Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

O Método de De Giorgi e o 19º Problema de Hilbert

Rafael Ramos Santos Costa

João Pessoa – PB
Julho de 2022

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

O Método de De Giorgi e o 19º Problema de Hilbert

por

Rafael Ramos Santos Costa

sob a orientação do

Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo

João Pessoa – PB
Julho de 2022

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C838m Costa, Rafael Ramos Santos.
O método de De Giorgi e o 19º problema de Hilbert / Rafael Ramos Santos Costa. - João Pessoa, 2022.
76 f.

Orientação: Damião Júnio Gonçalves Araújo.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Método De Giorgi. 3. 19º Problema de Hilbert. 4. Hamilton Jacobi. I. Araújo, Damião Júnio Gonçalves. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por ANNA REGINA DA SILVA RIBEIRO - CRB-15/24

O Método de De Giorgi e o 19º Problema de Hilbert

por

Rafael Ramos Santos Costa [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 15 de julho de 2022.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo – UFPB
(Orientador)

Diego Marcon Farias

Prof. Dr. Diego Marcon Farias – UFRGS
(Examinador Externo)

Documento assinado digitalmente
gov.br
DISSON SOARES DOS PRAZERES
Data: 02/01/2023 16:46:26-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Disson Soares dos Prazeres – UFS
(Examinador Externo)

Uberlandio Batista Severo.

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo – UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista parcialmente da Capes e do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

A minha família

Agradecimentos

– Meus agradecimentos são primeiramente a DEUS, por toda força e superações.

– Agradeço a minha família por todo incentivo e apoio, em especial minha mãe que sempre fez de tudo pelos meus estudos.

– A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPG-MAT que de alguma forma contribuíram com minha formação.

– Ao meu orientador, Professor Damião Júnio Gonçalves Araújo , pela atenção, paciência e pelos ensinamentos.

– Aos meus amigos da pós graduação, pelo companheirismo e que também contribuíram para minha formação, em especial agradeço a Ginaldo e Aelson que me ajudaram significativamente na elaboração deste trabalho.

– Agradeço também a banca examinadora pela disponibilidade, formada pelos professores, Disson Soares dos Prazeres, Uberlandio Batista severo e Diego Marcon Farias. Agradeço também pelos comentários, sugestões e correções feitos pela banca examinadora.

– Ao CNPq e a Capes pelo financiamento.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o Método de De Giorgi para obter a regularidade Hölder para uma classe de equações elípticas, e vemos como ele aplicou seus estudos para poder resolver o 19º Problema de Hilbert. Inspirado nas técnicas de De Giorgi, abordamos a regularidade Hölder para equações parabólicas na forma divergente e para equações de Hamilton Jacobi.

Palavras-chave: De Giorgi, Problema de Hilbert, Hamilton Jacobi.

Abstract

In this work, we study the De Giorgi method to obtain the Hölder regularity for a class of elliptic equations, and we see how he applied his studies to be able to solve Hilbert's 19th Problem. Inspired by De Giorgi's techniques, we approach the Hölder regularity for parabolic equations in divergent form and for equations of Hamilton Jacobi.

Keywords: De Giorgi, Hilbert Problem, Hamilton Jacobi.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado;
- $B_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^N; |x - y| < r\}$ é a bola aberta de centro $y \in \mathbb{R}^N$ e raio $r > 0$, e B_r é a bola aberta centrada na origem e raio $r > 0$;
- $\Omega_1 \Subset \Omega$ significa que Ω_1 está compactamente contido em Ω, ou seja, $\overline{\Omega}_1$ é um compacto contido em Ω;
- $Tr(A) =$ traço da matriz A;
- $|B|$ significa a medida de Lebesgue de um subconjunto $B \subset \mathbb{R}^N$;
- $\operatorname{supp}(f)$ é o complementar da união de todos os conjuntos abertos onde f se anula, chamado o suporte da função f;
- $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω;
- χ_A é a função característica do conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$;
- q.t.p.= quase toda parte;
- $W^{-1,p'}(\Omega)$ é o espaço dual do espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, sendo $1 \leq p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, além disso, $H^{-1}(\Omega)$ é o dual de $H_0^1(\Omega)$;
- $C^\alpha(\Omega) := \{u \in C(\Omega); \sup \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\}$, com $0 < \alpha < 1$;
- $C^{k,\alpha}(\Omega)$ são as funções de classe $C^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas parciais até a ordem k estão em $C^\alpha(\Omega)$.

Introdução

Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma relação entre os valores de uma função desconhecida e suas derivadas parciais de diferentes ordens. A busca por propriedades intrínsecas de soluções de equações diferenciais parciais se torna um tema relevante desde a fundação da teoria da análise moderna de EDPs, por volta do século XVIII. Dentre os motivos pelos quais estuda-se esse ramo da Análise Matemática, pode-se destacar a relação existente entre soluções destas equações e modelagem de fenômenos reais, como por exemplo, na ótica, eletricidade, ondulatória, magnetismo, mecânica, fluidos, biologia, dentre outros.

Como parte central no desenvolvimento desta teoria, destacamos a busca de um módulo de continuidade universal de soluções de tais equações. Dentro dessa temática, temos a brilhante teoria de De Giorgi-Nash-Moser para equações da forma divergente, onde encontramos a obtenção do módulo universal de continuidade para soluções da equação elíptica linear homogênea.

Inspirado nisso, o objetivo principal desta dissertação é estudar o método de De Giorgi com o intuito de obter a regularidade de soluções variacionais para problemas elípticos não lineares. No final da década de 50, em um célebre trabalho (ver [8]), De Giorgi estudou a regularidade de soluções de equações elípticas com coeficientes mensuráveis e limitados. Além disso, De Giorgi conseguiu obter a regularidade Hölder contínua para soluções fracas de

$$\operatorname{div}(D^2F(\nabla\omega)\nabla u) = 0, \tag{1}$$

onde $u = \partial_i\omega$. Ele introduziu essa teoria para resolver o 19º problema de Hilbert, o qual na época, motivou vários matemáticos em busca de sua solução, que em consequência, trouxe um grande avanço para a área de equações diferenciais parciais, no que diz respeito a teoria de regularidade.

Com a ferramenta sofisticada que De Giorgi desenvolveu, foi possível resolver o 19º problema de Hilbert que consiste em mostrar a suavidade dos minimizantes do funcional a seguir

$$\mathcal{E}(\omega) = \int_\Omega F(\nabla\omega)\,dx \longrightarrow \min, \tag{2}$$

considerando as funções ω variando no espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$. Uma vez estabelecido a regularidade Hölder contínua de $\nabla\omega$, a teoria clássica de Schauder, veja [[6] Cap. 6, ou [17] Cap. 3], aplicada à equação (1) garante a regularidade $C^{2,\alpha}$ para ω. Daí, derivando a equação (1) e aplicando novamente a teoria de Schauder, então $\omega \in C^{3,\alpha}$. Continuando com esse argumento iterativo, obtemos a regularidade C^∞ para ω. Então, vamos ver como De Giorgi fez a relação entre minimizantes do funcional energia (2) e a equação (1). De forma independente, Nash obteve uma técnica similar em 1958, ver [15]. Posteriormente, Moser forneceu uma nova formulação da prova em [13]. Esse método é normalmente chamado de técnica de De Giorgi-Nash-Moser, porém, nesta dissertação o foco será na formulação original de De Giorgi baseado nas notas de Alexis F. Vasseur em [1].

Baseado nas ideias de De Giorgi, é feito também nesta dissertação o estudo da regularidade Hölder para a equação parabólica

$$\partial_t u - \operatorname{div}(A(t,x)\nabla_x u) = 0, \quad \text{em} \ \ (0,T) \times \Omega, \tag{3}$$

com base nas notas de Alexis F. Vasseur [1]. Além disso, como em um trabalho mais recente desenvolvido por Alexix F. Vasseur e Chi Hin Chan [3], apresentamos a regularidade Hölder para equações de Hamilton Jacobi abaixo

$$\partial_t u + H(t,x,\nabla u) = 0, \quad t \in (0,T), \ \ x \in \mathbb{R}^N,$$

onde o Hamiltoniano verifica uma propriedade de coercividade da forma,

$$\frac{1}{\Lambda}|P|^p - \Lambda \leq H(t,x,P) \leq \Lambda|P|^p + \Lambda,$$

para $p \in (1,\infty)$ e $\Lambda \geq 1$.

Este trabalho está dividida em quatro capítulos e um apêndice. No *Capítulo* 1, seguindo de perto [7] e [5], revisitamos o estado da arte da vida de De Giorgi. Além disso, discutimos como o método de De Giorgi está relacionado com o 19º problema de Hilbert.

No *Capítulo* 2, mostramos a suavidade dos minimizantes do funcional energia (2) usando o método de De Giorgi, também desenvolvido no mesmo capítulo. A *Seção 2.1* é dedicada à prova do primeiro Lema de De Giorgi. Em seguida, na *Seção 2.2* apresentamos o Lema da Oscilação, o qual, será primordial no ganho da regularidade Hölder contínua de soluções fracas da equação (2.6) através de um método de reescalonamento, que será apresentado na *Seção 2.3*. Finalmente, na *Seção 2.4*, é provado a regularidade C^∞ para os minimizantes de (2) utilizando o método de De Giorgi e a teoria clássica de Schauder, ou seja, é apresentado a solução do 19º problema de Hilbert.

No *Capítulo* 3 estabelecemos a regularidade Hölder contínua para soluções fracas da Equação Parabólica (3). Para isso, fazemos o uso dos dois lemas de De Giorgi de forma similar ao caso elíptico, sendo a primeira seção dedicada inteiramente ao primeiro lema de De Giorgi adaptado para o caso parabólico. Já na segunda seção, derivamos o segundo lema de De Giorgi e juntando esses dois ingredientes, obtemos um melhoramento da oscilação para soluções da equação (3), e então, seguindo a mesma linha do *Capítulo* 2, provamos a regularidade C^α.

No *Capítulo* 4, abordamos a equação de Hamilton Jacobi com condição de crescimento no gradiente. Consideramos dois sentidos de soluções, em que, o primeiro e o segundo lema de De Giorgi é derivado de soluções no sentido distribucional, implicando num melhoramento da oscilação por cima dessas soluções. Para obter um melhoramento da oscilação por baixo, fazemos o uso também de soluções no sentido da viscosidade. Por fim, é obtido um decaimento da oscilação através de um processo indutivo utilizando a cada passo apenas a redução da oscilação por cima, ou por baixo.

Neste trabalho consideramos que a notação das constantes são mantidas, mesmo que estas sejam modificadas. Por exemplo

$$\|u\| \leq C\|u\| + B\|u\| \leq C\|u\|.$$

Capítulo 1

De Giorgi e o 19$^{\mathrm{o}}$ Problema de Hilbert

1.1 Ennio De Giorgi

1.1.1 Biografia

Ennio De Giorgi nasceu em Lecce em 8 de fevereiro de 1928. Sua mãe, Stefania Scopinich, veio de uma família de navegadores de Lussino, enquanto seu pai, Nicola, foi professor de literatura na escola de formação de professores de Lecce e um estudioso estimado em língua árabe, história e geografia. O pai dele teve uma morte prematura em 1930 e sua mãe, a quem Ennio era particularmente ligado, viveu até 1988.

Em 1946, Ennio mudou-se para Roma, onde iniciou os seus estudos universitários em engenharia. No ano seguinte, ele trocou a engenharia pela matemática, graduando-se em 1950 sob a direção de Mauro Picone. Logo depois, obteve uma bolsa no Instituto per le Applicazione del Calcelo, e em 1951 tornou-se assistente de Picone no Instituto de Matemática "Guido Castelnuovo"da Universidade de Roma.

Em 1958 foi agraciado com a Cátedra de Análise Matemática pela Universidade de Messina, onde começou neste cargo em dezembro do mesmo ano. No outono de 1959, por proposta de Alessandro Faedo, foi contratado pela Scuela Normale de Pisa, onde ocupou a cátedra de Análise Matemática Algébrica e Infinitesimal por quase quarenta anos.

Em 1960, a União Matemática Italiana concedeu-lhe o prêmio Caccioppoli, fundado no mesmo ano. Em 1973, a Accademia dei Lincei concedeu-lhe o prêmio do Presidente da República. Em 1990 recebeu o prestigioso prêmio Wolf em Tel Aviv.

Em 1983, durante uma cerimônia solene em Sorbonne, De Giorgi recebeu o grau honoris causa em Matemática na Universidade de Paris. Em 1992, a Universidade de Lecce concedeu-lhe o grau honoris causa em Filosofia, do qual particularmente se orgulhava.

Foi membro das mais importantes instituições científicas, em particular da Accademia dei Lincei e da Pontifícia Academia das Ciências, onde teve um papel ativo até seus últimos dias. Em 1995 tornou-se membro da Académie des Sciences de l'Institut de France e da Academia Nacional de Ciências dos Estados Unidos.

Em setembro de 1996 foi internado no hospital de Pisa. Ele passou por tratamento cirúrgico e faleceu em 25 de outubro.

1.1.2 De Giorgi e o 19º Problema de Hilbert

No V Congresso da União Matemática Italiana (UMI), realizado em Pavia e Turim de 6 a 9 de outubro em 1955, De Giorgi pretendia apresentar seus resultados em conjuntos com perímetro finito, a desigualdade isoperimétrica, e suas aplicações ao cálculo das variações. Além disso, De Giorgi também pretendia apresentar resultados de regularidade para os mínimos de funcionais regulares do cálculo das variações. Há certamente uma conexão entre estes tópicos, uma vez que a prova do resultado de regularidade usa a propriedade isoperimétrica da hiperesfera, mas o fato de que a solução do 19º Problema de Hilbert não tenha sido mencionado, confirma que De Giorgi ainda não havia obtido este resultado quando se inscreveu para o Congresso.

Os eventos que levaram à prova do teorema da regularidade, relatados por Enrico Magenes na comemoração de De Giorgi na Accademia dei Lincei, aconteceu com uma velocidade de tirar o fôlego. Em agosto de 1955, durante uma caminhada perto de Pordoi Pass, nas Dolomitas, De Giorgi foi informado por Guido Stampacchia sobre a existência do 19º Problema. Ele deve ter visto imediatamente a possibilidade de aplicar para a solução deste problema os resultados de sua pesquisa sobre a geometria de subconjuntos de espaços euclidianos multidimensionais. De fato, em menos de dois meses, ele foi capaz de apresentar sua solução do 19º Problema de Hilbert ao UMI. Esta história aponta um aspecto da personalidade científica de De Giorgi, uma intuição impressionante, combinada com a capacidade prodigiosa de obter dela uma completa prova, com todos os detalhes.

1.2 19º Problema de Hilbert

O décimo nono problema de Hilbert é um dos 23 problemas de Hilbert, apresentados em uma lista compilada em 1900 por David Hilbert. Ele pergunta se as soluções de problemas regulares no cálculo das variações são sempre analíticas. Informalmente, e talvez menos diretamente, uma vez que o conceito de Hilbert de um “problema variacional regular”, identifica precisamente um problema variacional cuja equação de Euler-Lagrange é uma equação diferencial parcial elíptica com coeficientes analíticos, o décimo nono problema de Hilbert, apesar de sua afirmação aparentemente técnica, simplesmente pergunta se, nesta classe de equações diferenciais parciais, qualquer função solução herda a estrutura relativamente simples e bem compreendida da equação resolvida.

Certas equações diferenciais parciais admitem apenas soluções C^∞ (funções analíticas). Um exemplo importante é a Equação de Laplace

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = 0. \tag{1.1}$$

Um outro exemplo é a Equação de Superfície Mínima

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0, \tag{1.2}$$

cujas soluções modelam bolhas de sabão. As soluções dessas equações são C^∞ mesmo se seus valores de fronteira não são. Tomando por exemplo a função de ângulo $\operatorname{Im}(\log z)$

no semi-plano $\{\mathrm{Re}(z) > 0\} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Essa função resolve ambas as equações (1.1) e (1.2), e é analítica em $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$, mas é descontínua na fronteira.

No enunciado do 19º problema de Hilbert, observa-se que as equações com esta propriedade notável tendem a surgir como equações de Euler-Lagrange de integrais variacionais da forma

$$\mathcal{E}(u) = \int_\Omega F(\nabla u)\, dx,$$

onde F é suave, convexa e $\det D^2F > 0$. A equação de Laplace corresponde à escolha $F(\cdot) = |\cdot|^2$, e a equação de Superfície Mínima corresponde a escolha $F(\cdot) = \sqrt{1 + |\cdot|^2}$. O problema de Hilbert pergunta se todas essas equações de Euler-Lagrange

$$\mathrm{div}(\nabla F(\nabla u)) = 0 \tag{1.3}$$

admitem apenas soluções analíticas, mesmo que as soluções tenham dados de fronteira não analíticos.

Bernstein mostrou em 1904 que, se $n = 2$ e $u \in C^3(B_1)$ resolve a equação (1.3), então $u \in C^\infty(B_1)$. A regularidade exigida em u para concluir a suavidade, bem como a restrição da dimensão, foram relaxados nos anos seguintes po Lewy, Hopf, Schauder, e outros (ver [2] Cap. 5.8). No início da década de 1930, já se sabia que soluções para (1.3) que estão em $C^{1,\alpha}(B_1)$ para algum $\alpha > 0$, são suaves.

Embora esses resultados tenham representado um avanço significativo no problema de Hilbert, a existência de soluções para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\nabla F(\nabla u)) = 0 & \text{em} \quad B_1 \\ u = \varphi & \text{em} \quad \partial B_1 \end{cases}$$

no espaço $C^{1,\alpha}(B_1)$ não era conhecida. No início da década de 1930, o principal problema era portanto, preencher a lacuna da regularidade Lipschitz para $C^{1,\alpha}$.

Mais precisamente, mostramos que soluções de (1.3) satisfazem estimativas da forma

$$\|\nabla u\|_{C^\alpha(\tilde{\Omega})} \leq C(N, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}, F) \tag{1.4}$$

para algum $\alpha(N, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}, F) \in (0,1)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado e $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$. Para enfatizar as ideias, vamos supor que u é suave e estabelecer (1.4) como uma estimativa a priori. A abordagem para a estimativa (1.4) é diferenciar a equação (1.3), dando uma equação na forma divergente para as derivadas de u:

$$\partial_i(F_{ij}(\nabla u)(\partial_k u)_j) = 0, \quad k = 1, \dots, N. \tag{1.5}$$

Portanto, para controlar o módulo de continuidade de ∇u, a ideia é tratar a equação (1.5) como uma equação linear uniformemente elíptica da forma

$$\partial_i(a_{ij}(x)\partial_j v) = 0, \tag{1.6}$$

para $v = \partial_k u$, onde os autovalores de a_{ij} estão em $[\lambda, \lambda^{-1}]$ para algum $0 < \lambda < 1$. A estimativa

$$\|v\|_{C^\alpha(\tilde{\Omega})} \leq C(N, \lambda)\|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{1.7}$$

é satisfeita para soluções de (1.6) para algum $\alpha(N, \lambda) > 0$, então, segue a estimativa chave (1.4). A estimativa (1.7) foi comprovada por Morrey em duas dimensões no final da década de 1930, e por De Giorgi [8] e Nash [15] em dimensões mais altas no final da década de 1950. Isso fornece uma solução completa para o 19º problema de Hilbert.

Capítulo 2

Método de De Giorgi para Equações Elípticas

Neste capítulo, nosso principal objetivo é estudar o 19º problema de Hilbert, que consiste em mostrar a suavidade de minimizantes locais do funcional energia convexo da seguinte forma,

$$\mathcal{E}(\omega) = \int_\Omega F(\nabla\omega)\, dx, \tag{2.1}$$

em que F é uma função suave de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$ e uniformemente convexa, que verifica

$$\frac{1}{\Lambda} I \leq D^2F(p) \leq \Lambda I, \quad \text{para qualquer } p \in \mathbb{R}^N, \tag{2.2}$$

e para $\Lambda > 1$ fixado.

Para alcançar esse objetivo, usamos o método introduzido por De Giorgi baseado nas notas de Alexis F. Vasseur em [1], para estudar a regularidade de soluções para equações elípticas.

2.1 Primeiro Lema de De Giorgi

Esta seção será dedicada à prova do Primeiro Lema de De Giorgi, o qual, nos garante a limitação em L^∞ para soluções de certas equações elípticas a partir do conhecimento da norma em L^2 de tais soluções.

Para ser mais preciso na abordagem do problema, temos um minimizante local quando,

$$\mathcal{E}(\omega) \leq \mathcal{E}(\omega + \phi),$$

para qualquer ϕ com suporte compacto em Ω. Vamos considerar a minimização no espaço $H^1(\Omega)$.

No próximo lema, verificamos que os minimizantes locais do funcional (2.1) satisfazem a equação

$$\operatorname{div}(DF(\nabla\omega)) = 0, \tag{2.3}$$

no sentido das distribuições, isto é, para qualquer $\phi \in H_0^1(\Omega)$, tem-se

$$\int_\Omega \nabla\phi DF(\nabla\omega)\, dx = 0.$$

Então, fazendo o uso da ferramenta quociente de diferenças, temos uma relação íntima entre soluções da equação (2.3) com soluções da equação abaixo

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = 0. \tag{2.4}$$

Lema 2.1.1. *Considere F, tal que, $D^2F(p) \leq \Lambda I$, para qualquer $p \in \mathbb{R}^N$ e para $\Lambda > 0$, em que I é a matriz identidade $N \times N$. Então, qualquer $\omega \in H^1(\Omega)$, minimizante local de* (2.1)*, é solução no sentido das distribuições para* (2.3)*.*

Demonstração. Seja ω um minimizante local do funcional (2.1), logo, para qualquer $\varepsilon > 0$ e uma função suave ϕ com suporte compacto em Ω, obtemos

$$\int_\Omega F(\nabla\omega)dx \leq \int_\Omega F(\nabla\omega + \varepsilon\nabla\phi)dx.$$

Usando a expansão de Taylor para F, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega F(\nabla\omega + \varepsilon\nabla\phi) - F(\nabla\omega)dx \\ &= \varepsilon\int_\Omega DF(\nabla\omega)\cdot\nabla\phi\, dx + \varepsilon^2\int_\Omega \nabla\phi^T\cdot D^2F(\nabla\omega)\cdot\nabla\phi\, dx + \int_\Omega r(\varepsilon\nabla\phi)dx, \end{aligned}$$

então, usando o fato que, $D^2F(p) \leq \Lambda I$, teremos

$$\int_\Omega \nabla\phi^T\cdot D^2F(\nabla\omega)\cdot\nabla\phi\, dx \leq \Lambda\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx.$$

Consequentemente,

$$0 \leq \varepsilon\int_\Omega DF(\nabla\omega)\cdot\nabla\phi\, dx + \varepsilon^2\Lambda\int_\Omega |\nabla\phi|^2dx + \int_\Omega r(\varepsilon\nabla\phi)dx,$$

então

$$\int_\Omega DF(\nabla\omega)\cdot\nabla\phi\, dx \geq -\varepsilon\Lambda\int_\Omega |\nabla\phi|^2dx - \int_\Omega \frac{r(\varepsilon\nabla\phi)}{\varepsilon}dx. \tag{2.5}$$

Note que,

$$\int_\Omega \frac{r(\varepsilon\nabla\phi)}{\varepsilon}dx \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0$, pois

$$\left|\int_{\operatorname{supp}(\nabla\phi)} \frac{r(\varepsilon\nabla\phi)}{\varepsilon}dx\right| \leq \int_{\operatorname{supp}(\nabla\phi)} \frac{|r(\varepsilon\nabla\phi)|}{|\varepsilon\nabla\phi|}|\nabla\phi|dx,$$

daí, como $|\nabla\phi|$ é limitada, existe $M > 0$, tal que,

$$|\varepsilon\nabla\phi(x)| \leq \varepsilon M,$$

para todo $x \in \operatorname{supp}(\nabla\phi)$. Com isso,

$$|\varepsilon\nabla\phi(x)| \to 0$$

quando $\varepsilon \to 0$, para todo $x \in \operatorname{supp}(\nabla \phi)$. Portanto, fazendo $\varepsilon \to 0$ em (2.5), obtemos

$$\int_\Omega DF(\nabla \omega) \cdot \nabla \phi \, dx \geq 0.$$

Da mesma forma, vale a última desigualdade se substituirmos ϕ por $-\phi$, então

$$\int_\Omega DF(\nabla \omega) \cdot \nabla \phi \, dx \leq 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega DF(\nabla \omega) \cdot \nabla \phi \, dx = 0$$

Isso mostra que o minimizante w é solução da equação de Euler Lagrange no sentido das distribuições.

□

A ideia de De Giorgi foi considerar, para $1 \leq i \leq N$, a derivada de (2.3) em relação a x_i. Ou seja, quando $u = \partial_i \omega$, obtemos

$$\operatorname{div}(D^2 F(\nabla \omega) \nabla u) = 0. \tag{2.6}$$

A equação (2.6) pode ser reescrita como uma equação elíptica linear clássica na forma divergente, de modo que, se omita a dependência em ω, fazendo $A(x) = D^2 F(\nabla \omega(x))$:

$$\operatorname{div}(A(x) \nabla u) = 0, \tag{2.7}$$

com A verificando a condição de elipticidade,

$$\frac{1}{\Lambda} I \leq A(x) \leq \Lambda I, \quad \text{para todo } x \in \Omega, \tag{2.8}$$

graças a (2.2). A partir de agora, denotaremos o operador

$$L(\cdot) = -\operatorname{div}(A(x) \nabla \cdot),$$

onde A é uniformemente elíptico e satisfaz (2.8). Dizemos que uma função u é solução fraca para a equação (2.7), quando para qualquer $\phi \in H_0^1(\Omega)$, verifica

$$\int_\Omega \nabla \phi^T A \nabla u \, dx. \tag{2.9}$$

Um dos ingredientes para a prova do primeiro Lema de De Giorgi é a Estimativa de Energia dado pelo próximo Lema.

Lema 2.1.2 (Estimativa de Energia)**.** *Se u é solução de $Lu = 0$ no sentido fraco e $\phi \in C_0^\infty(B_1)$, então*

$$\int_{B_1} (\nabla(\phi u_+))^2 dx \leq C \|\nabla \phi\|_{L^\infty(B_1)}^2 \int_{B_1 \cap \operatorname{supp}(\phi)} u_+^2 dx,$$

onde $u_+ = \sup\{u, 0\}$. Se A for simétrica, podemos considerar $C = \Lambda^2$.

Demonstração. Utilizando a função teste $\phi^2 u_+$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_1} \nabla^T(\phi^2 u_+)A(x)\nabla u\, dx & (2.10) \\ &= \int_{B_1} 2u_+\nabla^T(\phi)A(x)\nabla u\, dx + \int_{B_1} \phi^2\nabla^T(u_+)A(x)\nabla u\, dx. & (2.11) \end{aligned}$$

Como $\nabla u_+ = 0$ no conjunto $\{u < 0\} \cap B_1$, veja o Lema A.2.1, podemos considerar apenas o conjunto em que $\{u \geq 0\} \cap B_1$, logo

$$\int_{B_1} \nabla^T(\phi^2 u_+)A(x)\nabla(u_+)\, dx = 0.$$

Vamos transferir ϕ para o lado direito de ∇. Para que isso aconteça, como

$$\nabla(\phi^2 u_+) = \nabla(\phi\, u_+)\phi + \nabla(\phi)\phi\, u_+,$$

implica que

$$\begin{aligned} &\int_{B_1} \nabla^T(\phi^2 u_+)\cdot A(x)\cdot \nabla u_+ dx \\ &= \int_{B_1} \nabla^T(\phi\, u_+)A(x)\nabla(u_+)\phi\, dx + \int_{B_1} (\phi\, u_+)\nabla^T(\phi)A(x)\nabla(u_+)dx \\ &= \left\{\int_{B_1} \nabla^T(\phi\, u_+)A(x)\nabla(\phi\, u_+)dx - \int_{B_1} \nabla^T(\phi\, u_+)A(x)\nabla(\phi)u_+dx\right\} \\ &\qquad + \int_{B_1} (\phi\, u_+)\nabla^T(\phi)A(x)\nabla u_+dx \\ &= \left\{\int_{B_1} \nabla^T(\phi\, u_+)A(x)\nabla(\phi\, u_+)dx - \int_{B_1} \nabla^T(\phi\, u_+)A(x)\nabla(\phi)u_+dx\right\} \\ &\qquad + \left\{\int_{B_1} u_+\nabla^T(\phi)A(x)\nabla(\phi\, u_+)dx - \int_{B_1} u_+^2\nabla^T(\phi)A(x)\nabla(\phi)dx\right\} \\ &= \left\{\int_{B_1} \nabla^T(\phi\, u_+)A(x)\nabla(\phi\, u_+)dx - \int_{B_1} \nabla^T(\phi\, u_+)A(x)\nabla(\phi)u_+dx\right\} \\ &\qquad + \left\{\int_{B_1} u_+\nabla^T(\phi\, u_+)A^T(x)\nabla(\phi)dx - \int_{B_1} u_+^2\nabla^T(\phi)A(x)\nabla(\phi)dx\right\} \\ &= \int_{B_1} \nabla^T(\phi\, u_+)A(x)\nabla(\phi\, u_+)dx - \int_{B_1} \nabla^T(\phi\, u_+)(A(x) - A^T(x))\nabla(\phi)u_+dx \\ &\qquad - \int_{B_1} u_+^2\nabla^T(\phi)A(x)\nabla(\phi)dx. \qquad (2.12) \end{aligned}$$

Note que, se A é simétrica então, $C = \Lambda^2$, visto que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda}\int_{B_1} |\nabla(\phi\, u_+)|^2 dx &\leq \int_{B_1} \nabla^T(\phi\, u_+)A(x)\nabla(\phi\, u_+)dx \\ &\leq \int_{B_1} u_+^2\nabla^T(\phi)A(x)\nabla(\phi)dx \\ &\leq \Lambda\int_{B_1} u_+^2|\nabla(\phi)|^2 dx, \end{aligned}$$

então, segue que

$$\begin{aligned}\int_{B_1}|\nabla(\phi\, u_+)|^2dx &\leq \Lambda^2\int_{B_1}u_+^2|\nabla(\phi)|^2dx\\ &\leq \Lambda^2\|\nabla(\phi)\|^2_{L^\infty(B_1)}\int_{B_1\cap\operatorname{supp}(\phi)}u_+^2\,dx.\end{aligned}$$

No caso em que A não é simétrica, temos que

$$\begin{aligned}&\left|\int_{B_1}\nabla^T(\phi\, u_+)\cdot(A(x)-A^T(x))\cdot\nabla(\phi)u_+\,dx\right|\\ =\;&\left|\int_{B_1}u_+\langle(A(x)-A^T(x))\cdot\nabla(\phi),\nabla(\phi\, u_+)\rangle dx\right|\\ \leq\;&\int_{B_1}|(A(x)-A^T(x))\cdot\nabla(\phi)u_+|\cdot|\nabla(\phi\, u_+)|\,dx\\ \leq\;&\int_{B_1}\{|(A(x)\cdot\nabla(\phi)u_+|+|A^T(x)\cdot\nabla(\phi)u_+|\}\cdot|\nabla(\phi\, u_+)|\,dx\\ \leq\;&2\Lambda\int_{B_1}|\nabla(\phi)u_+|\cdot|\nabla(\phi\, u_+)|\,dx\\ \leq\;&2\Lambda\|\nabla(\phi)u_+\|_{L^2(B_1)}\cdot\|\nabla(\phi\, u_+)\|_{L^2(B_1)}\\ \leq\;&2\Lambda^{\frac{3}{2}}\left\{\int_{B_1}\nabla^T(\phi\, u_+)\cdot A(x)\cdot\nabla(\phi\, u_+)dx\right\}^{1/2}\cdot\|\nabla(\phi)u_+\|_{L^2(B_1)}\\ \leq\;&\frac{1}{2}\int_{B_1}\nabla^T(\phi\, u_+)\cdot A(x)\cdot\nabla(\phi\, u_+)dx+2\Lambda^3\int_{B_1}|\nabla(\phi)|^2u_+^2dx,\end{aligned}$$

a última desigualdade decorre do Lema B.1.1. Com isso e por (2.12), temos que

$$\begin{aligned}&\int_{B_1}\nabla^T(\phi\, u_+)\cdot A(x)\cdot\nabla(\phi\, u_+)dx-\int_{B_1}u_+^2\nabla^T(\phi)A(x)\nabla(\phi)dx\\ \leq\;&\left|\int_{B_1}\nabla^T(\phi\, u_+)\cdot(A(x)-A^T(x))\cdot\nabla(\phi)u_+\,dx\right|\\ \leq\;&\frac{1}{2}\int_{B_1}\nabla^T(\phi\, u_+)\cdot A(x)\cdot\nabla(\phi\, u_+)dx+2\Lambda^3\int_{B_1}|\nabla(\phi)|^2u_+^2dx.\end{aligned}$$

Isso implica que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Lambda}\int_{B_1}|\nabla(\phi\, u_+)|^2dx &\leq \int_{B_1}\nabla^T(\phi\, u_+)A(x)\nabla(\phi\, u_+)dx\\ &\leq 2(2\Lambda^3+\Lambda)\int_{B_1}|\nabla(\phi)|^2u_+^2dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{B_1}|\nabla(\phi\, u_+)|^2dx\leq C(\Lambda)\int_{B_1}|\nabla(\phi)|^2u_+^2dx$$

$$\leq C(\Lambda)\|\nabla(\phi)\|^2_{L^\infty(B_1)}\int_{B_1\cap\operatorname{supp}(\phi)}u_+^2dx.$$

□

Agora, podemos enunciar um dos pilares do método de De Giorgi para explorar a regularidade de soluções. Temos a seguir o primeiro Lema de De Giorgi.

Lema 2.1.3 (Primeiro Lema de De Giorgi)**.** *Existe uma constante δ dependendo apenas de Λ e N, tal que, para qualquer solução u para $Lu = 0$ em B_1 no sentido fraco, temos a seguinte propriedade. Se*

$$\|u_+\|_{L^2(B_1)} \leq \delta$$

então

$$\|u_+\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Para provar este lema, consideramos uma sequência de conjuntos de níveis de energia em bolas de encolhimento. Mais precisamente, seja

$$\tilde{B}_k \text{ a bola centrada na origem e raio } \frac{1}{2}(1 + 2^{-k}).$$

Note que, $\tilde{B}_0 = B_1$ e $\tilde{B}_k$ converge para $B_{1/2}$.

Vamos considerar da mesma forma, uma família de "níveis de energia" C_k, indo de uma forma diádica de 0 para $\frac{1}{2}$.

$$C_k = \frac{1}{2}(1 - 2^{-k}).$$

Agora, vamos definir a seguinte família de funções truncadas,

$$u_k = (u - C_k)_+.$$

Considere

$$U_k = \int_{\tilde{B}_k} u_k^2 \, dx.$$

Então, o objetivo é obter uma estimativa não linear da forma,

$$U_{k+1} \leq BC^k U_k^\beta, \tag{2.13}$$

para constantes adequadas $C > 1$, $\beta > 1$ e $B > 0$. Observe que, pela Proposição B.1.1, se

$$\|u_+\|_{L^2(B_1)} = U_0 \leq B^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot C^{-\frac{1}{(\beta-1)^2}},$$

implica que, $U_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Isso significa que no limite, obtemos

$$\int_{B_{1/2}} (u - 1/2)_+^2 dx = 0.$$

Consequentemente,

$$u \leq \frac{1}{2} \text{ em } B_{1/2}.$$

Introduzindo funções de truncamento ϕ_k que satisfazem

$$\begin{aligned} \phi_k &= 1 \text{ em } \tilde{B}_k, \text{ e} \\ \phi_k &= 0 \text{ em } \tilde{B}_{k-1}^c, \end{aligned}$$

em que,
$$|\nabla \phi_k| \leq C(N)2^k.$$
Note que,
$$\begin{aligned} U_k &= \int_{\tilde{B}_k} u_k^2 dx \\ &\leq \int_{B_1} \phi_k^2 u_k^2 dx \\ &= \int_{\tilde{B}_{k-1}} \phi_k^2 u_k^2 dx. \end{aligned}$$
Perceba que, $u_{k+1} \leq u_k$, então, usando a Desigualdade de Sobolev com $v = \phi_{k+1}u_{k+1}$ e a Estimativa de Energia 2.1.2 para $\phi = \phi_{k+1}$, tem-se
$$\begin{aligned} \left\{ \int_{\tilde{B}_k} (\phi_{k+1}u_{k+1})^p dx \right\}^{2/p} &\leq B(N) \int_{\tilde{B}_k} |\nabla(\phi_{k+1}u_{k+1})|^2 dx \\ &\leq B(N,\Lambda) \|\nabla \phi_{k+1}\|^2_{L^\infty(\tilde{B}_k)} \int_{\tilde{B}_k} u_{k+1}^2 dx \\ &\leq B(N,\Lambda)(C2^{k+1})^2 \int_{\tilde{B}_k} u_{k+1}^2 dx \\ &\leq B(N,\Lambda)(2^2)^k U_k. \end{aligned}$$
Assim, se $A = \{\phi_{k+1}u_{k+1} > 0\}$ então, $A \subset \tilde{B}_k$. Daí as desigualdades de Hölder e Markov, nos fornecem
$$\begin{aligned} U_{k+1} &\leq \int_{\tilde{B}_k} (\phi_{k+1}u_{k+1})^2 dx \\ &\leq \left\{ \int_{\tilde{B}_k} (\phi_{k+1}u_{k+1})^p dx \right\}^{2/p} \left\{ \int_{\tilde{B}_k} \chi_A(x) dx \right\}^{2/N} \\ &= \left\{ \int_{\tilde{B}_k} (\phi_{k+1}u_{k+1})^p dx \right\}^{2/p} |\{\phi_{k+1}u_{k+1} > 0\}|^{2/N} \\ &\leq B(N,\Lambda)(2^2)^k U_k |\{\phi_k u_k > 2^{-(k+2)}\}|^{2/N} \\ &= B(N,\Lambda)(2^2)^k U_k |\{(\phi_k u_k)^2 > 2^{-2(k+2)}\}|^{2/N} \\ &\leq \frac{B(N,\Lambda)(2^2)^k}{(2^{-2(k+2)})^{2/N}} U^k \left\{ \int_{\tilde{B}_k} u_k^2 dx \right\}^{2/N} \\ &= B(N,\Lambda)2^{8/N}(2^2 2^{4/N})^k U_k^{1+2/N}. \end{aligned}$$
Portanto, montamos a estimativa (2.13) com
$$B = B(N,\Lambda)2^{8/N},\ C = 2^2 2^{4/N} \text{ e } \beta = 1 + \frac{2}{N},$$
e assim, concluimos a demonstração deste lema. □

Como consequência do lema anterior juntamente com uma técnica de reescalonamento, temos o corolário abaixo.

Corolário 2.1.1. *Seja $u \in L^2(\Omega)$ uma solução para $Lu = 0$ no sentido fraco, sendo Ω um conjunto aberto e limitado, e L verifica* (2.8). *Então, para qualquer $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$, $u \in L^\infty(\tilde{\Omega})$ e*

$$\|u\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)},$$

onde a constante C depende de N, Λ, Ω e $\tilde{\Omega}$.

Demonstração. Seja $d = \operatorname{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega)$. Para qualquer $x \in \tilde{\Omega}$, considere a seguinte função em B_1,

$$\tilde{u}(y) = \delta \frac{d^{N/2}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} u(x + dy),$$

sendo δ a mesma constante absoluta do Lema 2.1.3. A função $\tilde{u}$ é solução de (2.7) com matriz de difusão $\tilde{A}(y) = A(x + dy)$, e $\tilde{A}$ verifica (2.8). Note que,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}\|_{L^2(B_1)} &= \delta \frac{d^{N/2}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \left\{ \int_{B_1} u(x+dy)^2 dy \right\}^{1/2} \\
&= \delta \frac{d^{N/2}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \left\{ \int_{B_d(x)} u(z)^2 d^{-N} dz \right\}^{1/2} \\
&= \delta \frac{\|u\|_{L^2(B_d(x))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \\
&\leq \delta.
\end{aligned}$$

Como $\|\tilde{u}_+\|_{L^2(B_1)} \leq \|\tilde{u}\|_{L^2(B_1)} \leq \delta$, então, pelo Lema 2.1.3,

$$\tilde{u}(y) \leq \tilde{u}_+(y) \leq \frac{1}{2}, \ \text{em} \ B_{1/2}.$$

Procedendo da mesma forma para $-\tilde{u}$, obtemos que

$$-\tilde{u}(y) \leq (-\tilde{u})_+(y) \leq \frac{1}{2}, \ \text{em} \ B_{1/2},$$

logo,

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq \frac{1}{2}.$$

Dessa forma, u é limitada por uma única constante em qualquer bola $B_{d/2}(x)$, para todo $x \in \tilde{\Omega}$, daí

$$\|u\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq \frac{d^{-N/2}}{2\,\delta} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

2.2 Lema da Oscilação

O objetivo dessa seção é explorar o melhoramento da oscilação para soluções de $Lu = 0$. A desigualdade isoperimétrica de De Giorgi, tem um papel importante nesta seção, podendo ser interpretado da seguinte forma: funções com um salto de descontinuidade não podem estar em H^1.

Lema 2.2.1. *Seja $\omega \in H^1(B_1)$, tal que, $\int_{B_1} |\nabla\omega_+|^2 dx \leq C_0$. Considere os conjuntos,*

$$\begin{aligned} A &= \{\omega \leq 0\} \cap B_1 \\ C &= \{\omega \geq 1/2\} \cap B_1 \\ D &= \{0 < \omega < 1/2\} \cap B_1. \end{aligned}$$

Então, existe C_N dependendo apenas de N, tal que,

$$C_0|D| \geq C_N(|C||A|^{1-\frac{1}{N}})^2.$$

Demonstração. Considere $\bar{\omega} = \sup(0, \inf(\omega, 1/2))$. Então, $\nabla\bar{\omega} = \nabla\omega_+\chi_{\{0\leq\omega\leq 1/2\}}$. Sejam $x \in A$ e $y \in C$, então pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \bar{\omega}(y) - \bar{\omega}(x) = \int_0^1 (y-x)\cdot\nabla\bar{\omega}(x+t(y-x))\,dt \\ &\leq \int_0^1 |y-x|\cdot|\nabla\bar{\omega}|(x+t(y-x))\,dt \\ &= \int_0^{|y-x|} |\nabla\bar{\omega}|(x+se_\sigma)\,ds, \end{aligned}$$

sendo $e_\sigma = y - x/|y-x|$, e fazendo a mudança de variável $s = t|y-x|$. Com isso, tem-se

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^\infty |\nabla\bar{\omega}|(x+se_\sigma)\,ds. \tag{2.14}$$

Fazendo a integração em (2.14) com relação a y no conjunto C, temos que

$$\begin{aligned} \frac{|C|}{2} &\leq \int_C \left(\int_0^\infty |\nabla\bar{\omega}|(x+se_\sigma)\,ds\right) dy \\ &\leq \int_{B_1} \left(\int_0^\infty |\nabla\bar{\omega}|(x+se_\sigma)\,ds\right) dy. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Escrevendo (2.15) em coordenadas polares e fazendo uma mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned} \frac{|C|}{2} &\leq \int_0^1 \int_{\partial B_r} \left(\int_0^\infty |\nabla\bar{\omega}|(x+se_\sigma)\,ds\right) dS\,dr \\ &= \int_0^1 r^{N-1} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left(\int_0^\infty |\nabla\bar{\omega}|(x+se_{\sigma,r})\,ds\right) dS\,dr, \end{aligned}$$

onde $e_{\sigma,r} = r\bar{y} - x/|r\bar{y} - x|$. Como a função $|\nabla\bar{\omega}|(x+se_{\sigma,r})$ independe do r, podemos tomar $r=1$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \frac{|C|}{2} &\leq \int_0^1 r^{N-1} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left(\int_0^\infty |\nabla\bar{\omega}|(x+se_\sigma)\,ds\right) dS\,dr \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left(\int_0^\infty |\nabla\bar{\omega}|(x+se_\sigma)\,ds\right) dS \\ &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left(\int_0^\infty s^{N-1}\frac{|\nabla\bar{\omega}|(x+se_\sigma)}{s^{N-1}}\,ds\right) dS. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} \frac{|\nabla\bar{\omega}|(z)}{|x-z|^{N-1}}\,dz &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\bar{\omega}|(z)}{|x-z|^{N-1}}\,dz \\
&= \int_0^\infty \int_{\partial B_s(x)} \frac{|\nabla\bar{\omega}|(z)}{|x-z|^{N-1}}\,dS\,dz \\
&= \int_0^\infty \int_{\partial B_s(x)} \frac{|\nabla\bar{\omega}|(z)}{s^{N-1}}\,dS\,dz \\
&= \int_0^\infty \int_{\partial B_s} \frac{|\nabla\bar{\omega}|(x+z)}{s^{N-1}}\,dS\,ds \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{N-1}} s^{N-1}\frac{|\nabla\bar{\omega}|(x+sz)}{s^{N-1}}\,dS\,ds \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{N-1}} s^{N-1}\frac{|\nabla\bar{\omega}|(x+s(z/|z|))}{s^{N-1}}\,dS\,ds \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{N-1}} s^{N-1}\frac{|\nabla\bar{\omega}|(x+se_\sigma)}{s^{N-1}}\,dS\,ds \\
&= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left(\int_0^\infty s^{N-1}\frac{|\nabla\bar{\omega}|(x+se_\sigma)}{s^{N-1}}\,ds\right) dS
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Com isso, integrando (2.16) com relação a x no conjunto A, obtemos

$$|A|\,|C|/2 \leq \int_{B_1} |\nabla\bar{\omega}|(y)\left(\int_A \frac{dx}{|x-y|^{N-1}}\right) dy. \tag{2.17}$$

Note que,

$$\int_A \frac{dx}{|x-y|^{N-1}} \leq C(N)\,|A|^{1/N},$$

onde $C(N)$ é uma constante dependendo de N. De fato, supondo que $R = |A|^{1/N}$, temos que

$$\int_A \frac{dx}{|x-y|^{N-1}} = \int_{A\cap B_R(y)} \frac{dx}{|x-y|^{N-1}} + \int_{A\cap B_R^c(y)} \frac{dx}{|x-y|^{N-1}},$$

onde

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap B_R(y)} \frac{dx}{|x-y|^{N-1}} &\leq \int_{B_R(y)} \frac{dx}{|x-y|^{N-1}} \\
&= \int_0^R \int_{\partial B_t(y)} \frac{1}{|x-y|^{N-1}}\,dS\,dt \\
&= R\,|\partial B_1| \\
&= |A|^{1/N}|\partial B_1|,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap B_R^c(y)} \frac{dx}{|x-y|^{N-1}} &\leq \frac{1}{R^{N-1}} \int_{A\cap B_R^c(y)} dx \\
&= \frac{1}{R^{N-1}}|A\cap B_R^c(y)| \\
&= |A|^{1/N}\frac{|A\cap B_R^c(y)|}{|A|}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_A \frac{dx}{|x-y|^{N-1}} &\leq |A|^{1/N}\left(|\partial B_1| + \frac{|A\cap B_R^c(y)|}{|A|}\right)\\ &\leq |A|^{1/N}\left(|\partial B_1|+1\right)\\ &= C(N)\,|A|^{1/N}.\end{aligned}$$

Então, por (2.17), segue que

$$\begin{aligned}|A||C|/2 &\leq C(N)\,|A|^{1/N}\int_{B_1}|\nabla\bar{\omega}|(y)\,dy\\ &= C(N)\,|A|^{1/N}\int_{B_1}|\nabla\omega_+|(y)\,\chi_{\{0\leq\omega\leq 1/2\}}\,dy\\ &\leq C(N)\,|A|^{1/N}\left(\int_D|\nabla\omega_+|^2dx\right)^{1/2}|D|^{1/2}.\end{aligned}$$

Por fim, como $\int_{B_1}|\nabla\omega_+|^2\,dx \leq C_0$, tem-se que

$$|A|\,|C|/2 \leq C(N)|A|^{1/N}C_0^{1/2}|D|^{1/2},$$

então,

$$C_0|D| \geq \left(\frac{1}{2C(N)}\right)^2\left(|A|^{1-\frac{1}{N}}|C|\right)^2.$$

$\square$

A seguir, apresentamos um resultado para melhorar a oscilação por cima, afirmando que, se o conjunto de não positividade da solução ocupa uma porção significativa de B_1, então a oscilação por cima é reduzida numa bola menor.

Proposição 2.2.1. *Seja $v \leq 1$ solução fraca de (2.7) em B_2. Suponha que*

$$|B_1\cap\{v\leq 0\}| \geq \mu > 0.$$

Então,

$$\sup_{B_{1/2}} v \leq 1-\gamma,$$

com $\gamma\in(0,1)$ dependendo de μ, Λ e N.

Demonstração. Considere a sequência de funções truncadas,

$$\omega_k = 2^k(v-(1-2^{-k})).$$

Mostramos que existe $n\in\mathbb{N}$, tal que,

$$\int_{B_1}(\omega_n)_+^2dx \leq \delta^2,$$

sendo δ o mesmo do Lema 2.1.3. Note que, para qualquer k, tem-se que, $\omega_k \leq 1$. Além disso, se $\phi\in C_0^\infty(B_2)$, tal que, $\phi = 1$ em B_1, então, com a desigualdade energia, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_1}|\nabla(\omega_k)_+|^2dx &\leq \int_{B_2}|\nabla(\phi(\omega_k)_+)|^2dx\\ &\leq C\|\nabla\phi\|^2_{L^\infty(B_2)}\int_{B_2\cap\,\mathrm{supp}(\phi)}\omega_k^2\,dx\\ &\leq C\|\nabla\phi\|^2_{L^\infty(B_2)}|B_2\cap\mathrm{supp}(\phi)| = C_0,\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Perceba que, se $v \leq 0$, então

$$\begin{aligned} \omega_k &= 2^k v - 2^k(1 - 2^{-k}) \\ &\leq -2^k + 1 \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

isso significa que, $\{v \leq 0\} \subset \{\omega_k \leq 0\}$. Portanto,

$$\mu \leq |B_1 \cap \{v \leq 0\}| \leq |B_1 \cap \{\omega_k \leq 0\}|. \tag{2.18}$$

Suponha agora que,

$$\int_{B_1} (\omega_{k+1})_+^2 dx > \delta^2$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\omega_{k+1} = 2\omega_k - 1$, temos

$$\begin{aligned} |\{\omega_{k+1} \geq 0\} \cap B_1| &= |\{2\omega_k \geq 1\} \cap B_1| \\ &= \int_{B_1} \chi_{\{\omega_{k+1} \geq 0\} \cap B_1} dx \\ &\geq \int_{B_1} (\omega_{k+1})_+^2 dx \qquad (2.19) \\ &> \delta^2. \qquad (2.20) \end{aligned}$$

Daí, usando o Lema 2.2.1, temos o seguinte, se

$$\begin{aligned} A_k &= \{\omega_k \leq 0\} \cap B_1, \\ C_k &= \{\omega_k \geq 1/2\} \cap B_1, \\ D_k &= \{0 < \omega_k < 1/2\} \cap B_1, \end{aligned}$$

então, de (2.18) e (2.20)

$$\begin{aligned} |D_k| &\geq \frac{C_N}{C_0}(|C_k||A_k|^{1-\frac{1}{N}})^2 \\ &\geq \frac{C_N}{C_0}(\delta^2 \mu^{1-\frac{1}{N}})^2 \qquad (2.21) \\ &= \alpha > 0, \qquad (2.22) \end{aligned}$$

sendo que, α independe de k. De novo, usando o fato que, $\omega_{k+1} = 2\omega_k - 1$

$$(\{\omega_k \leq 0\} \cap B_1) \dot\cup (\{0 < \omega_k < 1/2\} \cap B_1) \subset \{\omega_k \leq 1/2\} \cap B_1 = \{\omega_{k+1} \leq 0\} \cap B_1.$$

Agora, usando (2.18) e (2.22), tem-se

$$\begin{aligned} |\{\omega_k \leq 0\} \cap B_1| &\geq |\{\omega_{k-1} \leq 0\} \cap B_1| + |\{0 < \omega_{k-1} < 1/2\} \cap B_1| \\ &\geq |\{\omega_{k-1} \leq 0\} \cap B_1| + \alpha \\ &\geq |\{\omega_{k-2} \leq 0\} \cap B_1| + 2\alpha \\ &\vdots \\ &\geq |\{\omega_0 \leq 0\} \cap B_1| + k\alpha \\ &\geq \mu + k\alpha. \end{aligned}$$

Claramente, isso falha para k suficientemente grande. Dessa forma, deve existir $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\int_{B_1} (\omega_{k_0+1})_+^2 \, dx \leq \delta^2.$$

O Lema 2.1.3 implica que $\omega_{k_0+1} \leq 1/2$ em $B_{1/2}$. Rescalonando de volta para v, obtemos

$$2^{k_0+1}(v - (1 - 2^{-(k_0+1)})) \leq \frac{1}{2}, \quad \text{em} \quad B_{1/2},$$

isto é,

$$\sup_{B_{1/2}} v \leq 1 - 2^{-(k_0+1)}.$$

Assim, $\gamma = 2^{-(k_0+1)}$. □

Em seguida, temos o Lema da Oscilação. Para qualquer conjunto aberto O, definimos

$$\operatorname{osc}_O u = \sup_O u - \inf_O u.$$

Lema 2.2.2. *Seja u uma solução fraca de* (2.7) *em B_2 onde A verifica* (2.8). *Então, existe $\lambda(\Lambda, N) < 1$, tal que*

$$\operatorname{osc}_{B_{1/2}} u \leq \lambda \operatorname{osc}_{B_2} u.$$

Demonstração. Considere

$$v(x) = \frac{2}{\operatorname{osc}_{B_2} u} \left(u(x) - \frac{\sup u + \inf u}{2} \right),$$

podemos assumir que $|B_1 \cap \{v \leq 0\}| \geq \mu$, para algum $\mu > 0$, do contrário, bastaria tomar $-v$. Então, $-1 \leq v \leq 1$, pois

$$u - \frac{\sup u + \inf u}{2} \leq \sup u - \frac{\sup u + \inf u}{2},$$

o que implica

$$v \leq \frac{2}{\operatorname{osc}_{B_2} u} \left(\sup u - \frac{\sup u + \inf u}{2} \right) = 1.$$

De forma análoga, mostra-se que $v \geq -1$. Com isso, podemos aplicar a Proposição 2.2.1 em v, de modo que

$$\sup_{B_{1/2}} v \leq 1 - \gamma$$

e, além disso,

$$-1 \leq \inf_{B_2} v \leq \inf_{B_{1/2}} v,$$

ou seja,

$$-\inf_{B_{1/2}} v \leq 1.$$

Daí, temos que

$$\operatorname{osc}_{B_{1/2}} v \leq 2 - \gamma.$$

Por fim, para quaisquer $x, y \in B_{1/2}$, temos

$$\frac{2}{\operatorname{osc}_{B_2} u} |u(x) - u(y)| = |v(x) - v(y)| \leq 2 - \gamma$$

e assim,
$$\operatorname{osc}_{B_{1/2}} u \leq (1-\gamma/2) \operatorname{osc}_{B_2} u.$$

Assim, para $\lambda = (1-\gamma/2)$ temos o resultado.

□

2.3 Teorema de De Giorgi

Nesta seção, continuando as ideias das notas de A. Vasseur em [1], vemos um resultado sobre a regularidade de soluções para equações elípticas desenvolvido por De Giorgi, que surge como uma chave especial na resolução do 19º problema de Hilbert. Mais precisamente, vamos obter a regularidade local C^α de soluções, sendo C^α o espaço das funções Hölder contínuas, e mais a frente, usamos a teoria de Schauder para obtermos a suavidade dos minimizantes de (2.1).

Seja $\alpha \in (0,1)$, dizemos que u é Hölder contínua em Ω com expoente α ou $u \in C^\alpha(\Omega)$, se
$$|u(x)-u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \quad (x, y \in \Omega),$$
para alguma constante C. Além disso, u é localmente Hölder contínua se para cada $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$, $u \in C^\alpha(\tilde{\Omega})$.

Definição 2.3.1. *Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é limitada e Hölder contínua com expoente $\alpha \in (0,1)$, definimos a norma*
$$\|u\|_{C^\alpha(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + [u]_{C^\alpha(\Omega)}$$
onde
$$[u]_{C^\alpha(\Omega)} = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Teorema 2.3.1. *Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca de* (2.7) *com A satisfazendo* (2.8). *Então, $u \in C^\alpha(\tilde{\Omega})$ para $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$, em que*
$$\|u\|_{C^\alpha(\tilde{\Omega})} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

A constante α depende de Λ e N. A constante C depende de Λ, N, Ω e $\tilde{\Omega}$.

Demonstração. Vamos usar o Lema 2.2.2. Dado $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$, seja $d = \operatorname{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega)$ e tome $x_0 \in \tilde{\Omega}$. Defina as seguintes funções rescalonadas,
$$\bar{u}_1(y) = u(x_0 + dy/2) \text{ e } \bar{u}_n(y) = \bar{u}_{n-1}(y/4).$$

Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\bar{u}_n$ é solução de (2.7) em B_2, com matriz de difusão
$$A_n(y) = A(x_0 + dy/(2 \cdot 4^{n-1})),$$

pois, para $\phi \in C_0^\infty(B_2)$, temos

$$
\begin{aligned}
& \int_{B_2} \nabla \phi^T(y) A_n(y) \nabla \bar{u}_n(y)\, dy \\
= & \int_{B_2} \frac{d}{2\cdot 4^{n-1}} \nabla \phi^T(y) A(x_0 + dy/(2\cdot 4^{n-1})) \nabla u(x_0 + dy/(2\cdot 4^{n-1}))\, dy \\
= & \int_{B_{d/4^{n-1}}(x_0)} \frac{d}{2\cdot 4^{n-1}} \nabla \phi^T((z-x_0)2\cdot 4^{n-1}/d) A(z) \nabla u(z) \left(\frac{2\cdot 4^{n-1}}{d}\right)^N dz \\
= & \left(\frac{2\cdot 4^{n-1}}{d}\right)^{N-2} \int_{B_{d/4^{n-1}}(x_0)} \nabla \hat{\phi}^T(z) A(z) \nabla u(z)\, dz \\
= & \ 0,
\end{aligned}
$$

onde $\hat{\phi}(z) = \phi((z-x_0)2\cdot 4^{n-1}/d)$. Aplicando o Lema de Oscilação (Lema 2.2.2) recursivamente em $\bar{u}_n$, obtemos

$$
\begin{array}{rcl}
\operatorname{osc}_{B_{1/2}} \bar{u}_1(y) \leq \lambda \operatorname{osc}_{B_2} \bar{u}_1(y) & \Leftrightarrow & \operatorname{osc}_{B_{d/4}(x_0)} \leq \lambda \operatorname{osc}_{B_d(x_0)} u \\
\operatorname{osc}_{B_{1/2}} \bar{u}_2(y) \leq \lambda \operatorname{osc}_{B_2} \bar{u}_2(y) & \Leftrightarrow & \operatorname{osc}_{B_{d/4^2}(x_0)} \leq \lambda \operatorname{osc}_{B_{d/4}(x_0)} u \\
& \vdots & \\
\operatorname{osc}_{B_{1/2}} \bar{u}_n(y) \leq \lambda \operatorname{osc}_{B_2} \bar{u}_n(y) & \Leftrightarrow & \operatorname{osc}_{B_{d/4^n}(x_0)} \leq \lambda \operatorname{osc}_{B_{d/4^{n-1}}(x_0)} u.
\end{array}
$$

Isso implica que,

$$\operatorname{osc}_{B_{d/4^n}(x_0)} u \leq \lambda^n \operatorname{osc}_{B_d(x_0)} u.$$

Assim, para qualquer $x \in B_{d/4^n}(x_0)$, tem-se

$$|u(x_0) - u(x)| \leq \operatorname{osc}_{B_{d/4^n}(x_0)} u \leq \lambda^n \operatorname{osc}_{B_d(x_0)} u \leq \lambda^n 2 \|u\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.23}$$

Por fim, dado $x \in \tilde{\Omega}$, vamos considerar dois casos,

Caso I: $|x_0 - x| < d$.

Tome $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$4^{-k-1} d \leq |x_0 - x| < 4^{-k} d, \tag{2.24}$$

então, definindo $\alpha \in (0,1)$, de modo que

$$4^{-\alpha} = \lambda,$$

obtemos

$$\alpha = -\frac{\ln \lambda}{2\ln 2}.$$

Portanto, por (2.23) e (2.24)

$$|u(x_0) - u(x)| \leq \lambda^k 2 \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \frac{4^{-k\alpha} 4^{-\alpha} d^\alpha}{4^{-\alpha} d^\alpha}\, 2\, \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{2}{d^\alpha} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} |x_0 - x|^\alpha.$$

Caso II: $|x_0 - x| \geq d$.

Neste caso
$$d^\alpha \leq |x_0 - x|^\alpha,$$
logo,
$$|u(x_0) - u(x)| \leq \frac{d^\alpha}{d^\alpha} 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{d^\alpha}{d^\alpha} 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{2}{d^\alpha}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}|x_0 - x|^\alpha.$$
Perceba que as estimativas não dependem de x_0. Assim, $u \in C^\alpha(\tilde{\Omega})$.

Por fim, se
$$\sup_{x,y \in \tilde{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} = \mathrm{M},$$
pelo Corolário 2.1.1, temos o seguinte
$$\begin{aligned} \|u\|_{C^\alpha(\tilde{\Omega})} &= \|u\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} + \mathrm{M} \\ &\leq \frac{d^{-N/2}}{\delta}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{M}{\|u\|_{L^2(\Omega)}}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C\,\|u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$
□

2.4 Suavidade de Minimizantes Locais

Nesta seção, mostramos a suavidade dos minimizantes do funcional energia convexo (2.1) que se traduz no 19º problema de Hilbert. Usando o Lema 2.1.1, vamos provar que qualquer minimizante do funcional (2.1) em $H^1(\Omega)$, é tal que, $u = \partial_i\omega \in H^1$ e é solução fraca de (2.6). Portanto, pelo Teorema de De Giorgi 2.3.1 mostra-se que $\nabla\omega \in C^\alpha$.

Relembrando, uma solução fraca para (2.3), satisfaz para qualquer $\phi \in H_0^1(\Omega)$
$$\int_\Omega DF(\nabla\omega) \cdot \nabla\phi \, dx = 0. \tag{2.25}$$
Já uma solução fraca para (2.6), significa que para qualquer $\phi \in H_0^1(\Omega)$, tem-se
$$\int_\Omega \nabla\phi^T D^2F(\nabla\omega)\nabla u \, dx = 0. \tag{2.26}$$
Primeiro, trabalhamos com uma versão localizada em uma bola fixada. Considere a função não negativa η com suporte compacto em B_2, e igual a 1 em B_1.

Lema 2.4.1. *Seja $\omega \in H^1(B_3)$ uma solução fraca de* (2.3)*. Então, $\omega \in H^2(B_1)$, e $u = \partial_i\omega$ é solução fraca para* (2.6)*, para qualquer $i = 1, \ldots, N$.*

Demonstração. Seja $\phi = T_{-h_i}(\eta^2 T_h\omega) \in H_0^1(B_2)$, sendo $T_{-h_i}(\cdot)$ o quociente de diferenças, veja a seção A.5. Por hipótese, ω é solução fraca de (2.3), daí, usando (A.5), (A.4) e (A.6) respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B_2} \nabla\phi DF(\nabla\omega)\,dx \\
&= \int_{B_2} (T_{-h_i}[\eta^2 T_{h_i}(\nabla\omega)] + T_{-h_i}[2\eta(T_{h_i}\omega)\nabla\eta]) \cdot DF(\nabla\omega)\,dx \\
&= \int_{B_2} T_{-h_i}(\eta^2 T_h[\nabla\omega]) \cdot DF(\nabla\omega)\,dx + \int_{B_2} T_{-h_i}(2\eta[T_{h_i}\omega]\nabla\eta) \cdot DF(\nabla\omega)\,dx \\
&= -\int_{B_2} \eta^2 T_{h_i}[\nabla\omega] \cdot T_{h_i}(DF(\nabla\omega))\,dx - \int_{B_2} 2\eta[T_{h_i}\omega]\nabla\eta \cdot T_{h_i}(DF(\nabla\omega))\,dx \\
&= -\int_{B_2} \eta\nabla T_{h_i}(\omega)\left[\int_0^1 D^2F(\nabla\omega(x) + t(\nabla\omega(x+he_i) - \nabla\omega(x)))\,dt\right]\eta\nabla T_{h_i}(\omega)\,dx \\
&- 2\int_{B_2} \nabla\eta[T_{h_i}(\omega)]\left[\int_0^1 D^2F(\nabla\omega(x) + t(\nabla\omega(x+he_i) - \nabla\omega(x)))\,dt\right]\eta\nabla T_{h_i}(\omega)\,dx.
\end{aligned}$$

Então, pela propriedade (2.2),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Lambda}\int_{B_2} \eta^2|\nabla(T_{h_i}\omega)|^2 dx \\
\leq\ & \int_{B_2} \eta^2|\nabla(T_{h_i}\omega)|^2\left[\int_0^1 D^2F(\nabla\omega(x) + t(\nabla\omega(x+he_i) - \nabla\omega(x)))\,dt\right]dx \\
=\ & -2\int_{B_2} (\nabla\eta)(T_{h_i}\omega)\left[\int_0^1 D^2F(\nabla\omega(x) + t(\nabla\omega(x+he_i) - \nabla\omega(x)))\,dt\right]\eta\nabla(T_{h_i}\omega)dx \\
\leq\ & 2\Lambda\int_{B_2} |\nabla\eta| \cdot |T_{h_i}\omega| \cdot |\eta| \cdot |\nabla(T_{h_i}\omega)|\,dx \\
\leq\ & 2\Lambda\left\{\int_{B_2} |\nabla\eta|^2|T_{h_i}\omega|^2 dx\right\}^{1/2}\left\{\int_{B_2} \eta^2|\nabla(T_{h_i}\omega)|^2 dx\right\}^{1/2},
\end{aligned}$$

isso implica que

$$\int_{B_2} \eta^2|\nabla(T_{h_i}\omega)|^2 dx \leq 4\Lambda^4\int_{B_2} |\nabla\eta|^2|T_{h_i}\omega|^2 dx.$$

Em consequência, pelo Teorema A.5.1, temos uma limitação uniforme de $T_{h_i}(\nabla\omega)$ em $L^2(B_1)$ para todo $0 < |h| < 1$, pois

$$\int_{B_1} |T_{h_i}(\nabla\omega)|^2 dx \leq \int_{B_2} \eta^2|\nabla(T_{h_i}\omega)|^2 dx \leq 4\Lambda^2\int_{B_2} |\nabla\eta|^2|T_{h_i}\omega|^2 dx \leq C\|\omega\|^2_{H^1(B_3)},$$

assim, pelo Teorema A.5.2, $\partial_i\omega \in H^1(B_1)$. Para qualquer $\phi \in H^1_0(B_1)$, considere a função teste $T_{-h_i}\phi$, então, como ω é solução de (2.25), utilizando o Lema A.5.1 temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B_1} \nabla(T_{-h_i}\phi)DF(\nabla\omega)\,dx \\
&= \int_{B_1} T_{-h_i}(\nabla\phi)DF(\nabla\omega)\,dx \\
&= -\int_{B_1} \nabla\phi\, T_{h_i}(DF(\nabla\omega))\,dx. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Ainda pelo Lema A.5.1 e a condição de elipticidade (2.2), $T_{h_i}(DF(\nabla\omega))$ é uniformemente limitada em $L^2(B_1)$, ou seja, $T_{h_i}\partial_j F(\nabla\omega)$ é uniformemente limitada em $L^2(B_1)$ para qualquer $0 < |h| < 1$. Assim, pela reflexividade do espaço L^2

$$T_{h_{ik}}(\partial_j F(\nabla\omega)) \rightharpoonup v_i, \text{ fracamente em } L^2(B_1)$$

para alguma subsequência $h_k \to 0$, quando $k \to \infty$. Com isso, usando (A.4) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} \partial_j F(\nabla\omega)\partial_i\phi\, dx &= \lim_{h_k\to 0}\int_{B_1} \partial_j F(\nabla\omega)T_{h_{ik}}\phi\, dx \\
&= -\lim_{h_k\to 0}\int_{B_1} \phi T_{-h_{ik}}\partial_j F(\nabla\omega)\, dx \\
&= -\int_{B_1} v_i\phi\, dx,
\end{aligned}$$

então v_i é a derivada fraca de $\partial_j F(\nabla\omega)$, ou seja,

$$v_i = \partial_i(\partial_j F(\nabla\omega)) = \nabla(\partial_j F(\nabla\omega)) \cdot \nabla(\partial_i\omega).$$

Portanto, $T_{h_i}(DF(\nabla\omega))$ converge fracamente em $L^2(B_1)$ para $\partial_i(DF(\nabla\omega)) = D^2F(\nabla\omega)\nabla(\partial_i\omega)$, daí (2.27) converge para

$$\int_{B_1} \nabla^T\phi D^2F(\nabla\omega)\nabla(\partial_i\omega)\, dx = 0.$$

Dessa forma, finalizamos a prova. $\square$

Proposição 2.4.1. *Seja $\omega \in H^1(\Omega)$ solução fraca para (2.3). Então, para qualquer $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$, $\omega \in H^2(\tilde{\Omega})$, e para qualquer $i = 1, ..., N$, $u = \partial_i\omega$ é solução fraca para (2.6).*

Demonstração. Note que, $\omega \in H^2(\tilde{\Omega})$, veja [[11], pág. 459, Teorema 1]. Fazemos um reescalonamento para usar o Lema 2.4.1. Denote $d = \text{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega)$, e defina

$$\tilde{\omega}_x(y) = \omega(x + \frac{d}{3}y),$$

para qualquer $x \in \tilde{\Omega}$. Note que, $\tilde{\omega}_x \in H^1(B_3)$, pois, para qualquer $\phi \in C_0^\infty(B_3)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_3} \tilde{\omega}_x(y)\, \partial_i\phi(y)\, dy &= \int_{B_{d(x)}} \omega(z)\, \partial_i\hat{\phi}(z)\, \frac{d}{3}\left(\frac{3}{d}\right)^N dz \\
&= -\int_{B_{d(x)}} v(z)\, \hat{\phi}(z)\, \frac{d}{3}\left(\frac{3}{d}\right)^N dz \\
&= -\int_{B_3} \tilde{v}_x(y)\, \phi(y)\, dy,
\end{aligned}$$

sendo, $\hat{\phi}(z) = \phi((z-x)\,3/d)$ e $\tilde{v}_x(y) = \dfrac{d}{3}v(x + dy/3)$, onde v é a derivada fraca de ω. Além disso, usando também mudança de variável, é de imediato que, $\tilde{v}_x \in L^2(B_3)$. Temos também que, $\tilde{\omega}_x$ é solução de (2.3) para $\tilde{F}(y) = F(3y/d)$. Pelo teorema da partição da unidade, para qualquer $\phi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega})$, podemos decompor como,

$$\phi = \sum_{i=1}^m \phi_i$$

em que, $\phi_i \in C_0^\infty(B_{d/3}(x_i))$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\Omega}} \nabla\phi^T D^2F(\nabla\omega)\nabla u\,dx &= \sum_{i=1}^m \int_{B_{d/3}(x_i)} \nabla\phi_i^T D^2F(\nabla\omega)\nabla u\,dx \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{B_1} \nabla\tilde{\phi}_i D^2\tilde{F}(\nabla\tilde{\omega}_{x_i})\nabla\tilde{u}_{x_i} dy \\ &= 0,\end{aligned}$$

onde, $\tilde{\phi}_i(y) = \phi_i(x_i + dy/3)$ e $\tilde{u}_{x_i}(y) = u(x_i + dy/3)$. $\square$

Finalmente, chegamos no principal objetivo deste capítulo. Através do método desenvolvido por De Giorgi, apresentado nas seções anteriores, foi possível resolver o 19º problema de Hilbert utilizando a estimativa interior de Schauder que diz o seguinte: se ω é solução de uma equação uniformemente elíptica linear na forma não divergente

$$Tr(A(x)\cdot D^2\omega) = f(x),$$

onde os coeficientes da matriz A e f são C^α, então ω é localmente $C^{2,\alpha}$, sendo que $0 < \alpha < 1$.

Temos no Teorema a seguir a resposta para o 19º problema de Hilbert.

Teorema 2.4.1. *Qualquer minimizante local $\omega \in H^1(\Omega)$ de* (2.1) *está em $C^\infty(\Omega)$.*

Demonstração. Perceba que a equação (2.3) pode ser escrita na forma não divergente

$$Tr(D^2F(\nabla\omega)\cdot D^2\omega) = 0. \tag{2.28}$$

Então, pela Proposição 2.4.1, $\partial_i\omega$ é solução de (2.6), e consequentemente é solução da equação (2.7). Logo, pelo Teorema de De Giorgi 2.3.1, $\partial_i\omega$ é localmente C^α, ou seja, $\nabla\omega \in C^\alpha$, assim, $D^2F(\nabla\omega)$ também é C^α. Note que, podemos reescrever a equação (2.28) na forma não divergente da seguinte maneira,

$$Tr(A(x)\cdot D^2\omega) = 0,$$

para uma matriz A elíptica com coeficientes em C^α_{loc}. Então, pela Teoria de Schauder, $\omega \in C^{2,\alpha}$. Derivando a equação (2.28), temos

$$Tr(D^2F(\nabla\omega)\cdot D^2\partial_i\omega) = -Tr((D^3F(\nabla\omega)\cdot\nabla\partial_i\omega)\cdot D^2\omega),$$

como o segundo termo é C^α_{loc}, usamos novamente a Teoria de Schauder para a equação

$$Tr(A(x)\cdot D^2\partial_i\omega) = f(x).$$

Portanto, $\partial_i\omega \in C^{2,\alpha}$, ou seja, $\omega \in C^{3,\alpha}_{loc}$. Continuando com esse argumento, teremos finalmente que $\omega \in C^\infty(\Omega)$. $\square$

Capítulo 3

Método de De Giorgi para Equações Parabólicas

O objetivo desse capítulo é analisar a regularidade Hölder para soluções de certas equações parabólicas. Para isso, fazemos uso das ferramentas de De Giorgi, de maneira similar ao caso Elíptico no capítulo anterior.

Considere a equação,

$$\partial_t u - \operatorname{div}_x(A(t,x)\nabla_x u) = 0, \quad \text{em} \ (0,T)\times\Omega, \tag{3.1}$$

em que, $T > 0$, e A é uma matriz simétrica verificando

$$\frac{1}{\Lambda} I \leq A(t,x) \leq \Lambda I, \quad \text{para todo} \ (t,x) \in (0,T)\times\Omega. \tag{3.2}$$

Dizemos que uma função u é solução fraca da equação (3.1), se $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $\nabla_x u \in L^2(0,T;\Omega)$, $\partial_t u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, e para toda função teste $\phi \in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)$, tem-se

$$-\int_{(0,T)\times\Omega} u\partial_t\phi + \int_{(0,T)\times\Omega} \nabla^T\phi A \nabla_x u = 0,$$

em que, o vetor $\nabla_x u$ são as derivadas de u com respeito às variáveis espaciais.

3.1 Primeiro Lema de De Giorgi

Nesta seção, introduzimos uma versão do primeiro Lema de De Giorgi para a equação parabólica (3.1). Defina $Q_r = (-r,0)\times B_r$.

Vamos denotar por simplicidade $\nabla_x u = \nabla u$ para funções $u(t,x)$ definidas no tempo e no espaço.

Lema 3.1.1. *Existe $\delta > 0$, tal que, para qualquer solução u de (3.1) em $(-1,0)\times B_1$, temos a seguinte propriedade. Se*

$$\int_{Q_1} u_+^2 \, dx\, dt \leq \delta,$$

então
$$u_+ \leq \frac{1}{2} \quad \text{em} \ \ (-1/2, 0) \times B(1/2).$$

Demonstração. Considere a sequência

$$T_k = -\frac{1}{2}(1 + 2^{-k}),$$

e com isso, defina a sequência de conjuntos de níveis no tempo e no espaço

$$\tilde{Q}_k = (T_k, 0) \times \tilde{B}_k,$$

em que, $\tilde{B}_k$ é a bola definida o primeiro lema de De Giorgi do capítulo anterior, centrada na origem e raio $\frac{1}{2}(1 + 2^{-k})$. Definimos a sequência de energia

$$U_k = \int_{\tilde{Q}_k} |u_k|^2 \, dx \, dt,$$

com

$$u_k = (u - C_k)_+, \quad \text{e}$$
$$C_k = \frac{1}{2}(1 - 2^{-k}).$$

Vamos tomar a mesma família de funções teste definidas no espaço: ϕ_k não negativa tal que

$$\begin{aligned} \phi_k &= 1 \ \text{em} \ \tilde{B}_k, \ \text{e} \\ \phi_k &= 0 \ \text{em} \ \tilde{B}^c_{k-1}, \end{aligned}$$

e também $|\nabla \phi_k| \leq C2^k$.

Então, multiplicando a equação (3.1) por $\phi^2_{k+1} u_{k+1}$, e integrando no espaço e no tempo $(s, t) \times B_1$, para

$$T_k \leq s \leq T_{k+1} \leq t \leq 0,$$

temos a desigualdade

$$\int_{B_1} \phi^2_{k+1}(x) u^2_{k+1}(x, t) \, dx \leq \int_{B_1} \phi^2_{k+1}(x) u^2_{k+1}(x, s) \, dx - \int_s^t \int_{B_1} \nabla(\phi^2_{k+1} u_{k+1}) A \nabla u_{k+1} \, dx \, d\tau,$$

já que,

$$2 \int_{B_1} \int_s^t \phi^2_{k+1} u_{k+1} \partial_t u_{k+1} \, d\tau \, dx = \int_{B_1} \phi^2_{k+1}(x) u^2_{k+1}(x, t) \, dx - \int_{B_1} \phi^2_{k+1}(x) u^2_{k+1}(x, s) \, dx.$$

Então, usando a estimativa de energia (2.12) em x do capítulo anterior , e a condição (3.2), tem-se

$$\begin{aligned} &\int_{B_1} \phi^2_{k+1}(x) u^2_{k+1}(x, t) \, dx + \frac{1}{\Lambda} \int_s^t \int_{B_1} |\nabla(\phi_{k+1} u_{k+1})|^2 \, dx \, d\tau \\ \leq \ &\int_{B_1} \phi^2_{k+1}(x) u^2_{k+1}(x, s) \, dx + \Lambda \int_s^t \int_{B_1} |\nabla \phi_{k+1}|^2 |u_{k+1}|^2 \, dx \, d\tau. \end{aligned}$$

Como cada termo das integrais é não negativo, ainda vale a desigualdade seguinte

$$\begin{aligned}&\int_{B_1} \phi_{k+1}^2(x)u_{k+1}^2(x,t)\,dx + \frac{1}{\Lambda}\int_{T_{k+1}}^{t}\int_{B_1} |\nabla(\phi_{k+1}u_{k+1})|^2\,dx\,d\tau \\ \leq\;& 2^{k+2}\int_{T_k}^{T_{k+1}}\int_{B_1} \phi_{k+1}^2(x)u_{k+1}^2(x,s)\,dx\,d\tau + \Lambda\int_{T_k}^{0}\int_{B_1} |\nabla\phi_{k+1}|^2|u_{k+1}|^2\,dx\,d\tau.\end{aligned}$$

A estimativa acima vale para qualquer $s \in [T_k, T_{k+1}]$, então pelo teorema do valor médio para integrais no intervalo $[T_k, T_{k+1}]$, ainda vale a desigualdade abaixo

$$\begin{aligned}&\int_{B_1} \phi_{k+1}^2(x)u_{k+1}^2(x,t)\,dx + \frac{1}{\Lambda}\int_{T_{k+1}}^{t}\int_{B_1} |\nabla(\phi_{k+1}u_{k+1})|^2\,dx\,d\tau \\ \leq\;& 2^{k+2}\int_{T_k}^{T_{k+1}}\int_{B_1} \phi_{k+1}^2(x)u_{k+1}^2(x,\tau)\,dx\,d\tau + \Lambda\int_{T_k}^{0}\int_{B_1} |\nabla\phi_{k+1}|^2|u_{k+1}|^2\,dx\,d\tau.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Portanto, de (3.3) obtemos a estimativa de energia a seguir

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{k+1} &= \sup_{t\in[T_{k+1},0]}\int_{B_1}(\phi_{k+1}u_{k+1})^2dx + \int_{T_{k+1}}^{0}\int_{B_1}|\nabla(\phi_{k+1}u_{k+1})|^2dx\,d\tau \\ &\leq \Lambda\, 2^{k+2}\int_{T_k}^{0}\int_{B_1}\phi_{k+1}^2|u_{k+1}|^2dx\,d\tau + \Lambda^2\int_{T_k}^{0}\int_{B_1}|\nabla\phi_{k+1}|^2|u_{k+1}|^2dx\,d\tau \\ &\leq \Lambda 2^{k+2}\int_{T_k}^{0}\int_{\tilde{B}_k}|u_{k+1}|^2dx\,d\tau + \Lambda^2 C 2^{k+1}\int_{T_k}^{0}\int_{\tilde{B}_k}|u_{k+1}|^2dx\,d\tau \\ &\leq 2^k(2^2\Lambda + \Lambda^2 C2)\int_{T_k}^{0}\int_{\tilde{B}_k}|u_k|^2dx\,d\tau \\ &= BC^kU_k,\end{aligned}$$

a constante B depende de Λ e N. Pela definição de $\mathcal{E}_{k+1}$, temos que, $\mathcal{E}_{k+1}$ controla $\phi_{k+1}u_{k+1}$ em $L^\infty(T_{k+1},0;L^2(B_1))$ e, em decorrência da Desigualdade de Sobolev, $\phi_{k+1}u_{k+1}$ é também controlado em $L^2(T_{k+1},0;L^{\frac{2N}{N-2}}(B_1))$ por $\mathcal{E}_{k+1}$, pois

$$\begin{aligned}\|\phi_{k+1}u_{k+1}\|^2_{L^2(T_{k+1},0;L^{\frac{2N}{N-2}}(B_1))} &= \int_{T_{k+1}}^{0}\|\phi_{k+1}u_{k+1}(t)\|^2_{L^{\frac{2N}{N-2}}(B_1)}dt \\ &\leq C\int_{T_{k+1}}^{0}\|\nabla(\phi_{k+1}u_{k+1}(t))\|^2_{L^2(B_1)}\,dt \\ &\leq C\mathcal{E}_{k+1}.\end{aligned}$$

Por meio de interpolação, obtemos a seguinte estimativa para $(\phi_{k+1}u_{k+1})$

$$\begin{aligned}\|\phi_{k+1}u_{k+1}\|_{L^{\frac{2(2+N)}{N}}(\tilde{Q}_{k+1})} &\leq \|\phi_{k+1}u_{k+1}\|^{1-\theta}_{L^\infty(T_{k+1},0;L^2(B_1))}\cdot\|\phi_{k+1}u_{k+1}\|^{\theta}_{L^2(T_{k+1},0;L^{\frac{2N}{N-2}}(B_1))} \\ &\leq (1-\theta)\|\phi_{k+1}u_{k+1}\|_{L^\infty(T_{k+1},0;L^2(B_1))} + \theta\|\phi_{k+1}u_{k+1}\|_{L^2(T_{k+1},0;L^{\frac{2N}{N-2}}(B_1))} \\ &\leq \|\phi_{k+1}u_{k+1}\|_{L^\infty(T_{k+1},0;L^2(B_1))} + \|\phi_{k+1}u_{k+1}\|_{L^2(T_{k+1},0;L^{\frac{2N}{N-2}}(B_1))},\end{aligned}$$

assim,

$$\|\phi_{k+1}u_{k+1}\|^2_{L^{\frac{2(2+N)}{N}}(\tilde{Q}_{k+1})}$$

$$\leq 4\left\{ \|\phi_{k+1}u_{k+1}\|^2_{L^\infty(T_{k+1},0;L^2(B_1))} + \|\phi_{k+1}u_{k+1}\|^2_{L^2(T_{k+1},0;L^{\frac{2N}{N-2}}(B_1))} \right\}$$
$$\leq 4\left\{\mathcal{E}_{k+1} + C\mathcal{E}_{k+1}\right\}$$
$$\leq C\mathcal{E}_{k+1}.$$

Portanto, temos a estimativa seguinte

$$\begin{aligned}
U_{k+1} &= \int_{\tilde{Q}_{k+1}} |u_{k+1}|^2\,dx\,dt \\
&= \int_{\tilde{Q}_{k+1}} |u_{k+1}|^2\chi_{\{u_{k+1}>0\}}\,dx\,dt \\
&= \int_{\tilde{Q}_{k+1}} |u_{k+1}|^2\chi_{\{u_k>2^{-(k+2)}\}}\,dx\,dt \\
&\leq \left\{\int_{\tilde{Q}_{k+1}} |u_{k+1}|^{\frac{2(N+2)}{N}}\,dx\,dt\right\}^{\frac{N}{N+2}} |\{u_k^2 > 2^{-(k+2)}\}\cap\tilde{Q}_{k+1}|^{\frac{2}{2+N}} \\
&\leq C\mathcal{E}_{k+1}|\{u_k^2 > 2^{-2(k+2)}\}\cap\tilde{Q}_{k+1}|^{\frac{2}{2+N}} \\
&\leq \mathcal{E}_{k+1}\left\{2^{2(k+2)}\int_{\tilde{Q}_{k+1}} |u_{k+1}|^2\,dx\,dt\right\}^{\frac{2}{2+N}} \\
&\leq BC^kU_k^{1+\frac{2}{2+N}}.
\end{aligned}$$

Então, novamente pela Proposição B.1.1, existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno, de forma que, se $U_0 \leq \delta$, tem-se

$$\lim_{k\to\infty} U_k = 0.$$

Isso significa que

$$u_+ \leq \frac{1}{2} \quad \text{em} \ (-1/2, 0)\times B_{1/2}.$$

$\square$

3.2 Segundo Lema de De Giorgi

Nesta seção, vamos estabelecer o Lema da Oscilação para o caso parabólico. O caminho até lá, é feito de forma parecida ao do capítulo anterior. Mostremos de início a desigualdade isoperimétrica para a equação (3.1). Defina o cilíndro $\tilde{Q} = (-3/2, -1)\times B_1$.

Lema 3.2.1. *Existe $\alpha > 0$, tal que, para qualquer solução u de (3.1) em Q_2, com A satisfazendo (3.2), com $u \leq 1$, temos o seguinte. Considere os conjuntos,*

$$\begin{aligned}
A &= \{u \geq 1/2\}\cap Q_1 \\
C &= \{u \leq 0\}\cap\tilde{Q} \\
D &= \{0 < u < 1/2\}\cap(Q_1\cup\tilde{Q}).
\end{aligned}$$

Então, se $|A| \geq \delta$ e $|C| \geq |\tilde{Q}|/2$, tem-se

$$|D| \geq \alpha.$$

Demonstração. Por contradição, vamos supor que o lema é falso. Então, deve existir uma sequência de funções u_k satisfazendo as hipóteses do Lema 3.2.1, e

$$\begin{aligned} |A_k| &= |\{u_k \geq 1/2\} \cap Q_1| \geq \delta \\ |C_k| &= |\{u_k \leq 0\} \cap \tilde{Q}| \geq \frac{|\tilde{Q}|}{2} \\ |D_k| &= |\{0 < u_k < 1/2\} \cap (Q_1 \cup \tilde{Q})| \leq \frac{1}{k}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Considere uma função cutoff ϕ em x com suporte compacto em B_2 e igual a 1 em B_1. Seja $\phi^2 v_k$, com $v_k = (u_k)_+$. Então, para $-2 < s < t < 0$, a estimativa de energia (2.12) nos garante que

$$\begin{aligned} &\int_{B_2} \phi^2(x) v_k^2(x,t)\, dx + \frac{1}{\Lambda} \int_s^t \|\nabla(\phi v_k)\|^2_{L^2(B_2)}\, d\tau \\ \leq\ & \int_{B_2} \phi^2(x) v_k^2(x,s)\, dx + \Lambda \int_s^t \int_{B_2} |\nabla \phi|^2 |v_k|^2\, dx\, d\tau \\ \leq\ & |B_2| + \Lambda |B_2| (t-s) \sup_{B_2} |\nabla \phi|. \end{aligned}$$

Assim, tomando $s = -2$ e $t = 0$, tem-se que

$$\int_{-2}^0 \|\nabla(\phi v_k)\|^2_{L^2(B_2)}\, dt$$

é uniformemente limitada. Como

$$\int_{-2}^0 \|\phi v_k\|^2_{L^2(B_2)}\, dt$$

também é uniformemente limitada, já que $|v_k| \leq 1$, concluímos que (ϕv_k) é uniformemente limitada em $L^2(-2,0;H^1(B_2))$. Com isso, podemos limitar uniformemente $\partial_t(\phi v_k)$ em $L^1(-2,0;H^{-1}(B_2))$. Utilizando o Teorema de Aubin Lions B.1.1 a sequência ϕv_k possui uma subsequência que converge em L^2 para ϕv.

Usando a desigualdade de Markov, tem-se para qualquer $\varepsilon > 0$

$$|\{|v_k - v| \geq \varepsilon\} \cap (-2,0) \times B_1| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{[-2,0]\times B_1} |v_k - v|,$$

como o termo do lado direito tende a 0, quando k tende a ∞, temos

$$\lim_{k\to\infty} |\{|v_k - v| \geq \varepsilon\} \cap (-2,0) \times B_1| = 0. \tag{3.5}$$

Assim, visto que

$$\{\varepsilon \leq v \leq 1/2 - \varepsilon\} \subset \{|v - v_k| \geq \varepsilon\} \cup \{0 < v_k < 1/2\},$$

então,

$$\begin{aligned} |\{\varepsilon \leq v \leq 1/2 - \varepsilon\} \cap (Q_1 \cup \tilde{Q})| &\leq |\{|v - v_k| \geq \varepsilon\} \cap (Q_1 \cup \tilde{Q})| \\ &+ |\{0 < v_k < 1/2\} \cap (Q_1 \cup \tilde{Q})|. \end{aligned}$$

Portanto, por (3.5) e (3.4), obtemos

$$|\{\varepsilon \leq v \leq 1/2 - \varepsilon\} \cap (Q_1 \cup \tilde{Q})| = 0.$$

Note que, isto é verdade para qualquer $\varepsilon > 0$, em consequência

$$|\{0 < v < 1/2\} \cap (Q_1 \cup \tilde{Q})| = 0. \tag{3.6}$$

Agora, perceba que $\nabla v(t, \cdot) \in L^2(B_1)$ para quase todo $t \in (-2, 0)$, e por (3.6) temos

$$|\{0 < v(t, \cdot) < 1/2\} \cap B_1| = 0,$$

para quase todo $t \in (-\frac{3}{2}, 0)$. Então, pela desigualdade isoperimétrica de De Giorgi para o caso estacionário (Lema 2.2.1), segue que, para quase todo $t \in (-\frac{3}{2}, 0)$

$$\begin{aligned} v(t, \cdot) &\leq 0 \quad \text{em} \quad B_1, \ \text{ou} \\ v(t, \cdot) &\geq \frac{1}{2} \quad \text{em} \quad B_1. \end{aligned}$$

Em consequência, para quase todo $t \in (-\frac{3}{2}, 0)$, somente uma das relações abaixo é satifeita

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \phi_1^2(x) v_+^2(t, x)\, dx &= 0, \ \text{ou} \\ \int_{B_1} \phi^2(x) v_+^2(t, x)\, dx &\geq \frac{|B_1|}{2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como feito anteriormente, perceba que, se $v_k \leq 0$, então $|v - v_k| \geq \varepsilon$ ou $v \leq \varepsilon$, portanto

$$\frac{\tilde{Q}}{2} \leq |\{v_k \leq 0\} \cap \tilde{Q}| \leq |\{|v - v_k| \geq \varepsilon\} \cap \tilde{Q}| + |\{v \leq \varepsilon\} \cap \tilde{Q}|,$$

daí, fazendo $k \to \infty$, obtemos

$$\frac{\tilde{Q}}{2} \leq |\{v \leq \varepsilon\} \cap \tilde{Q}|.$$

Passando o limite em $\varepsilon \to 0^+$, implica que

$$\frac{\tilde{Q}}{2} \leq |\{v \leq 0\} \cap \tilde{Q}|. \tag{3.8}$$

Consequentemente, (3.8) vai implicar em

$$v(t, \cdot) \leq 0 \quad \text{em} \quad B_1,$$

para quase todo $t \in (-\frac{3}{2}, 0)$, daí deve existir algum tempo $-\frac{3}{2} < s < -1$, tal que, $v(s, \cdot) \leq 0$ em B_1. Isso significa que

$$\int_{B_1} \phi_1^2(x) v_+^2(s, x)\, dx = 0. \tag{3.9}$$

Considere uma função não negativa em x, $\phi_1 \geq 0$ com suporte compacto em B_1 e integral igual a 1. Com isso, defina $s_0 \in [s, 0]$ como o supremo de todos $\bar{t} \in [s, 0)$, em que $\bar{t}$ satisfaz a seguinte propriedade

$$\int_{B_1} \phi_1^2(x) v_+^2(\tau, x)\, dx = 0,$$

para todo $\tau \in [s, \bar{t}]$. Note que, s_0 existe por (3.9). Vamos supor que, $s_0 < -\mu$ sendo $\mu > 0$ uma constante positiva, tal que, $s < -\mu$, e para $M \geq \sup |\nabla \phi_1|^2$ em B_1, tome $\bar{s_0} \in [s, s_0)$, de modo que

$$s_0 - \bar{s_0} \leq c = \frac{1}{\Lambda M 8}, \text{ se } s_0 > s$$

ou

$$\text{caso } s_0 = s, \text{ tome } \bar{s_0} = s.$$

Então, para qualquer $t \in (\bar{s_0}, s_0 + c] \cap (-\frac{3}{2}, 0)$, a estimativa de energia garante que

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \phi_1^2(x) v_+^2(t, x)\, dx &\leq \int_{B_1} \phi_1^2(x) v_+^2(\bar{s_0}, x)\, dx + \Lambda \int_{\bar{s_0}}^{t} \int_{B_1} |\nabla \phi_1|^2 |v_+|^2\, dx\, d\tau \\ &\leq \Lambda M (t - \bar{s_0}) |B_1| \\ &\leq \Lambda M 2c |B_1| \\ &= \frac{|B_1|}{4}. \end{aligned}$$

Assim, de (3.7), a estimativa acima implica que

$$\int_{B_1} \phi_1^2(x) v_+^2(t, x)\, dx = 0,$$

para qualquer $t \in (\bar{s_0}, s_0 + c] \cap (-\frac{3}{2}, 0)$, contradizendo a definição de s_0. Então, devemos tomar $s_0 = 0$, ou seja, para qualquer $t \in [s, 0)$, tem-se

$$v_+(t, \cdot) = 0 \quad \text{em} \quad B_1. \tag{3.10}$$

Por outro lado, para qualquer $\varepsilon > 0$, se

$$v_k \geq \frac{1}{2}, \text{ então } |v - v_k| \geq \varepsilon \text{ ou } v \geq \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Assim, obtemos a desigualdade abaixo

$$\begin{aligned} \delta &\leq |\{v_k \geq 1/2\} \cap Q_1| \\ &\leq |\{|v - v_k| \geq \varepsilon\} \cap Q_1| + |\{v \geq 1/2 - \varepsilon\} \cap Q_1|, \end{aligned}$$

então, passando o limite em $k \to \infty$, temos

$$\delta \leq |\{v \geq 1/2 - \varepsilon\} \cap Q_1|.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, fazemos $\varepsilon \to 0^+$ e portanto, concluímos que

$$\delta \leq |\{v \geq 1/2\} \cap Q_1|.$$

Isso contradiz (3.10), dessa forma, segue o resultado. $\square$

No próximo resultado, apresentamos o segundo lema de De Giorgi. Ele nos dá condições para obter um melhoramento da oscilação por cima, ao reduzir o domínio.

Teorema 3.2.1. *Existe uma constante* $0 < \lambda < 1$*, tal que, para qualquer solução* u *de* (3.1) *em* Q_2 *verificando* (3.2)*, temos o seguinte:*

Se $-1 \leq u \leq 1$ *em* Q_2 *e*

$$|\{u \leq 0\} \cap \tilde{Q}| \geq \frac{|\tilde{Q}|}{2},$$

então,

$$u \leq 1 - \lambda, \quad \text{em} \quad Q_{1/2}.$$

Demonstração. Considere a seguinte sequência de funções truncadas,

$$\omega_k = 2^k(u - (1 - 2^{-k})).$$

Note que, $\omega_k \leq 1$, pois, sabendo que $u \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned} \omega_k &= 2^k u - 2^k(1 - 2^{-k}) \\ &\leq 2^k - 2^k + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Agora, visto que,

$$\omega_{k+1} = 2\omega_k - 1, \tag{3.11}$$

temos também que

$$\begin{aligned} |\{\omega_{k+1} \geq 0\} \cap Q_1| &= |\{\omega_k \geq 1/2\} \cap Q_1| \\ &= \int_{Q_1} \chi_{\{\omega_{k+1} \geq 0\}} \, dx \, dt \\ &\geq \int_{Q_1} (\omega_{k+1})_+^2 \, dx \, dt \\ &\geq \delta. \end{aligned}$$

Vamos supor que,

$$\int_{Q_2} (\omega_{k+1})_+^2 \, dx \, dt \geq \delta, \tag{3.12}$$

no final desta demonstração, veremos o porquê da suposição de (3.12).

Como ω_k é solução da equação (3.1), pelo Lema 3.2.1 existe $\alpha > 0$, tal que

$$|\{0 < \omega_k < 1/2\} \cap (Q_1 \cup \tilde{Q})| \geq \alpha,$$

em consequência, por (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} |\{\omega_k \leq 0\} \cap (Q_1 \cup \tilde{Q})| &\geq |\{\omega_{k-1} \leq 0\} \cap (Q_1 \cup \tilde{Q})| + |\{0 < \omega_{k-1} < 1/2\} \cap (Q_1 \cup \tilde{Q})| \\ &\geq |\{\omega_{k-1} \leq 0\} \cap (Q_1 \cup \tilde{Q})| + \alpha \\ &\geq |\{\omega_{k-2} \leq 0\} \cap (Q_1 \cup \tilde{Q})| + 2\alpha \\ &\vdots \\ &\geq |\{\omega_0 \leq 0\} \cap (Q_1 \cup \tilde{Q})| + k\alpha \\ &= |\{u \leq 0\} \cap (Q_1 \cup \tilde{Q})| + k\alpha \\ &\geq \frac{|\tilde{Q}|}{2} + k\alpha. \end{aligned}$$

Perceba que, para k suficientemente grande, obrigatoriamente essa recorrência deve falhar. Portanto, deve existir $k_0 > 0$, tal que,

$$|\{\omega_{k_0} \leq 0\} \cap Q_1| < \frac{|\tilde{Q}|}{2} + k_0\alpha,$$

isso significa que,

$$\int_{Q_1} (\omega_{k_0+1})_+^2 \, dx \, dt < \delta.$$

Então, pelo Lema 3.1.1,

$$(\omega_{k_0+1})_+ \leq \frac{1}{2} \quad \text{em} \quad Q_{1/2},$$

dessa forma, voltando para u, obtemos que

$$u \leq 1 - \lambda \quad \text{em} \quad Q_{1/2},$$

com $\lambda = 2^{-(k_0+2)}$. □

Em seguida, temos o lema da oscilação para a versão parabólica.

Lema 3.2.2. *Seja u solução de* (3.1) *em Q_2 com A verificando* (3.2)*. Então, existe $\gamma \in (0, 1)$, tal que,*

$$\operatorname{osc}_{Q_{1/2}} u \leq \gamma \operatorname{osc}_{Q_2} u.$$

Demonstração. Considere a função

$$v(x) = \frac{2}{\operatorname{osc}_{Q_2} u} \left(u(x) - \frac{\sup u + \inf u}{2} \right).$$

Desse modo, v também é solução da equação (3.1), e

$$-1 \leq v \leq 1.$$

Além disso, podemos supor que

$$|\{v \leq 0\} \cap \tilde{Q}| \geq \frac{|\tilde{Q}|}{2},$$

pois, caso

$$|\{v \leq 0\} \cap \tilde{Q}| < \frac{|\tilde{Q}|}{2},$$

isso implica que

$$|\{v \geq 0\} \cap \tilde{Q}| \geq \frac{|\tilde{Q}|}{2},$$

então, basta tomar $\bar{v} = -v$.

Portanto, pelo Teorema 3.2.1 existe $\lambda \in (0, 1)$, tal que,

$$v \leq 1 - \lambda \quad \text{em} \quad Q_{1/2},$$

ou seja, como

$$\sup_{Q_{1/2}} v \leq 1 - \lambda \quad \text{e} \quad -1 \leq \inf_{Q_{1/2}} v,$$

implica que,

$$\operatorname{osc}_{Q_{1/2}} v \leq 2 - \lambda.$$

Consequentemente, dados $x, y \in Q_{1/2}$, temos

$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)| &= \frac{2}{\operatorname{osc_{Q_2} u}} |u(x) - u(y)| \\ &\leq 2 - \lambda, \end{aligned}$$

logo,

$$\operatorname{osc}_{Q_{1/2}} u \leq (1 - \frac{\lambda}{2}) \operatorname{osc}_{Q_2} u,$$

então, basta tomar $\gamma = 1 - \lambda/2$ que a prova estará concluída. $\square$

3.3 Regularidade C^α

Nesta seção, dedicamos à prova da regularidade C^α para soluções da equação parabólica (3.1).

Teorema 3.3.1. *Seja $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $\nabla u \in L^2((0, T) \times \Omega)$ uma solução fraca para a equação (3.1) em $(0, T) \times \Omega$. Então, existe $\alpha > 0$, tal que, para qualquer $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$, e qualquer $0 < s < T$, tem-se*

$$u \in C^\alpha((s, T) \times \tilde{\Omega}).$$

Demonstração. A prova segue de forma análoga a demonstração do Teorema 2.3.1, fazendo as devidas adaptações no reescalonamento. Sejam, $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$ e $s \in (0, T)$, então, para $d = \operatorname{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega)$, tome $c = \min\{d, s\}$, daí podemos supor que $c < 1$. Vamos introduzir as funções reescalonadas,

$$\bar{u}_1(t, y) = u(t_0 + c^2 t/2^2, x_0 + cy/2) \quad \text{e} \quad \bar{u}_n(t, y) = \bar{u}_{n-1}(t/4^2, y/4).$$

Perceba que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\bar{u}_n$ é solução da equação (3.1) em Q_2, com matriz de difusão

$$A_n(t, y) = A(t_0 + c^2 t/(2^2 \cdot (4^{n-1})^2), x_0 + cy/(2 \cdot 4^{n-1})).$$

De fato, defina

$$\tilde{Q}_n = (t_0 - c^2/(4^{n-1})^2, t_0) \times B_{c/4^{n-1}}(x_0),$$

assim, como

$$\bar{u}_n(t, y) = u(t_0 + c^2 t/(2^2 \cdot (4^{n-1})^2), x_0 + ct/(2 \cdot 4^{n-1})),$$

dado $\phi \in C_0^\infty(Q_2)$, temos que

$$\begin{aligned} & \int_{Q_2} -\bar{u}_n(t, y)\partial_t \phi(t, y) + \nabla^T \phi(t, y) \, A_n(t, y) \, \nabla \bar{u}_n(t, y) \, dt \, dy \\ = \; & \frac{c^2}{(2 \cdot 4^{n-1})^2} \cdot J \int_{\tilde{Q}_n} -u(\bar{t}, \bar{y})\partial_t \hat{\phi}(\bar{t}, \bar{y}) + \nabla^T \hat{\phi}(\bar{t}, \bar{y}) \, A(\bar{t}, \bar{y}) \, \nabla u(\bar{t}, \bar{y}) \, d\bar{t} \, d\bar{y} \\ = \; & 0, \end{aligned}$$

onde J é o jacobiano da mudança de variável e

$$\hat{\phi}(t,y) = \phi((t-t_0)2^2 \cdot (4^{n-1})^2/c^2, (y-x_0)2 \cdot 4^{n-1}/c).$$

Portanto, usando recursivamente o Lema 3.2.2 nas funções $\bar{u}_n$, obtemos

$$\operatorname{osc}_{\tilde{Q}_{n+1}} u \le \gamma^n \operatorname{osc}_{\tilde{Q}_1} u.$$

Assim, para qualquer $(t,x) \in \tilde{Q}_{n+1}$, tem-se

$$|u(t_0,x_0) - u(t,x)| \le \operatorname{osc}_{\tilde{Q}_{n+1}} u \le \gamma^n \operatorname{osc}_{\tilde{Q}_1} u \le 2\,\gamma^n \|u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}. \tag{3.13}$$

Então, dado $(t,x) \in (s,T) \times \tilde{\Omega}$, consideremos dois casos,

Caso I: $|t-t_0| + |x-x_0| < c^2$.

Note que, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tal que,

$$\frac{c^2}{(4^{k+1})^2} \le |t-t_0| + |x-x_0| < \frac{c^2}{(4^k)^2}, \tag{3.14}$$

com isso, definindo $\alpha \in (0,1)$, de modo que,

$$4^{-2\alpha} = \gamma, \tag{3.15}$$

daí,

$$\alpha = -\frac{\ln\gamma}{4\ln 2}.$$

Usando (3.13), (3.15) e (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} |u(t_0,x_0) - u(t,x)| &\le \frac{4^{-2\alpha}c^{-2\alpha}}{4^{-2\alpha}c^{-2\alpha}}\, 4^{-2k\alpha}\, 2\,\|u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \\ &\le \frac{2\,\|u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}}{4^{-2\alpha}c^{2\alpha}} (|t-t_0| + |x-x_0|)^\alpha. \end{aligned}$$

Caso II: $c^2 \le |t-t_0| + |x-x_0|$.

Daí, temos a estimativa a seguir

$$\begin{aligned} |u(t_0,x_0) - u(t,x)| &\le 2\,\|u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \\ &\le \frac{(c^2)^\alpha}{(c^2)^\alpha\, 4^{-2\alpha}}\, 2\,\|u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \\ &\le \frac{2\,\|u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}}{4^{-2\alpha}c^{2\alpha}} (|t-t_0| + |x-x_0|)^\alpha. \end{aligned}$$

Observando que as estimativas não dependem de $(t_0,x_0) \in (s,T) \times \tilde{\Omega}$, concluímos que $u \in C^\alpha((s,T) \times \tilde{\Omega})$.

$\square$

Capítulo 4

Método de De Giorgi para Equações de Hamilton-Jacobi

Neste capítulo, nosso interesse é estudar a regularidade C^α para a equação de Hamilton Jacobi da forma a seguir

$$\partial_t u + H(t, x, \nabla u) = 0, \quad t \in (0, T), \;\; x \in B_R, \tag{4.1}$$

sendo que, $T > 0$, $R > 0$, e o Hamiltoniano verifica uma condição de crescimento no gradiente, ou propriedade coercitiva, com uniformidade em x e t,

$$\frac{1}{\Lambda}|\nabla u|^p - \Lambda \leq H(t, x, \nabla u) \leq \Lambda|\nabla u|^p + \Lambda, \tag{4.2}$$

para algum $p \in (1, \infty)$ e $\Lambda \geq 1$. Mais precisamente, consideramos dois tipos de soluções, vejamos

$$\partial_t u + \Lambda|\nabla u|^p \geq -\Lambda, \quad \text{no sentido da viscosidade,} \tag{4.3}$$

$$\partial_t u + \frac{1}{\Lambda}|\nabla u|^p \leq \Lambda, \quad \text{no sentido das distribuições.} \tag{4.4}$$

As funções que resolvem a desigualdade (4.3) no sentido da viscosidade, segue a definição de Barles [9].

4.1 Primeiro Lema de De Giorgi

Para iniciar a análise da regularidade Hölder para a equação 4.1, vamos apresentar o primeiro lema de De Giorgi. Este lema diz que se o volume da parte positiva de soluções de (4.4) for suficientemente pequena, então, obrigatoriamente todas as soluções devem ser limitadas superiormente uniformemente.

Definição 4.1.1. *Diremos que uma função $u : [0, 2] \times B_1 \to \mathbb{R}$ é uma solução fraca para (4.4) quando, $u \in L^p(0, 2; W^{1,p}(B_1))$ e a estimativa a seguir for verdade para qualquer função teste não negativa $\phi \in C_0^\infty((0, 2) \times B_1)$:*

$$\int_{[0,2]\times B_1} \left(-u\, \partial_t \phi + \frac{1}{\Lambda}|\nabla u|^p\, \phi \right) dx\, dt \leq \Lambda \int_{[0,2]\times B_1} \phi\, dx\, dt.$$

Lema 4.1.1. *Existe uma constante $\delta = \delta(N, \Lambda, p) > 0$, tal que, para qualquer função $u \in L^p(0, 2; W^{1,p}(B_1))$ que é solução fraca de (4.4) em $[0, 2] \times B_1$, temos a seguinte implicação: Se*

$$\int_{[0,2]\times B_1} u_+ \leq \delta,$$

implica que,

$$u \leq 1 \quad \text{em } [1, 2] \times B_1.$$

Demonstração. Seja $u : [0, 2] \times B_1 \to \mathbb{R}$ uma solução fraca para (4.4) em $[0, 2] \times B_1$ satisfazendo as hipóteses do Lema 4.1.1.Vamos trabalhar com uma sequência de funções truncadas v_k em $[0, 2] \times B_1$ definidas da seguinte forma,

$$v_k = (u - (1 - \frac{1}{2^k}))_+.$$

Então, multiplicando (4.4) por $\chi_{\{v_k>0\}}$, obtemos a seguinte relação,

$$\partial_t v_k + \frac{1}{\Lambda} |\nabla v_k|^p \leq \Lambda \, \chi_{\{v_k>0\}}, \tag{4.5}$$

que é satisfeita no sentido das distribuições em $[0, 2] \times B_1$, para cada inteiro $k \geq 1$.

O objetivo será construir uma recorrência não linear utilizando a desigualdade (4.5). A seguir, vamos definir uma sequência de energias truncadas

$$U_k = \sup_{t\in[T_k,2]} \int_{B_1} v_k(t, \cdot) + \int_{T_k}^{2} \int_{B_1} |\nabla v_k(t, y)|^p \, dy \, dt,$$

onde $T_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, para cada $k \in \mathbb{Z}^+$. Assim, tome quaisquer reais σ, t satisfazendo,

$$T_{k-1} \leq \sigma \leq T_k \leq t \leq 2.$$

Então, integrando cada termo em (4.5) no espaço em B_1 e no tempo em $[\sigma, t]$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{B_1} v_k(t, x) \, dx + \frac{1}{\Lambda} \int_{\sigma}^{t} \int_{B_1} |\nabla v_k|^p(\tau, x) \, dx \, d\tau \\ \leq \;& \int_{B_1} v_k(\sigma, x) \, dx + \Lambda \int_{\sigma}^{t} \int_{B_1} \chi_{\{v_k>0\}} \, dx \, d\tau, \end{aligned} \tag{4.6}$$

como cada termo é não negativo e $\sigma \in [T_{k-1}, T_k]$, segue que

$$\begin{aligned} &\int_{B_1} v_k(t, x) \, dx + \frac{1}{\Lambda} \int_{T_k}^{t} \int_{B_1} |\nabla v_k|^p(\tau, x) \, dx \, d\tau \\ \leq \;& 2^k \int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_{B_1} v_k(\sigma, x) \, dx \, d\tau + \Lambda \int_{T_{k-1}}^{t} \int_{B_1} \chi_{\{v_k>0\}} \, dx \, d\tau. \end{aligned}$$

Tomando o sup sobre $t \in [T_k, 2]$, e o valor médio para integrais em $[T_{k-1}, T_k]$ a desigualdade ainda se mantém, isto é,

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[T_k,2]} \int_{B_1} v_k(t, x) \, dx + \frac{1}{\Lambda} \int_{T_k}^{2} \int_{B_1} |\nabla v_k|^p(\tau, x) \, dx \, d\tau \\ \leq \;& \int_{[T_{k-1},2]\times B_1} (2^k v_k(\tau, x) + \Lambda \chi_{\{v_k>0\}}) \, dx \, d\tau. \end{aligned}$$

A desigualdade acima, implica que

$$U_k \leq (2^k\Lambda + \Lambda^2)\left\{\int_{[T_{k-1},2]\times B_1} v_k\,dx\,d\tau + \int_{[T_{k-1},2]\times B_1} \chi_{\{v_k>0\}}\,dx\,d\tau\right\}. \tag{4.7}$$

Agora, escolhemos um expoente $r \in (1,\infty)$, tal que r e p satisfazem apenas uma das duas possíveis condições seguintes.

Condição I: $1 < p < N$, e $p \leq r \leq \frac{Np}{N-p}$.
Condição II: $r \geq p \geq N$.

Usando interpolação, Imersões Contínuas de Sobolev e a desigualdade (B.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\|v_k(t)\|_{L^r(B_1)} &\leq \|v_k(t)\|^{\lambda}_{L^p(B_1)}\cdot\|v_k(t)\|^{1-\lambda}_{L^q(B_1)}\\
&\leq C_{N,p,r}\,\|v_k(t)\|^{\lambda}_{L^p(B_1)}\cdot\|v_k(t)\|^{1-\lambda}_{W^{1,p}(B_1)}\\
&\leq C_{N,p,r}\left\{\lambda\|v_k(t)\|_{L^p(B_1))} + (1-\lambda)\|v_k(t)\|_{W^{1,p}(B_1)}\right\}\\
&= C_{N,p,r}\left\{\|v_k(t)\|_{L^p(B_1)} + (1-\lambda)\|\nabla v_k(t)\|_{L^p(B_1)}\right\},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

onde $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{q}$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Agora, note que temos a seguinte equivalência de normas (ver [10], pag. 286),

$$|||u||| = \|\nabla u\|_{L^p(B_1)} + \|u\|_{L^q(B_1)}$$

é equivalente a norma $W^{1,p}$, desde que

$$\begin{aligned}
1 \leq q \leq p^* \quad &\text{se} \quad 1 \leq p < N,\\
1 \leq q < \infty \quad &\text{se} \quad p = N,\\
1 \leq q \leq \infty \quad &\text{se} \quad p > N.
\end{aligned}$$

Então, segue que

$$\|v_k(t)\|_{L^p(B_1)} \leq \|v_k(t)\|_{W^{1,p}(B_1)} \leq C_{N,p}\left\{\|\nabla v_k(t)\|_{L^p(B_1)} + \int_{B_1} v_k(t)\right\}. \tag{4.9}$$

Combinando (4.8) e (4.9), obtemos a seguinte estimativa

$$\|v_k(t)\|_{L^r(B_1)} \leq C_{N,p,r}\left\{\|\nabla v_k(t)\|_{L^p(B_1)} + \int_{B_1} v_k(t)\right\},$$

logo, v_k satisfaz a estimativa abaixo

$$\begin{aligned}
&\int_{T_k}^2 \|v_k(t)\|^p_{L^r(B_1)}dt\\
\leq\ & C_{N,p,r}\int_{T_k}^2\left\{\|\nabla v_k(t)\|^p_{L^p(B_1)} + \left(\int_{B_1} v_k(t)\right)^p\right\}dt\\
\leq\ & C_{N,p,r}\left\{U_k + U_k^p\right\}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Prosseguindo, por meio de interpolação, temos a estimativa a seguir para v_k

$$\|v_k\|_{L^s([T_k,2]\times B_1)} \leq \|v_k\|^{1-\theta}_{L^\infty(T_k,2;L^1(B_1))}\cdot\|v_k\|^{\theta}_{L^p(T_k,2;L^r(B_1))}, \tag{4.11}$$

onde o expoente s é dado por

$$s = 1 + p - \frac{p}{r}, \tag{4.12}$$

com isso, o parâmetro $\theta \in [0,1]$ é dado por

$$\theta = \frac{pr}{r + pr - p}.$$

Note que, $s\,(1-\theta) = s - p$ e $s\,\theta = p$, então por (4.10) e (4.11), temos

$$\begin{aligned} \|v_k\|^s_{L^s([T_k,2]\times B_1)} &\leq \|v_k\|^{s-p}_{L^\infty(T_k,2;L^1(B_1))} \cdot \|v_k\|^p_{L^p(T_k,2;L^r(B_1))} \\ &\leq U_k^{s-p}\, C_{N,p,r}\, \{U_k + U_k^p\} \\ &= C_{N,p,r}\left\{U_k^{2-\frac{p}{r}} + U_k^{1+p-\frac{p}{r}}\right\}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Agora, perceba que,

$$v_{k-1} \geq v_k \quad \text{e} \quad \{v_k > 0\} = \left\{v_{k-1} > \frac{1}{2^k}\right\},$$

além disso, tem-se

$$v_{k-1} = v_{k-1}^s \cdot v_{k-1}^{1-s} \leq v_{k-1}^s \cdot 2^{k(s-1)} \quad \text{em} \quad \left\{v_{k-1} > \frac{1}{2^k}\right\}.$$

Portanto, aplicando a Desigualdade de Markov (Proposição B.1.2) e a estimativa (4.13), é possível levantar o índice da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} &\int_{[T_{k-1},2]\times B_1} \left(\chi_{\{v_k>0\}} + v_k\right) \\ \leq\ & \int_{[T_{k-1},2]\times B_1} \left(\chi_{\{v_{k-1}>\frac{1}{2^k}\}} + v_{k-1}\cdot\chi_{\{v_{k-1}>\frac{1}{2^k}\}}\right) \\ \leq\ & \left(2^{sk} + 2^{(s-1)k}\right) \int_{[T_{k-1},2]\times B_1} v_{k-1}^s \\ \leq\ & (2^s)^k \cdot C_{N,p,r}\left\{U_{k-1}^{2-\frac{p}{r}} + U_{k-1}^{1+p(1-\frac{1}{r})}\right\}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Assim, combinando (4.7) com (4.14), obtemos a seguinte estimativa para U_k, com r e p satisfazendo a **Condição I** ou a **Condição II** e s é definido em (4.12).

$$U_k \leq (2^k\Lambda + \Lambda^2)\cdot 2^{sk}\cdot C_{N,p,r}\left\{U_{k-1}^{2-\frac{p}{r}} + U_{k-1}^{1+p(1-\frac{1}{r})}\right\}. \tag{4.15}$$

No caso em que $1 < p < N$, tomamos $r = \frac{Np}{N-p}$. Daí, a estimativa (4.15) se reduz à estimativa

$$U_k \leq (D_{N,p,\Lambda}))^k \left\{U_{k-1}^{1+\frac{p}{N}} + U_{k-1}^{p(1+\frac{1}{N})}\right\}, \tag{4.16}$$

onde $D_{N,p,\Lambda}$ é alguma constante absoluta dependendo apenas de N, p, Λ.

No caso em que $p \geq N$, tomamos $r = 2p$. Então, (4.15) se reduz à estimativa abaixo

$$U_k \leq (D_{N,p,\Lambda}))^k \left\{U_{k-1}^{\frac{3}{2}} + U_{k-1}^{p+\frac{1}{2}}\right\}, \tag{4.17}$$

Por fim, precisamos verificar a estimativa seguinte para todo $k \geq 1$.

$$U_k \leq 2\Lambda \int_{[0,2]\times B_1} v_k + \Lambda^2 \int_{[0,2]\times B_1} \chi_{\{v_k>0\}}. \tag{4.18}$$

Note que, a relação (4.6) se mantém para quaisquer reais σ, t que satisfazem

$$0 \leq \sigma \leq T_k \leq t \leq 2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\int_{B_1} v_k(t,x)\,dx + \frac{1}{\Lambda}\int_\sigma^t \int_{B_1} |\nabla v_k|^p(\tau,x)\,dx\,d\tau \\ \leq\ &\int_{B_1} v_k(\sigma,x)\,dx + \Lambda \int_\sigma^t \int_{B_1} \chi_{\{v_k>0\}}\,dx\,d\tau. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2} \leq T_k$, para todo $k \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{B_1} v_k(t,x)\,dx + \frac{1}{\Lambda}\int_{T_k}^t \int_{B_1} |\nabla v_k|^p(\tau,x)\,dx\,d\tau \\ \leq\ &2\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{B_1} v_k(\tau,x)\,dx + \Lambda \int_0^t \int_{B_1} \chi_{\{v_k>0\}}\,dx\,d\tau \\ \leq\ &2\int_{[0,2]\times B_1} v_k(\tau,x)\,dx\,d\tau + \Lambda \int_0^t \int_{B_1} \chi_{\{v_k>0\}}\,dx\,d\tau, \end{aligned}$$

valendo a estimativa acima para qualquer $t \in [T_k, 2]$. Assim, tomando o sup sobre $t \in [T_k, 2]$ para cada termo da desigualdade, é imediato obter (4.18). Além disso, a desigualdade a seguir é válido para qualquer $k \geq 1$,

$$\int_{[0,2]\times B_1} \chi_{\{v_k>0\}}\,dx\,d\tau \leq 2\int_{[0,2]\times B_1} u_+\,dx\,d\tau$$

Com isso, segue diretamente de (4.18), a seguinte estimativa para cada $k \geq 1$

$$U_k \leq 2(\Lambda + \Lambda^2)\int_{[0,2]\times B_1} u_+\,dx\,d\tau. \tag{4.19}$$

Veja que, se

$$\int_{[0,2]\times B_1} u_+\,dx\,d\tau < \frac{1}{2\Lambda(1+\Lambda)},$$

segue de (4.19) que $U_k < 1$, para todo $k \geq 1$. Supondo a relação acima, as desigualdades (4.16) ou (4.17) implicam na seguite recorrência para cada $k \geq 1$:

$$U_k \leq (D_{N,p,\Lambda})^k\, U_{k-1}^\beta, \tag{4.20}$$

onde $\beta = 1 + \frac{p}{N}$ no caso de $1 < p < N$, e $\beta = \frac{3}{2}$ para o caso de $p \geq N$.

Por fim, através da recorrência (4.20), segue da Proposição B.1 que existe $\varepsilon_0 \in (0,1)$ dependendo de $D_{N,p,\Lambda}$ e $\beta > 1$, tal que, se $U_1 \leq \varepsilon_0$, temos

$$\lim_{k\to\infty} U_k = 0.$$

Então, seja

$$\delta = \frac{\varepsilon_0}{2\Lambda(1+\Lambda)}.$$

Dessa forma, se u é uma solução de (4.4) satisfazendo

$$\int_{[0,2]\times B_1} u_+ < \delta$$

a sequência associada U_k de energias truncadas devem satisfazer $U_1 < \varepsilon_0$ e a recorrência (4.20) para cada $k \geq 1$, isso implicará que $U_k \to 0$, e consequentemente

$$u_+ \leq 1 \quad \text{em} \quad [1,2]\times B_1.$$

□

4.2 Segundo Lema de De Giorgi

A seguir, temos o segundo lema de De Giorgi. Ele diz que, se uma solução de (4.4) é não positiva em um conjunto de medida grande, e estrita entre 0 e 1 em um conjunto de medida pequana, então a solução é, ≥ 1 em um conjunto de medida pequena, ou seja, não pode haver saltos de descontinuidade. A prova é por compacidade, através do Teorema de Aubin e Lions (Teorema B.1.1).

Lema 4.2.1. *Seja $u \in L^p(-2,2;W^{1,p}(B_1))$ solução fraca de (4.4) em $[-2,2]\times B_1$. Então, existe uma constante $\alpha = \alpha(N,\Lambda,p) > 0$, tal que, acontece a seguinte condição. Se $u \leq 2$ em $[-2,2]\times B_1$, e u satisfaz as duas propriedades abaixo*

$$|\{u \leq 0\} \cap ([-2,2]\times B_1)| \geq \frac{|[-2,2]\times B_1|}{2}, \tag{4.21}$$
$$|\{0 < u < 1\} \cap ([-2,2]\times B_1)| \leq \alpha, \tag{4.22}$$

então segue que

$$\int_{[0,2]\times B_1} [u-1]_+ < \frac{\delta}{2},$$

sendo $\delta = \delta(N,\Lambda,p) > 0$ a constante cujo a existência é garantida no Lema 4.1.1.

Demonstração. A demonstração será feita em algumas etapas.
Etapa 1. Integrando a equação (4.4) para $x \in B_1$ e $\tau \in [s,t]$ com, $s,t \in [-2,2]$ e $s < t$, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{B_1} u_+(t,x)\,dx &\leq \int_{B_1} u_+(s,x)\,dx - \frac{1}{\Lambda}\int_s^t\int_{B_1} |\nabla u_+|^p\,dx\,d\tau + \Lambda\int_s^t\int_{B_1} dx\,d\tau \\ &\leq 2|B_1| - \frac{1}{\Lambda}\int_s^t\int_{B_1} |\nabla u_+|^p\,dx\,d\tau + (t-s)\Lambda|B_1|. \end{aligned}$$

Tomando $t = 2$, $s = -2$ na estimativa acima, obtemos

$$\frac{1}{\Lambda}\int_{-2}^{2}\int_{B_1} |\nabla u_+|^p\,dx\,d\tau \leq 2|B_1| + 4\Lambda|B_1|,$$

então,

$$\int_{[-2,2]\times B(1)} |\nabla u_+|^p \, dx \, d\tau \leq C(\Lambda). \tag{4.23}$$

Além disso, como

$$\partial_t u_+ \leq \Lambda,$$

obtemos

$$\|(\partial_t u_+)_+\|_{L^1([-2,2]\times B_1)} \leq D(\Lambda).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_{[-2,2]\times B_1} |(\partial_t u_+)_-| \, dx \, dt \\
\leq\ & -\int_{[-2,2]\times B_1} \partial_t u_+ \, dx \, dt + \int_{[-2,2]\times B_1} (\partial_t u_+)_+ \, dx \, dt \\
\leq\ & D(\Lambda).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|\partial_t u_+\|_{L^1([-2,2]\times B_1)} \leq C(\Lambda). \tag{4.24}$$

Etapa 2. Por contradição, vamos supor que o Lema 4.2.1 é falso. Então deve existir uma sequência de funções $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ em $[-2,2]\times B(1)$, com cada u_k satisfazendo (4.23), (4.24) e as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
\int_{[0,2]\times B(1)} (u_k - 1)_+ \, dx \, dt &\geq \frac{\delta}{2}, \\
|\{u_k \leq 0\} \cap ([-2,2]\times B(1))| &\geq \frac{|[-2,2]\times B(1)|}{2}, \\
|\{0 < u_k < 1\} \cap ([-2,2]\times B(1))| &\leq \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Pela Etapa 1, existe uma subsequência $\{u_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, tal que, u_{k_n} converge para $\bar{u} \in L^p(-2,2;W^{1,p}(B(1)))$ na norma $L^1([-2,2]\times B(1))$, com a função limite $\bar{u}$, satisfazendo também as propriedades seguintes

$$\begin{aligned}
&\bar{u} \leq 2 \quad \text{em} \quad [-2,2]\times B(1), \\
&\int_{B(1)} \bar{u}_+(t,x) dx \leq \int_{B(1)} \bar{u}_+(s,x) dx + (t-s)\,\Lambda\,|B(1)|, \quad -2 \leq s \leq t \leq 2, \\
&\int_{[-2,2]\times B(1)} |\nabla \bar{u}_+|^p \, dx \, dt \leq C(\Lambda), \\
&\int_{[-2,2]\times B(1)} (\bar{u}-1)_+ \geq \frac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

Observe que a estimativa abaixo vale para qualquer $\varepsilon > 0$

$$|\{|u_{k_n} - \bar{u}| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{[-2,2]\times B(1)} |u_{k_n} - \bar{u}|,$$

pela desigualdade de Markov. Então, segue que para cada $\varepsilon > 0$ fixado, o termo que aparece do lado direito da estimativa acima converge para 0 quando k_n tende ao infinito. Agora, note que temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} |\{\bar{u} \leq \varepsilon\}| &\geq |\{u_{k_n} \leq 0\}| - |\{|u_{k_n} - \bar{u}| \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{|[-2,2] \times B(1)|}{2} - |\{|u_{k_n} - \bar{u}| \geq \varepsilon\}|. \end{aligned} \tag{4.25}$$

A validade da desigualdade acima é satisfeita, já que

$$\{u_{k_n} \leq 0\} \subset \{\bar{u} \leq \varepsilon\} \cup \{|u_{k_n} - \bar{u}| \geq \varepsilon\}.$$

Passando o limite fazendo $k_n \to \infty$ em (4.25), temos

$$|\{\bar{u} \leq \varepsilon\}| \geq \frac{|[-2,2] \times B(1)|}{2},$$

que é verdade para qualquer $\varepsilon > 0$. Assim, fazendo $\varepsilon \to 0^+$, segue que

$$|\{\bar{u} \leq 0\}| \geq \frac{|[-2,2] \times B(1)|}{2}.$$

De forma análoga, tem-se

$$\begin{aligned} |\{\varepsilon \leq \bar{u} \leq 1 - \varepsilon\}| &\leq |\{0 < u_{k_n} < 1\}| + |\{|u_{k_n} - \bar{u}| \geq \varepsilon\}| \\ &\leq \frac{1}{k_n} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{[-2,2] \times B(1)} |u_{k_n} - \bar{u}|. \end{aligned}$$

Então, quando $k_n \to \infty$, concluímos que

$$|\{\varepsilon \leq \bar{u} \leq 1 - \varepsilon\}| = 0,$$

para cada $\varepsilon > 0$. Portanto, tomando o limite $\varepsilon \to 0^+$, obtemos

$$|\{0 < \bar{u} < 1\}| = 0. \tag{4.26}$$

Etapa 3. Note que, para quase todo $t \in [-2, 2]$,

$$\int_{B(1)} |\nabla \bar{u}|^p(t, x)\, dx < \infty,$$

pois, $\bar{u} \in L^p(-2, 2; W^{1,p}(B(1)))$. Além disso, por (4.26) segue que a relação seguinte acontece para quase todo $t \in [-2, 2]$

$$|\{0 < \bar{u}(t, \cdot) < 1\} \cap B(1)| = 0.$$

Portanto, aplicando a desigualdade isoperimétrica de De Giorgi (com o tempo t fixado), obtemos para quase todo $t \in [-2, 2]$,

$$\bar{u}(t, \cdot) \leq 0 \quad \text{em} \quad B(1), \quad \text{ou}$$

$$\bar{u}(t, \cdot) \geq 1 \quad \text{em} \quad B(1).$$

Em consequência, temos para quase todo $t \in [-2,2]$ apenas uma das duas relações abaixo

$$\int_{B(1)} \bar{u}_+(t,x)\,dx = 0$$

ou

$$\int_{B(1)} \bar{u}_+(t,x)\,dx \geq |B(1)|.$$

Etapa 4. Sabendo que

$$|\{\bar{u} \leq 0\}| \geq \frac{|[-2,2] \times B(1)|}{2},$$

implica da Etapa 3 que, para quase todo $t \in [-2,2]$, tem-se

$$\int_{B(1)} \bar{u}_+(t,x)\,dx = 0.$$

Então, existe $s \in [-2,0]$, tal que

$$\int_{B(1)} \bar{u}_+(s,x)\,dx = 0. \tag{4.27}$$

Considere $s_0 \in [s,2]$ como o supremo de todos $\bar{t} \in [s,2]$ com a seguinte propriedade

$$\int_{B(1)} \bar{u}_+(\tau,x)\,dx = 0,$$

para todo $\tau \in [s,\bar{t}]$. Note que, tal s_0 existe, por (4.27). Supondo que $s_0 < 2$, seja

$$\bar{s_0} \in [s,s_0) \quad \text{com} \quad s_0 - \bar{s_0} < \frac{1}{4\Lambda}, \quad \text{se} \quad s_0 > s,$$

e caso $s_0 = s$, tome $\bar{s_0} = s$. Assim, para qualquer $t \in (\bar{s_0}, s_0 + \frac{1}{4\Lambda}] \cap [-2,2]$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B(1)} \bar{u}_+(t,x)\,dx &\leq \int_{B(1)} \bar{u}_+(\bar{s_0},x)\,dx + (t-\bar{s_0})\Lambda|B(1)| \\
&= (t-\bar{s_0})\Lambda|B(1)| \\
&\leq \frac{\Lambda}{2\Lambda}|B(1)| \\
&= \frac{|B(1)|}{2}.
\end{aligned}$$

Porém, da Etapa 3, a estimativa acima implica que

$$\int_{B(1)} \bar{u}_+(t,x)\,dx = 0,$$

para qualquer $t \in (\bar{s_0}, s_0 + \frac{1}{4\Lambda}] \cap [-2,2]$. Isto contradiz a definição de s_0. Portanto, devemos tomar $s_0 = 2$, mas, isso significa que $\bar{u} \leq 0$ em $[s,2] \times B(1)$, consequentemente $(\bar{u}-1)_+ = 0$ em $[0,2] \times B(1)$, contradizendo o fato que

$$\int_{[0,2]\times B(1)} (\bar{u}-1)_+ \geq \frac{\delta}{2}.$$

Dessa forma, finalizamos a demonstração. $\square$

4.3 Melhoramento da Oscilação

Com os lemas de De Giorgi em mãos, vamos analisar nas duas proposições seguintes o melhoramento da oscilação por cima e por baixo para soluções das desigualdades a seguir:

$$\partial_t u + \frac{2^{(K_0+1)(p-1)}}{\Lambda}|\nabla u|^p \leq \frac{\Lambda}{2^{K_0+1}}, \tag{4.28}$$

$$\partial_t u + 2^{(K_0+1)(p-1)}\Lambda|\nabla u|^p \geq 0. \tag{4.29}$$

A constante $K_0 \in \mathbb{Z}^+$ é um inteiro definido da seguinte maneira

$$K_0 = \left\lfloor \frac{|[-2,2] \times B(1)|}{\alpha} \right\rfloor + 1,$$

em que, o símbolo $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x, e $\alpha = \alpha(N, \Lambda, p) > 0$ é a constante absoluta especificada no Lema 4.1.1. Isso significa que K_0 também é uma constante absoluta que depende de N, Λ, e p, visto que α depende das mesmas constantes.

Na próxima proposição, vamos obter um melhoramento da oscilação por cima para soluções satisfazendo apenas a desigualdade (4.28) no sentido das distribuições.

Proposição 4.3.1. *Existe uma constante* $\lambda = \lambda(N, \Lambda, p) \in (0,1)$*, tal que, para qualquer solução fraca* $u \in L^p(-2,2; W^{1,p}(B_1))$ *de* (4.28) *em* $[-2,2] \times B_1$*, temos a seguinte condição.*

Se $u \leq 2$ *em* $[-2,2] \times B_1$ *e*

$$|\{u \leq 0\} \cap ([-2,2] \times B_1)| \geq \frac{|[-2,2] \times B_1|}{2}, \tag{4.30}$$

então, segue que

$$u \leq 2 - \lambda \text{ em } [1,2] \times B_1.$$

Demonstração. Seja $u : [-2,2] \times B_1 \to \mathbb{R}$ solução fraca de (4.28) que satisfaz todas as hipóteses da Proposição 4.3.1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tal que, $1 \leq k \leq K_0 + 1$, considere a função $u_k : [-2,2] \times B_1 \to \mathbb{R}$, definido da seguinte maneira,

$$u_k = 2^k\{u - 2(1 - \frac{1}{2^k})\}.$$

Então, a relação a seguir é satisfeita,

$$u_k = 2(u_{k-1} - 1),$$

onde u_0 é a própria u. Observe que, $u_k \leq 2$ em $[-2,2] \times B_1$, para $1 \leq k \leq K_0 + 1$, pois

$$u_k = 2^k u - 2^k 2(1 - \frac{1}{2^k}) \leq 2^k 2 - 2^k 2 + 2 = 2.$$

Além disso, se $u \leq 0$, então

$$u_k = 2^k u - 2^k 2(1 - \frac{1}{2^k}) \leq -2^k 2 + 2 \leq 0,$$

logo, $\{u \leq 0\} \cap ([-2,2] \times B_1) \subset \{u_k \leq 0\} \cap ([-2,2] \times B_1)$. Com isso, temos

$$|\{u_k \leq 0\} \cap ([-2,2] \times B_1)| \geq |\{u \leq 0\} \cap ([-2,2] \times B_1)| \geq \frac{[-2,2] \times B_1|}{2}.$$

Agora, observe que cada u_k é uma solução fraca em $[-2,2] \times B_1$ para

$$\partial_t u_k + \frac{2^{(p-1)(K_0+1-k)}}{\Lambda} |\nabla u_k|^p \leq \frac{\Lambda}{2^{K_0+1-k}}, \tag{4.31}$$

visto que, indutivamente para u_1, dado $\phi \in C_0^\infty((-2,2) \times B_1)$ não negativo, tem-se

$$\begin{aligned}
& \int_{[-2,2]\times B_1} -u_1 \partial_t \phi + \frac{2^{(p-1)(K_0)}}{\Lambda} |\nabla u_1|^p \phi \\
\leq & \int_{[-2,2]\times B_1} 2\partial_t \phi + 2 \int_{[-2,2]\times B_1} -u\partial_t \phi + \frac{2^{(K_0+1)(p-1)}}{\Lambda} |\nabla u|^p \phi \\
= & \ 2 \int_{[-2,2]\times B_1} -u\partial_t \phi + \frac{2^{(K_0+1)(p-1)}}{\Lambda} |\nabla u|^p \phi \\
\leq & \ \frac{2\Lambda}{2^{K_0+1}} \int_{[-2,2]\times B_1} \phi \\
= & \ \frac{\Lambda}{2^{K_0}} \int_{[-2,2]\times B_1} \phi.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, se $1 \leq k \leq K_0$, mostra-se que u_{k+1} é solução para (4.31) caso u_k seja. A seguir, note que é impossível ter a desigualdade a baixo, para todo $k \in \{1, 2, \dots, K_0\}$

$$|\{0 < u_k < 1\} \cap ([-2,2] \times B_1)| > \alpha.$$

Se fosse verdade, obteríamos

$$\begin{aligned}
|\{u_{K_0} \leq 0\} \cap ([-2,2] \times B_1)| &= |\{u_{K_0-1} \leq 1\} \cap ([-2,2] \times B_1)| \\
&= |\{u_{K_0-1} \leq 0\} \cap ([-2,2] \times B_1)| + \\
&\quad\ |\{0 < u_{K_0-1} \leq 1\} \cap ([-2,2] \times B_1)| \\
&\geq |\{u_{K_0-1} \leq 0\} \cap ([-2,2] \times B_1)| + \alpha \\
&\geq |\{u_{K_0-2} \leq 0\} \cap ([-2,2] \times B_1)| + 2\alpha \\
&\ \vdots \\
&\geq |\{u \leq 0\} \cap ([-2,2] \times B_1)| + K_0 \alpha \\
&\geq \frac{|[-2,2] \times B_1|}{2} + K_0 \alpha.
\end{aligned}$$

Como $K_0 > \dfrac{|[-2,2] \times B_1|}{\alpha}$, então

$$\begin{aligned}
|\{u_{K_0} \leq 0\} \cap ([-2,2] \times B_1)| &> \frac{|[-2,2] \times B_1|}{2} + |[-2,2] \times B_1| \\
&= \frac{3}{2} |[-2,2] \times B_1|,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, deve existir j_0 inteiro positivo, tal que, $1 \leq j_0 \leq K_0$ e

$$|\{0 < u_{j_0} < 1\} \cap ([-2,2] \times B_1)| \leq \alpha. \tag{4.32}$$

Visto que, $K_0 - j_0 \geq 0$, então u_{j_0} é também solução fraca de (4.4), pois, sabendo que u_{j_0} é solução fraca de (4.31), temos

$$\begin{aligned}\int_{[-2,2]\times B_1} -u_{j_0}\partial_t\phi + \frac{1}{\Lambda}|\nabla u_{j_0}|^p\phi &\leq \int_{[-2,2]\times B_1} -u_{j_0}\partial_t\phi + \frac{2^{(p-1)(K_0+1-j_0)}}{\Lambda}|\nabla u_{j_0}|^p\phi \\ &\leq \frac{\Lambda}{2^{K_0+1-j_0}}\int_{[-2,2]\times B_1}\phi \\ &\leq \Lambda\int_{[-2,2]\times B_1}\phi,\end{aligned}$$

para qualquer $\phi \in C_0^\infty([-2,2]\times B_1)$ não negativa. Com isso, por (4.3) e (4.32), podemos aplicar diretamente o Lema 4.2.1 em u_{j_0}, o qual, nos garante a seguinte desigualdade,

$$\int_{[0,2]\times B_1} [u_{j_0+1}]_+ = 2\int_{[0,2]\times B_1} [u_{j_0} - 1]_+ \leq \delta. \tag{4.33}$$

Então, como u_{j_0+1} satisfaz (4.4) e (4.33), aplicamos o Lema 4.1.1 diretamente em u_{j_0+1}, obtendo

$$u_{j_0+1} \leq 1 \quad \text{em } [1,2]\times B_1.$$

Reescalonando para u, temos

$$u \leq 2 - \frac{1}{2^{j_0+1}} \leq 2 - \frac{1}{2^{K_0+1}} \quad \text{em } [1,2]\times B_1.$$

Assim, basta tomar $\lambda = \dfrac{1}{2^{K_0+1}}$ e concluímos a demonstração. $\square$

Definição 4.3.1 (Solução no sentido da viscosidade). *Uma função u é uma solução no sentido da viscosidade para* (4.29)*, se para qualquer $\varphi \in C^\infty((-2,2)\times B_1)$, tal que, $(t_0,x_0) \in (-2,2)\times B_1$ é um ponto de mínimo local de $u-\varphi$, temos*

$$\partial_t\varphi(t_0,x_0) + 2^{(K_0+1)(p-1)}\Lambda|\nabla\varphi(t_0,x_0)|^p \geq 0.$$

Em seguida, apresentamos o melhoramento da oscilação por baixo para soluções que satisfazem simultaneamente as desigualdades (4.28) e (4.29).

Proposição 4.3.2 (Melhoramento da Oscilação por Baixo). *Existe uma constante $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(N,\Lambda,p) \in (0,1)$, tal que, para qualquer solução fraca $u \in L^p(-2,2;W^{1,p}(B_1))$ para* (4.28) *em $[-2,2]\times B_1$, e que simultaneamente é uma solução no sentido da viscosidade para* (4.29) *em $[-2,2]\times B_1$, temos a seguinte implicação:*
Se u satisfaz as duas propriedades a seguir

$$u \geq -2 \quad \text{em} \quad [-2,2]\times B_1, \tag{4.34}$$

$$|\{u \geq 0\} \cap ([-2,2]\times B_1)| \geq \frac{|[-2,2]\times B_1|}{2}, \tag{4.35}$$

então, temos que

$$u \geq -2 + \tilde{\lambda} \quad \text{em} \quad [1,2]\times B_{1/2}.$$

Demonstração. Considere a função $u : [-2,2] \times B_1 \to \mathbb{R}$ uma solução no sentido da viscosidade de (4.29) em $[-2,2] \times B_1$, sendo também uma solução fraca de (4.28) em $[-2,2] \times B_1$ satisfazendo as condições (4.34) e (4.35).

Defina a função $v = [-2,2] \times B_1 \to \mathbb{R}$ por

$$v(t,x) = -u(-t,x).$$

Então, v também será uma solução no sentido das distribuições para (4.28), pois, para qualquer função teste não negativa $\phi \in C_0^\infty((-2,2) \times B_1)$,

$$\begin{aligned}
& \int_{[-2,2]\times B_1} -v\,\partial_t\phi + \frac{2^{(K_0+1)(p-1)}}{\Lambda}\,|\nabla v|^p\,\phi\,dt\,dx \\
= & \int_{[-2,2]\times B_1} -u(-t,x)\,\partial_t\hat{\phi}(-t,x) + \frac{2^{(K_0+1)(p-1)}}{\Lambda}\,|\nabla u(-t,x)|^p\,\hat{\phi}(-t,x)\,dt\,dx \\
= & \int_{[-2,2]\times B_1} -u(\bar{t},\bar{x})\,\partial_t\hat{\phi}(\bar{t},\bar{x}) + \frac{2^{(K_0+1)(p-1)}}{\Lambda}\,|\nabla u(\bar{t},\bar{x})|^p\,\hat{\phi}(\bar{t},\bar{x})\,d\bar{t}\,d\bar{x} \\
\leq & \frac{\Lambda}{2^{K_0+1}}\int_{[-2,2]\times B_1} \hat{\phi}(\bar{t},\bar{x})\,d\bar{t}\,d\bar{x} \\
= & \frac{\Lambda}{2^{K_0+1}}\int_{[-2,2]\times B_1} \phi(t,x)\,dt\,dx.
\end{aligned}$$

Pela condição (4.35), levando em conta que

$$\{v \leq 0\} \cap ([-2,2] \times B_1) = \{u \geq 0\} \cap ([-2,2] \times B_1),$$

tem-se

$$|\{v \leq 0\} \cap ([-2,2] \times B_1)| \geq \frac{|[-2,2] \times B_1|}{2}. \tag{4.36}$$

Além disso, a condição (4.34) garante que

$$v \leq 2 \quad \text{em} \quad [-2,2] \times B_1.$$

Portanto, podemos aplicar a Proposição 4.3.1 em v para obter o melhoramento da oscilação por cima, ou seja

$$v \leq 2 - \lambda \quad \text{em} \quad [1,2] \times B_1,$$

o que é equivalente a

$$u \geq -2 + \lambda \quad \text{em} \quad [-2,-1] \times B_1. \tag{4.37}$$

A constante $\lambda \in (0,1)$ é especificada na Proposição 4.3.1. Então, com respeito a alguma constante $\lambda_1 \in (0,\lambda)$ que será determinada mais tarde, considere a função $\psi : [-2,2] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definida da seguinte forma,

$$\psi(t,x) = \min\left(-2 + \lambda_1; -2 - \frac{\lambda_1}{8}(t+2) + \left(\frac{\lambda_1}{8\,\Lambda\,2^{(p-1)(K_0+1)}}\right)^{1/p}(1-|x|)\right).$$

Note que, a função ψ é solução no sentido da viscosidade para

$$\partial_t\psi + 2^{(K_0+1)(p-1)}\Lambda\,|\nabla\psi|^p = 0, \quad \text{em} \quad [-2,2] \times \mathbb{R}^N.$$

Analisando as funções u e ψ no bordo parabólico $\partial([-2,2]\times B_1)$, segue de (4.37), que $\psi(-2,\cdot)\leq u(-2,\cdot)$ em B_1. Além disso, como

$$\psi(t,x) = -2 - \frac{\lambda_1}{8}(t+2) \leq -2 \quad \text{em} \quad [-2,2]\times\partial B_1,$$

então,

$$\psi \leq u \quad \text{em} \quad \partial([-2,2]\times B_1).$$

Com isso, é possível aplicar o Princípio da Comparação na teoria das Equações de Hamilton-Jacobi ver [9], para obter a relação a seguir

$$u \geq \psi \quad \text{em} \quad [-2,2]\times B_1.$$

Portanto, temos que a desigualdade a baixo é satisfeita:

$$u \geq \min\left(-2+\lambda_1; -2-\frac{\lambda_1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{8\,\Lambda\,2^{(p-1)(K_0+1)}}\right)^{1/p}\right) \quad \text{em} \quad [1,2]\times B_{1/2}.$$

Então, como $p\in(1,\infty)$, temos

$$\lim_{\lambda_1\to 0^+}\left\{\left(\frac{\lambda_1}{8\,\Lambda\,2^{(p-1)(K_0+1)}}\right)^{1/p}\cdot\frac{1}{\lambda_1}\right\} = +\infty,$$

isso torna possível escolher $\lambda_1\in(0,\lambda)$ suficientemente perto de 0, tal que

$$2\lambda_1 < \left(\frac{\lambda_1}{8\,\Lambda\,2^{(p-1)(K_0+1)}}\right)^{1/p}. \tag{4.38}$$

Logo, para $\lambda_1\in(0,\lambda)$ satisfazendo (4.38), implica no melhoramento da oscilação de u por baixo, ou seja,

$$u \geq \min\left(-2+\lambda_1; -2+\frac{\lambda_1}{2}\right) = -2+\frac{\lambda_1}{2}, \quad \text{em} \quad [1,2]\times B_{1/2}.$$

Assim, basta tomar $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda_1}{2}$. □

4.4 Regularidade C^α

Esta seção será dedicada à prova da regularidade Hölder de funções u que são soluções simultaneamente das desigualdades (4.3) e (4.4). Em vez de provar a continuidade diretamente para u, é preferível considerar a função

$$\bar{u} := u + \Lambda t.$$

Note que, $\bar{u}$ e u terá o mesmo expoente Hölder, e $\bar{u}$ satisfaz a desigualdade

$$\partial_t\bar{u} + \Lambda|\nabla\bar{u}|^p \geq 0. \tag{4.39}$$

Essa desigualdade é mais adequada no processo de reescalonamento. Então, sem perca de generalidade, podemos assumir que

$$\frac{1}{\Lambda}|\nabla\bar{u}|^p - \Lambda \leq H(\nabla\bar{u}) \leq \Lambda|\nabla\bar{u}|^p.$$

Por meio de um argumento de reescalonamento, verificamos a continuidade Hölder de u utilizando a proposição seguinte, que garante o decaimento da oscilação de u.

Proposição 4.4.1. *Existe constantes absoluta $\varepsilon_* \in (0,1)$, $\tilde{\lambda} \in (0,1)$ e $\alpha_* \in (1,p)$, dependendo apenas de N, p e Λ, tal que, para qualquer função $u \in L^p(-4,0;W^{1,p}(B_1))$ que é solução fraca para (4.4) em $[-4,0]\times B_1$, e simultaneamente é uma solução viscosa para (4.39) em $[-4,0]\times B_1$, temos o seguinte, se*

$$|u| \leq 2 \quad \text{em} \quad [-4,0]\times B_1,$$

então, para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, u satisfaz a relação a seguir

$$\operatorname{osc}_{\tilde{Q}_{m*}} u \leq 4\left(\frac{4-\tilde{\lambda}}{4}\right)^m,$$

onde $\tilde{Q}_{m*} = [-\varepsilon_*^{m\alpha_*}, 0]\times B_{\varepsilon_*^m/2}$.

Demonstração. A prova será feita em algumas etapas, vejamos

Etapa 1:

Considere a função $u : [-4,0]\times B_1 \to \mathbb{R}$ que é solução fraca para (4.4) em $[-4,0]\times B_1$, e também é solução no sentido da viscosidade para (4.39) em $[-4,0]\times B_1$. Além disso, suponha que $|u| \leq 2$ em $[-4,0]\times B_1$. Então, para que seja possível usar o melhoramento da oscilação por cima ou por baixo, isto é, aplicar a Proposição 4.3.1 ou 4.3.2, precisamos reescalonar a função, de modo que, satisfaça (4.28) no sentido fraco e (4.29) no sentido da viscosidade.

Definimos então, a função $u_1 : [-\frac{4}{\varepsilon^\alpha}, 0]\times B_{1/\varepsilon} \to \mathbb{R}$, para algumas constantes apropriadas $\varepsilon \in (0,1)$, e $\alpha \in [1,p)$ que serão determinadas em breve. Este $\alpha \in [1,p)$ não tem relação com a constante absoluta $\alpha(N,\Lambda,p) > 0$ que aparece no Lema 4.2.1. Assim, seja

$$u_1(t,x) = u(\varepsilon^\alpha t, \varepsilon x).$$

Perceba que, u_1 é solução fraca para a desigualdade a seguir em $[-\frac{4}{\varepsilon^\alpha}, 0]\times B_{1/\varepsilon}$

$$\partial_t u_1 + \frac{1}{\Lambda\,\varepsilon^{p-\alpha}}|\nabla u_1|^p \leq \Lambda\,\varepsilon^\alpha. \tag{4.40}$$

De fato, como u é solução fraca da desigualdade (4.4), então dado $\phi \in C_0^\infty((\frac{-4}{\varepsilon^\alpha}, 0)\times B_{1/\varepsilon})$ uma função teste não negativa, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{[-\frac{4}{\varepsilon^\alpha},0]\times B_{1/\varepsilon}} -u_1\partial_t\phi + \frac{1}{\Lambda\,\varepsilon^{p-\alpha}}\,|\nabla u_1|^p\,\phi\,dt\,dx \\
= \;& \varepsilon^{-(\alpha+N)}\,\varepsilon^\alpha \int_{[-4,0]\times B_1} -u\,\partial_t\hat{\phi} + \frac{1}{\Lambda}|\nabla u|^p\,\hat{\phi}\,d\bar{t}\,d\bar{x} \\
\leq \;& \varepsilon^{-(\alpha+N)}\,\varepsilon^\alpha\Lambda \int_{[-4,0]\times B_1} \hat{\phi}\,d\bar{t}\,d\bar{x} \\
= \;& \varepsilon^\alpha\Lambda \int_{[\frac{-4}{\varepsilon^\alpha},0]\times B_{1/\varepsilon}} \phi\,dt\,dx.
\end{aligned}$$

Além disso, u_1 é também solução no sentido da viscosidade em $[-\frac{4}{\varepsilon^\alpha}, 0]\times B_{1/\varepsilon}$ para

$$\partial_t u_1 + \frac{\Lambda}{\varepsilon^{p-\alpha}}\,|\nabla u_1|^p \geq 0. \tag{4.41}$$

Com efeito, se $\varphi \in C^\infty([-\frac{4}{\varepsilon^\alpha},0]\times B_{1/\varepsilon})$, e $(u_1-\varphi)$ tem um mínimo local em algum ponto $(t_0,x_0)\in[-\frac{4}{\varepsilon^\alpha},0]\times B_{1/\varepsilon}$, então, $(u-\bar{\varphi})$ tem um mínimo local em $(s_0,y_0)=(\varepsilon^\alpha t_0,\varepsilon x_0)$, onde

$$\bar{\varphi}(t,x)=\varphi(t/\varepsilon^\alpha,x/\varepsilon).$$

Portanto, como u é solução viscosa para (4.39), obtemos

$$\partial_t\bar{\varphi}(s_0,y_0)+\Lambda\,|\nabla\bar{\varphi}(s_0,y_0)|^p\geq 0,$$

daí, voltando para φ, implica que

$$\partial_t\varphi(t_0,x_0)+\frac{\Lambda}{\varepsilon^{p-\alpha}}\,|\nabla\varphi(t_0,x_0)|^p\geq 0.$$

Agora, note que

$$\left\{\frac{1}{\varepsilon^{p-\alpha}}:\varepsilon\in(0,1),\alpha\in[1,p)\right\}=(1,+\infty),$$

isso significa que, podemos encontrar $\varepsilon\in(0,1)$ e $\alpha\in[1,p)$ de tal forma que

$$\frac{1}{\varepsilon^{p-\alpha}}=2^{(K_0+1)(p-1)}. \tag{4.42}$$

Então, como $\frac{p-1}{p-\alpha}\geq 1$, obtemos facilmente por (4.42) a desigualdade a seguir

$$\varepsilon^\alpha=\frac{1}{2^{(K_0+1)(\frac{p-1}{p-\alpha})\alpha}}\leq\frac{1}{2^{K_0+1}}.$$

Em consequência, segue de (4.40) e (4.41) que u_1 é solução fraca para (4.28) em $[-\frac{4}{\varepsilon^\alpha},0]\times B_{1/\varepsilon}$, e também é solução no sentido da viscosidade para (4.29) em $[-\frac{4}{\varepsilon^\alpha},0]\times B_{1/\varepsilon}$. Assim, visto que, $|u_1|\leq 2$ em $[-\frac{4}{\varepsilon^\alpha},0]\times B_{1/\varepsilon}$ e $[-4,0]\times B_1\subset[-\frac{4}{\varepsilon^\alpha},0]\times B_{1/\varepsilon}$, dependendo das hipóteses (4.30) ou (4.35) podemos aplicar diretamente a Proposição 4.3.1 ou 4.3.2, obtendo

$$u_1\leq 2-\tilde{\lambda}\quad\text{em}\quad[-1,0]\times B_{1/2},$$

ou

$$u_1\geq -2+\tilde{\lambda}\quad\text{em}\quad[-1,0]\times B_{1/2}.$$

Considerando o melhoramento da oscilação por cima ou por baixo de u_1, escolhemos respectivamente $d_1=-\tilde{\lambda}/2$ ou $d_1=\tilde{\lambda}/2$, o que implicará na desigualdade

$$|u_1-d_1|\leq 2-\frac{\tilde{\lambda}}{2}\quad\text{em}\quad[-1,0]\times B_{1/2}. \tag{4.43}$$

Etapa 2:

Como feito na Etapa 1, considere $\varepsilon_1\in(0,1)$ e $\alpha_1\in[1,p)$ que serão determinados em breve, e uma função reescalonanda $u_2:[-\frac{4}{\varepsilon^\alpha\varepsilon_1^{\alpha_1}},0]\times B_{1/\varepsilon\varepsilon_1}\to\mathbb{R}$, da seguinte forma

$$u_2(t,x)=\frac{4}{4-\tilde{\lambda}}\left\{u_1(\varepsilon_1^{\alpha_1}t,\varepsilon_1 x)-d_1\right\}.$$

Observe que u_2 é uma solução fraca para a desigualdade abaixo em $[-\frac{4}{\varepsilon^{\alpha}\varepsilon_1^{\alpha_1}}] \times B_{1/\varepsilon\varepsilon_1}$,

$$\partial_t u_2 + \frac{2^{(K_0+1)(p-1)}}{\Lambda\, \varepsilon_1^{p-\alpha_1}} \left(\frac{4-\tilde{\lambda}}{4}\right)^{p-1} |\nabla u_2|^p \leq \frac{\Lambda\, \varepsilon_1^{\alpha_1}}{2^{K_0+1}} \left(\frac{4}{4-\tilde{\lambda}}\right). \tag{4.44}$$

De fato, dada uma função teste não negativa $\phi \in C_0^\infty\left((-\frac{4}{\varepsilon^{\alpha}\varepsilon_1^{\alpha_1}}) \times B_{1/\varepsilon\varepsilon_1}\right)$, e fazendo a mudança de variável $h(t,x) = (\frac{t}{\varepsilon_1^{\alpha_1}}, \frac{x}{\varepsilon_1})$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{[-\frac{4}{\varepsilon^{\alpha}\varepsilon_1^{\alpha_1}},0]\times B_{1/\varepsilon\varepsilon_1}} -u_2\partial_t\phi + \frac{2^{(K_0+1)(p-1)}}{\Lambda\, \varepsilon_1^{p-\alpha_1}} \left(\frac{4-\tilde{\lambda}}{4}\right)^{p-1} |\nabla u_2|^p \phi\, dt\, dx \\
= \;& \frac{1}{\varepsilon_1^{\alpha_1+N}} \int_{[-\frac{4}{\varepsilon^{\alpha}},0]\times B_{1/\varepsilon}} -\frac{4}{4-\tilde{\lambda}} u_1 \partial_t\hat{\phi}\, \varepsilon_1^{\alpha_1} + \frac{2^{(K_0+1)(p-1)}}{\Lambda\, \varepsilon_1^{p-\alpha_1}} \left(\frac{4\,\varepsilon_1^{p}}{4-\tilde{\lambda}}\right) |\nabla u_1|^p\, \hat{\phi}\, d\bar{t}\, d\bar{x} \\
= \;& \frac{1}{\varepsilon_1^{\alpha_1+N}} \left(\frac{4\,\varepsilon_1^{\alpha_1}}{4-\tilde{\lambda}}\right) \int_{[-\frac{4}{\varepsilon^{\alpha}},0]\times B_{1/\varepsilon}} -u_1\partial_t\hat{\phi} + \frac{2^{(K_0+1)(p-1)}}{\Lambda} |\nabla u_1|^p\, \hat{\phi}\, d\bar{t}\, d\bar{x} \\
\leq \;& \frac{1}{\varepsilon_1^{\alpha_1+N}} \left(\frac{4\,\varepsilon_1^{\alpha_1}}{4-\tilde{\lambda}}\right) \frac{\Lambda}{2^{K_0+1}} \int_{[-\frac{4}{\varepsilon^{\alpha}},0]\times B_{1/\varepsilon}} \hat{\phi}\, d\bar{t}\, d\bar{x} \qquad (4.45)\\
= \;& \frac{\Lambda}{2^{K_0+1}} \varepsilon_1^{\alpha_1} \left(\frac{4}{4-\tilde{\lambda}}\right) \int_{[-\frac{4}{\varepsilon^{\alpha}\varepsilon_1^{\alpha_1}}]\times B_{1/\varepsilon\varepsilon_1}} \phi\, dt\, dx.
\end{aligned}$$

A desigualdade (4.45) ocorre do fato de u_1 ser solução de (4.28), além disso, $\hat{\phi}(t,x) = \phi(\frac{t}{\varepsilon_1^{\alpha_1}}, \frac{x}{\varepsilon_1})$.

Temos também que, u_2 é solução viscosa para a desigualdade abaixo

$$\partial_t u_2 + \Lambda 2^{(K_0+1)(p-1)} \frac{1}{\varepsilon_1^{p-\alpha_1}} \left(\frac{4-\tilde{\lambda}}{4}\right)^{p-1} |\nabla u_2|^p \geq 0. \tag{4.46}$$

Seja $\varphi \in C^\infty([-\frac{4}{\varepsilon^{\alpha}\varepsilon_1^{\alpha_1}}, 0] \times B_{1/\varepsilon\varepsilon_1})$, tal que, $(u_2 - \varphi)$ tem um mínimo local em algum ponto $(t_0, x_0) \in [-\frac{4}{\varepsilon^{\alpha}\varepsilon_1^{\alpha_1}}, 0] \times B_{1/\varepsilon\varepsilon_1}$, ou seja, a função abaixo tem um mínimo local em (t_0, x_0)

$$\frac{4}{4-\tilde{\lambda}} \{u_1(\varepsilon_1^{\alpha_1} t, \varepsilon_1 x) - d_1\} - \varphi(t,x),$$

então, de forma equivalente a função a seguir tem um mínimo em (t_0, x_0)

$$u(\varepsilon_1^{\alpha_1} t, \varepsilon_1 x) - \frac{(4-\tilde{\lambda})}{4} \varphi(t,x).$$

Dessa forma, se $(s_0, y_0) = (\varepsilon_1^{\alpha_1} t_0, \varepsilon_1 x_0)$ e

$$\hat{\varphi}(t,x) = \frac{4-\tilde{\lambda}}{4} \varphi(\frac{t}{\varepsilon_1^{\alpha_1}}, \frac{x}{\varepsilon_1}),$$

isso implica que, $(u_1 - \hat{\varphi})$ tem um mínimo local em (s_0, y_0), e como u_1 é solução viscosa de (4.41), obtemos

$$\partial_t \hat{\varphi}(s_0, y_0) + \frac{\Lambda}{\varepsilon^{p-\alpha}} |\nabla \hat{\varphi}(s_0, y_0)|^p \geq 0,$$

assim,

$$\partial_t\varphi(s_0/\varepsilon_1^{\alpha_1}, y_0/\varepsilon_1) + \frac{\Lambda}{\varepsilon^{p-\alpha}}\frac{1}{\varepsilon^{p-\alpha_1}}\left(\frac{4-\tilde{\lambda}}{4}\right)^{p-1}|\nabla\varphi(s_0/\varepsilon_1^{\alpha_1}, y_0/\varepsilon_1)|^p \geq 0.$$

Por fim, da Etapa 1 usamos (4.42), consequentemente

$$\partial_t\varphi(t_0, x_0) + \Lambda 2^{(K_0+1)(p-1)}\frac{1}{\varepsilon_1^{p-\alpha_1}}\left(\frac{4-\tilde{\lambda}}{4}\right)^{p-1}|\nabla\varphi(t_0, x_0)|^p \geq 0.$$

De fato, u_2 é solução viscosa da equação (4.46).

Olhando para a equação (4.46), é natural tomar ε_1 da seguinte forma, em que $\alpha_1 \in (0, p)$ será determinada mais a frente,

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{4-\tilde{\lambda}}{4}\right)^{\frac{p-1}{p-\alpha_1}} \tag{4.47}$$

Com essa escolha para ε_1, obtemos

$$\frac{1}{\varepsilon_1^{p-\alpha_1}}\left(\frac{4-\tilde{\lambda}}{4}\right)^{p-1} = 1, \tag{4.48}$$

e ainda

$$\varepsilon_1^{\alpha_1}\left(\frac{4}{4-\tilde{\lambda}}\right) = \left(\frac{4-\tilde{\lambda}}{4}\right)^{\frac{p(\alpha_1-1)}{p-\alpha_1}} < 1,$$

a desigualdade ocorre, pois, $\alpha_1 \in (1, p)$ e daí $\frac{p(\alpha_1-1)}{p-\alpha_1} > 0$. Então, se ε_1 é dado por (4.47), segue facilmente de (4.44) e (4.46) que u_2 é também solução fraca de (4.28) em $[-\frac{4}{\varepsilon^\alpha\varepsilon_1^{\alpha_1}}, 0] \times B_{1/\varepsilon\varepsilon_1}$, e solução no sentido da viscosidade para (4.29) em $[-\frac{4}{\varepsilon^\alpha\varepsilon_1^{\alpha_1}}, 0] \times B_{1/\varepsilon\varepsilon_1}$.

Pela construção de u_2 e por (4.43), u_2 deve satisfazer

$$|u_2| \leq 2 \quad \text{em} \quad [-\frac{1}{\varepsilon_1^{\alpha_1}}, 0] \times B_{1/2\varepsilon_1}.$$

Perceba que temos a liberdade de escolher $\alpha_1 \in (1, p)$ tão próximo de $p > 1$ o quanto quisermos. Com isso, observe que

$$\lim_{\alpha_1 \to p^-}\left(\frac{4}{4-\tilde{\lambda}}\right)^{\frac{p-1}{p-\alpha_1}} = +\infty,$$

então, podemos escolher $\alpha_1 \in (1, p)$ suficientemente próximo de p , de modo que

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = \left(\frac{4}{4-\tilde{\lambda}}\right)^{\frac{p-1}{p-\alpha_1}} > 4.$$

Dessa forma, α_1 depende de p e $\tilde{\lambda}$ (e consequentemente de N, Λ, e p), e as duas relações abaixo devem ser satisfeitas

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_1^{\alpha_1}} &= \left(\frac{4}{4-\tilde{\lambda}}\right)^{\frac{p-1}{p-\alpha_1}\alpha_1} > 4, \\ \frac{1}{2\varepsilon_1} &> 1. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Com essas desigualdades, temos a garantia que

$$[-4,0] \times B(1) \subset [-\varepsilon^{-\alpha_1}, 0] \times B_{1/2\varepsilon_1},$$

implicando em

$$|u_2| \leq 2 \quad \text{em} \quad [-4,0] \times B_1.$$

Portanto, podemos aplicar a Proposição 4.3.1 ou 4.3.2, e de forma inteiramente análoga a Etapa 1 obter $d_2 \in \{-\frac{\tilde{\lambda}}{2}, \frac{\tilde{\lambda}}{2}\}$, de tal forma que

$$|u_2 - d_2| \leq 2 - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \quad \text{em} \quad [-1,0] \times B_{1/2}.$$

Etapa 3:

Seja $\alpha_1 \in (1,p)$ a mesma constante da Etapa 2 que satisfaz (4.49), e seja $\varepsilon_1 \in (0,1)$ dado por (4.47). Por indução, vamos supor que foi feito o reescalonamento da função original $u : [-4,0] \times B_1 \to \mathbb{R}$ $m-1$ vezes, e também obtemos uma sequência de números reais $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$, sendo

$$d_i \in \left\{ -\frac{\tilde{\lambda}}{2}, \frac{\tilde{\lambda}}{2} \right\},$$

de maneira que as funções reescalonadas são determinadas pela seguinte relação de recorrência (para $2 \leq k \leq m-1$)

$$u_k(t,x) = \frac{4}{4-\tilde{\lambda}} \{u_{k-1}(\varepsilon_1^{\alpha_1} t, \varepsilon_1 x) - d_{k-1}\} \tag{4.50}$$

e satisfazem as propriedades a seguir.

Para cada $1 \leq j \leq m-1$, u_j é solução fraca de (4.28) em $[-4,0] \times B_1$, e também é solução viscosa para (4.29) em $[-4,0] \times B_1$.

Para cada $1 \leq j \leq m-1$, temos a desigualdade

$$|u_j| \leq 2 \quad \text{em} \quad [-4,0] \times B_1.$$

Visto que, u_{m-1} satisfaz as duas propriedades acima, podemos aplicar a Proposição 4.3.1 ou 4.3.2 e deduzir que

$$u_{m-1} \leq 2 - \tilde{\lambda}, \ \text{ou} \ \ u_{m-1} \geq -2 + \tilde{\lambda} \ \text{ em } \ [-1,0] \times B_{1/2},$$

isto significa que, é possível escolher uma constante adequada

$$d_{m-1} \in \left\{ -\frac{\tilde{\lambda}}{2}, \frac{\tilde{\lambda}}{2} \right\},$$

de forma que

$$|u_{m-1} - d_{m-1}| \leq 2 - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \quad \text{em} \quad [-1,0] \times B_{1/2}.$$

Assim, considere a função reescalonada $u_m : [-\frac{4}{\varepsilon_1^{\alpha_1}}, 0] \times B_{1/\varepsilon_1} \to \mathbb{R}$ definida abaixo

$$u_m(t,x) = \frac{4}{4-\tilde{\lambda}} \{u_{m-1}(\varepsilon_1^{\alpha_1} t, \varepsilon_1 x) - d_{m-1}\}.$$

Afirmamos que u_m é solução fraca de (4.28) em $[-\frac{4}{\varepsilon_1^{\alpha_1}}, 0] \times B_{1/\varepsilon_1}$, e solução no sentido da viscosidade para (4.29) em $[-\frac{4}{\varepsilon_1^{\alpha_1}}, 0] \times B_{1/\varepsilon_1}$.

Primeiro, vamos verificar que u_m é solução de (4.28) em $[-\frac{4}{\varepsilon_1^{\alpha_1}}, 0] \times B_{1/\varepsilon_1}$. Seja $\phi \in C_0^\infty((\frac{4}{\varepsilon_1^{\alpha_1}}, 0) \times B_{1/\varepsilon_1})$, então

$$\begin{aligned}
&\int_{[-\frac{4}{\varepsilon_1^{\alpha_1}},0]\times B_{1/\varepsilon_1}} u_m \partial_t \phi + \frac{2^{(K_0+1)(p-1)}}{\Lambda} |\nabla u_m|^p \, \phi \, dt \, dx \\
= \; & \frac{1}{\varepsilon_1^{\alpha_1+N}} \int_{[-4,0]\times B_1} -\frac{4}{4-\tilde{\lambda}} u_{m-1} \partial_t \hat{\phi} \, \varepsilon_1^{\alpha_1} + \frac{2^{(K_0+1)(p-1)}}{\Lambda} \left(\frac{4}{4-\tilde{\lambda}}\right)^p \varepsilon_1^p \, |\nabla u_{m-1}|^p \hat{\phi} \, d\bar{t} \, d\bar{x} \\
= \; & \frac{1}{\varepsilon_1^{\alpha_1+N}} \left(\frac{4}{4-\tilde{\lambda}}\right) \varepsilon_1^{\alpha_1} \int_{[-4,0]\times B_1} -u_{m-1} \partial_t \hat{\phi} + \frac{2^{(K_0+1)(p-1)}}{\Lambda} |\nabla u_{m-1}|^p \hat{\phi} \, d\bar{t} \, d\bar{x} \\
\leq \; & \frac{1}{\varepsilon_1^{\alpha_1+N}} \left(\frac{4}{4-\tilde{\lambda}}\right) \varepsilon_1^{\alpha_1} \frac{\Lambda}{2^{K_0+1}} \int_{[-4,0]\times B_1} \hat{\phi} \, d\bar{t} \, d\bar{x} \\
\leq \; & \frac{1}{\varepsilon_1^{\alpha_1+N}} \frac{\Lambda}{2^{K_0+1}} \int_{[-4,0]\times B_1} \hat{\phi} \, d\bar{t} \, d\bar{x} \\
= \; & \frac{\Lambda}{2^{K_0+1}} \int_{[-\frac{4}{\varepsilon_1^{\alpha_1}},0]\times B_{1/\varepsilon_1})} \phi \, dt \, dx.
\end{aligned}$$

Agora mostremos que u_m é solução viscosa da desigualdade (4.29) em $[-\frac{4}{\varepsilon_1^{\alpha_1}}, 0] \times B_{1/\varepsilon_1}$. Suponha que $\varphi \in C^\infty([-\frac{4}{\varepsilon_1^{\alpha_1}}, 0] \times B_{1/\varepsilon_1}$ e $(u_m - \varphi)$ tem um mínimo local em $(t_0, x_0) \in [-\frac{4}{\varepsilon_1^{\alpha_1}}, 0] \times B_{1/\varepsilon_1}$. De maneira equivalente, a função abaixo tem um mínimo local em (t_0, x_0)

$$u_{m-1}(\varepsilon_1^{\alpha_1} t, \varepsilon_1 x) - \frac{(4-\tilde{\lambda})}{4} \varphi(t, x).$$

Portanto, se $(s_0, y_0) = (\varepsilon_1^{\alpha_1} t_0, \varepsilon_1 x_0)$ e

$$\hat{\varphi}(t, x) = \frac{4-\tilde{\lambda}}{4} \varphi(t/\varepsilon_1^{\alpha_1}, x/\varepsilon_1) \quad \text{em} \quad [-4, 0] \times B_1,$$

significa que $(u_{m-1} - \hat{\varphi})$ tem um mínimo local em (s_0, y_0), e consequentemente, como u_{m-1} é solução no sentido da viscosidade de (4.29) em $[-4, 0] \times B_1$, temos

$$\partial_t \hat{\varphi}(s_0, y_0) + 2^{(K_0+1)(p-1)} \Lambda |\nabla \hat{\varphi}(s_0, y_0)|^p \geq 0.$$

Voltando para φ, obtemos

$$\partial_t \varphi(t_0, x_0) + 2^{(K_0+1)(p-1)} \Lambda \left(\frac{4-\tilde{\lambda}}{4}\right)^{p-1} \frac{1}{\varepsilon_1^{p-\alpha_1}} |\nabla \varphi(t_0, x_0)|^p \geq 0,$$

usando (4.48), temos

$$\partial_t \varphi(t_0, x_0) + 2^{(K_0+1)(p-1)} \Lambda |\nabla \varphi(t_0, x_0)|^p \geq 0,$$

assim u_m é solução viscosa de (4.29).

Por construção, temos

$$|u_m| \leq 2 \quad \text{em} \quad [-\frac{4}{\varepsilon_1^{\alpha_1}}, 0] \times B_{1/2\varepsilon_1},$$

e como $[-4,0] \times B_1 \subset [-\varepsilon^{-\alpha_1}, 0] \times B_{1/2\varepsilon_1}$, a desigualdade acima é satisfeita em $[-4,0] \times B_1$. Então, aplicando a Proposição 4.3.1 ou 4.3.2, podemos encontrar $d_m \in \{-\frac{\tilde{\lambda}}{2}, \frac{\tilde{\lambda}}{2}\}$, em que

$$|u_m - d_m| \leq 2 - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \quad \text{em} \quad [-1,0] \times B_{1/2}.$$

Então, indutivamente obtemos uma sequência de números reais $\{d_m\}_{m=1}^{\infty}$ e uma sequência de funções reescalonadas $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ definidas em (4.50), de forma que

$$|u_m - d_m| \leq 2 - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \quad \text{em} \quad [-1,0] \times B_{1/2},$$

daí, para cada $m \in \mathbb{Z}^+$, temos

$$\begin{aligned} |u_{m+1}(t,x) - u_{m+1}(\tau,y)| &= \frac{4}{4-\tilde{\lambda}} |u_m(\varepsilon_1^{\alpha_1} t, \varepsilon_1 x) - u_m(\varepsilon_1^{\alpha_1}\tau, \varepsilon_1 y)| \\ &\vdots \\ &= \left(\frac{4}{4-\tilde{\lambda}}\right)^m |u_1(\varepsilon_1^{\alpha_1 m} t, \varepsilon_1^m x) - u_1(\varepsilon_1^{\alpha_1 m}\tau, \varepsilon_1^m y)| \\ &\leq 4 - \tilde{\lambda} \end{aligned}$$

onde $(t,x), (\tau,y) \in [-1,0] \times B_{1/2}$. Em consequência, para todo $m \geq 0$, temos

$$\operatorname{osc}_{\tilde{Q}_m} u_1 \leq 4 \left(\frac{4-\tilde{\lambda}}{4}\right)^{m+1},$$

em que $\tilde{Q}_m = [-\varepsilon_1^{m\alpha_1}, 0] \times B_{\varepsilon_1^m/2}$. Então, antes de voltar para u, defina

$$\varepsilon_* = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon\} \ \text{ e } \ \alpha_* = \max\{\alpha_1, \alpha\}. \tag{4.51}$$

Sabendo que, quando u_1 varia em $\tilde{Q}_m$, u varia em $[-\varepsilon_1^{m\alpha_1}\varepsilon^{\alpha}, 0] \times B_{\varepsilon_1^m \varepsilon/2}$, portanto, definindo o cilindro

$$\tilde{Q}_{m_*} = [-\varepsilon_*^{\alpha_* m}, 0] \times B_{\varepsilon_*^m/2},$$

temos

$$\operatorname{osc}_{\tilde{Q}_{(m+1)_*}} u \leq \operatorname{osc}_{\tilde{Q}_m} u_1 \leq 4 \left(\frac{4-\tilde{\lambda}}{4}\right)^{m+1},$$

ou seja,

$$\operatorname{osc}_{\tilde{Q}_{m_*}} u \leq 4 \left(\frac{4-\tilde{\lambda}}{4}\right)^{m}$$

para todo $m \geq 1$. □

A seguir, apresentamos a prova da regularidade C^{α} para soluções da equação de Hamilton Jacobi.

Teorema 4.4.1. *Dados $N \in \mathbb{Z}^+$, $p \in (1, \infty)$, $T > 0$ e $R > 0$. Seja $u \in L^p(0, T; W^{1,p}(B_R))$ uma solução limitada em $(0, T) \times B_R$ para as desigualdades* (4.3) *e* (4.4). *Então, para cada $\tau \in (0, T)$ e $r \in (0, R)$, temos*

$$u \in C^\alpha([\tau, T) \times B_r),$$

com $\alpha \in (0, 1)$, e $\|u\|_{C^\alpha([\tau,T)\times B_r)}$ dependendo apenas de N, T, τ, R, r, Λ, p e $\|u\|_{L^\infty((0,T)\times B_R)}$.

Demonstração. Sejam $\tau \in (0, T)$ e $r \in (0, R)$, além disso, tome $(t_0, x_0) \in [\tau, T) \times B_r$. Então, se

$$c_1 = \frac{\tau}{4}, \ \ c_2 = R - r, \ \text{e} \ \ c = \min\{c_1, c_2\},$$

considere a função reescalonada

$$v(t, x) = u(t_0 + c^p t, x_0 + cx) \ \ \text{em} \ \ [-4, 0] \times B_1.$$

Note que v é solução fraca de (4.4) em $[-4, 0] \times B_1$, e também v é solução no sentido da viscosidade para a desigualdade (4.3) em $[-4, 0] \times B_1$.

Como ja foi dito no começo dessa seção, podemos supor que v é solução de (4.4) e (4.39). Assim, pela Proposição 4.4.1, existem constantes $\varepsilon_* \in (0, 1)$, $\lambda \in \tilde{(}0, 1)$ e $\alpha_* \in (1, p)$ dependendo apenas de N, p e Λ, tal que

$$\operatorname{osc}_{\tilde{Q}_{m*}} v \leq 4 \left(\frac{4 - \tilde{\lambda}}{4} \right)^m . \tag{4.52}$$

Definindo o cilindro $\tilde{Q}_{m_0} = [t_0 - \varepsilon_*^{m\alpha_*} c^p, t_0] \times B_{c\varepsilon_*^m/2}$, temos que, (4.52) é equivalente a desigualdade seguinte

$$\operatorname{osc}_{\tilde{Q}_{m_0}} u \leq 4 \left(\frac{4 - \tilde{\lambda}}{4} \right)^m$$

para todo $m \geq 1$. Portanto, dado $(t, x) \in [\tau, T) \times B_r$, tem-se

Caso I: $|t - t_0| + |x - x_0| < c^p$.

Considere $\beta = \min\{\varepsilon_*^{\alpha_*}, \frac{\varepsilon_*}{2}\}$. Então, perceba que existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tal que

$$c^p \beta^{(k+1)} \leq |t - t_0| + |x - x_0| \leq c^p \beta^k. \tag{4.53}$$

Defina $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$\beta^\alpha = \left(\frac{4 - \tilde{\lambda}}{4} \right),$$

então

$$\alpha = \frac{\ln((4 - \tilde{\lambda})/4)}{\ln \beta},$$

e de fato, $\alpha \in (0, 1)$, por (4.47) e (4.51). Assim, temos

$$|u(t_0, x_0) - u(t, x)| \leq 4 \left(\frac{4 - \tilde{\lambda}}{4} \right)^k = \beta^{k\alpha} \frac{\beta^\alpha c^{p\alpha}}{\beta^\alpha c^{p\alpha}} 4 \leq \frac{4}{\beta^\alpha c^{p\alpha}} (|t - t_0| + |x - x_0|)^\alpha$$

Caso II: $c^p \leq |t - t_0| + |x - x_0|$.

Sabendo que $|u| \leq 2$, obtemos

$$|u(t_0, x_0) - u(t, x)| \leq 4 = 4\frac{c^{p\alpha}}{c^{p\alpha}} \leq \frac{4}{\beta^\alpha c^{p\alpha}}(|t - t_0| + |x - x_0|)^\alpha.$$

Por fim, note que as estimativas não dependem de $(t_0, x_0) \in [\tau, T) \times B_r$, logo concluímos que $u \in C^\alpha([\tau, T) \times B_r)$. $\square$

Apêndice A

Espaço de Sobolev

A.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Definição A.1.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável, e $1 \leq p < \infty$. O conjunto de todas as funções mensuráveis de Ω em $\mathbb{R}$ tais que*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_\Omega |f|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

será denotado por $L^p(\Omega)$.

Definição A.1.2. *O espaço $L^\infty(\Omega)$ é conjunto das funções mensuráveis que são limitadas em quase toda parte, ou seja*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e, } |f(x)| \leq C \ \text{q.t.p. em } \Omega\}$$

dotado da norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; \, |f(x)| \leq C \ \text{q.t.p. em } \Omega\}.$$

Teorema A.1.1 (Desigualdade de Hölder)**.** *Suponha que $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^p(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja [[10], pág. 92, Teorema 4.6] □

Proposição A.1.1 (Interpolação)**.** *Assuma que $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$, e*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Além disso, se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, então $u \in L^r(\Omega)$, e

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}$$

Demonstração. Veja [[11], pág. 707] □

A.2 Derivada Fraca

Seja k um inteiro positivo, $\phi \in C^k(\Omega)$, e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, em que α é um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$, então

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \phi.$$

Definição A.2.1. *Sejam $u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, e α um multi-índice. Então, v é chamada a α-ésima derivada fraca de u se*

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi \, dx, \tag{A.1}$$

para toda função teste $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Dessa forma, denotamos $D^\alpha u = v$ no quando (A.1) for satisfeito para todo ϕ. Perceba que o conceito de derivada fraca é uma extensão do conceito clássico, pois, se $u \in C^k(\Omega)$ na definição acima, obtemos usando integração por partes

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u \phi \, dx.$$

Definição A.2.2. *Se u é qualquer função de Ω em $\mathbb{R}$, definimos a parte positiva e a parte negativa por*

$$u_+(x) = \sup\{u(x), 0\}, \;\; u_-(x) = \sup\{-u(x), 0\}$$

respectivamente. É claro que

$$u = u_+ - u_- \;\; e \;\; |u| = u_+ + u_- \, .$$

Lema A.2.1. *Considere uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que possui todas as derivadas fracas de primeira ordem. Então, ∇u_+ também existe fracamente e*

$$\nabla u_+ = \begin{cases} \nabla u & se \; u > 0 \\ 0 & se \; u \leq 0. \end{cases}$$

Demonstração. Veja [[6], pág. 152, Lema 7.6]. □

Observe que o lema acima segue para u_- e $|u|$, uma vez que, $u_- = (-u)_+$ e $|u| = u_+ + u_-$, sendo

$$\nabla u_- = \begin{cases} -\nabla u & \text{se } u < 0 \\ 0 & \text{se } u \geq 0 \end{cases}$$

$$\nabla |u| = \begin{cases} \nabla u & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u = 0 \\ -\nabla u & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

A.3 Definindo o Espaço de Sobolev

Definição A.3.1. *O espaço de Sobolev*

$$W^{k,p}(\Omega)$$

é formado por todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que, a derivada fraca $D^\alpha u$ existe, para qualquer multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, e pertence a $L^p(\Omega)$.

Observação A.3.1. *Se $p = 2$, denotamos*

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) \quad (k = 0, 1, ...).$$

O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial munido com a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

a qual, é equivalente à norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \left\{ \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Definição A.3.2. *Seja $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência em $W^{k,p}(\Omega)$. Dizemos que u_n converge para $u \in W^{k,p}(\Omega)$, quando*

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Definição A.3.3. *O espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Então, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe existe uma sequência de funções $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$, tal que, $u_n \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

A.4 Algumas Propriedades

Proposição A.4.1 (Regra de Leibniz)**.** *Sejam $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Então, $\psi u \in W^{k,p}(\Omega)$ e*

$$D^\alpha(\psi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi D^{\alpha - \beta} u.$$

Demonstração. Veja [[11], pág. 261, Teorema 1]. □

Teorema A.4.1. *O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, para cada k inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Veja [[11], pág. 262, Teorema 2]. □

Teorema A.4.2 (Aproximação por funções suaves)**.** *Suponha que Ω é limitado, e que $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para alguma $1 \leq p < \infty$. Então existe uma sequência de funções $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$, tal que*

$$u_m \to u \quad \text{em} \quad W^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. Veja [[11], pág. 265, Teorema 2]. □

Definição A.4.1. *Seja $1 \leq p < N$, então o expoente crítico de Sobolev de p é*

$$p^* := \frac{Np}{N-p}.$$

Teorema A.4.3 (Desigualdade de Sobolev)**.** *Supondo que Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$, e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < N$. Então, temos a desigualdade*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

para qualquer $q \in [1, p^*]$. A constante C depende apenas de p, q, N e Ω.

Demonstração. Veja [[11], pág. 279, Teorema 3]. □

A.5 Quociente de Diferenças

Nesta seção, fazemos um breve estudo do quociente de diferenças, o qual, desempenha um papel fundamental na análise da diferenciabilidade fraca de funções. Mais precisamente, essa ferramenta pode nos garantir que soluções fracas de (2.4) em H^1, estará também localmente em H^2.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto qualquer, e $K \Subset \Omega$, definimos o quociente de diferenças por,

$$T_{h_i}u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h},$$

para $x \in K$, $0 < |h| < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$ e e_i o i-ésimo vetor da base canônica em $\mathbb{R}^N$. Além disso, definimos também

$$T_h u := (T_{h_1}u, \dots, T_{h_N}u).$$

Teorema A.5.1. *Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então, para cada $K \Subset \Omega$, tem-se*

$$\|T_h u\|_{L^p(K)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \tag{A.2}$$

para alguma constante C e qualquer $0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$.

Demonstração. Veja [[11], pág. 292, Teorema 3]. □

Teorema A.5.2. *Sejam $K \Subset \Omega$, $1 < p < \infty$ e $u \in L^p(K)$. Suponha que existe uma constante C tal que*

$$\|T_h u\|_{L^p(K)} \leq C \tag{A.3}$$

para todo $0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Então,

$$u \in W^{1,p}(K), \quad com \ \|\nabla u\|_{L^p(K)} \leq C.$$

Demonstração. Veja [[11], pág. 292, Teorema 3]. □

Considere a função não negativa η com suporte compacto em B_2, e igual a 1 em B_1. Abaixo, temos algumas propriedades.

Lema A.5.1. *Para qualquer* $\tilde{\phi}$, $\tilde{\psi} \in L^2(B_3)$, $\phi \in H^1(B_3)$ *e* $\Phi \in [L^2(B_3)]^N$, *temos*

$$\int_{B_2} T_{h_i}(\eta\tilde{\phi})\tilde{\psi}\,dx = -\int_{B_2} \tilde{\phi}\eta T_{-h_i}\tilde{\psi}\,dx \tag{A.4}$$

$$\nabla[\eta^2 T_{h_i}\phi] = \eta^2 T_{h_i}[\nabla\phi] + 2\eta[T_{h_i}\phi]\nabla\eta \tag{A.5}$$

$$\eta T_{h_i}\{DF(\Phi)\}(x) = \eta T_{h_i}\Phi(x)\int_0^1 D^2F(\Phi(x) + t(\Phi(x+he_i) - \Phi(x)))\,dt \tag{A.6}$$

Demonstração. Para mostrar (A.4), vamos usar a mudança de variável $y = x - he_i$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_{B_2} T_{h_i}(\eta\tilde{\phi})\tilde{\psi}\,dx &= \int_{B_2} \frac{(\eta\tilde{\phi})(x+he_i)\tilde{\psi}(x)}{h}dx - \int_{B_2} \frac{(\eta\tilde{\phi})(x)\tilde{\psi}(x)}{h}dx \\
&= \int_{B_2} \frac{(\eta\tilde{\phi})(x)\tilde{\psi}(x-he_i)}{h}dx - \int_{B_2} \frac{(\eta\tilde{\phi})(x)\tilde{\psi}(x)}{h}dx \\
&= -\int_{B_2} \tilde{\phi}\eta T_{-h_i}\tilde{\psi}\,dx.
\end{aligned}$$

Para mostrar (A.5), basta utilizar a Regra de Leibniz. Agora, observe que a derivada em t de $\dfrac{\eta}{h}DF(\Phi(x) + t(\Phi(x+he_i) - \Phi(x)))$, é

$$\frac{\eta}{h}D^2F(\Phi(x) + t(\Phi(x+he_i) - \Phi(x))) \cdot [\Phi(x+he_i) - \Phi(x)],$$

logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned}
\eta T_{h_i}\{DF(\Phi)\}(x) &= \eta\,\frac{DF(\Phi(x+he_i)) - DF(\Phi(x))}{h} \\
&= \eta\,\frac{[\Phi(x+he_i) - \Phi(x)]}{h}\int_0^1 D^2F(\Phi(x) + t[\Phi(x+he_i) - \Phi(x)])\,dt \\
&= \eta T_{h_i}\Phi(x)\int_0^1 D^2F(\Phi(x) + t(\Phi(x+he_i) - \Phi(x)))\,dt,
\end{aligned}$$

finalizando assim, a prova de (A.6).

□

Apêndice B

Resultados Auxiliares

B.1 Resultados Auxiliares

Proposição B.1.1. *Seja* $\alpha > 0$ *e* $\{X_i\}$ *uma sequência de números reais positivos, tais que,*

$$X_{i+1} \leq CB^i X_i^{1+\alpha},$$

com $C > 0$ *e* $B > 1$. *Se* $X_0 \leq C^{-\frac{1}{\alpha}} B^{-\frac{1}{\alpha^2}}$, *temos*

$$X_i \leq B^{-\frac{i}{\alpha}} X_0. \tag{B.1}$$

Em particular,

$$\lim_{i \to \infty} X_i = 0.$$

Demonstração. Provando por indução, (B.1) é claramente verdade para $i = 0$. Suponha que o resultado vale para $i > 0$. Então, como

$$X_{i+1} \leq CB^i X_i^{1+\alpha} \ \text{ e } \ X_i \leq B^{-\frac{i}{\alpha}} X_0,$$

implica que

$$\begin{aligned} X_{i+1} &\leq CB^i \{B^{-\frac{i}{\alpha}} X_0\}^{1+\alpha} \\ &= CB^{-\frac{i}{\alpha}} X_0 X_0^{\alpha}, \end{aligned}$$

usando o fato que, $X_0 \leq C^{-\frac{1}{\alpha}} B^{-\frac{1}{\alpha^2}}$, tem-se da última igualdade que

$$\begin{aligned} &\leq CB^{-\frac{i}{\alpha}} X_0 \{C^{-\frac{1}{\alpha}} B^{-\frac{1}{\alpha^2}}\}^{\alpha} \\ &= B^{-\frac{i+1}{\alpha}} X_0. \end{aligned}$$

Concluindo assim, o processo de indução. □

Lema B.1.1 (Desigualdade de Young). *Seja* $1 < p, q < \infty$, *tal que,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ \ (a, b \geq 0).$$

Demonstração. Veja [[11], pág. 706]. □

Lema B.1.2. *Sejam $p, q > 1$ onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, para quaisquer números positivos a, b, temos que*

$$a^{\frac{1}{p}}\, b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{B.2}$$

Demonstração. Considere a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t^\alpha - \alpha t$ onde $\alpha \in (0, 1)$. Assim,

$$f'(t) = \alpha(t^{\alpha-1} - 1),$$

isso implica que

$$\begin{array}{lll} f'(t) > 0 & \text{em} & (0,1) \\ f'(t) < 0 & \text{em} & (1,\infty), \end{array}$$

isto é, f tem um máximo em $t = 1$. Portanto,

$$f(t) \leq f(1) \quad \text{em} \quad (0,1),$$

logo,

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha).$$

Fazendo $t = \frac{a}{b}$ e $\alpha = \frac{1}{p}$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{1}{p}\frac{a}{b} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{1}{p}\frac{a}{b} + \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Então, multiplicando a desigualdade acima por b, concluímos que

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

□

Proposição B.1.2 (Desigualdade de Markov)**.** *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável. Então,*

$$|\{f \geq R > 0\}| \leq \frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{R}.$$

Demonstração. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} |\{f \geq R > 0\}| &= \int_\Omega \chi_{\{f \geq R\}}\, dx \\ &\leq \int_\Omega \chi_{\{f \geq R\}} \frac{f}{R}\, dx \\ &= \int_\Omega \chi_{\{f \geq R\}} \frac{|f|}{R}\, dx \\ &\leq \frac{1}{R} \int_\Omega |f|\, dx. \end{aligned}$$

□

Teorema B.1.1 (Aubin-Lions). *Sejam X, B e Y espaços de Banach. Se U é limitado em $L^p(0,T;X)$ e $\partial U/\partial t = \{\partial u/\partial t \ : \ u \in U\}$ é limitado em $L^r(0,T;Y)$, então U é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$, sob as condições abaixo*

$$X \hookrightarrow B \ \textit{compactamente} \ , \ \ B \hookrightarrow Y \ \textit{continuamente},$$

para qualquer $1 \leq p < \infty$ e $r = 1$, ou $p = \infty$ e $r > 1$.

Para ver mais detalhes sobre o Teorema B.1.1, veja [18].

Referências Bibliográficas

[1] A. F. VASSEUR, *The De Giorgi method for elliptic and parabolic equations and some applications*, Lectures on the analysis of nonlinear partial differential equations. Part 4, 195–222, Morningside Lect. Math., 4, Int. Press, Somerville, MA, 2016.

[2] C. B. MORREY, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 130 Springer-Verlag New York, Inc., New York 1966 ix+506 pp.

[3] C. H. CHAN AND A. VASSEUR, *De Giorgi techniques applied to the Hölder regularity of solutions to Hamilton-Jacobi equations*, From particle systems to partial differential equations, 117–137, Springer Proc. Math. Stat., 209, Springer, Cham, 2017.

[4] C. ISNARD. *Introdução à Medida e Integração*, 3. Ed. - Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[5] C. MOONEY, *Hilbert's 19th Problem Revisited*, Boll. Unione Mat. Ital., to appear.

[6] D. GILBARG AND N. S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[7] ENNIO DE GIORGI. *Selected Papers*, Springer-Verlag, Berlin, 2006. Edited by Luigi Ambrosio, Gianni Dal Maso, Marco Forti, Mario Miranda and Sergio Spagnolo.

[8] E. DE GIORGI, *Sulla differenziabilità e l'analiticitá delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 3 1957 25–43.

[9] G. BARLES, *An introduction to the theory of viscosity solutions for first-order Hamilton-Jacobi equations and applications*, Hamilton-Jacobi equations: approximations, numerical analysis and applications, 49–109, Lecture Notes in Math., 2074, Fond. CIME/CIME Found. Subser., Springer, Heidelberg, 2013.

[10] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext. Springer, New York, 2011.

[11] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[12] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional*, 2. Ed., Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[13] J. Moser. *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 457–468.

[14] J. M. Urbano. *Regularity for partial differential equations: from De Giorgi-Nash-Moser Theory to Intrinsic Scaling*, in: CIM Bulletin 12, pp. 8-14, June 2002.

[15] J. Nash, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Amer. J. Math. 80 (1958), 931–954.

[16] L. Stokols and A. Vasseur, *De Giorgi techniques applied to Hamilton-Jacobi equations with unbounded right-hand side*, Commun. Math. Sci. 16 (2018), no. 6, 1465–1487.

[17] Q. Han and F. Lin. *Elliptic partial differential equations*, Second edition. Courant Lecture Notes in Mathematics, 1. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[18] X. Chen, A. Jüngel and J. Liu, *A note on Aubin-Lions-Dubinskiĭ lemmas*, Acta Appl. Math. 133 (2014), 33–43.