



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**RAYANNE MOREIRA MATIAS**

**UMA ABORDAGEM DA GRAVIDADE ENTRÓPICA NA COSMOLOGIA**

**JOÃO PESSOA**

**2022**

RAYANNE MOREIRA MATIAS

UMA ABORDAGEM DA GRAVIDADE ENTRÓPICA NA COSMOLOGIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física de Partículas.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito.

Coorientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

M434a Rayanne Moreira Matias.

Uma abordagem da gravidade entrópica na cosmologia /  
Rayanne Moreira Matias. - João Pessoa, 2022.

61 f. : il.

Orientação: Francisco de Assis de Brito.

Coorientação: Carlos Alberto Santos de Almeida.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Gravidade entrópica. 2. Termodinâmica. 3. Matéria  
escura. 4. Cosmologia. I. Brito, Francisco de Assis de.  
II. Almeida, Carlos Alberto Santos de. III. Título.

UFPB/BC

CDU 531.5(043)

RAYANNE MOREIRA MATIAS

UMA ABORDAGEM DA GRAVIDADE ENTRÓPICA NA COSMOLOGIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física de Partículas.

Aprovada em 30/09/2022.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito (Orientador)  
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

---

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra)  
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

---

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos  
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

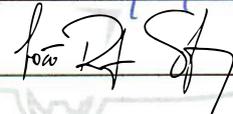
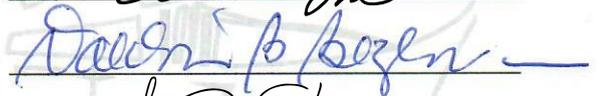
Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** da aluna **Rayanne Moreira Matias**, candidata ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Física de Partículas Elementares e Campos.

Aos trinta dias do mês de setembro de dois mil e vinte e dois, às 14:00, nas dependências do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a dissertação de Mestrado, na área de Física de Partículas Elementares e Campos, de **Rayanne Moreira Matias**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Francisco de Assis de Brito (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Valdir Barbosa Bezerra (UFPB), João Rafael Lúcio dos Santos (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Francisco de Assis de Brito comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para a candidata para que a mesma fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de dissertação intitulada “*Uma abordagem da Gravitação Entrópica na Cosmologia*”. Concluída a exposição, a candidata foi argüida pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovada**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, 30 de setembro de 2022.

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
*Orientador – UFPB*

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra  
*Membro Interno – UFPB*

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos  
*Membro Externo – UFCG*



This is ground control to Major Tom

You've really made the grade (...)

Now it's time to leave the capsule if you dare

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço imensamente ao meu orientador Professor Dr. Francisco de Assis de Brito pelo direcionamento, paciência e tempo concedido a este trabalho, e ao meu coorientador, Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida por todo o apoio a mim concedido. Agradeço também a minha namorada Julia por todo o afeto e companheirismo de sempre, serei eternamente grata. Sou muito grata à todas minhas amigas e amigos que me acompanharam durante esse período de mestrado, em especial minha amiga Weyna pelas longas conversas fora de hora quando eu precisava tanto. Muito obrigada à CAPES e ao departamento de Física da UFPB.

## RESUMO

No presente trabalho abordamos o modelo da gravidade entrópica pela qual o progresso teórico recente indica que o espaço-tempo e a gravidade emergem juntos da estrutura de emaranhamento de uma teoria microscópica subjacente. Utilizamos o espaço Anti-de Sitter para melhor tratarmos essas ideias, onde estas dependem da lei da área para a entropia de emaranhamento. Para tal objetivo, faremos primeiro uma revisão de termodinâmica. Em seguida é feita uma introdução a gravidade emergente passando por tópicos de relatividade geral, com as equações de Einstein. Por fim, usando insights da física de buracos negros e da teoria da informação quântica, argumentamos que a energia escura positiva leva a uma contribuição da lei do volume térmico para a entropia que ultrapassa a lei da área precisamente no horizonte cosmológico. Do trabalho de Erik Verlinde, utilizamos de seus argumentos de que as leis emergentes da gravidade contêm uma força gravitacional escura adicional que descreve a resposta elástica devido ao deslocamento da entropia. Derivamos uma estimativa da força extra em termos da matéria bariônica, da constante de Newton e da escala de aceleração de Hubble,  $a_0 = cH_0$ , estas fornecem evidências para o fato de que essa força da gravidade escura adicional explica os fenômenos observados em galáxias e aglomerados atualmente atribuídos à matéria escura.

**Palavras-chave:** Gravidade entrópica; Termodinâmica; Matéria Escura; Cosmologia.

## ABSTRACT

In the present work we approach the model of entropic gravity in which recent theoretical progress indicates that spacetime and gravity emerge together from the entanglement structure of an underlying microscopic theory. We use the Anti-de Sitter space to better deal with these ideas, where they depend on the area law for entanglement entropy. For this purpose, we first review thermodynamics, then an introduction to emergent gravity through topics of general relativity, with Einstein's equations. Finally, using insights from black hole physics and quantum information theory, we argue that positive dark energy leads to a contribution of the thermal volume law to entropy that surpasses the area law precisely at the cosmological horizon. From the work of Erik Verlinde, we draw on his arguments that the emergent laws of gravity contain an additional dark gravitational force that describes the elastic response due to the entropy shift. We derive an estimate of the extra force in terms of baryonic matter, Newton's constant, and Hubble's acceleration scale,  $a_0 = cH_0$ , these provide evidence for the fact that this dark gravity force further explains the phenomena observed in galaxies and clusters currently attributed to dark matter.

**Keywords:** Entropic gravity; Thermodynamics; Dark Matter; Cosmology.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Fórmulas de correspondência. Fonte: [10]. . . . .	41
--	----

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Evidência para um Universo acelerado. Curvas de luz de alto <i>redshift</i> de uma SNe Ia antes de uma correção. . . . .	11
Figura 2 – Mesmas curvas de luz da Figura 1 após a calibração. . . . .	12
Figura 3 – Caminhos reversível e irreversível. . . . .	15
Figura 4 – Uma partícula de massa $m$ se aproximando de uma parte da superfície holográfica com temperatura $T$ e entropia $S$ , toda a informação física do interior da parte da tela holográfica se encontra na sua superfície. . . . .	24
Figura 5 – Uma partícula de massa $m$ se aproximando de uma superfície holográfica esférica com temperatura $T$ e $N$ bits de informação do sistema físico contido em seu interior cuja massa é $M$ . . . . .	25
Figura 6 – Uma perspectiva unilateral no espaço de Sitter com uma massa $M$ no centro. A entropia associada à área do horizonte está contida em estados deslocalizados que ocupam a maior parte. A massa $M$ remove parte e, portanto, desloca o conteúdo de entropia no interior. . . . .	31
Figura 7 – Uma certa quantidade de volume sendo removida de um meio elástico, levando a um dado deslocamento. . . . .	33
Figura 8 – Caminho fechado. . . . .	50
Figura 9 – Caminhos reversíveis. . . . .	51

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE TERMODINÂMICA</b>	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Conceito de Entropia</b>	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>O Princípio do Aumento da Entropia</b>	<b>15</b>
<b>2.3</b>	<b>Força Entrópica</b>	<b>17</b>
<b>2.4</b>	<b>Teorema da Equipartição da Energia</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>GRAVIDADE ENTRÓPICA</b>	<b>21</b>
<b>3.1</b>	<b>Gravidade Emergente</b>	<b>21</b>
<b>3.2</b>	<b>Efeito Unruh</b>	<b>21</b>
<b>3.3</b>	<b>O Princípio Holográfico</b>	<b>22</b>
<b>3.4</b>	<b>A Segunda Lei de Newton</b>	<b>23</b>
<b>3.5</b>	<b>A Lei da Gravidade de Newton</b>	<b>25</b>
<b>3.6</b>	<b>Dedução das Equações de Einstein</b>	<b>26</b>
<b>4</b>	<b>UNIVERSO ESCURO</b>	<b>28</b>
<b>4.1</b>	<b>Energia Escura e a Entropia no Espaço de de Sitter</b>	<b>28</b>
<b>4.2</b>	<b>O Efeito da Matéria na Entropia e na Energia Escura</b>	<b>29</b>
<b>4.3</b>	<b>Um Critério Entrópico Para a Fase Escura da Gravidade Emergente</b>	<b>31</b>
<b>4.4</b>	<b>Deslocamento do Conteúdo de Entropia do Espaço de de Sitter</b>	<b>32</b>
<b>4.5</b>	<b>Uma Derivação Heurística da Relação de Tully-Fisher</b>	<b>35</b>
<b>4.6</b>	<b>A Fase Elástica da Gravidade Emergente</b>	<b>37</b>
<b>4.6.1</b>	<b>Elasticidade Linear e a Definição de Massa</b>	<b>37</b>
<b>4.6.2</b>	<b>A Correspondência Elasticidade/Gravidade no Regime Sub-Newtoniano</b>	<b>39</b>
<b>4.7</b>	<b>Matéria Escura Aparente da Gravidade Emergente</b>	<b>41</b>
<b>4.7.1</b>	<b>De um Efeito de Memória Elástica à Matéria Escura Aparente</b>	<b>42</b>
<b>4.7.2</b>	<b>Uma Fórmula Para a Densidade Aparente da Matéria Escura em Galáxias e Aglomerados</b>	<b>46</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>49</b>
	<b>APÊNDICE A – ALGUNS CONCEITOS DE TERMODINÂMICA</b>	<b>50</b>
<b>A.1</b>	<b>O Teorema de Clausius</b>	<b>50</b>
<b>A.2</b>	<b>Processos Reversíveis</b>	<b>50</b>
<b>A.3</b>	<b>Transformação Adiabática Reversível</b>	<b>52</b>
	<b>APÊNDICE B – MAIS DETALHES SOBRE O EFEITO UNRUH</b>	<b>53</b>
<b>B.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>53</b>
<b>B.2</b>	<b>Teoria de Campos em Espaços Planos</b>	<b>53</b>
<b>B.3</b>	<b>O Efeito Unruh</b>	<b>56</b>
<b>B.3.1</b>	<b>Transformações de Bogoliubov</b>	<b>56</b>
<b>B.3.2</b>	<b>A Temperatura Unruh</b>	<b>58</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>60</b>

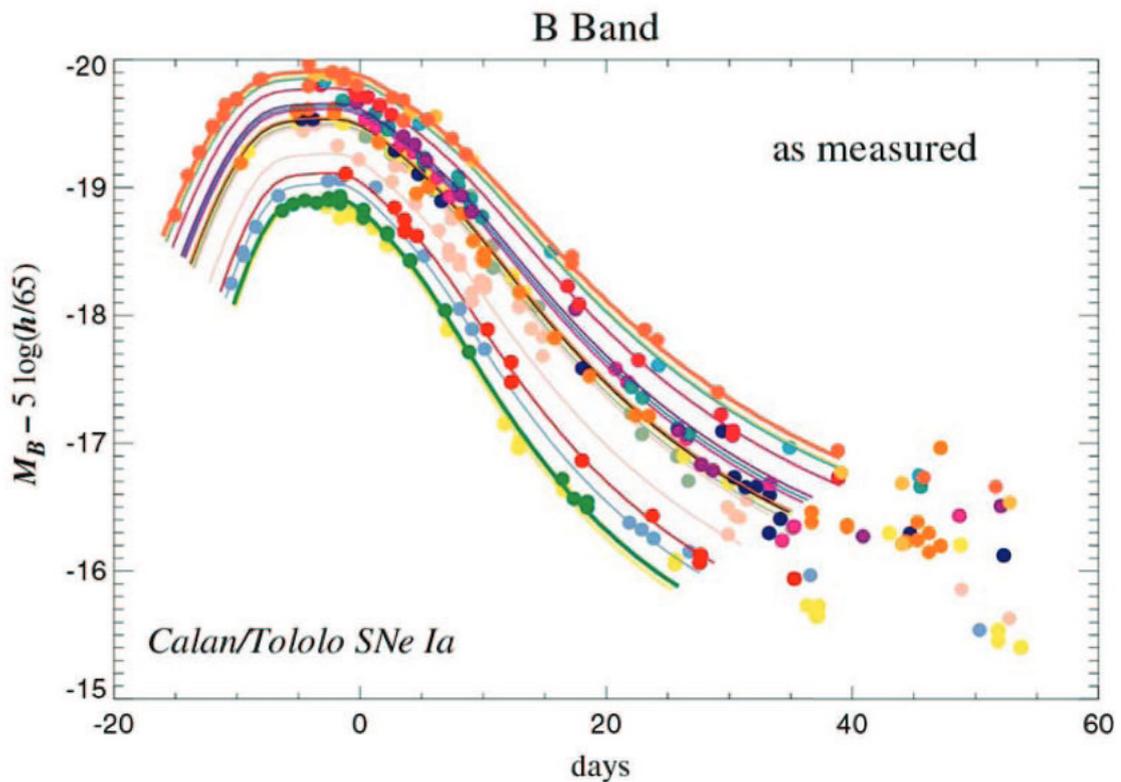
## 1 INTRODUÇÃO

Um dos maiores desafios da física moderna é explicar a expansão acelerada do Universo. Tal problema é bem aceito pela comunidade científica dos dias atuais e é constatado através da observação de Supernovas do tipo Ia (*SNe Ia*). As *SNe Ia* são especiais por possuírem características de luminosidade e massa muito semelhantes e isso é um fator relevante para que esses objetos sejam considerados o que os pesquisadores chamam de velas padronizáveis. O uso das *SNe Ia* como indicador de distância foi o que evidenciou a expansão acelerada do Universo em 1998. [1] Ver Figura 1. Dados experimentais mostram que, ainda que o Universo tivesse passado por um período de inflação inicial, a expansão remanescente deveria ser desacelerada, devido a força atrativa da gravidade. Um tipo de energia desconhecida seria a razão de tal expansão acelerada, existe um novo campo para explicar esse fenômeno, chamado então de energia escura. Tal fato também foi confirmado por outras observações como a radiação cósmica de fundo. [2] Esta energia é caracterizada por uma equação de estado

$$-1 = \omega = \frac{P}{\rho c^2}, \quad (1.1)$$

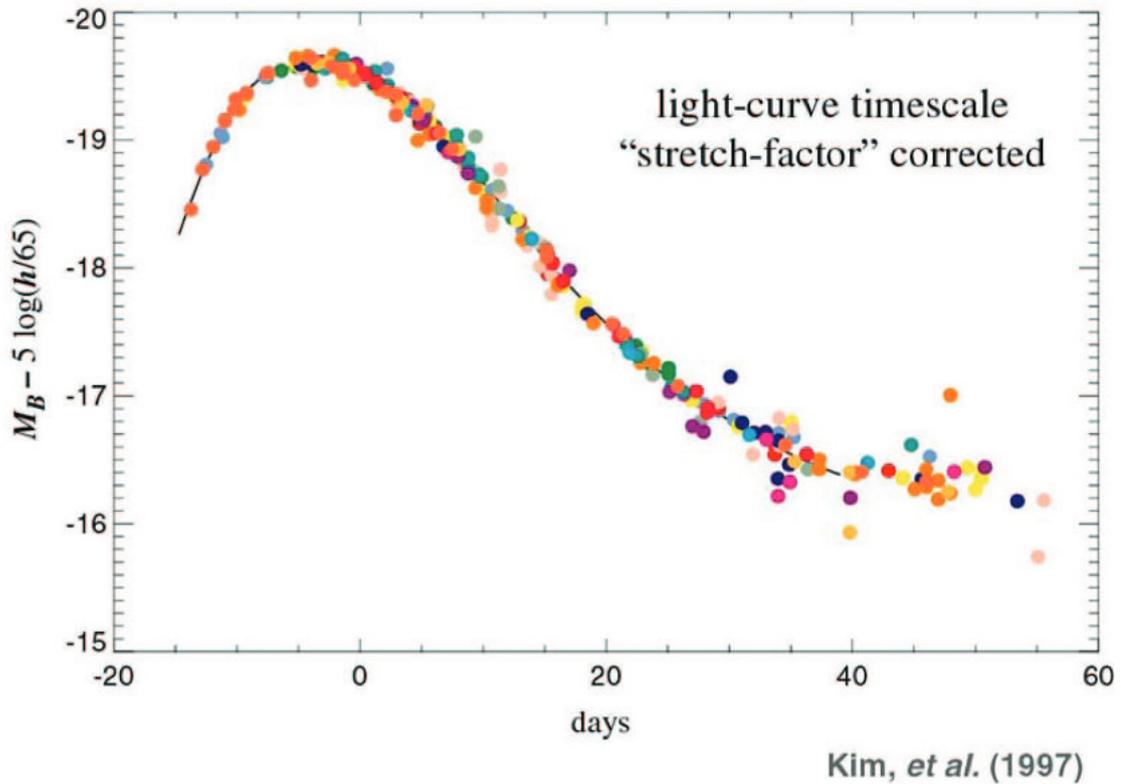
em que  $P$  é a pressão e  $\rho$  é a densidade de energia que faz o Universo expandir. Observações recentes restringem a equação de estado com  $\omega < -1/3$ . [3]

Figura 1 – Evidência para um Universo acelerado. Curvas de luz de alto *redshift* de uma *SNe Ia* antes de uma correção.



Fonte:[1].

Figura 2 – Mesmas curvas de luz da Figura 1 após a calibração.



Fonte:[1].

Um modelo cosmológico foi proposto por Albert Einstein na formulação da Teoria da Relatividade Geral (TRG) em 1915. Einstein acreditava que o Universo era estático, mas, como a matéria é atrativa, as suas equações de campo mostravam que o seu modelo de Universo não seria estático. Então, em 1917, ele adicionou um novo termo, que ele chamou de constante cosmológica,  $\Lambda$ , para contrabalançar qualquer evolução, essa constante representa uma distribuição uniforme de energia em todo o Universo, que seria então responsável pela sua expansão, a energia escura. Pela teoria de Einstein não é possível obter pista do que seja essa energia escura que faz o Universo expandir aceleradamente. E temos também a propriedade diferente que ela deve ter pressão negativa. As estimativas para a distribuição de energia escura, matéria escura e matéria comum são: 70% de energia escura, 25% de matéria escura e 5% de matéria comum. [4]

Nos últimos anos surgiram muitos modelos alternativos para explicar este fenômeno, os que mais se destacam são os de quintessência [5], gás de Chaplygin [6], k-essência [7] e gravitação modificada [8]. Neste trabalho estudaremos a proposta de modificação da gravidade através da gravidade entrópica, neste modelo o espaço-tempo e a gravidade emergem juntos da estrutura de emaranhamento de uma teoria microscópica subjacente. De acordo com a teoria da relatividade geral de Einstein, o espaço-tempo não tem outras propriedades intrínsecas além de sua geometria curva onde a matéria se move sob a influência de forças. Do lado observacional, o fato de que 95% do nosso Universo consiste em formas misteriosas de energia ou matéria dá motivação suficiente para reconsiderar esse ponto de partida básico. [9]

A ideia de gravidade emergente foi proposta pela primeira vez por Andrei Sakha-

rov, em 1967. Sakharov interpretou a gravidade como efeito de flutuações quânticas do vácuo, a gravidade seria emergente a partir da teoria quântica de campos. Em 2011, Erik Verlinde publicou um trabalho utilizando as ideias do efeito Unruh, da força entrópica e do princípio holográfico. Neste trabalho, Verlinde propôs que a lei da gravidade de Newton pode ser interpretada como uma força entrópica, dessa forma, a gravidade iria emergir devido à variação de entropia associada à informação contida numa tela holográfica.

A gravidade domina em grandes distâncias, mas é muito fraca em pequenas escalas. De fato, suas leis básicas só foram testadas até distâncias da ordem de um milímetro. A gravidade também é consideravelmente mais difícil de combinar com a mecânica quântica do que todas as outras forças. A busca pela unificação da gravidade com essas outras forças da Natureza, em um nível microscópico, pode, portanto, não ser a abordagem correta. É conhecido por levar a muitos problemas, paradoxos e quebra-cabeças. A teoria das cordas, até certo ponto, resolveu alguns deles, mas não todos. [10] A universalidade da gravidade sugere que seu surgimento deve ser entendido a partir de princípios gerais que são independentes de detalhes específicos. Neste trabalho, argumentaremos que a noção central necessária para derivar a gravidade é a quantidade de informação associada à matéria e sua localização.

A suposição mais importante será que a informação associada a uma parte do espaço obedece ao princípio holográfico. A evidência de apoio mais forte para o princípio holográfico vem da física dos buracos negros e da correspondência AdS/CFT. Esses desenvolvimentos teóricos indicam que pelo menos parte dos graus de liberdade microscópicos podem ser representados holograficamente na fronteira do espaço-tempo ou nos horizontes. O conceito de holografia parece ser muito mais geral, no entanto. Por exemplo, na correspondência AdS/CFT pode-se mover a fronteira para dentro explorando uma versão holográfica do grupo de renormalização. Da mesma forma, na física dos buracos negros há ideias de que as informações podem ser armazenadas em horizontes estendidos. Além disso, pensando em observadores acelerados, pode-se, em princípio, localizar telas holográficas em qualquer lugar do espaço. Em todos esses casos, o surgimento da direção holográfica é acompanhado por redshifts e relacionado a algum procedimento de granulação grosseira. Se todas essas ideias combinadas estiverem corretas, deve existir uma estrutura geral que descreva como o espaço emerge junto com a gravidade. [9]

Concentrou-se na explicação dos fenômenos gravitacionais observados atribuídos à matéria escura. Com isso, pretendeu-se dizer que o excesso na força gravitacional ou a massa ausente que é observada em galáxias espirais ou elípticas e em galáxias aglomeradas. É claro que a matéria escura desempenha um papel central em muitos outros aspectos do atual paradigma cosmológico, em particular na formação da estrutura e na explicação dos picos acústicos na radiação cósmica de fundo. Em nenhum desses cenários é necessária que a matéria escura seja uma partícula: tudo o que é necessário é que sua evolução cosmológica e dinâmica sejam consistentes com um fluido sem pressão. Nessa descrição, foi possível acabar com uma estimativa da densidade aparente da matéria escura que, em muitos aspectos, se comporta como necessário para a formação da estrutura e talvez até para a explicação do espectro CMB. Ou seja, efetivamente a matéria escura aparente que sai de nossa descrição emergente da gravidade também leva a um potencial gravitacional que atrai a matéria bariônica como a matéria escura fria faria.

No entanto, os argumentos e cálculos, apresentados por Erik Verlinde no artigo que inspirou o presente trabalho ainda não são suficientes para responder às questões sobre a evolução cosmológica de nossas equações. Em particular, Verlinde fez uso do valor do atual parâmetro de Hubble,  $H_0$ , em suas equações, o que imediatamente levanta a questão se deve-se usar outro valor para o parâmetro de Hubble em outros tempos cosmológicos. Em seus cálculos o parâmetro  $H_0$  foi assumido como constante, pois foi feita a aproximação de que nosso universo é inteiramente dominado pela energia escura e que a matéria comum só leva a uma pequena perturbação. Isso sugere que  $H_0$ , ou melhor,  $a_0$  deve ser definido em termos da densidade de energia escura, ou o valor da constante cosmológica. Isso implicaria que  $a_0$  é realmente constante, embora tenha um valor ligeiramente diferente.

O capítulo 2 da presente dissertação contém uma revisão de Termodinâmica, abordando conceitos, hipóteses e observações necessárias para desenvolver no capítulo 3, o modelo de gravidade entrópica. O capítulo 4 é uma breve aplicação de gravidade entrópica à cosmologia. Este último capítulo apresenta um indicativo de que os fenômenos observados atualmente atribuídos à matéria escura são consequência da natureza emergente da gravidade e são causados por uma resposta elástica devido à contribuição da lei do volume para a entropia de emaranhamento em nosso universo.

Para explicar os fenômenos observados não postulou-se a existência de uma partícula de matéria escura, mas sim tentamos entender sua origem. Essa abordagem se mostra viável dado os objetivos dos artigos citados e consequentemente deste trabalho, e os resultados obtidos nos dizem que os fenômenos associados à matéria escura são uma consequência inevitável e lógica da natureza emergente do próprio espaço-tempo. O efeito líquido deve ser que, em nossa estrutura convencional, deve-se adicionar um componente escuro ao tensor de energia de tensão, que se comporta similarmente com o que precisa-se, na matéria escura fria, para explicar sua formação da estrutura, mas que em sua verdadeira origem é uma propriedade intrínseca do espaço-tempo, ao invés de ser causado por alguma partícula desconhecida. Por fim, Verlinde argumentou que os fenômenos observados da matéria escura são um resquício, um efeito de memória, do surgimento do espaço-tempo junto com a matéria comum nele.

## 2 REVISÃO DE TERMODINÂMICA

### 2.1 Conceito de Entropia

O objetivo desses tópicos é revisar alguns conceitos da termodinâmica que serão particularmente úteis para o desenvolvimento do presente trabalho. Os sistemas físicos que consideraremos encontram-se confinados por algum tipo de parede. Essas paredes possuirão características específicas que isolam ou permitem transferências entre o sistema considerado e o resto do espaço e caracterizarão o sistema em estudo. Podemos classificá-las em sistemas fechados, sistemas isolados e sistemas abertos. Introduzimos a grandeza entropia,  $S$ , para medir o grau de desordem do sistema, o qual está associado a perda de informação. Da definição, a entropia de um sistema isolado aumenta ou permanece a mesma quando uma restrição interna. [11]

### 2.2 O Princípio do Aumento da Entropia

Da desigualdade de Clausius (Ver Apêndice), temos

$$\oint_C \frac{\delta Q}{T} \leq 0, \quad (2.1)$$

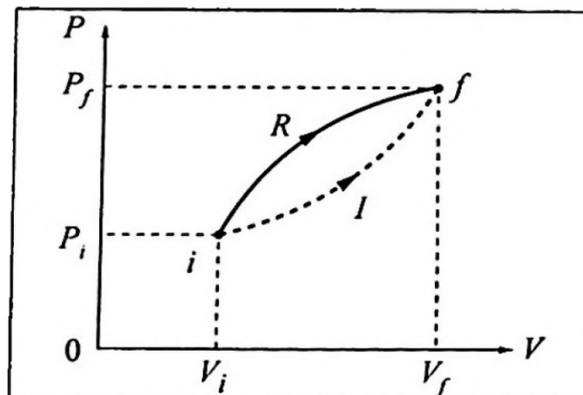
onde  $T$  é a temperatura do corpo que transfere  $\delta Q$  ao sistema considerado.

Quando  $C$  é reversível, a integral se anula. Quando a integral se anula, não existe nenhuma razão *termodinâmica* para que  $C$  não seja reversível, embora possa ser difícil, na prática, inverter o ciclo. Por isto, identificaremos a *irreversibilidade* com um valor negativo na integral:

$$\oint_C \frac{\delta Q}{T} < 0. \quad (2.2)$$

Sejam agora  $R$  e  $I$  dois caminhos diferentes, o 1º reversível e o 2º irreversível, ligando dois estados de equilíbrio termodinâmico (Figura 5, onde  $I$  foi representado em pontilhado, porque não precisa passar por estados de equilíbrio). Então,  $iRf + fIi$  define um ciclo  $C$  *irreversível* e a (2.12) leva a

Figura 3 – Caminhos reversível e irreversível.



Fonte:[11].

$$\int_{(I)i}^f \frac{\delta Q}{T} + \int_{(R)f}^i \frac{\delta Q_R}{T} = - \int_{(I)i}^f \frac{\delta Q}{T} - \int_{(R)i}^f \frac{\delta Q_R}{T} = \int_{(I)i}^f \frac{\delta Q}{T} - (S_f - S_i) < 0, \quad (2.3)$$

onde o sentido de (R) foi invertido com a troca de sinal, o que é permitido graças à reversibilidade de (R), e utilizando  $\delta Q_R = CdT$ . A (2.12) nos leva

$$\int_{(I)i}^f \frac{\delta Q}{T} < S_f - S_i = \Delta S, \quad (2.4)$$

com  $I$  irreversível. De uma maneira mais geral, ficamos

$$\int_i^f \frac{\delta Q}{T} \leq S_f - S_i = \Delta S \begin{cases} < \text{se irreversível} \\ = \text{se reversível} \end{cases} \quad (2.5)$$

Na forma diferencial,

$$\delta Q \leq TdS, \quad (2.6)$$

e onde a igualdade vale apenas para  $\delta Q_R$ . [12]

Em particular, para um *sistema termicamente isolado*, ou seja, um sistema dentro de um recipiente de paredes adiabáticas, temos

$$\delta Q = 0, \quad (2.7)$$

onde não há trocas de calor com o exterior, e a (2.15) ou (2.14) resulta em

$$\delta Q \geq 0 \quad \text{sistema isolado} \quad (2.8)$$

que é o *princípio do aumento de entropia*: *A entropia de um sistema termicamente isolado nunca pode decrescer: não se altera quando ocorrem processos reversíveis, mas aumenta quando ocorrem processos irreversíveis.*

Em um sistema isolado, é o princípio de aumento da entropia que permite dizer em que sentido devem ocorrer os processos que se produzem espontaneamente na natureza: *é sempre no sentido em que a entropia do sistema isolado aumenta.* Como consequência do princípio do aumento da entropia, *o estado de equilíbrio de um sistema isolado é o estado de entropia máxima.* [12]

Podemos ampliar o sistema considerado acrescentando-lhe uma vizinhança suficientemente ampla para que o conjunto sistema + vizinhança constitua, com uma boa aproximação, um sistema isolado. Então, na escala terrestre, podemos considerar como vizinhança todo o sistema solar. O sistema isolado obtido quando se amplia suficientemente a vizinhança para que sejam levadas em conta todas as variações de entropia resultantes de um dado processo costuma ser chamado de "universo". Tal denotação não carrega o sentido de universo como na cosmologia; "universo" pode ser identificado com o sistema solar para a maioria dos processos na escala terrestre. Dado isso, a (2.17) se aplica ao "universo", e o princípio do aumento da entropia tem a seguinte formulação: *A entropia do universo nunca decresce: não é afetada por processos reversíveis e cresce em processos irreversíveis.* [12]

Neste sentido, quando um sistema recebe ou fornece reversivelmente calor  $\delta Q_R$  com um reservatório à temperatura  $T$ , a entropia do sistema varia de  $d_1S = \frac{\delta Q_R}{T}$ , ( $> 0$  ou  $0 <$  conforme o sinal de  $\delta Q_R$ ), porém, em compensação, a entropia do reservatório (vizinhança) varia de  $d_2S = -\frac{\delta Q_R}{T}$ , de tal forma que a entropia do universo não é alterada por este processo reversível:

$$dS = d_1S + d_2S = \frac{\delta Q_R}{T} - \frac{\delta Q_R}{T} = 0. \quad (2.9)$$

É sempre possível diminuir a entropia de um dado sistema à custa de um aumento no mínimo equivalente da entropia da vizinhança desse sistema.

*O princípio do aumento da entropia é equivalente à 2ª lei da termodinâmica.* Ele decorre da 2ª lei e a 2ª lei decorre dele. *Enunciado de Clausius:* Se fosse possível realizar um processo cujo único efeito fosse transferir calor  $\Delta Q$  de um corpo mais frio (temperatura  $T_2$ ) a um corpo mais quente (temperatura  $T_1$ ), a variação de entropia do universo seria

$$\Delta S = -\frac{\Delta Q}{T_2} + \frac{\Delta Q}{T_1} = \Delta Q \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} < 0, \quad (2.10)$$

com  $\Delta Q > 0$  e  $T_2 - T_1 < 0$  contradizendo, portanto, o princípio do aumento da entropia.

*Enunciado de Kelvin:* Se existisse um processo cujo único efeito fosse remover calor  $\Delta Q$  de um único reservatório à temperatura  $T$ , convertendo-o em trabalho, a variação correspondente da entropia do universo seria

$$\Delta S = -\frac{\Delta Q}{T} < 0, \quad (2.11)$$

violando o princípio do aumento da entropia.

### 2.3 Força Entrópica

Uma força entrópica pode ser descrita como uma força macroscópica efetiva que se origina em um sistema com muitos graus de liberdade pela tendência estatística de aumentar sua entropia. A equação da força é expressa em termos de diferenças de entropia e é independente dos detalhes da dinâmica microscópica. [10] Da primeira lei da termodinâmica,

$$dU = \delta Q - \delta W, \quad (2.12)$$

onde  $U$  é a energia interna do sistema e  $W$  o trabalho que o sistema realizou, usando  $\delta W = F dx$  [13] e  $dS = \frac{\delta Q}{T}$  [14], temos que

$$F = T \frac{dS}{dx} - \frac{dU}{dx}, \quad (2.13)$$

quando  $dU = 0$ , temos então

$$F = T \frac{dS}{dx}, \quad (2.14)$$

que é a força devida à variação de entropia em função da variação da coordenada de posição, esta é chamada de força entrópica.

Em particular, não há campo fundamental associado a uma força entrópica. As

forças entrópicas ocorrem tipicamente em sistemas macroscópicos, como em coloides. Grandes coloides moleculares suspensos em um ambiente térmico de partículas menores, por exemplo, experimentam forças entrópicas devido a efeitos de volume excluídos. A osmose é outro fenômeno impulsionado por uma força entrópica. [10]

Talvez o exemplo mais conhecido seja a elasticidade de uma molécula de polímero. Uma única molécula de polímero pode ser modelada juntando muitos monômeros de comprimento fixo, onde cada monômero pode girar livremente em torno dos pontos de fixação e se direcionar em qualquer direção espacial. Cada uma dessas configurações tem a mesma energia. Quando a molécula do polímero é imersa em um banho de calor, ela gosta de se colocar em uma configuração enrolada aleatoriamente, uma vez que estas são entropicamente favorecidas. Existem muitas outras configurações quando a molécula é curta em comparação com quando é esticada em uma configuração estendida. A tendência estatística de retornar a um estado de entropia máxima se traduz em uma força macroscópica, neste caso, a força elástica. [10]

A segunda lei da termodinâmica pode ser enunciada em termos da entropia: a entropia do Universo nunca diminui em um sistema fechado, isto é, que pode trocar calor e trabalho com seu exterior mas que tem seu número de partículas fixo, a entropia pode até diminuir, mas a custo do aumento proporcional de entropia em outro lugar, isto é, a entropia total sempre aumenta ( $\Delta S \geq 0$ ). [11]

A terceira lei da termodinâmica diz que no zero absoluto de temperatura a entropia é nula. Da mecânica estatística temos que

$$S = k_B \ln \Omega, \quad (2.15)$$

onde  $k_B$  é a constante fundamental de Boltzmann e  $\Omega$  é o número de microestados acessíveis ao sistema com dada energia  $E$  fixa.

Existe um postulado em mecânica estatística que diz que cada microestado acessível do sistema termodinâmico é igualmente provável de ocorrer, e que um macroestado termodinâmico com mais microestados é mais provável do que um com menos microestados. [15] Portanto, o macroestado mais provável que o sistema pode se encontrar é aquele que maximiza o número de microestados acessíveis  $\Omega$ , e este fato é consistente com (2.15), em que a entropia  $S$  é maximizada conforme a segunda lei da termodinâmica.

## 2.4 Teorema da Equipartição da Energia

O teorema da equipartição da energia estabelece que cada termo quadrático na expressão de um hamiltoniano clássico produz uma contribuição da forma  $k_B T/2$  para a energia interna do sistema. [11]

No caso do gás monoatômico clássico, definido pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} \vec{p}_i^2 + \sum_{i < j} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \quad (2.16)$$

onde  $V(|\vec{r}|)$  é um potencial entre pares, podemos utilizar o formalismo canônico para mostrar

que a energia cinética média é dada por

$$\langle E_{cin} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} \vec{p}_i^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{1}{2m} (p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2) \right\rangle = \frac{3}{2} N k_B T, \quad (2.17)$$

que corresponde à energia interna do sistema no caso do gás ideal.

Para um sistema clássico de  $N$  osciladores harmônicos independentes, com hamiltoniano dado por

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \right), \quad (2.18)$$

onde as coordenadas de posição e de momento variam irrestritamente, temos o valor esperado no ensemble canônico

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \sum_{i=1}^N \left( \left\langle \frac{1}{2m} p_i^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2m} m \omega^2 q_i^2 \right\rangle \right) = N \left( \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T \right) = N k_B T. \quad (2.19)$$

Podemos, então, enunciar o teorema da equipartição da energia de uma forma mais precisa. Vamos considerar um sistema clássico, com  $n$  graus de liberdade, dado pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \mathcal{H}_0 + \phi p_j^2, \quad (2.20)$$

onde  $\mathcal{H}_0$  e  $\phi$  são funções independentes da particular coordenada  $p_j$ . E, a função  $\phi$  é sempre positiva, e a coordenada  $p_j$  varia de  $-\infty$ , a  $+\infty$ . Então, temos o valor esperado

$$\langle \phi p_j^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T. \quad (2.21)$$

Para demonstrar esse resultado, vamos utilizar a definição de valor esperado no ensemble canônico, [11]

$$\langle \phi p_j^2 \rangle = \frac{\int \dots \int dq_1 \dots dp_n \phi p_j^2 \exp[-\beta \mathcal{H}_0 - \beta \phi p_j^2]}{\int \dots \int dq_1 \dots dp_n \exp[-\beta \mathcal{H}_0 - \beta \phi p_j^2]}. \quad (2.22)$$

Levando em conta as restrições sobre as funções  $\phi$  e  $\mathcal{H}_0$ , podemos inicialmente fazer a integração sobre a variável  $p_j$  no numerador,

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \phi p_j^2 \exp(-\beta \mathcal{H}_0 - \beta \phi p_j^2) dp_j = \exp(-\beta \mathcal{H}_0) \\
& \quad \Updownarrow \\
& \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta \mathcal{H}_0 p_j^2) dp_j \right\} = \exp(-\beta \mathcal{H}_0) \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\pi}{\beta \phi} \right)^{1/2} \right\} = \\
& \quad \Updownarrow \\
& = \exp(-\beta \mathcal{H}_0) \frac{1}{2\beta} \left( \frac{\pi}{\beta \phi} \right)^{1/2} = \frac{1}{2\beta} \exp(-\beta \mathcal{H}_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta \phi p_j^2) dp_j = \\
& \quad \Updownarrow \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta \phi p_j^2) dp_j.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Portanto, extraindo o fator  $1/(2\beta)$ , as integrais múltiplas no numerador e no denominador da equação (31) são idênticas, então

$$\langle \phi p_j^2 \rangle = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2} k_B T, \tag{2.24}$$

demonstrando a forma mais precisa do teorema da equipartição da energia.

Temos que para cada grau de liberdade do sistema está associado uma energia média  $1/2k_B T$ , que é a equipartição da energia que é distribuída igualmente entre os graus de liberdade do sistema, digamos que o sistema tenha  $N$  graus de liberdade, então a energia interna é dada por  $U = N \frac{1}{2} k_B T$ . Essa relação vale apenas para o caso em que a Hamiltoniana tenha uma dependência quadrática nos graus de liberdade e no limite clássico de altas temperaturas. Para altas temperaturas significa dizer que a energia  $k_B T$  associada a cada grau de liberdade deve ser muito maior que a diferença de energias dos níveis quânticos do sistema.

### 3 GRAVIDADE ENTRÓPICA

#### 3.1 Gravidade Emergente

Em 1967, Andrei Sakharov propôs pela primeira vez a ideia de gravidade emergente. Neste modelo, a gravidade e o próprio espaço-tempo seriam manifestações macroscópicas de uma teoria microscópica mais fundamental. Sakharov interpretou a gravidade como efeito de flutuações quânticas do vácuo, a gravidade seria emergente a partir da teoria quântica de campos. [16] Após esse trabalho, surgiram ao longo do tempo outras propostas de gravidade emergente.

No ano de 2011, Erik Verlinde publicou um trabalho fazendo uso do efeito Unruh, da força entrópica e do princípio holográfico. Ele propôs que a lei da gravidade de Newton pode ser interpretada como uma força entrópica, dessa forma a gravidade iria emergir devido à variação de entropia associada à informação contida numa tela holográfica. Segue uma breve introdução desse modelo, onde Verlinde chega à uma descrição da gravidade usando os conceitos de Termodinâmica apresentados anteriormente.

#### 3.2 Efeito Unruh

No ano de 1976, Bill Unruh propôs uma relação direta entre a aceleração do observador e a temperatura de radiação de corpo negro do vácuo, onde a ideia principal é calcular o operador número de partículas  $\hat{N}_i$  nas coordenadas do observador inercial e calcular o operador número de partículas  $\hat{N}_a$  nas coordenadas dum observador acelerado, para se calcular  $\hat{N}_a$  é usado o sistema de coordenadas de Rindler no qual descreve o movimento de referenciais acelerados no espaço de Minkowski. Observadores acelerados no espaço de Minkowski se encontram em repouso no referencial das coordenadas de Rindler.

Considerando um caso em que dado referencial inercial com os operadores  $a_k^{(i)}$  e  $a_k^{\dagger(i)}$  associados a um outro dado referencial este acelerado em relação ao primeiro com operadores  $a_k^{(a)}$  e  $a_k^{\dagger(a)}$  associados, podemos mostrar que os operadores de criação e destruição no referencial inercial podem ser escritos como combinação linear dos operadores de criação e destruição do referencial acelerado, então

$$a_n^{(i)} = \sum_k (\alpha_{n,k} a_k^a + \beta_{n,k}^* a_k^{\dagger(a)}), \quad (3.1)$$

$$a_n^{\dagger(i)} = \sum_k (\alpha_{n,k}^* a_k^a - \beta_{n,k} a_k^{\dagger(a)}). \quad (3.2)$$

As equações (3.1) e (3.2) são as transformações de Bogolubov. [17]

Por definição, a atuação do operador número de partículas  $\hat{N}_i$  do observador inercial no estado de vácuo  $|0\rangle_i$  nos dá o número médio de partículas igual a zero, então

$$\langle 0_i | \hat{N}_i | 0_i \rangle = 0, \quad (3.3)$$

porém ao aplicarmos o operador número de partículas  $\hat{N}_a$  do observador acelerado no mesmo

estado de vácuo, teremos como resultado um número de partículas diferente de zero. Ficamos

$$\langle 0_i | \hat{N}_a | 0_i \rangle \neq 0. \quad (3.4)$$

Encontramos esses resultados, pois, de acordo com as relações (3.1) e (3.2), o operador  $\hat{N}_a$  é dado como uma combinação linear de operadores de criação e destruição do referencial inercial. Em [18] é mostrado que a (3.12) resulta em uma distribuição de radiação de corpo negro a uma temperatura  $T$  é

$$T = \frac{\hbar}{2\pi c k_B} a, \quad (3.5)$$

onde  $\hbar$  é a constante de Planck,  $k_B$  é a constante de Boltzmann,  $c$  é a velocidade da luz e  $a$  é a aceleração do referencial acelerado.

Para um dado observador inercial no espaço de Minkowski, sem partículas, observaria apenas as flutuações quânticas do vácuo, porém, um observador uniformemente acelerado iria detectar, segundo a teoria quântica de campos, no vácuo, um banho térmico de radiação de corpo negro. Dado isto, podemos associar à aceleração uniforme uma temperatura com  $T \propto a$ . [17] Existem diversas propostas de experimentos para observação do efeito Unruh, mas ainda não temos esses resultados. O principal obstáculo é a necessidade de uma grande aceleração para que a temperatura possa ser um fenômeno observável. A exemplo, para uma temperatura de  $1\text{ K}$  seria necessário uma aceleração de  $2,4 \times 10^{20}\text{ m/s}^2$ . Percebemos, então, que o efeito Unruh, com as possibilidades atuais, é inobservável para objetos macroscópicos em laboratório. Seria necessário para um aparato experimental que fosse construído a fim de medir tal temperatura, e que tivesse a massa de  $1\text{ kg}$ , sofreria uma força absurda de  $2,4 \times 10^{20}\text{ N}$ , muito provavelmente esse aparato seria destruído antes que fosse possível realizar alguma medida.

### 3.3 O Princípio Holográfico

A suposição mais importante será que a informação associada a uma parte do espaço obedece ao princípio holográfico, que diz que toda a Física tridimensional dentro de uma região do espaço pode ser descrita em termos da informação contida na superfície que engloba tal região. [19] A evidência mais forte para o princípio holográfico vem da física dos buracos negros [20], [21] e da correspondência AdS/CFT. Esses estudos indicam que pelo menos parte dos graus de liberdade microscópicos podem ser representados holograficamente tanto na fronteira do espaço-tempo como nos horizontes.

Segundo referido estudo, temos o resultado que mostra que a área do horizonte de eventos de um buraco negro não diminui, só pode permanecer constante ou aumentar. Então é possível associar a entropia à área do buraco negro, e então temos que [22]

$$S_{BN} = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} A, \quad (3.6)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzman,  $c$  é a velocidade da luz,  $G$  a constante de Newton da gravitação,  $\hbar$  a constante de Planck dividida por  $2\pi$  e  $A$  é a área do horizonte de eventos do buraco negro. Sabendo que  $l_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c}}$  é o comprimento de Planck, porém

$$S_{BN} = \frac{k_B}{4} \frac{A}{l_p^2}. \quad (3.7)$$

O termo  $\frac{A}{l_p^2}$  indica que a entropia do buraco negro é proporcional a um quarto do número de células de área  $l_p^2$  de Planck contidas no horizonte do buraco negro. [23]

Do ensemble microcanônico, temos que

$$S = k_B \ln(\Omega), \quad (3.8)$$

onde  $\Omega$  é o número de microestados acessíveis ao sistema. Em termos de informação, o número de microestados acessíveis  $\Omega$  pode ser dado por

$$\Omega = 2^n \quad (3.9)$$

em que  $n$  é o número de *bits* necessários para descrever o sistema. E, para o buraco negro

$$n = \frac{S_{BN}}{k_B \ln(2)} = \frac{A}{4 \ln(2) l_p^2}, \quad (3.10)$$

é o número de *bits* necessário para descrever os possíveis estados da superfície do buraco negro. [23]

De modo mais geral, na correspondência AdS/CFT é possível movermos a fronteira para dentro explorando uma versão holográfica do grupo de renormalização. Da mesma forma, na física dos buracos negros temos ideias de que as informações podem ser armazenadas em horizontes estendidos. Além disso, pensando em observadores acelerados, podemos localizar telas holográficas em qualquer lugar do espaço. Em todos esses casos, o surgimento da direção holográfica é acompanhado por *redshifts*. Se todas essas ideias combinadas estiverem corretas, deve existir uma estrutura geral que descreva como o espaço emerge junto com a gravidade. [10]

No trabalho de Verlinde, o mesmo assinala que o princípio holográfico está profundamente escondido entre as leis de Newton e Einstein. Por outro lado, a partir da holografia, descobre-se que essas leis bem conhecidas surgem direta e inevitavelmente. Ao inverter a lógica que leva das leis da gravidade à holografia, obtém-se uma imagem mais nítida e ainda mais simples do que é a gravidade. Por exemplo, esclarece por que a gravidade permite uma ação à distância mesmo quando não há campo de força mediador.

### 3.4 A Segunda Lei de Newton

No experimento mental de Bekenstein, [20] ele considerou uma partícula de massa  $m$ , presa a uma “corda” fictícia, se aproximando de um buraco negro. Antes do horizonte a partícula cai. Devido ao *redshift* infinito, o aumento de massa do buraco negro pode ser arbitrariamente pequena, classicamente.

Dada essa configuração, surge o problema da violação da segunda Lei da termodinâmica por buracos negros clássicos. Bekenstein, então, argumentou que quando uma partícula

está a um comprimento de onda de Compton do horizonte do buraco negro,

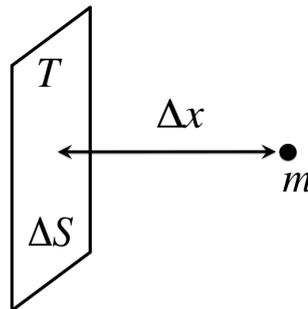
$$\Delta x = \frac{\hbar}{mc}, \quad (3.11)$$

tal partícula é considerada parte do buraco negro. Portanto, aumenta a massa e a área do horizonte em uma pequena quantidade, que ele identificou com um *bit* de informação. [10] Isso o levou à sua lei da área para a entropia de um buraco negro. Motivado por essas ideias, Verlinde postulou que a variação de entropia associada com a informação na fronteira é igual a

$$\Delta S = 2\pi k_B. \quad (3.12)$$

Se considerarmos apenas uma pequena parte da tela holográfica e a partícula que se aproxima do lado em que o espaço-tempo já emergiu, eventualmente a partícula se funde com os graus de liberdade microscópicos na tela, mas antes disso, ela já influencia a quantidade de informação que é armazenada na tela. [10] A superfície holográfica separa a região do espaço já emergido, onde a partícula se encontra, e a região cuja informação física está toda contida na sua superfície. Ver Figura 1.

Figura 4 – Uma partícula de massa  $m$  se aproximando de uma parte da superfície holográfica com temperatura  $T$  e entropia  $S$ , toda a informação física do interior da parte da tela holográfica se encontra na sua superfície.



Fonte:[10].

Generalizando que para pequenas distâncias a partir da superfície holográfica, a variação de entropia é proporcional à distância, isto é

$$\Delta S = 2\pi k_B \frac{mc}{\hbar} \Delta x. \quad (3.13)$$

Para entendermos como a força entrópica surge vamos considerar o princípio do aumento de entropia, da segunda Lei da termodinâmica. Se a partícula de massa  $m$ , ao se aproximar da superfície holográfica, aumenta a entropia por um valor  $\Delta S$ , então, estará associado ao movimento da partícula na proximidade da superfície uma força de origem entrópica igual a

$$F \Delta x = T \Delta S. \quad (3.14)$$

Sendo assim, como Unruh mostrou, um observador em um quadro acelerado experimenta uma temperatura

$$k_B T = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar a}{c}, \quad (3.15)$$

onde  $a$  é a aceleração. Tomando a expressão como a temperatura associada aos *bits* na tela e usando (3.13), (3.14) e (3.15), obtemos

$$F = ma. \quad (3.16)$$

Recupera-se, então, a segunda lei de Newton. Esse resultado nos dá a relação entre a aceleração da partícula de massa  $m$  devido à força  $F$ , de origem entrópica, associada à temperatura e a variação de entropia na superfície holográfica. [10]

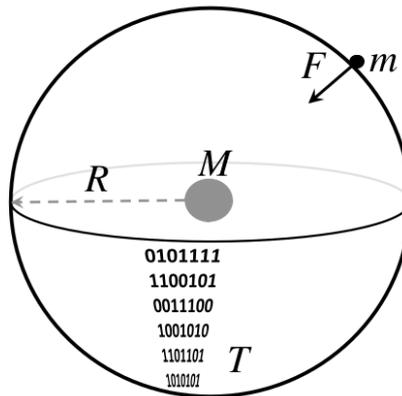
### 3.5 A Lei da Gravidade de Newton

Vamos considerar agora uma superfície holográfica esférica de raio  $R$ , com o interior descrito pela informação contida na superfície, ver Figura 7. Através do princípio holográfico o espaço máximo de armazenamento, ou número total de *bits*  $N$ , é proporcional à área  $A = 4\pi R^2$ , temos então

$$N = \frac{Ac^3}{G\hbar}, \quad (3.17)$$

onde a constante  $G$  será identificada como a constante de Newton. [10]

Figura 5 – Uma partícula de massa  $m$  se aproximando de uma superfície holográfica esférica com temperatura  $T$  e  $N$  *bits* de informação do sistema físico contido em seu interior cuja massa é  $M$ .



Fonte:[10].

Supondo a existência de uma energia total  $E$  presente no sistema físico e que esta energia é dividida uniformemente pelos *bits*,  $N$ . A temperatura é então determinada pela equipartição de energia sobre os bits de informação

$$E = \frac{1}{2}Nk_B T. \quad (3.18)$$

Podemos obter também a energia total  $E$  em termos da massa total  $M$  do sistema descrito na superfície holográfica usando a expressão

$$E = Mc^2. \quad (3.19)$$

Para determinar a força  $F$  que a partícula de massa  $m$  sofre quando se encontra

próxima à superfície holográfica, podemos através das equações (3.17), (3.18) e (3.19) obter a temperatura  $T$  em termos da massa emergente  $M$  e da área  $A$  da superfície, assumindo  $\frac{c^3}{\hbar G} = \alpha$ , temos

$$T = \frac{2Mc^2}{k_B \alpha A}. \quad (3.20)$$

E fazendo uso do postulado de variação de entropia, equação (3.13) na expressão que define força entrópica, ficamos

$$F = \frac{c^3}{\hbar \alpha} \frac{Mm}{R^2}. \quad (3.21)$$

Ao substituírmos mais uma vez  $\alpha$ , finalmente, obtemos

$$F = G \frac{Mm}{R^2}. \quad (3.22)$$

Como visto, das relações trabalhadas, por final recuperamos a lei da gravitação de Newton. Verlinde[10], assinala, após esse estudo, que essas equações não surgem por acaso, deveria funcionar pois as leis de Newton foram ingredientes nas etapas que levaram à termodinâmica dos buracos negros e ao princípio holográfico. Lança-se uma nova luz sobre a origem da gravidade: é uma força entrópica! Essa é a afirmação principal, que é nova e não foi feita antes. Que dada por verdade, deve ter consequências profundas.

### 3.6 Dedução das Equações de Einstein

Ao estender sua dedução das leis da gravidade ao caso relativístico, Verlinde obteve as equações de Einstein via termodinâmica. Isso pôde ser feito de maneira natural e análoga ao seu trabalho com a dedução da lei de Newton da gravidade. No que se segue, Verlinde, entre outros, fez uso do trabalho de Wald sobre a Relatividade Geral. [24] Usando uma notação na qual  $c$  e  $k_B$  são igualados a um, e mantendo  $G$  e  $\hbar$  explícitos. Então, partindo da generalização do potencial Newtoniano para a relatividade geral,  $\phi$ , dado em termos do vetor de Killing global do tipo tempo  $V^\alpha$ , o que subentende um espaço-tempo estático,

$$\phi = \frac{1}{2} \log(-V^\alpha V_\alpha), \quad (3.23)$$

divide-se o espaço-tempo em superfícies com  $\phi$  constante e considera essas superfícies como telas holográficas, e escolhe-se o vetor de Killing  $V^\alpha$  de forma a relacionar esse vetor com os gradientes de temperatura e entropia. [10]

Dada a quadri-velocidade e a quadri-aceleração, a expressão do efeito Unruh é generalizada para a linguagem tensorial, então, a temperatura local  $T$  na tela fica

$$T = \frac{\hbar}{2\pi} e^\phi N^b \nabla_b \phi, \quad (3.24)$$

onde  $e^\phi$  é um fator de *redshift*, pois a temperatura  $T$  é medida em relação ao ponto de referência no infinito.  $N^b$  é o vetor normal à superfície com  $\phi$  constante.

E, usando novamente o postulado da variação de entropia para quando uma partícula de massa  $m$  está muito próxima da tela holográfica, ou seja, assumindo que a variação de en-

tropia na tela é  $2\pi$  para um deslocamento de um comprimento de onda Compton normal à tela. Então,

$$\nabla_a S = -2\pi \frac{m}{\hbar} N_a. \quad (3.25)$$

Como antes, aqui também considerando uma distribuição de massa estática  $M$  dentro da superfície holográfica  $S$  e assumindo que a energia associada à essa massa  $M$  está distribuída uniformemente sobre os *bits* de informação na tela, pela equipartição da energia, temos que cada *bit* carrega uma unidade de massa igual a  $\frac{1}{2}T$ . Portanto,

$$M = \frac{1}{2} \int_S T dN, \quad (3.26)$$

onde  $dN$  é a densidade de *bits* na tela e é dado por

$$dN = \frac{dA}{G\hbar}. \quad (3.27)$$

Substituindo as equações (3.24) e (3.27) em (3.26), obtemos

$$M = \frac{1}{4\pi G} \int_S e^\phi \nabla \phi \cdot d\vec{A}, \quad (3.28)$$

Essa equação é a definição da massa contida dentro de um volume dentro de qualquer espaço-tempo curvo estático, de Komar.

Verlinde assinala que uma questão análoga foi abordada por Jacobson [25] e adaptando seu raciocínio, reescrevendo a equação (3.26) em termos do vetor de Killing  $V^\alpha$ , igualando à expressão de massa total dada em termos da integral do tensor de energia-momento  $T_{ab}$ , o que leva a uma igualdade entre duas integrais de volume tensoriais, ele é constrói um argumento que conduz para as equações de Einstein,

$$2 \int_\Sigma \left( T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) n^a V^b dV = \frac{1}{4\pi G} \int_\Sigma R_{ab} n^a V^b dV, \quad (3.29)$$

onde  $\Sigma$  é o volume tridimensional delimitado pela tela holográfica e  $n^a$  é o quadri-vetor normal à superfície e  $R_{ab}$  é o tensor de Ricci. Essa igualdade leva à equação de Einstein [10].

## 4 UNIVERSO ESCURO

### 4.1 Energia Escura e a Entropia no Espaço de de Sitter

A principal hipótese da qual Verlinde derivou as leis da gravidade que emergem no espaço de de Sitter e os efeitos que levam a fenômenos atribuídos à matéria escura está contida nas duas afirmações a seguir. (i) Existe uma perspectiva microscópica na qual a lei de área para a entropia de emaranhamento é devido ao emaranhamento de curta distância de graus vizinhos de liberdade que constroem o espaço-tempo emergente. (ii) A entropia de de Sitter é dividida igualmente sobre os mesmos graus de liberdade microscópicos que constroem o espaço-tempo emergente através de seu emaranhamento, e é causada pelo emaranhamento de longo alcance de parte desses graus de liberdade. Vamos associar a entropia com as excitações que carregam a energia escura positiva. [9]

A seguir, uma descrição quantitativa da entropia do espaço de de Sitter para o caminho de coordenadas estáticas descrito pela métrica

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (4.1)$$

onde a função  $f(r)$  é dada por

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{L^2}. \quad (4.2)$$

Tomamos a perspectiva de um observador próximo à origem  $r = 0$ , de modo que a borda de seu domínio causal coincida com o horizonte em  $r = L$ . A entropia do horizonte fica

$$S_{DE}(L) = \frac{A(L)}{4G\hbar}, \quad (4.3)$$

com

$$A(L) = \Omega_{d-2} L^{d-2}, \quad (4.4)$$

onde  $\Omega_{d-2}$  é o volume de uma esfera unitária de  $(d-2)$ -dimensões. Nossa hipótese é que essa entropia é distribuída uniformemente sobre graus microscópicos de liberdade que compõem o espaço-tempo. Para determinar a densidade de entropia, vemos a seção espacial em  $t = 0$  como uma bola com raio  $L$  limitada pelo horizonte. A entropia total de de Sitter é dividido sobre este volume de modo que uma bola de raio  $r$  centrada em torno da origem contenha uma entropia  $S_{DE}(r)$  proporcional ao seu volume

$$S_{DE}(r) = \frac{1}{V_0} V(r), \quad (4.5)$$

com

$$V(r) = \frac{\Omega_{d-2} r^{d-1}}{d-1}. \quad (4.6)$$

O subscrito DE indica que a entropia é transportada por excitações dos graus de liberdade microscópicos que elevam a energia negativa do estado fundamental para o valor positivo associada à energia escura. [9]

O valor do volume  $V_0$  por unidade de entropia decorre da exigência de que a entropia total  $S_{DE}(L)$ , onde colocamos  $r = L$ , seja igual à entropia de Bekenstein-Hawking associada ao horizonte cosmológico. Comparando (4.5) para  $r = L$  com (4.3) obtém-se que  $V_0$  assume o valor

$$V_0 = \frac{4G\hbar L}{d-1}, \quad (4.7)$$

onde o fator  $\frac{d-1}{L}$  vem da normalização relativa da área do horizonte  $A(L)$  e do volume  $V(L)$ . Essa densidade de entropia é assim determinada pela área de Planck e a escala de Hubble. Na verdade, esse valor da densidade de entropia foi proposto como um limite superior holográfico em um cenário cosmológico. [9]

Uma maneira alternativa de escrever a entropia  $S_{DE}(r)$  é em termos da área  $A(r)$  como

$$V_0 = \frac{r A(r)}{L 4G\hbar}, \quad (4.8)$$

com

$$A(r) = \Omega_{d-2} L^{d-2}. \quad (4.9)$$

Dessa expressão fica claro que quando colocamos  $r = L$  recuperamos a entropia de Bekenstein-Hawking.

#### 4.2 O Efeito da Matéria na Entropia e na Energia Escura

Ao adicionar matéria ao espaço de de Sitter, é possível mostrar que sua entropia diminui. Esse fato é de importância central para os argumentos que serão construídos. Dentro da perspectiva global de dois lados no espaço de de Sitter a entropia de Bekenstein-Hawking do horizonte pode ser interpretada como quantificando a quantidade de emaranhamento entre as duas manchas estáticas em lados opostos do horizonte. Conforme mostrado na figura 6, a adição de uma massa  $M$  em um lado do horizonte precisa ser acompanhada de uma massa  $M$  do outro lado, se a métrica fora das massas deve ser descrita pela solução de Sitter-Schwarzschild. Essa métrica ainda tem a forma (4.1), mas com

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{L^2} + 2\Phi(r), \quad (4.10)$$

onde

$$\Phi(r) = -\frac{8\pi GM}{(d-2)\Omega_{d-2}r^{d-3}}. \quad (4.11)$$

é o potencial de Newton devido à massa  $M$ . O horizonte está localizado no raio  $r$  em que  $f(r) = 0$ . Sem a massa  $M$ , o horizonte está localizado em  $r = L$  e o total a entropia associada ao espaço de Sitter é dada por (4.3) e (4.4). Para determinar a mudança de entropia devido à adição da massa  $M$  calculamos o deslocamento do local do horizonte. Na aproximação  $\Phi(L) \ll 1$ ,  $L$  está deslocado de seu valor inicial. O novo valor será

$$L \rightarrow L + u(L), \quad (4.12)$$

com

$$u(L) = \phi(L)L. \quad (4.13)$$

Observe que o deslocamento é negativo,  $u(L) < 0$ , portanto, o tamanho do horizonte está sendo reduzido pela adição da massa  $M$ . Como resultado, a entropia total de de Sitter muda por uma quantidade negativa  $S_M(L)$  dada por

$$S_M = u(L) \frac{d}{dL} \left( \frac{A(L)}{4G\hbar} \right) = -\frac{2\pi ML}{\hbar}. \quad (4.14)$$

Essa mudança de entropia corresponde a uma redução da quantidade de emaranhamento entre os dois lados do horizonte devido à adição da massa  $M$ . Aparentemente, adicionar matéria ao espaço-tempo reduz a quantidade de entropia de emaranhamento. Nossa interpretação da relatividade geral e das equações de Einstein é que ela descreve a resposta do emaranhamento da lei de área do espaço-tempo do vácuo à matéria. E, para entender melhor a relação entre a redução do emaranhamento e a entropia total de de Sitter, vamos calcular o efeito da matéria na área de regiões muito menores que o horizonte. Portanto, agora tomamos  $r \ll L$ , de modo que possamos descartar o termo  $\frac{r^2}{L^2}$  na métrica. Como mostraremos agora, a massa reduz a taxa de crescimento da área em função da distância geodésica. [9]

Então, comparando o aumento da área em função da distância geodésica na situação com e sem massa. Para combinar as duas geometrias, tomamos esferas o mesmo valor de  $r$ . Sem a massa a distância geodésica é igual a  $r$ , enquanto na presença da massa  $M$  um pequeno incremento  $dr$  leva a uma aumento da distância geodésica  $ds$ , uma vez que  $dr = (1 + \phi(r))ds$ . Então

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{A(r)}{4G\hbar} \right) = \phi(r) \frac{d}{dr} \left( \frac{A(r)}{4G\hbar} \right) = -\frac{2\pi M}{\hbar}. \quad (4.15)$$

em que estamos tomando a diferença entre situações com  $M \neq 0$  e sem a massa,  $M = 0$ .

Podemos reinterpretar (4.15) como uma equação para a quantidade de entropia de emaranhamento  $S_M(r)$  que a massa  $M$  retira de uma região esférica de tamanho  $r$ . Tal quantidade é um pouco complicada de definir, pois é preciso especificar como identificar as duas geometrias com e sem a massa. Para contornar este problema definimos  $S_M(r)$  através de sua derivada em relação a  $r$ , que identificamos com o lado esquerdo da equação (4.15). Em outras palavras, propomos que a seguinte relação é válida

$$\frac{dS_M(r)}{dr} = -\frac{2\pi M}{\hbar}. \quad (4.16)$$

Onde Verlinde usou o fato de que no regime de gravidade fraca o aumento da distância geodésica  $ds$  e  $dr$  são aproximadamente iguais. E integrando

$$S_M(r) = -\frac{2\pi M r}{\hbar}, \quad (4.17)$$

que é conhecido como limite de Bekenstein [26], e sugere que a definição de massa na gravidade emergente é dada em termos de entropia relativa. Concluímos que a massa  $M$  reduz a quantidade da entropia de emaranhamento do espaço-tempo circundante por  $S_M(r)$ . Isso acontece em todos os espaços-tempos, seja AdS, espaço plano ou de de Sitter, portanto é logicamente diferente

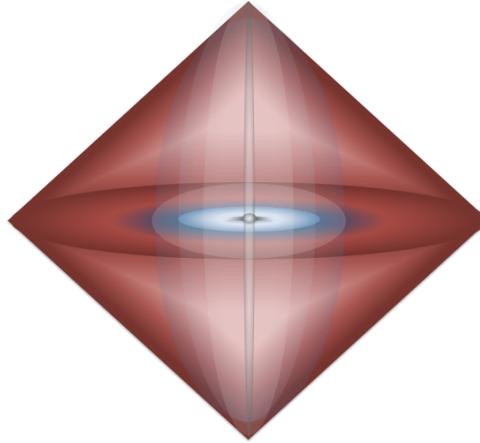
da redução da entropia total de de Sitter. No entanto, os resultados concordam que quando colocamos  $r = L$ , reproduzimos a mudança da entropia de Sitter (4.14). Descobrimos que a massa  $M$  reduz a entropia de emaranhamento da região com raio  $r$  por uma fração  $\frac{r}{L}$  de  $S_M(L)$ .

### 4.3 Um Critério Entrópico Para a Fase Escura da Gravidade Emergente

Vamos considerar agora uma região esférica com raio  $r$  que está próxima ao centro do espaço de de Sitter. De acordo com nossa hipótese feita anteriormente, a entropia de de Sitter dentro de um região esférica com raio  $r$  é dada por

$$S_{DE}(r) = \frac{1}{V_0} V(r) = \frac{r A(r)}{L 4G\hbar}. \quad (4.18)$$

Figura 6 – Uma perspectiva unilateral no espaço de Sitter com uma massa  $M$  no centro. A entropia associada à área do horizonte está contida em estados deslocalizados que ocupam a maior parte. A massa  $M$  remove parte e, portanto, desloca o conteúdo de entropia no interior.



Fonte:[9].

O mesmo fator  $\frac{r}{L}$  aparece nesta expressão como na razão entre a entropia removida  $S_M(r)$  dentro de um raio  $r$  e a entropia total removida  $S_M(L)$ . Esta observação tem uma consequência importante e nos permite expressar o critério que separa os regimes onde a “massa que falta” se torna visível. Podemos formular este critério como uma condição da razão entre a entropia removida  $S_M(r)$  e o conteúdo de entropia  $S_{DE}(r)$  da energia escura. De forma concreta, a condição de que  $\frac{2\pi M r}{\hbar}$  seja menor ou maior que  $\frac{A}{4G}$  implica que [9]

$$S_M(r) \lesseqgtr S_{DE}(r), \quad (4.19)$$

ou

$$\frac{2\pi M r}{\hbar} \lesseqgtr \frac{r A(r)}{L 4G\hbar}. \quad (4.20)$$

Podemos expressar este critério como uma condição do volume  $V_M(r)$  que contém a mesma quantidade de entropia que é retirada pela massa  $M$  dentro de uma esfera de raio  $r$ . Esse volume é dado por

$$S_M = -\frac{1}{V_0} V_M(r). \quad (4.21)$$

com

$$V_0 = \frac{4G\hbar L}{d-1}. \quad (4.22)$$

O critério (4.19) e (4.20) torna-se então equivalente à afirmação de que a razão entre o volume  $V_M(r)$  e o volume  $V(r)$  da bola de raio  $r$  é menor ou maior que um

$$\varepsilon_M(r) \equiv \frac{V_M(r)}{V(r)} \lesseqgtr 1. \quad (4.23)$$

Observações de curvas de rotação das galáxias nos dizem que a natureza da gravidade muda dependendo se a matéria remove todo ou apenas uma fração do conteúdo de entropia de de Sitter. É possível verificar que o volume  $V_M(r)$  é dado por

$$V_M(r) = \frac{8\pi G}{a_0} \frac{M_R}{d-1}. \quad (4.24)$$

Substituiu-se o comprimento  $L$  de Hubble pela escala de aceleração  $a_0$  para chegar a uma fórmula dimensionalmente correta. Em outras palavras, este volume não depende de  $\hbar$  ou de  $c$ . Como veremos, a descrição elástica que vamos apresentar depende apenas das constantes  $G$  e  $a_0$  e, portanto, contém naturalmente os parâmetros que são observados nos fenômenos atribuídos à matéria escura.

Um comentário relacionado é que a razão  $\varepsilon_M(r)$  pode ser usada para determinar o valor da densidade de massa superficial  $\Sigma_M(r) = \frac{M}{A(r)}$  em termos de  $a_0$  e  $G$  via

$$\varepsilon_M(r) = \frac{8\pi G}{a_0} \Sigma_M(r). \quad (4.25)$$

Essa relação resulta de inserirmos nas expressões (4.21) e (4.22) e o resultado (4.28) para a entropia removida  $S_M(r)$  em (4.17). Também restabeleceu-se os fatores da velocidade da luz para obter uma expressão dimensionalmente correta. O regime onde  $S_M(r) < S_{DE}(r)$  corresponde a  $\varepsilon_M(r) < 1$ , portanto, neste regime estamos lidando com uma baixa densidade de massa superficial e baixa aceleração gravitacional. Por esse motivo, será referido como o regime “sub-Newtoniano” ou “gravidade escura”. [9]

#### 4.4 Deslocamento do Conteúdo de Entropia do Espaço de de Sitter

No regime onde apenas parte da entropia de de Sitter é removida pela matéria, a entropia remanescente contida nos estados deslocalizados de de Sitter passa a ter um efeito não desprezível. Isso leva a modificações nas leis gravitacionais usuais, uma vez que essas levam em conta apenas o efeito do emaranhamento da lei da área. Para determinar essas modificações, temos que acompanhar o deslocamento do conteúdo de entropia devido à matéria. No presente contexto, onde estamos lidando com uma massa central  $M$ , é possível representar esse deslocamento como uma função escalar  $u(r)$  que acompanha a distância sobre a qual a informação é deslocada na direção radial.

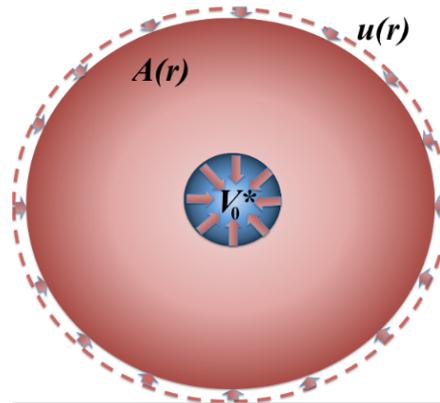
Em um meio elástico encontramos um deslocamento puramente radial  $u(r)$  quando se remove (ou adiciona) certa quantidade do meio de forma simétrica de dentro de uma região esférica. O valor do campo de deslocamento  $u(r)$  determina quanto do meio foi removido. Se

assumirmos que o meio fora da região onde o volume é removido é incompressível, a variação de volume é dada por uma casca fina com espessura  $u(r)$  e área  $A(r)$ . O sinal de  $u(r)$  determina se a mudança no volume foi positiva ou negativa. Além disso, assumimos que a mudança no volume é proporcional à entropia removida  $S_M(r)$ . Obtemos, então, a relação

$$S_M(r) = \frac{1}{V_0^*} u(r) A(r). \quad (4.26)$$

onde o volume  $V_0^*$  é assumido como sendo da mesma ordem que o volume  $V_0$  por unidade

Figura 7 – Uma certa quantidade de volume sendo removida de um meio elástico, levando a um dado deslocamento.



Fonte:[9].

de entropia. Para determinar o valor de  $V_0^*$  impomos que no horizonte o deslocamento  $u(L)$  é identificado com o deslocamento da posição do horizonte  $u(L) = \frac{\phi(L)}{a_0}$ . Do fato de que a entropia removida  $S_M(r)$  é linear em  $r$ , deduzimos que o deslocamento  $u(r)$  cai como  $\frac{1}{ra^3}$  assim como o potencial de Newton  $\phi(r)$ . Isso significa que em um raio arbitrário  $r$  podemos expressar  $u(r)$  em termos de  $\phi(r)$  como [9]

$$u(r) = \phi(r)L. \quad (4.27)$$

Combinando as expressões (4.17) e (4.27) e inserindo a forma explícita do potencial Newtoniano (4.10) e (4.11) verifica-se que o volume  $V_0^*$  é ligeiramente maior que  $V_0$

$$V_0^* = \frac{4G\hbar L}{d-2}. \quad (4.28)$$

Portanto,

$$\frac{V_0^*}{V_0} = \frac{d-1}{d-2}. \quad (4.29)$$

O volume total removido é, então, ligeiramente maior que  $V_M(r)$  pelo mesmo fator. Vamos denotar o volume que foi removido de dentro de uma região esférica  $\mathcal{B}(r)$  por  $V_M^*(r)$ . O deslocamento  $u(r)$  pode então ser escrito como

$$u(r) = -\frac{V_M^*(r)}{A(r)}, \quad (4.30)$$

onde

$$V_M^*(r) = \frac{8\pi G}{a_0} \frac{M_r}{d-2}. \quad (4.31)$$

O fator relativo entre  $V_M^*(r)$  e  $V_M(r)$  pode ser diretamente ligado ao fato de que estamos lidando com uma transição de emaranhamento da lei da área para a lei do volume.

Em um meio elástico, um campo de deslocamento leva a uma deformação elástica e a uma tensão correspondente, que em geral são descritas por campos de valor tensorial. Aqui, estamos interessados apenas nas componentes normais da deformação e da tensão, portanto, para simplificar a notação, suprimiremos os índices tensoriais e denotaremos a deformação normal e a tensão normal simplesmente por  $\varepsilon(r)$  e  $\sigma(r)$ . Nossa proposta de explicação dos fenômenos gravitacionais associados à "matéria escura" é que no regime onde apenas parte da entropia é removida, ou seja, onde  $\varepsilon_M(r) < 1$ , a entropia remanescente associada à energia escura se comporta como um elástico incompressível. Especificamente, propomos que a entropia  $S_M(r)$  seja removida apenas de uma região de inclusão local  $\mathcal{V}_M(r)$  com volume  $V_M(r)$ . Representamos a região  $\mathcal{V}_M(r)$  como a interseção de uma região fixa  $\mathcal{V}_M(L)$  com uma bola  $\mathcal{B}(r)$  de raio  $r$  centrada em torno da origem,

$$\mathcal{V}_M(r) = \mathcal{V}_M(L) \cap \mathcal{B}(r). \quad (4.32)$$

Para lidar com o fato de que o volume removido  $V_M^*(r)$  depende do raio  $r$ , utilizamos a linearidade da elasticidade para decompor a região  $\mathcal{V}_M(r)$  em pequenas regiões esféricas  $\mathcal{B}_i$  com volume  $N_i V_0$ . De cada  $\mathcal{B}_i$  um volume fixo  $N_i V_0^*$  foi removido correspondendo a unidades de entropia de  $N_i$ . Primeiro determinamos o deslocamento para cada região e, em seguida, calculamos o deslocamento total somando as diferentes contribuições. [9]

Considerando o campo de deslocamento  $u(r)$  resultante da remoção de um volume  $NV_0^*$  de uma única região esférica  $\mathcal{B}_0$  com volume  $NV_0$ . Por simplicidade e definição, vamos supor que  $\mathcal{B}_0$  esteja centrado na origem do espaço de Sitter. O campo de deslocamento fora de  $\mathcal{B}_0$  é dado por

$$u(r) = -\frac{NV_0^*}{A(r)}. \quad (4.33)$$

A deformação normal  $\varepsilon(r)$  corresponde à componente  $r-r$  do tensor de deformação e é dada pela derivada radial  $\varepsilon(r) = u'(r)$ . Então,

$$\varepsilon(r) = \frac{NV_0}{V(r)}. \quad (4.34)$$

Um fator  $(d-2)/(d-1)$  foi absorvido fazendo a substituição  $V_0^* \rightarrow V_0$ . Como o volume de  $\mathcal{B}_0$  é igual a  $NV_0$ , descobrimos que a deformação normal  $\varepsilon(r)$  em seu limite é igual a um. Para obtermos este resultado utilizamos a razão específica de  $V_0^*$  e  $V_0$ .

Este mesmo cálculo pode ser realizado para cada pequena bola  $\mathcal{B}_i$  e leva a um campo de deslocamento  $u_i$  e deformação  $\varepsilon_i$  idêntico a (4.33) e (4.34) onde o raio é definido em relação ao centro de  $\mathcal{B}_i$  e o número de unidades de a entropia removida é igual para  $N_i$ . Adicionando todas essas diferentes contribuições podemos, em princípio, determinar o deslocamento total e a deformação devido à remoção da entropia  $S_M(r)$  da região  $\mathcal{V}_M$ . Aqui temos que distinguir dois regimes. Quando  $V_M(r) > V(r)$  estamos dentro da região  $\mathcal{V}_M$  e "todo o vo-

lume disponível”foi removido. Isso significa que a redução de entropia devido à massa é maior do que a entropia térmica disponível. Nesta região a resposta à redução da entropia devido à massa  $M$  é controlada pela lei da área para o emaranhamento, o que leva às leis usuais da gravidade. Estamos interessados no outro regime onde  $V_M(r) < V(r)$ , pois é aqui que aparecerão as modificações devidas à lei do volume.

A quantidade total de entropia que é removida dentro de um raio  $r$  é igual a  $S_M(r)$ . Assim, a princípio podemos simplesmente tentar substituir  $N$  por  $S_M(r)$  de modo que o volume removido  $NV_0^*$  se torne igual a  $V_M^*(r)$ , e  $NV_0$  ao volume  $V_M(r)$  da região  $\mathcal{V}_M(r)$ . De fato, se fizermos as substituições

$$NV_0^*(r) \rightarrow V_M^*(r) \quad (4.35)$$

e

$$NV_0(r) \rightarrow V_M(r), \quad (4.36)$$

o deslocamento  $u(r)$  fica igual a (4.30) e (4.31), e a expressão (4.34) para  $\varepsilon(r)$  fica idêntica à quantidade  $\varepsilon_M(r)$  introduzida em (4.23). Dessa forma, descobrimos que o critério  $DM$  aparente pode ser interpretado como uma condição na deformação elástica normal  $\varepsilon(r)$ , a transição da gravidade Newtoniana para o regime da matéria escura aparente ocorre quando a deformação elástica cai em valor abaixo de um.

A quantidade  $\varepsilon(r)$ , como agora definimos, é igual à deformação normal no regime onde o volume removido é mantido constante. Em outras palavras, onde o meio é tratado como incompressível. Neste regime a deformação normal  $\varepsilon(r)$  determina o valor da densidade aparente de massa superficial  $\Sigma(r)$  precisamente através da relação (4.34), na qual podemos reformular

$$\Sigma(r) = \frac{a_0}{8\pi G} \varepsilon(r). \quad (4.37)$$

Usaremos a (4.37) para determinar a densidade aparente de massa superficial no regime  $\varepsilon(r) < 1$ . Aqui o volume  $V_M(r)$  é menor que o volume  $V(r)$  da esfera com raio  $r$ . Sendo assim, não está mais claro que podemos pegar a relação (4.34) e fazer a substituição (4.35) e (4.36). Uma derivação mais precisa envolveria adicionar todas essas contribuições separadas das pequenas bolas  $\mathcal{B}_i$  que juntas compõem a região  $\mathcal{V}_M(r)$ . Mostraremos agora que isso leva através da relação (4.37) a uma densidade de massa superficial que inclui a contribuição da matéria escura aparente. [9]

#### 4.5 Uma Derivação Heurística da Relação de Tully-Fisher

É possível, agora, fazer uma proposta de explicação dos fenômenos observados atribuídos à matéria escura. Baseia-se na ideia de que as leis padrão de Newton e da relatividade geral descrevem a resposta do emaranhamento da lei da área à matéria, enquanto no regime  $\varepsilon(r) < 1$  a força gravitacional é dominada pela resposta elástica devido à contribuição da lei do volume. Mostraremos que a lei de Tully-Fisher para as densidades superficiais da matéria escura aparente e a matéria bariônica é derivada de uma estimativa quantitativa da deformação e estresse causados pela entropia  $S_M(r)$  removida pela matéria.

Voltando ao resultado (4.34) para a deformação fora de uma pequena região  $\mathcal{B}_0$  de tamanho  $NV_0$  e calculando a integral do quadrado  $\varepsilon^2(r)$  sobre a região fora de  $\mathcal{B}_0$  com

$V(r) > NV_0$ . Denotou-se esta região como o complemento de  $\overline{\mathcal{B}_0}$  da bola  $\mathcal{B}_0$ . A integral fornece o volume da região  $\mathcal{B}_0$  da qual a entropia foi removida

$$\int_{\overline{\mathcal{B}_0}} \varepsilon^2(r)A(r)dr = \int_{NV_0}^{\infty} \left( \frac{NV_0}{V} \right)^2 dV = NV_0. \quad (4.38)$$

Este resultado é bem conhecido na teoria das “inclusões elásticas” [27]. Neste contexto, a equação (4.38) é usada para estimar a energia elástica causada pela presença da inclusão. Este mesmo método também foi aplicado para calcular os efeitos de memória em polímeros emaranhados. [28]

É possível repetir este cálculo para todas as pequenas bolas  $\mathcal{B}_i$  que juntas formam a região  $\mathcal{V}_M(r)$  para mostrar que a integral de  $\varepsilon_i^2$  sobre a região fora de  $\mathcal{B}_i$  é dada por  $N_iV_0$ . Como  $\varepsilon_i$  cai rapidamente como  $1/r(d-1)$  com a distância do centro, a principal contribuição para a integral vem da vizinhança de  $\mathcal{B}_i$ . Assumimos agora que, no regime em que  $V_M(r) < V(r)$ , todas as pequenas regiões  $\mathcal{B}_i$  são disjuntas e separadas o suficiente para que a deformação elástica  $\varepsilon_i$  para cada bola  $\mathcal{B}_i$  seja localizada principalmente em sua própria vizinhança. Isso significa que a integral do quadrado da deformação total é igual à soma das contribuições dos quadrados individuais  $\varepsilon_i^2$  para todas as bolas  $\mathcal{B}_i$ . Em outras palavras, os termos cruzados entre  $\varepsilon_i$  e  $\varepsilon_j$  podem ser ignorados quando  $i \neq j$ . Na seção 7 será mostrado que isso pode ser provado exatamente. A integral de  $\varepsilon^2$  sobre a bola  $\mathcal{B}(r)$  com raio  $r$  se decompõe em uma soma de contribuições provenientes das vizinhanças de cada pequena região  $\mathcal{B}_i$  [9]

$$\int_{\mathcal{B}(r)} \varepsilon^2 dV \approx \sum_i \int_{\overline{\mathcal{B}_i} \cap \mathcal{B}(r)} \varepsilon_i^2 dV \approx \sum_{\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}(r)} \int_{\mathcal{B}_i} \varepsilon_i^2 dV = \sum_{\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}(r)} N_iV_0 = V_M(r). \quad (4.39)$$

Cada uma dessas integrais é, com uma boa aproximação, igual ao volume  $N_iV_0$  de  $\mathcal{B}_i$ , e, como essas integrais juntas constituem a região  $\mathcal{V}_M$ , descobrimos que a soma total dá o volume  $V_M(r)$ . Faremos ainda a suposição simplificadora de que na esfera esférica situação simétrica a deformação resultante é apenas uma função do raio  $r$ . Desta forma encontramos

$$\int_0^r \varepsilon^2(r')A(r')dr' = V_M(r). \quad (4.40)$$

Para chegar à relação de Tully-Fisher entre a densidade superficial de massa da matéria escura aparente e a matéria escura bariônica diferenciamos essa expressão em relação ao raio. Se assumirmos que a distribuição de massa está bem localizada perto da origem, podemos tratar a massa  $M$  como uma constante. Nesse caso obtemos

$$\varepsilon^2(r) = \frac{1}{A(r)} \frac{dV_M(r)}{dr} = \frac{1}{A(r)} \frac{8\pi G}{a_0} \frac{M}{d-1}. \quad (4.41)$$

Será feita agora a identificação da densidade superficial de massa aparente com  $\varepsilon(r)$ . Obtemos uma relação para a densidade superficial de massa aparente da matéria escura e densidade de massa superficial da matéria bariônica visível. Para distinguir a densidade superficial de massa aparente daquela definida em termos da massa  $M$ , denotaremos a primeira como  $\rho_D$  e a última

como  $\rho_B$ . Essas quantidades são definidas como

$$\rho_D(r) = \frac{a_0}{8\pi G} \varepsilon(r) \quad (4.42)$$

e

$$\rho_B(r) = \frac{M}{A(r)}. \quad (4.43)$$

Com essas definições recupera-se precisamente a relação

$$\rho_D(r)^2 = \frac{a_0}{8\pi G} \frac{\rho_B(r)}{d-1}. \quad (4.44)$$

#### 4.6 A Fase Elástica da Gravidade Emergente

Como foi dito anteriormente, o efeito da matéria é deslocar o conteúdo de entropia do espaço de de Sitter. Nosso objetivo é descrever como a reação elástica resultante se traduz em uma força gravitacional efetiva. Descreveremos essa resposta usando a teoria linear padrão da elasticidade.

##### 4.6.1 Elasticidade Linear e a Definição de Massa

A variável básica na elasticidade é o campo de deslocamento  $u_i$ . O tensor de deformação linear é dado em termos de  $u_i$  por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i). \quad (4.45)$$

Na teoria linear da elasticidade, o tensor de tensão  $\sigma_{ij}$  obedece à versão tensorial da lei de Hooke. Para meios elásticos isotrópicos e homogêneos existem dois módulos elásticos independentes convencionalmente denotados por  $\lambda$  e  $\mu$ . Esses chamados parâmetros de Lamé aparecem no tensor de tensão como segue

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (4.46)$$

A combinação  $K = \lambda + 2\mu/(d-1)$  é chamada de módulo do volume. O módulo de cisalhamento é igual a  $\mu$ , e determina a velocidade das ondas de cisalhamento, enquanto a velocidade das ondas de pressão é determinada por  $\lambda + 2\mu$ . Exigir que ambas as velocidades sejam reais leva a as seguintes desigualdades nos parâmetros de Lamé

$$\mu \geq 0 \quad (4.47)$$

e

$$\lambda + 2\mu \geq 0. \quad (4.48)$$

O objetivo é relacionar todas essas grandezas elásticas às grandezas gravitacionais correspondentes. Em particular, o autor dará um mapa do campo de deslocamento, a deformação e o tensor de tensão para o potencial Newtoniano aparente, aceleração gravitacional e densidade superficial de massa. Além disso, expressaremos os módulos elásticos em termos da constante  $G$  de Newton e da aceleração de Hubble  $a_0$ .

Como o espaço de de Sitter não tem infinito assintótico, a definição precisa de massa é problemática. Em geral, a massa só pode ser definida com precisão com a ajuda de um referencial específico. Em um espaço assintoticamente plano ou AdS, esse quadro de referência é fornecido pela geometria assintótica. É proposto que no espaço de de Sitter o papel desse referencial auxiliar e, portanto, a definição da massa, é fornecido pelo meio elástico associado à contribuição da lei do volume para a entropia do emaranhamento. Em outras palavras, o referencial em relação ao qual definiu-se a massa  $M$  deve ser escolhido no local onde o regime da gravidade Newtoniana faz a transição para a fase elástica. Isso implica que a definição de massa depende do valor do campo de deslocamento, sua deformação e o tensor de tensão correspondente com o meio elástico. [9]

Verlinde mostra agora que a definição de massa do ADM pode ser traduzida naturalmente em uma expressão para o tensor de deformação elástica. Vimos anteriormente que o campo de deslocamento  $u_i$  no horizonte é dado por

$$u_i = \frac{\phi}{a_0} \quad (4.49)$$

com

$$n_i = \frac{x_i}{|x|}. \quad (4.50)$$

E, argumenta-se que uma identificação semelhante ocorre no interior do espaço de de Sitter. Alternativamente, é possível introduzir o campo de deslocamento  $u_i$  em termos da métrica espacial  $h_{ij}$  via Ansatz

$$h_{ij} = \delta_{ij} - \frac{a_0}{c^2}(u_i n_j + n_i u_j). \quad (4.51)$$

Tomou-se um limite não-relativístico no qual levamos  $L$  e  $c$  ao infinito, mantendo  $a_0 = c^2/L$  fixo. Portanto, será trabalhado quase exclusivamente no regime Newtoniano e não tentaremos fazer uma correspondência com as equações gravitacionais relativísticas completas.

É possível mostrar que uma expressão para a massa  $M$  pode ser escrita da seguinte maneira sugestiva em termos do tensor de deformação  $\varepsilon_{ij}$  para o campo de deslocamento  $u_i$  definido em (4.51)

$$M = \frac{a_0}{8\pi G} \int_{S_\infty} (n_j \varepsilon_{ij} - n_i \varepsilon_{jj}) dA_i. \quad (4.52)$$

Aqui utilizou-se do fato de que a superfície de integração está distante da distribuição da matéria, de modo que  $\phi$  depende apenas da distância  $|x|$  ao centro de massa. Ressaltamos novamente que o prefator  $a_0/8\pi G$  em (4.52) é idêntico ao valor crítico observado para a densidade superficial de massa. [9]

Quando multiplica-se a expressão (4.51) para  $M$  pela escala de aceleração  $a_0$  obtemos uma grandeza física com a dimensão de uma força. Isso leva a reexpressar o lado direito como

$$M_{a_0} = \oint_{S_\infty} \sigma_{ij} n_i n_j dA_i, \quad (4.53)$$

onde identificou-se o tensor de tensão  $\sigma_{ij}$  em termos do tensor de deformação da seguinte forma

$$\sigma_{ij} = \frac{a_0^2}{8\pi G} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk} \delta_{ij}). \quad (4.54)$$

Comparando com (4.46) podemos ver que os módulos elásticos do meio elástico escuro assumem os seguintes valores

$$\mu = \frac{a_0^2}{16\pi G} \quad (4.55)$$

e

$$\lambda + 2\mu = 0. \quad (4.56)$$

Então, descobre-se que o módulo de cisalhamento tem um valor positivo, mas que o módulo da onda  $P$  desaparece. O módulo de cisalhamento tem a dimensão da densidade de energia, como deveria, e é até um fator  $(d-1)(d-2)$  igual à densidade de energia cosmológica.

Na teoria da elasticidade, o integrando do lado direito de (4.53) representa a força de tração externa  $\sigma_{ij}n_j$ . O lado esquerdo, por outro lado, é a força externa em uma casca de massa com massa total  $M$  quando ela experimenta uma aceleração externa igual à aceleração superficial  $a_0$  no horizonte. Assim, é natural interpretar o equação (4.53) como a expressão de um equilíbrio de forças.

O valor preciso (4.55) e (4.56) do módulo de cisalhamento é determinado pelo seguinte cálculo. Consideremos a situação especial em que a superfície  $S_\infty$  corresponde a uma superfície equipotencial. Neste caso podemos igualar a auto-energia gravitacional delimitada por  $S_\infty$  exatamente com a auto-energia elástica

$$\frac{1}{2}M\phi = \frac{1}{2} \oint_{S_\infty} \sigma_{ij}u_j d\vec{A}_i. \quad (4.57)$$

#### 4.6.2 A Correspondência Elasticidade/Gravidade no Regime Sub-Newtoniano

Verlinde inicia reescrevendo as leis familiares da gravidade newtoniana em termos de um vetor de densidade superficial de massa. E introduzindo um campo vetorial  $\rho_i$  definido em termos do potencial newtoniano  $\phi$  via

$$\rho_i = - \left( \frac{d-2}{d-3} \right) \frac{\vec{g}_i}{8\pi G}, \quad (4.58)$$

onde

$$\vec{g}_i = -\nabla_i\phi, \quad (4.59)$$

é a aceleração gravitacional padrão. Ao trabalharmos com  $\rho_i$  em lugar de  $g_i$ , evitamos alguns fatores dependentes de dimensão e tornamos a correspondência com as quantidades elásticas mais simples. A normalização é escolhida de modo que a forma análoga gravitacional da lei de Gauss fica

$$\nabla_i \vec{\rho}_i = \rho \quad (4.60)$$

ou

$$\oint_S \rho_i d\vec{A}_i = M, \quad (4.61)$$

onde  $M$  é a massa total dentro da região delimitada pela superfície  $S$ . Nos referiremos a  $\rho_i$  como a densidade superficial de massa. A auto-energia gravitacional de uma configuração de massa pode ser expressa em termos do campo de aceleração  $g_i$  e do campo vetorial da densidade

superficial de massa,  $\rho_i$  como

$$U_{grav} = \frac{1}{2} \int dV \vec{g}_i \rho_i. \quad (4.62)$$

O interesse é na força sobre um pequeno ponto de massa  $m$  localizado em algum ponto  $P$ . Seu potencial Newtoniano  $\phi^m$  e densidade superficial de massa,  $\rho^m$ , são originados pela densidade de massa  $\rho^m = m\delta(x - x_P)$ . A força que atua sobre a massa pontual é derivada do potencial gravitacional, que obedece

$$m\phi(P) = \oint_S d\vec{A}_i (\phi^m \rho_i - \phi \rho_i^m). \quad (4.63)$$

Aqui, a superfície  $S$  é escolhida de modo que inclua a distribuição de massa que origina o campo  $\phi$  e  $\rho_i$ .

Todas essas equações têm sua forma análoga na teoria linear da elasticidade. O campo de deslocamento  $u_i$  é análogo ao potencial newtoniano  $\phi$ , o tensor de deformação  $\varepsilon_{ij}$  desempenha um papel semelhante à aceleração gravitacional  $\vec{g}_i$  e o tensor de tensão  $\sigma_{ij}$  é a contrapartida direta da densidade de massa superficial  $\rho_i$ . Em contrapartida, as da equação de Poisson e da lei de Gauss ficam

$$\nabla \sigma_{ij} + b_j = 0 \quad (4.64)$$

e

$$\oint_S \sigma_{ij} d\vec{A}_j + F_i = 0, \quad (4.65)$$

onde  $b_j$  representa a força por unidade de volume que atua no meio e  $F_j$  é a força total que atua na parte do meio envolvida pela superfície  $S$ . A energia elástica também é dada, exceto pelo sinal, em um maneira completamente análoga

$$U_{elast} = \frac{1}{2} \int dV \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}. \quad (4.66)$$

O equivalente elástico da massa pontual é uma força pontual descrita por uma função delta  $b_i^f = f_i \delta(x - x_P)$ . Ele atua como uma fonte pontual para o campo de deslocamento elástico  $u_i^f$  e tensor de tensão  $\sigma_{ij}$ . O potencial elástico que determina a força elástica que atua sobre uma força pontual satisfaz uma expressão análoga à do caso gravitacional

$$-f_i u_i(P) = \oint_S d\vec{A}_i (u_j^f \sigma_{ji} - u_j \sigma_{ij}^f). \quad (4.67)$$

Onde a superfície de integração  $S$  foi escolhida de tal forma que contém as forças de corpo que originam  $u_i$  e  $\sigma_{ij}$ .

Nota-se que a correspondência entre quantidades gravitacionais e elásticas requerem apenas duas constantes dimensionais: a constante  $G$  de Newton e a aceleração de Hubble  $a_0$ . Todas as outras constantes da natureza, como a velocidade da luz, a constante de Planck ou a constante de Boltzmann, não desempenham um papel. Já foi anunciado por Verlinde que os módulos elásticos assumem os valores dados em (4.55) e (4.56), mas ainda não foi justificado por que escolhemos este valor específico para o módulo de cisalhamento. A razão é que somente com esta identificação todas as grandezas elásticas, incluindo as expressões dos potenciais elásticos, são precisamente mapeadas nas grandezas gravitacionais correspondentes.

Quantidade gravitacional	Quantidade Elástica	Correspondência
Potencial Newtoniano $\phi$	Campo de deslocamento $u_i$	$u_i = \phi n_i / a_0$
Aceleração gravitacional $g_i$	Tensor de cisalhamento $\varepsilon_{ij}$	$\varepsilon_{ij} n_j = -g_i / a_0$
Densidade superficial de massa $\rho_i$	tensor de tensão $\sigma_{ij}$	$\sigma_{ij} n_j = \rho_i a_0$
Densidade de massa $\rho$	força do corpo $b_i$	$b_i = -\rho a_0 n_i$
Massa pontual $\rho$	força pontual $f_i$	$f_i = -m a_0 n_i$

Tabela 1 – Fórmulas de correspondência. Fonte: [10].

No entanto, devido à diferença no caráter tensorial das quantidades correspondentes, também precisamos fazer uso de um campo vetorial. Como os tensores elásticos de deformação e tensão são simétricos e linearmente relacionados, eles podem ser diagonalizados simultaneamente. Seus autovalores são chamados de valores principais de deformação e tensão. Estamos interessados na maior deformação e tensão. Introduzindo o chamado tensor de deformação desviatória  $\varepsilon'_{ij}$ , que é definido como a parte sem traços de  $\varepsilon_{ij}$

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{d-1} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}. \quad (4.68)$$

A direção da deformação e tensão coincide com o autovetor  $n_i$  da deformação desviatória  $\varepsilon'_{ij}$ . Denotamos o autovalor correspondente com  $\varepsilon$ , pois ele desempenha o mesmo papel do parâmetro introduzido na seção anterior, como ficará claro a seguir. Temos

$$\varepsilon'_{ij} n_j = \varepsilon n_i. \quad (4.69)$$

Aqui  $n_i$  é um autovetor normalizado que satisfaz  $|n|^2 = n_i n_i = 1$ .

Chega-se agora às fórmulas de correspondência entre a fase elástica e o regime newtoniano. Ver tabela 1. As identificações entre as grandezas elástica e gravitacional serão feitas em uma interface de superfície  $S$  perpendicular à deformação máxima. Assim, a normal a  $S$  é escolhida de modo que coincida com o vetor unitário  $n_i$ . Na seguinte tabela listamos todas as grandezas gravitacionais e elásticas e suas correspondências. Essas equações de correspondência permitem traduzir a resposta da energia escura descrita pelo campo de deslocamento, tensores de deformação e tensão na forma de potencial gravitacional aparente, aceleração e densidade superficial de massa.

#### 4.7 Matéria Escura Aparente da Gravidade Emergente

Vamos voltar à derivação da relação de Tully-Fisher para a densidade superficial de massa. Para isso será utilizada a descrição linear elástica da resposta do meio de energia escura devido à presença de matéria. O tensor de tensão e tensor de deformação estão relacionados pela lei de Hooke (4.54). Podemos fazer uma observação sobre essa forma específica do tensor de tensão. Como observamos, corresponde a um meio com módulo de onda  $P$ . Isso significa que as ondas de pressão têm velocidade zero e, portanto, existem como configurações estáticas. A decomposição de ondas elásticas em ondas de pressão e de cisalhamento faz uso do fato de que todo campo vetorial  $u_i$  pode ser escrito como uma soma de um gradiente  $\nabla_i \varphi$  e uma parte curva  $\nabla_j \Lambda_{ij}$  com  $\Lambda_{ij} = 0$ . As ondas de pressão obedecem  $\nabla_{[i} u_{j]} = 0$  e são do primeiro tipo, enquanto as ondas de cisalhamento satisfazem  $\nabla_i u_j = 0$  e, assim, são do segundo tipo. Segue-se do fato de

que o módulo da onda  $P$  desaparece e de que um campo de deslocamento leva a um tensor de energia de tensão conservado. Dessa forma,

$$u_i = \nabla_i \mathcal{E} \quad (4.70)$$

que implica que

$$\nabla^2 \sigma_{ij} = 0. \quad (4.71)$$

Aqui estão sendo consideradas apenas situações quase estáticas em que o meio elástico está em equilíbrio. Isso significa que, sem forças externas do corpo, o tensor de tensão deve ser conservado, o que junto com a observação acima nos diz que o deslocamento campo tomará a forma de um gradiente. O campo  $u_i = \phi n_i$  de fato satisfaz este requisito no caso de  $n_i$  apontar na mesma direção que  $\nabla i \phi$ . [9]

#### 4.7.1 De um Efeito de Memória Elástica à Matéria Escura Aparente

Chega-se agora à derivação do resultado principal de Verlinde: a relação de escala entre a densidade superficial de massa aparente  $\rho_D$  e a densidade superficial de massa real  $\rho_B$  da matéria (bariônica). Será seguido os mesmos passos da derivação heurística do autor, mas ao longo do caminho algumas lacunas serão preenchidas, ao que foram deixados em aberto no raciocínio inicial. A quantidade de entropia de de Sitter dentro de uma sub-região geral conectada  $\mathcal{B}$  é dada pelas generalizações de (4.8) e (4.9),

$$S_{DE}(\mathcal{B}) = \frac{1}{V_0} \int_{\mathcal{B}} dV = \oint_{\partial \mathcal{B}} \frac{x_i dA_i}{L 4G}. \quad (4.72)$$

A primeira expressão mostra que o conteúdo de entropia é proporcional ao volume, enquanto a segunda expressão exhibe o fracionamento da informação quântica. Cada célula Planckiana da superfície  $\partial \mathcal{B}$  contribui com uma fração determinada pela razão das distâncias próprias de um ponto central, digamos a origem, para esta célula e o horizonte.

Uma suposição central é que a matéria removeu uma quantidade de entropia  $S_M(L)$  de uma região de inclusão  $\mathcal{V}_M(L)$  cujo volume total  $V_M(L)$  é proporcional à massa  $M$ . Além disso, também usaremos o fato de que a quantidade de entropia que é removida de uma sub-região cresce linearmente com seu tamanho. Escolhe-se uma conexão tão grande subregião  $\mathcal{B}$ , que se pode pensar como uma grande bola de um determinado raio. A quantidade de entropia que é removida desta região é dada por

$$S_M(\mathcal{B}) = -\frac{1}{V_0} \int_{\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M} dV = \frac{1}{V_0^*} \int_{\partial \mathcal{B}} u_i dA_i. \quad (4.73)$$

Esta expressão é a generalização da equação (4.26). Vamos denotar agora toda a região de inclusão  $\mathcal{V}_M(L)$  simplesmente por  $\mathcal{V}_M$ . Como a entropia é removida apenas da região  $\mathcal{V}_M$ , podemos tratar o meio como incompressível fora da  $\mathcal{V}_M$ . Isso significa que  $\nabla_i u_i$  desaparece em todos os lugares, exceto dentro de  $\mathcal{V}_M$ , onde deve ser constante. Aplicando o teorema de Stokes

à última expressão, temos que da região  $\mathcal{B}$  temos

$$\nabla_i u_i = \begin{cases} -\frac{V_0^*}{V_0} & \text{dentro de } \mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M \\ 0 & \text{fora de } \mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M \end{cases} \quad (4.74)$$

Vamos supor que o meio elástico escuro está em equilíbrio e, sendo assim, que o tensor de tensão  $\sigma_{ij}$  é conservado. Podemos então fazer uso da observação (4.70) e (4.71) e representar  $u_i$  como um gradiente. Dada a localização da região  $\mathcal{V}_M$  encontra-se a seguinte solução para o campo de deslocamento  $u_i$  dentro da região  $\mathcal{B}$

$$u_i = \nabla_i \mathcal{X}, \quad (4.75)$$

com

$$\nabla_{\mathcal{X}}^2 = \begin{cases} -\frac{d-1}{d-2} & \text{dentro de } \mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M \\ 0 & \text{fora de } \mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M \end{cases} \quad (4.76)$$

Aqui inserimos o valor conhecido de (4.28) e (4.29) para a razão  $\frac{V_0^*}{V_0}$ . A solução completa para  $u_i$  é obtida estendendo  $\mathcal{B}$  para todo o espaço. O volume da interseção de  $\mathcal{B}$  com a região de inclusão  $\mathcal{V}_M$  será denotado como

$$V_M(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M} dV, \quad (4.77)$$

e igual a  $V_M(r)$  dado em (4.24) para o caso em que  $\mathcal{B}$  representa uma esfera de tamanho  $r$ . [9]

Queremos determinar a densidade aparente superficial de massa  $\rho_D$  na região fora de  $\mathcal{V}_M$ . De acordo com as regras de correspondência obtidas, a densidade superficial de massa  $\rho_D$  pode ser expressa em termos da maior tensão principal  $\sigma$  como

$$\rho_D = \frac{\phi}{a_0}, \quad (4.78)$$

onde

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i. \quad (4.79)$$

Agora fazendo o uso do fato de que o tensor de tensão e deformação são desviatórios fora de  $\mathcal{V}_M$ . Isso implica que o tensor de tensão é proporcional ao tensor de deformação desviatória  $\varepsilon'_{ij}$ , e, portanto, que a maior tensão principal  $\sigma$  está diretamente relacionada à maior deformação principal  $\varepsilon$ . Dado o valor do módulo de cisalhamento recupera-se assim a mesma relação (4.37) que em nossa derivação heurística

$$\rho_D = \frac{a_0}{8\pi G} \varepsilon, \quad (4.80)$$

onde

$$\varepsilon'_{ij} n_j = \varepsilon n_i. \quad (4.81)$$

Aqui, o objetivo de Verlinde é explicar a relação de Tully-Fisher para a densidade superficial de massa,  $\rho_D$  em termos da densidade superficial de massa para a massa  $M$ . Para isso, seguiremos um raciocínio semelhante ao da nossa derivação heurística. Podemos derivar apenas a seguinte

desigualdade sobre o valor da maior tensão principal  $\varepsilon$

$$\int_{\mathcal{B}} \varepsilon^2 dV \leq V_M(\mathcal{B}), \quad (4.82)$$

quando  $\mathcal{B}$  é tomada como uma região esférica de raio  $r$ , e com o sinal de igualdade recuperamos a equação (4.40) da qual derivamos a relação Tully-Fisher. Nossa derivação da desigualdade deixará claro sob quais condições se espera que o sinal de igualdade se mantenha.

Então, nesta situação todas as perpendiculares  $\frac{-\varepsilon}{d-2}$ . Obtemos assim o seguinte limite superior em  $\varepsilon$

$$\varepsilon^2 \leq \left( \frac{d-2}{d-1} \right) \varepsilon'_{ij}{}^2. \quad (4.83)$$

A prova da desigualdade (4.82) agora se torna simples e direta. Primeiro substituímos  $\varepsilon^2$  pelo lado direito de (4.83) e expressamos  $\varepsilon'_{ij}$  em termos de  $\mathcal{X}$  inserindo a solução (4.76) para  $u_i$ . Em seguida, estendemos a região de integração de  $\mathcal{B}$  para todo o espaço e realizamos uma integração parcial dupla para expressar o integrando inteiramente em termos de  $\nabla^2 \mathcal{X}$  usando

$$\int (\nabla_i \nabla_j \mathcal{X})^2 dV = \int (\nabla^2 \mathcal{X})^2 dV. \quad (4.84)$$

Aqui é importante verificar que  $\mathcal{X}$  cai com rapidez suficiente para que não haja termos de contorno. Após esses passos, ficamos com uma integral cujo suporte está inteiramente contido na interseção de  $\mathcal{B}$  com  $\mathcal{V}_M$ . Desta forma, a seguinte relação vale

$$a \left( \frac{d-2}{d-1} \right) \int \varepsilon'_{ij}{}^2 dV = \int_{\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M} dV. \quad (4.85)$$

Assim, o sinal de desigualdade em (4.82) se transformará em um sinal de igualdade (aproximado) se duas suposições forem verdadeiras: a primeira é que a maior deformação principal  $\varepsilon$  é dada com uma boa aproximação por seu valor máximo possível. Isso significa que as deformações perpendiculares são todas aproximadamente iguais. A outra suposição é que a contribuição da integral (4.85) fora de  $\mathcal{B}$  pode ser ignorada. Isso também é razoável, uma vez que o valor de  $\varepsilon$  cai de  $1/a^{d-1}$  onde  $a$  é a distância até o limite de  $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M$ .

Supondo agora que o tensor de deformação  $\varepsilon_{ij}$  seja puramente hidrostático dentro de  $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M$ , o que significa que a deformação desviatória  $\varepsilon_{ij}$  só é suportada fora da região  $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M$ . Esta condição é equivalente à suposição de que a fronteira de  $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M$  é normal à direção da maior deformação principal e que o valor da deformação normal  $\varepsilon$  é igual a um. Isso pode ser mostrado, por exemplo, como segue. Considere a integral da densidade de energia elástica tanto dentro como fora de  $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M$ . A conservação do tensor de tensão nos dá que essas energias são iguais em tamanho, mas opostas em sinal. E, de novo, por integração parcial encontra-se

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{V}_M}} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV = \frac{a_0^2}{16\pi G} \oint_{\partial(\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M)} u_i dA_i. \quad (4.86)$$

A primeira integral em (4.86) dá a contribuição da deformação e tensão desviatórias, enquanto a integral do meio representa a energia elástica devido à deformação e tensão hidrostática dentro da inclusão. Finalmente, a integral do lado direito representa o volume do meio elástico escuro

que é removido pela matéria da região  $\mathcal{B}$ .

A parte hidrostática da energia elástica é facilmente calculada usando o fato de que o tensor de deformação e tensão são proporcionais a  $\delta_{ij}$ . Dessa forma, aprendemos com (4.86) que a parte desviatória da energia elástica é igual a

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \varepsilon'_{ij} \sigma'_{ij} dV = \frac{a_0^2}{16\pi G} \left( \frac{d-1}{d-2} \right) \int_{\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M} dV = \frac{a_0^2}{16\pi G} \oint_{\partial \mathcal{B}} u_i dA_i, \quad (4.87)$$

onde utilizou-se do fato de que  $\nabla_i u_i = 0$  fora de  $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M$  para mover a integral de contorno de  $\partial(\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M)$  para  $\partial \mathcal{B}$ . Para completar a derivação da relação de Tully-Fisher, agora fazendo uso da suposição de que o volume da região  $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_M$  depende apenas da distribuição de massa da matéria real que está presente dentro da região  $\mathcal{B}$ , assume-se que o resultado da integral de contorno na última expressão em (4.87) pode ser avaliada substituindo o campo de deslocamento pela expressão correspondente em termos do potencial de Newton  $\Phi_B$  da matéria "bariônica" comum. Assim, fazendo a identificação

$$\oint_{\partial \mathcal{B}} u_i dA_i = \oint_{\partial \mathcal{B}} \frac{\Phi_B}{a_0} n_i dA_i. \quad (4.88)$$

Aqui vamos supor que a superfície  $\partial \mathcal{B}$  pode ser escolhida de modo que sua normal coincida com a direção  $n_i$ . Esta é uma suposição natural no caso de  $\partial \mathcal{B}$  coincidir com uma superfície equipotencial de  $\Phi_B$ . [9]

Finalmente, têm-se as condições de combinar todos os ingredientes e obter o resultado principal de nossa análise. Primeiro usamos (4.80) e (4.81) para expressar a maior deformação principal  $\varepsilon$  em termos de  $\rho_D$ . Em seguida, assumi-se que as condições para o sinal de igualdade em (4.82) são válidas e a identificação (4.88) pode ser feita. Combinado com (7.34), isso leva à seguinte relação integral para a densidade superficial de massa  $\rho_D$  para a matéria escura aparente em termos do potencial newtoniano para a matéria bariônica

$$\int_{\mathcal{B}} \left( \frac{8\pi G}{a_0} \rho_D \right)^2 dV = \left( \frac{d-2}{d-1} \right) \oint_{\partial \mathcal{B}} \frac{\Phi_B}{a_0} n_i dA_i. \quad (4.89)$$

E como a região de integração  $\mathcal{B}$  pode ser escolhida arbitrariamente, também podemos derivar uma relação local convertendo primeiro o lado direito em uma integral de volume aplicando o teorema de Stokes e depois igualando os integrandos. Desta forma obtemos

$$\left( \frac{8\pi G}{a_0} \rho_D \right)^2 = \left( \frac{d-2}{d-1} \right) \nabla_i \left( \frac{\Phi_B}{a_0} n_i \right). \quad (4.90)$$

A seguir usaremos esta relação para uma situação esfericamente simétrica para derivar a densidade de massa para a matéria escura aparente de uma dada distribuição de matéria bariônica. Para esta situação podemos tomar  $n_i = x_i/|x|$ , e calcular facilmente o lado direito em termos da distribuição de massa  $\rho_B$  da matéria bariônica.

#### 4.7.2 Uma Fórmula Para a Densidade Aparente da Matéria Escura em Galáxias e Aglomerados

Da relação entre a densidade superficial de massa e o potencial de Newton, para uma situação esfericamente simétrica esta relação pode ser escrita como

$$\rho(r) = -\frac{1}{4\pi G}\phi(r)r = \frac{M(r)}{A(r)}, \quad (4.91)$$

onde

$$M(r) = \int_0^r \rho(r')A(r')dr' \quad (4.92)$$

é a massa total dentro de um raio  $r$ . Com a ajuda dessas equações podemos reescrever a relação (7.36) em termos da massa aparente de matéria escura  $M_D(r)$  e a massa bariônica  $M_B(r)$ . Isto leva a

$$\int_0^r \frac{GM_D^2(r')}{r'^2} dr' = \frac{M_B(r)a_0 r}{6}. \quad (4.93)$$

que descreve a quantidade de matéria escura aparente  $M_D(r)$  em termos da quantidade de matéria bariônica  $M_B(r)$  para sistemas astronômicos aproximadamente simétricos e isolados em situações não-dinâmicas. Depois de ter determinado  $M_D(r)$  podemos então calcular a aceleração total

$$g(r) = g_B(r) + g_D(r), \quad (4.94)$$

onde as acelerações gravitacionais  $g_B$  e  $g_D$  são dadas por suas expressões Newtonianas usuais

$$g_B = \frac{GM_B(r)}{r^2} \quad (4.95)$$

e

$$g_D = \frac{GM_D(r)}{r^2}. \quad (4.96)$$

Podemos diferenciar em relação ao raio, mantendo a massa bariônica  $M_B$  constante. Verifica-se facilmente que isso leva à relação

$$g_D(r) = \sqrt{a_M g_B(r)}, \quad (4.97)$$

com

$$a_M = \frac{a_0}{6}. \quad (4.98)$$

Uma maneira alternativa de expressar (7.87) é como resultado para a velocidade assintótica  $v_f$  da curva de rotação da galáxia

$$v_f^4 = a_M GM_B, \quad (4.99)$$

onde

$$g_D(r) = \frac{v_f^2}{r}. \quad (4.100)$$

Essa expressão é conhecida como a relação bariônica de Tully-Fisher e foi bem testada por observações [29] de um grande número de galáxias espirais.

Voltando para (7.84) e fazendo sua derivada levando em conta a dependência  $r$  de  $M_B(r)$ . São introduzidas as densidades médias de massa  $\bar{\rho}_B(r)$  e  $\bar{\rho}_D(r)$  dentro de uma esfera de

raio  $r$  escrevendo as massas integradas  $M_B(r)$  e  $M_D(r)$  como

$$M_B(r) = \frac{4\pi r^3}{3} \bar{\rho}_B(r) \quad (4.101)$$

e

$$M_D(r) = \frac{4\pi r^3}{3} \bar{\rho}_D(r). \quad (4.102)$$

Introduzindo os parâmetros de inclinação

$$\bar{\beta}_B(r) = -\frac{d \log \bar{\rho}_B(r)}{d \log r} \quad (4.103)$$

e

$$\bar{\beta}_D(r) = -\frac{d \log \bar{\rho}_D(r)}{d \log r}. \quad (4.104)$$

Quando esses parâmetros de inclinação são aproximadamente constantes, eles nos dão o comportamento da lei de potência das densidades de massa médias. Diferenciando (7.36) em relação a  $r$  e reescrevendo o resultado usando (4.92) e (4.93), descobre-se que a média da da densidade da matéria escura aparente obedece

$$\bar{\rho}_D^2(r) = \left(4 - \bar{\beta}_B(r)\right) \frac{a_0}{8\pi G} \frac{\bar{\rho}_B(r)}{r}. \quad (4.105)$$

Para uma massa de ponto central  $M_B$ , o parâmetro de inclinação  $\bar{\beta}_B$  é igual a 3, portanto, o pré-fator seria igual a 1. A matéria escura aparente tem nesse caso uma distribuição com inclinação  $\bar{\beta}_D = 2$ , o que significa que cai como  $1/r^2$ . [9]

Dada a densidade média de massa,  $\bar{\rho}_D(r)$  pode-se encontrar a densidade de massa real  $\rho_D(r)$  para a matéria escura aparente através da relação

$$\rho_D(r) = \left(1 - \frac{1}{3} \bar{\beta}_D(r)\right) \bar{\rho}_D(r). \quad (4.106)$$

Por fim, uma ilustração de que essas equações podem levar a fortes fenômenos de lente nos núcleos de aglomerados nos casos em que há uma contribuição significativa de matéria escura. Para isso vamos considerar uma situação idealizada na qual a matéria escura e a matéria bariônica na região central  $r < r_0$  têm exatamente o mesmo perfil de densidade com  $\bar{\beta}_B = \bar{\beta}_D = 1$ . Isso corresponde ao caso em que as densidades superficial de massa  $\rho_B$  e  $\rho_D$  são iguais ao valor máximo  $a_0/8\pi G$  correspondente a  $\varepsilon = 1$ . A massa total perfil de densidade dentro do núcleo é então dada por

$$\rho_B = \rho_D(r) = \frac{a_0}{4\pi G r}, \quad (4.107)$$

para

$$r < r_0. \quad (4.108)$$

Verlinde descobriu, então, que a densidade de massa superficial projetada  $\rho_{proj}(< r_0)$  de toda a região central, como os astrofísicos a definiriam integrando ao longo da linha de visão, é igual a  $cH_0/\pi G$ , o que deve ser suficiente para causar uma forte lente gravitacional, especialmente nas partes internas da região central. Este forte efeito de lente seria, neste caso, igualmente devido

à matéria bariônica e escura.

Como comentário final vamos tomar (4.96) e aplicá-la a todo o universo. Com isso queremos dizer que assumimos uma densidade de massa bariônica constante, então definimos  $\bar{\beta}_B = 0$  e, além disso, tomamos o raio igual ao raio de Hubble, ou seja, colocamos  $r = L$ . Agora, notamos que a densidade de massa crítica do universo é igual a

$$\rho_{crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \frac{3a_0}{8\pi G L}. \quad (4.109)$$

Assim, quando colocamos  $r = L$  em (4.96) obtemos uma relação entre os parâmetros padrão de densidade cosmológica  $\Omega_B = \rho_B/\rho_{crit}$  e  $\Omega_D = \rho_D/\rho_{crit}$  da matéria bariônica e escura. Encontramos

$$\Omega_D^2 = \frac{4}{3}\Omega_B. \quad (4.110)$$

Esta relação se mantém bem para os valores de  $\Omega_D$  e  $\Omega_B$  obtidos pelas colaborações WMAP e Planck. Vale constar que nossa derivação da fórmula da densidade (4.96) é apenas hipotética e sabe-se que a mesma não seria aplicável a todo o universo. Uma questão imediata que vem à mente é se essa relação continua a se manter ao longo da evolução cosmológica do universo. Trabalhamos exclusivamente em uma situação estática perto do centro da mancha estática de um universo dominado pela energia escura. [9]

## 5 CONCLUSÃO

Nesta dissertação estudamos um modelo de gravidade modificada através da gravidade entrópica. E pudemos utilizar de argumentos teóricos, com a derivação das relações observadas, como provas de nossas hipóteses. Mencionamos que em 1998, após a análise dos dados das supernovas tipo Ia, a energia escura foi proposta e mesmo nos dias atuais, após tanto esforço experimental e teórico ainda não se tem uma explicação completa sobre tal fenômeno. Nesse sentido, a energia escura pode ser considerada um dos maiores problemas da Cosmologia da atualidade em aberto e a proposta de modelos que expliquem esse fenômeno podem ser de grande importância como background matemático. O modelo da gravitação entrópica discutido nesse trabalho se mostra um candidato viável para discussão do assunto. Estudamos as semelhanças entre a gravidade e outros fenômenos emergentes conhecidos, como termodinâmica e hidrodinâmica, analogias que têm sido consideradas como sugestivas.

A comunidade científica tem se mostrado, ao longo dos últimos anos, relutante em desistir da formulação geométrica da gravidade de Einstein como sendo fundamental. Porém, Verlinde assinala que se a gravidade é emergente, a geometria do espaço-tempo também seria. Einstein uniu esses dois conceitos, e teríamos que desistir de ambos se quisermos entender um ou outro em um nível mais fundamental. Ao propormos qual é a origem da força e da inércia em um contexto em que o espaço está emergindo, ao invés de focar apenas nas equações que governam o campo gravitacional, assim, identificamos uma causa, um mecanismo, para a gravidade que é impulsionado por diferenças de entropia, e uma consequência da média da dinâmica aleatória no nível microscópico.

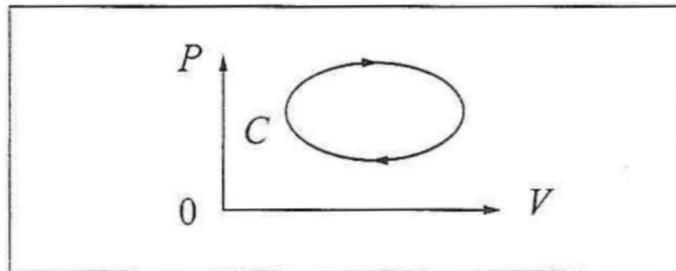
Também vimos uma derivação da expressão para a média da densidade da matéria escura aparente coerente para os valores de  $\Omega_D$  e  $\Omega_B$  obtidos pelas colaborações WMAP e Planck. Finalmente, pudemos utilizar a base teórica investigada nos primeiros capítulos e chegarmos ao capítulo 4 com a proposta de que os fenômenos observados atualmente atribuídos à matéria escura são consequência da natureza emergente da gravidade e são causados por uma resposta elástica devido à contribuição da lei do volume para a entropia de emaranhamento em nosso universo.

## APÊNDICE A – ALGUNS CONCEITOS DE TERMODINÂMICA.

### A.1 O Teorema de Clausius

Seja  $Q$  uma quantidade de calor fornecida a um sistema termodinâmico, que evolui de um estado inicial a um final ciclicamente, ou seja, dada qualquer transformação reversível representada por um caminho  $C$  fechado à temperatura  $T$  que varia ao longo de cada porção infinitesimal de  $C$ , (Figura 3) [12], temos que

Figura 8 – Caminho fechado.



Fonte: [11].

Completado o ciclo  $C$ , o efeito resultante é a remoção da quantidade de calor e a realização de uma quantidade de trabalho equivalente (área interna ao ciclo  $C$ ). E, pelo enunciado de Kelvin da 2ª lei, isto só é possível se  $Q \leq 0$ , ou seja,

$$\oint_C \frac{\delta Q}{T} \leq 0, \quad (\text{A.1})$$

que é a desigualdade de Clausius. Em seu teorema, Clausius procurou mostrar uma relação proporcional entre a entropia e o fluxo de energia por aquecimento,  $\delta Q$ , em um sistema. Nesse sistema, essa energia térmica pode ser transformada em trabalho, e o trabalho pode ser transformado em calor por meio de um processo cíclico. Clausius escreve que "A soma algébrica de todas as transformações que ocorrem em um processo cíclico só pode ser menor que zero ou, como um caso extremo, igual a nada." [14] Observa-se, então, que igualdade só vale para para  $C$  reversível. Temos,

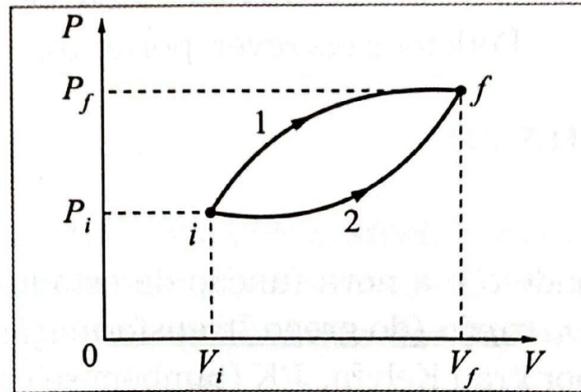
$$\oint_C \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (\text{A.2})$$

A consequência mais importante do teorema de Clausius é a existência de uma nova função de estado associada a um estado de equilíbrio termodinâmico de um sistema, a entropia. Da mesma forma que a 1ª lei da termodinâmica corresponde à existência da energia interna  $U$  como função de estado, a 2ª lei corresponde à existência da entropia.

### A.2 Processos Reversíveis

Sejam  $i$  e  $f$  dois estados de equilíbrio termodinâmico de um sistema. Em geral, podemos passar de  $i$  para  $f$  por diferentes caminhos (processos), como 1 e 2 (Figura 4).

Figura 9 – Caminhos reversíveis.



Fonte: [11].

Supondo esses caminhos reversíveis, o que denotamos indicando por  $\delta Q_R$ , decorre então do teorema de Clausius o seguinte resultado: *A integral tem o mesmo valor para todos os caminhos reversíveis que ligam os estados de equilíbrio termodinâmico i e f.* [12]

Se formos de  $i$  para  $f$  pelo caminho 1 e voltamos de  $f$  para  $i$  pelo caminho 2, teremos descrito um *ciclo reversível*, de modo que o teorema de Clausius (2.2) leva a

$$\int_{(1)i}^f \frac{\delta Q_R}{T} + \int_{(2)f}^i \frac{\delta Q_R}{T} = 0, \quad (\text{A.3})$$

onde os índices (1) e (2) à esquerda das integrais indicam qual é o caminho reversível empregado. Como

$$\int_{(2)f}^i \frac{\delta Q_R}{T} = - \int_{(2)i}^f \frac{\delta Q_R}{T} \quad (\text{A.4})$$

equivale a (2.4)

$$\int_{(1)i}^f \frac{\delta Q_R}{T} = \int_{(2)i}^f \frac{\delta Q_R}{T}. \quad (\text{A.5})$$

Como 1 e 2 são dois caminhos reversíveis quaisquer, concluímos que a integral é independente do caminho, o que demonstra o resultado.

Como a integral só depende dos extremos  $i$  e  $f$ , se escolhermos um estado inicial padrão ela passa a depender somente de  $f$ , que podemos identificar com o estado de equilíbrio termodinâmico do sistema para o qual queremos calcular o valor da função. A arbitrariedade da escolha do estado padrão  $i$  corresponde à constante arbitrária: mudar  $i$  equivale a adicionar uma constante aos valores da função. [12]

Podemos, então, escrever

$$\int_i^f \frac{\delta Q_R}{T} = S_f - S_i, \quad (\text{A.6})$$

onde  $S$  é a nova função de estado, introduzida por Clausius e por ele denominada de entropia (do grego, transformação).

Se a variação  $\Delta S = S_f - S_i$  é infinitesimal, escrevemos

$$dS = \frac{\delta Q_R}{T}. \quad (\text{A.7})$$

onde  $\delta Q_R$  é a quantidade de calor infinitesimal fornecida ao sistema em um processo reversível à temperatura  $T$ . Note que  $\delta Q_R$  é uma diferencial inexata, ao passo que  $dS$ , como  $dU$ , é uma diferencial exata. [12]

### A.3 Transformação Adiabática Reversível

Tal transformação é caracterizada por

$$\delta Q_R = 0. \tag{A.8}$$

Logo, a (2.7) leva a

$$\Delta S = S_f - S_i = 0. \tag{A.9}$$

ou seja, a entropia não muda em uma transformação adiabática reversível.

## APÊNDICE B – MAIS DETALHES SOBRE O EFEITO UNRUH

O efeito Unruh é um resultado da teoria quântica de campos e expressa o fato de que observadores uniformemente acelerados no espaço-tempo de Minkowski, ou seja, observadores linearmente acelerados com aceleração própria constante (também chamados de observadores de Rindler), associam um banho térmico de partículas de Rindler para o estado sem partículas de observadores inerciais (também chamado de vácuo de Minkowski). Este efeito é importante por si só e também como ferramenta para investigar outros fenômenos, como a emissão de partículas de buracos negros [22] e horizontes cosmológicos.

### B.1 Introdução

Hawking [21] em seu referido trabalho mostrou como o horizonte de eventos de um buraco negro separa as soluções para uma equação de onda para um campo sem massa entre aquelas que propagam-se para o interior do horizonte e as que propagam-se para fora. Isso faz com que um buraco negro seja capaz de emitir partículas, ao invés de apenas absorver, conferindo ao mesmo uma temperatura que depende de sua gravidade de acordo com a expressão

$$T = \frac{\hbar g}{2\pi k_B c}. \quad (\text{B.1})$$

Essa expressão surge de soluções para uma equação de onda em um espaço com uma fronteira de causalidade, que no caso do observador de Rindler é gerada pela aceleração do mesmo.

W. G. Unruh [18] estudou o comportamento de detectores de partículas submetidos a um referencial de Rindler, mostrando que o fenômeno de absorção observado pelo mesmo é visto como a emissão dessa partícula pelo referencial de Minkowski, sendo capaz de mostrar como o fenômeno não viola a conservação de energia. Ainda assim, o conceito de partícula acaba se mostrando mal definido em vista desses resultados, uma vez que ambos referenciais fornecem descrições igualmente válidas para o fenômeno, mesmo que cada um deles precise ter sua própria definição de vácuo.

É possível obter-se a expressão (1.2) para a temperatura de Unruh no espaço-tempo plano bidimensional. Para isso, considera-se soluções da equação de Klein-Gordon para partículas de massa  $m = 0$ . O operador número, definido por  $\hat{N} = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ , que provém da solução algébrica do problema do oscilador harmônico na Mecânica Quântica representará o número de partículas que possuem vetor de onda  $\vec{k}$ . [30]

### B.2 Teoria de Campos em Espaços Planos

De forma análoga ao desenvolvimento da mecânica clássica de partículas, onde a trajetória real da partícula, representada pelas coordenadas generalizadas  $q(t)$  e  $\dot{q}(t)$  será aquela que minimiza a integral de ação

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt, \quad (\text{B.2})$$

pode-se construir uma teoria tendo o campo como objeto de estudo.

Seja  $\omega$  um volume arbitrário no espaço-tempo e seja  $\mathcal{L}$  a densidade de Lagrangiana que depende das coordenadas generalizadas  $\phi$  e  $\partial_\mu \phi$ , a integral de ação é dada por [31]

$$S(\omega) = \int_\omega d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (\text{B.3})$$

Então, postula-se que a equação dinâmica do campo é obtida quando a variação da integral de ação na equação (B.3) é zero. Ou seja:

$$\delta S(\omega) = 0. \quad (\text{B.4})$$

E, utilizando (B.3), obtemos

$$S(\omega) = \int_\omega \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] d^4x. \quad (\text{B.5})$$

Integrando o segundo termo, temos

$$S(\omega) = \int_\omega \partial_\mu \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) d^4x + \int_\omega \delta \phi \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi)} \right) \right] d^4x. \quad (\text{B.6})$$

Seja  $F^\mu$  um vetor contravariante nesse espaço e  $\eta_\mu$  um vetor covariante unitário e normal à superfície  $\partial\omega$ , a primeira integral em (B.6) pode ser trabalhada com o teorema de Gauss aplicado ao espaço de Minkowski [32]:

$$\int_\omega \partial_\mu F^\mu d^4x = \int_{\partial\omega} \eta_\mu F^\mu d^3x, \quad (\text{B.7})$$

Considerando,

$$F^\mu = \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right), \quad (\text{B.8})$$

e utilizando (B.8) para transformar a primeira integral de (B.6) em uma integral sobre o contorno  $\partial\omega$ , o resultado será zero pois já definiu-se que  $\delta \phi = 0$  nesse contorno. Finalmente, para garantir que  $\delta S = 0$  para qualquer funcional  $\mathcal{L}$ , obtemos

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi)} \right) = 0, \quad (\text{B.9})$$

que é a equação de Euler-Lagrange que descreve a dinâmica do campo.

Para mudarmos para o formalismo Hamiltoniano, definimos o momentum conjugado ao campo

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (\text{B.10})$$

E o Hamiltoniano será a transformada de Legendre do Lagrangiano:

$$\mathcal{H} = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(\phi, \partial\phi). \quad (\text{B.11})$$

Uma tentativa de obter uma teoria relativística para ondas de matéria é pautada na relação entre energia e momentum da relatividade especial [30]

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (\text{B.12})$$

em conjunto com as representações usuais da mecânica quântica para os respectivos operadores.

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}, \quad (\text{B.13})$$

$$E \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \quad (\text{B.14})$$

Um cálculo direto leva à equação

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (\text{B.15})$$

Definindo a constante  $\mu \equiv \frac{mc}{\hbar}$ , e definindo  $\square$ , o operador d'Alembertiano, como

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2, \quad (\text{B.16})$$

reescrevendo a equação (B.15) para reconhecer a equação de Klein-Gordon:

$$(\square + \mu^2)\phi = 0. \quad (\text{B.17})$$

Essa equação, uma vez quantizada, será capaz de descrever partículas relativísticas sem carga e sem spin quando admitirmos um campo escalar real como solução. Podemos utilizar o formalismo da teoria de campos para obter a equação de Klein-Gordon a partir do seguinte Lagrangiano [30]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \mu^2 \phi^2). \quad (\text{B.18})$$

Para isto, aplicando a equação (B.9):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{\mu^2}{2} \frac{\partial \phi^2}{\partial \phi} = -\mu^2 \phi \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} &= \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta(\partial_\mu \phi)} [\partial_\nu \phi \partial^\nu \phi] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta \partial_\nu \phi}{\delta(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi + \partial_\nu \phi \frac{\delta \partial^\nu \phi}{\delta(\partial_\mu \phi)} \right] \\ &= \frac{1}{2} (\eta_\nu^\mu \partial^\nu \phi + \partial_\nu \phi \eta^{\nu\mu}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi) \end{aligned}$$

$$= \partial^\mu \phi,$$

Por fim,

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \mu^2 \phi = 0, \quad (\text{B.20})$$

como desejado.

O momentum conjugado a esse campo calculado por (B.10) será

$$\pi(x) = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(x), \quad (\text{B.21})$$

que é utilizado para obter o seguinte Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} (c^2 \pi^2(x) + (\nabla \phi)^2 + \mu^2 \phi). \quad (\text{B.22})$$

De acordo com o intervalo invariante nas coordenadas de Rindler dado por

$$ds^2 = e^{2a\varepsilon} (c^2 d\eta^2 - d\varepsilon^2), \quad (\text{B.23})$$

a equação de Klein-Gordon no referencial  $(\eta, \varepsilon)$  será

$$\exp \left[ -\frac{2a\varepsilon}{c^2} \right] \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \right) \phi = 0. \quad (\text{B.24})$$

### B.3 O Efeito Unruh

Da própria definição de vácuo do observador de Rindler em comparação com a definição dada pelo observador de Minkowski, nos deixam pistas de que o próprio conceito de vácuo não é fixo quando se estuda teoria de campos. Como ele depende de um conjunto arbitrário de soluções para a equação de Klein-Gordon, podendo estarem expressas tanto nas coordenadas de Rindler quanto de Minkowski, é vital estabelecermos uma relação entre esses conjuntos de soluções.

#### B.3.1 Transformações de Bogoliubov

A equação de Klein-Gordon em espaços curvos possui uma arbitrariedade semelhante de soluções com a que encontramos em espaços planos mas utilizando referenciais não-inerciais. O conjunto de soluções para ondas planas no espaço de Minkowski é único no entanto, no espaço de Rindler, podemos fazer duas escolhas diferentes igualmente válidas. [30]

Sejam as equações

$$\phi = \sum_i (\hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^*), \quad (\text{B.25})$$

$$\phi = \sum_i (\hat{b}_i f_i + \hat{b}_i^\dagger f_i^*), \quad (\text{B.26})$$

soluções para (B.20), cada qual com seus operadores obedecendo relações de comutação como

os operadores criação e aniquilação:

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j] = 0 \quad (\text{B.27})$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \quad (\text{B.28})$$

$$[\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] = 0 \quad (\text{B.29})$$

$$[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \quad (\text{B.30})$$

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = 0 \quad (\text{B.31})$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \quad (\text{B.32})$$

As definições de vácuo para cada uma das soluções dadas por (B.25) e (B.26) serão, respectivamente,  $\hat{a}_i |0_f\rangle = 0$  e  $\hat{b}_i |0_g\rangle = 0$ . É possível notar que não há pressuposto de equivalência entre as expressões anteriores. [30]

A definição dos seguintes coeficientes, chamados de coeficientes de Bogolubov, são

$$\alpha_{ij} = (g_i, f_j), \quad (\text{B.33})$$

$$\alpha_{ij} = -(g_i, f_j^*), \quad (\text{B.34})$$

é possível escrever a seguinte relação entre os coeficientes das duas soluções:

$$g_i = \sum_j (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^*), \quad (\text{B.35})$$

$$f_i = \sum_j (\alpha_{ji} g_j + \beta_{ji} g_j^*). \quad (\text{B.36})$$

E, essa relação leva à expansão dos próprios operadores escada ( $\hat{a}$ ) e ( $\hat{b}$ ):

$$\hat{a}_i = \sum_j (\alpha_{ij} \hat{b}_j + \beta_{ij} \hat{b}_j^\dagger), \quad (\text{B.37})$$

$$\hat{b}_i = \sum_j (\alpha_{ij} \hat{a}_j + \beta_{ij} \hat{a}_j^\dagger), \quad (\text{B.38})$$

O valor esperado do operador número  $\hat{n}_{gi}$  no estado de vácuo  $|0_f\rangle$ :

$$\langle 0_f | \hat{n}_{gi} | 0_f \rangle = \langle 0_f | \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i | 0_f \rangle \quad (\text{B.39})$$

$$= \sum_{jk} \langle 0_f | (\alpha_{ij} \hat{a}_j^\dagger - \beta_{ij} \hat{a}_j) (\alpha_{ik}^* \hat{a}_k - \beta_{ik}^* \hat{a}_k^\dagger) | 0_f \rangle$$

$$= \sum_{jk} (-\beta_{ij})(-\beta_{ik}^*) \langle 0_f | \hat{a}_j \hat{a}_k | 0_f \rangle.$$

Onde foi utilizada a definição de vácuo para  $f$ :

$$\hat{a}_i |0_f\rangle = 0 \quad \rightarrow \quad \langle 0_f | \hat{a}_i = 0 \quad \text{para todo } i. \quad (\text{B.40})$$

Agora, utilizando a relação de comutação para os operadores  $\hat{a}$

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k] = \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j = \delta_{jk}, \quad (\text{B.41})$$

$$\hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j + \delta_{jk}. \quad (\text{B.42})$$

Consegue-se, então, o valor esperado do operador número das coordenadas  $g$  quando observa o vácuo de  $f$  em termos do coeficiente  $\beta$ . [30]

$$\begin{aligned} \langle 0_f | \hat{n}_{gi} | 0_f \rangle &= \sum_{jk} \beta_{ij} \beta_{ik}^* \langle 0_f | 0_f \rangle \\ &= \sum_j |\beta_{ij}|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

Essas relações são equivalentes às transformações (B.35) e (B.36), e induzem as desejadas transformações entre os operadores (B.37 e (B.38)). Assim, os operadores escada

$$\hat{b}_k^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\text{senh}\frac{\pi\omega}{a}}} (e^{\frac{\pi\omega}{2a}} \hat{c}_k^{(1)} + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} \hat{c}_{-k}^{(2)\dagger}), \quad (\text{B.44})$$

$$\hat{b}_k^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\text{senh}\frac{\pi\omega}{a}}} (e^{\frac{\pi\omega}{2a}} \hat{c}_k^{(2)} + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} \hat{c}_{-k}^{(1)\dagger}), \quad (\text{B.45})$$

fornecerão a relação necessária para o cálculo do valor esperado do operador número de partículas.

### B.3.2 A Temperatura Unruh

O operador número para o observador de Rindler é  $\hat{b}^{(1)\dagger} \hat{b}_k$ . O seu valor esperado no vácuo de Minkowski será então:

$$\langle 0_M | \hat{b}_k^{(1)\dagger} \hat{b}_k^{(1)} | 0_M \rangle = \langle 0_M | \frac{1}{\sqrt{2\text{senh}\frac{\pi\omega}{a}}} (e^{\frac{\pi\omega}{2a}} \hat{c}_k^{(1)\dagger} + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} \hat{c}_{-k}^{(2)}) (e^{\frac{\pi\omega}{2a}} \hat{c}_k^{(1)} + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} \hat{c}_{-k}^{(2)\dagger}) | 0_M \rangle \quad (\text{B.46})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\text{senh}\frac{\pi\omega}{a} a}} (e^{\frac{\pi\omega}{a}} \hat{c}_k^{(1)\dagger} \hat{c}_k^{(1)} + \hat{c}_k^{(1)\dagger} \hat{c}_{-k}^{(2)\dagger} + e^{\frac{\pi\omega}{a}} \hat{c}_{-k}^{(2)} \hat{c}_k^{(1)} + \hat{c}_{-k}^{(2)} \hat{c}_{-k}^{(2)\dagger}). \quad (\text{B.47})$$

E, como a definição de vácuo

$$\hat{c}_k^{(1)} |0_M\rangle = \hat{c}_k^{(2)} |0_M\rangle = 0 \quad (\text{B.48})$$

é compartilhada com a definição para os operadores  $\hat{a}_k$ , o único termo não nulo será:

$$\langle 0_M | \hat{N}_R | 0_M \rangle = \frac{1}{2\sinh\frac{\pi\omega}{a}} \langle 0_M \hat{c}_{-k}^{(2)} \hat{c}_{-k}^{(2)\dagger} | 0_M \rangle \quad (\text{B.49})$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{a}}}{e^{\frac{\pi\omega}{a}} - e^{-\frac{\pi\omega}{a}}} \delta(0) \quad (\text{B.50})$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1} \delta(0). \quad (\text{B.51})$$

Obtém-se, então, uma distribuição de Bose-Einstein para as partículas do campo de radiação, o que implica que o observador de Rindler está em um banho térmico de temperatura

$$T = \frac{a}{2\pi}, \quad (\text{B.52})$$

que em unidades naturais retoma a equação (B.2). [30]

## REFERÊNCIAS

- [1] MIQUEL, R. Cosmology with type-ia supernovae. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 40, n. 25, p. 6743–6755, jun 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/25/19>.
- [2] GAWISER, E.; SILK, J. The cosmic microwave background radiation. *Physics Reports*, Elsevier BV, v. 333-334, p. 245–267, aug 2000. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(2800\)2900025-9](https://doi.org/10.1016/0370-1573(2800)2900025-9).
- [3] Planck Collaboration et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. arXiv, 2018. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1807.06209>.
- [4] ALBRECHT, A. et al. *Report of the Dark Energy Task Force*. arXiv, 2006. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0609591>.
- [5] CARROLL, S. M. Quintessence and the rest of the world: Suppressing long-range interactions. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 81, n. 15, p. 3067–3070, oct 1998. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.3067>.
- [6] KAMENSHCHIK, A. Y.; MOSCHELLA, U.; PASQUIER, V. *An alternative to quintessence*. 2001.
- [7] BOSE, N.; MAJUMDAR, A. S. 
$$\text{mml:math xmlns:mml="http://www.w3.org/1998/math/MathML" display="inline" mml:mik/mml:mi/mml:math-essence model of inflation, dark matter, and dark energy.}$$
 *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 79, n. 10, may 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.103517>.
- [8] CLIFTON, T. et al. Modified gravity and cosmology. *Physics Reports*, Elsevier BV, v. 513, n. 1-3, p. 1–189, mar 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.01.001>.
- [9] VERLINDE, E. Emergent gravity and the dark universe. *SciPost Physics*, v. 2, n. 3, p. 016, 2017.
- [10] VERLINDE, E. On the origin of gravity and the laws of newton. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2011, n. 4, apr 2011. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/JHEP04\(282011\)29029](https://doi.org/10.1007/JHEP04(282011)29029).
- [11] SALINAS, S. R. *Introdução a física estatística vol. 09*. [S.l.]: Edusp, 1997.
- [12] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor*. [S.l.]: Editora Blucher, 2018. v. 2.
- [13] RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; WALKER, J. Fundamentals of physics, vol. 1. *Hoboken: John Wiley*, 1988.
- [14] CLAUSIUS, R. *The mechanical theory of heat*. [S.l.]: Macmillan, 1879.
- [15] PATHRIA, R. K. *Statistical mechanics*. [S.l.]: Elsevier, 2016.
- [16] SAKHAROV, A. D. Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitation. *General Relativity and Gravitation*, Citeseer, v. 32, n. 2, p. 365–367, 2000.

- [17] CRISPINO, L. C.; HIGUCHI, A.; MATSAS, G. E. The unruh effect and its applications. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 80, n. 3, p. 787, 2008.
- [18] UNRUH, W. G. Notes on black-hole evaporation. *Physical Review D*, APS, v. 14, n. 4, p. 870, 1976.
- [19] SUSSKIND, L. The world as a hologram. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 36, n. 11, p. 6377–6396, 1995.
- [20] BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. In: *JACOB BEKENSTEIN: The Conservative Revolutionary*. [S.l.]: World Scientific, 2020. p. 307–320.
- [21] HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. In: *Euclidean quantum gravity*. [S.l.]: World Scientific, 1975. p. 167–188.
- [22] HAWKING, S. W. Black holes in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 25, n. 2, p. 152–166, 1972.
- [23] BOUSSO, R. The holographic principle. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 74, n. 3, p. 825, 2002.
- [24] WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010.
- [25] JACOBSON, T. Thermodynamics of spacetime: the einstein equation of state. *Physical Review Letters*, APS, v. 75, n. 7, p. 1260, 1995.
- [26] BEKENSTEIN, J. D. Universal upper bound on the entropy-to-energy ratio for bounded systems. In: *JACOB BEKENSTEIN: The Conservative Revolutionary*. [S.l.]: World Scientific, 2020. p. 335–346.
- [27] ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the royal society of London. Series A. Mathematical and physical sciences*, The Royal Society London, v. 241, n. 1226, p. 376–396, 1957.
- [28] RUBINSTEIN, M.; OBUKHOV, S. Memory effects in entangled polymer melts. *Physical review letters*, APS, v. 71, n. 12, p. 1856, 1993.
- [29] MCGAUGH, S. S.; LELLI, F.; SCHOMBERT, J. M. Radial acceleration relation in rotationally supported galaxies. *Physical Review Letters*, APS, v. 117, n. 20, p. 201101, 2016.
- [30] NETO, O. O. M. S. O efeito unruh. 2021.
- [31] BIRRELL, N. D.; BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. Quantum fields in curved space. Cambridge university press, 1984.
- [32] CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.