\frac{\dot{p}_l}{\varepsilon} - \frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{p_l}{\varepsilon}\right) = -\omega_l^2 q_l - \frac{\sigma}{\varepsilon}\dot{q}_l$$

$$\ddot{q}_l + \frac{\sigma}{\varepsilon}\dot{q}_l + \omega_l^2 q_l = 0.$$

Essa equação é conhecida nos livros textos de mecânica clássica [58] para o movimento harmônico amortecido, a qual é uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes. A solução da equação da amplitude dos modos é a solução do oscilador harmônico amortecido, dada por

$$q_l(t) = q_{l,max}e^{-\sigma t/2\varepsilon}\cos(\Omega_l t + \theta), \tag{2.74}$$

onde

$$\Omega_l^2 = \omega_l^2 - \frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2}, \tag{2.75}$$

é a frequência modificada que depende da frequência natural.

A relação entre a energia e a hamiltoniana para esse sistema dissipativo é dada por

$$E_l = e^{-\sigma t/\varepsilon}H_l, \tag{2.76}$$

onde a energia é obtida através dos campos.

A solução para os termos de onda plana do par de equação que define o potencial vetor é

$$\vec{u}_l = L^{-3/2}e^{\pm i\vec{k}.\vec{x}}\hat{e}_l \tag{2.77}$$

onde $L^{-3/2}$ é o tamanho do cubo (cavidade cúbica), $|\vec{k}| = \omega_l/c$ é o vetor de onda, $\hat{e}_l$ são vetores unitários nas direções de polarização, que devem ser perpendiculares ao vetor de onda devido à condição de transversalidade, $\nabla\cdot\vec{u} = \vec{k}\cdot\vec{u} = 0$. Agora, como as funções de modo $\vec{u}_l$ e amplitude q_l estão completamente determinadas, podemos obter o potencial vetorial $\vec{A}(\vec{r},t)$ e consequentemente

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\sum_l \vec{u}_l(\vec{r})\dot{q}_l(t) = -\sum_l \vec{u}_l(\vec{r})\frac{\partial H_l}{\partial p_l} = -\frac{e^{-\sigma t/\varepsilon}}{\varepsilon}\sum_l \vec{u}_l(\vec{r})p_l(t), \tag{2.78}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \sum_l \nabla \times \vec{u}_l(\vec{r}) q_l(t) = \sum_l i\vec{k} \times \vec{u}_l(\vec{r}) q_l(t). \tag{2.79}$$

Observe que a condutividade causa uma atenuação nos campos, o significado disso é que a condutividade dissipa a energia na cavidade. Vale mencionar que a condutividade faz com que a hamiltoniana seja explicitamente dependente do tempo. Logo, o tratamento quântico fica muito díficil na forma usual para hamiltonianos com dependência temporal explícita pois não é possível fazer a separação de variáveis usual. Para encontrar a solução da equação de Schrödinger em sistemas com hamiltoniano dependente do tempo faz com que muitos autores partam para processos aproximativos.

2.3 Método do invariante para ondas eletromagnéticas em um meio condutor

Vimos no capítulo 1 que a hamiltoniana tem uma importante função na dinâmica quântica, a qual passa a ser um operador de gera a evolução temporal e que de acordo com os axiomas do espaço vetorial que a descreve, o hamiltoniano deve ser um operador hermitiano [10]. Observa-se da expressão (2.73) que essa condição é satisfeita como a imposição de que as propriedades ópticas sejam constantes reais. A equação de Schrödinger que descreve a dinâmica temporal de cada modo dentro da cavidade é

$$\left(\frac{1}{2\varepsilon} e^{-\sigma t/\varepsilon} p_l^2 + \frac{1}{2} \varepsilon e^{\sigma t/\varepsilon} \omega_l^2 q_l^2 \right) |\Psi, t\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi, t\rangle, \tag{2.80}$$

onde a amplitude q_l e o momento p_l são operadores que satisfazem a relação de comutação $[q_l, p_l] = i\hbar$, com $p_l = -i\hbar\partial/\partial q_l$. Para resolver esta equação usando o método de Lewis and Riesenfeld [14], considere que existe um invariante para cada modo dado por

$$\frac{dI_l}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[I_l, H_l] + \frac{\partial I_l}{\partial t} = 0. \tag{2.81}$$

Se $I(t)$ satisfaz a equação acima, a solução da equação de Schrödinger é

$$|\psi_{n_l}, t\rangle = e^{i\beta_{n_l}(t)} |\phi_{n_l}, t\rangle, \tag{2.82}$$

onde $|\phi_{n_l}, t\rangle$ forma uma base completa

$$I_l(t) |\phi_{n_l}, t\rangle = \lambda_{n_l} |\phi_{n_l}, t\rangle, \tag{2.83}$$

com autovalores independentes do tempo λ_n, tal que a condição de ortogonalidade é $\langle \phi_{n'_l}, t | \phi_{n_l}, t\rangle = \delta_{n'_l n_l}$. A fase $\beta_{n_l}(t)$ é encontrada pela equação

$$\hbar \frac{d\beta_{n_l}(t)}{dt} = \langle \phi_{n_l}, t| \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_l(t) \right) |\phi_{n_l}, t\rangle. \tag{2.84}$$

Para encontrar o invariante o procedimento é análogo ao que foi feito para o oscilador generalizado do capítulo anterior. Comparando os hamiltonianos nota-se que basta tomar $y = 0$ e comparar os respectivos termos. O invariante que satisfaz a equação (2.81) é dado por

$$I_l(t) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{q_l}{\rho_l}\right)^2 + (\rho_l p_l - Z(t)\dot{\rho}_l q_l)^2\right], \tag{2.85}$$

onde a função real $\rho_l(t)$ satisfaz a equação de Milne-Pinney [68, 69], a saber

$$\ddot{\rho}_l(t) + \frac{\sigma}{\varepsilon}\dot{\rho}_l(t) + \omega_l^2\rho_l = \frac{e^{-2\sigma t/\varepsilon}}{\varepsilon^2\rho_l^3}, \tag{2.86}$$

e $Z(t)$ é um termo tipo massa dependente do tempo de um oscilador harmônico, dado por

$$Z(t) = \varepsilon e^{\sigma t/\varepsilon}. \tag{2.87}$$

Para resolver a equação de Schrödinger através desse método é necessário resolver a equação de autovalor do invariante. Portanto é conveniente usar os estados de Fock, introduzindo os operadores de criação e aniquilação, $a(t)$ e $a^\dagger(t)$, definidos por

$$a_l(t) = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left[\frac{q_l}{\rho_l} + i(\rho_l p_l - Z(t)\dot{\rho}_l q_l)\right], \tag{2.88}$$

$$a_l^\dagger(t) = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left[\frac{q_l}{\rho_l} - i(\rho_l p_l - Z(t)\dot{\rho}_l q_l)\right], \tag{2.89}$$

que satisfazem a relação de comutação

$$[a_l(t), a_l^\dagger(t)] = 1, \tag{2.90}$$

conhecida como segunda quantização, mais especificamente quantização de bósons. Ficando o invariante da seguinte forma

$$I_l(t) = \hbar\left(a_l^\dagger(t)a_l(t) + \frac{1}{2}\right). \tag{2.91}$$

A equação de autovalor $I_l(t)$ é resolvível exatamente, como no caso do oscilador independente do tempo com estados do espaço de Fock $|n_l, t\rangle$. Definindo o operador número $N_l = a_l^\dagger a_l$ tal que $N_l|n_l, t\rangle = n_l|n_l, t\rangle$, obtem-se

$$I_l(t)|n_l, t\rangle = \hbar\left(n_l + \frac{1}{2}\right)|n_l, t\rangle, \tag{2.92}$$

$$a_l(t)|n_l, t\rangle = n_l^{1/2}|n_l - 1, t\rangle, \tag{2.93}$$

$$a_l^\dagger|n_l, t\rangle = (n_l + 1)^{1/2}|n_l + 1, t\rangle, \tag{2.94}$$

onde considere a mudança de notação $|\phi_n, t\rangle \rightarrow |n, t\rangle$, para simplificar a notação. A fase de Lewis

$$\beta_{n_l}(t) = -\left(n_l + \frac{1}{2}\right) \int_0^t \frac{1}{Z(\tau)\rho_l^2(\tau)} d\tau. \tag{2.95}$$

Para este caso particular em que a solução da equação auxiliar é

$$\rho_l(t) = \frac{e^{-\sigma t/2\varepsilon}}{(\varepsilon\Omega_l)^{1/2}}, . \tag{2.96}$$

logo,

$$\beta_{n_l}(t) = -\Omega_l \left(n_l + \frac{1}{2}\right) t. \tag{2.97}$$

Sendo assim, a solução da equação de Schrödinger (2.80) associada a este problema é

$$|\psi_{nl}, t\rangle = \exp\left\{-i\Omega_l \left(n_l + \frac{1}{2}\right)\right\} |n_l, t\rangle, \tag{2.98}$$

Lembrando que a solução geral é $|\Psi, t\rangle = \sum_{n_l} c_{nl} |\psi_{nl}, t\rangle$, onde c_{nl} são constantes

Com os operadores $a_l(t)$ e $a_l^\dagger(t)$ dados, fazendo a inversão das expressões para a amplitude dos modos tem-se

$$q_l(t) = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \rho_l [a_l(t) + a_l^\dagger(t)], \tag{2.99}$$

$$p_l(t) = i\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{1}{\rho_l} - iZ(t)\dot{\rho}_l\right) a_l^\dagger(t) - \left(\frac{1}{\rho_l} + iZ(t)\dot{\rho}_l\right) a_l(t)\right]. \tag{2.100}$$

A evolução do operador de aniquilação é dada por

$$\frac{da_l(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[a_l(t), H_l] + \frac{\partial a_l(t)}{\partial t}, \tag{2.101}$$

que resulta em

$$\frac{da(t)_l}{dt} = -\frac{i}{Z(t)\rho_l^2(t)} a_l(t). \tag{2.102}$$

Considerando a solução particular (2.96) e (2.87) a evolução do operador de aniquilição é

$$a_l(t) = a_l(0) e^{-i\Omega_l t}. \tag{2.103}$$

Assim, usando os resultados acima, o potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ fica com a seguinte forma

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left(\frac{\hbar}{2L^3}\right)^{1/2} \sum_l \hat{e}_l \rho_l \left[a_l(0) e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r} - \Omega_l t)} + a_l^\dagger(0) e^{-i(\vec{k}_l \cdot \vec{r} - \Omega_l t)}\right]. \tag{2.104}$$

Calculando os valores esperados da amplitude q_l, momento p_l e as flutuações quânticas no espaço de Fock usando as equações obtemos

$$\langle q_l \rangle = \langle p_l \rangle = 0, \tag{2.105}$$

$$\langle q_l^2 \rangle = \hbar \rho_l^2 \left(n_l + \frac{1}{2} \right), \tag{2.106}$$

$$\langle p_l^2 \rangle = \hbar \left[\frac{1}{\rho_l^2} + (Z\dot{\rho}_l)^2 \right] \left(n_l + \frac{1}{2} \right), \tag{2.107}$$

e

$$(\Delta q_l)^2 = \langle q_l^2 \rangle - \langle q_l \rangle^2 = \hbar \rho_l^2 \left(n_l + \frac{1}{2} \right), \tag{2.108}$$

$$(\Delta p_l)^2 = \langle p_l^2 \rangle - \langle p_l \rangle^2 = \hbar \left[\frac{1}{\rho_l^2} + (Z\dot{\rho}_l)^2 \right] \left(n_l + \frac{1}{2} \right). \tag{2.109}$$

O produto das incertezas produz

$$(\Delta q_l)(\Delta p_l) = \hbar \left[1 + (Z\rho_l\dot{\rho}_l)^2 \right]^{1/2} \left(n_l + \frac{1}{2} \right), \tag{2.110}$$

ou seja,

$$(\Delta q_l)(\Delta p_l) = \frac{\hbar \omega_l}{\Omega_l} \left(n_l + \frac{1}{2} \right). \tag{2.111}$$

Conclui-se que a relação de incerteza é sempre maior do que $\hbar/2$.

2.3.1 Sobre a quantização

O processo de quantização do campo eletromagnético é feito pela chamada segunda quantização. Em que usa-se os operadores de criação $a^\dagger$ e aniquilação a os quais satisfazem um álgebra de bósons $[a^\dagger, a] = 1$.

Considerando a solução particular (2.96) o operador da amplitude dos modos é escrito da seguinte forma

$$q_l = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon\Omega_l}} e^{-\sigma t/\varepsilon} \left(a_l^\dagger + a_l \right). \tag{2.112}$$

Que tomando a inversa, tem-se

$$a_l = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\varepsilon\Omega_l}} \left[(\varepsilon\Omega_l + i\sigma/2) e^{\sigma t/2\varepsilon} q_l + i e^{-\sigma t/2\varepsilon} p_l \right] \tag{2.113}$$

sendo $a^\dagger$ o complexo conjugado.

Portanto, o potencial é

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon} \right)^{1/2} e^{-2\sigma t/\varepsilon} \sum_l \frac{\vec{u}_l}{(\Omega_l)^{1/2}} \left[a_l(t) + a_l^\dagger(t) \right] \tag{2.114}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon}\right)^{1/2}e^{-2\sigma t/\varepsilon}\sum_{l}\frac{\vec{u}_l}{(\Omega_l)^{1/2}}\left[a_l(0)e^{-i\Omega_l t}+a_l^{\dagger}(0)e^{i\Omega_l t}\right]. \tag{2.115}$$

Considerando condições periódicas de contorno $\vec{A}(\vec{x}+\vec{L},t)=\vec{A}(\vec{x},t)$, da solução espacial (2.77) tem-se

$$\vec{u}_l(\vec{x}+\vec{L},t)=\vec{u}_l(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad e^{i\vec{k}.\vec{L}}=1. \tag{2.116}$$

Na qual $\vec{k}$ é o vetor de propagação da onda, que resulta em

$$\vec{k}=\frac{2\pi}{L}(l_1\hat{x}+l_2\hat{y}+l_3\hat{z}); \quad l_1=l_2=l_3=0,\pm 1,\pm 2,... \tag{2.117}$$

Observe que $\vec{k}_{-l}=-\vec{k}_l$ e $\omega_{-l}\equiv\omega_l$, pois $\vec{k}_l^2=\omega_l^2/c^2$. Além disso, a soma em l é

$$\sum_{l}=\sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\sum_{l_2=-\infty}^{\infty}\sum_{l_3=-\infty}^{\infty} \tag{2.118}$$

A solução mais completa para os termos de onda plana do par de equação que define o potencial vetor pode ser escrita em termos da polarização, logo

$$\hat{e}_l \quad \longrightarrow \quad \hat{e}_{l\nu}, \tag{2.119}$$

tal que $\nu=1,2$, pois devido à onda ser plana tem-se dois graus de liberdade para a polarização. Sendo assim,

$$\hat{e}_{l\nu}\cdot\hat{e}_{l'\nu'}=\delta_{\nu\nu'} \quad \text{e} \quad \hat{e}_{l\nu}\cdot\hat{k}=0. \tag{2.120}$$

Portanto,

$$\vec{u}_{l\nu}(\vec{r})=L^{-3/2}e^{i\vec{k}_l\cdot\vec{r}}\hat{e}_{l\nu} \quad \text{e} \quad \vec{u}_{l\nu}^{*}(\vec{r})=L^{-3/2}e^{-i\vec{k}_l\cdot\vec{r}}\hat{e}_{l\nu}, \tag{2.121}$$

onde $L^{-3/2}$ é o tamanho do cubo, $|\vec{k}_l|=\omega_l/c$ é o vetor de onda, $\hat{e_{l\nu}}$ são vetores unitários nas direções de polarização ($\nu=1,2$), que devem ser perpendiculares ao vetor de onda devido à condição de transversalidade. A condição de ortogonalidade dos modos fica,

$$\int_{cav}\vec{u}_{l\nu}^{*}(\vec{r})\cdot\vec{u}_{l'\nu'}(\vec{r})d^3x=\delta_{l,l'}\delta_{\nu,\nu'}. \tag{2.122}$$

Além disso,

$$a_{l\nu}(t)=a_{l,\nu}(0)e^{-i\Omega_l t} \quad \text{e} \quad a_{l\nu}^{\dagger}(t)=a_{l,\nu}^{\dagger}(0)e^{i\Omega_l t}, \tag{2.123}$$

ou,

$$a_{l\nu}=\sqrt{\frac{1}{2\hbar\varepsilon\Omega_l}}\left[(\varepsilon\Omega_l+i\sigma/2)e^{\sigma t/2\varepsilon}q_{l\nu}+ie^{-\sigma t/2\varepsilon}p_{l\nu}\right]. \tag{2.124}$$

Finalmente a quantização completa acontece quando adotamos

$$[a_{l\nu}(t),a_{l'\nu'}(t)]=[a_{l\nu}^{\dagger}(t),a_{l'\nu'}^{\dagger}(t)]=0$$

$$[a_{l\nu}(t), a^{\dagger}_{l'\nu'}(t)] = \delta_{ll'}\delta_{\nu\nu'}, \tag{2.125}$$

conhecida como segunda quantização.

$$a_{l\nu}(t)|..., n_{l\nu}(t), ...\rangle = \sqrt{n_{l\nu}}|..., n_{l\nu} - 1(t), ...\rangle, \tag{2.126}$$

$$a^{\dagger}_{l\nu}(t)|..., n_{l}(t), ...\rangle = \sqrt{n_{l\nu} + 1}|..., n_{l\nu} + 1(t), ...\rangle, \tag{2.127}$$

onde $|..., n_{l\nu}(t), ...\rangle$ significa n fótons com números quânticos l (vetor de propagação, ou, direção de propagação) e polarização ν em um instante de tempo t qualquer. Essses são os estados de Fock, mas por simplicidade nos próximos capítulos abreviaremos a notação.

O potencial vetor fica da forma $\vec{A} \propto ua + u^{*}a^{\dagger}$, pois descarta-se os termos que se repetem devido $-\infty \leq l \leq \infty$. Portanto,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{e^{-\sigma t/2\varepsilon}}{L^{3/2}} \sum_{l} \sum_{\nu=1,2} \frac{\hat{e}_{l\nu}}{(\Omega_l)^{1/2}} \left[a_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\Omega_l t)} + a^{\dagger}_{l\nu}(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\Omega_l t)}\right]. \tag{2.128}$$

Na última expressão os operadores $a_l(t)$ e $a^{\dagger}_l(t)$ foram reescritos em termos das direções de polarização, então $[a_{l\nu}(t), a^{\dagger}_{l\nu}(t)] = 1$. Agora, como as funções os modos $\vec{u}_{l\nu}(\vec{r})$ e as amplitudes $q_{l\nu}(t)$ estão completamente determinadas, também estando o potencial vetorial determinado, logo, usando as Eq's (2.49), podemos escrever os campos elétrico e magnético, como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{e^{-\sigma t/\varepsilon}}{\varepsilon} \sum_{l,\nu} \vec{u}_{l\nu}(\vec{r})p_l(t) \tag{2.129}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{l,\nu} i\vec{k}_l \times \vec{u}_{l\nu}(\vec{r})q_l(t) \tag{2.130}$$

Que resulta em

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad = \quad & \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{e^{-\sigma t/2\varepsilon}}{L^{3/2}} \sum_{l} \sum_{\nu=1,2} \frac{\hat{e}_{l\nu}}{(\Omega)^{1/2}} \\ & \times \left[\left(\frac{\sigma}{2} + i\Omega_l\right) a_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\Omega_l t)} + \left(\frac{\sigma}{2} - i\Omega_l\right) a^{\dagger}_{l\nu}(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\Omega_l t)}\right], \end{aligned} \tag{2.131}$$

e

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = i\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{e^{-\sigma t/2\varepsilon}}{c_0 L^{3/2}} \sum_{l} \sum_{\nu=1,2} \frac{\omega_l(\hat{k}_l \times \hat{e}_{l\nu})}{(\Omega_l)^{1/2}} \left[a_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\Omega_l t)} - a^{\dagger}_{l\nu}(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\Omega_l t)}\right], \tag{2.132}$$

onde $\hat{k}_l$=$\vec{k}_l/k_l$. Devido aos campos elétrico e magnético terem se tornado operadores que criam e destroem fótons o valor esperado destes em qualquer estado $|..., n_{l\nu}(t), ...\rangle$ com número definido de partículas é nulo. De fato, isso era esperado de acordo com as medidas dos valores médios (2.105) e as flutuações, ou seja, devido ao campo mudar o número de fótons $n_{l\nu}$ o valor esperado do campo torna-se um produto interno de estados ortogonais.

Contudo, é possível manipular os estados como uma superposição de diferentes configurações de estados, este é o cerne da óptica quântica. Como foi discutido na capítulo anterior, é possível criar estados que são autoestados do operador de aniquilação, sendo estes conhecidos como estados coerentes. Com esse procedimento é possível encontrar os estados em que os campos mais se aproximam do comportamento clássico. Quando o campo está em um estado coerente o seu valor médio corresponde ao campo clássico [41]. Nesses estados a amplitude $q_{l\nu}$ corresponde ao valor esperado do respectivo operador (2.112) avaliado no chamado estado coerente resulando em (2.74), como é possível ver em [75].

Capítulo 3

Ondas eletromagnéticas em meios dependentes do tempo

Neste capítulo será apresentado o procedimento elegantemente utilizado para investigar o comportamento de ondas eletromagnéticas em meios homogêneos, lineares e isotrópicos com propriedades dependentes do tempo. A interação do campo eletromagnético com a matéria é um importante assunto de pesquisa, uma vez que eles estão acoplados devido a carga elétrica. Permitindo além do desenvolvimento de novas tecnologias, investigações da das propriedades da natureza e o desenvolvimento de modelos teóricos.

Meios dependentes do tempo significa dizer que as propriedades de permissividade, permeabilidade e condutividade são variáveis no tempo. Isso parece natural, uma vez que um material qualquer é constituido por núcleos e elétrons que estão em movimento à todo momento, este movimento pode ser devido a agitação térmica. Fazendo um adendo aqui, a dissipação de um sistema físico, em geral, é feita pela introdução de um reservatório térmico onde a energia do sistema flui para o reservatório, sendo este entendido como um contínuo de osciladores. Ou seja, o movimento dos constituintes do material é responsável pelas mudanças temporais dos parâmetros [36, 46, 47, 51].

Assumindo que a permissividade $\varepsilon(t)$, a permeabilidade $\mu(t)$ e a condutividade $\sigma(t)$ variam exponencialmente com o tempo e que a permissividade e a permeabilidade variam assincronamente, encontramos que a velocidade e a frequência são constantes, enquanto que a impedância do meio $\varepsilon(t)/\mu(t)$ não é mais constante. Considerando o calibre de Coulomb e condições periódicas de contorno, que permite usar a abordagem do potencial vetor, obtemos uma equação do oscilador amortecido para a amplitude dos modos que podem ser obtidas por uma hamiltoniana do tipo Caldirola-Kanai. Com o uso dos invariantes dinâmicos, proposto por Lewis e Riesenfeld, é feito o tratamento quântico do problema. Encontrando assim, as expressões para os campos. Por fim, usando os estados de Fock constroem-se os estados coerentes para o problema e calcula-se as flutuações quânticas.

3.1 Comportamento clássico dos campos

Considerando que o meio possui propriedades dependentes do tempo, o qual é homogêneo, linear e isotrópico, tem-se a seguinte relação para os campos

$$\vec{D} = \varepsilon(t)\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu(t)\vec{H} \quad \text{e} \quad \vec{J} = \sigma(t)\vec{E}, \tag{3.1}$$

onde $\varepsilon(t)$, $\sigma(t)$ e $\mu(t)$ são quantidades que representam as propriedades dependentes do tempo de meio homogêneo e linear. Mais especificamente, a permissividade elétrica $\varepsilon(t)$ e a permeabilidade magnética $\mu(t)$ são quantidades complexas, mas nesta abordagem serão consideradas como sendo reais, isto tem um propósito, o qual veremos mais a frente.

Assim como no capítulo anterior, para obter a solução para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é conveniente expressá-los em termos dos potencias. Também vamos considerar um meio na ausência de cargas elétricas, com isto, o potencial elétrico é nulo, ou seja, $\phi = 0$. Além disso, usando o calibre de Coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, automaticamente tem-se que $\vec{A}$ é transversal. Consequentemente, das equações de Maxwell é obtida uma equação de onda para $\vec{A}$ na forma de oscilações amortecidas, ou seja,

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu(t)}\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon(t)\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - \sigma(t)\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu(t)}\left(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}\right) = -\left(\dot{\varepsilon}(t)\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \varepsilon(t)\frac{\partial_2 \vec{A}}{\partial t^2}\right) - \sigma(t)\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \mu(t)(\dot{\varepsilon}(t) + \sigma(t))\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mu(t)\varepsilon(t)\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{3.2}$$

Essa equação permite utilizar o método de separação de variáveis. Novamente, vamos fazer uma decomposição de $\vec{A}(\vec{r},t)$ em termos dos modos $\vec{u}_l(\vec{r})$ e amplitudes $q_l(t)$, de modo que $\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_l \vec{u}_l(\vec{r})q_l(t)$, pois estamos considerando a condição periódica de contorno $\vec{A}(\vec{x}+\vec{a},t) = \vec{A}(\vec{x},t)$. Isto resulta em

$$\nabla^2\vec{u}_l(\vec{r}) + \frac{\omega_l^2}{c_0^2}\vec{u}_l(\vec{r}) = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{d^2q_l(t)}{dt^2} + \frac{\dot{\varepsilon}(t)+\sigma(t)}{\varepsilon(t)}\frac{dq_l(t)}{dt} + \omega_l^2(t)q_l(t) = 0, \tag{3.4}$$

onde ω_l é uma constante de separação que representa as frequências naturais dos modos l, $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ é a velocidade da luz em um meio independente do tempo e $\omega_l(t)$ é a frequência modificada dependente do tempo

$$\omega_l(t) = \frac{c(t)\omega_l}{c_0} \quad \text{com} \quad c(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(t)\mu(t)}}, \tag{3.5}$$

sendo $c(t)$ a velocidade da onda eletromagnética no meio dependente do tempo, $c(0) = c_0$ é a velocidade da luz no instante $t = 0$, analogamente, tem-se $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ e $\mu(0) = \mu_0$.

Consideramos que a hamiltoniana correspondente à equação da amplitude dada por (3.4), seja dada por

$$H_l(t) = \frac{p_l^2}{2\varepsilon(t)} e^{-\Sigma(t)} + \frac{1}{2} e^{\Sigma(t)} \varepsilon(t) {\omega_l}^2(t) q_l^2, \tag{3.6}$$

onde q_l e p_l são variáveis canonicamente conjugadas, com o momento dado por $p_l(t) = \varepsilon(t)e^{\Sigma(t)}\dot{q}_l$ e termo de massa dependente do tempo $Z(t) = \varepsilon(t)e^{\Sigma(t)}$, sendo $\Sigma(t)$ dado por

$$\Sigma(t) = \int_0^t \frac{\sigma(t')}{\varepsilon(t')} dt'. \tag{3.7}$$

Das equações de movimento de Hamilton, obtemos

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H_l}{\partial p_l} = \frac{1}{\varepsilon(t)} p_l e^{-\Sigma(t)} \tag{3.8}$$

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial H_l}{\partial t} = -\varepsilon(t) e^{\Sigma(t)} \omega_l^2(t) q_l, \tag{3.9}$$

que combinadas, resultam em

$$\ddot{q}_l = -\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon^2} p_l e^{-\Sigma(t)} + \frac{1}{\varepsilon}\dot{p}_l e^{-\Sigma(t)} + \frac{1}{\varepsilon} p_l e^{-\Sigma(t)} \left(-\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)$$

$$\ddot{q}_l = -\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\dot{q} - \omega_l^2(t) q_l - \frac{\sigma}{\varepsilon}\dot{q}_l$$

$$\ddot{q}_l + \frac{\dot{\varepsilon} + \sigma}{\varepsilon}\dot{q} + \omega_l^2(t) q_l = 0 \tag{3.10}$$

A hamiltoniana total do campo eletromagnético é $H = \sum_l H_l$ que corresponde a soma de todas a hamiltonianas associadas a cada modo de vibração. Das equações (3.7) e (3.6) notamos que a propagação da radiação no meio permanece descrita pela hamiltoniana dependente do tempo mesmo se as propriedades do meio forem constantes $\sigma \neq 0$, o qual retomamos o caso apresentado no capítulo anterior.

Agora vamos nos concentrar na equação (3.3), notamos que, mesmo para o caso com dependência temporal dos parâmetros os modos $\vec{u}_l$ não sofrem qualquer alteração, ou seja, a solução espacial do potencial vetor permanece a mesma do caso em que as propriedades ópticas são constantes no tempo (como foi discutido no capítulo 2). Considerando que o campo eletromagnético está contido em um certo volume cúbico V de lado L de um meio não refrativo, os modos satisfazem a condição de transversalidade $\nabla \cdot \vec{u}_l(\vec{r}) = 0$ e formam um conjunto completo ortonormal. Além disso, supondo a condição de periodicidade,

$\vec{u}_l(\vec{r})$ pode ser escrito em termos de ondas planas (2.121). Consequentemente, o potencial vetor fica

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \hat{e}_{l\nu} e^{\pm i\vec{k}_l\cdot\vec{r}} q_l(t), \tag{3.11}$$

com $q_l(t)$ sendo solução da equação (3.4). Logo, é possível encontrar o campo elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ e discutir suas propriedades clássicas, que ficam da seguinte forma

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{e^{-\Sigma(t)}}{\varepsilon_0 L^{3/2}} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \hat{e}_{l\nu} e^{\pm i\vec{k}_l\cdot\vec{r}} p_l(t), \tag{3.12}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{i}{c_0 L^{3/2}} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \omega_l(\hat{k}_l \times \hat{e}_{l\nu}) e^{\pm i\vec{k}_l\cdot\vec{r}} q_l(t). \tag{3.13}$$

No entanto, sem uma forma explícita para os parâmetros não é possível resolver a equação (3.4) e encontrar o comportamento explícito das amplitudes. Consideramos as propriedades do meio dependendo do tempo na forma

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{\eta t} \quad , \quad \mu(t) = \mu_0 e^{-\eta t} \quad , \quad \sigma(t) = \sigma_0 e^{\eta t}, \tag{3.14}$$

onde η é uma constante positiva e $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, $\mu(0) = \mu_0$, $\sigma(0) = \sigma_0$. Observamos que a impedância do meio não permanece constante, ou seja, $\varepsilon(t)/\mu(t) = (\varepsilon_0/\mu_0)e^{2\eta t}$. No entanto, para a frequência e a velocidade temos

$$\omega_l(t) = \omega_l \quad \text{e} \quad c(t) = c_0. \tag{3.15}$$

Assim, a dinâmica de cada modo do campo eletromagnético não muda, pois a frequência natural de cada modo e velocidade são constantes. Consequentemente, a propagação de uma onda em meio dependente do tempo da forma (3.14) pode ser vista como a propagação em um meio sem mudança temporal. Vale salientar que esse resultado é raramente discutido na literatura. Além disso, em Ref [51] mostrou que para a permissividade e permeabilidade variando em sincronia, a impedância do meio permanece constante, e a propagação da radiação em um meio dependente do tempo pode ser vista como a propagação no vácuo, onde a frequência e a velocidade são constantes. Contudo, verifica-se que modelos como o que consideramos tem sido aplicado a vários problemas, tais como: simulação de armadilhas de íons em universo de de Sitter [76, 77], cavidade de Fabry-Perot [78, 79], propagação da luz em espaço curvo [20, 80, 81], em nanoescala e circuitos mesoscópicos [67, 82]

Agora, substituindo as funções na equação que descreve o comportamento da amplitude, ficamos com

$$\ddot{q}_l + (\eta + \gamma)\dot{q}_l + \omega_l^2 q_l = 0, \tag{3.16}$$

onde $\eta = \dot{\varepsilon}/\varepsilon$ e $\gamma = \sigma_0/\varepsilon_0$. Essa equação representa a equação de um oscilador amortecido, com solução conhecida, dada por

$$q_l(t) = A_l e^{-(\eta+\gamma)t/2} \sin(W_l t + \delta_l), \tag{3.17}$$

sendo A_l e δ_l constantes de integração a serem determinadas pelas condições iniciais e W_l é dada por

$$W_l^2 = \omega_l^2 - \left(\frac{\eta+\gamma}{2}\right)^2 \quad \text{com} \quad W_l^2 > 0. \tag{3.18}$$

Assim, a dinâmica da amplitude de cada modo é regida pelo movimento de um oscilador harmônico amortecido. Nota-se que a dependência temporal da permissividade traz uma atenuação adicional $\eta = \dot{\varepsilon}/\varepsilon$ na amplitude $q_l(t)$ do campo eletromagnético. De modo que temos um meio dielétrico dependente do tempo não dispersivo ($\sigma = 0$) o qual se comporta como um meio condutor. Isto tem uma interessante implicação física, pois dois meios completamente diferentes, um meio dielétrico dependente do tempo e um meio condutor, são descritos pela mesma equação de movimento clássica. Esse fascinante efeito é raramente discutido na literatura. Agora, vamos considerar a hamiltotiana dada por (3.6), fazendo o uso de (3.14) resultam em

$$H_l(t) = e^{-(\eta+\gamma)t}\frac{p_l^2}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{2}e^{(\eta+\gamma)t}\varepsilon_0\omega_l^2 q_l^2, \tag{3.19}$$

que representa a hamiltoniana do tipo Caldirola-Kanai [83, 84, 85]. Essa hamiltoniana tem sido amplamente utilizada na literatura e aplicada a uma variedade de sistemas.

Agora que temos a solução clássica exata para a amplitude (3.17) devido a forma temporal explícita dos parâmetros (3.14), consequentemente temos a solução para o potencial vetor (3.11), uma vez que os modos da solução espacial já são conhecidos e não dependem do tempo. Logo, é possível encontrar os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$, bem como discutir suas propriedades clássicas, que ficam da seguinte forma

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{e^{-(\eta+\gamma)t}}{\varepsilon_0 L^{3/2}}\sum_l \sum_{\nu=1,2} \hat{e}_{l\nu} e^{\pm i\vec{k}_l\cdot\vec{r}} p_l(t), \tag{3.20}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{i}{c_0 L^{3/2}}\sum_l \sum_{\nu=1,2} \omega_l(\hat{k}_l \times \hat{e}_{l\nu}) e^{\pm i\vec{k}_l\cdot\vec{r}} q_l(t), \tag{3.21}$$

onde usamos $p_l(t) = \varepsilon_0 e^{(\eta+\gamma)t}\dot{q}_l$. Portanto, a solução clássica é completamente conhecida para o meio dependente do tempo variando a uma taxa constante. Observe que para $\eta = 0$ os resultados reproduzem o caso anterior de uma meio condutor com propriedades constantes e a impedância permanece constante para todo o tempo.

3.2 Quantização das ondas eletromagnéticas

Promovendo a amplitude q_l e o momento p_l a operadores que satisfazem a relação de comutação $[q_l, p_l] = i\hbar$ com $p_l = -i\hbar\partial/\partial q$, passamos para um tratamento quântico cuja dinâmica é regida pela equação de Schrödinger. Para resolver esta equação usando o método de Lewis and Riesenfeld [14], considere um invariante que satisfaz a equação de Liouville-Von Neumann, com o hamiltoniano (3.6), dado por

$$I_l(t) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{q_l}{\rho_l}\right)^2 + \left(\rho_l p_l - Z(t)\dot{\rho}_l q_l\right)^2\right], \tag{3.22}$$

onde a função real $\rho_l(t)$ satisfaz a equação de Milne-Pinney [68, 69], ou seja,

$$\ddot{\rho}_l(t) + \frac{\dot{\varepsilon}(t) + \sigma(t)}{\varepsilon(t)}\dot{\rho}_l(t) + \omega_l^2(t)\rho_l = \frac{1}{Z(t)\rho_l^3}. \tag{3.23}$$

A solução que buscamos é

$$|\psi_{n_l}, t\rangle = e^{i\beta_{n_l}(t)}|\phi_{n_l}, t\rangle, \tag{3.24}$$

onde $|\phi_{n_l}, t\rangle$ são os autovetores de $I(t)$ com autovalores independentes do tempo λ_n, e a condição de ortogonalidade é satisfeita, ou seja $\langle\phi_{n_l'}, t|\phi_{n_l}, t\rangle = \delta_{n_l' n_l}$. A fase $\beta_{n_l}(t)$ é encontrada pela equação

$$\hbar\frac{d\beta_{n_l}(t)}{dt} = \langle\phi_{n_l}, t|\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_l(t)\right)|\phi_{n_l}, t\rangle. \tag{3.25}$$

Vale lembrar que resolver a equação de Schrödinger através do método que empregamos é necessário resolver a equação de autovalor do invariante a fim de encontrar os autovetores. Para esse problema é conveniente usar os estados do espaço de Fock. Portanto, é mais simples usarmos a segunda quantização introduzindo os operadores de criação e aniquilação, $a(t)$ e $a^\dagger(t)$, definidos por

$$a_l(t) = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left[\frac{q_l}{\rho_l} + i(\rho_l p_l - Z(t)\dot{\rho}_l q_l)\right], \tag{3.26}$$

$$a_l^\dagger(t) = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left[\frac{q_l}{\rho_l} - i(\rho_l p_l - Z(t)\dot{\rho}_l q_l)\right], \tag{3.27}$$

que satisfazem a relação de comutação $[a_l(t), a_l^\dagger(t)] = 1$, tratando-se da quantização de bósons. Assim, o invariante (3.22) é reescrito da seguinte forma

$$I_l(t) = \hbar\left(a_l^\dagger(t)a_l(t) + \frac{1}{2}\right). \tag{3.28}$$

Das equações acima a equação de autovalor $I_l(t)$ é resolvível exatamente, como no caso do oscilador independente do tempo com estados do espaço de Fock $|n_l, t\rangle$. Definindo o operador número $N_l = a_l^\dagger a_l$ tal que $N_l|n_l, t\rangle = n_l|n_l, t\rangle$, obtem-se

$$I_l(t)|n_l, t\rangle = \hbar\left(n_l + \frac{1}{2}\right)|n_l, t\rangle \tag{3.29}$$

$$a_l(t)|n_l, t\rangle = n_l^{1/2}|n_l - 1, t\rangle, \tag{3.30}$$

$$a_l^\dagger|n_l, t\rangle = (n_l + 1)^{1/2}|n_l + 1, t\rangle. \tag{3.31}$$

Fazendo uma álgebra, considerando a mudança $|\phi_n, t\rangle \to |n, t\rangle$, na equação (3.25) produz

$$\beta_{n_l}(t) = -\left(n_l + \frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{1}{Z(t')\rho_l^2(t')}dt'. \tag{3.32}$$

Com os operadores $a_l(t)$ e $a_l^\dagger(t)$ dados por (3.26) e (3.27), a amplitude dos modos fica

$$q_l(t) = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2}\rho_l[a_l(t) + a_l^\dagger(t)], \tag{3.33}$$

$$p_l(t) = i\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{1}{\rho_l} - iZ(t)\dot{\rho}_l\right)a_l^\dagger(t) - \left(\frac{1}{\rho_l} + iZ(t)\dot{\rho}_l\right)a_l(t)\right]. \tag{3.34}$$

A evolução dos operadores é dada por

$$\frac{da_l(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[a_l(t), H_l] + \frac{\partial a_l(t)}{\partial t}, \tag{3.35}$$

que resulta em

$$\frac{da(t)_l}{dt} = -\frac{i}{Z(t)\rho_l^2(t)}a_l(t). \tag{3.36}$$

Logo,

$$a_l(t) = a_l(0)e^{-i2\beta_{0_l}(t)}, \tag{3.37}$$

e

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2}\frac{e^{-\Lambda(t)/2}}{L^{3/2}}\sum_l\sum_{\nu=1,2}\rho_l(t)\hat{e}_{l\nu}\left[a_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r} - \beta_{0_l}(t))} + a_{l\nu}^\dagger(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r} - 2\beta_{0_l}(t))}\right]. \tag{3.38}$$

Observe que ficamos com uma dependência em $\rho_l(t)$ que é a solução da equação (3.23).

Consideramos que a dependência temporal do material se comporte de acordo com (3.14), isto resulta em uma equação da forma

$$\ddot{\rho}_l(t) + (\eta + \gamma)\dot{\rho}_l(t) + \omega_l^2(0)\rho_l = \frac{e^{-2(\eta+\gamma)t}}{\varepsilon_0^2\rho_l^3}, \tag{3.39}$$

com $Z(t)$ dado por

$$Z(t) = \varepsilon_0 e^{(\eta+\gamma)t}. \tag{3.40}$$

Neste caso, a solução da equação (3.39) é

$$\rho_l(t) = \frac{e^{-(\eta+\gamma)t/2}}{(\varepsilon_0 W_l)^{1/2}}, \tag{3.41}$$

onde W_l dado por (3.18). Sendo assim, temos

$$\beta_{n_l}(t) = -\left(n_l + \frac{1}{2}\right) W_l t. \tag{3.42}$$

Sendo assim, a solução da equação de Schrödinger associada a este problema é

$$|\psi_{nl}, t\rangle = e^{-i(n_l+1/2)W_l t}|n_l, t\rangle, \tag{3.43}$$

A solução geral é $|\Psi, t\rangle = \sum_{n_l} c_{nl}|\psi_{nl}, t\rangle$, onde c_{nl} são constantes. Considerando as equações (3.40) e (3.41) a evolução do operador de aniquilação é

$$a_l(t) = a_l(0)e^{-iW_l t}. \tag{3.44}$$

Assim, o potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ fica com a seguinte forma

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2} \frac{e^{-(\eta+\gamma)t/2}}{L^{3/2}} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \frac{\hat{e}_{l\nu}}{(W_l)^{1/2}} \left[a_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_l t)} + a^\dagger_{l\nu}(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_l t)}\right], \tag{3.45}$$

onde os operadores $a_l(t)$ e $a^\dagger_l(t)$ foram reescritos em termos das direções de polarização, e obedecem a relação de comutação $[a_{l\nu}(t), a^\dagger_{l\nu}(t)] = 1$. Com esse resultado os campos elétricos e magnéticos são obtidos derivando essa expressão, que resulta em

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2} \frac{e^{-(\eta+\gamma)t/2}}{L^{3/2}} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \frac{\hat{e}_{l\nu}}{(W_l)^{1/2}} \\ &\times \left[\left(\frac{\eta+\gamma}{2} + iW_l\right) a_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_l t)} + \left(\frac{\eta+\gamma}{2} - iW_l\right) a^\dagger_{l\nu}(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_l t)}\right],\end{aligned} \tag{3.46}$$

e

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = i\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2} \frac{e^{-(\eta+\gamma)t/2}}{c_0 L^{3/2}} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \frac{\omega_l(\hat{k}_l \times \hat{e}_{l\nu})}{(W_l)^{1/2}} \left[a_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_l t)} - a^\dagger_{l\nu}(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_l t)}\right], \tag{3.47}$$

onde $\hat{k}_l = \vec{k}_l/k_l$. Esses resultados descrevem a propagação da onda eletromagnética no regime quântico em um meio material linear dependente do tempo. Nota-se que os campos elétrico e magnético caem exponencialmente com tempo, isto é $\exp[-(\eta+\gamma t)/2]$. Além disso, para $\eta = 0$ os resultados coincidem com os que são encorntrados em Refs. [48, 75]. Para $(\eta+\gamma) = 0$, o potencial vetor, bem como os campos elétrico e magnético, reproduzem os resultados para uma cavidade vazia, ou dielétrica constante; como é esperado.

Calculando os valores esperados da amplitude q_l, momento p_l e as flutuações quânticas no espaço de Fock a partir das equações (3.33) e (3.34), obtemos

$$\langle q_l \rangle = \langle p_l \rangle = 0, \tag{3.48}$$

$$\langle q_l^2 \rangle = \hbar \rho_l^2 \left(n_l + \frac{1}{2} \right), \tag{3.49}$$

$$\langle p_l^2 \rangle = \hbar \left[\frac{1}{\rho_l^2} + (Z\dot{\rho}_l)^2 \right] \left(n_l + \frac{1}{2} \right), \tag{3.50}$$

e

$$(\Delta q_l)^2 = \langle q_l^2 \rangle - \langle q_l \rangle^2 = \hbar \rho_l^2 \left(n_l + \frac{1}{2} \right), \tag{3.51}$$

$$(\Delta p_l)^2 = \langle p_l^2 \rangle - \langle p_l \rangle^2 = \hbar \left[\frac{1}{\rho_l^2} + (Z\dot{\rho}_l)^2 \right] \left(n_l + \frac{1}{2} \right). \tag{3.52}$$

O produto das incertezas, produz

$$(\Delta q_l)(\Delta p_l) = \hbar \left[1 + (Z\rho_l \dot{\rho}_l)^2 \right]^{1/2} \left(n_l + \frac{1}{2} \right), \tag{3.53}$$

que usando (3.41) e (3.40), torna-se

$$(\Delta q_l)(\Delta p_l) = \frac{\hbar \omega_l}{W_l} \left(n_l + \frac{1}{2} \right). \tag{3.54}$$

Conclui-se que a relação de incerteza é sempre maior do que $\hbar/2$. Além disso, ela não depende do tempo.

3.3 Estados coerentes

Seguindo o procedimento usual para construir os estados coerentes a partir do operador de aniquilação [29], temos

$$|\alpha_l, t\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha_l|^2}{2} \right) \sum_{n_l} \frac{(\alpha_l)^{n_l}}{(n_l!)^{1/2}} \exp\left[i\beta_{n_l}(t) \right] |n_l, t\rangle \tag{3.55}$$

onde α_l é um número complexo arbitrário. Como é bem conhecido, os estados $|\alpha, t\rangle$ são autoestados do operador de aniquilação $a_l(t)$, de tal forma que

$$a_l |\alpha_l, t\rangle = \alpha_l(t) |\alpha_l, t\rangle, \tag{3.56}$$

com $\alpha_l(t)$ dado por

$$\alpha_l(t) = \alpha_l e^{-iW_l t}, \tag{3.57}$$

onde usamos (3.42) para $n_l = 0$. Calculando o valor esperado de q_l no estado $|\alpha_l, t\rangle$ produz

$$\langle q_l \rangle = \left(\frac{2\hbar |\alpha_l|^2}{\varepsilon_0 W_l} \right)^{1/2} e^{-(\eta+\gamma)t/2} \sin(W_l + \xi_l), \tag{3.58}$$

onde ξ_l é o argumento do número complexo α_l. Comparando esse resultado com o da equação (3.17) notamos que o centro do pacote de onda do estado coerente segue o movimento clássico de um partícula. Assim, os resultados corroboram com as ideais de Schrödinger sobre os estados coerentes [86].

Avaliando as flutuações quânticas de q_l e p_l no estado $|\alpha_l, t\rangle$, obtemos

$$\langle \Delta q_l \rangle^2 = \langle q_l^2 \rangle - \langle q_l \rangle^2 = \frac{\hbar}{2} \rho_l^2, \tag{3.59}$$

$$\langle \Delta p_l \rangle^2 = \langle p_l^2 \rangle - \langle p_l \rangle^2 = \frac{\hbar}{2} \left[\frac{1}{\rho_l^2} + (Z\dot{\rho}_l)^2 \right]. \tag{3.60}$$

Com isto, obtemos a relação de incerteza na forma

$$(\Delta q_l)(\Delta p_l) = \frac{\hbar \omega_l}{2W_l}, \tag{3.61}$$

onde usamos (3.40) e a solução particular (3.41). Comparando as equações (3.54) e (3.61) vemos que o princípio de incerteza em estados coerentes é o mesmo para estados de número. Neste ponto é útil notar que o princípio de incerteza não depende do tempo explicitamente, mas sim, torna-se grande com o aumento da dissipação $(\eta+\gamma)$. É possível observar também que a relação de incerteza não atinge o valor mínimo. Isto acontece porque os estados $|\alpha_l, t\rangle$ não são os "verdadeiros"estados de mínima incerteza. Esses são os estados comprimidos [87]. Vale salientar que para $(\eta + \gamma) = 0$ os estados $|\alpha_l, t\rangle$ tornam-se os estados de mínima incerteza desde que a hamiltoniana (3.6) e os operadores de aniquilação $a_l(t)$ e criação $a_l^\dagger(t)$ reproduzam os operadores ordinários do oscilador harmônico independente do tempo. Por fim, observamos que para $\eta = 0$ os resultados reproduzem aqueles obtidos na Ref. [75].

Capítulo 4

Evolução adiabática e não adiabática da onda eletromagnética

Baseando-se no estudo do invariante dinâmico dependente do tempo, apresentamos um abordagem simples e elegante no tratamento clássico e quântico da evolução adiabática e não adiabática da propagação da radiação em um meio material linear e homogêneo com permissividade, permeabilidade e condutividade variando no tempo exponecialmente com taxa constante. Do capítulo anterior nota-se que usando a condição de quantização para o campo eletromagnético, calibre de Coulomb e condição periódica de contorno, do potencial vetor resulta em um sistema hamiltoniano dependente do tempo para as amplitudes dos modos na cavidade. Por outro lado, a evolução temporal pode ser muito rápida, ou muito lenta [10]. Em nosso artigo [88], investigamos as evoluções adiabática e não adiabática governadas por um hamiltoniano dependente do tempo.

Veremos a seguir através do método de Lewis, que para o sistema da radiação na cavidade evoluindo adiabaticamente adquire-se um termo extra na fase, essa fase é a que Berry chamou de fase geométrica [61]. A fase de Berry é um fenômeno quântico, em contra partida, a versão clássica recebe o nome de ângulo de Hannay [89]. A conexão entre esse dois resultados tem sido investigada por vários autores [67, 62, 90, 91, 92]. Além de ser um interessante tema de investigações teóricas, são observações experimentais.

4.1 Abordagem clássica da onda eletromagnética

4.1.1 Evolução não adiabática

Considere as equações de Maxwell na matéria sem distribuição de carga para um meio homogêneo, linear, isotrópico dependente do tempo, onde os campos com resposta linear são dados por (3.1). Diferentemente do caso anterior, considere a abordagem feita em [92, 93], na qual o potencial vetor é

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\sum_{l}\vec{u}_l(\vec{r})Q_l(t), \tag{4.1}$$

com a seguinte mudança

$$Q_l(t)=e^{-\int_0^t\Lambda(t')dt'}q_l(t) \quad , \quad \Lambda(t)=\frac{\sigma(t)}{2\varepsilon(t)}, \tag{4.2}$$

onde $q_l(t)$ é continua sendo a amplitude associada a cada modo dentro da cavidade. É possível observar que as transformações (4.2) são canônicas, conforme foi demonstrado em [64, 94], de modo que geram um link entre o oscilador amortecido e o oscilador generalizado. Substituindo (4.1) na equação de onda amortecida do potencial, encontramos

$$\nabla^2\vec{u}_l(\vec{r})+\frac{\omega_{0l}^2}{c_0^2}\vec{u}_l(\vec{r})=0, \tag{4.3}$$

$$\frac{d^2q_l}{dt^2}+\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{dq_l}{dt}+\Omega_l^2(t)q_l=0, \tag{4.4}$$

onde ω_{0l} é a constante de separação que representa a frequência natural dos modos l, $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ é a velocidade da luz independente do meio e $\Omega_l(t)$ é frequência dependente do tempo definida como

$$\Omega_l(t)=\sqrt{\omega_l^2(t)-\Lambda^2(t)-\frac{\dot{\sigma}(t)}{2\varepsilon(t)}}, \tag{4.5}$$

com

$$\omega_l(t)=\frac{c(t)\omega_{0l}}{c_0}, \tag{4.6}$$

A evolução temporal da amplitude $q_l(t)$, dada pela equação (4.4), pode ser obtida pela hamiltoniana clássica do oscilador generalizado dependente do tempo, a saber

$$H_l(t)=\frac{p_l^2}{2\varepsilon(t)}+\frac{1}{2}\varepsilon(t)\omega_l^2(t)q_l^2+\frac{1}{2}\Lambda(t)(q_lp_l+p_lq_l), \tag{4.7}$$

onde q_l e p_l são as variáveis canonicamente conjugadas. A hamiltoniana total é a soma da hamiltoniana de cada modo, ou seja, $H=\sum_l H_l$.

Consideramos novamente o caso especial em que as propriedades do meio variam exponencialmente na forma dada por (3.14). Ou seja, que $\varepsilon(t)$ e $\mu(t)$ variam assincronamente e a impedância do meio $\varepsilon(t)/\mu(t)=(\varepsilon_0/\mu_0)e^{2\eta t}$ não é constante, vale ressaltar que este caso de assincronia entre a permissividade e a permeabilidade, com impedância dependendo do tempo, já foi registrada para um tratamento analítico [51]. A substituição da relação (**??**) nas expressões (4.2) e (4.6) produz

$$Q_l(t)=e^{-\Lambda_0 t}q_l(t) \quad , \quad \Lambda_0=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \quad , \quad \omega_l(t)=\omega_{0l} \quad , \quad c(t)=c_0, \tag{4.8}$$

e

$$\Omega_l(t) = \sqrt{\omega_{0l}^2 - \Lambda_0^2 - \eta\Lambda_0} = \Omega_{0l}. \tag{4.9}$$

De (4.9) vemos que a frequência dos modos de amplitude e a velocidade da luz tornam-se constantes em um meio linear dependente do tempo. Portanto, a luz pode ser vista como uma propagação em um meio com parâmetros independentes do tempo [48, 49].

Das relações (3.14), as equações da dinâmica do problema (4.4) e (4.7) resultam em,

$$\ddot{q}_l + \eta\dot{q}_l + \Omega_{0l}^2 q_l = 0, \tag{4.10}$$

que é a equação de um oscilador amortecido, e

$$H_l(t) = e^{-\eta t}\frac{p_l^2}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{2}e^{\eta t}\varepsilon_0\omega_{0l}^2 q_l^2 + \frac{1}{2}\Lambda_0(q_l p_l + p_l q_l). \tag{4.11}$$

A hamiltoniana dependente do tempo (4.11) é conhecida como hamiltoniana generalizada de Caldirola-Kanai [83, 85]. A solução da equação (4.10) é

$$q_l(t) = A_l e^{-\eta t/2}\cos(W_l t - \delta_l), \tag{4.12}$$

com A_l e δ_l sendo constantes arbitrárias de integração e

$$W_l = \sqrt{\Omega_{0l}^2 - \left(\frac{\eta}{2}\right)^2} \quad , \quad W_l^2 > 0. \tag{4.13}$$

É possível observar nas Eq's. (4.10) e (4.12), que a atenuação é causada pela permissividade dependente do tempo $\eta = \dot{\varepsilon}/\varepsilon$. Assim, a permissividade dependente do tempo faz com que surja um efeito de amortecimento similar ao da condutividade. Este efeito tem sido discutido em Ref.[36]. A dissipação devida a condutividade em um meio material não contribui para a atenuação dos modos q_l. Este resultado é interessante, pois, em geral, o efeito de amortecimento é causado pela condutividade na equação (4.10). Contudo, veremos mais adiante que a condutividade contribui para a atenuação da amplitude dos campos elétrico e magnético, como esperado. Vale salientar que, para $\eta = 0$ a hamiltoniana (4.11) transforma-se naquela associada ao oscilador harmonico generalizado independente do tempo, e a equação (4.10) é convertida na equação do oscilador com a permissividade desempenhando o papel da massa.

Uma vez que os modos $\vec{u}_l$ são conhecidos, dados pela expressão (2.121), e as amplitudes são conhecidas o potencial vetor $\vec{A}(\vec{r},t)$ pode ser escrito na forma

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{e^{-\Lambda_0 t}}{\sqrt{V}}\sum_l \sum_{\nu=1,2} \vec{e}_{l\nu} e^{\pm i\vec{k}_l\cdot\vec{r}} q_l(t). \tag{4.14}$$

Usando (4.14) bem como as condições (4.8) e as expressões para os campos elétrico e magnético em termos do potencial, encontramos

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{e^{-(\eta+\Lambda_0)t}}{\varepsilon_0\sqrt{V}}\sum_l\sum_{\nu=1,2}\vec{e}_{l\nu}e^{\pm i\vec{k}_l\cdot\vec{r}}p_l(t), \tag{4.15}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{ie^{-\Lambda_0 t}}{\sqrt{V}}\sum_l\sum_{\nu=1,2}(\vec{k}_l\times\vec{e}_{l\nu})e^{\pm i\vec{k}_l\cdot\vec{r}}q_l(t). \tag{4.16}$$

Esse resultado representa a evolução não adiabática para os campos elétrico e magnético se propagando classicamente em um meio dependente do tempo com propriedades variando exponencialmente em uma taxa constante. Além disso, de (4.12), (4.15) e (4.16) mesmo quando a condutividade é nula, ou seja $\sigma(t) = 0$, a amplitude dos campos são amortecidas por causa da atenuação produzida pela permissividade dependente do tempo $\varepsilon(t)$. Vale mencionar que para η=0 e $\sigma_0 = 0$, os resultados obtidos tomam formas idênticas àqueles de ondas eletromagnéticas propagando-se em uma cavidade vazia.

4.1.2 Invariante clássico

Invariantes dinâmicos dependentes do tempo também são temas de estudo no regime clássico. A conexão entre eles e a hamiltoniana permite estudar a evolução temporal de um sistema hamiltoniano e por isso muito utilizado no estudo de sistemas clássicos e quântico [14, 23, 95]. Para sistemas do tipo (4.11) o invariante dinâmico não trivial $I_l(t)$ deve satisfazer a equação de Liouville

$$\frac{dI_l}{dt} = \{I_l, H_l\}_{PB} + \frac{\partial I_l}{\partial t} = 0, \tag{4.17}$$

onde $\{,\}_{PB}$ entende-se por parênteses de Poisson. Tal invariante dinâmico tem a forma [67, 92]

$$I_l(t) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{q_l}{\rho_l}\right)^2 + \left[\rho_l p_l + \varepsilon(t)(\Lambda_0\rho_l - \dot{\rho}_l)q_l\right]^2\right\}, \tag{4.18}$$

com q_l e p_l satisfazendo os parênteses de Poisson $\{q_l, p_l\}_{PB} = 1$ e $\rho_l(t)$ é um função auxiliar real, que é a solução da equação de Milne-Pinney [96]

$$\ddot{\rho}_l(t) + \eta\dot{\rho}_l(t) + \Omega_{0l}^2\rho_l(t) = \frac{e^{-2\eta t}}{\varepsilon_0^2\rho_l^3(t)}. \tag{4.19}$$

Aqui considere que se $\rho(t)$ é solução de (4.19), a solução da equação (4.10) pode ser escrita como [23]

$$q_l(t) = \rho_l\cos[T(t) - \zeta_l], \tag{4.20}$$

com $T(t)$ dado por

$$T(t) = \int_0^t \frac{dt'}{\varepsilon(t')\rho_l^2(t')}. \tag{4.21}$$

Agora, a solução da equação (4.19) é [97]

$$\rho_l(t) = \frac{e^{-\eta t/2}}{(\varepsilon_0 W_l)^{1/2}}. \tag{4.22}$$

Consequentemente, usando (5.27) e (4.22) a equação (4.20) toma a forma

$$q_l(t) = B_l e^{-\eta t/2} \cos(W_l t - \zeta_l), \tag{4.23}$$

onde $B_l = (\varepsilon_0 W_l)^{1/2}$ e ζ_l são constantes. Note que a solução (4.12) e (4.23) são idênticas, como esperado.

Intuitivamente para ponderações futuras, considere duas novas variáveis dinâmicas complexas (a_l, a_l^*) a serem usadas ao invés das canônicas (q_l, p_l) [41, 61]. Aqui a_l e a_l^* são o complexo conjugado uma da outra e satisfazem o parêntese de Poisson $\{a_l, a_l^*\}_{PB} = -i$. O fator $-i$ é uma consequência da natureza complexa de a_l e a_l^* [61]. As novas variáveis são dadas por

$$a_l(t) = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left\{\frac{q_l}{\rho_l} + i\left[\rho_l p_l + \varepsilon(t)(\Lambda_0 \rho_l - \dot{\rho}_l) q_l\right]\right\}, \tag{4.24}$$

$$a_l^*(t) = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left\{\frac{q_l}{\rho_l} - i\left[\rho_l p_l + \varepsilon(t)(\Lambda_0 \rho_l - \dot{\rho}_l) q_l\right]\right\}, \tag{4.25}$$

sendo a constante $\hbar$ incluída na nossa abordagem a fim de relacionar as expressões clássicas e quânticas. Logo, a variável clássica a é adimensional. Em contrapartida, é possível inverter (4.24) e (4.25) para obter q_l e p_l em termos de a_l e a_l^*, ou seja,

$$q_l(t) = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \rho_l[a_l(t) + a_l^*(t)], \tag{4.26}$$

$$p_l(t) = i\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{1}{\rho_l} + i\varepsilon(t)(\Lambda_0\rho_l - \dot{\rho}_l)\right) a_l^*(t) - \left(\frac{1}{\rho_l} - i\varepsilon(t)(\Lambda_0\rho - \dot{\rho}_l)\right) a_l(t)\right]. \tag{4.27}$$

Então, a expressão do invariante (4.18), usando a_l e a_l^*, além das relações (4.26) e (4.27), tem a seguinte forma

$$I_l(t) = \hbar a_l^*(t) a_l(t), \tag{4.28}$$

o qual tem uma aparência intuitiva e mais simples.

Para verificar a evolução temporal da nova variável, considere agora que a derivada temporal de $a(t)$ é

$$\frac{da_l(t)}{dt} = \{a_l(t), H_l(t)\}_{PB} + \frac{\partial a_l(t)}{\partial t}. \tag{4.29}$$

Fazendo um cálculo direto das equações de Hamilton e da equação (4.7) encontramos

$$\frac{da_l(t)}{dt} = -\frac{i}{\varepsilon(t)\rho_l^2(t)} a_l(t), \tag{4.30}$$

cuja solução é

$$a_l(t) = a_l(0)e^{-iW_lt}, \tag{4.31}$$

onde utilizamos a solução particular (4.22). Assim, com a ajuda da equação (4.22) e (4.31) é possível reescrever a expressão (4.26) como

$$q_l(t) = C_l e^{-\eta t/2}\left(a_l(0)e^{-iW_lt} + a_l^*(0)e^{iW_lt}\right), \tag{4.32}$$

onde $C_l = (\hbar/2\varepsilon_0 W_l)^{1/2}$. A expressão (4.32) representa outra forma de escrever a solução da equação amortecida (4.10). Assim, o potencial vetor pode ser reescrito em termos de $a_l(t)$ e $a_l^*(t)$, ou seja,

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} e^{-(\eta+2\Lambda_0)t/2}\sum_l\sum_{\nu=1,2}\frac{\vec{e}_{l\nu}}{\sqrt{W_l}}\left[a_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_lt)} + a_{l\nu}^*(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_lt)}\right]. \tag{4.33}$$

Os campos elétrico e magnético são, respectivamente, dados por

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) \;&=\; \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} e^{-(\eta+2\Lambda_0)t/2}\sum_l\sum_{\nu=1,2}\frac{\vec{e}_{l\nu}}{\sqrt{W_l}} \qquad (4.34)\\ &\times\left[\left(\frac{\eta+2\Lambda_0}{2}+iW_l\right)a_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_lt)} + \left(\frac{\eta+2\Lambda_0}{2}-iW_l\right)a_{l\nu}^*(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_lt)}\right],\end{aligned}$$

e

$$\vec{B}(\vec{r},t) = i\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} e^{-(\eta+2\Lambda_0)t/2}\sum_l\sum_{\nu=1,2}\frac{(\vec{k}_l\times\vec{e}_{l\nu})}{\sqrt{W_l}}\left[a_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_lt)} - a_{l\nu}^*(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_lt)}\right]. \tag{4.35}$$

Mais adiante será visto que esta é uma forma mais conveniente de escrever os campos elétrico e magnético propagando-se em um meio linear dependente do tempo.

4.1.3 Evolução adiabática

Até o momento a solução obtida para o problema foi exata. A partir de agora será discutido o limite assintótico adiabático da equação auxiliar (4.19). Para tanto, considera-se o limite em que $\dot{\rho}_l$ é muito pequeno, assim, os termos de $\dot{\rho}_l$ na equação auxiliar podem ser desprezados, logo,

$$\frac{1}{\varepsilon(t)\rho_l^2(t)} = \varpi_l\left(1-\frac{\dot{\sigma}_l}{2\varepsilon(t)\varpi_l^2}\right)^{1/2} \quad , \quad \varpi_l = \sqrt{\omega_{0l}^2-\Lambda_0^2} > 0. \tag{4.36}$$

Isso também permite a expansão em que

$$\frac{\dot{\sigma}_l}{2\varepsilon(t)\varpi_l^2} \ll 1, \tag{4.37}$$

logo,

$$\frac{1}{\varepsilon(t)\rho_l^2(t)} = \varpi_l - \frac{\dot{\sigma}_l}{4\varepsilon(t)\varpi_l},$$
$$\frac{1}{\varepsilon(t)\rho_l^2(t)} = \varpi_l - \frac{\eta\sigma_0}{4\varepsilon_0\varpi_l}, \tag{4.38}$$

onde foi feito o uso da relação (3.14). Inserindo esse resultado na equação (4.30), produz

$$a_l(t) = a_l(0)\exp\left\{-i\int_0^t \left(\varpi_l - \frac{\eta\sigma_0}{4\varepsilon_0\varpi_l}\right)dt'\right\}. \tag{4.39}$$

Nesta expressão o termo $\chi_l^D = \int_0^t \varpi_l dt'$ representa a fase dinâmica e

$$\theta_l^H = -\int_0^t \frac{\eta\sigma_0}{4\varepsilon_0\varpi_l}dt', \tag{4.40}$$

entende-se por fase geométrica que surge em uma evolução temporal adiabática a qual corresponde a variável angular de Hannay.

Partindo da equação (4.38) obtem-se

$$\rho_l(t) = \frac{e^{-\eta t/2}}{\sqrt{\varepsilon_0\varpi_l}\left(1 - \frac{\eta\sigma_0}{4\varepsilon_0\varpi_l^2}\right)^{1/2}}. \tag{4.41}$$

Assim, desprezando o termo $(\gamma\sigma_0/4\varepsilon_0\varpi_l^2)$ em (4.41) e com a ajuda de (4.32), (4.39) e (4.41), resulta que a evolução adiabática do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r},t)$ é representada por

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} e^{-(\eta+2\Lambda_0)t/2}\sum_l\sum_{\nu=1,2}\frac{\vec{e}_{l\nu}}{\sqrt{\varpi_l}}\left[a_{l\nu}(0)e^{i[\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\varphi_l(t)]} + a_{l\nu}^*(0)e^{-i[\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\varphi_l(t)]}\right], \tag{4.42}$$

com

$$\varphi_l(t) = \chi_l^D + \theta_l^H. \tag{4.43}$$

Com esse resultado é possível encontrar os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ clássicos, isto é

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r},t) &= \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} e^{-(\eta+2\Lambda_0)t/2}\sum_l\sum_{\nu=1,2}\frac{\vec{e}_{l\nu}}{\sqrt{\varpi_l}} \\
&\times \left\{\left[\frac{\eta+2\Lambda_0}{2} + i\left(\varpi - \frac{\eta\sigma_0}{4\varepsilon_0\varpi_l}\right)\right]a_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\varphi_l(t))}\right. \\
&+ \left.\left[\frac{\eta+2\Lambda_0}{2} - i\left(\varpi - \frac{\eta\sigma_0}{4\varepsilon_0\varpi_l}\right)\right]a_{l\nu}^*(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\varphi_l(t))}\right\},
\end{aligned} \tag{4.44}$$

e

$$\vec{B}(\vec{r},t) = i\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} e^{-(\eta+2\Lambda_0)t/2} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \frac{(\vec{k}_l \times \vec{e}_{l\nu})}{\sqrt{\varpi_l}} \Big[a_{l\nu}(0) e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\varphi_l(t))} - a^*_{l\nu}(0) e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\varphi_l(t))}\Big] \quad . \tag{4.45}$$

Comparando estas relações para os campos elétrico e magnético com aqueles obtidos para o caso não adiabático (Eqs. (4.35) e (4.35)) notamos que, contrariamente, a propagação de ondas eletromagnéticas dependem aparentemente da fase geométrica θ_l^H, que surge a partir da evolução adiabática do sistema e depende do caminho seguido pelos parâmetros ε, μ e σ. Vale ressaltar aqui que o padrão de interferência em sistemas ópticos está relacianado com a diferença de fase entre os dois caminhos [93, 92]. Assim, o padrão de interferência muda com a existência da fase geométrica. Podemos observar que a amplitude de ambos os campos diminuem com o tempo devido a atenuação produzida pela condutividade e permissividade dependente do tempo. A partir da relação (4.40) vimos que para materiais dielétricos $\sigma_0 = 0$ a fase geométrica desaparece, então, o caráter de meio material afeta o caráter geométrico dos campos elétrico e magnéticos [93, 92].

4.2 Abordagem quântica das ondas eletromagnéticas

Nesta seção abordaremos nossa análise sobre a evolução temporal no regime quântico, adiabático e não adiabático, de ondas eletromagnéticas em meios materiais lineares com parâmetros dependentes do tempo. Primeiramente iremos discutir a abordagem da qual utilizamos para encontrar a solução da equação de Schrödinger dependente do tempo, solução esta que utilizaremos na construção dos estados coerentes para a quantização da luz.

4.2.1 Solução da equação de Schrödinger

Para um sistema descrito pela hamiltoniana (4.11) e que admite a existência de um operador hermitiano periódico dependente do tempo $\hat{I}_l(t)$ que satisfaz a versão quântica da equação Liouville,

$$\frac{d\hat{I}_l}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{I}_l, \hat{H}_l] + \frac{\partial \hat{I}_l}{\partial t} = 0. \tag{4.46}$$

Que admite equação de autovalor para $\hat{I}_l(t)|\phi_{n_l}, t)\rangle = \lambda_{n_l}|\phi_{n_l}, t\rangle$, onde $|\phi_{n_l}, t\rangle$ forma uma base completa ortonormal, $\langle\phi_{n_l'}, t|\phi_{n_l}, t\rangle = \delta_{n_l' n_l}$, e λ_n são os autovalores independente do tempo. A amplitude $\hat{q}_l$ e o momento $\hat{p}_l$ são agora operadores conjugados que satiszem a relação de comutação $[\hat{q}_l, \hat{p}_l] = i\hbar$ com $\hat{p}_l = -i\hbar\partial/\partial q_l$. Da teoria do invariante dinâmico desenvolvido por Lewis and Riesenfeld [15], as soluções da equação de Schrödinger dependente do o tempo são da seguinte forma $|\psi_{n_l}, t\rangle = e^{i\beta_{n_l}(t)}|\phi_{n_l}, t\rangle$, com a função de fase

$\beta_{n_l}(t)$ dada por

$$\hbar\frac{d\beta_{n_l}(t)}{dt} = \langle\phi_{n_l}, t|\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_l(t)\right)|\phi_{n_l}, t\rangle. \tag{4.47}$$

Aqui, observe que fazendo uma comparação nas Eqs. (4.17) e (4.46) é possível mudar da mecânica clássica para a mecânica quântica substituindo o colchete de Poisson pelo comutador, ou seja, $\{I_l, H_l\}_{PB} \to (1/i\hbar)[\hat{I}_l, \hat{H}_l]$. Como consequência, isso é bem conhecido, a álgebra de colchetes de Poisson e comutadores são iguais [42, 41]. Então, seguindo o mesmo procedimento da seção anterior, verifica-se o operador invariante dinâmico

$$\hat{I}_l(t) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\hat{q}_l}{\rho_l}\right)^2 + [\rho_l\hat{p}_l + \varepsilon(t)(\Lambda_0\rho_l - \dot{\rho}_l)\hat{q}_l]^2\right\}, \tag{4.48}$$

que satisfaz a equação (4.46) com $\rho_l(t)$ sendo solução da equação (4.19). Além disso, reescrevendo as equações (4.24) e (4.25) como

$$\hat{a}_l(t) = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left\{\frac{\hat{q}_l}{\rho_l} + i\left[\rho_l\hat{p}_l + \varepsilon(t)(\Lambda_0\rho_l - \dot{\rho}_l)\hat{q}_l\right]\right\}, \tag{4.49}$$

$$\hat{a}_l{}^\dagger(t) = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left\{\frac{\hat{q}_l}{\rho_l} - i\left[\rho_l\hat{p}_l + \varepsilon(t)(\Lambda_0\rho_l - \dot{\rho}_l)\hat{q}_l\right]\right\}, \tag{4.50}$$

onde $\hat{a}_l(t)$ e $\hat{a}_l{}^\dagger(t)$ são agora operadores do tipo aniquilição e criação, respectivamente, satisfazendo a relação de comutação

$$[\hat{a}_l(t), \hat{a}_l{}^\dagger(t)] = 1. \tag{4.51}$$

Aqui, o chapéu serve para enfatizar as quantidades que possuem função de operador, a fim de evitar confusão com as variáveis da abordagem clássica. Da mesma maneira, escrevendo as equações (4.26) e (4.27) em termos dos operadores de criação e aniquilição, resulta em

$$\hat{q}_l(t) = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2}\rho_l[\hat{a}_l(t) + \hat{a}_l{}^\dagger(t)], \tag{4.52}$$

$$\hat{p}_l(t) = i\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{1}{\rho_l} + i\varepsilon(t)(\Lambda_0\rho_l - \dot{\rho}_l)\right)\hat{a}_l{}^\dagger(t) - \left(\frac{1}{\rho_l} - i\varepsilon(t)(\Lambda_0\rho - \dot{\rho}_l)\right)\hat{a}_l(t)\right]. \tag{4.53}$$

Com o auxílio de (4.52) e (4.53) que são dados em termos de $\hat{a}_l(t)$ e $\hat{a}_l{}^\dagger(t)$, o invariante $\hat{I}(t)$ fica da seguinte forma

$$\hat{I}_l(t) = \hbar\left[\hat{a}_l{}^\dagger(t)\hat{a}_l(t) + \frac{1}{2}\right]. \tag{4.54}$$

Observe que esta expressão difere da relação (4.28) por um fator $1/2$. Isso ocorre porque, ao contrário das variáveis clássicas a_l, a_l^* e q, p, os operadores $\hat{a}_l(t)$ e $\hat{a}_l{}^\dagger(t)$, bem como $\hat{q}$

e $\hat{p}$, não comutam.

A partir das fórmulas (4.51), a solução pode ser obtida de maneira semelhante a do caso do oscilador mecânico independente do tempo. Então, para resolver essa equação de autovalor do invariante, usamos os estados de Fock. Para isso, basta definir o operador numérico hermitiano $N_l = \hat{a}_l{}^\dagger \hat{a}_l$ de modo que $N_l|n_l, t\rangle = n_l|n_l, t\rangle$. Assim, escrevendo $|\phi_{n_l}, t\rangle = |n_l, t\rangle$, tem-se

$$\hat{I}_l(t)|n_l, t\rangle = \hbar\left(n_l + \frac{1}{2}\right)|n_l, t\rangle, \tag{4.55}$$

$$\hat{a}_l(t)|n_l, t\rangle = n_l^{1/2}|n_l - 1, t\rangle, \tag{4.56}$$

$$\hat{a}_l{}^\dagger|n_l, t\rangle = (n_l + 1)^{1/2}|n_l + 1, t\rangle. \tag{4.57}$$

A fase $\beta_{n_l}(t)$, calculada pela equação (4.47), produz

$$\beta_{n_l}(t) = -\left(n_l + \frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t')\rho_l^2(t')}dt'. \tag{4.58}$$

Com o uso das equações (3.14) e (4.22) esta relação torna-se

$$\beta_{n_l}(t) = -W_l\left(n_l + \frac{1}{2}\right)t. \tag{4.59}$$

Assim, podemos representar a solução da equação de Schrödinger dependente do tempo como

$$|\psi_{nl}, t\rangle = e^{i\beta_{nl}(t)}|n_l, t\rangle. \tag{4.60}$$

A solução geral é dada por $|\Psi, t\rangle = \sum_{n_l} c_{nl}|\psi_{nl}, t\rangle$, onde os coeficientes c_{nl} são constantes. Portanto, as equações (4.22), (4.59) e (4.60) representam a solução exata para o oscilador generalizado dependente do tempo descrito pelo hamiltoniano (4.11), que governa a dinâmica das amplitudes dos modos.

4.2.2 Evolução não adiabática

Analisamos então, a evolução não adiabática da luz no regime quântico, para o meio dado pelas expressões (??). Ao fazer isso, procedemos como na seção anterior, primeiramente consideremos a derivada no tempo do operador $\hat{a}_l(t)$ dada pela expressão

$$\frac{d\hat{a}_l(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}_l(t), \hat{H}_l(t)] + \frac{\partial \hat{a}_l(t)}{\partial t}. \tag{4.61}$$

A partir da qual encontra-se

$$\frac{d\hat{a}_l(t)}{dt} = -\frac{i}{\varepsilon(t)\rho_l^2(t)}\hat{a}_l(t), \tag{4.62}$$

e com ajuda de (**??**) e (4.22) torna-se

$$\hat{a}_l(t) = \hat{a}_l(0)e^{-iW_l t}. \tag{4.63}$$

Assim, podemos expressar o operador potencial vetor $\vec{A}(\vec{r},t)$ em termos do operador $\hat{a}_l(t)$ e $\hat{a}_l{}^{\dagger}(t)$ como

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t) = \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} e^{-(\eta+2\Lambda_0)t/2} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \frac{\vec{e}_{l\nu}}{\sqrt{W_l}} \Big[\hat{a}_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_l t)} \\ +\hat{a}^{\dagger}_{l\nu}(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_l t)}\Big] \quad .\end{aligned} \tag{4.64}$$

Nesta expressão, escrevemos os operadores $\hat{a}_l(t)$ e $\hat{a}^{\dagger}_l(t)$ em termos dos modos de direções de polarização, que agora temos $[\hat{a}_{l\nu}(t), \hat{a}^{\dagger}_{l\nu}(t)] = 1$. Então, os operadores campos elétrico $\vec{E}(\vec{r},t)$ e magnético $\vec{B}(\vec{r},t)$ tomam a forma

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2} \frac{e^{-(\eta+2\Lambda_0)t/2}}{L^{3/2}} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \frac{\vec{e}_{l\nu}}{\sqrt{W_l}} \\ &\times\left[\left(\frac{\eta+2\Lambda_0}{2} + iW_l t\right)\hat{a}_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_l)}\right. \\ &+\left.\left(\frac{\eta+2\Lambda_0}{2} - iW_l\right)\hat{a}^{\dagger}_{l\nu}(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_l t)}\right],\end{aligned} \tag{4.65}$$

e

$$\begin{aligned}\hat{\vec{B}}(\vec{r},t) = i\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} e^{-(\eta+2\Lambda_0)t/2} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \frac{(\vec{k}_l \times \vec{e}_{l\nu})}{\sqrt{W_l}} \Big[a_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-W_l t)} \\ -a^{\dagger}_{l\nu}(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\mathbf{r}-W_l t)}\Big] \quad .\end{aligned} \tag{4.66}$$

Nota-se que os operadores do campo elétrico e do campo magnético decrescem exponencialmente com o tempo devido à dissipação de energia eletromagnética produzida pela condutividade e pela permissividade dependente do tempo. Além disso, para $(\eta+2\Lambda_0) = 0$ o operador potencial vetor e os operadores dos campos elétrico e magnético reproduzem as expressões para os campos dentro de cavidades vazias, como esperado.

Calculando agora o valor esperado de $\hat{q}_l$ e $\hat{p}_l$ no espaço de Fock encontramos

$$\langle\hat{q}_l\rangle = \langle\hat{p}_l\rangle = 0, \tag{4.67}$$

$$\langle\hat{q}_l^2\rangle = \hbar\rho_l^2\left(n_l + \frac{1}{2}\right), \tag{4.68}$$

$$\langle\hat{p}_l^2\rangle = \hbar\left[\frac{1}{\rho_l^2} + [\varepsilon(t)(\dot{\rho}_l - \Lambda_0\rho_l)^2\right]\left(n_l + \frac{1}{2}\right), \tag{4.69}$$

donde

$$(\Delta\hat{q}_l)^2 = \langle\hat{q}_l^2\rangle - \langle\hat{q}_l\rangle^2 = \hbar\rho_l^2\left(n_l + \frac{1}{2}\right), \tag{4.70}$$

$$(\Delta\hat{p}_l)^2 = \langle\hat{p}_l^2\rangle - \langle\hat{p}_l\rangle^2 = \hbar\left[\frac{1}{\rho_l^2} + [\varepsilon(\dot{\rho}_l - \Lambda_0\rho_l)^2\right]\left(n_l + \frac{1}{2}\right). \tag{4.71}$$

Portanto, a relação de incerteza é expressa como

$$(\Delta q_l)(\Delta p_l) = \hbar\left\{1 + [\varepsilon\rho_l(\dot{\rho}_l - \Lambda_0\rho_l)]^2\right\}^{1/2}\left(n_l + \frac{1}{2}\right). \tag{4.72}$$

Note que para $\gamma = 0$ e $\sigma_0 = 0$ a relação acima reduz àquela do oscilador harmônico conhecido.

4.2.3 Evolução adiabática

Para obter as soluções para os campos em uma evolução adiabática da propagação de ondas eletromagnéticas no meio variável no tempo, utilizaremos o procedimento feito na seção anterior. No entanto, substituindo as variáveis de dinâmica clássica (a_l,a_l^*) pelos operadores ($\hat{a}_l$, $\hat{a}_l^\dagger$) e usando (4.42) o operador potencial $\vec{A}(\vec{r},t)$ fica dado por

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} e^{-(\eta+2\Lambda_0)t/2}\sum_l\sum_{\nu=1,2}\frac{\hat{e}_{l\nu}}{\sqrt{\varpi_l}}\Big[a_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\varphi_l'(t))} + a_{l\nu}^\dagger(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\varphi_l'(t))}\Big], \tag{4.73}$$

onde

$$\varphi_l'(t) = \chi_l^D + \Upsilon_l^B, \tag{4.74}$$

com Υ_l^B dado por

$$\Upsilon_l^B = -\int_0^t \frac{\eta\sigma_0}{4\varepsilon_0\varpi_l}dt'. \tag{4.75}$$

A relação (4.75) corresponde a fase de Berry (quântico) e ela é igual a ângulo Hannay (clássico), veja Eq. (4.40).

Os operadores de campo elétrico e magnético também são escritos como

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} e^{-(\eta+2\Lambda_0)t/2}\sum_l\sum_{\nu=1,2}\frac{\mathbf{e}_{l\nu}}{\sqrt{\varpi_l}} \\ &\times\left\{\left[\frac{\eta+2\Lambda_0}{2} + i\left(\varpi - \frac{\eta\sigma_0}{4\varepsilon_0\varpi_l}\right)\right]a_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\varphi_l'(t))}\right. \\ &\left.+\left[\frac{\eta+2\Lambda_0}{2} - i\left(\varpi - \frac{\eta\sigma_0}{4\varepsilon_0\varpi_l}\right)\right]a_{l\nu}^\dagger(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\varphi_l'(t))}\right\},\end{aligned} \tag{4.76}$$

e

$$\vec{B}(\vec{r},t) = i\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} e^{-(\eta+2\Lambda_0)t/2}\sum_l\sum_{\nu=1,2}\frac{(\hat{k}_l\times\hat{e}_{l\nu})}{\sqrt{\varpi_l}}\Big[a_{l\nu}(0)e^{i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\varphi_l'(t))} - a_{l\nu}^{\dagger}(0)e^{-i(\vec{k}_l\cdot\vec{r}-\varphi_l'(t))}\Big]. \tag{4.77}$$

Assim como no caso clássico, os campos elétrico e magnético sofrem a atenuações por um fator $\exp[-(\eta+2\Lambda_0)t/2]$. Fazendo um comparativo das soluções clássicas, dadas por [(4.35),(4.35),(4.44),(4.45)], com as soluções quânticas [(4.65),(4.66),(4.76),(4.77)] nota-se que as expressões adiabáticas e não adiabáticas para os campos elétrico e magnético são praticamente idênticas. Com uma única diferença, as variáveis clássicas (a_l, a_l^*, q_l, pl) satisfazem a álgebra de Poisson e $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{q}_l, \hat{p}_l)$ são operadores que satisfazem a álgebra não comutativa. Portanto, a propagação quântica da luz neste meio linear variável no tempo pode ser obtida a partir do clássico e vice-versa simplesmente substituindo $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{q}_l, \hat{p}_l, \varphi_l')$ por $(a_l, a_l^*, q_l, p_l, \varphi_l)$ nas expressões para os campos elétrico e magnético. Observamos também, que os resultados (4.40) e (4.75) concordam com aquele da Ref. [92], que foi obtido por meio dependente do tempo a partir de uma abordagem diferente.

Para encerrar esta seção, destacamos que as fases dinâmica e de Berry podem ser obtidas a partir da chamada fase de Lewis $\beta_{n_l}(t)$. Fazendo a substituição de (4.38) em (4.58) obtemos

$$\beta_{n_l}(t) = -\left(n_l+\frac{1}{2}\right)\int_0^t\left(\varpi - \frac{\eta\sigma_0}{4\varepsilon_0\varpi_l}\right)dt'. \tag{4.78}$$

Na expressão acima o primeiro termo corresponde à fase dinâmica e o segundo termo à fase de Berry. Sendo assim, o ângulo de Hannay é dado por [90, 63]

$$\Theta_l^H = -\frac{\partial}{\partial n_l}\left[\left(n_l+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\eta\sigma_0}{4\varepsilon_0\varpi_l}\right)\right] = -\frac{\eta\sigma_0}{4\varepsilon_0\varpi_l} = \Upsilon_l^B. \tag{4.79}$$

4.2.4 Estados coerentes para ondas eletromagnéticas

Os estados coerentes para sistemas quânticos descritos por hamiltonianos dependentes do tempo como (4.11) são dados por

$$|\alpha_l,t\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha_l|^2}{2}\right)\sum_{n_l}\frac{(\alpha_l)^{n_l}}{(n_l!)^{1/2}}\exp\left[i\beta_{n_l}(t)\right]|n_l,t\rangle, \tag{4.80}$$

onde α_l é um número complexo arbitrário. Os estados $|\alpha,t\rangle$ são autoestados de $a_l(t)$

$$a_l|\alpha_l,t\rangle = \alpha_l(t)|\alpha_l,t\rangle, \tag{4.81}$$

com $\alpha_l(t)$ dado por

$$\alpha_l(t) \;=\; \alpha_l(0)e^{2i\beta_0(t)}, \tag{4.82}$$

sendo

$$\beta_0 = -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{\varepsilon(\tau)\rho_l^2(\tau)}d\tau. \tag{4.83}$$

Então,

$$\langle\alpha_l, t|q|\alpha_l, t\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\rho\,\langle\alpha_l, t|\left(\alpha e^{2i\beta_0(t)} + \alpha^* e^{-2i\beta_0(t)}\right)|\alpha_l, t\rangle$$

$$\langle\alpha_l, t|q|\alpha_l, t\rangle = \left(2\hbar|\alpha|^2\rho^2\right)^{1/2}\cos(-2\beta_0(t)+\delta), \tag{4.84}$$

onde $\alpha = |\alpha|e^{-i\delta}$. ou seja,

$$\langle q_l\rangle = \left(2\hbar|\alpha_l|^2\rho_l^2\right)^{1/2}\cos\left(\int_0^t \frac{dt'}{\varepsilon(t')\rho_l^2(t')} + \delta\right), \tag{4.85}$$

onde δ_l é o argumento do número complexo α_l. A partir dessa expressão, vemos que o valor esperado de q_l nos estados coerentes corresponde às soluções clássicas para o sistema descrito pelo hamiltoniano (4.7) como esperado. Os resultados (4.97) e (4.85) concordam com os obtidos na Ref. [92].

Além disso, encontra-se

$$q^2 = \frac{\hbar}{2}\rho^2\left(a + a^\dagger\right)^2$$

$$q^2 = \frac{\hbar}{2}\rho^2\left(a^2 + aa^\dagger + a^\dagger a + (a^\dagger)^2\right)$$

$$q^2 = \frac{\hbar}{2}\rho^2\left(1 + a^2 + 2a^\dagger a + (a^\dagger)^2\right), \tag{4.86}$$

de onde podemos obter

$$\left\langle\alpha|q^2|\alpha\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\rho^2\left(1 + \alpha^2 e^{4i\beta_0(t)} + 2\alpha^*\alpha + (\alpha^*)^2 e^{-4i\beta_0(t)}\right)$$

$$\left\langle\alpha|q^2|\alpha\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\rho^2\left[1 + |\alpha|^2\left(e^{i(-2\beta_0(t)+\delta)} + e^{-i(-2\beta_0(t)+\delta)}\right)^2\right]$$

$$\left\langle\alpha|q^2|\alpha\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\rho^2\left[1 + |\alpha|^2\cos^2(-2\beta_0(t)+\delta))\right]. \tag{4.87}$$

Portanto,

$$\left\langle(\Delta q)^2\right\rangle = \left\langle q^2\right\rangle - \left\langle q\right\rangle^2 = \frac{\hbar}{2}\rho^2. \tag{4.88}$$

Para calcular os valores esperados do momento tem-se

$$a - a^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2\hbar}}2\left[\rho p - \varepsilon\left(\dot\rho - \Lambda p\right)q\right]$$

$$p = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left[-\frac{i}{\rho}\left(a - a^\dagger\right) + \varepsilon\left(\dot\rho - \Lambda p\right)\left(a + a^\dagger\right)\right], \tag{4.89}$$

logo,

$$\langle\alpha|p|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\langle\alpha|\Big[-\frac{i}{\rho}\left(\alpha e^{2i\beta_0(t)} - \alpha^* e^{-2i\beta_0(t)}\right) \tag{4.90}$$

$$+\varepsilon\left(\dot{\rho}-\Lambda p\right)\left(\alpha e^{2i\beta_0(t)} + \alpha^* e^{-2i\beta_0(t)}\right)\Big]|\alpha\rangle. \tag{4.91}$$

Resultando em,

$$\langle\alpha|p|\alpha\rangle = \sqrt{2\hbar|\alpha|^2}\left[\frac{1}{\rho}\mathrm{sen}(\varphi(t)+\delta) + \varepsilon\left(\dot{\rho}-\Lambda p\right)\cos(\varphi(t)+\delta)\right]. \tag{4.92}$$

Para calcular o desvio, ainda deve ser feito;

$$p^2 = \frac{\hbar}{2}\Big\{ -\frac{1}{\rho^2}\left(a-a^\dagger\right)^2 - i\frac{\varepsilon}{\rho}\left(\dot{\rho}-\Lambda p\right)\big[\left(a-a^\dagger\right)\left(a+a^\dagger\right) + \left(a+a^\dagger\right)\left(a-a^\dagger\right)\big] + \varepsilon^2(\dot{\rho}-\Lambda\rho)^2(a+a^\dagger)^2\Big\}$$

$$p^2 = \frac{\hbar}{2}\Big\{\left[\frac{1}{\rho^2}+\varepsilon^2(\dot{\rho}-\Lambda\rho)^2\right] + \left[-\frac{1}{\rho^2} - 2i\frac{\varepsilon}{\rho}\left(\dot{\rho}-\Lambda p\right) + \varepsilon^2(\dot{\rho}+\Lambda\rho)^2\right]a^2$$
$$2\left[\frac{1}{\rho^2}+\varepsilon^2(\dot{\rho}-\Lambda\rho)^2\right]a^\dagger a + \left[-\frac{1}{\rho^2} - 2\frac{\varepsilon}{\rho}\left(\dot{\rho}-\Lambda p\right) + \varepsilon^2(\dot{\rho}-\Lambda\rho)^2\right]\left(a^\dagger\right)^2\Big\}. \tag{4.93}$$

Portanto,

$$\left\langle(\Delta p)^2\right\rangle = \left\langle p^2\right\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{\hbar}{2}\left[\frac{1}{\rho^2}+\varepsilon^2(\dot{\rho}-\Lambda\rho)^2\right]. \tag{4.94}$$

Agora, os cálculos das flutuações quânticas Δq_l e Δp_l nos estados $|\alpha_l, t\rangle$ produzem

$$\langle(\Delta q_l)^2\rangle = \langle q_l^2\rangle - \langle q_l\rangle^2 = \frac{\hbar}{2}\rho_l^2, \tag{4.95}$$

$$\langle(\Delta p_l)^2\rangle = \langle p_l^2\rangle - \langle p_l\rangle^2 = \frac{\hbar}{2}\left[\frac{1}{\rho_l^2} + [\varepsilon(\dot{\rho}_l - \Lambda_0\rho_l)]^2\right]. \tag{4.96}$$

Portanto, para os estados coerentes a relação de incerteza tem a seguinte forma

$$(\Delta q_l)(\Delta p_l) = \frac{\hbar}{4}\left\{1+[\varepsilon\rho_l(\dot{\rho}_l-\Lambda_0\rho_l)]^2\right\}^{1/2}. \tag{4.97}$$

Observe que (4.97) corresponde exatamente ao mínimo valor de (4.72), e que os estados coerentes não são os estados de mínima incerteza. Tais estados são conhecidos como estados comprimidos [98, 99, 100]. Também observamos que para $\gamma = 0$ e $\sigma_0 = 0$ a relação de incerteza acima torna-se idêntica ao caso do oscilador independente do tempo, conforme esperado.

Capítulo 5

Luz em meio dielétrico e campo escalar em um espaço-tempo de de Sitter

A similaridade entre o comportamento de sistemas físicos que possuem a mesma descrição matemática é uma assunto de muito interesse na física teórica, pois permite o entendimento de diferentes fenômenos a partir de deduções similares. O conteúdo presente aqui por si só já justifica esse argumento. Uma vez que o estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em meios materias possui uma estreita semelhança com o oscilador harmônico amortecido. Isso acontece em geral na física pois as equação tende a repetir suas características em níveis mais fundamentais, trazendo sempre mais informações sobre os fundamentos da natureza.

Vale ressaltar aqui que a propagação da luz em um meio dielétrico com propriedades dependentes do tempo e a propagação de um campo escalar no espaço de de Sitter, são temas de diferentes áreas da física, óptica e cosmologia, respectivamente. Uma varidade de trabalhos têm sido publicado sobre a propagação da luz em um meio dielétrico como este [45, 36, 92, 88]. Bem como, o comportamento clássico e quântico da propagação do campo escalar neste espaço-tempo [17, 20, 80].

Estimulados por esses assuntos encontramos uma interessante semelhança entre a propagação da radiação em um meio com permissidade elétrica variado exponencialmente com tempo e a propagação do campo escalar no espaço-tempo de de Sitter [101]. Mostramos que ambos o fenômenos são descritos por hamiltonianas muito similares, consequentemente têm a mesma estrutura matemática. Então, usando o método do invariante e estados do espaço de Fock, encontramos a solução da equação de Shrödinger para o operador hamiltoniano associado ao campo escalar e escrevemos a solução em termos da equação não linear de Milne-Pinney.

5.1 Luz em um meio dielétrico dependente do tempo: análise clássica

Nesta seção será abordado o comportamento clássico da propagação de ondas eletromagnéticas em um meio com $\varepsilon(t)$ e μ_0, com as relações para os campos dadas por $\vec{D} = \varepsilon(t)\vec{E}$ e $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$. Considerando que a permissividade do meio possui um comportamento exponencial e a permeabilidade é constante [36], ou seja,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{\eta t}, \tag{5.1}$$

onde η é uma constante positiva e $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$. Esse modelo de dependência temporal para a permissividade é muito conveniente aqui, como será visto mais adiante ela permite fazer uma conexão direta com o espaço-tempo de de Sitter. Além disso, é aplicável a vários problemas em espaço-tempo curvo [81, 20, 80]. Particularmente, na simulação de armadilhas de íons em de Sitter [76, 77]. É interessante lembrar que na presença de um campo gravitacional (espaço curvo), as equações de Maxwell são modificadas e o campo gravitacional desempenha o papel de um meio dielétrico com permissividade elétrica e permeabilidade magnética do meio dependendo da geometria [102].

Por simplicidade escolhemos o calibre em que o divergente de $\vec{A}$ é nulo, uma vez que as equações de Maxwell são invariantes por transformação de calibre. Com isso, sabe-se que o potencial vetor é puramente transverso e fica agora governado pela seguinte equação

$$\nabla^2\vec{A} - \mu_0\dot{\varepsilon}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0, \tag{5.2}$$

onde o ponto indica derivada total com relação ao tempo. Observe na equação que governa o potencial vetor tem a forma de uma equação de onda com amortecimento, devido exclusivamente à dependência temporal da permissividade.

Novamente, considerando condições periódicas de contorno que permitem escrever o potencial vetor em uma expansão de modos e fazendo uma separação de variáveis devido à forma de (5.2), os modos da cavidade são

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_l \vec{u}_l(\vec{r})q_l(t). \tag{5.3}$$

Ao substituirmos $\vec{A}(\vec{r},t)$ na equação de onda amortecida (5.2), determinamos

$$\nabla^2\vec{u}_l(\vec{r}) + \frac{\omega_l^2}{c_0^2}\vec{u}_l(\vec{r}) = 0, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial^2 q_l}{\partial t^2} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{\partial q_l}{\partial t} + \omega_l^2(t)q_l = 0, \tag{5.5}$$

onde ω_{0l} é a constante de separação que representa a frequência natural, $c_0 = 1/(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}$

é a velocidade da luz em $t = 0$ e $\omega_l(t)$ é a frequência modificada dependente do tempo, definida como

$$\omega_l(t) = \frac{c(t)\omega_{0l}}{c_0}, \tag{5.6}$$

com $c(t) = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon(t)}$ sendo a velocidade da luz no meio dependente do tempo; note que $\omega_l(0)=\omega_{0l}$. Agora, é fácil verificar que a equação (5.5) é obtida de

$$H_l(t) = \frac{p_l^2}{2\varepsilon(t)} + \frac{1}{2}\varepsilon(t)\omega_l^2(t)q_l^2, \tag{5.7}$$

onde q_l e p_l são variáveis dinâmicas conjugadas. Usando (5.1) na equação (5.5) com o auxílio de (5.6), resulta

$$\ddot{q}_l + \eta\dot{q}_l + e^{-\eta t}\omega_{0l}^2 q_l = 0. \tag{5.8}$$

A solução desta equação é conhecida [36, 81] e é dada por

$$q_l(t) = e^{-\eta t/2}\left[AJ_1\left(\frac{2\omega_{0l}}{\eta}e^{-\eta t/2}\right) + BY_1\left(\frac{2\omega_{0l}}{\eta}e^{-\eta t/2}\right)\right], \tag{5.9}$$

onde J_1 e Y_1 são as funções de Bessel do primeiro e segundo tipo, respectivamente, e A e B são constantes.

Considerando a luz em volume cúbico V em um meio não refrativo, o conjunto $\vec{u}_l(\vec{r})$ satisfaz a condição de transversalidade $\nabla \cdot \vec{u}_l(\vec{r}) = 0$ e forma um conjunto completo ortonormal. Assumindo a condição de contorno periódica na superfície resulta em

$$\vec{u}_{l\nu}(\vec{r}) = L^{-3/2}e^{\pm i\vec{k}_l\cdot\vec{r}}\hat{e}_{l\nu}, \tag{5.10}$$

onde $L = V^{1/3}$ é a aresta do cubo, $|\vec{k}_l| = \omega_{0l}/c_0$ é o vetor de onda, e $\hat{e}_{l\nu}$ é o vetor unitário de polarização ($\nu = 1, 2$), o qual deve ser perpendicular devido a condição de transversalidade. Então,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_l \sum_{\nu=1,2} \hat{e}_{l\nu}e^{\pm i\vec{k}_l\cdot\vec{r}}q_l(t), \tag{5.11}$$

sendo o comportamento de $q_l(t)$ dado por (5.8). Portanto, este resultado fornece uma descrição clássica da propagação da luz em um meio dielétrico linear com uma permissividade variável no tempo exponencialmente crescente, uma vez que o calibre de Coulomb é satisfeito, os campos elétrico e magnético são dados por $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$ e $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Além disso, partindo das Eqs. (5.9) e (5.11), nota-se que o potencial vetor decai proporcionalmente ao fator $\exp(-\eta t/2)$. Essa atenuação no potencial vetor é devido à dependência temporal da permissividade elétrica (ver Eq. (5.5)) [36]. É importante ressaltar que para ε constante, o hamiltoniano (5.7) se reduz ao do oscilador harmônico padrão com a permissividade ε desempenhando o papel da massa do oscilador mecânico. Consequentemente, todos os nossos resultados anteriores coincidem com aqueles da propagação da luz em cavidades vazias.

5.2 Campo escalar clássico em um espaço-tempo de de Sitter

Para iniciar a análise do comportamento clássico de um campo escalar em um espaço-tempo de de Sitter, considere o elemento de linha dado por,

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2H_0 t}dx^2, \tag{5.12}$$

onde H_0 é a constante de Hubble independente do tempo. A densidade lagrangeana para um campo escalar real $\Phi(\vec{x}, t)$ é dada por [20, 80, 103]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \frac{1}{2}m^2\Phi^2, \tag{5.13}$$

onde m é a massa do quanta do campo. Assim no caso do campo vetorial também é possível decompor o campo escalar em termos dos modos $\phi_k(t)$ e amplitude $v_k(\vec{x})$ tal que

$$\Phi(\vec{x}, t) = \sum_k v_k(\vec{x})\phi_k(t) \tag{5.14}$$

onde

$$v_k(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad , \quad v_k^*(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \tag{5.15}$$

são normalizados em um volume finito V. Seja o campo $\Phi(\vec{x}, t)$ uma quantidade complexa, tal que é possível separar a parte real e a parte imaginária de $\phi_k(t)$ como

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_k^1 + i\phi_k^2), \tag{5.16}$$

que permite obter para cada modo k e j a ação

$$S = \frac{1}{2}\sum_k \sum_{j=1,2} \int e^{3H_0\tau}d\tau(\dot{\phi}_k^{j2} - \omega_k^2\phi_k^{j2}), \tag{5.17}$$

onde ω_k é uma frequência dada por [104]

$$\omega_k^2(t) = m^2 + k^2 e^{-2H_0 t}. \tag{5.18}$$

Doravante, será adotado que k denota o par k, j. Esse abuso de linguagem não trará nenhum prejuízo para essa análise, pois da Eq. (5.17) nota-se que os modos k e j são independentes e podem ser tratados separadamente [20, 80]. Então, a partir da expressão da ação (5.17), o hamiltoniano obtido para cada modo k é

$$H_k = \frac{\pi_k^2}{2a^3(t)} + \frac{1}{2}a^3(t)\omega_k^2(t)\phi_k^2 \quad , \quad a(t) = e^{H_0 t}, \tag{5.19}$$

onde

$$\pi_k = a^3(t)\dot{\phi}_k, \tag{5.20}$$

é o momento conjugado generalizado. Usando a hamiltoniana (5.19) prontamente se obtém a equação clássica da dinâmica do modo ϕ_k, escrita como

$$\ddot{\phi}_k + 3H_0\dot{\phi}_k + \omega_k^2\phi_k = 0. \tag{5.21}$$

A solução desta equação é conhecida e dada por

$$\phi_k(t) = \left(\frac{\pi}{4H_0}\right)^{1/2} e^{-(3/2)H_0 t} H_\nu^{(2)}(z), \tag{5.22}$$

onde $H_\nu^{(2)}$ é a função de Hankel do segundo tipo com

$$\nu = \left(\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H_0^2}\right)^{1/2} \quad , \quad z = \frac{k}{H_0}e^{-H_0 t}. \tag{5.23}$$

Sendo assim, as funções do modo e da amplitude tem comportamento explicitamente conhecidos, é possível escrever o campo escalar $\Phi(\vec{x}, t)$, das Eqs. (5.14), (5.15), como

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{i\vec{k}_l\cdot\vec{x}}\phi_k(t), \tag{5.24}$$

com ϕ_k dado por (5.16). Das equações (5.16) e (5.24) notamos que o campo escalar também sofre uma atenuação, que é proporcional à $\exp(-3H_0 t/2)$.

Fica evidente que o formalismo matemático para descrever a propagação do campo eletromagnético clássico ao longo de um meio dielétrico linear com uma permissividade elétrica variável no tempo aumentando exponencialmente e a propagação de um campo escalar clássico no espaço-tempo de de Sitter são idênticos. Nos dois casos, o potencial vetorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ e o campo escalar $\Phi(\vec{x}, t)$ são descritos pelos modos e amplitudes, veja as equações (5.11) e (5.24), onde as equações de movimento para as amplitudes (ou seja, (5.8) e (5.21)) são regidas por hamiltonianas semelhantes, isto é, Eq. (5.7) e Eq. (5.19), com as funções para os modos sendo do tipo ondas planas, equações (5.10) e (5.15). A correspondência fica evidente pela seguinte analogia: $\vec{r} \leftrightarrow \vec{x}$, $\varepsilon(t) \leftrightarrow a(t)$, $q_l \leftrightarrow \phi_k$ e $\Omega_l \leftrightarrow \omega_k$. Destacamos também que a devida correspondência entre $\varepsilon(t) \leftrightarrow a(t)$ e a atenuação de $\Phi(\vec{x}, t)$ (ver Eqs. (5.22) e (5.24), infere que o *background* de de Sitter atua como um meio dielétrico dependente do tempo na propagação do campo escalar. Por outro lado, os dois sistemas não são completamente equivalentes, uma vez que as relações de dispersão, equações (5.6) e (5.18) são diferentes, sendo algo inerentes a cada sistema físico, e consequentemente os modos de amplitudes têm comportamentos diferentes. Onde a evolução dinâmica é determinada pela relação de dispersão.

5.3 Campo escalar quântico em um espaço-tempo de de Sitter

O objetivo desta seção é apresentar uma análise da propagação do campo escalar quântico no espaço-tempo de de Sitter. Sendo assim, a finalidade é encontrar a solução da equação da dinâmica quântica, ou seja, a solução da equação de Schrödinger dependente do tempo associada a hamiltoniana (5.19). Deste modo, é necessário resolver

$$H_k|\Psi,t\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi,t\rangle, \tag{5.25}$$

onde o modo da amplitude ϕ_k e o momento generalizado π_k são operadores canonicamente conjugados que satisfazem a relação $[\phi_{k'},\pi_k] = i\hbar\delta_{k'k}$ com $\pi_k = -i\hbar\partial/\partial\phi_k$. Como já é de praxes aqui, a solução pode ser obtida diretamente do método do invariante dinâmico de Lewis e Riesenfeld. Sendo assim, dado um operador hermitiano $I_k(t)$ associado aos modos k que satisfaça a equação de Louiville-Von-Neumann

$$\frac{dI_k}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[I_k,H_k] + \frac{\partial I_k}{\partial t} = 0, \tag{5.26}$$

a solução desejada é escrita em termos dos autoestados ortonormalizados $|\phi_{n_k},t\rangle$ do operador invariante $I_k(t)|\phi_{n_k},t)\rangle = \lambda_{n_k}|\phi_{n_k},t\rangle$ e as fases $\beta_{n_k}(t)$ como

$$|\psi_{n_k},t\rangle = e^{i\beta_{n_k}(t)}|\phi_{n_k},t\rangle. \tag{5.27}$$

Os autovalores λ_{n_k} não dependem do tempo e as fases $\beta_{n_k}(t)$ são encontradas por meio de

$$\hbar\frac{d\beta_{n_k}(t)}{dt} = \left\langle \phi_{n_k},t\left|i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_k(t)\right|\phi_{n_k},t\right\rangle, \tag{5.28}$$

com a condição de ortonormalidade $\langle\phi_{n'_k},t|\phi_{n_k},t\rangle = \delta_{n'_k n_k}$ sendo satisfeita.

Para o hamiltoniano (5.19) o invariante quadrátido é dado por

$$I_k(t) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\phi_k}{\rho_k}\right)^2 + \left[\rho_k\pi_k - a^3\dot{\rho}_k\phi_k\right]^2\right], \tag{5.29}$$

onde $\rho_k(t)$ é uma função do tempo que satisfaz a equação de Milne-Pinney, ou seja,

$$\ddot{\rho}_k(t) + 3H_0\dot{\rho}_k(t) + \omega_k^2\rho_k = \frac{e^{-6H_0t}}{\rho_k^3}. \tag{5.30}$$

A solução dessa equação pode ser escrita como [20, 80]

$$\rho_k(t) = a^{-3/2}\left[A_0 J_\nu^2(z) + B_0 N_\nu^2(z) + 2\left(A_0 B_0 - \frac{\pi^2}{4H_0^2}\right)^{1/2} J_\nu(z) N_\nu(z)\right]^{1/2}, \qquad (5.31)$$

onde J_ν e N_ν são funções de Bessel e A_0 e B_0 são constantes reais.

Para encontrar os autoestados do invariante $I_k(t)$, é conveniente introduzir os operadores de criação e aniquilação $b_k^\dagger(t)$ e $b_k(t)$ definidos por

$$b_k(t) = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left[\frac{\phi_k}{\rho_k} + i(\rho_k \pi_k - a^3 \dot{\rho}_k \phi_k)\right], \qquad (5.32)$$

$$b_k^\dagger(t) = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left[\frac{\phi_k}{\rho_k} - i(\rho_k \pi_k - a^3 \dot{\rho}_k \phi_k)\right], \qquad (5.33)$$

com

$$[b_k(t), b_k^\dagger(t)] = 1. \qquad (5.34)$$

Com esses operadores, o invariante (5.29) pode ser fatorizado como

$$I_k(t) = \hbar\left[b_k^\dagger(t) b_k(t) + \frac{1}{2}\right]. \qquad (5.35)$$

Usando (5.34) e (5.35) a equação de autovalor para $I_k(t)$ pode ser resolvida exatamente, pois o problema fica idêntico ao caso do oscilador harmônico independente do tempo, fazendo uso dos estados de Fock $|n_k, t\rangle$. Logo, define-se o operador de número por $N_k = b_k^\dagger b_k$, que é hermitiano, de tal modo que $N_k|n_k, t\rangle = n_k|n_k, t\rangle$, isto resulta em

$$I_k(t) = \hbar\left(N_k + \frac{1}{2}\right). \qquad (5.36)$$

$$I_k(t)|n_k, t\rangle = \hbar\left(n_k + \frac{1}{2}\right)|n_k, t\rangle, \qquad (5.37)$$

$$b_k(t)|n_k, t\rangle = n_k^{1/2}|n_k - 1, t\rangle, \qquad (5.38)$$

$$b_k^\dagger|n_k, t\rangle = (n_k + 1)^{1/2}|n_k + 1, t\rangle. \qquad (5.39)$$

Fazendo a mudança $|\phi_{n_k}, t\rangle \rightarrow |n_k, t\rangle$ no cálculo da fase dada por (5.27), resulta em

$$\beta_{n_k}(t) = -\left(n_k + \frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{1}{a^3(\tau)\rho_k^2(\tau)} d\tau. \qquad (5.40)$$

Portanto, as soluções da equação de Schrödinger (5.25) podem ser escritas como

$$|\psi_{n_k}, t\rangle = e^{i\beta_{n_k}(t)}|n_k, t\rangle, \qquad (5.41)$$

com $\beta_{n_k}(t)$ dada por (5.40). A solução geral é $|\Psi, t\rangle = \sum_{n_k} c_{n_k} |\psi_{n_k}, t\rangle$, onde os coeficientes c_{n_k} são constantes.

Agora, de (5.32) e (5.33) resulta em

$$\phi_k(t) = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \rho_k [b_k(t) + b_k^\dagger(t)]. \tag{5.42}$$

Logo, fazendo uso das equações (5.14), (5.15) e (5.42) o campo escalar $\Phi(\vec{x}, t)$ pode ser reescrito na forma

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \rho_k(t) \left[e^{i\vec{k}_k \cdot \vec{x}} b_k(t) + e^{-i\vec{k}_k \cdot \vec{x}} b_k^\dagger(t) \right], \tag{5.43}$$

com $\rho_k(t)$ sendo dado pela equação (5.30). Portanto, as expressões acima representam o operador campo escalar quântico no espaço-tempo de de Sitter.

Com isso, é possível calcular os valores esperados de $\phi_k(t)$, $\pi_k(t)$, suas variâncias e o respectivo princípio de incerteza no estado $|n_k, t\rangle$. Usando as equações (5.38) e (5.39), encontramos

$$\langle I_k \rangle = \hbar \left(n_k + \frac{1}{2} \right), \tag{5.44}$$

$$\langle \phi_k \rangle = \langle \pi_k \rangle = 0, \tag{5.45}$$

$$\langle \phi_k^2 \rangle = \hbar \rho_k^2 \left(n_k + \frac{1}{2} \right), \tag{5.46}$$

$$\langle \pi_k^2 \rangle = \hbar \left[\frac{1}{\rho_k^2} + (a^3 \dot{\rho}_k)^2 \right] \left(n_k + \frac{1}{2} \right). \tag{5.47}$$

Sendo as flutuações quânticas dadas pela variâncias que são expressas como

$$\langle (\Delta\phi_k)^2 \rangle = \langle \phi_k^2 \rangle - \langle \phi_k \rangle^2 = \hbar \rho_k^2 \left(n_k + \frac{1}{2} \right), \tag{5.48}$$

$$\langle (\Delta\pi_k)^2 \rangle = \langle \pi_k^2 \rangle - \langle \pi_k \rangle^2 = \hbar \left[\frac{1}{\rho_k^2} + (a^3 \dot{\rho}_k)^2 \right] \left(n_k + \frac{1}{2} \right), \tag{5.49}$$

de modo que a relação de incerteza pode ser escrito como

$$(\Delta\phi_k)(\Delta\pi_k) = \hbar \left[1 + (a^3 \rho_k \dot{\rho}_k)^2 \right]^{1/2} \left(n_k + \frac{1}{2} \right). \tag{5.50}$$

onde $a(t) = e^{H_0 t}$ e ρ_k é dado por (5.31).

Resumidamente, é valido destacar que o comportamento quântico da propagação da radiação em um meio dielétrico com permissividade dependente do tempo e crescendo exponencialmente pode ser tratado com o mesmo procedimento. Como mostramos na seção anterior, a estrutura matemática para os dois sistema é idêntica.

5.4 Estados coerentes para o campo escalar quântico

Os estados coerentes do hamiltoniano (5.19) são

$$|\alpha_k, t\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha_k|^2}{2}\right)\sum_{n_k}\frac{(\alpha_k)^{n_k}}{(n_k!)^{1/2}}\exp\left[i\beta_{n_k}(t)\right]|n_k, t\rangle \tag{5.51}$$

onde α_k é um número complexo arbitrário. Esses são autoestados do operador $b_k(t)$,

$$b_k|\alpha_k, t\rangle = \alpha_k(t)|\alpha_k, t\rangle, \tag{5.52}$$

com os autovalores $\alpha_k(t)$ dados por

$$\alpha_k(t) = \alpha_k e^{2i\beta_0 t}, \tag{5.53}$$

onde

$$\beta_0(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{a^3(\tau)\rho_k^2(\tau)}d\tau. \tag{5.54}$$

As flutuações quânticas de ϕ_k e π_k nos estados coerentes $|\alpha_k, t\rangle$ são

$$\langle(\Delta\phi_k)^2\rangle = \langle\phi_k^2\rangle - \langle\phi_k\rangle^2 = \frac{\hbar}{2}\rho_k^2, \tag{5.55}$$

$$\langle(\Delta\pi_k)^2\rangle = \langle\pi_k^2\rangle - \langle\pi_k\rangle^2 = \frac{\hbar}{2}\left[\frac{1}{\rho_k^2} + \left(a^3\dot{\rho}_k\right)^2\right], \tag{5.56}$$

logo, a relação de incerteza fica

$$\Delta\phi_k\Delta\pi_k = \frac{\hbar}{2}\left[1 + (a^3\rho_k\dot{\rho}_k)^2\right]^{1/2}. \tag{5.57}$$

Nota-se que esses estados não são os de mínima incerteza para as flutuações quânticas do campo escalar, tais estados são os estados comprimidos. Por último, vale a ressalva de que é possível depreender esses mesmos resultados para as ondas eletromagnéticas seguindo a analogia que verificamos e foi comentada na segunda seção.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Concluímos este trabalho com resultados satisfários de uma ampla pesquisa teórica, a qual resultou em artigos publicados em revistas internacionais. Destes artigos, dois deram origem aos capítulos 4 e 5, respectivamente, sobre a evolução temporal adiabática e não adiabática da propagação de uma onda eletromagnética em uma meio linear dependente do tempo [88] e o outro sobre luz em um meio dielétrico e campo escalar no espaço-tempo de de Sitter [101]. Vale ressaltar que o capítulo também baseia-se em um manuscrito submetido para publicação. Ou seja, esses resultados revela as contribuições da pesquisa realizada para o desenvolvimento do tema desta tese. Além disso, abordagem empregada possui solução geral para o campo eletromagnético em um meio homogêneo, linear e dependente do tempo com resposta linear que pode ser diretamente utilizado em trabalhos futuros.

Em nosso estudo sobre método de invariante dinâmico de Lewis e Riesenfeld investigamos um ampla variedade de artigos sobre o tema em diversas áreas da física. Em especial, estudamos oscilações que representa um assunto de muito interesse devido este ser um movimento predominante na natureza. Além disso, o campo eletromagnético tem uma função ão muito importante nos processos da natureza (eletromagnetismo, formação de átomos, moléculas etc) e se propaga por todo o espaço. O qual vimos como uma onda oscilatória que pode ser entendida como osciladores, movimento harmônico. Finalmente, nota-se que no formalismo utilizado aqui para um meio material a permissividade elétrica equivale a massa de um oscilador, uma vez que esse meio também possui condutividade, temos um oscilador harmônico com massa dependente do tempo.

No capítulo 3 analisamos o comportamento clássico e quântico da propagação de uma onda eletromagnética em uma cavidade preenchida com matéria, onde consideramos esse meio como sendo homogêneo, isotrópico e linear, com propriedades dependentes do tempo. Usando o calibre de Coulomb e condições periódicas de contorno mostramos que os modos do campo eletromagnético são osciladores harmônicos amortecidos. Considerando que as propriedades do meio variam exponencialmente a uma taxa constante, encontramos que a velocidade da luz nesse meio não muda com o tempo e que a frequência também é constante. Então, usando o método do invariante construímos os operadores de criação e aniquilação e usamos o espaço de Fock para encontrar a solução da equação de Schrödinger associada a nosso problema. Vimos que devido a dependência temporal da permissividade, as amplitudes dos campos sofrem atenuações, bem como da condutividade. Na ausência de dissipação $\eta + \gamma = 0$, nosso resultado reproduz os caso trivial de uma cavidade vazia.

No capítulo 4 apresentamos uma abordagem mais elegante para estudar a evolução adiabática e não adiabática da propagação da luz no regime clássico e quântico usando o calibre de Coulomb e condições periódicas de contorno. Assumimos que o permissidade e permeabilidade variam assincronamente, e, juntamente com a condutividade, elas variam exponencialmente no tempo com uma taxa constante. Com isso, encontramos soluções exatas para nosso problema. Além disso, unificamos o processo de adiabático e não adiabático no contexto clássico e quântico usando os invariantes dinâmicos. Fizemos uma conexão direta entre a fase de Berry e o ângulo de Hannay. A partir dos invariantes encontramos os estados de Fock, a evolução temporal e construímos estados coerentes. Calculamos as flutuações quânticas e encontramos a relação de incerteza. Analisamos também o caso limite para permissividade e permeabilidade constantes e condutividade nula os resultados se reduzem aqueles de uma cavidade simples (propriedades constante) discutida no livro texto de óptica **??**.

No capítulo 5 analisamos o comportamento da propagação luz em meio dielétrico com permissividade crescendo exponencialmente e a propagação de um campo escalar no espaço-tempo de de Sitter. Notamos que esses dois sistemas físicos exibem a mesma a estrutura matemática para a amplitude e podem ser descritos por hamiltonianos similares. Além disso, notamos que o espaço-tempo de de Sitter equivale a um meio dielétrico dependente do tempo para a propagação do campo escalar. Sendo assim, usando o método do invariante construímos os operadores de criação e aniquilação e o estados do espaço de Fock, resolvemos, então, a equação de Schrödinger associada a dinâmica quântica do campo escalar neste espaço-tempo e escrevemos as soluções em termos da soluções da equação não linear de Milne-Pinney. Construímos os estados coerentes e calculamos as flutuações quânticas para a amplitude dos modos e para o momento, bem como a relação de incerteza.

A perspectiva é que este trabalho possa ajudar estudos futuros sobre a propagação de ondas em meios materiais com parâmetros que depende explicitamente do tempo. Em nossa abordagem consideramos que as propriedades ópticas são funções reais do tempo. No entento, essas podem ser funções complexas e isto acarreta em um hamiltoniano não hermitiano. Por outro lado, sistemas que não apresentam hermiticidade têm sido estudados amplamente desde de o seminal trabalho de Bender sobre espectro real de energia para hamiltonianos não hermitianos [59]. Nos quais realidade dos autovalores do operador é garantida pela simetria de paridade (inversão espacial) e reversão temporal [60]. Portanto, trabalhos futuros podem ser feito em continuidade com a nossa abordagem.

As interações eletromagnéticas entre os constituintes da matéria produzem fenômenos emergentes de grande interesse da ciência. Um desses efeitos que podemos destacar é que a força de ligação entre os átomos e moléculas, que podem ser aproximadamente forças elásticas, isto é, o arranjo dessas partículas pode ser visto como um conjunto de osciladores acoplados. Uma perturbação nessa rede se propaga como uma onda mecânica que pode ser decomposta em modos. No processo de quantização dessas ondas elásticas surgem as quasi-partículas chamadas de fônons [6]. Na nossa abordagem vimos os fótons como osciladores não interagentes e estudamos a fase adiabática e não adiabática. Portanto, podemos usar essa abordagem para o estudo dos fônons. Bem como para os mágnons, que são vibrações na rede de spin. Podemos investigar propriedades dinâmicas de sistemas de muitas partículas partículas em nível microscópico, com uma abordagem da mecânica quântica. Portanto, é possível investigar quantidades experimentalmente relevantes como seção de choque em espalhamentos inelásticos e suscetibilidade dinâmica, que descrevem a resposta do sistema a campos dependentes do tempo, isto em termos de entidades microscópicas tal como função de correlação dinâmica.

Esperamos que esta tese possa contribuir para estudos da inflação do universo, uma vez que, a decomposição de um campo massivo em modos resulta em osciladores dependentes do tempo para as amplitudes dos modos, devido à métrica possuir um fator de escala dependente do tempo. Em uma análise feita com um condensado de Bose-Einstein e com o comportamento do campo escalar de fundo, verificou-se uma correspondência entre as duas abordagem por meio da equação de Ermakov/Milne-Pinney [105].

Apêndice A

Aproximação adiabática

Considere que para um hamiltoniano $H(t)$ a sequinte equação é satisfeita,

$$H(t)|n;t\rangle = E_n(t)|n;t\rangle, \tag{A.1}$$

note que os autovalores e estados pode variar com tempo t. Mas, o objetivo é encontrar a solução da equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi;t\rangle = H(t)|\Psi;t\rangle, \tag{A.2}$$

porém, é possível fazer

$$|\Psi;t\rangle = \sum_n c_n(t)e^{i\theta_n(t)}|n;t\rangle, \quad \text{onde} \quad \theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')dt'. \tag{A.3}$$

Substituindo essa proposta na equação resulta

$$\sum_n e^{i\theta_n(t)}\left[\dot{c}_n(t)|n;t\rangle + c_n(t)\frac{\partial}{\partial t}|n;t\rangle\right] = 0. \tag{A.4}$$

Agora, aplicando $\langle m;t|$ neste resultado e considerando que os autoestados são ortonormais, produz

$$\dot{c}_n(t) = -\sum_n c_n(t)e^{i(\theta_n(t)-\theta_m(t)}\langle m;t|\left[\frac{\partial}{\partial t}|n;t\rangle\right]. \tag{A.5}$$

Observe que, a priori, uma quantidade desconhecida apareceu. Caso H fosse independente do tempo, os autoestados seria estados estacionários. Tomando a derivada temporal da equação de autovalor, obtem-se

$$\langle m;t|\dot{H}|n;t\rangle = [E_n(t) - E_m(t)]\langle m;t|\left[\frac{\partial}{\partial t}|n;t\rangle\right]. \tag{A.6}$$

Que resulta para equação dos coeficientes

$$\dot{c}_n(t) = -c_n(t)\langle n;t| \left[\frac{\partial}{\partial t}|n;t\rangle \right] - \sum_n c_n(t) e^{i(\theta_n(t)-\theta_m(t)} \frac{\langle m;t|\dot{H}|n;t\rangle}{E_n - E_m}. \tag{A.7}$$

que é uma solução real para o problema não estacionário. A medida que o tempo passa inferisse desta equação o estados m e n se misturam devido o segundo termo devido a dependência temporal do hamiltoniano.

Fazer a aproximação adiabática implica em desprezar o segundo termo, pois a escala de tempo τ para que haja mudanças no hamiltoniano deve ser muito grande se comparada com o tempo, inverso da frequência, do fator de fase do estado; onde $E_n - E_m = \hbar\omega_{nm}$, logo, o tempo do fator de fase é $2\pi/\omega_{nm}$. Portanto, tem-se

$$\frac{\langle m;t|\dot{H}|n;t\rangle}{E_n - E_m} = \frac{1}{\tau} \ll \langle n;t| \left[\frac{\partial}{\partial t}|n;t\rangle \right] \backsim \frac{E_m}{\hbar}. \tag{A.8}$$

Desse modo, tem-se

$$\dot{c}_n(t) \cong -c_n(t)\langle n;t| \left[\frac{\partial}{\partial t}|n;t\rangle \right]$$

$$c_n(t) = c_(0) e^{i\gamma_n(t)} \tag{A.9}$$

onde

$$\gamma_n(t) \equiv i \int_0^t \langle n;t| \left[\frac{\partial}{\partial t}|n;t\rangle \right] \tag{A.10}$$

Por definição, $\gamma_n(t)$ é real, donde

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n;t|n;t\rangle = \left[\frac{\partial}{\partial t}\langle n;t| \right] |n;t\rangle + \langle n;t| \left[\frac{\partial}{\partial t}|n;t\rangle \right] = 0 \tag{A.11}$$

ou seja,

$$\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}\langle n;t| \right] |n;t\rangle \right)^* = -\langle n;t| \left[\frac{\partial}{\partial t}|n;t\rangle \right] \tag{A.12}$$

Portanto, a adição da fase $\gamma_n(t)$ é resultado da aproximação adiabática.

Apêndice B

Fase geométrica

Seja a dependência temporal de $H(t)$ representada por um parâmetro $\vec{R}(t)$, ou seja, deve haver um espaço no qual as componentes desse vetor especificam o hamiltoniano. Então, $E_n(t) = E_n(\vec{R}(t))$ e $|n;t\rangle = |n(\vec{R}(t))\rangle$, logo,

$$\langle n;t| \left[\frac{\partial}{\partial t} |n;t\rangle \right] = \langle n;t|\vec{\nabla}_{\vec{R}}|n;t\rangle \cdot \frac{d\vec{R}}{dt} \tag{B.1}$$

onde $\vec{\nabla}_{\vec{R}}$ é o gradiente no espaço de $\vec{R}$. A fase geométrica, então, é

$$\gamma_n(T) = i \int_0^T \langle n;t|\vec{\nabla}_{\vec{R}}|n;t\rangle \cdot \frac{d\vec{R}}{dt} dt$$

$$\gamma_n(T) = i \int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(T)} \langle n;t|\vec{\nabla}_{\vec{R}}|n;t\rangle \cdot d\vec{R}. \tag{B.2}$$

Para a situação em que T representa um ciclo completo, tal que $\vec{R}(T) = \vec{R}(0)$, ou seja, $\vec{R}$ percorre um ciclo completo C, a fase geométrica fica

$$\gamma_n(C) = i \oint \langle n;t|\vec{\nabla}_{\vec{R}}|n;t\rangle \cdot d\vec{R}. \tag{B.3}$$

Apêndice C

Estados coerentes

Estados coerentes são autoestados do operador aniquilação

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{C.1}$$

Esses estados podem ser expressos como uma combinação linear dos autoestados do operador de ocupação (número),

$$|\alpha\rangle = \sum c_n|n\rangle, \tag{C.2}$$

onde

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{e} \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \tag{C.3}$$

talque,

$$a|0\rangle = 0 \quad \text{e} \quad |n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \tag{C.4}$$

De fato, verifica-se,

$$a|\alpha\rangle = \sum c_n a|n\rangle = \sum c_n\sqrt{n}|n-1\rangle = \sum c_{n+1}\sqrt{n+1}|n\rangle, \tag{C.5}$$

$$a|\alpha\rangle = \alpha\sum c_n|n\rangle = \sum \alpha c_n|n\rangle, \tag{C.6}$$

logo,

$$\alpha c_n = c_{n+1}\sqrt{n+1} \quad \Rightarrow \quad c_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}c_n, \tag{C.7}$$

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0. \tag{C.8}$$

Então,

$$|\alpha\rangle = c_0\sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \tag{C.9}$$

Normaizando, encontra-se

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = c_0^* c_0 \sum \frac{(\alpha^*)^{n'}}{\sqrt{n'!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle n'|n\rangle \tag{C.10}$$

$$|c_0|^2 \sum \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} = 1 \tag{C.11}$$

$$|c_0|^2 \mathrm{e}^{|\alpha|^2} = 1 \tag{C.12}$$

$$c_0 = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \tag{C.13}$$

Então,

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \tag{C.14}$$

ou

$$|\varphi_\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle \tag{C.15}$$

Esses estados também podem serem escritos em termos de uma operador espaçamento atuando no estado de vácuo, dado por

$$D(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}. \tag{C.16}$$

De fato, tem-se

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle, \tag{C.17}$$

usando

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B \mathrm{e}^{-[A,B]/2} ... \tag{C.18}$$

$$D(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger} \mathrm{e}^{-\alpha^* a} \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} ... \tag{C.19}$$

Que resulta em

$$D(\alpha)|0\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger} \mathrm{e}^{-\alpha^* a}|0\rangle \tag{C.20}$$

$$D(\alpha)|0\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger}|0\rangle \tag{C.21}$$

$$D(\alpha)|0\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \sum \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!}|0\rangle \tag{C.22}$$

$$D(\alpha)|0\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \tag{C.23}$$

que é o resultado obtido anteriormente.

Uma vez que esses estados satisfazem a equação de Schrödinger,

$$H(t)|\psi_\alpha(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial|\psi_\alpha(t)\rangle}{\partial t} \tag{C.24}$$

Logo,

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi_\alpha(t_0\rangle; \quad U(t,t_0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')dt'\right\} \tag{C.25}$$

No caso de um oscilador com frequência constante, prodruz

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = \mathrm{e}^{-iH(t-t_0)/\hbar}|\psi_\alpha(t_0\rangle \tag{C.26}$$

$$|\alpha,t\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{-i\omega_0(n+1/2)t}|n\rangle, \tag{C.27}$$

Então,

$$a|\alpha,t\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{-i\omega_0(n+1/2)t}\sqrt{n}|n-1\rangle. \tag{C.28}$$

$$a|\alpha,t\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n(n-1)!}}\mathrm{e}^{-i\omega_0(n+1/2)t}\sqrt{n}|n-1\rangle. \tag{C.29}$$

$$a|\alpha,t\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n'+1}}{\sqrt{n'!}}\mathrm{e}^{-i\omega_0(n'+1+1/2)t}|n'\rangle. \tag{C.30}$$

$$a|\alpha,t\rangle = \alpha\mathrm{e}^{-i\omega_0 t/}\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{-i\omega_0(n+1/2)t}|n\rangle. \tag{C.31}$$

$$a|\alpha,t\rangle = \alpha\mathrm{e}^{-i\omega_0 t/}|\alpha,t\rangle. \tag{C.32}$$

um resultado útil é

$$\langle\alpha,t|a|\alpha,t\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{(\alpha^*)^{n'}}{\sqrt{n'!}}\mathrm{e}^{i\omega_0(n'+1/2)t}\langle n'|\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{-i\omega_0(n+1/2)t}\sqrt{n}|n-1\rangle, \tag{C.33}$$

$$\langle\alpha,t|a|\alpha,t\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\sum_{n,n'=0}^{\infty}\frac{(\alpha^*)^{n'}}{\sqrt{n'!}}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{i\omega_0(n'-n)t}\langle n'|n-1\rangle\sqrt{n}, \tag{C.34}$$

$$\langle\alpha,t|a|\alpha,t\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha^*)^{(n-1)}}{\sqrt{(n-1)!}}\frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}}\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}, \tag{C.35}$$

$$\langle\alpha,t|a|\alpha,t\rangle = \alpha\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^*\alpha)^n}{n!} \tag{C.36}$$

$$\langle\alpha,t|a|\alpha,t\rangle = \alpha\mathrm{e}^{-i\omega_0 t} \tag{C.37}$$

e

$$\langle\alpha,t|a^\dagger|\alpha,t\rangle = \alpha^*\mathrm{e}^{i\omega_0 t} \tag{C.38}$$

Do hamiltoniano de oscilador, tem-se

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = \hbar\omega_0\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{C.39}$$

onde

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}}\left(ip + m\omega_0 x\right) \quad \text{e} \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}}\left(-ip + m\omega_0 x\right) \tag{C.40}$$

talque, $[x,p] = i\hbar$ é equivalente à $[a,a^\dagger] = 1$. Assim, onvertendo as expressões acimas,

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(a + a^\dagger) \quad \text{e} \quad p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}(a - a^\dagger) \tag{C.41}$$

Verifica-se que os valores esperados da posição e momentum no estado coerente são:

$$\langle \alpha, t|x|\alpha, t\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(\alpha \mathrm{e}^{-i\omega_0 t} + \alpha^* \mathrm{e}^{i\omega_0 t}\right) \tag{C.42}$$

$$\langle x\rangle_{\alpha,t} = \sqrt{\frac{\hbar|\alpha|^2}{2m\omega_0}}\cos(\omega_0 t + \delta_0), \tag{C.43}$$

e

$$\langle \alpha, t|p|\alpha, t\rangle = -\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}\left(\alpha \mathrm{e}^{-i\omega_0 t} - \alpha^* \mathrm{e}^{i\omega_0 t}\right) \tag{C.44}$$

$$\langle p\rangle_{\alpha,t} = -\sqrt{2\hbar m\omega_0|\alpha|^2}\sin(\omega_0 t + \delta_0), \tag{C.45}$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}; \alpha = u + iv = |\alpha|\mathrm{e}^{-i\delta_0}$.

Referências Bibliográficas

[1] PLANCK, M. **On the law of the energy distribution in the normal spectrum** Ann. Phys. 1901 4 553.

[2] EINSTEIN, A. **On the quantum theory of radiation** Physik. Z. 1917 18 121

[3] BENNETT, R.; BARLOW, T. M. and LEIGE, A. **A physically motivated quantization of the electromagnetic field** Eur. J. Phys. 37 (2016) 014001 (11pp).

[4] DIRAC, P. A. M. **The quantum theory of the emission and absorption of radiation** Proc. R. Soc. 1927 114 243.

[5] PEREIRA, R. G. e MIRANDA, E. **Introdução da Teoria Quântica de Campos: do Oscilador Harmônico ao Campo Escalar Livre**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 24, no. 2, Junho, 2002.

[6] SCHWABL, F. **Advanced Quantum Mechanics**. 3ª ed, Springer, Berlin, 2005.

[7] CARUSO, F.; OGURI, V. **Física Moderna**: origens clássicas e fundamentos quânticos. 1ª ed. Rio de Janeiro, RJ: Campus, 2006.

[8] SCHRÖDINGER, E. **Quantisierung als Eigenwertproblem** (Erste Mitteilung). Ann. Phys. 79, 361 (1926).

[9] HEISENBERG, W. **Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen**. Z. Phys. 33, 879–893 (1925).

[10] SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Mecânica Quântica Moderna**. Tradução Técnica: Sílvio Renato Dahmen. 2ª. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2013. 547 p. v. único.

[11] GASIOROWICZ, Stephen. **Quantum Physics**. 3ª. ed. Jhon Wiley & Sons, New Jersey, INC, 2003. v. único.

[12] MESSIAH, Albert. **Quantum Mechanics**: Two Volumes Bound as One. 1ª. ed. Mineola, New York: Dover Publications, INC, 1999. 1136 p. v. único.

[13] SHANKAR, Ramamurti. **Principles of Quantum Mechanics**. 2ª ed. Springer. 1994.

[14] LEWIS, H. R. JR. **Class of exact invariants for classical and quantum time-dependent harmonic oscillators**. J. Math. Phys. 9, 1968. 1976-1986 p.

[15] LEWIS, H. R. Jr.; RIESENFELD, W. B. **An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent eletromagnetic field**. J. Math. Phys. 10, 1969. 1458-1473 p.

[16] PEDROSA, I. A.; BEZERRA, V. B. **On the existence of squeezed states in an anisotropic universe**. Mod. Phys. Lett. A 12, 1997, p.1111-1118.

[17] CHOI, J. R. **An approach to dark energy problem through linear invariant**. Chinese Physics C, 35(3), 2011, p.233-242.

[18] GAO, X. C.; FU, J.; XU, J.; ZOU, X. **Invariant theory and exact solutions for the quantum Dirac field in a time-dependent spatially homogeneous electric field**. Phys. Rev. A 59, 1999, p.55-63.

[19] GAO, X. C.; FU, J.; LI, H.; GAO, J. **Invariant formulation and exact solutions for the relativistic charged Klein-Gordon field in a time-dependent spatially homogeneous electric field**. Phys. Rev. A 57, 1998, p.753-761.

[20] BERTONI, C.; FINELLI, F.; VENTURI, G. **Adiabatic invariants and scalar fields in a de Sitter space-time**. Phys. Lett. A 237, 1998, p.331-336.

[21] ROGERS, C.; SCHIEF, W. K. **Multi-component Ermakov systems: structure and linearization**. J. Math. Anal. Appl. 198, 1996, p.194-220.

[22] ERMAKOV, V. P. **Second-order differential equations: conditions of complete integrability**. Univ. Jzv. Kiev 20, No 9, 1–25 (1880); A.O. Harin (English translation), Appl. Anal. Discrete Math. 2, 123–145 (2008).

[23] PEDROSA, I. A. **Canonical transformations and exact invariants for dissipative systems**. J. Math. Phys. 28, 1987, p.2662.

[24] CONCHARENKO, A. M. *et al* **Ermakov hamiltonians systems in nonlinear optics of elliptic Gaussian beams**. Phys. Lett. A 160, 1991, p.138-142

[25] ROGERS, C. *et al* **Ermakov–Ray–Reid systems in nonlinear optics**. J. Phys. A, 2010.

[26] CHOI, J. R. **Quantum state of pendulum under exponentially increasing gravitation**. Physics A 310, 2002, p.109-120.

[27] HARTLEY, J. G; RAY, J. R. **Ermakov systems and quantum-mechanical superposition laws**. Phys. Rev. A 24, 1981, p.2873-2876.

[28] HARTLEY, J. G; RAY, J. R. **Solutions to the time-dependent Schrödinger equation**. Phys. Rev. A 25, 1982, p.2388-2390.

[29] HARTLEY, J. G; RAY, J. R. **Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator**. Phys. Rev. D 25, 1982, p.382-386.

[30] RAY, J. R. **Minimum-uncertainty coherent states for certain time dependent systems**. Phys. Rev. D 25, 1982, p.3417-3419.

[31] SHEN. J. Q. **The Connection Between Density Matrix Method, Supersymmetric Quantum Mechanics and Lewis-Riesenfeld Invariant Theory**, 2003 (Arxiv)

[32] PEDROSA, I. A. **Coherent states for certain time-dependent systems**. Rev. Bras. Fís. 19, 1989, p.502-515.

[33] PEDROSA, I. A. **Exact wave functions of a harmonic oscillator with time dependent mass and frequency**. Phys. Rev. A 55, 1997, p.3219-3221.

[34] LIMA, A. L.; ROSAS, A.; PEDROSA, I. A. **On the quantum motion of a generalized time-dependent forced harmonic oscillator**. Annals of Physics 323, 2008, p.2253-2264.

[35] PEDROSA, I. A. **Complete exact quantum states of the generalized time-dependent harmonic oscillator**. Mod. Phys. Lett. B 18, 2004, p.1267-1274.

[36] PEDROSA, I. A.; ROSAS, A. **Electromagnetic Field Quantization in Time-Dependent Linear Media**. Phys. Rev. Lett. 103, 2009, 010402.

[37] GUEDES, I. **Solution of the Schrödinger equation for the time-dependent linear potencial**. Phys. Rev. A 63, 2001, art. 034102.

[38] SHEN, J. Q. **Solution of the Schrödinger equation for the time-dependent linear potencial**. Arxiv, 2003.

[39] ZASEDALETEV, A. V. et al. **A room-temperature organic polariton transistor**. Nature Photonics. 13, 378–383 (2019).

[40] ZASEDALETEV, A. V. et al. **Single-photon nonlinearity at room temperature** Nature volume 597, pages 493–497 (2021).

[41] LOUISELL, H. W. **Quantum Statistical Properties of Radiation**. Jhon Wiley & Sons, New Jersey, INC, 1973. v. único.

[42] WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. **Quantum Optics**. 1ª. ed. Springer, Berlin, 1995. v. único.

[43] GLAUBER, R. J. **Nobel Lecture: One hundred years of light quanta**. Reviews of Modern Physics 78 (2006) 1267.

[44] GLAUBER, R.J. **The quantum theory of optical coherence**. Phys. Rev. 130, 2529 (1963)

[45] GLAUBER, R. J. and LEWENSTEIN, M. **Quantum optics of dielectric media** Phys. Rev. A 43 467, 1991.

[46] MATLOOB, R. **Electromagnetic field quantization in a linear isotropic dielectric** Phys. Rev. A 69, 052110 (2004)

[47] MATLOOB, R. **Electromagnetic field quantization in a linear isotropic permeable dielectric medium**. Phys. Rev. A 70, 022108 (2004)

[48] CHOI, J. R. **The quantum description of the eletromagnetic waves in homogeneous conducting linear media**. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 5, 2003, p.409-413.

[49] LIMA, A; ROSAS, A and PEDROSA, I. A. **On the quantum description of light in homogeneous conducting linear media**. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 41 (2008) 115503 (5pp)

[50] CHOI, J. R. and YEON, K. H. **Quantum properties of light in linear media with time-dependent parameters by Lewis-Riesenfeld invariant operator method** International Journal of Modern Physics B Vol. 19, No. 14 (2005) 2213-2224

[51] BUDKO, N. V. **Electromagnetic radiation in a time-varying background medium** Phys. Rev. A 80, 053817 (2009).

[52] YING, Z. and BEN-QING, G. **Propagation of Cylindrical Waves in Media of Time-Dependent Permittivity** Chin. Phys. Lett., Vol. 22 Issue (2): 446-449, 2005.

[53] YABLONOVITCH, E. **Accelerating reference frame for electromagnetic waves in a rapidly growing plasma: Unruh-Davies-Fulling-DeWitt radiation and the nonadiabatic Casimir effect**. Phys. Rev. Lett. 62, 1742 (1989).

[54] CRISPINO, L. C. B. HIGUCHI, A. and MATSAS, G. E. A. **The Unruh effect and its applications**. Rev. Mod. Phys. 80, 787 (2008).

[55] YUCE, C. and OZCAKMAKLI, Z. **Dynamical Casimir effect for a swinging cavity** J. Phys. A 42, 035403 (2009).

[56] CHEN, D. et at **An Improved Energy Transport Model Including Nonparabolicity and Non-Maxwellian Distribution Effects**. IEEE ELECTRON DEVICE LETTERS, VOL. 13, NO. I , JANUARY 1992.

[57] TANG S. Q. and ZHANG, D. P. **Pseudo-Hydrodynamic Approximation for Transient Computation of Energy-Transport Models in Semiconductors**. CHIN.PHYS.LETT. Vol. 22, No. 10 (2005) 2633.

[58] GOLDSTEIN, H. **Classical mechanics**. 2ª ed. California: Addison-Wesley Publishing Company, 1980.

[59] BENDER, C. M. and BOETTCHER, S. **Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT Symmetry**. Phys. Rev. Lett. 80, 5243 (1998).

[60] BENDER, C. M. **PT symmetry in quantum and classical physics**. World Scientific, London, 2018.

[61] BERRY, M. V. **Quantal phase factors accompanying adiabatic changes**, Proc. R. Soc. Lond. A 392 (1984) 45–57.

[62] MONTEOLIVA, D. B.; KORSCHT, H. J. and NGEZ, J. A. **On geometric phases and dynamical invariants** J. Phys. A. Math. Gen. 27 (1994) 6897-6906.

[63] XIAO-CHUN, G.; JING-BO, X. and TIE-ZHENG, Q. **The Exact Solution for the Generalized Time-Dependent Harmonic Oscillator and Its Adiabatic Limit**. ANNALS OF PHYSICS 204, 235-243 (1990).

[64] MAAMACHE, M.; PROSVOST, J. -P. and VALL´EE, G. **Unitary equivalence and phase properties of the quantum parametric and generalized harmonic oscillators**. Phys. Rev. A 59, 1777 (1999).

[65] WEIDERPASS, G. A. and CALDEIRA, A. O. **Von Neumann entropy and entropy production of a damped harmonic oscillator** Phys. Rev. E 102, 032102 (2020).

[66] KIM, S. P. and PAGE, D. N. **Exact quantum-statistical dynamics of time-dependent generalired oscillators** Phys. Lett. B 723, 393-396 (2013).

[67] PEDROSA, I. A.; MELO, J. L. and SALATIEL, S. **Quantization, coherent states and geometric phases of a generalized nonstationary mesoscopic RLC circuit** Eur. Phys. J. B 87, 269 (2014).

[68] MILNE, W. E. **The numerical determination of characteristic numbers**. Phys. Rev. 35, 863–867 (1930).

[69] PINNEY, E. **The nonlinear differential equation**. Proc. Amer. Math. Soc. 1, 681 (1950).

[70] SHULCH, D. **Quamtum theory from a nonlinear perspective: Riccati equations in fundamental physics**. Springer Nature, 2018.

[71] SCHRÖDINGER, E. **Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik**. Naturwissenschaften 14, 664–666 (1926)

[72] JACKSON, D. **Eletrodinâmica clássica**. 2ª ed. York: John Wiley and Sons, 1975.

[73] AGUIAR, V. and GUEDES, I. **Osciladores harmônicos amortecidos dependentes do tempo**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 35, n. 4, 4311 (2013).

[74] LEMOS, N. A. **Canonical approach to the damped harmonic oscillator**. Am. J. Phys. 47, 857 (1979).

[75] PEDROSA, I. A. **Quantum Light and Coherent States in Conducting Media**. J. Appl. Math. Phys. 8, 2475 (2020).

[76] ALSING, P. M.: DOWLING, J. P. and MILBURN, G. J. **Ion Trap Simulations of Quantum Fields in an Expanding Universe**. Phys. Rev. Lett. 94, 220401 (2005).

[77] MENNICUCCI, N. C. and MILBURN, G. J. **Single trapped ion as a time-dependent harmonic oscillator**. Phys. Rev. A 76, 052105 (2007).

[78] COLEGRAVE, R. K. and ADBDALLA, M. S. **A Canonical Description of the Fabry-pérot Cavity Optica** Acta 28, 495 (1981).

[79] COLEGRAVE, R. K. and ABDALLA, M. S. **Field Fluctuations in a Fabry-Pérot Cavity in Resonance with a Reservoir of Two-level Atoms: I. Adiabatic fluctuations** Optica Acta 30, 849 (1983).

[80] FINELLI, F.; GRUPPUSO, A. and VENTURI, G. **Quantum fields in an expanding universe**. Class. Quantum Grav. 16, 3923 (1999).

[81] PEDROSA, I. A.; FURTADO, C. and ROSAS, A. **Light propagation: From dielectrics to curved spacetimes** EPL 94, 30002 (2011).

[82] PEDROSA, I. A.; MELO, J. L. and NOGUEIRA JR., E. **Linear invariants and the quantum dynamics of a nonstationary mesoscopic RLC circuit with a source** Mod. Phys. Lett. B28, 1450212 (2014).

[83] CALDIROLA, P. **Forza non conservative nella meccanica quantistica**. Nuovo Cimento 18, 1941, p.393.

[84] CALDIROLA, P. **Quantum theory of nonconservative systems**. Nuovo Cimento 77B, 1983, p.241-261.

[85] KANAI, E. **On the quantization of the dissipative systems**. Prog. Theor. Phys. 3, 1948, p.440-442.

[86] NIETO, M. M. and SIMMONS JR, L. M. **Coherent states for general potentials. I. Formalism**. Phys. Rev. D20, 1321 (1979).

[87] WALLS, D. F. **Squeezed states of light**. Nature, vol. 306, p. 141–146, (1983).

[88] PEDROSA, I. A. and RAMOS, B. F. **Adiabatic e nonadiabatic evolution of eletromagnetic waves propagating in time-depedent linear media** Eur. Phys. J. D, 75, 258, 2021.

[89] HANNAY, J. H. **Angle variable holonomy in adiabatic excursion of an integrable Hamiltonian**. J. Phys. A: Math. Gen. 18 (1985) 221–230.

[90] BERRY, M V and HANNAY, J. H. **Classical non-adiabatic angles**. J . Phys. A: Math. Gen. 21 (1988) L325-L331.

[91] BHATTACHARJEE, A. and TANAJI, S. **Geometric angles in cyclic evolutions of a classical system**. Phys. Rev. A, vol. 38, n 9. 1988.

[92] LAKAHAL, H.; MAAMACHE, M. and CHOI, J. R. **Novel quantum description for nonadiabatic evolution of light wave propagation in time-dependent linear media** Sci rep (2016)

[93] MAAMACHE, M.; CHAABI, N. and CHOI, J. R. **Geometric phase of quantized electromagnetic field in time-dependent linear media**. EPL 89, 40009 (2010)

[94] USATENKO, O. V.; PROVOST, J. -P. and VALL´EE, G. **A comparative study of the Hannay's angles associated with a damped harmonic oscillator and a generalized harmonic oscillator**. J. Phys. A: Math. Gen. 29, 2607 (1996)

[95] LEWIS, H.R. LEACH, P. G. L. **A direct approach to finding exact invariants for one-dimensional time-dependent classical Hamiltonians** J. Math. Phys. 23, 2371 (1982)

[96] SCHIEF, W. K. **A Discrete Pinney Equation**. Applied Mathematics Letters, 10, 13, 1997.

[97] PEDROSA, I. A.; SERRA, G.P. and GUEDES, I. **Wave functions of a time-dependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation**. Phys. Rev. A 56, 4300 (1997)

[98] YUEN, H. P. **Two-photon coherent states of the radiation field** Phys. Rev. A 13, 2226 (1976) D. F. Walls, Nature 306, 141 (1983.

[99] PEDROSA, I. A. **Time dependent harmonic oscillators and squeezed states** Hadronic J. 9, 173 (1986)

[100] PEDROSA, I. A. **Comment on "Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator"** Phys. Rev. D 36, 1279 (1987).

[101] PEDROSA,I. A.; RAMOS, B. F. e BAKKE, K. **Light in dieletric media and scalar fields in a de Sitter spacetime** Eur. Phys. J. C, 81, 703, 2021.

[102] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. and PITAEVSKII, L. P. **Electrodynamics of Continuous Media** (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1998), 2nd ed.

[103] CARROL, S. **SPACETIME AND GOEMETRY: an introduction to General Relativity**. Addison Wesley, San Francisco, 2004.

[104] LOPES, C. E. F.; PEDROSA, I. A.; FURTADO, C. and CARVALHO, A. M. M. **Gaussian wave packet states of scalar fields in a universe of de Sitter** J. Math. Phys. 50, 083511 (2009)

[105] LIDSEY, J. E. **Cosmic dynamics of Bose–Einstein condensates**. Class. Quantum Grav. 21, 777 (2004)