

Samuel Lucas da Rocha Vieira

**Análise semi-clássica da interação do momento  
de quadrupolo magnético de uma partícula  
neutra com campos externos**

João Pessoa - PB

2019

Samuel Lucas da Rocha Vieira

**Análise semi-clássica da interação do momento de  
quadropolo magnético de uma partícula neutra com  
campos externos**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

UFPB – Universidade Federal da Paraíba

CCEN – Centro de Ciências Exatas e da Natureza

DF – Departamento de Física

PRPG – Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Dr. Knut Bakke Filho

João Pessoa - PB

2019

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

V658a Vieira, Samuel Lucas da Rocha.

Análise semi-clássica da interação do momento de quadrupolo magnético de uma partícula neutra com campos externos / Samuel Lucas da Rocha Vieira. - João Pessoa, 2019.

57 f. : il.

Orientação: Knut Bakke Filho.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Dualidade de Maxwell. 2. Aproximação WKB. 3. Aproximação semiclássica. 4. Momento de quadrupolo magnético. 5. Partícula neutra. 6. Simetria cilíndrica. I. Bakke Filho, Knut. II. Título.

UFPB/BC

CDU 536.765(043)

~~Danilo Wilson Lemos Menezes~~  
Técnico em Assuntos Educacionais  
Mat. SIAPE 2647774

Ata da Sessão Pública da Defesa de  
Dissertação de **Mestrado** do aluno **Samuel  
Lucas da Rocha Vieira**, candidato ao Título  
de Mestre em Física na Área de Concentração  
Física das Partículas Elementares e Campos.

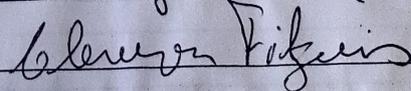
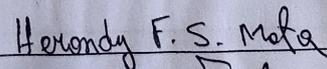
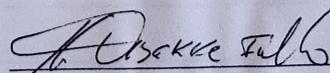
1 Aos dezenove dias do mês de julho do ano de dois mil e dezenove, às 10:00, na sala de  
2 reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da  
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora  
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Física das  
5 Partículas Elementares e Campos, **Samuel Lucas da Rocha Vieira**. A comissão  
6 examinadora composta pelos professores doutores: Knut Bakke Filho (DF/UFPB),  
7 orientador e presidente da banca examinadora, Herondy Francisco Santana Mota  
8 (DF/UFPB) e Cleverson Filgueiras (UFLA). Dando início aos trabalhos, o Prof. Knut  
9 Bakke Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a  
10 palavra o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de  
11 dissertação intitulado "*análise semi-clássica da interação do momento de quádruplo  
12 magnético de uma partícula neutra com campos externos*". Concluída a exposição, o  
13 candidato foi arguido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer:  
14 "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo  
15 diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos  
16 Menezes, lavrei esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca  
17 Examinadora. João Pessoa, **19 de julho de 2019**.

18

Prof. Dr. Knut Bakke Filho  
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota  
UFPB

Prof. Dr. Cleverson Filgueiras  
UFLA



*Este trabalho é dedicado aos meus pais,  
Lauro de Brito Vieira e Kátia Valéria da Rocha Vieira.*

# Agradecimentos

Os agradecimentos principais são direcionados ao professor Knut Bakke Filho pela ótima orientação no decorrer do meu mestrado e durante o desenvolvimento deste trabalho.

Quero agradecer também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

Ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba (DF/UFPB) pela oportunidade de fazer o mestrado e de realizar este trabalho.

Aos meus amigos e companheiros de curso: Pedro Henrique, Ana Paula, Alberto Albuquerque, Moallison Ferreira, Debora Ramalho, Rafael Alves e Letícia Cavalcante.

Por fim aos meus amigos: Hicaro Silva, Rafael Pereira, Matheus Antonius, Lauro Vieira, Tácio Candeia e Igor Oliveira.

*“It’s the questions we can’t answer that teach us the most.  
They teach us how to think.  
If you give a man an answer, all he gains is a little fact.  
But give him a question and he’ll look for his own answers.”  
(Patrick Rothfuss)*

# Resumo

Baseando-se na dualidade de Maxwell, este trabalho considera campos magnéticos não uniformes gerados por densidades de carga magnética não uniformes e campos elétricos não uniformes gerados por densidades de corrente magnética não uniformes. Depois é analisado o efeito destes campos eletromagnéticos sobre os níveis de energia de uma partícula neutra, sem spin e com momento de quadrupolo magnético, a partir de um ponto de vista semiclássico por meio da aproximação WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin).

**Palavras-chave:** Aproximação WKB, Aproximação semiclássica, momento de quadrupolo magnético, partícula neutra, simetria cilíndrica, dualidade de Maxwell

# Abstract

Based on the Maxwell duality, we consider non-uniform magnetic fields produced by non-uniform magnetic charge densities and non-uniform electric fields produced by uniform and non-uniform magnetic current densities. Then, we analyse the interaction of these fields with the magnetic quadrupole moment of a neutral particle from a semiclassical point of view, by applying the WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin) approximation.

**Keywords:** WKB approximation, semiclassical approximation, magnetic quadrupole moment, neutral particles, cylindrical symmetry, Maxwell duality

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Região de ajuste onde deve ser utilizada a função de onda $\psi_p$ (GRIFFITHS, 2016) . . . . .	27
Figura 2 – Regiões de sobreposição da função de onda $\psi_p$ com as duas soluções encontradas pela aproximação WKB (GRIFFITHS, 2016) . . . . .	28
Figura 3 – Poço potencial sem barreiras (GRIFFITHS, 2016) . . . . .	30

# Lista de abreviaturas e siglas

PRPG	Programa de Pós-Graduação em Física
DF	Departamento de Física
CCEN	Centro de Ciências Exatas e da Natureza
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
WKB	Wentzel, Kramers, Brillouin

# Lista de símbolos

$\mu_0$	Permeabilidade magnética no vácuo
$\epsilon_0$	Permissividade elétrica no vácuo
$c$	Velocidade da Luz
$\hbar$	Constante de Planck dividida por $2\pi$
$M_{i,j}$	Tensor de quadrupolo magnético
$Q_{i,j}$	Tensor de quadrupolo elétrico

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>DUALIDADE DE MAXWELL</b>	<b>16</b>
2.1	O Monopolo Magnético	16
2.2	Quantização da carga magnética	20
<b>3</b>	<b>APROXIMAÇÃO WKB</b>	<b>24</b>
3.1	O Método W.K.B.	24
3.2	O método WKB em coordenadas cilíndricas	31
3.3	A transformação de Langer	34
<b>4</b>	<b>O SISTEMA DO QUADRUPOLO MAGNÉTICO</b>	<b>36</b>
<b>4.1</b>	<b>Interação com campos magnéticos não uniformes</b>	<b>37</b>
4.1.1	Campo magnético parabólico na direção radial	38
4.1.2	Campo magnético quártico na direção radial	40
4.1.3	Campo magnético logarítmico na direção radial	42
<b>4.2</b>	<b>Interação com campos elétricos não uniformes</b>	<b>45</b>
4.2.1	Campo elétrico linear axial	45
4.2.2	Campo elétrico parabólico axial	48
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>52</b>
<b>A</b>	<b>APÊNDICE - QUANTIZAÇÃO DE LANDAU</b>	<b>54</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>56</b>

# 1 introdução

As equações de Maxwell no vácuo possuem uma simetria interessante: se trocarmos o campo  $\vec{E}$  pelo campo  $\vec{B}$  e o campo  $\vec{B}$  por  $-\mu_0\epsilon_0\vec{E}$ , conseguimos recuperar as mesmas equações de Maxwell. Essa simetria, no entanto, não existe quando consideramos a presença de cargas ou correntes elétricas, mas podemos recupera-la se considerarmos a presença de cargas e correntes magnéticas. No entanto as transformações duais das equações de Maxwell e o monopolo magnético são assuntos tratados apenas do ponto de vista teórico, já que nunca foi detectado um monopolo magnético. Ainda assim, além de ser um assunto interessante, a dualidade de Maxwell chama a atenção pela possibilidade de existirem efeitos quânticos associados à partículas (ou sistemas de partículas) que possuem momento de multipolo magnético. Alguns exemplo destes efeitos quânticos são: O efeito Aharonov-Bohm dual, discutido por Dowling (DOWLING; WILLIAMS; FRANSON, 1999) e também por Furtado (FURTADO; DUARTE, 2005), o efeito Aharonov-Casher (AHARONOV; CASHER, 1984), a fase geométrica quântica obtida por Chen (CHEN, 1995), entre outros. Estes três efeitos que foram mencionados estão relacionados ao polo magnético, ao momento de dipolo magnético e ao momento de quadrupolo magnético, respectivamente. Além disso, alguns trabalhos tem verificado que a interação de partículas neutras com campos magnéticos gerados por densidades de cargas magnéticas, resultam no surgimento de fases geométricas quânticas. Como exemplo destes efeitos posso citar o efeito He-McKellar-Wilkens investigado por He e McKellar (HE; MCKELLAR, 1993) e por Wilkens (WILKENS, 1994), que surge da interação de um campo magnético gerado por cargas magnéticas com uma partícula neutra que possui dipolo elétrico. Outro exemplo seria a Ref. (FONSECA; BAKKE, 2015), onde foi mostrado que o efeito Aharonov-Bohm escalar também pode surgir da interação de uma partícula que possui momento de quadrupolo magnético, com um campo magnético gerado por uma densidade uniforme de polos magnéticos. Além disso, também foi mostrado pela Ref. (FONSECA; BAKKE, 2015) que uma fase quântica Aharonov-Anandan (AHARONOV; ANANDAN, 1987) pode ser obtida da interação de uma partícula neutra que possui momento de quadrupolo magnético, com um campo elétrico produzido por uma densidade de corrente magnética.

Como foi mencionado acima, podemos usar a dualidade das equações de Maxwell para estudar diversas fases quânticas. Também podemos utilizar esses conceitos para estudar efeitos quânticos interessantes. Por exemplo, na Ref. (RIBEIRO; FURTADO; NASCIMENTO, 2006) foi verificado um efeito análogo a quantização de Landau usando a dualidade de Maxwell. Naquele trabalho, L. R. Ribeiro, C. Furtado e J. R. Nascimento discutiram a quantização de Landau para partículas neutras com dipolo elétrico permanente interagindo com campos magnéticos gerados por densidades uniformes de cargas

magnéticas. Seguindo o exemplo deste trabalho, J. Lemos de Melo, K. Bakke e C. Furtado (MELO; BAKKE; FURTADO, 2016) discutiram a fase de Berry dos estados Landau-He-McKellar-Wilkens deslocados para o mesmo sistema. De forma semelhante, neste trabalho estudaremos o comportamento de uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético interagindo com campos eletromagnéticos gerados por densidades de cargas magnéticas ou densidades de correntes magnéticas. Para isso, usaremos a aproximação WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin) para fazer uma análise do sistema do ponto de vista semiclassico.

Os sistemas propostos neste trabalho serão estudados por meio do sistemas de coordenadas cilíndricas. Portanto teremos de usar a aproximação WKB com uma simetria cilíndrica. Langer na Ref. (LANGER, 1937) mostrou como devemos abordar a aproximação WKB em simetrias esféricas. Ele verificou que o termo centrífugo, que surge na equação radial em coordenadas esféricas, deve ser modificado para contornar a singularidade na origem. Portanto, essa modificação feita no termo centrífugo ficou conhecida como a transformação de Langer. Assim, usando a transformação de Langer foi possível estudar diversos sistemas com simetria esféricas através da aproximação WKB. Mais tarde Berry e Almeida (BERRY; ALMEIDA, 1973) mostraram que a transformação de Langer ainda falha quando trabalhamos com o caso específico das ondas  $s$ , que ocorrem quando tomamos o número quântico do momento angular  $l = 0$ . Berry e Almeida mostraram que no caso específico das ondas  $s$ , um tratamento adequado seria usar a função de Bessel para obter a função de onda do problema. Neste trabalho, além de aplicar a transformação de Langer em coordenadas cilíndricas, também iremos nos basear no desenvolvimento apresentado no livro "Semiclassical Physics" (BRACK, 2018), afim de entender como devemos usar a aproximação WKB em coordenadas cilíndricas e chegar aos nossos resultados.

O objetivo deste trabalho é obter a solução de estados ligados de uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético submetida à presença de diversos campos eletromagnéticos. No capítulo 2 vamos introduzir a dualidade das equações de Maxwell e veremos como campos eletromagnéticos serão gerados a partir de uma situação conhecida como magneto-dinâmica. Depois disso, também será mostrada a quantização da carga magnética e que tal quantização também resulta na quantização da carga elétrica. No capítulo 3 vamos introduzir o método WKB e também veremos como obter a condição de quantização de Bohr-sommerfeld. Ainda no capítulo 3, veremos como método WKB deve ser aplicado à sistemas com simetria cilíndrica. O conteúdo dos capítulos 2 e 3 são a base teórica utilizada para realizar este trabalho. No capítulo 4 vamos apresentar o sistema de uma partícula neutra, sem spin e com momento de quadrupolo magnético que se move na presença de um campo eletromagnético. Depois vamos analisar a interação desta partícula com campos elétricos e magnéticos, gerados por densidades de corrente magnética e por densidades de carga magnética, respectivamente. Nosso objetivo no capítulo 4 será obter o espectro de energias de cada sistema proposto. Por fim, no capítulo 4, chegamos a nossas

conclusões.

## 2 Dualidade de Maxwell

Neste trabalho usaremos a dualidade de Maxwell para supor a presença de diferentes campos eletromagnéticos gerados a partir de densidades de cargas ou correntes magnéticas. Portanto, neste capítulo será introduzido o eletromagnetismo dual, que é baseado na existência de carga magnética. Na primeira seção consideraremos a existência de carga magnética e veremos alguns aspectos interessantes que surgem desta consideração. Vamos começar introduzindo a dualidade de Maxwell e mostrando as equações de Maxwell para a carga magnética. Depois disso, ainda na primeira seção, vamos discutir a dinâmica quântica de uma partícula que possui carga magnética e, por último, vamos discutir a quantização da carga magnética feita por Dirac ([DIRAC, 1931](#)).

### 2.1 O Monopolo Magnético

Vamos começar pelas equações de Maxwell. A partir delas podemos desenvolver toda a teoria da eletrodinâmica, elas são:

- A lei de Gauss, que diz que um campo elétrico estático  $\vec{E}$  pode ser gerado por uma densidade de cargas  $\rho$ . A forma diferencial da lei de Gauss é:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (2.1)$$

Em sua forma integral, a lei de Gauss mostra que o fluxo de campo elétrico que passa através de uma superfície fechada é proporcional à carga dentro da superfície.

- A lei de Gauss para o magnetismo, que aponta para a não existência de cargas (monopolos) magnéticos. O campo magnético  $\vec{B}$  está relacionado à presença de um dipolo (ou multipolo) magnético. O fluxo de campo magnético que passa por uma superfície fechada é sempre zero. A forma diferencial dessa lei é:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2)$$

- A lei de Faraday, que descreve como a variação temporal de um campo magnético  $\vec{B}$  induz um campo elétrico  $\vec{E}$ . A forma diferencial da lei de Faraday é:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

Em sua forma integral, essa lei relaciona a variação do fluxo magnético numa superfície com a indução de um campo elétrico no contorno fechado da mesma superfície.

- A lei de Ampère-Maxwell, que diz que campos magnéticos  $\vec{B}$  podem ser gerados por densidades de correntes elétricas  $\vec{J}$  (lei de Ampère original) e por campos elétricos  $\vec{E}$  que variam com o tempo (modificação feita por Maxwell). A forma diferencial dessa lei é:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

Na forma integral, a lei de Ampère-Maxwell diz que a corrente elétrica ou a variação de fluxo do campo elétrico numa superfície induzem um campo magnético no contorno fechado envolvendo a superfície.

Nas equações acima,  $\mu_0$  e  $\epsilon_0$  são, respectivamente, a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica no vácuo.

Como foi explicado acima, uma informação importante que contida nas equações de Maxwell é a de como os campos eletromagnéticos são produzidos. Vemos a partir delas que campos elétricos podem ser gerados por cargas elétricas ou por um campo magnético dependente do tempo (equações (2.1) e (2.2)), enquanto campos magnéticos podem ser gerados por correntes elétricas ou por um campo elétrico dependente do tempo (Eq. (2.4)). Veja que a Eq. (2.2) também carrega uma informação importante: não existe carga magnética (ou pelo menos ainda não foi detectada).

Como foi dito no capítulo de introdução, existe uma simetria entre os campos nas equações de Maxwell. Se considerarmos uma região livre de cargas e correntes, conseguimos recuperar as mesmas 4 equações se fizermos as duas substituições seguintes:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{B} \quad \text{e} \quad \vec{B} \rightarrow -\mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \quad (2.5)$$

Essa simetria não existe se considerarmos o termo da densidade de carga elétrica na Lei de Gauss (Eq. (2.1)) ou o termo da corrente elétrica na lei de Ampère (Eq. (2.4)). No entanto, podemos recuperar esta simetria das equações de Maxwell se considerarmos a existência de uma carga magnética. Neste caso, as equações de Maxwell ficam ([GRIFFITHS, 1999](#))

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e, \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m, \quad (2.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Nesta forma, as equações de Maxwell recuperam a simetria pelas transformações  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$  e  $\vec{B} \rightarrow -\mu_0 \epsilon_0 \vec{E}$ . Esta simetria das equações de Maxwell entre os termos elétricos e os termos magnéticos é conhecida como a dualidade de Maxwell. No entanto, a busca por uma partícula elementar (como o elétron, por exemplo) que possui uma carga magnética nunca obteve resultados. Dessa forma, um monopolo magnético elementar permanece um aspecto puramente teórico no eletromagnetismo. No entanto, como já foi exemplificado na introdução, diversos efeitos podem ser estudados quando consideramos a existência da carga magnética. A existência da carga magnética também teria como consequência a quantização da carga elétrica, que será explicada mais adiante. Apesar da existência de uma partícula elementar com carga magnética ainda não ser confirmada, Castelnovo, Moessner e Sondhi ([CASTELNOVO; MOESSNER; SONDHI, 2008](#)) propuseram que o monopolo magnético continuasse sendo procurado, não como partícula elementar, mas como uma partícula emergente. Isso significa que o monopolo magnético aparece como uma manifestação das interações presentes em um sistema de muitos corpos. Eles verificaram que seria possível que um análogo ao monopolo magnético emergisse de um tipo especial de ímã conhecido como "spin-ice", e estudaram como que as interações dos dipolos magnéticos presentes neste material poderiam fazer aparecer estes monopolos magnéticos. Estas partículas emergentes também estão relacionadas com a topologia do sistema e tem propriedades matemáticas idênticas a uma partícula elementar com carga magnética. Essa partícula emergente foi observada experimentalmente na Ref. ([KADOWAKI et al., 2009](#)).

A discussão feita acima sobre o monopolo magnético é semelhante aquela apresentada no livro "Introduction to Electrodynamics" ([GRIFFITHS, 1999](#)). Só que neste trabalho, além de considerar a existência de cargas magnéticas, consideramos também que não há a presença de cargas elétricas ou de correntes elétricas nos sistemas estudados. Esta situação é conhecida como magneto-dinâmica e nela as equações de Maxwell ficam:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (2.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m, \quad (2.11)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Veja que esta situação é muito semelhante à eletrodinâmica. Assim como fazemos na eletrodinâmica, podemos definir um potencial vetor elétrico  $\vec{A}_E$  a partir da Eq. (2.10):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}_E}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Além disso também podemos usar essa definição do potencial vetor elétrico  $\vec{A}_E$  em conjunto com a Eq. (2.12) para definir um potencial escalar magnético  $\Phi_M$ , assim como na eletrodinâmica:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \Phi_M - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_E}{\partial t}. \quad (2.15)$$

A partir daqui, podemos ver que a magneto-dinâmica pode ser abordada de forma análoga à eletrodinâmica. Os resultados obtidos na teoria do eletromagnetismo terão, nessa teoria que considera a existência de monopólos magnéticos, resultados duais e análogos. Um desses resultados, que também é importante para este trabalho, é a expansão multipolar dos potenciais eletromagnéticos e a energia potencial associada a cada termo da expansão. Em especial, utilizaremos o termo de quadrupolo e sua energia potencial. Assim como no caso da eletrodinâmica, o tensor do momento de quadrupolo magnético deve ser simétrico e sem traço (RADT; HURST, 1970). Além disso, também podemos obter que a energia potencial associada a esse quadrupolo magnético é  $U_m = -\sum_{i,j} M_{i,j} \partial_i \vec{B}_j$ , assim como no caso da eletrodinâmica.

No capítulo seguinte estudaremos a interação de partículas neutras, que possuem momento de quadrupolo magnético, com campos eletromagnéticos. Apesar disso é interessante verificar a dinâmica de uma partícula que possui carga magnética, pois será útil para comparação mais adiante.

Para uma partícula de carga magnética  $q_M$  movendo-se com velocidade  $\vec{v}$ , na presença de um campo eletromagnético, a força exercida sobre ela será:

$$\vec{F} = q_M (\vec{B} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}). \quad (2.16)$$

Substituindo os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  pelas equações (2.14) e (2.15), chegamos a

$$\vec{F} = q_M \left( -\vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A} \right) - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} \right). \quad (2.17)$$

No formalismo Lagrangiano as forças generalizadas se relacionam com o potencial pela relação  $Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right)$ , onde  $q_i$  são as coordenadas generalizadas e  $\dot{q}_i$  são as velocidades generalizadas. Então o potencial que gera a força (2.17) será

$$U = q_M \left( \phi_M - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}_E \right). \quad (2.18)$$

Assim, obtemos a Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q_M(\phi_M - \frac{1}{c}\vec{v} \cdot \vec{A}_E), \quad (2.19)$$

e a partir dela, obtemos os momentos canônicos  $p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}$ , onde  $p_i$  e  $v_i$  são as componentes do momento e da velocidade. Então, pelas transformações de Legendre, obtemos o seguinte operador hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2m}(p - q_M\vec{A}_E)^2 + q_M\phi_M. \quad (2.20)$$

Este operador hamiltoniano será importante pois ao longo do desenvolvimento deste trabalho, veremos que o operador hamiltoniano da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético terá uma forma semelhante a este, nos permitindo fazer uma analogia entre eles. Isso nos permitirá associar os potenciais escalar e vetor aos termos que aparecem devido à interação do quadrupolo magnético com os campo eletromagnéticos considerados.

## 2.2 Quantização da carga magnética

Uma consequência interessante em considerar a existência da carga magnética é que ela já estaria quantizada pela mecânica quântica. Mais que isso, a quantização da carga magnética iria implicar na quantização da carga elétrica, explicando o porque desta última ser quantizada. Neste capítulo, usarei noções de eletromagnetismo e de mecânica quântica para chegar à quantização dessas duas cargas. O desenvolvimento a seguir é baseado no desenvolvimento encontrado no livro "Modern Quantum Mechanics" (SAKURAI, 1994) por J. J. Sakurai. Assim como no livro, usaremos o potencial vetor em conjunto com as diferenças de fase (adquiridas por mudanças de calibre) em duas funções de onda que representam a mesma partícula, para obter a relação de quantização da carga elétrica com a carga magnética.

Vamos começar supondo que exista uma carga magnética pontual  $q_M$  localizada na origem. Podemos usar a forma integral da Eq. (2.7), que seria equivalente a lei de Gauss para a carga magnética, para obter o campo magnético gerado por essa carga:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 q_M, \quad (2.21)$$

onde  $d\vec{A}$  é um elemento infinitesimal de uma superfície que envolve a carga  $q_M$ . Assim, de forma análoga a uma carga elétrica, esta carga magnética irá gerar um campo dado por:

$$\vec{B} = \left( \frac{\mu_0 q_M}{4\pi r^2} \right) \hat{r}. \quad (2.22)$$

Normalmente, para definir um potencial vetor que gere o campo (2.22), usamos a expressão  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . No entanto, ao considerar monopolos magnéticos, fica impossível construir um potencial vetor único que gere o campo (2.22) e que seja válido em todo o espaço dessa maneira. Isso acontece porque a Eq. (2.2) (que significa que não existem monopolos magnéticos):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad (2.23)$$

Entra em contradição com a Eq. (2.21):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{B} d^3x = \int \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d^3x = 0. \quad (2.24)$$

No entanto, podemos argumentar que o potencial vetor é apenas uma ferramenta utilizada para obter o campo magnético  $\vec{B}$  e usar mais de um potencial para chegar ao campo (2.22) (um raciocínio semelhante ao de escolher um calibre). Então vamos usar dois potenciais vetores, que serão válidos em regiões diferentes, para obter o campo magnético (2.22):

$$\vec{A}^I = \left[ \frac{\mu_0 q_M (1 - \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \right] \hat{\phi}, \quad \text{para } \theta < \pi - \epsilon, \quad (2.25)$$

Que é válido em todo o espaço, exceto na região definida pelo cone  $\theta = \pi - \epsilon$ .

$$\vec{A}^{II} = - \left[ \frac{\mu_0 q_M (1 + \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \right] \hat{\phi}, \quad \text{para } \theta > \epsilon, \quad (2.26)$$

Que é válido em todo o espaço, exceto na região definida pelo cone  $\theta = \epsilon$ .

Veja que, pela definição do rotacional em coordenadas esféricas, nenhum dos dois potenciais acima resulta no campo (2.22). Porém ao usarmos os dois em conjunto e considerando suas regiões de atuação, chegamos ao campo (2.22).

Vamos ver agora o que acontece na região onde os dois potenciais são válidos  $\epsilon < \theta < \pi - \epsilon$ . Nesta região, tanto o potencial  $\vec{A}^I$  quanto o potencial  $\vec{A}^{II}$  resultam no mesmo campo magnético. Isso significa que eles estão relacionados por uma transformação de calibre, ou seja:

$$\vec{A}^{II} = \vec{A}^I + \vec{\nabla} \Lambda, \quad (2.27)$$

onde  $\Lambda$  é uma função escalar da posição. Neste caso específico, podemos determinar a função  $\Lambda$ , pois sabemos a forma dos dois potenciais que estão relacionados por meio dela. Temos então:

$$\vec{A}^{II} - \vec{A}^I = \vec{\nabla} \Lambda = - \left( \frac{\mu_0 q_M}{2\pi r \sin \theta} \right) \hat{\phi}, \quad (2.28)$$

e assim, para esse caso obtemos que:

$$\Lambda = - \frac{\mu_0 q_M}{2\pi} \varphi. \quad (2.29)$$

Agora vamos considerar a função de onda de uma partícula eletricamente carregada que se move na presença do campo magnético (2.22). A forma da função de onda desta

partícula irá depender do calibre utilizado. No entanto, essa diferença entre os calibres não pode resultar numa mudança nos valores esperados dos operadores de posição  $\hat{x}$  e de momento mecânico  $\hat{\Pi}$ , definido a partir do operador hamiltoniano (2.20) por:

$$m \frac{d\hat{r}}{dt} = m \frac{[\hat{r}, \hat{H}]}{i\hbar} = \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \hat{A} \right), \quad (2.30)$$

onde  $\hat{p} = -i\hbar\nabla$  é o operador do momento e 'e' é a carga elétrica da partícula em questão.

Podemos supor que os valores esperados da posição  $\langle \hat{x} \rangle$  e do momento mecânico  $\langle \hat{\Pi} \rangle$  da partícula não mudem, pois as suas quantidades clássicas correspondentes também não mudam sob transformação de calibre. Além disso, a transformação de calibre também deve manter os módulos das duas funções de onda iguais, ou seja, deve ser uma transformação unitária. Portanto, temos 3 condições a serem satisfeitas:

$$\langle \hat{x} \rangle^{(I)} = \langle \hat{x} \rangle^{(II)}; \quad (2.31)$$

$$\langle \hat{\Pi} \rangle^{(I)} = \langle \hat{\Pi} \rangle^{(II)}; \quad (2.32)$$

$$T^\dagger T = 1, \quad (2.33)$$

onde  $T$  representa a transformação de calibre para as funções de onda e os índices  $(I)$  e  $(II)$  representam os valores esperados antes e depois da aplicação da transformação de calibre, respectivamente.

Usando condições dadas pelas equações (2.31), (2.32) e (2.33), é possível inferir que as funções de onda definidas pelos calibres de  $\vec{A}^{(I)}$  e de  $\vec{A}^{(II)}$  se relacionam por:

$$\psi^{(II)} = \exp\left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right) \psi^{(I)}. \quad (2.34)$$

É possível chegar a essa conclusão pois:

- A condição (2.33) é satisfeita se considerarmos que a transformação de calibre  $T$  tem uma forma exponencial imaginária.
- A condição (2.31) será satisfeita se  $\hat{x} = T^\dagger \hat{x} T$ , ou seja, a transformação  $T$  deve comutar com o operador  $\hat{x}$ . Como  $\Lambda$  é uma função da posição e o operador  $\hat{x}$  comuta com qualquer função da posição, a condição (2.31) também é satisfeita pela Eq. (2.34).
- A condição (2.32) será satisfeita se  $\hat{\Pi}^{(I)} = T^\dagger \hat{\Pi}^{(II)} T$ . Usando as equações (2.27) e (2.30) em conjunto com a relação  $[\hat{p}, f(\hat{x})] = -i\hbar \vec{\nabla} f(\hat{x})$ , podemos obter que a condição (2.32) também é satisfeita pela transformação (2.34).

Considerando o caso em que  $\Lambda$  é dado pela Eq. (2.29), a transformação de calibre para a função de onda (2.34) fica:

$$\psi^{(II)} = \exp\left(\frac{-i\mu_0 e q_M \varphi}{hc}\right) \psi^{(I)}, \quad (2.35)$$

onde  $h = 2\pi\hbar$  é a constante de Planck.

Tanto a função  $\psi^{(II)}(r, \theta, \varphi)$  quanto a função  $\psi^{(I)}(r, \theta, \varphi)$  devem voltar ao seu valor original se rotacionarmos elas por um ângulo azimutal de  $\varphi = 2\pi$ . Mas pela Eq. (2.35), vemos que isso só é possível se for válida a seguinte condição:

$$\frac{\mu_0 e q_M}{hc} = l, \quad \text{onde} \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.36)$$

Dessa forma, chegamos à conclusão de que a carga magnética e também a carga elétrica devem ser quantizadas. Portanto, se assumirmos a sua existência, a carga magnética já estaria quantizada pela mecânica quântica. A Eq. (2.36) é conhecida como a condição de quantização de Dirac. Nela vemos que a existência hipotética do monopolo magnético faria com que a carga elétrica estivesse quantizada em determinadas unidades, e que a carga magnética deveria ser quantizada com unidades inversamente proporcionais à carga elétrica.

Essa predição proveniente da mecânica quântica foi desenvolvida pela primeira vez por Dirac (1931). Em seu trabalho, ele partiu das diferenças de fases das funções de onda e depois as associou com os potenciais e com os campos eletromagnéticos. Depois, ele supôs que diferenças de fases em pequenas superfícies fechadas estivessem relacionadas com o fluxo magnético, e assim obtendo uma relação de quantização entre a carga elétrica e a carga magnética. Em seu trabalho, Dirac também mencionou que uma possível razão para a carga magnética não ter sido detectada seria a de que sua carga é muito maior do que a carga elétrica, sendo necessária muito mais energia para mantê-la isolada.

## 3 Aproximação WKB

Neste trabalho, vamos utilizar a aproximação WKB para obter as soluções de sistemas com simetria cilíndrica. Sendo assim, neste capítulo vamos introduzir o método WKB e como aplicá-lo nos sistemas propostos. Na primeira seção será introduzido o método WKB, que é usado durante todo o trabalho. Primeiro vamos verificar as funções de onda geradas pela aproximação WKB e a partir delas veremos como obter a quantização de Bohr-Sommerfeld. Depois disso, veremos que alterações o termo centrífugo da equação radial deve sofrer para que o método WKB continue sendo válido em coordenadas cilíndricas.

### 3.1 O Método W.K.B.

O método WKB, desenvolvido em 1926 pelos físicos Gregor Wentzel, Hendrik Anthony Kramers e Léon Brillouin, é uma técnica utilizada para obter soluções aproximadas de equações diferenciais lineares cujos coeficientes dependem da posição. Em especial, podemos usar o método WKB para obter funções de onda aproximadas a partir da equação de Schrödinger independente do tempo. Neste trabalho, assim como foi feito por [Bakke \(2019\)](#), usaremos este método para obter as energias de estados ligados dos sistemas propostos. O desenvolvimento do método WKB a seguir foi baseado em dois livros: "Introduction to Quantum Mechanics" ([GRIFFITHS, 2016](#)) e "Semiclassical Physics" ([BRACK, 2018](#)).

A ideia da aproximação WKB consiste em considerar que o potencial escolhido varie tão lentamente em comparação com o comprimento de onda da função de onda numa determinada região, que a função de onda continua praticamente com a mesma forma sinusoidal dentro desta região, apenas com o seu comprimento de onda e sua amplitude variando lentamente em função de  $r$ .

Inicialmente veremos o desenvolvimento do método apenas em uma dimensão e mais adiante, veremos o que deve ser feito para que ele possa ser aplicado em 3 dimensões (no caso de coordenadas cilíndricas). Vamos começar considerando que uma partícula move-se em uma região onde atua um potencial qualquer  $V(x)$ . A equação de Schrödinger independente do tempo para esta partícula será:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi = \varepsilon \psi. \quad (3.1)$$

Agora, definindo o momento clássico de uma partícula com energia  $\varepsilon$  e energia potencial  $V(x)$  como:

$$p(x) = \sqrt{2m(\varepsilon - V(x))}, \quad (3.2)$$

podemos obter a seguinte equação diferencial linear:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{p^2(x)}{\hbar^2}\psi = 0. \quad (3.3)$$

Vamos considerar que a partícula encontra-se numa região classicamente permitida, ou seja, uma região onde  $\varepsilon > V(x)$ . Agora, como  $\psi(x)$  é uma função complexa, podemos expressá-la na forma:

$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}, \quad (3.4)$$

onde  $A(x)$  e  $\phi(x)$  são, respectivamente, a amplitude e a fase da função de onda  $\psi(x)$ . Substituindo a Eq. (3.4) e sua segunda derivada na Eq. (3.3), obtemos a seguinte equação

$$A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - a(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2}A. \quad (3.5)$$

Aqui, usamos o apóstrofe para indicar uma derivada com respeito a  $x$ . Isolando as partes real e imaginária da equação acima, obtemos duas equações envolvendo a amplitude e a fase de  $\psi(x)$ . elas são:

$$\frac{d(A^2\phi')}{dx} = 0 \quad (3.6)$$

e

$$A'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2}A. \quad (3.7)$$

Da Eq. (3.6) chegamos numa relação entre a amplitude e a fase de  $\psi$ :

$$A(x) = \frac{C}{\sqrt{\phi'(x)}}, \quad (3.8)$$

onde  $C$  é uma constante real. A Eq.(3.7) não pode ser resolvida, no entanto a aproximação WKB nos diz que a amplitude  $A(x)$  varia tão lentamente que o termo  $A''$  passa a ser desprezível. Nessas condições, a Eq. (3.7) resulta na seguinte equação para a fase de  $\psi(x)$

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{\hbar} \int p(x). \quad (3.9)$$

Portanto, no caso de regiões clássicas, podemos aproximar a função de onda da Eq. (3.4) por:

$$\psi(x) = \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx}. \quad (3.10)$$

No caso de regiões onde  $\varepsilon < V(x)$ , a aproximação WKB produz aproximações para funções de onda tuneladas. Nesse caso o mesmo procedimento deve ser executado, mas dessa vez com  $p(x)$  imaginário. Isso resulta em:

$$\psi(x) = \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int |p(x)| dx}. \quad (3.11)$$

Como dessa vez a solução WKB (3.11) representa uma partícula que se encontra em uma região onde  $\varepsilon < V(x)$ , podemos supor que sua função de onda irá decair dentro dessa região. Então podemos considerar que o coeficiente do termo que aumenta exponencialmente seja desprezível, o que nos deixa com:

$$\psi(x) = \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int |p(x)| dx}. \quad (3.12)$$

Como é explicado na referência Griffiths (2016), a Eq. (3.12) tem uma relação com a taxa de transmissão num problema de tunelamento.

Ambas as soluções obtidas pela aproximação WKB, Eq. (3.10) e Eq. (3.11), são razoavelmente precisas em suas respectivas regiões. No entanto, nas proximidades de um ponto de retorno, que ocorre quando  $\varepsilon = V(x)$  e o momento clássico  $p(x) \rightarrow 0$ , ambas as soluções divergem. Isto é inaceitável já que as duas soluções obtidas pela aproximação WKB devem representar funções de onda e, portanto, devem ser normalizáveis.

Para contornar este problema vamos considerar uma função de onda  $\psi_p$  nas proximidades do ponto de retorno, que é determinado pela forma do potencial  $V(x)$ . Essa função de onda aproximada  $\psi_p$  será usada para ligar as duas soluções Eq. (3.10) e Eq. (3.11). Por isso, os arredores dos pontos de retorno serão chamados de região de superposição.

Considere um potencial cujo ponto de retorno esteja localizado no eixo  $x = 0$ , como mostra a imagem (1). Vamos considerar que a região de superposição seja uma região onde possamos aproximar um potencial  $V(x)$  qualquer, por um potencial linear. Então na região de superposição, teremos uma função de onda  $\psi_p$  e um potencial linearizado  $V(x) = \varepsilon + V'(0)x$ . A equação de Schrödinger independente do tempo nesta região será:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \left( \varepsilon + V'(0)x \right) \right] \psi_p = \varepsilon \psi_p. \quad (3.13)$$

A partir da equação acima, obtemos:

$$\frac{d^2 \psi_p}{dx^2} = \alpha^3 x \psi_p, \quad (3.14)$$

onde definimos  $\alpha^3 = \frac{2mV'(0)}{\hbar^2}$ . Fazendo agora a substituição de variáveis  $z = \alpha x$ , obtemos a seguinte equação

$$\frac{d^2 \psi_p}{dz^2} - z \psi_p = 0, \quad (3.15)$$

que é conhecida como a equação de Airy. Existem duas soluções da equação de Airy,  $A_i(z)$  e  $B_i(z)$ , e elas são conhecidas como funções de Airy. Assim, a função de onda ajustada é uma combinação linear dessas duas funções:

$$\psi_p = aA_i(z) + bB_i(z), \quad (3.16)$$

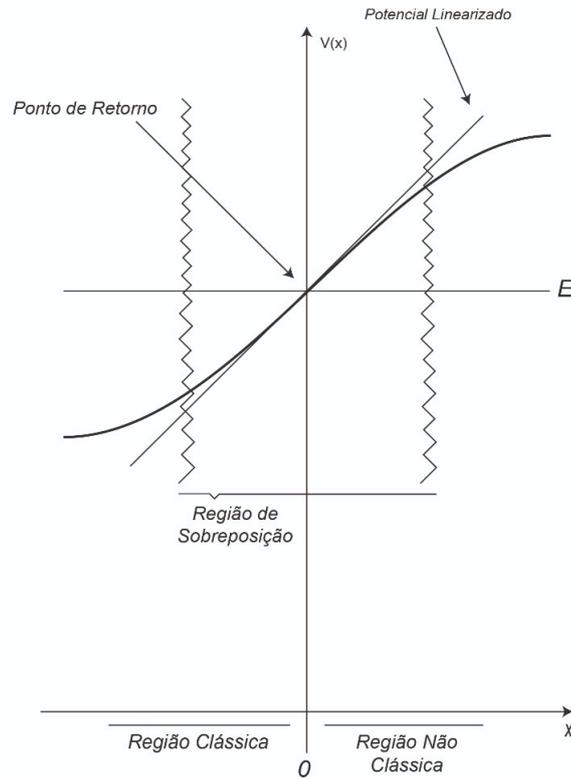


Figura 1 – Região de ajuste onde deve ser utilizada a função de onda  $\psi_p$  (GRIFFITHS, 2016)

onde  $a$  e  $b$  são constantes.

Agora precisamos fazer a conexão da função de onda ajustada  $\psi_p$  com as duas formas da função de onda WKB. Esta conexão ocorrerá em duas regiões de sobreposição da função de onda (3.16) com cada uma das funções de onda WKB (3.10) e (3.12), como mostra a figura 2.

Para fazer a conexão das funções de onda na região de sobreposição, é importante saber o comportamento assintótico de  $\psi_p$ . Como  $A_i(z)$  e  $B_i(z)$  são conhecidas, podemos obter o comportamento assintótico de  $\psi_p$  pela Eq. (3.16), obtendo:

$$\psi_p(z) = \frac{a}{\sqrt{4\pi}} \frac{e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}}{z^{\frac{1}{4}}} + \frac{b}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}}{z^{\frac{1}{4}}}, \quad \text{se } z \gg 0 \quad (3.17)$$

e

$$\psi_p(z) = \frac{a}{\sqrt{\pi}(-z)^{\frac{1}{4}}} \sin \left[ \frac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right] + \frac{b}{\sqrt{\pi}(-z)^{\frac{1}{4}}} \cos \left[ \frac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right], \quad \text{se } z \ll 0. \quad (3.18)$$

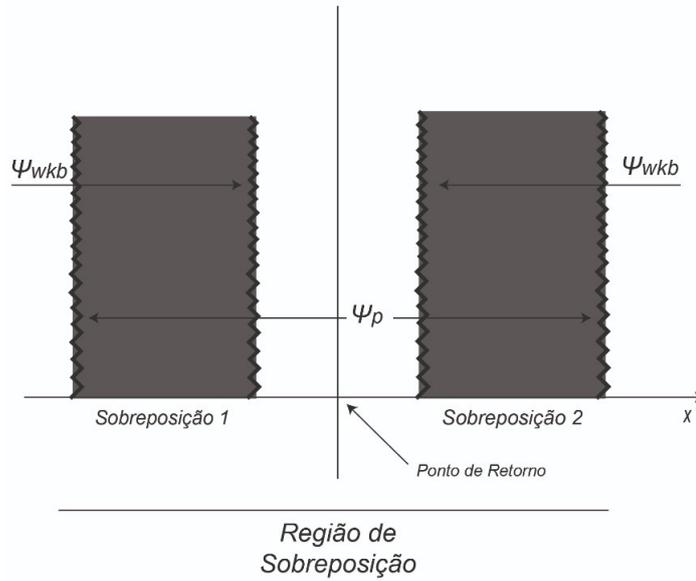


Figura 2 – Regiões de sobreposição da função de onda  $\psi_p$  com as duas soluções encontradas pela aproximação WKB (GRIFITHS, 2016)

Agora, usando a aproximação WKB no potencial da figura (1), obtemos as seguintes funções de onda aproximadas:

$$\psi_1(x) = \frac{B}{\sqrt{p(x)}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} + \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'}, \quad \text{para } x < 0 \quad (3.19)$$

e

$$\psi_2(x) = \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}, \quad \text{para } x > 0. \quad (3.20)$$

Como já foi mencionado, o potencial  $V(x)$  é linear dentro da região de superposição. Além disso também podemos usar a definição de  $\alpha$  e de  $z$  para encontrar que, dentro a região de superposição, o momento clássico é  $p(x) = i\hbar\alpha\sqrt{z}$ .

Então a função de onda aproximada para  $x > 0$ , dada pela Eq. (3.20), fica:

$$\psi_2(x) = \frac{D}{\sqrt{\hbar\alpha z^{\frac{1}{4}}}} e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.21)$$

Comparando a Eq. (3.21) com a Eq. (3.17), obtemos as seguintes formulas

$$b = 0 \quad (3.22)$$

e

$$a = \sqrt{\frac{4\pi}{\hbar\alpha}} D. \quad (3.23)$$

Da mesma forma, a função de onda aproximada para  $x < 0$ , dada pela Eq. (3.19), fica:

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\hbar\alpha}(-z)^{\frac{1}{4}}} \left[ B e^{i\frac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}}} + C e^{-i\frac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (3.24)$$

Assim, fazendo a comparação da Eq. (3.24) com a Eq. (3.18), obtemos mais duas fórmulas:

$$B = -ie^{i\frac{\pi}{4}} D \quad (3.25)$$

e

$$C = ie^{-i\frac{\pi}{4}} D. \quad (3.26)$$

As equações (3.25) e (3.26) são conhecidas como fórmulas de conexão, pois por meio delas, podemos unir as duas funções de onda WKB em ambos os lados do ponto de retorno. Isso significa que podemos eliminar o comportamento assintótico da aproximação WKB em torno dos pontos de retorno, se usarmos as fórmulas de conexão. Dessa forma, a aproximação WKB resulta em:

$$\psi(x) \cong \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], \quad \text{se } x < x_2; \quad (3.27)$$

$$\psi(x) \cong \frac{D}{\sqrt{p(x)}} \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx' \right], \quad \text{se } x > x_2. \quad (3.28)$$

As equações acima representam a função de onda WKB. Elas são válidas quando o ponto de retorno se encontra em um local onde a inclinação do potencial é positiva. Caso o ponto de retorno se encontre em uma local onde a inclinação do potencial seja negativa, o método WKB resulta na seguinte função de onda aproximada:

$$\psi(x) \cong \frac{D'}{\sqrt{p(x)}} \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx' \right], \quad \text{se } x < x_1; \quad (3.29)$$

$$\psi(x) \cong \frac{2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], \quad \text{se } x > x_1. \quad (3.30)$$

As funções de onda WKB representam uma boa aproximação para a solução da equação de Schrödinger, e também podem ser utilizadas quando não sabemos a verdadeira forma da função de onda, devido a forma do potencial  $V(x)$ . Como veremos no capítulo

seguinte, em certos casos o método WKB irá resultar nos mesmos resultados obtidos pelo método analítico, provando que é sim uma boa aproximação.

A quantização de Bohr-Sommerfeld, bastante utilizada neste trabalho, pode ser obtida a partir das duas formas da função de onda WKB (equações (3.27) e (3.28) e equações (3.29) e (3.30)). Para obtermos ela, precisamos considerar o caso de um poço potencial sem barreira, como mostrado na figura (3).

Nesse caso, o método WKB resulta nas soluções (3.27) e (3.28) para o ponto de retorno mais a direita, e nas soluções (3.29) e (3.30) para o ponto de retorno mais a esquerda. Portanto dentro do poço, as duas soluções (3.27) e (3.30) são válidas. No entanto, existe apenas uma função de onda dentro do poço, logo igualamos as soluções (3.27) e (3.30), obtendo:

$$\frac{D}{D'} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right] = \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (3.31)$$

As duas fases na Eq. (3.31) devem ser iguais. Então vamos usar, no lado direito da Eq. (3.31), que  $\int_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^x + \int_x^{x_2}$ . Além disso, vamos chamar  $\int_{x_1}^{x_2} p(x') dx' = a$  e  $\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} = b$ . Fazendo essas considerações, chegamos na seguinte relação:

$$\frac{D}{D'} \sin b = \sin \left( a + \frac{\pi}{2} + b \right). \quad (3.32)$$

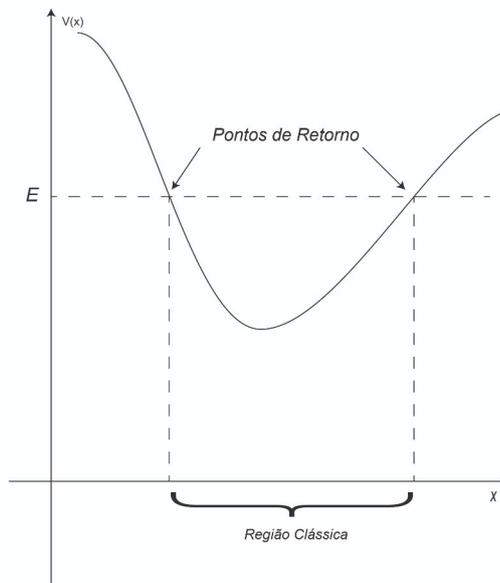


Figura 3 – Poço potencial sem barreiras (GRIFFITHS, 2016)

Agora vamos utilizar a relação trigonométrica  $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$ . Fazendo isso, conseguimos determinar que  $a + \frac{\pi}{2} = n\pi$  e que  $\cos(a + \frac{\pi}{2}) = -(\frac{D}{D'})$ . A partir dessas duas condições, obtemos as duas equações abaixo:

$$D = (-1)^n D' \quad (3.33)$$

e

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \hbar, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.34)$$

A Eq. (3.34) é a quantização de Bohr-Sommerfeld. Ela e a Eq. (3.33) são as condições necessárias para que as duas soluções (3.27) e (3.30) sejam válidas dentro do poço da imagem (3). Veja que a Eq. (3.34) requer que o momento clássico da partícula esteja confinado a uma determinada região. Neste trabalho, usaremos a quantização de Bohr-Sommerfeld para determinar os níveis de energias permitidos aos sistemas estudados. Por causa disso, veremos que todos os níveis de energia encontrados serão discretizados.

## 3.2 O método WKB em coordenadas cilíndricas

Na seção anterior, desenvolvemos a aproximação WKB considerando apenas uma dimensão. Nesta seção veremos o que ocorre quando consideramos uma aproximação WKB em 3 dimensões. Mais especificamente, trabalharemos com coordenadas cilíndricas, já que os resultados deste trabalho foram obtidos a partir deste sistema de coordenadas.

Considere então a equação de Schrödinger independente do tempo em 3 dimensões de uma partícula se movendo na presença de um potencial central  $V(r)$ :

$$E\psi(r, \varphi, z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi(r, \varphi, z) + V(r)\psi(r, \varphi, z). \quad (3.35)$$

Podemos usar o fato de que o operador hamiltoniano do lado direito da Eq. (3.35) comuta com a componente  $z$  do operador momento linear  $\hat{p}_z = -i\hbar\partial_z$ , e com a componente  $z$  do operador momento angular  $\hat{L}_z = -i\hbar\partial_\varphi$ . Então, podemos escrever a solução da Eq. (3.35) em termos dos auto valores desses dois operadores. Então a solução fica:

$$\psi(r, \varphi, z) = e^{il\varphi} e^{ikz} R(r), \quad (3.36)$$

onde  $l = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  é o número quântico associado à componente  $z$  do momento angular, e  $-\infty < k < \infty$  é o auto valor da componente  $z$  do momento linear. Alternativamente, também podemos obter a solução (3.36) usando o método de separação de variáveis na Eq.(3.35). Substituindo a solução (3.36) na Eq. (3.35) obtemos

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) - \frac{l^2}{r^2} R(r) - k^2 R(r) - \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) R(r) = 0. \quad (3.37)$$

Veja que esta equação não está na forma da Eq. (3.3), que é a forma adequada para aplicar o método WKB. Para usar o método WKB devemos eliminar o termo proporcional à primeira derivada  $\frac{1}{r}R'(r)$  na equação acima. Para fazer isso, vamos dividir a função de onda radial na Eq. (3.36) por  $\sqrt{r}$ . Ao fazer isso, podemos reescrever a Eq. (3.35) numa forma semelhante a da Eq. (3.3), para que seja efetuada a aproximação WKB. Dessa forma, a solução (3.36) passa a ser:

$$\psi(r, \varphi, z) = e^{il\varphi} e^{ikz} \frac{u(r)}{\sqrt{r}}. \quad (3.38)$$

Como usaremos a aproximação WKB para resolver os sistemas propostos neste trabalho, a solução (3.38) será a forma escolhida para a função de onda  $\psi(r, \varphi, z)$  no decorrer do trabalho. Além disso, algumas formulas desenvolvidas na seção anterior para o caso unidimensional também poderão ser utilizadas nesta seção. Efetuando a substituição de  $\psi$  pela solução (3.38) na Eq. (3.35), obtemos:

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} - \frac{(l^2 - \frac{1}{4})}{r^2} u(r) - k^2 u(r) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) u(r) \quad (3.39)$$

, que pode ser reduzida para

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + Q^2(r) u(r) = 0, \quad (3.40)$$

onde definimos

$$Q^2(r) = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] - k^2 - \frac{(l^2 - \frac{1}{4})}{r^2}. \quad (3.41)$$

Veja que a função  $Q(r)$  é equivalente à Eq. (3.2), que representa o momento clássico da partícula. Além disso, devido à semelhança da Eq. (3.40) com a Eq. (3.3), podemos pensar que a solução WKB para 3 dimensões será a mesma dada pelas equações (3.27) e (3.28), apenas trocando o  $p(x)$  por  $\hbar Q(r)$ .

Para checar se basta apenas realizar essa substituição vamos examinar um caso específico e solúvel, comparando o resultado da aproximação WKB com o resultado exato do problema para checar se a fase assintótica da solução WKB estará correta. O problema em questão será o da partícula confinada a um poço potencial de profundidade  $V_0$  (BRACK, 2018):

$$\begin{aligned} V(r) &= V_0 \quad , \quad \text{se} \quad r_1 < r < r_2 \\ V(r) &= 0 \quad , \quad \text{caso contrário.} \end{aligned}$$

A equação de Schrödinger independente do tempo deste problema terá a mesma forma da Eq. (3.35) e, portanto, terá uma solução da forma da Eq. (3.36). A equação de onda radial em coordenadas cilíndricas é obtida após a substituição da solução (3.36) na equação de Schrödinger e, no caso da partícula interagindo com um poço potencial, será:

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (c^2 r^2 - l^2) R(r) = 0, \quad (3.42)$$

onde definimos a constante:

$$c^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0) - k^2. \quad (3.43)$$

Fazendo a substituição de variável  $\rho = cr$ , chegamos a equação

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\rho^2 - l^2)R(\rho) = 0. \quad (3.44)$$

Essa equação é conhecida como a equação de Bessel (ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2013). Ela possui duas soluções linearmente independentes que são conhecidas como funções de Bessel  $J_l(\rho)$  e funções de Neumann  $Y_l(\rho)$ . As funções  $J_l(\rho)$  e  $Y_l(\rho)$  também são conhecidas como funções de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente. A princípio, estas duas funções seriam soluções exatas para a equação de Schrödinger do problema em questão, porém a função de Neumann  $Y_l(\rho)$  diverge quando  $\rho \rightarrow 0$ . Portanto  $Y_l(\rho)$  não pode representar uma função de onda. Assim a solução exata para o problema da partícula num poço potencial é  $J_l(\rho) = J_l(cr)$ . Para grandes valores de  $r$ , de forma que  $cr \gg |l|$ , a função de Bessel fica:

$$J_l(cr) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi cr}} \cos\left(cr - l\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.45)$$

Vamos comparar este resultado com um daqueles obtidos pela aproximação WKB, a Eq. (3.30). Usaremos este resultado especificamente pois ele representa a função de onda dentro da região classicamente permitida. No entanto, para fazer a comparação com a Eq. (3.45), vamos substituir o termo  $l^2 - \frac{1}{4}$  na Eq. (3.41) por um parâmetro indeterminado:  $s^2$ . Então vamos admitir que a aproximação WKB em coordenadas cilíndricas resulta numa solução que tem a mesma forma da Eq. (3.30):

$$u_l(r) = \frac{2}{\sqrt{\bar{Q}_l(r)}} \left[ \cos\left(\int_{r_1}^r \bar{Q}_l(r') dr' - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (3.46)$$

Aqui apenas usei a relação trigonométrica  $\sin x = \cos(\pi - x)$ , para chegar a esta forma. Ainda na Eq. (3.46), o  $\bar{Q}$  é definido por:

$$\bar{Q}_l^2(r) = c^2 - \frac{s^2}{r^2}. \quad (3.47)$$

Então a integral na Eq. (3.34) fica

$$\int_{r_1}^r \frac{1}{r'} \sqrt{c^2 r'^2 - s^2} dr' = \sqrt{c^2 r^2 - s^2} - s \cos^{-1}\left(\frac{s}{cr}\right). \quad (3.48)$$

Na região onde  $cr \gg s$ , que deve ser a região considerada para obtermos a Eq. (3.45), o lado direito da equação acima vale  $(cr - s\frac{\pi}{2})$ . Assim, considerando  $cr \gg s$  e substituindo o resultado da Eq. (3.48) na Eq. (3.46), obtemos

$$\frac{u_l(r)}{\sqrt{r}} = R(r) = \frac{2}{\sqrt{cr}} \cos\left(cr - s\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (3.49)$$

e agora podemos comparar a equação acima com a Eq. (3.45). Assim podemos ver que para que as fases das duas equações (3.45) e (3.46) sejam iguais, devemos ter que  $s^2 = l^2$ . Portanto chegamos a conclusão de que o termo  $(l^2 - \frac{1}{4})$  deve ser trocado por  $l^2$  para que a aproximação WKB seja válida em coordenadas cilíndricas:

$$\left(l^2 - \frac{1}{4}\right) \rightarrow l^2. \quad (3.50)$$

### 3.3 A transformação de Langer

Langer, na Ref. (LANGER, 1937), obteve um resultado semelhante quando analisou, em coordenadas esféricas, o movimento de uma partícula sob uma força central. Em seu trabalho Langer percebeu que para trabalhar com a equação de Schrödinger em movimentos radiais, dada por  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + Q_0^2(r)\psi = 0$ , precisamos lidar com o comportamento assintótico do termo centrífugo da função  $Q_0(r)$  quando  $r = 0$ . Nesta subseção faremos uma análise análoga à análise de Langer, para coordenadas cilíndricas.

Como já vimos nesta seção, podemos obter soluções aproximadas para equações do tipo  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + Q_0^2(r)\psi = 0$  usando o método WKB. Além disso, também já vimos a forma da função  $Q_0(r)$  em coordenadas cilíndricas e ela é idêntica à Eq. (3.41):

$$Q_0^2(r) = \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E + V(r) \right] - k^2 - \frac{(l^2 - \frac{1}{4})}{r^2}. \quad (3.51)$$

Veja que o termo centrífugo  $\frac{(l^2 - \frac{1}{4})}{r^2}$  faz com que a função  $Q_0(r)$  seja irregular na origem. Como as funções de onda aproximadas obtidas pelo método WKB dependem da função  $Q_0(r)$ , elas não serão válidas na origem. Para lidar com isso, Langer utilizou as duas seguintes transformações:

$$r = r_0 \exp x \quad \text{e} \quad \psi_l(r) = e^{(\frac{x}{2})} u_l(x), \quad (3.52)$$

onde  $r_0$  é uma constante que tem dimensão de comprimento e que pode ser considerada unitária e  $x$  é uma nova variável adimensional. Realizando as transformações (3.52) na equação  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + Q_0^2(r)\psi = 0$ , ficaremos com

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q_1^2(x)u = 0, \quad (3.53)$$

onde a nova função  $Q_1(x)$  será dada por:

$$Q_1^2(x) = \frac{2m}{\hbar^2} e^{2x} \left[ E + V(x) - \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \right] - l^2. \quad (3.54)$$

Veja que agora a função  $Q_1(x)$  não possui um ponto irregular na origem, pois agora a irregularidade em  $r = 0$  só será alcançada quando  $x \rightarrow -\infty$ . Assim, a aproximação

WKB fornece a seguinte solução para a Eq. (3.53):

$$\psi_l^{WKB}(r) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{Q_1(x)}} \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x Q_1(x) dx\right) = \frac{1}{\sqrt{Q_2(r)}} e^{\left(\pm \frac{i}{\hbar} \phi_2(r)\right)}, \quad (3.55)$$

onde definimos

$$Q_2^2(r) = e^{-2x} Q_1^2(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [E + V(r)] - k^2 - \frac{l^2}{r^2} \quad (3.56)$$

e

$$\phi_2(r_0, r) = \int_{x_0}^x Q_1(x) dx = \int_{r_0}^r Q_2(r) dr \quad (3.57)$$

Portanto a transformação de variáveis feita por Langer na Eq. (3.52), equivale a fazer a transformação  $(l^2 - \frac{1}{4} \rightarrow l^2)$  na função  $Q_0(r)$ , para coordenadas cilíndricas. No entanto, como foi apontado por [Berry e Almeida \(1973\)](#), a transformação de Langer em duas dimensões falha quando consideramos o caso das ondas  $s$ , ou seja, quando  $l = 0$ . Naquele trabalho, Berry e Ozorio de Almeida conseguiram mostrar que, no caso das ondas  $s$ , a função de onda WKB é proporcional à função de Bessel:

$$\psi_{l=0}(r) \cong \left(\frac{\int_0^r \bar{Q}_l(r') dr'}{k(r)}\right) J_0\left(\int_0^r \bar{Q}_l(r') dr'\right), \quad (3.58)$$

onde  $k(r)$  é o número de onda, definido por  $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(r))$  e  $\bar{Q}_l$  é definido de forma análoga à Eq. (3.47), porém utilizando-se o número de onda  $k(r)$  no lugar da constante  $c$ . Além disso [Berry e Almeida \(1973\)](#) também mostram que a condição de quantização (3.34) em duas dimensões ainda vale para  $l = 0$ , se  $r_1 = 0$ , por meio das quatro fórmulas de conexão encontradas na subseção anterior (equações (3.27), (3.28), (3.29) e (3.30)).

## 4 O Sistema do Quadrupolo Magnético

Efeitos quânticos associados a partículas neutras com momento de quadrupolo magnético já foram investigados em outros trabalhos. Por exemplo: fases quânticas Aharanov-Anandan para a partícula neutra com quadrupolo magnético foram estudadas na Ref. (FONSECA; BAKKE, 2015), um efeito análogo à quantização de Landau foi estudado nas Refs. (FONSECA; BAKKE, 2015) e (FONSECA; BAKKE, 2017), o efeito Hall quântico foi estudado na Ref. (FONSECA; BAKKE, 2015a), efeitos devido à rotação de um átomo com quadrupolo magnético confinado em um anel quântico foram estudados na Ref. (FONSECA; BAKKE, 2016). Neste capítulo, faremos uma análise semiclássica da interação da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético com campos externos por meio da aproximação WKB.

Começaremos introduzindo a dinâmica quântica de uma partícula neutra, sem spin e que possui um momento de quadrupolo magnético interagindo com campos externos. A energia potencial de uma partícula com momento de quadrupolo magnético pode ser encontrada ao realizar uma expansão multipolar do potencial vetor magnético, assim como, na eletrodinâmica clássica, o momento de quadrupolo elétrico pode ser obtido a partir de uma expansão multipolar do potencial escalar elétrico.

$$U_m(r) = - \sum_{i,j} M_{ij} \partial_i B_j(r), \quad (4.1)$$

onde  $\vec{B}$  é o campo magnético e  $M_{ij}$  é o tensor de momento de quadrupolo magnético, que deve ser simétrico e sem traço (RADT; HURST, 1970).

Podemos ver, pela Eq. (4.1), que o quadrupolo magnético interage apenas com o campo magnético. No entanto, considerando que a partícula com momento de quadrupolo magnético se mova com velocidade  $v \ll c$  (onde  $c$  é a velocidade da luz), então a partícula irá interagir com um campo magnético  $\vec{B}'$  que é diferente daquele observado no laboratório  $\vec{B}$ . Então o campo  $\vec{B}'$  que será dado pela Equação de Joules-Bernoulli:

$$\vec{B}'(r) = \vec{B}(r) - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}(r), \quad (4.2)$$

onde  $\vec{B}$  e  $\vec{E}$  são os campos magnético e elétrico no referencial do laboratório, respectivamente.

Usando a Eq.(4.1), a Lagrangiana do sistema no referencial da partícula em movimento será  $L = \frac{1}{2}mv^2 + \sum_{i,j} M_{ij} \partial_i \vec{B}'_j$ . Assim, usando a Eq.(4.2), a Lagrangiana do sistema fica:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \vec{M} \cdot \vec{B}(r) + \frac{1}{c^2} \left( \vec{M} \times \vec{E}(r) \right), \quad (4.3)$$

Onde definimos as componentes do vetor  $\vec{M}$  como  $M_i = \sum_j M_{ij} \partial_j$ , com  $M_{ij}$  sendo o tensor de quadrupolo magnético. Essa definição do vetor  $M_i$  é análoga à definição do vetor  $Q_i = \sum_j Q_{ij} \partial_j$  feita por Chen na Ref. (CHEN, 1995), onde  $Q_{ij}$  é o tensor de quadrupolo elétrico.

Para descrever o sistema quanticamente, primeiro é necessário obter o Hamiltoniano do sistema. Para isso, deve-se utilizar as transformações de Legendre na Eq.(4.3). É possível obter o momento canônico conjugado à  $r$ , derivando a lagrangiana em termos da velocidade:  $\vec{p} = m\vec{v} + \frac{1}{c^2}(\vec{M} \times \vec{E})$ . As transformações de Legendre são dadas por:

$$H = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L, \quad (4.4)$$

Ou, nesse caso,  $H = \vec{p}\vec{v} - L$ . Assim, o operador Hamiltoniano do sistema será:

$$H = \frac{1}{2m} [\vec{p} - \frac{1}{c^2}(\vec{M} \times \vec{E})]^2 - \vec{M} \cdot \vec{B}. \quad (4.5)$$

Veja que a forma deste operador hamiltoniano é semelhante à forma do operador hamiltoniano da Eq.(2.20), que descreve a interação de uma partícula carregada com o campo eletromagnético. Devido a essa semelhança, podemos fazer uma analogia entre o termo  $\vec{M} \times \vec{E}$  e o potencial vetor  $\vec{A}$  e entre o termo  $\vec{M} \cdot \vec{B}$  e o potencial escalar. Por isso trataremos os termos  $\vec{M} \times \vec{E}$  e  $\vec{M} \cdot \vec{B}$  como potenciais efetivos.

Agora vamos quantizar o operador hamiltoniano substituindo o momento canônico  $\vec{p}$  pelo operador hermitiano  $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ . Assim, podemos obter a equação de Schrödinger independente do tempo para um quadrupolo magnético em movimento:

$$\varepsilon\psi = \frac{1}{2m} [\hat{p} - (\vec{M} \times \vec{E})]^2 \Psi - \vec{M} \cdot \vec{B} \Psi. \quad (4.6)$$

Usaremos a equação de Schrödinger nesta forma para verificar os 5 casos propostos neste trabalho. Em conjunto com a Eq. (4.6), vamos usar as propriedades do tensor de quadrupolo magnético e das densidades de cargas magnéticas para estudar algumas situações diferentes.

## 4.1 Interação com campos magnéticos não uniformes

Nesta seção vamos analisar a interação do momento de quadrupolo magnético com campos magnéticos não uniformes. Vamos definir o tensor do momento de quadrupolo magnético e supor a presença de densidades de cargas magnéticas que irão gerar estes campos magnéticos. O objetivo da análise será obter informações a respeito dos níveis de energia do quadrupolo, usando a aproximação WKB.

Nesta análise, vamos considerar a situação conhecida como "magneto-dinâmica", explicada no capítulo 2 como as equações de Maxwell duais na ausência de cargas ou

correntes elétricas. A partir de agora, também trabalharemos com o sistema de unidades natural, ou seja,  $\hbar = 1$  e  $c = 1$ .

#### 4.1.1 Campo magnético parabólico na direção radial

Vamos começar considerando um campo magnético produzido por uma densidade não uniforme de carga magnética  $\rho_m = br$  dentro de um cilindro longo e não condutor, onde  $b$  é uma constante. Dessa forma, podemos usar a Eq. (2.11) para obter o seguinte campo magnético

$$\vec{B} = \frac{1}{2}b_0r^2\hat{r}, \quad (4.7)$$

onde  $b_0$  é uma constante associada à densidade de carga magnética. Além disso, também vamos considerar que o tensor do quadrupolo magnético em coordenadas cilíndricas seja definido por:

$$M_{rr} = M_{\varphi\varphi} = -M; \quad M_{zz} = 2M, \quad (4.8)$$

onde  $M$  é uma constante positiva e as restantes componentes do tensor de quadrupolo magnético são nulas. Assim, essas escolhas para as componentes do tensor  $M_{ij}$  o mantém simétrico e com traço nulo, como é esperado.

Dessa forma, podemos ver que a interação do campo magnético, dado pela Eq.(4.7), com o momento de quadrupolo magnético, definido pela Eq. (4.8), resulta num potencial escalar efetivo na Eq. (4.6) dado por

$$V_{eff} = -\vec{M} \cdot \vec{B} = Mb_0r. \quad (4.9)$$

Assim, este potencial efetivo será equivalente a um potencial escalar linear na equação de Schrödinger do sistema. Portanto, a equação de Schrödinger independente do tempo em coordenadas cilíndricas para este sistema ficará

$$\varepsilon\psi = -\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\psi + Mb_0r\psi. \quad (4.10)$$

Agora, podemos ver que o operador hamiltoniano do lado direito da Eq. (4.10) comuta com a componente  $z$  do operador momento linear,  $\hat{p}_z = -i\hbar\partial_z$ , e com a componente  $z$  do operador momento angular  $\hat{L}_z = -i\hbar\partial_\varphi$ . Então, a solução da Eq. (4.10) terá a mesma forma da Eq. (3.38). Assim, substituindo a Eq. (3.38) na Eq. (4.10), obtemos a seguinte equação radial:

$$u'' - \frac{l^2 - \frac{1}{4}}{r^2}u - 2mb_0Mr u + [2m\varepsilon - k^2]u = 0. \quad (4.11)$$

Agora vamos considerar que o quadrupolo magnético tem o movimento restringido a um plano perpendicular ao eixo  $z$ . Isso quer dizer que o autovalor do momento linear na

direção  $z$  será zero, ou seja  $k = 0$ . Além disso, como estamos trabalhando em coordenadas cilíndricas, teremos de substituir o termo centrífugo ( $l^2 - \frac{1}{4}$ ) por  $l^2$  na Eq. (4.11), conforme foi visto na seção 3.2. Como é mostrado no capítulo 2 e nas referências (BRACK, 2018) e (BERRY; ALMEIDA, 1973), isso deve ser feito para que a aproximação WKB seja válida em coordenadas cilíndricas. Com essas alterações feitas, vamos definir:

$$q_1(r) = \sqrt{2m[\varepsilon - b_0Mr] - \frac{l^2}{r^2}}. \quad (4.12)$$

Veja que  $q_1(r)$  é análogo à expressão do momento clássico (3.2). Assim a equação radial para  $u(r)$ , a Eq. (4.11), toma a forma da Eq. (3.3), que é a forma adequada para a realização da aproximação WKB:

$$u'' + q^2(r)u = 0. \quad (4.13)$$

E ao aplicar o método WKB conforme explicado no capítulo 3 e nas referências (GRIFITHS, 2016) e (BRACK, 2018), obtemos uma solução da forma da Eq. (3.46):

$$u(r) \cong \frac{2}{\sqrt{q(r)}} \cos \left[ \int_{r_1}^r q(r') dr' - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (4.14)$$

Agora podemos usar a quantização de Bohr-Sommerfeld, definida pela Eq. (3.34) para obter os níveis de energia permitidos à partícula com quadrupolo magnético. No entanto, devido à forma de  $q(r)$  na Eq. (4.12), a integral da Eq. (3.34) não pode ser resolvida. Para que possamos prosseguir, iremos considerar apenas o caso de ondas  $s$  [(BRACK, 2018), (BERRY; ALMEIDA, 1973)], assim como foi feito por Bakke (2019). Ondas  $s$  são definidas por ter o número quântico do momento angular  $l = 0$ . As ondas  $s$  possuem este nome por analogia ao orbital  $S$ , que representa a região mais provável de encontrar o elétron no átomo quando o número quântico do momento angular  $l$  vale zero. As ondas  $s$  sempre são estados de energia não degenerados, o que as torna interessante do ponto de vista experimental, pois durante sua observação não haverá a necessidade de considerar de outros estados com a mesma energia.

Os pontos de retorno utilizados na quantização de Bohr-Sommerfeld são definidos pelos pontos em que  $q(r) = 0$ . No entanto, para a função  $q(r)$  definida na Eq. (4.12), existe apenas um ponto de retorno quando consideramos o caso das ondas  $s$ . Este ponto será o limite superior da integral da quantização de Bohr-Sommerfeld e ele vale:

$$r_2 = \frac{\varepsilon}{b_0M}. \quad (4.15)$$

Antes de realizar a quantização de Bohr-Sommerfeld, precisamos definir o limite inferior da integral da Eq. (3.34). Para isso, veja que o ponto  $r = 0$  representaria algo semelhante a um ponto de retorno para a função  $q(r)$  definida na Eq. (4.12), já que a

coordenada  $r$  não pode assumir valores negativos quando usamos o sistema de coordenadas cilíndricas. Além disso, para o caso de ondas  $s$ , a função  $q(r)$  é uma função bem comportada próxima da origem. Por isso, vamos utilizar o ponto  $r_1 = 0$  como o limite de integração inferior da integral da Quantização de Bohr-Sommerfeld.

Portanto, usaremos  $r_1 = 0$  e  $r_2 = \left(\frac{\varepsilon}{b_0 M}\right)$  como os dois limites de integração na Eq. (3.34). Assim, a integral daquela equação resulta em:

$$\int_{r_1}^{r_2} q(r) dr = \int_0^{\frac{\varepsilon}{b_0 M}} \sqrt{2m[\varepsilon - b_0 M r]} dr = \frac{(2m\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}{3mb_0 M}. \quad (4.16)$$

Com isso, usamos a quantização de Bohr-Sommerfeld na Eq. (3.34) para obter os seguintes níveis de energia associados às ondas  $s$ :

$$\varepsilon_{n,0} = \left[ \frac{9\pi^2 (b_0)^2 M^2}{8m} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (4.17)$$

A Eq. (4.17) corresponde aos níveis de energias permitidos ao quadrupolo magnético que interage com um campo magnético parabólico na direção radial, no caso das ondas  $s$  (caso  $l = 0$ ). Além disso, este resultado só pode ser obtido quando consideramos que o número quântico do momento angular vale zero (ondas  $s$ ). Veja que estes níveis de energia surgem a partir da interação do quadrupolo magnético definido pela Eq. (4.8) com o campo magnético (4.7), já que sua interação da origem ao termo do potencial escalar efetivo (4.9), que determina o espectro de energias do sistema.

#### 4.1.2 Campo magnético quártico na direção radial

Dessa vez, vamos considerar uma densidade de cargas magnéticas na direção radial dada por  $\rho_m = \bar{\mu} r^3$ , dentro de um cilindro longo e não condutor. Assim como antes,  $\bar{\mu}$  também é uma constante. Usando esta densidade uniforme de cargas magnéticas, podemos usar a Eq. (2.7) para obter:

$$\vec{B} = \frac{\mu r^4}{4} \hat{r}, \quad (4.18)$$

onde  $\mu$  também é uma constante associada à densidade de carga magnética. Além disso, o tensor do quadrupolo magnético será o mesmo definido na Eq. (4.8). Portanto, o potencial escalar efetivo na equação de Schrödinger (4.6) será:

$$V_{eff}(r) = -\vec{M} \cdot \vec{B} = \mu M r^3. \quad (4.19)$$

Como  $r < 0$  não está definido em coordenadas cilíndricas, o potencial da equação acima será equivalente a um potencial escalar confinante na equação de Schrödinger (4.6). Alguns trabalhos analisaram potenciais escalares proporcionais a  $r^3$  como um termo

anarmônico, procurando por correções no espectro de energias do oscilador harmônico em uma dimensão perturbado (LANDAU; LIFSHITZ, 2013). Então substituindo o potencial (4.19) na Eq. (4.6), obtemos:

$$\varepsilon\psi = -\frac{1}{2m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi + \mu M r^3 \psi. \quad (4.20)$$

Como o operador hamiltoniano da Eq. (4.20) comuta com os operadores  $\hat{p}_z$  e  $\hat{L}_z$ , podemos usar novamente a Eq. (3.38) como sua solução. Fazendo isso, chegamos a seguinte equação:

$$u'' - \frac{l^2 - \frac{1}{4}}{r^2} u - 2m\mu M r^3 u + [2m\varepsilon - k^2]u = 0 \quad (4.21)$$

Na equação acima, o termo  $-2m\mu M r^3 u$  representa a interação do quadrupolo magnético com o campo magnético (4.18). A partir da Eq. (4.21), podemos definir a função  $q(r)$  para este problema. Ela será:

$$q_2(r) = \sqrt{2m[\varepsilon - \mu M r^3] - \frac{l^2}{r^2}} \quad (4.22)$$

Aqui, tomamos  $k = 0$  para representar o movimento de uma partícula num plano e também fizemos  $(l^2 - \frac{1}{4}) \rightarrow l^2$  para podermos usar a aproximação WKB em coordenadas cilíndricas, como no caso anterior. Com esta definição de  $q_2(r)$ , podemos obter novamente uma equação radial na forma da Eq. (3.3) e aplicar a aproximação WKB. Então a função de onda deste sistema será dada por:

$$u(r) \cong \frac{2}{\sqrt{q_2(r)}} \cos \left[ \int_{r_1}^r q_2(r') dr' - \frac{\pi}{4} \right], \quad (4.23)$$

de forma análoga ao caso anterior.

Agora, para obter os níveis de energia do sistema, precisamos realizar a quantização de Bohr-Sommerfeld. No entanto, assim como no caso anterior, a integral da Eq. (3.34) também não pode ser resolvida para a função  $q_2(r)$  definida pela Eq. (4.22). Então para que seja possível obter os níveis de energia dos estados ligados deste sistema, vamos considerar novamente o caso das ondas  $s$  ( $l = 0$ ) (BRACK, 2018). Além disso, veja que a função  $q_2(r)$  possui apenas uma raiz real  $r_2$ , que representa o ponto de retorno clássico da função de onda:

$$r_2 = \left( \frac{\varepsilon}{\mu M} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.24)$$

Portanto, temos de definir o outro limite de integração na integral da quantização de Bohr-Sommerfeld. Então assim como no caso anterior usaremos  $r_1 = 0$  como o limite de integração inferior da Eq. (3.34), pelos mesmo motivos explicados naquela subseção.

Agora, utilizando os limites de integração  $r_1 = 0$  e  $r_2 = \left( \frac{\varepsilon}{\mu M} \right)^{\frac{1}{3}}$ , podemos realizar a integral da Eq. (3.34). Para isso, também faremos a substituição de variáveis  $x = \frac{\mu M}{\varepsilon} r^3$ . Dessa maneira, chegamos a:

$$\int_0^{r_2} q(r)dr = \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{3} \left( \frac{\varepsilon}{\mu M} \right)^{\frac{1}{3}} \int_0^1 x^{-\frac{2}{3}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx. \quad (4.25)$$

Para prosseguir, farei um breve introdução da função Beta ([ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2013](#)). A função Beta, também conhecida como integral de Euler de primeiro tipo, é uma função especial que foi estudada por Euler e por Legendre, e é definida por:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (4.26)$$

Com isso, podemos ver que a integral no lado direito da Eq. (4.25) equivale a  $B(\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$ . Então agora usaremos uma propriedade da função Beta que a relaciona com as funções Gamma:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (4.27)$$

É interessante deixar o resultado em termos das funções Gamma ([ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2013](#)) pois seus valores são bem conhecidos. Por exemplo, o valor de  $\Gamma(\frac{3}{2})$  que irá aparecer na Eq. (4.25) é conhecido e vale  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ . Assim, o resultado da integral será:

$$\int_0^{r_2} q(r)dr = \frac{\sqrt{2m\pi}}{6} \frac{1}{(\mu M)^{\frac{1}{3}}} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{11}{6})} \varepsilon^{\frac{5}{6}}. \quad (4.28)$$

E finalmente, utilizando a Eq. (4.28) em conjunto com a quantização de Bohr-Sommerfeld dada pela Eq. (3.34), podemos obter as energias permitidas para o sistema, no caso de ondas  $s$ :

$$\varepsilon_{n,0} = \left[ 6 \left( n - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2m}} (\mu M)^{\frac{1}{3}} \frac{\Gamma(\frac{11}{6})}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right]^{\frac{6}{5}}. \quad (4.29)$$

Esta equação corresponde ao espectro de energias permitidas para a partícula neutra com quadrupolo magnético que interage com um campo magnético quártico na direção radial. Assim como no caso anterior, estes níveis de energia são válidos apenas para o caso de ondas  $s$ . Valores de  $l \neq 0$  resultariam em pontos de retorno diferentes e também modificariam o resultado da integral (4.28). Por último, este resultado também depende da definição do tensor de quadrupolo magnético (4.8) e do campo magnético (4.18), já que a interação deles faz surgir o termo do potencial escalar efetivo (4.19) na equação de Schrödinger.

### 4.1.3 Campo magnético logarítmico na direção radial

Desta vez vamos considerar um cilindro longo e não condutor de raio interno  $r_0$ , além disso, também vamos considerar que dentro deste cilindro existe uma densidade não

uniforme de cargas dada por

$$\rho_m = d_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (4.30)$$

Pela Eq. (2.11), vemos que essa densidade de cargas magnéticas produz um campo magnético na direção radial, dado por:

$$\vec{B}_1 = B_0 r \left[ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{1}{4} \right] \hat{r} + \frac{B_0 r_0^2}{4r} \hat{r}, \quad (4.31)$$

onde  $B_0 = \mu_0 d_0$ . Além disso, iremos assumir que existe uma distribuição linear de cargas magnéticas no eixo  $z$ , ou seja, um fio infinito no eixo  $z$ . Esta densidade linear de cargas está contida no interior do cilindro e será dada por

$$\lambda_m = -\frac{d_0}{2} \pi r_0^2. \quad (4.32)$$

Dessa forma, este fio infinito de cargas magnéticas produzirá um campo magnético na direção  $\hat{r}$  dado por:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 \lambda_m}{2\pi r} \hat{r}, \quad (4.33)$$

Então ao somarmos os campos  $B_1$  e  $B_2$  o campo magnético resultante será:

$$\vec{B} = B_0 r \left[ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{1}{4} \right] \hat{r}. \quad (4.34)$$

A partir de agora vamos seguir como nos casos anteriores. Vamos considerar que o tensor de quadrupolo magnético continua sendo definido pela Eq. (4.8). Portanto, o potencial escalar efetivo na Eq. (4.6) será:

$$V_{eff}(r) = -\vec{M} \cdot \vec{B} = \frac{MB_0}{2} \left[ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (4.35)$$

Ou seja, a interação do quadrupolo magnético com o campo magnético faz surgir um termo que é equivalente a um potencial logarítmico atrativo. Este tipo de potencial também foi apresentado nas referências (GRIFFITHS, 2016), (BRACK, 2018), (BAKKE, 2019), entre outros trabalhos. Usando o potencial escalar efetivo dado pela Eq. (4.35), obtemos a equação de Schrödinger do sistema:

$$\varepsilon \psi = -\frac{1}{2m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi + \frac{MB_0}{2} \left[ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{1}{2} \right] \psi. \quad (4.36)$$

A solução da equação acima também será escrita na forma da Eq. (3.38), pois  $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$  e  $[\hat{H}, \hat{p}_z] = 0$ . A substituição desta solução na Eq. (4.36) irá resultar na seguinte equação:

$$u'' - \frac{l^2 - \frac{1}{4}}{r^2} u - 2m \frac{MB_0}{2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) u + [2m\varepsilon + \frac{MB_0}{4} - k^2] u = 0. \quad (4.37)$$

Assim como nos casos anteriores, faremos a substituição  $(l^2 - \frac{1}{4}) \rightarrow l^2$  no termo centrífugo para aplicar a aproximação WKB e tomamos  $k = 0$ . Temos então uma partícula que se move em um plano. Agora podemos definir a seguinte função:

$$q_3(r) = \sqrt{2m \left[ \bar{E} - \frac{MB_0}{2} \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) \right] - \frac{l^2}{r^2}}, \quad (4.38)$$

onde definimos  $\bar{E} = \varepsilon + \frac{MB_0}{4}$ . Com esta definição de  $q_3(r)$ , podemos obter novamente uma equação radial na forma da Eq. (3.3) e aplicar a aproximação WKB. Então a função de onda deste sistema será dada pela Eq. (3.46), assim como nos casos anteriores.

Também vamos considerar caso das ondas  $s$  ( $l = 0$ ) para que seja resolvida a integral da quantização de Bohr-Sommerfeld. Para ondas  $s$ , a Eq. (4.38) também possui apenas um zero assim como nos dois casos anteriores. Portanto, como já foi explicado antes, podemos tomar  $r_1 = 0$  como um dos limites de integração da quantização de Bohr-Sommerfeld.

Para o caso da Eq. (4.38), o ponto de retorno clássico para a partícula com quadrupolo magnético interagindo com o campo magnético (4.34) será:

$$r_2 = r_0 e^{\frac{2\bar{E}}{MB_0}}. \quad (4.39)$$

Portanto, para resolver a integral da Eq. (3.34), vamos executar a seguinte mudança de variáveis:

$$r = r_0 e^{-x}. \quad (4.40)$$

Dessa forma, teremos:

$$\int_0^{r_2} q(r) dr = r_2 \sqrt{mMB_0} \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx = r_2 \sqrt{mMB_0} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (4.41)$$

Por fim, usando a Eq.(4.41) em conjunto com a quantização de Bohr-Sommerfeld, obtemos os níveis de energia permitidos ao sistema:

$$\varepsilon_{n,0} = \frac{MB_0}{2} \ln \left[ \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{\pi}{mMB_0}} \left( n - \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{MB_0}{4}. \quad (4.42)$$

Portanto a equação acima representa os níveis de energia permitidos à partícula neutra com quadrupolo magnético que interage com um campo magnético logarítmico na direção radial, para o caso das ondas  $s$ . Este espectro de energias pôde ser obtido graças a presença do potencial efetivo na equação de Schrödinger (4.6), que surge a partir da interação do momento de quadrupolo magnético definido pela Eq. (4.8) com o campo magnético (4.34), como podemos ver na Eq. (4.35). Como consideramos o caso de ondas  $s$ , as soluções de estado ligado na Eq. (4.42) só são válidas quando  $l = 0$ , já que qualquer outro valor do número quântico do momento angular iria alterar o resultado da integral (4.41) bem como os seus limites de integração. Nas 3 situações propostas nesta seção,

consideramos o caso das ondas  $s$  com  $l = 0$ . Esta escolha foi feita para evitar integrais complicadas que iriam surgir na fórmula para a quantização de Bohr-Sommerfeld, na Eq. (3.34). Isso porque a integral da Eq. (3.34), para os casos em que  $l \neq 0$ , não pode ser resolvida e, portanto, não é possível encontrar soluções para os 3 sistemas propostos através do método WKB quando  $l \neq 0$ .

## 4.2 Interação com campos elétricos não uniformes

Nesta seção, vamos analisar a interação de uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético com campos elétricos não uniformes. O momento de quadrupolo magnético da partícula será o mesmo considerado nos três casos anteriores e os campos elétricos serão gerados por densidades de correntes magnéticas. Nosso objetivo será encontrar os níveis de energia dos estados ligados dos sistemas considerados. Para isso, aplicaremos a aproximação WKB na equação de Schrödinger do sistema. Nesta seção vamos continuar trabalhando na situação conhecida como magneto-dinâmica e com o sistema de unidades naturais ( $\hbar = 1$  e  $c = 1$ ).

### 4.2.1 Campo elétrico linear axial

Na seção anterior nós vimos três exemplos em que as energias permitidas para estados ligados só podem ser obtidas pelo método WKB se for considerado o caso de ondas  $s$  ( $l = 0$ ). Agora veremos um caso onde não existe solução de estados ligados se considerarmos o caso das ondas  $s$ , ou seja, o número quântico do momento angular deverá ser  $l \neq 0$ . O sistema proposto é o do quadrupolo magnético interagindo com um campo elétrico linear axial, sob o contexto da magneto-dinâmica. É possível resolver este problema de forma exata, mas vamos usar o método WKB para obter nossos resultados. No final desta subseção vamos comparar o resultado obtido neste trabalho com o resultado encontrado por na Ref. (FONSECA; BAKKE, 2015b), que estudaram a interação do quadrupolo magnético com um campo elétrico linear axial sob o contexto da eletrodinâmica usual, utilizando o método analítico.

Vamos começar considerando uma densidade de corrente magnética dentro de um longo cilindro dada por

$$\vec{J} = -\lambda_m \hat{\varphi}, \quad (4.43)$$

onde  $\lambda_m$  é uma constante. Podemos usar a Eq. (2.12) para obter um campo elétrico axial, dado por:

$$\vec{E} = -\lambda r \hat{z}, \quad (4.44)$$

onde  $\lambda = \lambda_m \mu_0$ . Além disso, vamos continuar trabalhando com o tensor de quadrupolo magnético definido pela Eq. (4.8). Dessa forma, a interação do quadrupolo magnético com o campo elétrico irá gerar na Eq. (4.6) um potencial vetor efetivo dado por:

$$\vec{A}_{eff} = \vec{M} \times \vec{E} = M\lambda\hat{\varphi}. \quad (4.45)$$

Substituindo este potencial efetivo na Eq. (4.6), a equação de Schrödinger independente do tempo para o nosso problema ficará:

$$\varepsilon\psi = -\frac{1}{2m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi - i \frac{M\lambda}{mr} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{M^2\lambda^2}{2m} \psi. \quad (4.46)$$

Assim como nos outros 3 casos da seção anterior, o operador hamiltoniano da Eq. (4.46) comuta com os operadores  $\hat{p}_z$  e  $\hat{L}_z$ , logo sua solução também pode ser escrita em termos dos auto-valores destes operadores. Assim a solução da Eq. (4.46) também terá a forma daquela da Eq. (3.38), e a substituição de  $\psi$  por esta solução resulta na seguinte equação radial:

$$u'' - \frac{(l^2 - \frac{1}{4})}{r^2} u - \frac{\delta}{r} u + 2m\xi u = 0, \quad (4.47)$$

onde definimos os seguintes parâmetros:

$$\delta = 2M\lambda l \quad (4.48)$$

e

$$\xi = \varepsilon - \frac{M^2\lambda^2}{2m} - k^2. \quad (4.49)$$

Veja que o termo determinado pelo parâmetro  $\delta$  na Eq. (4.47) é análogo ao potencial de Coulomb. Veja também que pela definição de  $\delta$  na Eq. (4.48), só existe potencial tipo-Coulomb na Eq. (4.47) se  $l \neq 0$ . Isso significa que para o caso de ondas  $s$  não é possível obter soluções para estados ligados deste sistema (que é o nosso objetivo). Assim, para o caso das ondas  $s$ , o quadrupolo se comporta de maneira semelhante a uma partícula livre.

A equação radial (4.47) admite tanto soluções de estados ligados quanto soluções de espalhamento para o potencial tipo-Coulomb. Como o objetivo desta análise é obter as energias dos estados ligados do sistema, devemos fazer com que o termo do potencial tipo-Coulomb seja negativo. Podemos fazer isso se impormos que o número quântico do momento angular seja sempre negativo. Temos então que:

$$l \rightarrow -|l| \quad \Rightarrow \quad \delta \rightarrow -|\delta|. \quad (4.50)$$

Assim, substituindo a relação acima na Eq. (4.47), obtemos uma segunda equação radial:

$$u'' - \frac{(l^2 - \frac{1}{4})}{r^2} u + \frac{|\delta|}{r} u + 2m\xi u = 0. \quad (4.51)$$

Agora, tomando  $k = 0$  para considerar que a partícula se move no plano, e lembrando da condição  $(l^2 - \frac{1}{4}) \rightarrow l^2$  que valida a aproximação WKB em coordenadas cilíndricas, podemos definir:

$$q_4(r) = \sqrt{2m\xi + \frac{|\delta|}{r} - \frac{l^2}{r^2}}. \quad (4.52)$$

Com da definição de  $q_4(r)$  acima e a forma da equação radial (4.51) podemos obter novamente uma equação radial na forma adequada para aplicar a aproximação WKB  $u''(r) + q_4^2(r)u(r) = 0$ . Assim a função de onda deste sistema será dada pela Eq. (3.46), assim como nos casos da seção anterior.

Dessa vez a integral da quantização de Bohr-sommerfeld é solúvel para a Eq. (4.52), então não precisamos considerar o caso das ondas  $s$ . Além disso a Eq. (4.52) possui duas raízes, ou seja, existem dois pontos de retorno clássico que podemos utilizar como limites de integral da Eq. (3.34). Essas raízes são:

$$r_1 = \frac{|\delta|}{(-4m\xi)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{|\delta|}{2m\xi}\right)^2 - \frac{4l^2}{2m\xi}} \quad (4.53)$$

e

$$r_2 = \frac{|\delta|}{(-4m\xi)} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{|\delta|}{2m\xi}\right)^2 - \frac{4l^2}{2m\xi}}. \quad (4.54)$$

Então a integral da Eq. (3.34) fica:

$$\int_{r_1}^{r_2} q_4(r)dr = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar. \quad (4.55)$$

Para resolver a integral acima, usaremos a seguinte integral conhecida:

$$\int_a^b \frac{1}{x}\sqrt{(x-a)(b-x)}dx = \frac{\pi}{2}(\sqrt{b} - \sqrt{a}). \quad (4.56)$$

Veja que, como  $r_1$  e  $r_2$  são as raízes da função  $q(r)$ , podemos reorganizar a integral da Eq. (4.55) para deixá-la numa forma semelhante à Eq. (4.56):

$$\int_{r_1}^{r_2} q(r)dr = \sqrt{-2m\xi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r}\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}dr. \quad (4.57)$$

Dessa maneira, temos

$$\int_{r_1}^{r_2} q(r)dr = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{|\delta|}{\sqrt{-2m\xi}} - 2|l| \right]. \quad (4.58)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (4.58) na Eq. (3.34) e usando a definição de  $\xi$  na Eq. (4.49), obtemos os níveis de energia do sistema:

$$\varepsilon = -\frac{(M\mu_0\lambda_m|l|)^2}{2m(n + |l| - \frac{1}{2})^2} + \frac{(M\mu_0\lambda_m)^2}{2m}, \quad (4.59)$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots$  é o número quântico associado aos modos radiais, e  $l = \pm 1, \pm 2, \dots$  são os valores permitidos ao número quântico do momento angular.

Assim, a Eq. (4.59) representa os níveis de energia permitidos a um momento de quadrupolo magnético sob a influência de um potencial tipo-Coulomb. Este potencial tipo-Coulomb aparece ao utilizarmos o potencial vetor efetivo (4.45) na equação de Schrödinger (4.6). Portanto, este resultado depende da definição do tensor momento de quadrupolo magnético (4.8) e do campo elétrico (4.44), já que o potencial vetor efetivo (4.45) surge da interação deles. Além disso o termo do potencial tipo-Coulomb só aparece se  $l \neq 0$ , como já foi mencionado anteriormente. Portanto os níveis de energia dos estados ligados deste sistema no caso de ondas  $s$  estão sendo desconsiderados.

Este resultado (a Eq. (4.59)), que foi obtido por meio da aproximação WKB, está de acordo com o resultado encontrado por [Fonseca e Bakke \(2015b\)](#) onde foi utilizado o método analítico em um problema semelhante. Naquele trabalho, o campo se origina a partir de uma densidade volumétrica uniforme de cargas elétricas enquanto neste, o campo é devido uma densidade de corrente magnética dada pela Eq. (4.43). Apesar da origem do campo utilizado por [Fonseca e Bakke \(2015b\)](#) ser diferente da origem do campo deste problema, podemos ver que a resolução deste problema pelo método analítico resultaria no mesmo espectro de energias dado pela Eq. (4.59).

## 4.2.2 Campo elétrico parabólico axial

Por último, vamos analisar um caso onde soluções de estados ligados podem ser obtidas para quaisquer valores do número quântico do momento angular  $l$ . Assim como o problema anterior, este problema pode ser resolvido exatamente, mas vamos usar a aproximação WKB para resolvê-lo. Por fim, assim como na subseção anterior, vamos comparar o resultado obtido nesta subseção com os resultados obtidos por [Fonseca e Bakke \(2015\)](#) e por [Fonseca e Bakke \(2017\)](#), onde foram resolvidos problemas semelhantes pelo método analítico.

Vamos começar considerando uma densidade de corrente magnética dentro de um cilindro longo, dada por

$$\vec{J}_m = -\alpha_m r \hat{\phi}, \quad (4.60)$$

onde  $\alpha_m$  é uma constante positiva. Então essa densidade de corrente magnética irá gerar um campo elétrico axial, que pode ser obtido a partir da Eq. (2.9). Este campo será:

$$\vec{E} = -\frac{1}{2}\alpha r^2 \hat{z}, \quad (4.61)$$

onde  $\alpha = \alpha_m \mu_0$ . Também vamos considerar que as componentes do tensor do quadrupolo magnético ainda serão dadas pela Eq. (4.8). Assim como no caso anterior, a interação do momento de quadrupolo magnético com o campo elétrico considerados neste problema, irá gerar um potencial vetor efetivo  $\vec{A}_{eff}$  dado por:

$$\vec{A}_{eff} = \vec{M} \times \vec{E} = -\alpha M r \hat{\varphi}. \quad (4.62)$$

Devido a esse potencial vetor efetivo, podemos interpretar que a partícula neutra com quadrupolo magnético se move na presença de um campo magnético uniforme efetivo, dado por:

$$\vec{B}_{eff} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{eff} = -M\alpha \hat{z}. \quad (4.63)$$

Vamos considerar que a partícula não se move na direção  $\hat{z}$ . Neste caso, a partícula se moverá num plano perpendicular à direção do campo magnético efetivo  $\vec{B}_{eff}$ . Esta situação é muito semelhante à quantização de Landau (LANDAU, 1930) que será explicada no apêndice A. Resumindo, a quantização de Landau é obtida ao resolver a equação de Schrödinger de uma partícula eletricamente carregada que se move em um plano perpendicular a um campo magnético. A diferença é que aqui a partícula estudada não possui carga elétrica, mas sim um momento de quadrupolo magnético. Apesar disso, como foi explicado no início deste capítulo, o operador hamiltoniano da partícula com quadrupolo magnético é muito semelhante ao operador hamiltoniano da partícula carregada. Portanto, assim como foi feito por Fonseca e Bakke (2015) e por Fonseca e Bakke (2017), podemos assumir que a presença deste campo magnético efetivo irá nos levar a um efeito análogo à quantização de Landau e aos níveis de Landau, que são explicados no anexo deste trabalho.

Substituindo o potencial vetor efetivo da Eq. (4.62) na equação de Schrödinger (4.6), obtemos:

$$\varepsilon\psi = -\frac{1}{2m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi - i \frac{M\alpha}{m} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{M^2 \alpha^2}{2m} r^2 \psi. \quad (4.64)$$

Veja que o operador operador hamiltoniano no lado direito da equação acima comuta com os operadores  $\hat{p}_z$  e  $\hat{L}_z$ . Portanto usaremos novamente a Eq. (3.38) como a forma da solução  $\psi(r, \varphi, z)$ , na Eq.(4.64). Após a substituição, obtemos:

$$u'' - \frac{(l^2 - \frac{1}{4})}{r^2} u - m^2 \omega^2 r^2 u + \beta u = 0, \quad (4.65)$$

onde definimos os parâmetros.

$$\omega = \frac{M\alpha}{m} \quad (4.66)$$

e

$$\beta = 2m\varepsilon - 2M\alpha l - k^2. \quad (4.67)$$

Assim, podemos definir novamente a função  $q(r)$ :

$$q_5(r) = \sqrt{\beta - m^2 \omega^2 r^2 - \frac{l^2}{r^2}}. \quad (4.68)$$

Aqui, fizemos novamente a substituição  $(l^2 - \frac{1}{4}) \rightarrow l^2$  para validar a aproximação WKB em coordenadas cilíndricas. Além disso, como estamos considerando que a partícula se move num plano perpendicular ao eixo  $z$  (direção do campo (4.63)), teremos que  $k = 0$ .

Com da definição de  $q_5(r)$  na Eq. (4.68) e a equação radial (4.65) podemos obter novamente uma equação radial na forma adequada para aplicar a aproximação WKB:  $u''(r) + q_5^2(r)u(r) = 0$ . Assim a função de onda deste sistema será dada pela Eq. (3.46), assim como em todos os casos anteriores. No entanto, diferentemente dos casos anteriores, a quantização de Bohr-Sommerfeld pode ser realizada para qualquer valor do número quântico  $l$ . Isso porque a integral da Eq. (3.34) pode ser resolvida para a função  $q_5(r)$  com  $l \neq 0$  (da mesma maneira do problema anterior), e também porque se  $l = 0$  ainda existirá o termo de interação presente na definição de  $\omega$  (no caso anterior  $l = 0$  resulta no desaparecimento deste termo, que nos deixou com uma partícula livre).

Com essas considerações, a integral da Eq. (3.34) fica:

$$\int_{r_1}^{r_2} q_5(r) dr = m\omega \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \sqrt{-r^4 + \frac{\beta}{m^2\omega^2} r^2 - \frac{l^2}{m^2\omega^2}} dr, \quad (4.69)$$

e fazendo a substituição de variáveis  $x = r^2$ , conseguimos deixar a integral acima na mesma forma da Eq. (4.56):

$$\int_{r_1}^{r_2} q_5(r) dr = m\omega \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} \sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)} dx = \frac{m\omega\pi}{2} (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})^2, \quad (4.70)$$

onde os pontos de retorno são dados por:

$$x_1 = \frac{\beta}{2m^2\omega^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\beta}{m^2\omega^2}\right)^2 - \frac{4l^2}{m^2\omega^2}} \quad (4.71)$$

e

$$x_2 = \frac{\beta}{2m^2\omega^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\beta}{m^2\omega^2}\right)^2 - \frac{4l^2}{m^2\omega^2}}. \quad (4.72)$$

Assim, a Eq. (3.34) fica:

$$\int_{r_1}^{r_2} q_5(r) dr = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi = \pi \left[ \frac{\beta}{4m\omega} - \frac{|l|}{2} \right], \quad (4.73)$$

e finalmente, pelas definições de  $\omega$  e  $\beta$  nas equações (4.66) e (4.67), obtemos os seguintes níveis de energia:

$$\varepsilon_{n,l} = \frac{2M\alpha}{m} \left[ n + \frac{l}{2} + \frac{|l|}{2} - \frac{1}{2} \right], \quad (4.74)$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots$  é o número quântico associado aos modos radiais, e  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  são os valores permitidos ao número quântico do momento angular.

A Eq. (4.74) representa os níveis de energia permitidos a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético que se move em um plano perpendicular ao campo

magnético efetivo dado pela Eq. (4.63). Este campo magnético só aparece devido ao termo do potencial vetor efetivo na equação de Schrödinger do sistema, que por sua vez, aparece devido à interação da partícula com o campo elétrico (4.61). Portanto a Eq. (4.74) só pode ser obtida se usarmos um tensor de quadrupolo magnético definido pela Eq. (4.8) e considerarmos a presença de uma corrente magnética dada pela Eq. (4.60). Assim como nos casos anteriores, conseguimos obter as energias permitidas para os estados ligados do sistema por meio da aproximação WKB. No entanto, diferente dos casos anteriores, desta vez conseguimos obter o espectro de energias para qualquer valor do número quântico do momento angular  $l$ .

Devido a presença do campo magnético efetivo (4.63), chegamos a um espectro de energias discreto e infinitamente degenerado dado pela Eq. (4.59) que possui uma frequência angular dada por  $\omega_\varepsilon = \frac{2M\alpha}{m}$ . Essa frequência angular pode ser vista como uma frequência análoga à frequência de ciclotron encontrada por Landau (LANDAU, 1930) pois, como já foi mencionado anteriormente, o sistema discutido é extremamente semelhante ao sistema estudado por Landau. Portanto podemos comparar o resultado obtido na Eq. (4.74) com aqueles encontrados por Fonseca e Bakke (2015) e por Fonseca e Bakke (2017). Em ambos os trabalhos, um efeito análogo à quantização de Landau (LANDAU, 1930) foi obtido, embora a origem dos campos utilizados neles foram diferentes. Fonseca e Bakke (2015) consideraram que o campo elétrico radial era produzido por uma densidade não uniformes de cargas elétricas, enquanto que Fonseca e Bakke (2017) consideraram que o campo elétrico foi induzido por um campo magnético dependente do tempo. Aqui, o campo elétrico que é responsável pelo aparecimento do campo magnético efetivo (4.63) é axial, e surge da densidade de corrente magnética definida na Eq. (4.60). Além disso os níveis de energia da quantização de Landau encontrados nestes dois artigos, que foram obtidos pelo método analítico, correspondem aos níveis encontrados pelo método WKB neste trabalho. Portanto, a Eq. (4.59) corresponde aos níveis de Landau para uma partícula neutra com quadrupolo magnético se movendo na presença de um campo magnético.

## 5 Conclusão

Neste trabalho, usamos a dualidade das equações de Maxwell e a aproximação WKB para analisar a interação de uma partícula neutra que possui momento de quadrupolo magnético com campos magnéticos não uniformes, gerados por densidades não uniformes de cargas magnéticas. Supomos três densidades de cargas diferentes e usamos o mesmo momento de quadrupolo magnético para que pudéssemos estudar três casos diferentes. Assim, analisamos a interação de um mesmo momento de quadrupolo magnético com um campo magnético parabólico, com um campo magnético quártico e com um campo magnético logarítmico, todos na direção radial. Nos três casos, utilizamos a aproximação WKB para obter a função de onda da partícula, e depois utilizamos a quantização de Bohr-Sommerfeld para obter os níveis de energia dos estados ligados da partícula. No entanto, essas soluções para as energias de estados ligados só podem ser obtidas para o caso das ondas  $s$ , ou seja, as energias obtidas são válidas apenas quando o número quântico do momento angular  $l = 0$ . Nos três casos o espectro de energias obtido era discretizado.

Depois disso analisamos, por meio da aproximação WKB, o comportamento da mesma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético interagindo com campos elétricos não uniformes, gerados por densidades de correntes magnéticas. Usamos duas densidades de corrente magnética diferentes, resultando em dois casos diferentes. No primeiro caso, a densidade de corrente magnética considerada faz surgir um campo elétrico linear na direção do eixo  $z$ . Vimos que a interação da partícula com este campo gera um termo análogo ao potencial de Coulomb na equação de Schrodinger da partícula. Vimos também que este termo só aparece quando  $l \neq 0$  e que as energias de estados ligados encontradas só são válidas para  $l < 0$ . Os níveis de energia encontrados neste trabalho, para este problema, são exatamente iguais aos encontrados por [Fonseca e Bakke \(2015b\)](#) que resolveram o problema pelo método analítico, apesar da origem do campo elétrico no trabalho deles ser diferente.

No segundo caso, a densidade de corrente magnética considerada deu origem a um campo elétrico parabólico na direção do eixo  $z$ . Vimos que a interação do momento de quadrupolo magnético com este campo elétrico axial resulta no aparecimento de um potencial vetor efetivo na equação de Schrödinger da partícula. Devido a presença deste potencial vetor efetivo, vimos também que a partícula age com se interagisse com um campo magnético efetivo na direção do eixo  $z$ . Assim, fizemos um paralelo do sistema apresentado neste trabalho com a quantização de Landau. Depois disso, consideramos que a partícula se move num plano perpendicular a este campo magnético efetivo e utilizamos a aproximação WKB em coordenadas cilíndricas para analisar o problema. Vimos que os níveis de energia obtidos correspondem aos níveis de Landau para a partícula neutra com

quadrupolo magnético. Desta vez também conseguimos obter níveis de energia de estados ligados para qualquer valor do número quântico  $l$ . Também comparamos os resultados obtidos neste problema aqueles obtidos por [Fonseca e Bakke \(2015\)](#) e por [Fonseca e Bakke \(2017\)](#). Vimos que os resultados obtidos analiticamente nesses dois trabalhos estão de acordo com os resultados obtidos neste trabalho por meio da aproximação WKB, apesar da origem dos campos em cada trabalho ser diferente.

## A Apêndice - Quantização de Landau

Em 1930 L. D. Landau (LANDAU, 1930) usou a mecânica quântica para resolver o problema de partículas carregadas interagindo com um campo magnético uniforme na direção do eixo  $z$ . Em seu trabalho, Landau mostrou que tal interação resulta na quantização das órbitas de ciclotron das partículas carregadas e, portanto, a quantização destas orbitas ficou conhecida como quantização de Landau. Neste apêndice será mostrado como foi obtida a quantização de Landau. O desenvolvimento a seguir é baseado no livro "Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory" (LANDAU; LIFSHITZ, 2013).

Nosso objetivo é obter os níveis de energia do sistema trabalhado por Landau na Ref. (LANDAU, 1930). Portanto, vamos começar pelo Hamiltoniano de uma partícula carregada eletricamente interagindo com um campo eletromagnético. Este Hamiltoniano é obtido da mesma forma que obtemos o Hamiltoniano (2.20) e ambos terão a mesma forma:

$$H = \frac{1}{2m}(\hat{p} - q\vec{A})^2 + q\phi. \quad (\text{A.1})$$

No livro Landau e Lifshitz (2013), também é considerado que a partícula possua Spin. Se considerarmos isso, teremos de adicionar um termo devido ao Spin no hamiltoniano acima. No entanto, mesmo com este termo devido ao spin, o Hamiltoniano ainda comuta com a componente  $z$  do operador de spin  $s_z$  e, portanto, podemos simplesmente separar a parte da função de onda que depende do spin e resolver apenas o caso presente (sem spin). No final, os níveis de energia também teriam um termo a mais devido ao spin.

Para obter o campo magnético uniforme na direção  $\hat{z}$ , Landau utilizou um simples potencial vetor dado por:

$$\vec{A} = -By\hat{x}. \quad (\text{A.2})$$

Assim o campo magnético será na direção  $\hat{z}$  como queríamos. Assim, a equação de Schrödinger dependente do tempo deste sistema fica:

$$\frac{1}{2m} \left[ (\hat{p}_x - q\vec{A})^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 \right] \psi = E\psi. \quad (\text{A.3})$$

Veja que o Hamiltoniano acima comuta com os operadores  $\hat{p}_x = -i\hbar\partial_x$  e  $\hat{p}_z = -i\hbar\partial_z$ . Então podemos separar as dependências de  $x$  e  $z$  na solução (assim como seria com o spin) e escrever  $\psi = e^{ip_x x} e^{ip_z z} \xi(y)$ , onde  $p_x$  e  $p_z$  são os autovalores de  $\hat{p}_x$  e  $\hat{p}_z$  e podem variar de  $-\infty$  até  $+\infty$ . Além disso, como não existe componente  $z$  do potencial, a componente  $z$  do momento generalizado será igual a componente  $z$  do momento clássico  $mv_z$  e, portanto, não será quantizado (ou seja, o movimento na direção do campo não é quantizado).

Agora, substituindo a solução discutida acima na equação de Schrödinger do sistema, obtemos:

$$\xi'' + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ \left( E - \frac{p_z^2}{2m} \right) - \frac{1}{2} m \left( \frac{|q|B}{mc} \right)^2 \left( y + \frac{cp_x}{qB} \right)^2 \right] \xi = 0. \quad (\text{A.4})$$

Veja que a equação acima é exatamente igual a equação de um oscilador harmônico de frequência  $\omega = \frac{|q|B}{mc}$ , mas com o mínimo do potencial deslocado de um valor  $y_0 = \frac{cp_x}{qB}$ . No entanto, a energia do oscilador não é alterada pelo deslocamento do potencial. Portanto o termo  $(E - \frac{p_z^2}{2m})$  na equação acima, deve ser igual a energia do oscilador harmônico ( $E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ ). Assim obtemos o seguinte espectro de energias:

$$E = (n + \frac{1}{2})\frac{|q|B}{mc}\hbar + \frac{p_z^2}{2m}. \quad (\text{A.5})$$

O primeiro termo no lado direito da equação acima corresponde às energias permitidas a partícula que se move num plano perpendicular a um campo magnético  $B\hat{z}$ , e são conhecidas como níveis de Landau. Como resultado, as partículas carregadas só podem ocupar órbitas com valores discretos de energia que correspondem à  $(n + \frac{1}{2})\frac{|q|B}{mc}\hbar$ . Isso vale apenas para o movimento radial pois, como já foi explicado, o movimento na direção  $\hat{z}$  não é quantizado.

## Referências

- AHARONOV, Y.; ANANDAN, J. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Physical Review Letters*, APS, v. 58, n. 16, p. 1593, 1987. Citado na página 13.
- AHARONOV, Y.; CASHER, A. Topological quantum effects for neutral particles. *Physical Review Letters*, APS, v. 53, n. 4, p. 319, 1984. Citado na página 13.
- ARFKEN, G.; WEBER, H.; HARRIS, F. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Elsevier Science, 2013. ISBN 9780123846549. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=qLFo\\\_Z-PoGIC](https://books.google.com.br/books?id=qLFo\_Z-PoGIC)>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 42.
- BAKKE, K. A semiclassical treatment of the interaction of non-uniform electric fields with the electric quadrupole moment of a neutral particle. *The European Physical Journal Plus*, v. 134, n. 2, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 24, 39 e 43.
- BERRY, M.; ALMEIDA, A. O. de. Semiclassical approximation of the radial equation with two-dimensional potentials. *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General*, IOP Publishing, v. 6, n. 10, p. 1451, 1973. Citado 3 vezes nas páginas 14, 35 e 39.
- BRACK, M. *Semiclassical Physics*. CRC Press, 2018. ISBN 9780429971372. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=KGhQDwAAQBAJ>>. Citado 6 vezes nas páginas 14, 24, 32, 39, 41 e 43.
- CASTELNOVO, C.; MOESSNER, R.; SONDHI, S. L. Magnetic monopoles in spin ice. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 451, n. 7174, p. 42–45, 2008. Citado na página 18.
- CHEN, C.-C. Topological quantum phase and multipole moment of neutral particles. *Physical Review A*, APS, v. 51, n. 3, p. 2611, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 37.
- DIRAC, P. A. M. Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 133, n. 821, p. 60–72, 1931. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 23.
- DOWLING, J. P.; WILLIAMS, C. P.; FRANSON, J. Maxwell duality, lorentz invariance, and topological phase. *Physical review letters*, APS, v. 83, n. 13, p. 2486, 1999. Citado na página 13.
- FONSECA, I.; BAKKE, K. Aharonov–anandan quantum phases and landau quantization associated with a magnetic quadrupole moment. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 363, p. 253–261, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 13, 36, 48, 49, 51 e 53.
- FONSECA, I.; BAKKE, K. Rotating effects on an atom with a magnetic quadrupole moment confined to a quantum ring. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 131, n. 3, p. 67, 2016. Citado na página 36.

- FONSECA, I.; BAKKE, K. Quantum effects on an atom with a magnetic quadrupole moment in a region with a time-dependent magnetic field. *Few-Body Systems*, Springer, v. 58, n. 1, p. 1, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 36, 48, 49, 51 e 53.
- FONSECA, I. C.; BAKKE, K. An analogue of the quantum hall conductivity for a magnetic quadrupole moment. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 527, n. 11-12, p. 820–824, 2015. Citado na página 36.
- FONSECA, I. C.; BAKKE, K. Quantum aspects of a moving magnetic quadrupole moment interacting with an electric field. *Journal of Mathematical Physics*, v. 56, n. 6, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 45, 48 e 52.
- FURTADO, C.; DUARTE, G. Dual aharonov–bohm effect. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 71, n. 1, p. 7, 2005. Citado na página 13.
- GRIFFITHS, D. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1999. (Pearson international edition). ISBN 9780139199608. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=x0akQgAACAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- GRIFFITHS, D. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2016. ISBN 9781107179868. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=0h-nDAAAQBAJ>>. Citado 8 vezes nas páginas 9, 24, 26, 27, 28, 30, 39 e 43.
- HE, X.-G.; MCKELLAR, B. H. Topological phase due to electric dipole moment and magnetic monopole interaction. *Physical Review A*, APS, v. 47, n. 4, p. 3424, 1993. Citado na página 13.
- KADOWAKI, H. et al. Observation of magnetic monopoles in spin ice. *Journal of the Physical Society of Japan*, The Physical Society of Japan, v. 78, n. 10, p. 103706–103706, 2009. Citado na página 18.
- LANDAU, L. Diamagnetismus der metalle. *Zeitschrift fur Physik*, Springer, v. 64, n. 9-10, p. 629–637, 1930. Citado 3 vezes nas páginas 49, 51 e 54.
- LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. Elsevier Science, 2013. (Teoreticheskaja fizika). ISBN 9781483149127. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=neBbAwAAQBAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 54.
- LANGER, R. E. On the connection formulas and the solutions of the wave equation. *Physical Review*, APS, v. 51, n. 8, p. 669, 1937. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 34.
- MELO, J. L. de; BAKKE, K.; FURTADO, C. Berry’s phase for displaced landau-hemckellar-wilkens states. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 131, n. 5, p. 165, 2016. Citado na página 14.
- RADT, H. S.; HURST, R. P. Magnetic quadrupole polarizability of closed-shell atoms. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 2, p. 696–706, 1970. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 36.
- RIBEIRO, L.; FURTADO, C.; NASCIMENTO, J. Landau levels analog to electric dipole. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 348, n. 3-6, p. 135–140, 2006. Citado na página 13.

SAKURAI, J. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994. (Modern Quantum Mechanics). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=V2hhDwAAQBAJ>>. Citado na página 20.

WILKENS, M. Quantum phase of a moving dipole. *Physical review letters*, APS, v. 72, n. 1, p. 5, 1994. Citado na página 13.