

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Alguns resultados de controle para
equações diferenciais ordinárias
lineares

Cláudia Raniele da Silva Sousa

JOÃO PESSOA – PB
AGOSTO DE 2021

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Alguns resultados de controle para equações diferenciais ordinárias lineares

por

Cláudia Raniele da Silva Sousa

sob a orientação do

Prof. Dr. Maurício Cardoso Santos

João Pessoa – PB
Agosto de 2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S725a Sousa, Cláudia Raniele da Silva.

Alguns resultados de controle para equações
diferenciais ordinárias / Cláudia Raniele da Silva
Sousa. - João Pessoa, 2021.

107 f. : il.

Orientação: Maurício Cardoso Santos.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Controle
ótimo. 3. Controlabilidade. 4. Princípio do máximo de
Pontryagin. 5. Circuito fechado. 6. Equações de
Riccati. I. Santos, Maurício Cardoso. II. Título.

UFPB/BC

CDU 517.91(043)

Alguns resultados de controle para equações diferenciais ordinárias lineares

por

Cláudia Raniele da Silva Sousa 

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 31 de Agosto de 2021.

Banca Examinadora:



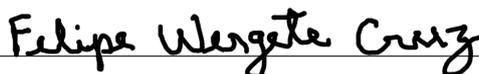
Prof. Dr. Maurício Cardoso Santos – UFPB

(Orientador)



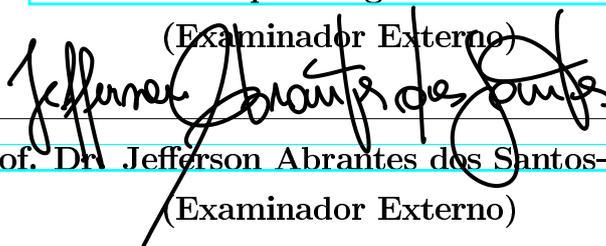
Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas – UFPB

(Examinador Interno)



Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz – UFPE

(Examinador Externo)



Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos – UFCG

(Examinador Externo)

¹A autora foi bolsista da CAPES durante todo o curso de mestrado acadêmico em Matemática da UFPB.

*"Os Sonhos não determinam
o lugar onde iremos chegar,
mas produzem a força neces-
sária para tirar-nos do lugar
em que estamos."*

Augusto Cury

Agradecimentos

A Deus pela dádiva da vida, por me permitir realizar tantos sonhos e por me permitir errar, aprender e crescer sem nunca desistir.

Aos meus pais e a Vinícius, que estão sempre presentes nos momentos das minhas trajetórias, me apoiando, me incentivando, me ensinando lições de amor, de companheirismo, de dedicação e compreensão, que não medem esforços para que eu consiga realizar os meus sonhos, e me ensinando manter a Fé, mesmo com tantas dificuldades encontradas ao longo do caminho.

Aos meus professores (grandes pessoas, humanas e inspiradoras) por toda paciência e conhecimento compartilhado, que com empenho se dedicam à arte de ensinar.

Ao companheirismo dos meus colegas de curso presente no convívio da sala de aula, nos grupos de estudos, nas conversas e calorosas discussões com respeito aos conteúdos estudados, em suma, dentro do cotidiano da vida acadêmica durante os dois anos em que frequentamos a instituição, em especial à Maria Jaislayne, Milena, Elizabeth, Carla, Marcos Gabriel e Geovane.

E um agradecimento especial ao meu Orientador Prof. Dr. Maurício Cardoso Santos, por toda paciência, atenção dedicada e por ser meu grande guia responsável pela missão que está se cumprindo, agradecer por todas as indicações, correções e motivação. Tudo isto não só contribuiu para a construção do projeto, mas como para a maturidade de uma vida a seguir.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho de dissertação, abordaremos alguns resultados de controles para sistemas regidos por equações diferenciais ordinárias. Estamos interessados em saber até que ponto podemos influenciar o comportamento das soluções de uma equação de forma que esta atinja um valor (ou valor médio) pré-estabelecido em um tempo finito. Esta noção intuitiva nos trás o conceito de conjunto dos estados acessíveis, aqueles dados que podem ser atingidos em um tempo finito por meio de um controle, onde estudaremos, algumas propriedades topológicas dos mesmos. Veremos que há uma distinção bastante interessante quando estudamos problemas de controles sem restrições e com restrições, onde apresentaremos resultados que garantam a controlabilidade em cada caso. Veremos também o problema de otimização em relação ao tempo, isto é, saber se existe um único controle ligando dois dados, um inicial e outro final, no menor tempo possível. Por fim, estudaremos um problema Linear Quadrático (L.Q.), onde estamos interessados em saber qual o melhor controle possível que minimize um custo associado à trajetória do sistema e do próprio controle. A esta classe de problemas nos referimos, usualmente, a problema de controle ótimo. Neste ponto, veremos que as soluções ótimas do problema de ciclo aberto podem, na verdade, ser vistas como soluções ótimas de um sistema de ciclo fechado. Para isto, faremos uso das equações de Riccati.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias, controle ótimo, controlabilidade, princípio do máximo de Pontryagin, circuito fechado, equações de Riccati.

Abstract

In this work, we deal with some control results for systems of ordinary differential equations. We are interested in knowing if it is possible to influence the behavior of the solutions of a given equation in such a way that they behave the way we want in a finite time. This intuitive notion brings us the concept of an accessible state set, the one consisting of data that are possible to be reached in a finite time, where we study the topological properties of this set. We will see that there is a quite interesting distinction when we study problems with or without restrictions, where we present some controllability results in each case. Also, we will see the optimization problem concerning the time, that is, we will answer the question related to the existence of control taking one data to another in the minimal time possible. Finally, we study the Linear-Quadratic problem (L.Q.), where our goal is to know which is the best control that minimizes a given cost associated with the trajectories of the system and the control itself. To this class of problems, we refer, usually, as optimal control problems. At this point, we will see that the optimal solutions of an open-loop system can be written as the optimal solutions of a closed-loop system. In order to do that, we will make use of the Riccati equation.

Keywords: Ordinary differential equations, optimal control, controllability, Pontryagin maximum principle, closed loop, Riccati equations.

Sumário

Notação	vii
Introdução	1
0.1 Apresentação do Problema	6
1 Controlabilidade	9
1.1 Controlabilidade de sistemas lineares autônomos	18
1.1.1 Caso sem restrição no controle: Condição de Kalman	18
1.1.2 Caso com restrições nos controles	26
1.1.3 Resultados de controlabilidade nula local	28
1.2 Resultados de controlabilidade nula-global	41
1.3 Controlabilidade de Sistemas Lineares não-autônomos	53
2 Existência de trajetórias otimizadas no tempo	57
2.1 Existência do controle em tempo mínimo	59
2.1.1 Caracterização dos controles extremos: Princípio do máximo de Pontryagin (PMP)	60
3 Teoria Linear Quadrática	69
3.1 Existência de trajetórias ótimas	70
3.2 Condição necessária e suficiente de otimalidade: Princípio do máximo no caso L.Q.	72
3.2.1 Princípio do máximo: Hamiltoniano	75
3.3 Função de Valor	77
3.4 Equação de Riccati	77
3.4.1 Representação linear da equação de Riccati.	82
3.4.2 Aplicação da Teoria L.Q.	82
3.4.3 Filtro Determinístico de Kalman	87
A Resultados Básicos	91
A.1 Forma canônica de Jordan para matrizes sobre o corpo dos números reais	91

A.2	Conceitos básicos de Análise Convexa	94
	Referências Bibliográficas	95

Notação

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- \forall : para todo;
- \exists : existe;
- $\text{Conv}(\Omega)$ denota a envoltória convexa de Ω ;
- $\partial\Omega$: fronteira de Ω ;
- \max : denota máximo;
- \min : denota mínimo;
- \inf : denota o ínfimo de um conjunto;
- \liminf : denota o limite inferior;
- \mathbb{N} : denota o conjunto dos números naturais;
- \mathbb{Z} : denota o conjunto dos números inteiros;
- \mathbb{R} : denota o conjunto dos números reais;
- \mathbb{C} : denota o conjunto dos números complexos;
- $\text{Re}(z)$: denota a parte real do número complexo z ;
- $|\cdot|$: denota o valor absoluto ou módulo;
- \det : denota o determinante;

- $M_n(\mathbb{K})$: denota o conjunto das matrizes quadradas de ordem n , com coeficientes em \mathbb{K} ;
- $\chi_A(\lambda)$: denota o polinômio característico da matriz A ;
- e^A : denota a exponencial da matriz A ;
- A^\top : denota a transposta da matriz A ;
- x^\top : denota a transposta do vetor x ;
- ∇f (onde f é uma função): denota o gradiente de f ;
- $A_\Omega(x_0, T)$: denota o conjunto acessível no tempo T a partir do ponto x_0 , com controles tomando valores em Ω ;
- \mathcal{U}_{ad} : denota o conjunto dos controles admissíveis, isto é, o conjunto das aplicações mensuráveis e limitadas em $[0, T]$ com valores em $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ou com valores em $\Omega = \mathbb{R}^m$;
- $\|x\|_W$ (onde $x \in \mathbb{K}^n$ e $W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$): denota a abreviação para $x^\top W x$;
- $C^p(\Omega, \mathbb{K})$: denota o conjunto das aplicações de Ω em \mathbb{K} de classe C^p ;
- $L^p_{loc}(\Omega, \mathbb{K})$: denota o conjunto de aplicações mensuráveis de Ω em \mathbb{K} , cuja potência p é integrável em qualquer compacto de Ω ;
- $H^1(\Omega, \mathbb{K})$: denota o conjunto das aplicações mensuráveis f de Ω em \mathbb{K} , tal que $f, f' \in L^2(\Omega, \mathbb{K})$;
- $L^p(\Omega, \mathbb{K})$: denota o conjunto de aplicações mensuráveis de Ω em \mathbb{K} de potência p integrável.

Introdução

Sempre existiu na humanidade o desejo de controlar as forças da natureza ou o de criar dispositivos automáticos que facilitem a vida da nossa sociedade. Voltando um pouco no tempo, vemos nos aquedutos romanos, alguns construídos em 300 a.c., dispositivos de controle bastante eficientes, cujo objetivo era o de transporte de água em fontes localizadas a grandes distâncias da cidade, mantendo os níveis de água para abastecimento da população constante. Voltando um pouco mais no tempo, podemos citar o engenhoso sistema de irrigação da antiga Mesopotâmia, datado de 200 a.c., como uma obra da engenharia que certamente constitui um dispositivo de controle. Para citarmos elementos de controle mais recentes, avançamos para o século XVIII, onde os trabalhos de C. Huygens. e R. Hooke sobre a oscilação do pêndulo, onde o objetivo era o de obter uma medição precisa de tempo e localização, preciosos em navegação. Posteriormente, adaptando essas ideias, o engenheiro J. Watt criou a máquina a vapor, tão importante para a revolução industrial.

O astrônomo George Airy foi o primeiro cientista a analisar matematicamente o sistema inventado por J. Watt. Entretanto, a primeira descrição matemática rigorosa foi dada por James Maxwell em 1868, onde alguns aprimoramentos à máquina a vapor foram propostos. Após vários desses avanços, a então conhecida engenharia de controle ganhou uma grande atenção da comunidade científica, sendo reconhecida como uma importante disciplina acadêmica. Sugerimos o artigo [11] para o leitor interessado em obter mais notas históricas.

Ao passar dos anos, as pesquisas em controle avançaram de maneira bastante significativa. Podemos mencionar o período da segunda guerra mundial (1939-1945) onde dispositivos de controles foram desenvolvidos para o rastreamento de aviões e de mísseis balísticos.

Após os anos 60, os métodos conhecidos até então foram entendidos como métodos clássicos de controle. Ficou claro neste ponto que os métodos até então eram insuficientes para descreverem a complexidade do mundo real. De fato, vários problemas que começaram a surgir eram não-lineares ou não-determinísticos, o que gerou uma massiva busca por novos resultados na área.

Já no século 20, podemos citar as contribuições dos cientistas Richard Bellman [3] em programação dinâmica, Rudolf Kalman [16] com técnicas de filtragem e abordagem algébrica e de Lev Pontryagin [18] com o princípio do máximo para problemas de controle ótimo linear e não-linear, que estabeleceram os fundamentos da teoria moderna de controle e da teoria matemática de controle.

Nos dias de hoje, a Teoria do Controle pode ser vista de dois pontos de vista distintos (porém complementares), a saber, o controle em engenharia e a teoria matemática de controle, sendo a segunda o principal foco de estudo desta dissertação.

A teoria matemática do controle é uma área da matemática com um elevado grau de interdisciplinaridade, que se dedica à construção e análise de sistemas de controle que possam ser escritos por meios de equações matemáticas. Neste âmbito, controlar um sistema significa garantir a existência de funções que possam influenciar a dinâmica das soluções do sistema, para que este se comporte de maneira desejada.

O objetivo desta dissertação é o de apresentar diversos resultados clássicos na teoria matemática do controle. Uma vez que um dado fenômeno possa ser representado matematicamente, por exemplo, por meio de equações diferenciais, nos dedicamos aqui a mostrar alguns resultados positivos e negativos de controle, com enfoque nos sistemas ditos lineares. Mais ainda, nos dedicaremos aos sistemas que possam ser representados em espaços de dimensão finita, isto é, focaremos em resultados de controle para equações diferenciais ordinárias.

Para o nosso estudo, entenderemos como um sistema de controle com uma equação da forma

$$x'(t) = F(t, x, u), \quad (1)$$

onde $x(t)$ é a variável chamada de estado, $u(t)$ é o controle e o parâmetro t é comumente relacionada ao tempo de evolução. A função F é um dado no problema e está relacionada às leis físicas presentes no sistema e indica precisamente como a função x varia ao longo do tempo e como o controle u atua. Também, pode conter forças externas fixas como gravidade, campo magnético, dentre outras.

Um problema matemático de controle pode ser entendido, de maneira geral, da seguinte forma:

Dado um objetivo pré-determinado, podemos exhibir um controle u tal que a solução x do sistema definido acima, cumpre tal objetivo?

Para um problema de controle, existem dois tipos de abordagens que são bastante encontrados na literatura, que são os conceitos de sistemas de ciclo aberto e sistemas de ciclo fechado.

- (Sistemas de ciclo-aberto) adequado quando conhecemos uma informação inicial do sistema. Neste caso, para cada dado inicial, buscamos a existência de um controle u de forma que o estado x se comporte de maneira desejada. Salientamos que, neste caso, o controle não é adaptativo no sentido de que não depende do próprio estado $x(t)$ para a tomada de decisão, dependendo apenas da informação inicial.

- (Sistemas de ciclo-fechado) muito utilizado quando não conhecemos bem, ou não podemos depender da informação inicial para controlar o sistema. Neste caso, o controle deve ser adaptativo, decidindo como atuar em cada instante de tempo em função do estado $x(t)$, isto é, no sistema (1), devemos ter $u(t) = g(x(t))$, onde g deve ser determinada.

Observação 0.1. Alguns autores denominam o primeiro problema de controle e o segundo de estabilização. A estabilização é mais complexa de ser implementada, uma vez que são necessários: *i*) Coletar informações a respeito de saída (ou do estado) do sistema (1). Escolher, a partir da saída, uma entrada (ou controle) u para o sistema.

Vejamos, com um exemplo, como um problema matemático de controle pode ser formulado.

Exemplo 0.1. (Controle da velocidade angular de um Rotor- [17].) Considere um disco, ou rotor, denotado por R livre para girar em torno de um eixo fixo através do centro de R e perpendicular ao seu plano.

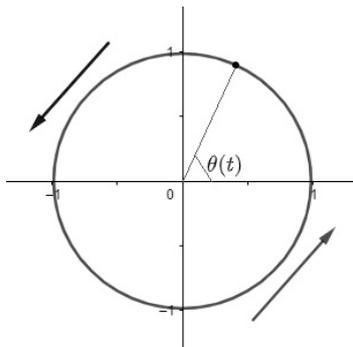


Figura 1: $\omega(t) = \theta'(t)$, a velocidade angular do Rotor.

Seja $\omega(t)$ a velocidade angular do rotor no tempo t , medido em torno do eixo em coordenadas apropriadas. Seja $\omega(0) = \omega_0$ a velocidade angular inicial.

O problema é controlar a saída ou resposta $\omega(t)$ pela aplicação de alguma força externa $L(t)$ em torno do eixo de rotação, para que saia da configuração inicial ω_0 e atinja o repouso, isto é, o disco para de girar, em algum tempo. Aqui, a equação do movimento é

$$I \frac{d\omega}{dt} = L(t),$$

onde I é o momento de inércia constante e positivo de R em torno de seu eixo e $L(t)$ é a força externa ou controle. Matematicamente, o problema é escolher $L(t)$ de maneira compatível com a mecânica particular do sistema ou processo, de modo que a resposta $\omega(t)$, que é a solução da equação diferencial com estado inicial $\omega(0) = \omega_0$, tenda a zero conforme t aumente. Além disso, é interessante a busca por um controle ótimo $L^*(t)$ de modo que a resposta ótima correspondente $\omega^*(t)$ alcance zero de maneira mais eficiente, por exemplo, no mínimo de tempo possível.

Esse problema de controle pode surgir se o rotor R for um rolo em algum processo de fabricação ou se R for a seção transversal de um foguete. Na primeira situação, a força de controle pode ser efetuado por algum dispositivo eletromecânico e, na segunda instância, por um par de jatos de direções auxiliares. Podemos também formular o problema de determinar controles que façam o rotor R atingir uma velocidade angular ideal. Neste caso, ω pode indicar o erro entre a velocidade angular real e a ideal. Assim, nosso problema pode ser visto na estrutura geral de controlar ou regular um erro para zero.

Se a velocidade angular inicial ω_0 for conhecida de antemão, o sinal de controle $L(t)$ pode muito bem ser especificado como uma entrada de ciclo-aberto (veja a figura abaixo)

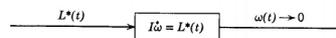


Figura 2:
Processo de controle em ciclo-aberto

e buscamos um controle ideal $L^*(t)$ para o objetivo desejado. No entanto, se quisermos construir um dispositivo de controle de auto-correção que opere satisfatoriamente para todos os valores iniciais possíveis ω_0 e até mesmo corrija perturbações repetidas da resposta $\omega(t)$, neste caso, sintetizarmos o controle ideal $L^*(t)$ passar por um circuito de realimentação apropriado (veja [17]) ou seja, devemos calcular uma função $\Psi(\omega)$ do estado atual ω do rotor a ser utilizado como um sinal de controle de realimentação.

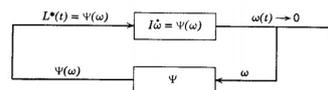


Figura 3:
Processo de controle em ciclo fechado

Neste caso, esperamos que as respostas ótimas de

$$I \frac{d(\omega)}{dt} = \Psi(\omega),$$

para o sistema de ciclo fechado, seja também uma resposta ótima quando o estado inicial ω_0 está fixado, ou seja, $\omega(t)$ coincidirá com a resposta ideal $\omega^*(t)$, que resultaria do controle ideal $L^*(t)$ no processo de ciclo aberto.

Consideremos agora o controle de feedback linear

$$\Psi(\omega) = -k\omega,$$

onde a constante $k > 0$. Então

$$I\omega'(t) = -k\omega, \quad \omega(0) = \omega_0,$$

tem a solução

$$\omega(t) = e^{-\left(\frac{k}{I}\right)t}\omega_0,$$

que tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. Se desejarmos aumentar a taxa de retardo de $\omega(t)$, podemos aumentar a constante de ganho k . Por mais que fizemos k grande neste modelo matemático, o rotor nunca para de fato, ele apenas tende ao repouso. Além disso, o problema de selecionarmos controles de feedback linear ótimos em relação ao tempo, por exemplo, não é matematicamente sensato, uma vez que cada um desses controles pode ser melhorado aumentando a constante k . Além disso, o problema físico não está bem posto, pois há um limite para a praticidade neste ciclo de feedback, porque as não linearidades, como fenômenos de saturação, são mais significativas para aparatos físicos.

Uma outra abordagem, parte do fato de ser a exigência de que a força de controle permaneça dentro de certos limites prescritos. Por conveniência de notação, vamos exigir que

$$-1 \leq L(t) \leq 1.$$

O controle ótimo de torque $L^*(t)$, que pode variar descontinuamente para levar em conta mudanças repentinas, deve satisfazer a restrição $|L^*(t)| \leq 1$ e deve direcionar o estado inicial $\omega = \omega_0$ para o estado alvo $\omega = 0$ em um tempo mínimo possível. Neste caso, a solução para o controle de tempo ideal de ciclo-aberto $L^*(t)$ é óbvia a partir de considerações físicas. Se $\omega_0 > 0$, isto é, a velocidade inicial positiva, então

$$L^*(t) = -1 \text{ e } \omega^*(t) = \frac{I\omega_0 - t}{I},$$

até o tempo $T = I\omega_0$, de onde $\omega^*(T) = 0$. Se $\omega_0 < 0$, tomemos

$$L^*(t) = 1 \text{ e } \omega^*(t) = \frac{I\omega_0 + t}{I},$$

até $T = -I\omega_0$, em que $\omega^*(T) = 0$. Por causa da constância do sinal da resposta ótima $\omega^*(T)$ em cada instante, é fácil construir a lei de feedback $\Psi(\omega)$ para o controle ótimo. Para isto, basta tomarmos

$$\Psi(\omega) = -\text{sinal } \omega,$$

onde a função sinal é definida por

$$\text{sinal } \omega = \begin{cases} +1 & \text{se } \omega > 0, \\ 0 & \text{se } \omega = 0, \\ -1 & \text{se } \omega < 0. \end{cases}$$

Então, a equação diferencial não linear

$$I\omega' = -\text{sinal } \omega$$

terá, para cada estado inicial ω_0 , uma solução que é a mesma resposta $\omega^*(t)$ do tempo-ótimo do circuito aberto correspondente.

Este trabalho de dissertação é fruto de um estudo bibliográfico de diversas referências clássicas em teoria do controle, onde podemos citar fundamentalmente os livros

- E.B. Lee, L. Markus, *Foundations of optimal control theory* (ver [17]);
- E.D. Sontag, *Mathematical control theory* (ver [27]);
- E. Trelát, *Contrôle optimal: théorie e applications*. (ver [28]).

0.1 Apresentação do Problema

Um conceito bastante importante atrelado à teoria do controle é, certamente, o de otimização. Este ramo de matemática visa, essencialmente, melhorar uma variável a fim de maximizar um benefício ou minimizar um determinado custo. É fácil percebermos que este conceito pode ser aplicado em diversas situações práticas, por exemplo, podemos estar interessados em regular a temperatura de um meio, ou de determinar campos de velocidades apropriadas, ou até mesmo medir uma grande quantidade de informações, tudo isso de uma maneira otimizada.

Nesta dissertação, entenderemos por problema de controle, um sistema dinâmico dependendo de certos parâmetros, onde um deles é o controle, a ser escolhido de forma a influenciar a dinâmica do sistema para uma configuração desejada. Normalmente, tais sistemas são formulados por meio de equações diferenciais ou equações integrais.

Os sistemas de controle que consideraremos podem ser descrito em termos de quatro

informações: **i.** o processo (ou equação) **ii.** o estado inicial e o estado alvo **iii.** a classe de controles admissíveis e **iv.** o funcional custo.

i. o processo é uma relação entre o estado e o controle e frequentemente escreveremos na forma (1) em um intervalo $0 \leq t \leq T$, onde x e u são funções escalares ou vetoriais;

ii. o estado inicial x_0 é um dado conhecido onde as soluções de (1) devem satisfazer $x(0) = x_0$. Os vetores x_0 e $x(t)$ podem conter componentes que representam a posição, velocidade angular ou temperatura, que são medidos por meio de instrumentos sensíveis. Já o estado alvo, é aquele que deve ser atingido por meio da atuação do controle em um tempo finito T , ou até mesmo assintoticamente. Esta condição pode ser um vetor fixo x_1 ou até mesmo uma família de conjuntos compactos $G(t)$ em movimento contínuo.

iii. a classe de controles admissíveis \mathcal{U}_{ad} consiste de funções mensuráveis $u(t)$ que conduzem x_0 ao alvo $G(t)$, isto é, as soluções de (1) tais que $x(0) = x_0$ satisfazem $x(T) \in G(T)$, para algum $T > 0$.

iv. o funcional custo é um critério quantitativo para a eficiência de cada controle $u(t)$ em $0 \leq t \leq T$ na classe \mathcal{U}_{ad} . Veremos frequentemente o uso dos funcionais custo da forma:

$$C(u) = g(x(T)) + \int_0^T [x^\top(t)W(t)x(t) + u^\top(t)U(t)u(t)] dt, \quad (2)$$

onde $g(x)$ é um função especificada assim como as matrizes simétricas W e U e x é a solução de um sistema na forma (1) com controle u .

Sejamos mais precisos acerca dos problemas a serem abordados neste trabalho de dissertação. Primeiramente, trabalharemos majoritariamente com a situação em que a dinâmica é linear tanto em relação à variável estado $x(t)$ como em relação ao controle $u(t)$. Nestes termos, a nossa equação (1) pode ser reescrita na seguinte forma geral:

$$x' = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t). \quad (3)$$

Para esta equação, realizamos os seguintes estudos, que foram divididos em três capítulos:

- No Capítulo 1, estudaremos diversas propriedades do conjunto dos estados atingíveis. Veremos que, em alguns casos, este consiste de todo o espaço euclidiano, enquanto que em outros constituirá um conjunto convexo e compacto. Abordaremos os casos onde controles estão sujeitos a restrições e, neste caso, veremos resultados locais e globais a depender de certas propriedades para os autovalores da matriz do operador A .
- No Capítulo 2, buscamos garantir uma certa otimalidade para os controles, no

sentido que buscamos aqueles que cumpram o objetivo no menor tempo possível. Este problema é comumente chamado de *tempo mínimo de controlabilidade*.

- Por fim, no Capítulo 3, estudaremos o problema de controle ótimo linear-quadrático (L.Q.), onde estamos interessados em determinar e caracterizar o controle que minimiza o funcional custo (2).

Capítulo 1

Controlabilidade

Sejam n e m dois números naturais diferentes de zero, I um intervalo de \mathbb{R} , e sejam $A(t), B(t)$ e $r(t)$ funções em $L^\infty(I)$ (na verdade, L^1_{loc} é suficiente) com valores respectivamente em $M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ e $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$. Seja Ω um subconjunto de \mathbb{R}^m e seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (m representa o número de controles agindo no sistema enquanto que n estabelece o número de componentes do estado a ser controladas). Estamos interessados no seguinte sistema de controle linear:

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde os controles u são considerados inicialmente em $L^\infty_{loc}(I; \Omega)$, o conjunto das funções mensuráveis e localmente limitadas em I , com valores no subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Para o sistema (1.1) introduzimos o *conjunto dos pontos acessíveis* a partir de x_0 em um instante $T > 0$, definido por

$$A_\Omega(x_0, T) = \{x_u(T); u \in L^\infty(0, T; \Omega)\}, \quad (1.2)$$

onde $x_u(\cdot)$ é a solução do sistema (1.1) associado ao controle u . Em outras palavras, $A_\Omega(x_0, T)$ é o conjunto de extremidades das soluções de (1.1) no tempo T , quando variamos o controle u . Definimos $A_\Omega(x_0, 0) = \{x_0\}$.

Assim, temos os seguintes conceitos de controlabilidade que serão de suma importância ao longo do texto:

Definição 1.1. Dizemos que o sistema (1.1) é *exatamente controlável* (ou apenas *controlável*) em um tempo finito, se para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tivermos que $\cup_{t \geq 0} A_\Omega(x_0, t) = \mathbb{R}^n$. De maneira similar, dizemos que o sistema (1.1) é exatamente controlável no tempo T se para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tivermos que $A_\Omega(x_0, T) = \mathbb{R}^n$.

Definição 1.2. Dizemos que o sistema (1.1) é *nulamente controlável* (ou *controlável a zero*) em um tempo finito se, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tivermos que $0 \in \cup_{t \geq 0} A_\Omega(x_0, t)$. De maneira análoga, dizemos que (1.1) é nulamente controlável no tempo T se para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tivermos que $0 \in A_\Omega(x_0, T)$.

A situação ideal seria que o sistema (1.1) sempre fosse controlável de acordo com a Definição (1.1). Entretanto, o resultado a seguir mostra que, dependendo do conjunto Ω , isto pode não ocorrer.

Teorema 1.1. *Sejam $T > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e consideremos o sistema de controle linear (1.1), onde $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é compacto. Então, para todo $t \in [0, T]$, $A_\Omega(x_0, t)$ é compacto, convexo e varia continuamente em t , no intervalo $[0, T]$.*

Demonstração. Inicialmente, provaremos este teorema supondo também que Ω é convexo.

Sejam $x_1^1, x_2^1 \in A_\Omega(x_0, t)$ e $\lambda \in [0, 1]$. Mostremos que $\lambda x_1^1 + (1 - \lambda)x_2^1 \in A_\Omega(x_0, t)$. Por definição, para $i = 1, 2$, existem controles $u_i : [0, t] \rightarrow \Omega$ tal que a trajetória $x_i(\cdot)$ associada ao controle u_i verifica

$$\begin{cases} x_i'(s) = A(s)x_i(s) + B(s)u_i(s) + r(s), \\ x_i(0) = x_0, \\ x_i(t) = x_i^1. \end{cases}$$

De acordo com a fórmula de variação dos parâmetros, temos

$$x_i^1 = x_i(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1} (B(s)u_i(s) + r(s)) ds,$$

onde $M : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ é o operador resolvente, isto é, definido por

$$\begin{cases} M'(t) = A(t)M(t), & t \in [0, T], \\ M(0) = \text{Id}. \end{cases} \quad (1.3)$$

(veja [9] para mais detalhes). Observe que, se $A(t) = A$ (constante sobre I), então $M(t) = e^{tA}$.

Para cada $s \in [0, t]$, definimos por $u(s) = \lambda u_1(s) + (1 - \lambda)u_2(s)$ e $x(\cdot)$ a trajetória associada ao controle u . Pela definição de $A_\Omega(x_0, t)$, temos

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1} (B(s)u(s) + r(s)) ds \in A_\Omega(x_0, t).$$

É fácil ver que,

$$\begin{aligned} \lambda x_1^1 + (1 - \lambda)x_2^1 &= \lambda M(t)x_0 + (1 - \lambda)M(t)x_0 \\ &+ \int_0^t M(t)M(s)^{-1} (B(s) (\lambda u_1(s) + (1 - \lambda)u_2(s)) + \lambda r(s) + (1 - \lambda)r(s)) ds = x(t). \end{aligned}$$

Portanto, $\lambda x_1^1 + (1 - \lambda)x_2^1 \in A_\Omega(x_0, t)$, o que prova a convexidade de $A_\Omega(x_0, t)$.

Mostremos agora a compacidade de $A_\Omega(x_0, t)$. Provaremos que qualquer sequência $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de $A_\Omega(x_0, t)$ admite uma subsequência que converge para um ponto de $A_\Omega(x_0, t)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de controles conectando x_0 à x_n^1 no tempo t , e seja $x_n(\cdot)$ a trajetória correspondente à u_n . Então, teremos que

$$x_n^1 = x_n(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1} (B(s)u_n(s) + r(s)) ds. \quad (1.4)$$

Por hipótese, os controles u_n têm valores no compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e conseqüentemente, a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2([0, t]; \mathbb{R}^m)$. Como sabemos que L^2 é um espaço de Hilbert e reflexivo então, deduzimos que a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fracamente para um controle $u \in L^2([0, t]; \mathbb{R}^m)$. Observemos que $L^2([0, T]; \Omega)$ é fortemente fechado em $L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$, pois se $u_n \in L^2([0, T]; \Omega)$ é tal que $u_n \rightarrow u$ forte em $L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$ então, em particular, existe uma subsequência $(u_{n_k}(t))$ tal que $u_{n_k}(t) \rightarrow u(t)$ quase sempre em $[0, T]$. Como Ω é compacto, chegamos que $u(t) \in \Omega$ quase sempre em $[0, T]$. Agora, como Ω também é convexo, obtemos pelo Teorema 3.7 de [7] que $L^2([0, T]; \Omega)$ é fracamente fechado em $L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$. De onde chegamos que $u \in L^2([0, T]; \Omega)$.

A partir da fórmula (1.4), pelo fato que $M(t)$ e $M(t)^{-1}$ são contínuas em $[0, T]$ e que A , B e r são funções em L^∞ , chegamos que a sequência (x_n) é limitada em $L^2([0, T]; \mathbb{R}^n)$. Além disso, pela identidade $x'_n = Ax_n + Bu_n + r$ e usando novamente que A e B e r estão em $L^\infty[0, T]$, concluímos que $(x'_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ também é limitada em $L^2([0, T]; \mathbb{R}^n)$. Em outras palavras, a sequência $(x_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada no espaço $H^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$, que é compacto em $C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$. Desta forma, existe uma subsequência (x_{n_k}) e alguma trajetória $x(\cdot) \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x$ em $[0, T]$.

Passando para o limite em (1.4), obtemos

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1} (B(s)u(s) + r(s)) ds,$$

em particular

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i}^1 = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i}(t) = x(t) \in A_\Omega(x_0, t),$$

como queríamos demonstrar.

Agora, mostremos a continuidade de $A_\Omega(x_0, t)$ observemos que neste ponto a convexidade de Ω não é necessária. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Aqui, estabeleceremos a existência de $\delta > 0$ tal que, para quaisquer números reais não-negativos $t_1, t_2 \in [0, T]$, com $|t_1 - t_2| \leq \delta$, vale $d_H(A_\Omega(x_0, t_1), A_\Omega(x_0, t_2)) \leq \epsilon$, onde d_H é a distância de Hausdorff definida por

$$d_H(K_1, K_2) = \sup \left(\sup_{y \in K_2} d(y, K_1), \sup_{y \in K_1} d(y, K_2) \right), \quad (1.5)$$

onde K_1 e K_2 são quaisquer subconjuntos compactos de \mathbb{R}^n e d é a distância euclidiana de um ponto a um conjunto, isto é $d(y, K) := \inf_{k \in K} |y - k|_{\mathbb{R}^n}$. Por simplicidade, vamos denotar $A_\Omega(t) = A_\Omega(x_0, t)$. Assim, se $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ temos que

$$\begin{aligned} d_H(A_\Omega(t_1), A_\Omega(t_2)) &= \max \left(\sup_{y \in A_\Omega(t_2)} d(y, A_\Omega(t_1)), \sup_{y \in A_\Omega(t_1)} d(y, A_\Omega(t_2)) \right) \\ &= \max \left(\sup_{y \in A_\Omega(t_2)} \inf_{y_2 \in A_\Omega(t_1)} |y - y_2|_{\mathbb{R}^n}, \sup_{y \in A_\Omega(t_1)} \inf_{y_1 \in A_\Omega(t_2)} |y - y_1|_{\mathbb{R}^n} \right). \end{aligned}$$

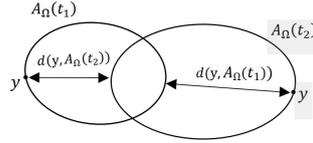


Figura 1.1: Distância de Hausdorff entre dois subconjuntos do \mathbb{R}^n .

No que segue, mostraremos que existe $\delta > 0$ tal que se $|t_1 - t_2| \leq \delta$, então

- $d(y, A_\Omega(t_1)) \leq \epsilon, \quad \forall y \in A_\Omega(t_2),$
- $d(y, A_\Omega(t_2)) \leq \epsilon \quad \forall y \in A_\Omega(t_1).$

Provaremos apenas o primeiro item, sendo a prova do segundo inteiramente análoga. Notemos que é suficiente provarmos que existe $z \in A_\Omega(t_1)$ tal que $d(y, z) \leq \epsilon$.

Seja $y \in A_\Omega(t_2)$ e $u \in L^\infty([0, T]; \Omega)$ tal que a trajetória correspondente, iniciando de x_0 , satisfaz $x(t_2) = y$. Considerando a mesma trajetória no tempo t_1 , obtemos que

$$\begin{aligned} x(t_2) - x(t_1) &= M(t_2)x_0 - M(t_1)x_0 \\ &\quad + \int_0^{t_2} M(t_2)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds \\ &\quad - \int_0^{t_1} M(t_1)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds. \end{aligned}$$

Desta forma, não é difícil vermos que

$$\begin{aligned} x(t_2) - x(t_1) &= M(t_2) \int_{t_1}^{t_2} M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds \\ &\quad + (M(t_2) - M(t_1)) \left(x_0 + \int_0^{t_1} M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds \right). \quad (1.6) \end{aligned}$$

Com isto, se $|t_1 - t_2|$ é pequeno, obviamente a primeira integral à direita da igualdade (1.6) é pequena, enquanto que a segunda integral é pequena devido à continuidade de $t \rightarrow M(t)$. Desta forma, provamos o que queríamos com $z = x(t_1)$.

Até este ponto, o Teorema 1.1 está provado supondo a convexidade de Ω como hipótese adicional. Para a prova quando o Ω é apenas compacto, faremos uso de dois resultados auxiliares que apresentaremos a seguir.

Para a convexidade de $A_\Omega(x_0, t)$, faremos uso do Lema de Lyapunov enunciado abaixo. Em relação à compacidade, utilizaremos o Teorema de Aumann, também enunciado mais adiante, e que será utilizado para provarmos que $A_\Omega(x_0, t) = A_{\text{Conv}(\Omega)}(x_0, t)$, onde $\text{Conv}(\Omega)$ representa a envoltória convexa, recaindo no caso convexo provado inicialmente.

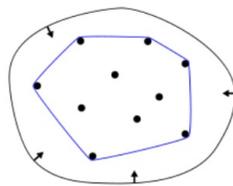


Figura 1.2: a envoltória convexa de um conjunto Ω é a interseção de todos os convexos contendo Ω

Lema 1.2. (Lyapunov) ([17] Lema 4A pg.163)

Seja $f(s)$ uma função vetorial em \mathbb{R}^n , integrável no intervalo compacto I . Então, o conjunto

$$K = \left\{ \int_E f(s) ds \mid E \subset [0, t] \text{ mensurável} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

é convexo.

Faremos uso do lema acima para provarmos a convexidade do conjunto $A_\Omega(x_0, t)$ para os casos onde Ω não é necessariamente convexo. De fato, sejam $x_1, x_2 \in A_\Omega(x_0, t)$ e seja $\theta \in [0, 1]$. Mostraremos que $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in A_\Omega(x_0, t)$. Por definição, existem controles $u_i \in L^\infty([0, T], \Omega)$, $i \in \{1, 2\}$, de modo que

$$x_i = M(t)x_0 + \int_0^T M(t)M(s)^{-1}(B(s)u_i(s) + r(s))ds.$$

Seja $y_i = x_i - \left[M(t)x_0 + \int_0^T M(t)M(s)^{-1}r(s)ds \right]$, o que implica que

$$y_i = \int_0^T M(t)M(s)^{-1}B(s)u_i(s)ds.$$

1. Controlabilidade

Considere a função $f \in L^1(0, T; \mathbb{R}^{2n})$ tal que

$$f(s) = \begin{pmatrix} M(t)M(s)^{-1}B(s)u_1(s) \\ M(t)M(s)^{-1}B(s)u_2(s) \end{pmatrix}.$$

Assim, temos que $\int_{\{0\}} f(s)ds = (0, 0)^\top$ e $\int_0^T f(s)ds = (y_1, y_2)^\top$. Portanto, de acordo com o Lema 1.2, deduzimos que existe um subconjunto mensurável $E \subset [0, T]$ tal que

$$\int_E f(s)ds = (1 - \theta) \int_{\{0\}} f(s)ds + \theta \int_0^T f(s)ds = \begin{pmatrix} \theta y_1 \\ \theta y_2 \end{pmatrix},$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} \int_E M(t)M(s)^{-1}B(s)u_1(s) \\ \int_E M(t)M(s)^{-1}B(s)u_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta y_1 \\ \theta y_2 \end{pmatrix}.$$

Denotemos por E^c o complementar de E em $[0, T]$. Temos que

$$\int_{E^c} f(s)ds = \int_0^T f(s)ds - \int_E f(s)ds = \begin{pmatrix} (1 - \theta)y_1 \\ (1 - \theta)y_2 \end{pmatrix},$$

o que implica

$$\begin{pmatrix} \int_{E^c} M(t)M(s)^{-1}B(s)u_1(s) \\ \int_{E^c} M(t)M(s)^{-1}B(s)u_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \theta)y_1 \\ (1 - \theta)y_2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, pedindo que

$$u(s) = \begin{cases} u_1(s) & \text{se } s \in E, \\ u_2(s) & \text{se } s \in E^c, \end{cases}$$

e uma vez que E e E^c são conjuntos mensuráveis, obtemos que o controle assim definido é uma função mensurável de $[0, T]$ em Ω . Além disso, a trajetória x_u associada a este

controle satisfaz

$$\begin{aligned}
 x_u(t) &= M(t)x_0 + \int_0^T M(t)M(s)^{-1}B(s)u(s)ds + \int_0^T M(t)M(s)^{-1}r(s)ds \\
 &= M(t)x_0 + \int_E M(t)M(s)^{-1}B(s)u_1(s)ds + \int_{E^c} M(t)M(s)^{-1}B(s)u_2(s)ds \\
 &\quad + \int_0^T M(t)M(s)^{-1}r(s)ds \\
 &= M(t)x_0 + \theta y_1 + (1 - \theta)y_2 + \int_0^T M(t)M(s)^{-1}r(s)ds \\
 &= \theta x_1 + (1 - \theta)x_2.
 \end{aligned}$$

E assim, temos que $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 = x_u(t) \in A_\Omega(x_0, t)$, provando a convexidade.

Provemos agora a compacidade de $A_\Omega(x_0, t)$. Faremos uso do teorema a seguir, cuja prova pode ser vista em ([13] Teorema 8.4, pg.29).

Teorema 1.3. (*Aumann [13]*) *Seja F uma função mensurável definida em um intervalo I com valores em um conjunto $F(t)$ compacto em \mathbb{R}^m para cada t fixo. Definimos*

$$\int_I F(\tau) d\tau = \left\{ \int_I f(\tau) d\tau; f \text{ mensurável}, f(\tau) \in F(\tau), \tau \in I \right\}.$$

Então, os conjuntos $\int_I F(t) dt$ e $\int_I \text{Conv} F(t) dt$ são compactos, convexos e mais ainda

$$\int_I F(t)dt = \int_I \text{Conv}F(t)dt.$$

Agora, concluiremos a prova do Teorema 1.1. Lembremos que nos resta provar apenas a compacidade de $A_\Omega(x_0, t)$. Pelo teorema de Aumann, temos

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \int_0^T M(t)^{-1}B(t)u(t)dt \mid u \in L^\infty(0, T; \Omega) \right\} \\
 &= \left\{ \int_0^T M(t)^{-1}B(t)u(t)dt \mid u \in L^\infty(0, T; \text{Conv}(\Omega)) \right\}.
 \end{aligned}$$

Daí, temos que $A_\Omega = A_{\text{Conv}(\Omega)}$ e assim ambos são convexos e compactos, conforme queríamos demonstrar. \square

Observação 1.1. É fácil ver que $\text{Conv}(\partial\Omega) = \text{Conv}(\Omega)$. Assim, $A_\Omega(x_0, t) = A_{\partial\Omega}(x_0, t)$, significando que conseguimos atingir os mesmos alvos com controles tomando valores apenas na fronteira de Ω .

Observação 1.2. Provamos que se o conjunto de restrições de controle Ω é compacto, então o conjunto acessível é compacto, convexo e evolui continuamente no tempo. Em tais condições, obviamente $A_\Omega(x_0, t)$ nunca será igual ao espaço \mathbb{R}^n . Em outras

palavras, o sistema (1.1) nunca será controlável para nenhum $t > 0$ (ver Definição 1.1). Isto se deve em virtude das restrições impostas ao controle por meio da região Ω . Desta forma, o resultado do teorema anterior nos permite definir o conceito de *tempo mínimo*: dados x_0 e x_1 , dois pontos distintos de \mathbb{R}^n , não podemos conduzir soluções do sistema de controle de x_0 para x_1 em um tempo arbitrário, apenas após um tempo mínimo adequado. Abordaremos sobre este assunto mais na frente.

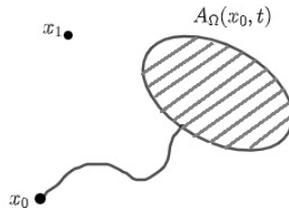


Figura 1.3: o conjunto dos estados atingíveis podem não cobrir todo o espaço \mathbb{R}^n

Vamos agora, examinar o caso em que $x_0 = 0$, $r = 0$ e o conjunto Ω é todo o espaço \mathbb{R}^m . O conjunto alcançável no tempo $t \in [0, T]$ é então:

$$A_{\Omega}(0, t) = \left\{ \int_0^t M(t)M(s)^{-1}B(s)u(s)ds; \quad u \in L^{\infty}(0, T; \mathbb{R}^m) \right\}. \quad (1.7)$$

Observemos que, se $r = 0$ e $x_0 = 0$, então a solução de $x' = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, se escreve da forma

$$x(t) = M(t) \int_0^t M(s)^{-1}B(s)u(s)ds,$$

e, ademais, é linear em u . Esta observação nos leva à seguinte proposição:

Proposição 1.4. Seja $r = 0$, $x_0 = 0$ e $\Omega = \mathbb{R}^m$. Para todo $t \in [0, T]$, o conjunto $A_{\mathbb{R}^m}(0, t)$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n . Se assumirmos ainda que o sistema é autônomo, isto é, que $A(t) = A$ e $B(t) = B$ são constantes, então para todo $0 < t_1 < t_2$ temos $A_{\mathbb{R}^m}(0, t_1) \subset A_{\mathbb{R}^m}(0, t_2)$.

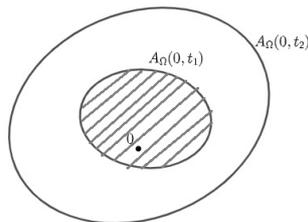


Figura 1.4: $A_{\mathbb{R}^m}(0, t_1) \subset A_{\mathbb{R}^m}(0, t_2)$.

1. Controlabilidade

Demonstração. Sejam $x_1^1, x_2^1 \in A_{\mathbb{R}^m}(0, t)$ e $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$. Para $i = 1, 2$ existe por definição um controle u_i e uma trajetória associada $x_i(\cdot)$ satisfazendo $x_i(t) = x_i^1$, de onde temos que

$$x_i^1 = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u_i(s) ds.$$

Para todo $s \in [0, T]$, seja $u(s) = \lambda u_1(s) + \tau u_2(s)$. Então

$$\lambda x_1^1 + \tau x_2^1 = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u(s) ds \in A_{\mathbb{R}^m}(0, t).$$

Para a segunda parte da proposição, lembremos que, nesse caso, $M(t) = e^{tA}$. Seja $x_1^1 \in A_{\mathbb{R}^m}(0, t_1)$ provemos que $x_1^1 \in A_{\mathbb{R}^m}(0, t_2)$. Por definição, existe um controle u_1 em $[0, t_1]$ de modo que a trajetória associada $x_1(\cdot)$ satisfaça $x_1(t_1) = x_1^1$, de modo que

$$x_1^1 = e^{t_1 A} \int_0^{t_1} e^{-sA} B u_1(s) ds.$$

Definiremos u_2 em $[0, t_2]$ por

$$\begin{cases} u_2(t) = 0 & \text{se } 0 \leq t \leq t_2 - t_1, \\ u_2(t) = u_1(t_1 - t_2 + t) & \text{se } t_2 - t_1 \leq t \leq t_2. \end{cases}$$

Seja $x_2(\cdot)$ a trajetória associada à u_2 em $[0, t_2]$. Assim,

$$x_2(t_2) = e^{t_2 A} \int_0^{t_2} e^{-tA} B u_2(t) dt.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} x_2(t_2) &= e^{t_2 A} \left(\int_0^{t_2 - t_1} e^{-tA} B u_2(t) dt + \int_{t_2 - t_1}^{t_2} e^{-tA} B u_2(t) dt \right) \\ &= e^{t_2 A} \int_{t_2 - t_1}^{t_2} e^{-tA} B u_2(t) dt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável, onde $s = t_1 - t_2 + t$, temos claramente que $\frac{\partial s}{\partial t} = 1$ e portanto

$$\begin{aligned} x(t_2) &= e^{t_2 A} \int_0^{t_1} e^{-(s+t_2-t_1)A} B u_2(t_2 - t_1 + s) ds \\ &= e^{t_2 A} e^{-t_2 A} e^{t_1 A} \int_0^{t_1} e^{-sA} B u_1(s) ds \\ &= e^{t_1 A} \int_0^{t_1} e^{-sA} B u_1(s) ds = x_1^1. \end{aligned}$$

Assim, $x_1^1 \in A_{\mathbb{R}^m}(0, t_2)$. □

O resultado precedente nos permite imaginar que, para sistemas autônomos, isto é, cujos operadores não dependem do tempo, e para o caso em que $\Omega = \mathbb{R}^m$, é possível termos sistemas controláveis (ver Definição 1.1). De fato, na seção seguinte estabelece-

remos resultados de controlabilidade (ser controlável ou não) para sistemas autônomos.

1.1 Controlabilidade de sistemas lineares autônomos

Nesta seção, apresentaremos resultados de controlabilidade sem nenhuma restrição aos controles, isto é, quando o conjunto Ω coincide com \mathbb{R}^m . O principal resultado apresentado a seguir é conhecido como condição de Kalman, devido a R. Kalman veja [15], que estabelece, sob certas condições para as matrizes A e B do sistema (1.1), quando este é controlável, ou não.

1.1.1 Caso sem restrição no controle: Condição de Kalman

O sistema estudado nesta seção tem a forma:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.8)$$

onde $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ não dependem do parâmetro t . Assumimos que o controle $u(\cdot)$ não está sujeito a nenhuma restrição ($\Omega = \mathbb{R}^m$), ou seja, o conjunto dos controles admissíveis \mathcal{U}_{ad} é o espaço $L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$.

De posse dos conceitos de controlabilidade dados nas Definições 1.1 e 1.2, temos o seguinte resultado clássico de controlabilidade para sistemas do tipo (1.8):

Lema 1.5. As seguintes afirmações são equivalentes:

- i) O sistema (1.8) é exatamente controlável no tempo T ;
- ii) O sistema (1.8) é nulamente controlável no tempo T .

Demonstração. $i \Rightarrow ii$) sai diretamente pela definição, como somos capazes de levar o estado para qualquer dado final x_1 , basta então tomarmos $x_1 = 0$.

$ii \Rightarrow i$) consideremos $\hat{x}(\cdot)$ e $\check{x}(\cdot)$ soluções de:

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = A\hat{x}(t), & t \in [0, T], \\ \hat{x}(T) = x_1, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \check{x}'(t) = A\check{x}(t) + Bu(t) + r(t), & t \in [0, T], \\ \check{x}(0) = x_0 - \hat{x}(0), \end{cases}$$

respectivamente, onde o controle u é escolhido de tal forma que $\check{x}(T) = 0$. Seja $x(t) = \check{x}(t) + \hat{x}(t)$. Então temos que $x(0) = x_0$ e $x(T) = x_1$. Além disso, temos que $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ e portanto segue o resultado. \square

O teorema a seguir nos dá uma condição necessária e suficiente de controlabilidade.

Teorema 1.6. (Kalman [15]) *Suponhamos que $\Omega = \mathbb{R}^m$ (sem restrição no controle). O sistema (1.8) é controlável (veja Definição 1.1) se, e somente se, a matriz*

$$C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (1.9)$$

tem posto n , isto é, $\text{Posto}(C) = n$.

A matriz C é chamada de matriz de Kalman, e a condição $\text{Posto}(C) = n$ é chamada de condição de Kalman. Quando o par (A, B) satisfaz a condição de Kalman, dizemos que este par é controlável.

Observação 1.3. A condição de Kalman não depende de T ou de x_0 . Em outras palavras, se um sistema linear autônomo da forma (1.8) é controlável em um tempo finito T a partir de x_0 , então ele é controlável a qualquer instante de tempo e partindo de qualquer configuração inicial.

A demonstração do Teorema 1.6 se reduz a provar o seguinte lema:

Lema 1.7. A matriz C é de posto n se, e somente se, a aplicação linear

$$\begin{aligned} \Phi : L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt \end{aligned}$$

é sobrejetora.

Demonstração. Suponhamos que $\text{Posto}(C) < n$, mostremos que Φ não é sobrejetora.

Como a aplicação C não é sobrejetora, existe um vetor linha $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, onde ψ tal que $\psi^\top C = 0$. Desta forma,

$$\psi^\top B = \psi^\top AB = \dots = \psi^\top A^{n-1}B = 0.$$

No entanto, de acordo com o teorema de Cayley-Hamilton (veja [22]), A é raiz de seu polinômio característico, isto é, existem números reais a_0, a_1, \dots, a_{n-1} tais que

$$A^n = a_0 I + \dots + a_{n-1} A^{n-1}.$$

Assim, temos que:

$$\psi^\top A^n B = \psi^\top \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i B = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \psi^\top A^i B = 0.$$

Realizando um argumento de indução sobre o operador A^{n+k} , chegamos que

$$\psi^\top A^k B = 0, \quad (1.10)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por definição de exponencial de matrizes, temos

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Portanto, por (1.10) chegamos que

$$\psi^\top e^{tA} B = 0,$$

para todo $t \in [0, T]$. Consequentemente, para qualquer controle u obtemos

$$\psi^\top \Phi(u) = \psi^\top \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt = \int_0^T \psi^\top e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0,$$

o que mostra que Φ não é sobrejetora.

Reciprocamente, se Φ não é sobrejetora, então existe um vetor linha $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que, para qualquer controle u temos

$$\psi^\top \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt = \int_0^T \psi^\top e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0.$$

Isso implica que, para todo $t \in [0, T]$,

$$\psi^\top e^{(T-t)A} B = 0. \quad (1.11)$$

Em $t = T$, obtemos $\psi^\top \cdot B = 0$. Note que, derivando a expressão (1.11) em relação à variável t , obtemos

$$\frac{d}{dt} (\psi^\top e^{(T-t)A} B) = -\psi^\top e^{(T-t)A} A B = 0, \quad (1.12)$$

e tomando $t = T$, chegamos que $\psi^\top A B = 0$. Assim, derivando (1.12) sucessivamente, conseguimos

$$\frac{d}{dt} (\psi^\top e^{(T-t)A} A^i B) = \psi^\top e^{(T-t)A} A^{i+1} B = 0, \quad i = 0, \dots, n-2.$$

Tomando $t = T$, obtemos $\psi^\top e^{(T-t)A} A^i B = \psi^\top A^{i+1} B = 0$, e assim temos finalmente que

$$\psi^\top B = \psi^\top A B = \dots = \psi^\top A^{n-1} B = 0.$$

Daí $\psi^T C = 0$ de onde $\text{Posto}(C) < n$. □

De posse do Lema 1.7, podemos facilmente demonstrar o Teorema 1.6.

Demonstração. (Teorema 1.6) Seja a matriz C de posto n , então de acordo com Lema 1.7, a aplicação Φ é sobrejetora, ou seja $\Phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$. No entanto, para qualquer controle u , temos que

$$x(T) = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A}(Bu(t) + r(t))dt,$$

de modo que, o conjunto acessível no tempo T de um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é,

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{R}^m}(x_0, T) &= \left\{ e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A}r(t)dt + \int_0^T e^{(T-t)A}Bu(t)dt, u \in \mathcal{U}_{ad} \right\} \\ &= e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A}r(t)dt + \Phi(L^\infty) \\ &= \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

o que mostra que o sistema é controlável.

Reciprocamente, se o sistema é controlável, então, por definição, temos que para todo $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe um controle u conectando x_0 à x_1 no tempo T . Em particular, o sistema é controlável partindo de x_0 definido por:

$$x_0 = -e^{-TA} \int_0^T e^{(T-t)A}r(t)dt \in \mathbb{R}^n.$$

Sendo assim, neste ponto, o conjunto acessível no tempo T é escrito

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n = A_{\mathbb{R}^m}(x_0, T) &= \left\{ e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A}r(t)dt + \int_0^T e^{(T-t)A}Bu(t)dt, u \in \mathcal{U}_{ad} \right\} \\ &= \left\{ \int_0^T e^{(T-t)A}Bu(t)dt, u \in \mathcal{U}_{ad} \right\} = \Phi(L^\infty). \end{aligned}$$

isto prova que a aplicação Φ é sobrejetora e portanto, de acordo com o Lema 1.7, a matriz C tem posto n . □

O teorema a seguir apresenta uma poderosa ferramenta matemática utilizada para o estudo das propriedades de sistemas lineares invariantes no tempo. Esse teorema foi proposto por Malo Hautus, em seu trabalho *Controllability and Observability Conditions of Linear Autonomous Systems* (veja [12]). Nesse artigo, Hautus faz uma análise de sistemas de controles lineares abordando várias aspectos, entre eles, a controlabilidade de sistemas lineares autônomos.

Teorema 1.8. (*Hautus [12]*) *O sistema de controle (1.8) é controlável no tempo T se, e somente se, a matriz $[\lambda I - A, B]$ de ordem $n \times (n + m)$ tem posto n para todo autovalor λ de A .*

Demonstração. Suponhamos que para algum autovalor λ de A , onde $\lambda \in \mathbb{C}$, tenhamos

$$\text{Posto}[\lambda I - A, B] < n.$$

Isto implica dizer que $\dim(\text{Im}[\lambda I - A, B]) < n$, portanto, existe um vetor linha $v \neq 0$ tal que:

$$v^T [\lambda I - A, B] = 0 \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} v^T [\lambda I - A] = 0, \\ v^T B = 0. \end{cases}$$

Em particular, $v^T A = v^T \lambda$ e portanto v^T é um autovetor à esquerda de A . Notemos que $v^T A^2 = (v^T A)A = (\lambda v^T)A = \lambda(v^T A) = \lambda^2 v^T$ e, por indução, obtemos:

$$v^T A^k = \lambda^k v^T, \quad \forall k \in \{1, \dots, n - 1\}.$$

Conseqüentemente

$$\begin{aligned} v^T [B, AB, \dots, A^{n-1}B] &= [v^T B, v^T AB, \dots, v^T A^{n-1}B] \\ &= [0, \lambda v^T B, \dots, \lambda^{n-1} v^T B] \\ &= [0, 0, \dots, 0]. \end{aligned}$$

Como temos que $v \neq 0$, segue-se que o posto $[B, AB, \dots, A^{n-1}B] < n$ e por Kalman, temos que o sistema (1.8) não é controlável, e portanto segue que $\text{posto}[\lambda I - A, B] = n$.

Reciprocamente, se $\text{posto}[\lambda I - A, B] = n$, suponhamos que o sistema (1.8) não seja controlável. Então, pelo Teorema 1.6, a matriz de Kalman é tal que $\text{Posto}(C) = r < n$. Assim, temos que existe uma matriz Q inversível tal que:

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

este fato pode ser provado considerando uma base com r elementos da imagem de C e completando com uma base de \mathbb{R}^n . A configuração acima resulta da escrita de operadores A e B nessa nova base, onde $A_1 \in \mathbb{R}_{r \times r}$ e $B_1 \in \mathbb{R}_{r \times m}$ (veja [27], Lema 3.3.3 para mais detalhes). Notemos que a matriz A_3 é uma matriz quadrada, portanto, seja λ um autovalor da matriz A_3 associado ao autovetor y , isto é, $y^T A_3 = \lambda y^T$.

Seja $x \in \mathbb{R}^n$, definido por

$$x = [Q^{-1}]^\top \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad x^\top = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}^\top Q^{-1}.$$

Como Q é uma matriz inversível, temos claramente que $Q\lambda Q^{-1} = \lambda I$. Portanto, segue-se

$$\begin{aligned} x^\top [\lambda I - A \quad B] &= x^\top Q [\lambda Q^{-1} - Q^{-1}AQQ^{-1} \quad Q^{-1}B] \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}^\top Q^{-1}Q \left[\lambda Q^{-1} - \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} Q^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}^\top Q^{-1} - \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} Q^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \left[[0 \quad \lambda y^\top] Q^{-1} - [0 \quad y^\top A_3] Q^{-1} \quad 0 \right]. \end{aligned}$$

Desta forma, chegamos que

$$\begin{aligned} x^\top [\lambda I - A \quad B] &= \begin{bmatrix} 0 & y^\top [\lambda I - A_3] & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & [\lambda I - A_3^\top] y & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $x^\top \neq 0$, segue-se que posto $[\lambda I - A \quad B] < n$, o que é uma contradição. Portanto, o sistema (1.8) é controlável. \square

É importante salientarmos que tanto o Teorema 1.6 quanto o Teorema 1.8 são extremamente eficazes para a decisão sobre a controlabilidade de um dado sistema de equações diferenciais ordinárias. O teste de Hautus ganha uma importância adicional, uma vez que é possível estabelecermos uma versão do mesmo para o controle de equações diferenciais parciais (veja [9]).

Agora, vejamos alguns exemplos sobre como aplicar os dois testes para decidir sobre a controlabilidade de um sistema.

Exemplo 1.1. Consideremos o forno elétrico industrial com os seguintes dados:

y_0 = a temperatura exterior do forno;

y_1 = a temperatura na "parede" do forno;

y_2 = a temperatura interna do forno;

u = a intensidade do calor produzida pela bobina;

a_i = as superfícies do forno (interna e externa);

c_i = as capacidades térmicas específicas (interna e externa);

r_i = os coeficientes de radiação.

Temos a seguinte modelagem da equação do forno elétrico:

$$\begin{cases} c_1 \dot{y}_1(t) = -a_1 r_1 (y_1 - y_2)(t) - a_2 r_2 (y_2 - y_0)(t) + u(t), & t \in [0, T], \\ c_2 \dot{y}_2(t) = a_1 r_1 (y_1 - y_2)(t). \end{cases} \quad (1.13)$$

O problema do forno: para qualquer temperatura do forno no momento inicial $t = 0$, podemos atuar no sistema (1.13) por meio do controle u de forma que a temperatura interna do forno seja igual, no momento $t = T$ dado, a um valor desejado z_2 ?

Vamos fazer as seguintes mudanças nas variáveis; $x_1 = y_1 - y_0$, $x_2 = y_2 - y_0$, como os coeficientes c_i não são nulos, obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{-a_1 r_1}{c_1} x_1(t) - \frac{a_2 r_2 - a_1 r_1}{c_1} x_2(t) + \frac{1}{c_1} u(t), & t \in [0, T], \\ \dot{x}_2(t) = \frac{a_1 r_1}{c_2} (x_1(t) - x_2(t)), \end{cases}$$

que pode ser escrito na seguinte forma de matriz:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T],$$

onde:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{-a_1 r_1}{c_1} & \frac{-a_2 r_2 + a_1 r_1}{c_1} \\ \frac{a_1 r_1}{c_2} & \frac{-a_1 r_1}{c_2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz de Kalman é da forma

$$C = [B \ AB] \begin{pmatrix} \frac{1}{c_1} & \frac{-a_1 r_1}{c_1} \\ c_1 & \frac{c_1^2}{a_1 r_1} \\ 0 & \frac{a_1 r_1}{c_1 c_2} \end{pmatrix}.$$

Daí

$$\begin{aligned} \text{Posto}(C) = 2 &\Leftrightarrow \det(C) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{c_1} \frac{a_1 r_1}{c_1 c_2} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow a_1 r_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Desta forma, o sistema é controlável se, e só se, $a_1 r_1 \neq 0$.

Aplicando o critério de Kalman, temos que

$$\text{Posto}[\lambda I - A \ B] = \text{Posto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_1 r_1 + \lambda c_2}{\lambda a_1 c_1 r_1 + \lambda a_1 c_2 r_1 + a_1 a_2 r_1 r_2 + \lambda^2 c_1 c_2} \\ 0 & 1 & \frac{a_1 r_1}{\lambda a_1 c_1 r_1 + \lambda a_1 c_2 r_1 + a_1 a_2 r_1 r_2 + \lambda^2 c_1 c_2} \end{pmatrix},$$

o qual tem posto 2, portanto o sistema é controlável.

Exemplo 1.2. Assuma que o corpo de um avião está inclinado em ϕ radianos (seu ângulo de inclinação) com respeito à horizontal. Ele está voando a uma velocidade constante (não nula) de c metros por segundo e sua trajetória de vôo forma um ângulo de α radianos com a horizontal (se $\alpha > 0$, o avião está ganhando altitude e caso $\alpha < 0$, então ele está perdendo altitude). Denotando por h a altura do avião em metros e assumindo que os ângulos são pequenos, as quantidades acima referidas estão relacionadas pelas equações diferenciais linearizadas

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= a(\phi - \alpha), \\ \ddot{\phi} &= -\omega(\phi - \alpha - bu), \\ \dot{h} &= c\alpha,\end{aligned}$$

onde $\omega > 0$ é uma constante representando uma frequência natural de oscilação e a, b são constantes positivas. O controle u é proporcional à posição dos elevadores (ver figura 1.5) (Elevadores são superfícies móveis localizadas na cauda da aeronave. Um modelo mais completo sobre as questões espaciais e de orientação do avião exigiria incluir outras superfícies: por exemplo, o leme, também na cauda, proporciona um controle direcional e os ailerons nas asas criam torques opostos para afetar a altitude lateral do avião. Além disso, o impulso do motor afeta a velocidade).

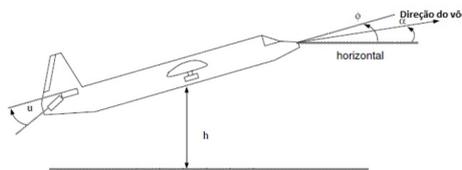


Figura 1.5:

Podemos modelar o sistema acima da seguinte forma: com $n = 4$ e $m = 1$, façamos $x_1 = \alpha, x_2 = \phi, x_3 = \dot{\phi}$ e $x_4 = h$, portanto, obtemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega & -\omega & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega b \\ 0 \end{bmatrix} u$$

o qual é um sistema linear. Após cálculos elementares, podemos ver que a matriz de

Kalman $C = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$ do sistema, com

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega & -\omega & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega b \\ 0 \end{bmatrix}$$

é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a\omega b & -a^2\omega b \\ 0 & \omega b & 0 & -\omega^2 b \\ \omega b & 0 & -\omega^2 b & \omega^2 ab \\ 0 & 0 & 0 & a\omega bc \end{bmatrix},$$

o qual possui posto 4. Logo o sistema é controlável.

Aplicando a condição de Hautus, temos que

$$\text{Posto}[\lambda I - A \quad B] = \text{Posto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\omega ab}{\lambda^2(a + \lambda) + \lambda\omega} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\omega b(a + \lambda)}{\lambda^2(a + \lambda) + \lambda\omega} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda(a + \lambda) + \omega}{\omega b(a + \lambda)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\omega abc}{\lambda(\lambda^2(a + \lambda) + \lambda\omega)} \end{pmatrix},$$

o qual possui posto 4. Portanto, o sistema é controlável.

Nesta seção, estudamos resultados de controlabilidade para sistemas lineares autônomos, sem impormos nenhuma restrição sobre os controles. Na seção a seguir, veremos que tipos de resultados podem ser obtidos quando este não é o caso.

1.1.2 Caso com restrições nos controles

Um problema importante que surge em diversas aplicações é aquele que consideramos restrições às variáveis de controle. De fato, em várias situações práticas não dispomos de recursos, ou não é factível a construção de controles sem restrições. Desta forma é importante sabermos quais estados podem ser atingidos em um determinado intervalo de tempo.

Consideramos novamente um sistema linear autônomo em \mathbb{R}^n da forma

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.14)$$

onde as matrizes A e B assumem seus valores respectivamente em $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $M_{n \times m}(\mathbb{R})$.

Relembremos, nesta seção, o conjunto de controles admissíveis \mathcal{U}_{ad} é o conjunto das aplicações mensuráveis e limitadas em $[0, T]$ com valores em $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, isto é, $\mathcal{U}_{ad} = L^\infty(0, T; \Omega)$.

Note que, em geral, como já mostramos nos resultados anteriores, (veja os Teoremas 1.1 e 1.6) um sistema de controle linear pode ser exatamente controlável quando $\Omega = \mathbb{R}^m$ (sem restrição de controle), enquanto que se restringirmos a imagem dos controles a um subconjunto Ω de \mathbb{R}^m o sistema pode passar a não ser exatamente controlável. Ilustraremos este fato com o exemplo a seguir:

Exemplo: Considere o sistema de controle linear

$$x'(t) = -x(t) + u(t) \quad \text{em } \mathbb{R}. \quad (1.15)$$

Note que se Ω coincidissem com \mathbb{R} , teríamos pelo Teorema 1.6 que o sistema (1.15) seria controlável uma vez que a matriz de Kalman seria a matriz $[B] = [1]$, que tem posto 1. Entretanto, se tomarmos $\Omega = [-1, 1]$, o sistema não é controlável partindo da origem. Com efeito, suponhamos que podemos conduzir $x_0 = 0$ ao estado $x_1 = 2$ em um tempo finito $t > 0$. Então existiria $u \in L^\infty(0, T; \Omega)$ tal que $x(t) = x_1 = 2$. Porém,

$$2 = x_1 = x(t) = \int_0^t e^{-(t-s)} u(s) ds,$$

e como $u(s) \in [-1, 1]$ para todo $s \in \mathbb{R}$, temos que

$$-(1 - e^{-t}) = - \int_0^t e^{-(t-s)} ds \leq 2 \leq \int_0^t e^{-(t-s)} ds = 1 - e^{-t}.$$

A desigualdade $2 \leq 1 - e^{-t}$ implica que $e^{-t} \leq -1$, o que é um absurdo, visto que $t > 0$. Portanto, o sistema com controle restrito a $\Omega = [-1, 1]$ não é controlável. Entretanto, veremos mais condições que garantam algum tipo de resultado de controlabilidade para o sistema do tipo (1.14) com restrições sobre o controle dada pelo conjunto Ω .

No intuito de estabelecermos um sentido de controlabilidade para sistemas que não são necessariamente controláveis no sentido das definições 1.1 ou 1.2, estabelecemos os novos conceitos a seguir:

Definição 1.3. (controlabilidade nula-local/global) O sistema (1.14) é dito localmente nulo-controlável, se existe um conjunto aberto V de \mathbb{R}^n que contém a origem onde as soluções de (1.14) partindo de qualquer $x_0 \in V$ podem ser conduzidas até $x_1 = 0$ em um tempo finito. Se $V = \mathbb{R}^n$, então dizemos que (1.14) é globalmente nulo controlável em um tempo finito (ou simplesmente nulamente controlável de acordo com a Definição

1.2).

Definição 1.4. (Controlabilidade a partir da origem) O sistema (1.14) é controlável a partir da origem, se para todo ponto $x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe um controle admissível u que direciona 0 para x_1 em um tempo finito.

1.1.3 Resultados de controlabilidade nula local

Nesta seção, provaremos resultados que caracterizam a controlabilidade nula-local para o sistema (1.14), para o caso em que os controles admissíveis pertencem a $\mathcal{U}_{ad} = L^\infty(0, T; \Omega)$, quando Ω não necessariamente é igual a \mathbb{R}^m . Iniciamos com o seguinte resultado de [17] pg.84.

Teorema 1.9. *Considere o sistema (1.14) com restrições sobre o controle dado pelo conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ tal que $0 \in \text{Int}(\Omega)$. O sistema é localmente nulo-controlável se, e somente se, o par (A, B) for controlável, isto é, a matriz de Kalman C dada em (1.9) tem Posto n .*

A prova do Teorema 1.9 é baseada no resultado a seguir que também pode ser encontrado em [17], pg.83.

Lema 1.10. Suponhamos que a condição de Kalman é satisfeita. Se o conjunto de restrição $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é tal que $0 \in \text{Int} \Omega$, então o conjunto acessível $A_\Omega(x_0, t)$ no tempo t contém uma vizinhança do ponto $e^{tA}x_0$. Em outras palavras, o ponto inicial x_0 pode ser direcionado para todos os pontos de uma vizinhança $e^{tA}x_0$.

Demonstração. Como $0 \in \text{Int}(\Omega)$, existe $\epsilon > 0$ tal que a bola fechada $B_{\mathbb{R}^m}[0, \epsilon]$ de centro na origem e raio ϵ , está contida em Ω . Seja $S = L^\infty(0, T; B[0, \epsilon])$ claramente satisfaz $0 \in S \subset \Omega$. Como a bola é convexa, é fácil ver que S é um conjunto convexo.

Seja $A_S(x_0, t) = \left\{ e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds ; u \in S \right\}$, o conjunto dos estados atingíveis a partir de x_0 por controles em S . Pelo Teorema 1.1, o conjunto $A_S(x_0, t)$ é convexo e compacto. Mais ainda, temos $A_S(x_0, t) \subset A_\Omega(x_0, t)$ e, além disso, podemos ver que $A_S(x_0, t)$ é simétrico em relação à $e^{tA}x_0$. De fato, se $h \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$ e se $e^{tA}x_0 + hv \in A_S(x_0, t)$, então existe $u \in S$ tal que $hv = \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds$. Assim, temos que

$$e^{tA}x_0 - hv = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}B(-u(s)) ds$$

que certamente pertence a $A_S(x_0, t)$.

Supondo que $\dim(A_S(x_0, t)) < n$, então existe $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\psi^\top \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds = 0$, para todo $u \in S$. Para $\tilde{\epsilon}$ suficientemente pequeno, podemos tomar $\tilde{u}(s) = \tilde{\epsilon}B^\top (e^{(t-s)A})^\top \psi \in$

S e chegamos que $\int_0^t |\psi^\top e^{(t-s)A} B u(s)|^2 ds = 0$, ou ainda que

$$\psi^\top e^{(t-s)A} B = 0, \quad \text{para todo } s \in [0, T]. \quad (1.16)$$

Em particular, quando $t = s$, obtemos $\psi^\top B = 0$. Note que, derivando a expressão (1.16) em relação a t , obtemos

$$\frac{d}{dt} (\psi^\top e^{(t-s)A} B) = -\psi^\top e^{(t-s)A} A B = 0,$$

de onde tomando $t = s$, obtemos $\psi^\top A B = 0$. E assim, por derivações sucessivas, obtemos

$$\frac{d}{dt} (\psi^\top e^{(t-s)A} A^i B) = \psi^\top e^{(t-s)A} A^{i+1} B = 0, \quad i = 0, \dots, n-2,$$

de onde finalmente, chegamos em

$$\psi^\top B = \psi^\top A B = \dots = \psi^\top A^{n-1} B = 0.$$

Portanto, a matriz de Kalman C é tal que $\text{Posto}(C) < n$, o que representa uma contradição. Assim, $\dim(A_S(x_0, t)) = n$ e portanto $A_S(x_0, t)$ contém uma vizinhança do ponto $e^{tA}x_0$, de onde $A_\Omega(x_0, t)$ contém uma vizinhança do ponto $e^{tA}x_0$. \square

A conclusão do Lema 1.10 se deu em função do seguinte resultado:

Lema 1.11. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, compacto e simétrico em relação a um ponto x_0 e tal que $\dim(U) = n$. Então $x_0 \in \text{Int } U$.

Demonstração. Sejam $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de \mathbb{R}^n e considere $f_i(t) = x_0 + tv_i$. Para cada $i = 1, \dots, n$, existe t_i tal que $f_i(t_i)$ e $f_i(-t_i)$ pertencem à fronteira de U . Notemos que, pela convexidade de U , os pontos t_i e $-t_i$ são os únicos com essa propriedade na direção v_i . Assim, seja $W = \text{Conv}\{f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_n), f(-t_1), f(-t_2), \dots, f(-t_n)\}$. É claro que W se trata de um poliedro do \mathbb{R}^n de centro x_0 , portanto x_0 pertence ao seu interior. \square

Antes de provarmos o Teorema 1.9, façamos algumas observações. Definimos o sistema tempo-inverso como sendo a seguinte equação de estado

$$z'(t) = -Az(t) - Bv(t). \quad (1.17)$$

Seja v o controle tal que $z(T) = x_0$. Definindo $x(t) = z(T-t)$, temos que x é a solução de (1.14) com $x(0) = z(T) = x_0$ e $x(T) = z(0) = 0$.

Portanto, podemos concluir que o conjunto dos estados atingíveis a partir de 0 para o sistema tempo-inverso é igual ao conjunto dos estados conduzíveis à origem do sistema original.

vamos agora à prova do Teorema 1.9

Demonstração. (Teorema 1.9) Sabemos que a condição de Kalman para $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ é válida se, e somente se, também é válida para o sistema tempo-inverso $z'(t) = -Az(t) - Bv(t)$, uma vez que as colunas de $C = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ e de $-C = [-B \ AB \ \dots \ (-1)^n A^{n-1}B]$ geram o mesmo espaço. Assim, pelo Lema 1.10 para $x_0 = 0$, o conjunto dos estados atingíveis a partir da origem das soluções de $z'(t) = -Az(t) + Bv(t)$ contém uma vizinhança V de $x_0 = 0$. Em particular, é possível controlar o sistema $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ao estado nulo a partir de qualquer dado em V . Assim, o sistema é localmente nulo-controlável.

Reciprocamente, se o sistema é localmente nulo-controlável, temos que existe um aberto V do \mathbb{R}^n que contém a origem e que qualquer $x_0 \in V$ pode ser controlado até $x_1 = 0$ em um tempo finito. Supondo que $\text{Posto}(C) < n$, então existe $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tal que $\psi^\top C = 0$. Portanto

$$\psi^\top B = \psi^\top AB = \dots = \psi^\top A^{n-1}B = 0.$$

De acordo com o teorema de Cayley-Hamilton, temos $\psi^\top A^n B = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim $\psi^\top e^{tA} B = 0$ para todo t o que implica $\psi^\top \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds = 0$. No entanto, como os pontos de V são atingíveis pelas soluções do sistema tempo-inverso partindo do zero, temos

$$V \subset \left\{ - \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds; u \in \mathcal{U}_{ad} \right\},$$

que está contido no subespaço $\{w \in \mathbb{R}^n; \psi \cdot w = 0\}$, que possui dimensão menor do que n . Com isso, V não pode ser aberto em \mathbb{R}^n . \square

Observação 1.4. Na prova do Teorema 1.9, precisamente na prova da controlabilidade nula local assumindo a condição de Kalman, fixamos um tempo t e provamos que o zero pode ser atingido em t partindo de uma vizinhança de zero. Em outras palavras, o zero pode ser atingido em qualquer tempo. Entretanto, se o sistema não é controlável em um dado tempo t , isto não significa que a condição de Kalman deva ser falsa, uma vez que a controlabilidade a zero poderá ocorrer em um outro tempo.

Apesar de termos assumido que o zero pertença ao domínio de restrições, esta não é uma condição necessária. Enunciaremos e provaremos o seguinte resultado devido a F. Brammer em [6].

Teorema 1.12. (F. Brammer, [6]) *Considere o sistema (1.14), onde o domínio de restrição $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ para o controle é compacto ou convexo e satisfaz as seguintes condições:*

(i) *Existe um vetor $u \in \Omega$ no núcleo de B ;*

(ii) *O conjunto $\text{Conv}(\Omega)$ tem interior não vazio.*

As seguintes condições são necessárias e suficientes para a controlabilidade local nula de (1.14).

(iii) *$\text{Posto}(C) = n$;*

(iv) *Todo autovetor real v de A^\top verifica $\langle v, Bu \rangle > 0$ para todo $u \in \Omega$.*

Observação 1.5. Em comparação com Teorema 1.9, o teorema anterior não pede que $0 \in \text{Int } \Omega$. Entretanto, além das condições *i*) e *ii*) faz-se necessário a hipótese de compacidade ou convexidade para Ω . A razão para isto é que, em algum momento de sua prova, necessitaremos do fato que os conjuntos dos estados atingíveis sejam convexos, e, para isto, necessitaremos utilizar o Teorema 1.1.

A prova do Teorema 1.12 é baseada em uma avaliação do produto escalar $\langle v, e^{tA}Bu \rangle$. Necessitaremos de alguns lemas técnicos que serão expostos a seguir. O primeiro se trata de um resultado de H. Saperstone e J. Yorke em [24].

Lema 1.13. Seja $D \in M_l(\mathbb{R})$ uma matriz de modo que os autovalores de D têm parte imaginária diferente de zero (ou seja, não tem autovalores reais). Se v e w são vetores não nulos, então $\langle v, e^{tD}w \rangle$ não é identicamente nulo e pode ser escrito da forma

$$\langle v, e^{tD}w \rangle = t^j e^{\rho t} (a(t) + g(t)),$$

onde $a(t)$ é uma soma de termos senoidais $a(t) = \sum_{i=1}^s h_i \sin(w_i t + \theta_i)$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$, onde s é o número de autovalores de D . Se além disso $a(t) = 0$ então $g(t) = 0$.

Também, utilizaremos o seguinte Lema 1.14 de [6], que provaremos a seguir

Lema 1.14. Seja $D \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $D = \lambda I + N$, onde N é uma matriz nilpotente. Seja v um vetor não nulo do \mathbb{R}^n . A função vetorial $e^{tD}v$ tem a seguinte expressão assintótica

$$e^{tD}v = t^k e^{\lambda t} (z + f(t)),$$

com k inteiro não negativo, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ e $Dz = \lambda z$.

Demonstração. Para o caso em que $Nv = 0$, então temos

$$\begin{aligned}
 e^{tD}v &= e^{t(\lambda I + N)} = e^{t\lambda} e^{tN}v \\
 &= e^{t\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k N^k}{k!} \right) v \\
 &= e^{t\lambda} \left(I + Nt + \dots + \frac{N^k t^k}{k!} + \dots \right) v \\
 &= e^{t\lambda} \left(v + vNt + \dots + \frac{vN^k t^k}{k!} + \dots \right) \\
 &= e^{t\lambda} v,
 \end{aligned}$$

o que é exatamente o que queríamos mostrar com $z = v$, $f(t) \equiv 0$ e $k = 0$.

Para o caso em que $Nv \neq 0$, seja $1 \leq k \leq l$ o maior inteiro satisfazendo $N^k v \neq 0$, o inteiro k existe, uma vez que a matriz N é nilpotente. A função $e^{tD}v$ é dada por

$$\begin{aligned}
 e^{tD}v &= e^{(\lambda I + N)}v = e^{\lambda t} e^{tN}v \\
 &= e^{t\lambda} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tN)^j}{j!} v \right) \\
 &= e^{\lambda t} \left(\sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} N^j \right) v.
 \end{aligned}$$

Definindo $z = \frac{N^k v}{k!}$ e definindo para todo $t > 0$, $f(t) = \frac{1}{t^k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j N^j}{j!} \right) v$, temos

$$e^{tD}v = t^k e^{\lambda t} (z + f(t)).$$

É claro que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ e

$$Dz = \frac{DN^k v}{k!} = \frac{1}{k!} (\lambda I + N) N^k v = \lambda \frac{N^k v}{k!} + \frac{1}{k!} N^{k+1} v = \lambda z.$$

De onde segue o resultado. □

O lema a seguir, também consta na referência [6] e o provaremos utilizando os dois lemas anteriores. Este trata em fornecer uma representação para o produto escalar $\langle v, e^{tA}Bu \rangle$.

Lema 1.15. O produto escalar $\langle v, e^{tA}Bu \rangle$ pode ser escrito na forma

$$\langle v, e^{tA}Bu \rangle = \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j, \quad (1.18)$$

com as seguintes condições sendo satisfeitas.

a) Os λ_i s são os k autovalores reais distintos da matriz A e

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k :$$

b) $A^\top z_i = \lambda_i z_i, i = 1, \dots, k;$

c) Se $z_i = 0$ então $f_i(t) \equiv 0, i = 1, \dots, k;$

d) j_i e r_{ij} são inteiros não negativos;

e) $\lim_{t \rightarrow \infty} f_i(t) = 0, i = 1, \dots, k$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} g_{ij}(t) = 0, i = k + 1, \dots, k + p, j = 1, \dots, m;$

f) As funções $a_{ij}(t)$ são somas de termos senoidais como no Lema 1.13;

g) Se $a_{ij}(t) \equiv 0$ então $g_{ij}(t) \equiv 0, i = k + 1, \dots, k + p, j = 1, \dots, m;$

h) Os ρ_i são as p partes reais distintas dos p autovalores complexos de A e

$$\rho_{k+1} > \rho_{k+2} > \dots > \rho_{k+p}.$$

i) Os u_j são os componentes do m -vector $u = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m)^\top;$

j) Se o $\text{Int}(\text{Conv}(\Omega)) \neq \emptyset, \text{Posto}(C) = n,$ e seja $v \neq 0,$ então existe $u \in \Omega$ para o qual $\langle v, e^{tA} B u \rangle \neq 0.$

Demonstração. Para a prova, é suficiente supormos que a matriz A^\top se escreve na forma de Jordan, isto é, utilizaremos, sem perda de generalidade, um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^n onde a matriz A^\top se escreva como blocos diagonais. (Veja o apêndice A). Mais ainda, perceba que todos os parâmetros aparecendo à direita de (1.18) são independentes da particular escolha de uma base em \mathbb{R}^n . Assim, uma vez que A^\top se escreve como blocos de Jordan, sejam P_i as projeções induzidas por A^\top . Pelo fato de que $\sum_{i=1}^{k+p} P_i = I_n,$ temos

$$\begin{aligned} e^{tA^\top} v &= \sum_{i=1}^{k+p} P_i e^{tA^\top} v = \sum_{i=1}^{k+p} e^{tA^\top} P_i v \\ &= \sum_{i=1}^k e^{tA^\top} P_i v + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{tA^\top} P_i v. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Como podemos escrever $A^\top = \lambda_i I + N_i \ \forall i = 1, \dots, k,$ onde N_i é uma matriz nilpotente (veja a Proposição A.2), podemos usar o Lema 1.14 e escrever $e^{tA^\top} v = t^k e^{\lambda t} (z + f(t))$ onde k é um inteiro não negativo, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ e $Az = \lambda z$. Para a primeira parcela

à direita de (1.19), temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k e^{tA^\top P_i} P_i v &= \sum_{i=1}^k e^{(t(\lambda_i I_n + N_i) P_i)} P_i v \\
 &= \sum_{i=1}^k e^{(t(\lambda_i I_n + N_i))} P_i v \\
 &= \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (z_i + f_i(t)),
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

onde j_i são inteiros não negativos, $\lim_{t \rightarrow \infty} f_i(t) = 0$ e $A^\top z_i = \lambda_i z_i$.

Portanto, por (1.18) e (1.19), $e^{tA^\top} v$ torna-se

$$e^{tA^\top} v = \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{t\lambda_i} (z_i + f_i(t)) + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{tA^\top P_i} P_i v.$$

De onde,

$$\langle e^{tA^\top} v, Bu \rangle = \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{t\lambda_i} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + \sum_{i=k+1}^{k+p} \langle e^{tA^\top P_i} P_i v, Bu \rangle.$$

isso prova a), b), c) e as primeiras partes de d) e e).

Agora considere a segunda soma de $\langle e^{tA^\top} v, Bu \rangle$, isto é $\sum_{i=k+1}^{k+p} \langle e^{tA^\top P_i} P_i v, Bu \rangle$. Uma vez que $Bu = \sum_{j=1}^m b_j u_j$ onde $b_j, \forall j = 1, \dots, m$ são os vetores coluna da matriz B e $u_j, \forall j = 1, \dots, m$ são os componentes do vetor u , temos a seguinte soma

$$\sum_{i=k+1}^{k+p} \langle e^{tA^\top P_i} P_i v, Bu \rangle = \sum_{i=k+1}^{k+p} \sum_{j=1}^m \langle e^{tA^\top P_i} P_i v, b_j \rangle u_j.$$

Consideremos agora o produto interno $\langle e^{tA^\top P_i} P_i v, b_j \rangle$. Vista como definida em todo \mathbb{R}^n , a matriz $A^\top P_i$ para $i = k+1, \dots, k+p$ não é em geral oscilatória (isto é, não tem autovalores reais). Entretanto se $A^\top P_i$ é considerada como uma transformação restrita à imagem de P_i em \mathbb{R}^n , então $A^\top P_i$ é uma matriz oscilatória, pois coincide com o i -ésimo bloco de Jordan para $i = k+1, \dots, k+p$. Além disso, uma vez $\langle e^{tA^\top P_i} P_i v, b_j \rangle = \langle e^{tA^\top P_i} P_i v, P_i b_j \rangle$ o produto interno pode ser considerado restrito a este subespaço. Portanto, o Lema 1.13 nos fornece que

$$\langle e^{tA^\top P_i} P_i v, b_j \rangle = e^{t\rho_i} t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)).$$

Daí,

$$\sum_{j=1}^m \langle e^{tA^\top P_i} P_i v, b_j \rangle u_j = e^{t\rho_i} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j. \tag{1.21}$$

Combinando (1.19), (1.20) e (1.21), chegamos que

$$\begin{aligned} \langle v, e^{tA}Bu \rangle &= \langle e^{tA^\top}v, Bu \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{t\lambda_i} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{t\rho_i} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j. \end{aligned}$$

Isso conclui as provas de d) à i).

Agora resta-nos mostrar a assertiva j). Se $\langle v, e^{tA}Bu \rangle$ for identicamente zero em t para todo $u \in \Omega$, teremos em particular que para $t = 0$, $\langle v, Bu \rangle = 0$ para todo $u \in \Omega$. Além disso, por diferenciação e avaliação sucessivas em $t = 0$, obtemos

$$\langle v, ABu \rangle \equiv 0, \langle v, A^2Bu \rangle \equiv 0, \dots, \langle v, A^{n-1}Bu \rangle \equiv 0, \quad \forall u \in \Omega.$$

Uma vez que temos $\langle v, Bu \rangle = \langle B^\top v, u \rangle$, segue-se por transposição que

$$\langle B^\top v, u \rangle \equiv 0, \langle B^\top A^\top v, u \rangle \equiv 0, \dots, \langle B^\top (A^\top)^{n-1} v, u \rangle \equiv 0, \quad \forall u \in \Omega.$$

Uma vez que $\text{Conv}(\Omega)$ tem interior não vazio, os vetores $B^\top v, B^\top A^\top v, \dots, B^\top (A^\top)^{n-1} v$, pertencem a \mathbb{R}^m e são perpendiculares a m vetores linearmente independentes. Portanto, cada um deles deve valer zero. Assim, temos que v é um vetor de \mathbb{R}^n perpendicular a cada vetor da forma $A^k B$, para $k = 0, \dots, n-1$, impossibilitando que o Posto de C seja n , o que contradiz a hipótese. \square

Antes de procedermos à prova do Teorema 1.12, apresentaremos o lema a seguir que será de fundamental importância.

Lema 1.16. Suponha que o domínio de restrição $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ seja compacto ou convexo. O sistema (1.14) é localmente nulo-controlável se, e somente se, não existir v não nulo tal que

$$\langle v, e^{tA}Bu \rangle \leq 0, \quad \forall t > 0, \forall u \in \Omega. \quad (1.22)$$

Demonstração. Seja C a matriz de Kalman dada por (1.9). Temos os seguintes fatos:

- v é autovetor de A^\top se, e somente se, $-v$ é autovetor de $-A^\top$;
- $\text{Posto}(C) = n$ se, e somente se, $\text{Posto}(-C) = n$.

Nestes termos, temos que o sistema (1.14) satisfaz as condições (iii) e (iv) do Teorema 1.12 se, e somente se, o sistema tempo-inverso (1.17) satisfaz as mesmas condições. Seja $A_\Omega^-(0, t)$ os estados acessíveis do sistema tempo-inverso partindo do estado $x_0 = 0$. Desta forma, a controlabilidade nula local é equivalente ao conjunto $A_\Omega^-(0, t)$ conter uma vizinhança da origem, para algum tempo t . Além disso, de acordo com o Teorema 1.1, $A_\Omega^-(0, t)$ é um conjunto convexo para todo $t > 0$.

De maneira similar à prova do Proposição 1.4, para todo $t_1 < t_2$, temos $A_{\Omega}^-(0, t_1) \subset A_{\Omega}^-(0, t_2)$. Mais ainda, é claro que $0 \in A_{\Omega}^-(0, t)$ para todo $t > 0$, bastando tomarmos o controle pertencente ao núcleo de B (i.e., $u \in \Omega$ tal que $Bu = 0$) em (1.17).

Seja, $A_{\Omega}^-(0) = \bigcup_{t \geq 0} A_{\Omega}^-(0, t)$ a união de uma coleção crescente de conjuntos convexos, portanto é um conjunto convexo contendo a origem. Afirmamos que $0 \in \text{Int}(A_{\Omega}^-(0))$, se e somente se, $0 \in \text{Int}(A_{\Omega}^-(0, t))$ para algum t . De fato, se $0 \in \text{Int}A_{\Omega}^-(0)$, então existem $n+1$ pontos em $A_{\Omega}^-(0)$ cujo envoltório convexo contém a origem como um ponto interior, segue-se que esses $n+1$ pontos devem estar contidos em $A_{\Omega}^-(0, t)$ para algum $t > 0$, uma vez que constituem uma sequência crescente de conjuntos, provando o que queríamos. A partir deste ponto, percebemos que a controlabilidade nula local é equivalente a provarmos que $0 \in \text{Int}A_{\Omega}^-(0)$.

Suponha que $0 \notin \text{Int}A_{\Omega}^-(0)$, ou seja que $0 \in \partial A_{\Omega}^-(0)$. Pela convexidade de $A_{\Omega}^-(0)$, existe um vetor unitário v tal que

$$\langle v, z(t, u) \rangle \leq \langle v, 0 \rangle = 0 \quad \forall t > 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad},$$

onde z é a solução de (1.17) com controle u , isto é, tem a forma:

$$z(t, u) = \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s) ds.$$

Daí, temos que

$$\left\langle v, \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s) ds \right\rangle \leq 0, \quad \forall t, \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (1.23)$$

Afirmamos que (1.23) é equivalente a (1.22). De fato, suponhamos que (1.23) seja verdadeiro, porém que (1.22) seja falso, isto é

$$\langle v, e^{t_0 A} Bu \rangle > 0,$$

para algum t_0 e algum $u \in \Omega$. Assim, por continuidade, existe $\delta > 0$ tal que $\langle v, e^{tA} Bu \rangle > 0$ para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Então, definimos a função

$$U(r) = \begin{cases} u, & \text{se } r \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com isso, seja $t > 0$ e $s \in (0, t)$. Claramente, se t é suficientemente grande,

$$\left\langle v, \int_0^t e^{(t-s)A} BU(s) ds \right\rangle > 0,$$

contradizendo (1.23). □

Finalmente, vamos à prova do Teorema 1.12.

Demonstração. (Teorema 1.12) Dividiremos a prova em duas partes. Na primeira provaremos que as condições (iii) e (iv) são necessárias e na segunda provaremos que são suficientes para a controlabilidade nula local.

Prova de necessidade: Neste passo mostramos que se (iii) ou (iv) for violado, então (1.22) pode ser satisfeito.

Suponha que $\text{Posto}(C) < n$ e seja $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ satisfazendo $v^\top C = 0$. Como já visto anteriormente, veja por exemplo a prova do Teorema 1.6, temos que $v^\top e^{tA} B = 0$ e assim $\langle v^\top, e^{tA} B u \rangle = 0$ para todo $t > 0$ e $u \in \Omega$.

Agora, suponhamos que (iv) seja violado, isto é, que exista um autovetor real v de A^\top e $u \in \Omega$ que verifica $\langle v^\top, B u \rangle \leq 0$. Afirmamos que $v e^{tA^\top} = e^{t\lambda} v$, onde λ é autovalor pertencente a v . De fato, é fácil ver que

$$v^\top A A = \lambda v^\top A \Leftrightarrow v^\top A^2 = \lambda \lambda v^\top \Leftrightarrow v^\top A^2 = \lambda^2 v^\top.$$

Suponhamos por indução que $v^\top A^{k-1} = \lambda^{k-1} v^\top$. Então

$$v^\top A^{k-1} A = \lambda^{k-1} v^\top A \Leftrightarrow v^\top A^k = \lambda^{k-1} \lambda v^\top \Leftrightarrow v^\top A^k = \lambda^k v^\top.$$

Logo, provamos que $v^\top A^k = \lambda^k v^\top$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí, segue-se que

$$\begin{aligned} v^\top e^{tA} &= v^\top \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right) \\ &= v^\top \left(I_d + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots \right) \\ &= v^\top I_d + v^\top At + \frac{v^\top A^2 t^2}{2!} + \frac{v^\top A^3 t^3}{3!} + \dots \\ &= v^\top + \lambda v^\top t + \frac{\lambda^2 v^\top t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 v^\top t^3}{3!} + \dots \\ &= \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \dots \right) v^\top \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} \right) v^\top \\ &= e^{\lambda t} v^\top. \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\langle v^\top, e^{tA} B u \rangle = \langle e^{tA^\top} v^\top, B u \rangle = e^{t\lambda} \langle v^\top, B u \rangle \leq 0, \forall t > 0, \forall u \in \Omega.$$

Isso prova a necessidade de (iii) e (iv) para a controlabilidade local-nula do sistema

(1.14).

Prova de suficiência: Agora mostraremos que (iii) e (iv) são condições suficientes para a controlabilidade local-nula de (1.14). Especificamente, mostramos que se (iii) e (iv) são satisfeitos, então nenhum vetor v diferente de zero pode satisfazer (1.22). Suponhamos por absurdo que existe v não nulo tal que (1.22) é verdadeiro. Assim, aplicando o Lema 1.15 em (1.22), obtemos

$$\begin{aligned} \langle v, e^{tA} Bu \rangle &= \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) \\ &+ \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j \leq 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Neste ponto, dividiremos a prova em três casos:

- Caso 1: $\lambda_1 > \rho_{k+1}$ ou $\lambda_1 = \rho_{k+1}$ e $j_1 > \max_j r_{(k+1)j} \equiv r_{k+1}$;
- Caso 2: $\lambda_1 < \rho_{k+1}$ ou $\lambda_1 = \rho_{k+1}$ e $j_1 < \max_j r_{(k+1)j} \equiv r_{k+1}$;
- Caso 3: $\lambda_1 = \rho_{k+1}$ e $j_1 = \max_j r_{(k+1)j} \equiv r_{k+1}$.

Caso 1: Para $t > 0$ dividimos ambos os lados de (1.24) por $t^{j_1} e^{\lambda_1 t}$ para obtermos

$$\langle z_1, Bu \rangle + F(t) \leq 0, \quad (1.25)$$

onde $F(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} F(t) &= \langle f_1(t), Bu \rangle \\ &+ \frac{1}{t^{j_1} e^{t\lambda_1}} \left[\sum_{i=2}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j \right]. \end{aligned}$$

Lembremos que, de acordo com o Lema 1.15, os λ_i 's são os k autovalores reais distintos da matriz A , onde $\lambda_1 > \lambda_2, \dots > \lambda_k$, j_i, r_{ij} são inteiros não negativos, $\lim_{t \rightarrow \infty} f_i(t) = 0$, $i = 1, \dots, k$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g_{ij}(t) = 0$, $i = k+1, \dots, k+p$, $j = 1, \dots, m$, as funções $a_{ij}(t)$ são termos senoidais e os ρ_i são as p partes reais distintas dos p autovalores complexos de

A com $\rho_{k+1} > \rho_{k+2} > \dots > \rho_{k+p}$. Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) &= \sum_{i=2}^k \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{j_i} e^{\lambda_i t}}{t^{j_1} e^{\lambda_1 t}} \langle z_i, Bu \rangle \\ &+ \sum_{j=1}^m \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{r_{(k+1)j}} e^{\rho_{(k+1)} t}}{t^{j_1} e^{\lambda_1 t}} a_{(k+1)j} u_j + \dots + \sum_{j=1}^m \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{r_{(k+p)j}} e^{\rho_{(k+p)} t}}{t^{j_1} e^{\lambda_1 t}} a_{(k+p)j} u_j. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Desta forma, para a primeira parcela de (1.26), temos que

$$\sum_{i=2}^k \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{j_i} e^{\lambda_i t}}{t^{j_1} e^{\lambda_1 t}} \langle z_i, Bu \rangle = \sum_{i=2}^k \lim_{t \rightarrow \infty} t^{(j_i - j_1)} e^{t(\lambda_i - \lambda_1)} \langle z_i, Bu \rangle = 0,$$

pois $\lambda_i - \lambda_1 < 0$ para todo $i = 2, \dots, k$. É importante mencionarmos que o comportamento exponencial é dominante sobre o polinomial, por isto o limite acima ser zero independe do fato de $j_i - j_1$ ser positivo ou negativo.

Para as demais parcelas, devemos dividir a análise em dois casos. Se $\lambda_1 > \rho_{(k+1)}$, uma vez que as funções a_{ij} são termos senoidais, podemos usar o mesmo argumento anterior, pois a exponencial $e^{\lambda_1 t}$ será dominante e conduzirá cada um dos termos a zero. Caso $\lambda_1 = \rho_{(k+1)}$, essa dominância não existe mais e nesse ponto a hipótese de $j_1 > r_{k+1}$ se torna importante, fazendo com que os polinômios da forma $t^{r_{(k+i)j} - j_1}$ convirjam a zero quando $t \rightarrow \infty$. Assim, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$ e, portanto, fazendo $t \rightarrow \infty$ em (1.25), chegamos que $\langle z_1, Bu \rangle \leq 0$ (z_1 autovetor de A^T), contradizendo (iv) do Teorema 1.12.

Caso 2: Para $t > 0$, dividimos ambos os lados de (1.24) por $t^{r_{k+1}} e^{t\rho_{k+1}}$ para obtermos

$$\sum_{j=1}^{p_0} (a_{(k+1)l_j}(t) + g_{(k+1)l_j}(t)) u_j + G(t) \leq 0, \quad (1.27)$$

onde l_j é o conjunto de índices tais que $r_{(k+1)l_j} = r_{k+1}$ e a função $G(t)$ é da forma

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{1}{t^{r_{k+1}} e^{t\rho_{k+1}}} \left[\sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + \sum_{i=k+2}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j \right] \\ &+ \frac{1}{t^{r_{k+1}}} \left(\sum_{k=1}^{p_1} t^{r_{(k+1)l_k}} (a_{(k+1)l_k}(t) + g_{(k+1)l_k}(t)) u_{l_k} \right), \end{aligned}$$

onde l_k o conjunto de índices tais que $r_{(k+1)l_k} < r_{k+1}$. Notemos que $p_0 + p_1 = m$. Assim, de forma análoga à função F do Caso 1, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$.

Agora, por (1.27), temos

$$\sum_{j=1}^{p_0} a_{(k+1)l_j}(t) u_j \leq |H(t)|, \quad (1.28)$$

onde $H(t) = G(t) + \sum_{j=1}^{p_0} g_{(k+1)l_j}(t)u_{l_j}$. E assim, chegamos que $H(t)$ converge para zero quando $t \rightarrow \infty$.

Uma vez que as funções $a_{ij}(t)$ são somas de termos senoidais e suas médias valem zero, isto é

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a_{ij}(t) dt = 0$$

e também são funções quase periódicas, podemos utilizar o Lema 4.1 de [24] e obtemos:

$$\sum_{j=1}^{p_0} a_{(k+1)l_j}(t)u_{l_j} \equiv 0. \quad (1.29)$$

Notemos que, como $\text{Int Conv}(\Omega) \neq \emptyset$, existem m vetores linearmente independentes em Ω , pois do contrário a dimensão de $\text{Conv}(\Omega)$ seria menor do m e, portanto, o seu interior seria vazio. Daí, se $\{U_1, \dots, U_m\} \subset \Omega$ é uma base de \mathbb{R}^m , existe um subconjunto desta base $\{U_{r_1}, \dots, U_{r_{p_0}}\}$ onde ao extrairmos os componentes l_j desses vetores, teremos uma base de \mathbb{R}^{p_0} . Portanto, por (1.29), teremos que

$$\sum_{j=1}^{p_0} a_{(k+1)l_j}(t)U_{l_j} \equiv 0,$$

chegando que $a_{(k+1)l_j} \equiv 0$. Observe que pelo Lema 1.15, item g), também teremos $g_{(k+1)l_j}(t) \equiv 0$, o que contradiz o fato de $r_{(k+1)l_j}$ ser máximo, uma vez que as parcelas envolvendo estes termos se anulariam não sendo necessário serem considerados.

Caso 3: Para $t > 0$, dividimos ambos os lados de (1.24) por $t^{r(k+1)}e^{t\rho_{k+1}} = t^{j_1}e^{t\lambda_1}$ para obtermos

$$\langle z_1, Bu \rangle + \sum_{l_j} a_{(k+1)l_j}(t)u_{l_j} + I(t) \leq 0, \quad (1.30)$$

onde $I(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} I(t) = & \langle f_1(t), Bu \rangle + \frac{1}{t^{j_1}e^{t\lambda_1}} \left(\sum_{i=2}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) \right) + \sum_{l_j} g_{(k+1)l_j}(t)u_{l_j} \\ & + \frac{1}{e^{\rho(k+1)t} t^{r_{k+1}}} \left(\sum_{i=k+2}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t))u_j \right) \\ & + \frac{1}{t^{r_{k+1}}} \left(\sum_{l_k} t^{r(k+1)j} (a_{(k+1)j}(t) + g_{(k+1)j}(t))u_{l_k} \right). \end{aligned}$$

Podemos lidar com o termo $I(t)$ de maneira similar às funções $F(t)$ e $H(t)$, provando que $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ para todo $u \in \Omega$, portanto sua média vale zero. Assim sendo, podemos aplicar a média em toda a expressão (1.29) e chegaremos que $\langle z_1, Bu \rangle \leq 0$, contradizendo (iv) . \square

Agora, seguiremos na direção da controlabilidade nula-global.

1.2 Resultados de controlabilidade nula-global

Ainda investigando a controlabilidade de sistemas autônomos em que consideramos restrições às variáveis de controle, discutiremos a seguir condições suficientes para obtermos a controlabilidade nula-global. Neste ponto, voltaremos a assumir a hipótese que $0 \in \text{Int}(\Omega)$. Entretanto, é importante ressaltar que existem resultados de controlabilidade nula-global onde hipóteses similares às do Teorema 1.12 são adotadas. Para mais detalhes, veja [6].

Vamos agora ao primeiro resultado global de controlabilidade:

Teorema 1.17. *(E.B. Lee, [17] pg.85) Considere o sistema (1.14) onde o domínio de restrição do controle $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ contém 0 em seu interior. Suponha que $\text{Posto}(C) = n$ e se para todo $\lambda \in \sigma(A)$ temos $\text{Re}(\lambda) < 0$ (parte real dos autovalores de A). Então, qualquer ponto de \mathbb{R}^n pode ser levado à origem em tempo finito.*

Demonstração. Por hipótese, existem constantes positivas $m \geq 0$ e $\omega > 0$ tais que

$$\|e^{At}x_0\| \leq me^{-\omega t} \|x_0\| \text{ para todo } t \geq 0, x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (1.31)$$

O Teorema 1.9 nos garante a existência de $T_1 > 0$ e de uma vizinhança W de 0 tal que $0 \in A_\Omega(w, T_1)$ para todo $w \in W$. De (1.31), temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA}x_0 = 0$ e assim, existe $T_2 > 0$ tal que $e^{T_2A}x_0 \in W$. Então, definimos $w_0 = e^{T_2A}x_0$ e escolhemos um controle u de forma que w_0 possa ser levado a 0 no tempo T_1 . Consideremos o controle \bar{u} definido por

$$\bar{u}(t) := \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq T_2; \\ u(t - T_2) & , T_2 \leq t \leq T_2 + T_1. \end{cases}$$

Desta forma, as soluções de (1.14) associadas ao controle \bar{u} satisfazem

$$\begin{aligned} x(T_1 + T_2) &= e^{(T_1+T_2)A}x_0 + \int_0^{T_1+T_2} e^{(T_1+T_2-s)A}B\bar{u}(s) ds \\ &= e^{T_1A}w_0 + \int_{T_2}^{T_1+T_2} e^{(T_1+T_2-s)A}Bu(s - T_2) ds \\ &= e^{T_1A}w_0 + \int_0^{T_1} e^{(T_1-s)A}Bu(s) ds = 0. \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.3. Considere o problema de controle linear em \mathbb{R}^2 com a seguinte dinâmica do sistema, dado por

$$\begin{cases} x' = y + 2u, \\ y' = -2x - 3y - 5u, \end{cases}$$

com controles $u(t)$ satisfazendo a seguinte restrição $|u(t)| \leq 1$.

Notemos que $0 \in \text{Int} \Omega$ e a matriz de Kalman do sistema $C = [B \ AB]$ com as matrizes definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

é dada por

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 11 \end{bmatrix},$$

que claramente tem posto 2. Uma vez que os auto-valores são raízes de $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ temos que $\text{Re}(\lambda) < 0$. Portanto, de acordo com o Teorema 1.17, qualquer ponto de \mathbb{R}^2 pode ser conduzido à origem em tempo finito.

Podemos provar que se A possui algum autovalor com parte real positiva, então existem dados iniciais onde as soluções de (1.14) não podem ser conduzidas a zero em nenhum tempo.

Teorema 1.18. *Seja $\lambda = \alpha + i\beta$ um autovalor de A onde $\alpha > 0$ e suponhamos que Ω é limitado. Existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \notin A_\Omega(x_0, T)$, para nenhum tempo T . Isto é, o sistema não é globalmente controlável a zero.*

Demonstração. Seja $\lambda = \alpha + i\beta$ um autovalor de A com $\alpha > 0$ e $w = w_1 + iw_2$ o autovetor correspondente. Temos então que $A^\top w = \lambda w$, implicando em

$$\begin{aligned} A^\top w_1 + iA^\top w_2 &= (\alpha + i\beta)(w_1 + iw_2), |w_1| + |w_2| \neq 0 \\ &= \alpha w_1 + i\alpha w_2 + i\beta w_1 - \beta w_2. \end{aligned}$$

Igualando as partes reais e imaginárias, obtemos

$$A^\top w_1 = \alpha w_1 - \beta w_2, \quad A^\top w_2 = \beta w_1 + \alpha w_2.$$

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\langle x, w_1 \rangle^2 + \langle x, w_2 \rangle^2 \neq 0$ e seja $u \in L^1_{loc}(0, T; \Omega)$ qualquer. Seja $t \in (0, T)$ e z solução de $z' = Az(t) + Bu(t)$, $z(0) = x$. Definindo a função

$$v(t) := \langle z(t), w_1 \rangle^2 + \langle z(t), w_2 \rangle^2, t \in [0, T],$$

obtemos por um simples cálculo que:

$$\begin{aligned}
 v'(t) &= 2(\langle z'(t), w_1 \rangle \langle z(t), w_1 \rangle + \langle z'(t), w_2 \rangle \langle z(t), w_2 \rangle) \\
 &= 2(\langle Az(t) + Bu(t), w_1 \rangle \langle z(t), w_1 \rangle + \langle Az(t) + Bu(t), w_2 \rangle \langle z(t), w_2 \rangle) \\
 &= 2(\langle z(t), A^\top w_1 \rangle \langle z(t), w_1 \rangle + \langle z(t), A^\top w_2 \rangle \langle z(t), w_2 \rangle) \\
 &\quad + 2(\langle Bu(t), w_1 \rangle \langle z(t), w_1 \rangle + \langle Bu(t), w_2 \rangle \langle z(t), w_2 \rangle) \\
 &= I_1(t) + I_2(t).
 \end{aligned}$$

Da definição de w_1 e w_2 , chegamos que

$$I_1(t) = 2(\langle z(t), \alpha w_1 - \beta w_2 \rangle \langle z(t), w_1 \rangle + \langle z(t), \alpha w_2 + \beta w_1 \rangle \langle z(t), w_2 \rangle) = 2\alpha v(t).$$

Notemos também que

$$|I_2(t)|^2 = 4(\langle Bu(t), w_1 \rangle \langle z(t), w_1 \rangle + \langle Bu(t), w_2 \rangle \langle z(t), w_2 \rangle)^2.$$

Pela desigualdade de Young, passamos a ter

$$|I_2(t)|^2 \leq 8(\langle Bu(t), w_1 \rangle^2 \langle z(t), w_1 \rangle^2 + \langle Bu(t), w_2 \rangle^2 \langle z(t), w_2 \rangle^2).$$

Agora, usando o fato de que Ω é limitado, e pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$\begin{aligned}
 &8(\langle Bu(t), w_1 \rangle^2 \langle z(t), w_1 \rangle^2 + \langle Bu(t), w_2 \rangle^2 \langle z(t), w_2 \rangle^2) \\
 &\leq 8(c_1 \langle z(t), w_1 \rangle^2 + c_2 \langle z(t), w_2 \rangle^2) \leq c^2 v(t),
 \end{aligned}$$

onde a constante c independe de u e x . Logo,

$$|I_2(t)| \leq c\sqrt{v(t)},$$

para todo $t \in (0, T)$. Uma vez que temos $I_1(t) > 0$ e $|I_2(t)| \leq c\sqrt{v(t)}$, podemos então afirmar que

$$v'(t) \geq \psi(v(t)),$$

para todo $t \in (0, T)$, onde $\psi(s) := 2\alpha s - c\sqrt{s}$, $s \in \mathbb{R}$. Como $\psi(s) > 0$ para $s_0 := s > \left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2$ temos que v é monótona crescente caso a escolha de x satisfaça $v(0) > s_0$. Portanto, fica claro que não podemos ter $z(T) = 0$ para nenhum $T > 0$ e para nenhum $u \in L^1_{loc}([0, T]; \Omega)$ pois, do contrário $v(T) = 0$, contradizendo o fato de ser crescente. \square

No Teorema 1.17, vimos que se todos os autovalores possuem parte real negativa, então a controlabilidade nula-global para o sistema (1.14) é verdadeira. Mais ainda, pelo Teorema 1.18, se existe um autovalor com parte real positiva, então não podemos transferir o estado inicial x_0 para o estado final 0, isto é, o sistema não é globalmente

nulo-controlável. O próximo resultado vem fornecer uma caracterização da controlabilidade nula-global, caso algum autovalor venha a ter parte real nula. Neste sentido sob certas condições sobre Ω , o próximo resultado acaba sendo uma generalização do Teorema 1.17.

Teorema 1.19. *(E. Sontag, [27], pg.117) Seja Ω uma vizinhança limitada de $0 \in \mathbb{R}^m$. Então $A_\Omega(0) = \mathbb{R}^n$ se, e somente se, a matriz de Kalman C é controlável e todos os autovalores da matriz A possuem parte real não-negativa.*

Para a prova do Teorema 1.19, necessitaremos de alguns resultados preliminares que serão apresentados a seguir.

Lema 1.20. Para $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e $S, T \geq 0$, temos que

$$A_\Omega(0, T) + e^{TA}A_\Omega(0, S) = A_\Omega(0, S + T).$$

Demonstração. Sejam $x_1 \in A_\Omega(0, T)$ e $x_2 \in A_\Omega(0, S)$. Então

$$x_1 = \int_0^T e^{(T-s)A}Bu_1(s)ds \quad \text{e} \quad x_2 = \int_0^S e^{(S-s)A}Bu_2(s)ds,$$

com controles admissíveis $u_i : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, $i = 1, 2$. Fazendo a mudança de variável $s \rightarrow s - S$, podemos escrever

$$x_1 = \int_S^{S+T} e^{(S+T-s)A}Bu_1(s-S)ds.$$

Notemos que

$$e^{TA}x_2 = \int_0^S e^{(S+T-s)A}Bu_2(s)ds$$

e portanto

$$\begin{aligned} x_1 + e^{TA}x_2 &= \int_S^{S+T} e^{(S+T-s)A}Bu_1(s-S)ds + \int_0^S e^{(S+T-s)A}Bu_2(s)ds \\ &= \int_0^{S+T} e^{(S+T-s)A}Bw(s)ds \quad \in A_\Omega(0, S + T), \end{aligned}$$

onde

$$w(t) = \begin{cases} u_2(s), & \text{se } s \in [0, S), \\ u_1(s - S), & \text{se } s \in [S, S + T]. \end{cases}$$

Observe que $w(s) \in \mathcal{U}_{ad}$, para todo $s \in [0, S + T]$. Desse modo, temos $A_\Omega(0, T) + e^{TA}A_\Omega(0, S) \subset A_\Omega(0, S + T)$.

Reciprocamente, seja

$$x_1 = \int_0^{S+T} e^{(S+T-s)A}Bu(s)ds \in A_\Omega(0, S + T).$$

Fazendo a mudança de variável $s \rightarrow s + S$, temos

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_S^{S+T} e^{(S+T-s)A} Bu(s) ds + \int_0^S e^{(S+T-s)A} Bu(s) ds \\ &= \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s+S) ds + e^{TA} \int_0^S e^{(S-s)A} Bu(s) ds \in A_\Omega(0, T) + e^{TA} A_\Omega(0, S). \end{aligned}$$

□

Uma consequência imediata é a seguinte:

Corolário 1.21. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $T \geq 0$ e $q \geq 1$ um número inteiro. Então

$$A_\Omega(0, T) + e^{TA} A_\Omega(0, T) + \dots + e^{(q-1)TA} A_\Omega(0, T) = A_\Omega(0, qT). \quad (1.32)$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre q . Note que para $q = 1$ o resultado é óbvio. Suponha que (1.32) seja válida para um certo $q > 1$. Portanto, pelo Lema 1.20

$$\begin{aligned} A_\Omega(0, T) + e^{TA} A_\Omega(0, T) + \dots + e^{(q-1)TA} A_\Omega(0, T) + e^{qTA} A_\Omega(0, T) \\ = A_\Omega(0, qT) + e^{qTA} A_\Omega(0, T) = A_\Omega(0, (q+1)T), \end{aligned}$$

mostrando que a igualdade é válida para todo inteiro $q \geq 1$. □

Para o próximo resultado, utilizaremos novamente a notação $A_\Omega(0) = \cup_{t \geq 0} A_\Omega(0, t)$.

Proposição 1.22. *i)* Se $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é convexo, então $A_\Omega(0)$ é convexo.

ii) Se o par (A, B) é controlável e $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é uma vizinhança da origem de \mathbb{R}^m , então $A_\Omega(0)$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n .

Demonstração. A demonstração da convexidade de $A_\Omega(0)$ do item *i)* segue de maneira inteiramente análoga à prova da Proposição 1.4. Provaremos agora o item *ii)*, isto é, que $A_\Omega(0)$ é aberto em \mathbb{R}^n . e portanto $A_\Omega(0)$ é a união crescente de conjuntos convexos, logo é convexo.

Assuma agora que a matriz de Kalman C tem posto n . Provaremos inicialmente que para cada $T > 0$, $A_\Omega(0, T)$ contém uma vizinhança da origem de \mathbb{R}^n . Sem perda de generalidade, iremos assumir que Ω é convexo, uma vez que, no caso não seja, poderemos extrair uma vizinhança convexa do zero. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de \mathbb{R}^n e considere $e_0 = -\sum_{i=1}^n e_i$. Como a condição de Kalman é satisfeita, para cada $i = 0, 1, \dots, n$, existem controles $u_i \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$ tais que

$$e_i = x(T, 0, u_i).$$

1. Controlabilidade

Considere $\mu > 0$ tal que $\frac{1}{\mu}u_i(t) \in \Omega$ para quase todo $t \in [0, T]$ e $i = 0, 1, \dots, n$, o que é possível visto que Ω é uma vizinhança de 0 e os u_i 's são essencialmente limitados. Considere

$$u_i'(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}u(t), & \text{se } t \in [0, T], \\ 0, & \text{se } t < 0 \text{ ou } t > T. \end{cases}$$

Desta forma, $e_i' := \frac{1}{\mu}e_i = x(T, 0, u_i') \in A_\Omega(0, T)$ para cada i . Tome $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ tais que $|\epsilon_i| \leq \frac{1}{2(n+1)}$ para todo i . Então

$$\frac{\epsilon_1}{\mu}e_1 + \dots + \frac{\epsilon_n}{\mu}e_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1-\epsilon}{n+1} + \epsilon_i \right) e_i' + \frac{1-\epsilon}{n+1}e_0',$$

com $\epsilon = \sum_{i=1}^n \epsilon_i$. Notemos que a expressão acima é uma combinação convexa, uma vez que

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1-\epsilon}{n+1} + \epsilon_i \right) + \frac{1-\epsilon}{n+1} = (n+1) \frac{1-\epsilon}{n+1} + \sum_{i=1}^n \epsilon_i = 1.$$

Como cada $e_i' \in A_\Omega(0, T)$ e este é convexo, temos que $\frac{\epsilon_1}{\mu}e_1 + \dots + \frac{\epsilon_n}{\mu}e_n \in A_\Omega(0, T)$ para cada ϵ_i suficientemente pequeno. Isso implica que $A_\Omega(0, T)$ é uma vizinhança de 0. De fato, neste caso, temos que a bola aberta $B_{\frac{1}{2\mu(n+1)}}(0)$ centrada na origem e de raio $\frac{1}{2\mu(n+1)}$ está contida em $A_\Omega(0, T)$. Basta notarmos que se $x \in B_{\frac{1}{2\mu(n+1)}}(0)$ é escrito como $\sum_{i=1}^n x_i e_i$ para alguns $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, então

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \|x\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{1}{2\mu(n+1)},$$

de onde segue que $|\mu x_i| = \mu |x_i| \leq \frac{1}{2(n+1)}$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ e com isso

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n \frac{\mu x_i}{\mu} e_i \in A_\Omega(0, T).$$

Com isso, mostramos que existe uma vizinhança V de 0 tal que $V \subset A_\Omega(0, T)$.

Finalmente, vamos mostrar que $A_\Omega(0)$ é aberto. Sejam $S > 0$ e uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^n$ de 0 tal que $V \subset A_\Omega(0, S)$, e tome $x_1 \in A_\Omega(0)$. Queremos mostrar que existe uma vizinhança de x_1 contida em $A_\Omega(0)$. Considere o controle $u : [0, T] \rightarrow \Omega$ tal que $x_1 = x(T, 0, u)$. Como a aplicação e^{TA} é um isomorfismo, temos que $W := e^{TA}V$ é aberto. Para cada $y = e^{TA}v \in W$ temos

$$y + x_1 = e^{TA}v + x(T, 0, u) \in A_\Omega(v, T).$$

Portanto, $x_1 + W$ é um aberto contido em $A_\Omega(v, T) \subseteq A_\Omega(0, S+T) \subset A_\Omega(0)$ que contém x_1 . \square

Agora, apresentaremos mais alguns conceitos acompanhados de outros importantes resultados auxiliares.

Para cada autovalor λ de A e cada inteiro positivo k , consideremos os seguintes subespaços de \mathbb{C}^n

$$J_{k,\lambda} := \ker(\lambda I - A)^k.$$

Consideremos também os subespaços de \mathbb{R}^n definido por

$$J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}} := \{\operatorname{Re}(v); v \in J_{k,\lambda}\}.$$

Se $v \in J_{k,\lambda}$, então por definição $\operatorname{Re}(v) \in J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}}$ e, além disso, a parte imaginária $\operatorname{Im}(v)$ também pertence a $J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}}$, pois uma vez que $(-iv)$ pertence ao subespaço $J_{k,\lambda}$. É claro também que $J_{0,\lambda} = J_{0,\lambda}^{\mathbb{R}} = \{0\}$.

Pela forma canônica de Jordan, podemos escrever

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^l \ker(\lambda_i I - A)^{\nu(\lambda_i)}, \quad (1.33)$$

onde $\nu(\lambda_i)$ é a dimensão do bloco de Jordan correspondente ao autovalor λ_i e l é o número de autovalores distintos. Reordenando (1.33) de forma que os subespaços com autovalores com parte real não-negativas venham primeiro e os com autovalores com parte real negativa venham no fim e, obtemos que $\mathbb{R}^n = L \oplus M$, onde L é a soma de todos os subespaços da forma $J_{\nu(\lambda_i), \lambda_i}^{\mathbb{R}^n}$ com $\operatorname{Re}(\lambda_i)$ não-negativa, e M se define de maneira análoga, porém com os autovalores de parte real negativa. Não é difícil de ver que os espaços L e M são A -invariantes.

Necessitaremos do seguinte resultado básico:

Lema 1.23. Se C é aberto e convexo em \mathbb{R}^n e L é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n contido em C , então $C + L = C$.

Demonstração. Claramente $C = C + 0 \subset C + L$, restando provar que a inclusão contrária também é válida. Considere agora $x \in C$ e $y \in L$. Para todo $\epsilon \neq 0$, tem-se

$$x + y = \left(\frac{1}{1+\epsilon}\right)[(1+\epsilon)x] + \left(\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\right)\left[\left(\frac{1+\epsilon}{\epsilon}\right)y\right]. \quad (1.34)$$

Como C é aberto, $(1+\epsilon)x \in C$ para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Sendo L um subespaço vetorial, $\left(\frac{1+\epsilon}{\epsilon}\right)y \in L \subset C$. Portanto, sendo C convexo e (1.34) uma combinação linear convexa, pois $\frac{1}{1+\epsilon} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon} = 1$, temos que $x + y \in C$, mostrando que $C + L \subset C$, e portanto segue a igualdade. \square

A seguir, temos o principal resultado auxiliar a ser utilizado na prova do Teorema 1.19. Para simplificar a notação, para um autovalor de A fixo, digamos $\lambda = \alpha + i\beta$ com parte real $\alpha \geq 0$, denotemos $J_k^{\mathbb{R}} := J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}}$.

Lema 1.24. Assuma que a matriz de Kalman C tem posto n e $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^m$. Então $J_k^{\mathbb{R}} \subset A_{\Omega}(0)$ para todo inteiro positivo k .

Demonstração. Como $0 \in \text{Int}(\Omega)$, podemos supor, sem perda de generalidade, que Ω é convexo. O resultado será demonstrado via indução sobre k . Quando $k = 0$, temos que $J_0^{\mathbb{R}} = \{0\} \subset A_{\Omega}(0)$ (basta tomar o controle nulo). Suponha que $J_{k-1}^{\mathbb{R}} \subset A_{\Omega}(0)$ para algum $k \geq 1$ e tome $\tilde{v} \in J_{k,\lambda}$. Devemos mostrar que $\tilde{v}_1 \in J_k^{\mathbb{R}}$ pertence a $A_{\Omega}(0)$, onde $\tilde{v} = \tilde{v}_1 + i\tilde{v}_2$.

Escolhamos $T > 0$ tal que $e^{\lambda T j} = e^{\alpha T j}$ para todo $j = 0, 1, \dots$ (se $\beta = 0$ pode-se tomar qualquer $T > 0$. Caso contrário, tome $T = \frac{2\pi}{|\beta|}$). Em seguida escolha $\delta > 0$ tal que $v_1 := \delta \tilde{v}_1 \in A_{\Omega}(0, T)$ (tal δ existe pois pela Proposição 1.22 temos que $A_{\Omega}(0, T)$ é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n e pelo Lema 1.10 o conjunto $A_{\Omega}(0, T)$ contém 0 em seu interior). Seja também $v = \delta \tilde{v}$, como $v \in J_{k,\lambda} = \text{Ker}(\lambda I - A)^k$, tem-se que

$$\begin{aligned} e^{t(A-\lambda I)}v &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A-\lambda I)^k t^k}{k!} v \\ &= \left(I + t(A-\lambda I) + \frac{t^2}{2}(A-\lambda I)^2 + \dots + \frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k + \dots \right) v = v + w, \end{aligned} \quad (1.35)$$

onde $w = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{t^i}{i!} (\lambda I - A)^i v \in J_{k-1}$. De (1.35), segue que $e^{tA}e^{-t\lambda} = v + w$, isto é, $e^{\lambda t}v = e^{tA}v - e^{t\lambda}w$. Assim

$$e^{\alpha t}v = e^{\lambda t}v = e^{tA}v - e^{t\lambda}w = e^{tA}v - e^{\alpha t}w, \quad (1.36)$$

para todo $t = Tj, j = 0, 1, \dots$. Decompondo $w = w_1 + iw_2$ em parte real e imaginária e tomando as partes reais em (1.36) temos

$$e^{\alpha t}v_1 = e^{tA}v_1 - e^{\alpha t}w_1,$$

para todo $t = Tj, j = 0, 1, \dots$. Agora, tome um inteiro $q \geq \frac{1}{\delta}$. Então

$$\left(\sum_{j=0}^{q-1} e^{\alpha T j} \right) v_1 = \sum_{j=0}^{q-1} e^{T j A} v_1 + w',$$

onde $w' = -\sum_{j=0}^{q-1} e^{\alpha T j} w_1 \in J_{k-1}^{\mathbb{R}}$, uma vez que $w_1 \in J_{k-1}^{\mathbb{R}}$. Como $v_1 \in A_{\Omega}(0, T)$, temos pelo Corolário 1.21 que $\sum_{j=0}^{q-1} e^{T j A} v_1 \in A_{\Omega}(0, qT)$. Por hipótese de indução, temos que $J_{k-1}^{\mathbb{R}} \subset A_{\Omega}(0)$. Assim, segue do Lema 1.23 que

$$pv_1 \in A_{\Omega}(0, qT) + J_{k-1}^{\mathbb{R}} \subset A_{\Omega}(0) + J_{k-1}^{\mathbb{R}} = A_{\Omega}(0),$$

onde $p = \sum_{j=0}^{q-1} e^{\alpha T j}$. Notemos que, como $\alpha \geq 0$, tem-se

$$p = \sum_{j=0}^{q-1} e^{\alpha T j} \geq \sum_{j=0}^{q-1} 1 e^0 = q \geq \frac{1}{\delta}.$$

Portanto $p\delta\tilde{v}_1 = pv_1 \in A_\Omega(0)$. Por outro lado, $p\delta \geq 1$ implica que

$$\tilde{v}_1 = \frac{1}{\delta p} \delta p \tilde{v}_1 + \left(1 - \frac{1}{\delta p}\right) 0,$$

é uma combinação linear convexa. Como $\delta p \tilde{v}_1$ e 0 pertencem a $A_\Omega(0)$, segue da convexidade de $A_\Omega(0)$ que $\tilde{v}_1 \in A_\Omega(0)$. \square

O corolário a seguir nos mostra a relação entre a soma dos vários espaços $J_k^{\mathbb{R}}$ com $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ e o espaço dos pontos atingíveis a partir de 0 para todo $T \geq 0$ ($A_\Omega(0)$).

Corolário 1.25. Suponha que a matriz de Kalman C tem posto n e $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é uma vizinhança da origem. Então $L \subset A_\Omega(0)$.

Demonstração. Como antes, podemos assumir sem perda de generalidade que Ω é convexo. De acordo com o Lema 1.24, temos que $J_k^{\mathbb{R}} \subset A_\Omega(0)$ para todo autovalor λ com parte real não-negativa e para todo inteiro positivo k . Em geral, se L_1 e L_2 são dois subespaços de um conjunto convexo C , tem-se que $L_1 + L_2 \subset C$. Daí, certamente o conjunto L está contido em $A_\Omega(0)$. \square

Corolário 1.26. Suponha que (A, B) é controlável e $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é uma vizinhança convexa e limitada da origem. Então existe um subconjunto \mathcal{B} limitado, convexo e aberto em relação à M , tal que $A_\Omega(0) = \mathcal{B} + L$.

Demonstração. Afirmamos inicialmente que $A_\Omega(0) = (A_\Omega(0) \cap M) + L$. Com efeito, aplicando o Lema 1.23 e o Corolário 1.25 segue-se que

$$(A_\Omega(0) \cap M) + L \subset A_\Omega(0) + L = A_\Omega(0).$$

Por outro lado, dado $v \in A_\Omega(0)$, podemos escrever $v = x + y$ com $x \in M$ e $y \in L$. Como $x = v - y \in A_\Omega(0) + L = A_\Omega(0)$ (novamente pelo Lema 1.23) temos que $A_\Omega(0) \subset (A_\Omega(0) \cap M) + L$ o que conclui a afirmação.

Seja agora $\mathcal{B} := A_\Omega(0) \cap M$. Notemos que esse conjunto é aberto e convexo em M , pois $A_\Omega(0)$ é aberto e convexo e M é um subespaço vetorial. Nos resta mostrar que \mathcal{B} é limitado.

Considere a projeção $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobre M , ou seja, $P(x + y) = x$, para $x \in M$ e $y \in L$. Notemos que $PA = AP$, pois como L e M são A -invariantes, temos que dado

$v = x + y \in \mathbb{R}^n$ com $x \in M$ e $y \in L$, então $Ax \in M$ e $Ay \in L$. Assim,

$$PAv = P(A(x + y)) = Ax = A(P(x + y)) = APv.$$

Indutivamente temos que $PA^k = A^kP$ para todo inteiro não negativo k . Assim $Pe^{tA} = e^{tA}P$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Seja $x_1 \in A_\Omega(0) \cap M$ qualquer. Como $x_1 \in A_\Omega(0)$, existe $T > 0$ e $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tal que

$$x_1 = \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s) ds.$$

De $x_1 \in M$, temos que $x_1 = Px_1$, logo

$$x_1 = Px_1 = \int_0^T Pe^{(T-s)A} Bu(s) ds = \int_0^T e^{(T-s)A} x(s) ds,$$

onde $x(s) = PBu(s) \in M \cap PB(\Omega)$ para todo s . Como a restrição de A a M tem seus autovalores com parte real negativa, então existem constantes $c, \mu > 0$ tais que

$$\|e^{tA}x\|_{\mathbb{R}^n} \leq ce^{-\mu t}\|x\|_{\mathbb{R}^n},$$

para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in M$. Como $PB(\Omega)$ é limitado, existe uma constante c' tal que se $x \in PB(\Omega)$,

$$\|e^{tA}x\| \leq c'e^{-\mu t},$$

para todo $t \geq 0$. Portanto

$$\|x_1\| \leq \int_0^T \|e^{(T-s)A}x(s)\| ds \leq \int_0^T c'e^{-\mu(T-s)} ds = c' \int_0^T e^{-\mu(T-s)} ds = \frac{c'}{\mu} (1 - e^{-\mu T}) \leq \frac{c'}{\mu},$$

provando que \mathcal{B} é limitado. □

Demonstraremos agora o Teorema 1.19.

Demonstração. Suponha que $A_\Omega(0) = \mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n = A_\Omega(0) \subset A_{\mathbb{R}^m}(0) \subset \mathbb{R}^n$, temos que $A_{\mathbb{R}^m}(0) = \mathbb{R}^n$, pelo Teorema 1.6, o posto da matriz de Kalman C deve ser n , o que mostra a primeira parte. Para mostrarmos a segunda parte do teorema, suponha que existe um autovalor $\lambda = \alpha + \beta i$ de A com $\alpha < 0$. Então L é um subespaço próprio de \mathbb{R}^n e $M \neq \{0\}$, ou seja $\mathbb{R}^n = A_\Omega(0) = L + \mathcal{B}$, onde \mathcal{B} é limitado e não vazio, o que claramente é um absurdo. Logo a segunda afirmação do teorema também é válida.

Reciprocamente, se a condição de Kalman é verdadeira e os autovalores são todos não-negativos, então $\mathbb{R}^n = L$. Pelo Corolário 1.25 temos que $L \subset A_\Omega(0)$ e, consequentemente, $\mathbb{R}^n \subset A_\Omega(0)$ de onde segue que $A_\Omega(0) = \mathbb{R}^n$. □

Como já debatido diversas vezes ao longo do texto, o conjunto dos estados atingíveis a partir do zero para o sistema tempo-inverso coincide com o conjunto dos dados que podem ser conduzidas a zero do sistema original. Neste sentido, o seguinte resultado sai como consequência imediata do Teorema 1.19.

Corolário 1.27. Se Ω é uma vizinhança limitada de zero, então o sistema (1.14) é globalmente nulo-controlável se, e somente se, o posto da matriz de Kalman vale n e todos os autovalores do operador A são não-positivos.

Até o presente momento, provamos que, quando Ω é uma vizinhança da origem, o sistema ser controlável a zero é equivalente a todos os autovalores da matriz A serem não-positivos. Provamos também que se pelo menos um autovalor tiver parte real positiva, então o sistema (1.1) não pode ser controlável a zero. O resultado a seguir de certa forma completa a discussão provando que, se todos os autovalores possuem parte real nula, então o sistema é exatamente controlável em um tempo finito, isto é, podemos sair de qualquer dado em \mathbb{R}^n e chegar em qualquer outro dado em \mathbb{R}^n e não apenas ao estado nulo.

Corolário 1.28. ([8]) Seja Ω uma vizinhança limitada da origem. Assuma que o par (A, B) é controlável. O sistema (1.14) é exatamente controlável em um tempo finito se, e somente se, todos os autovalores de A possuem parte real nula.

Demonstração. Suponha que o sistema (1.14) seja controlável em um tempo finito. Em particular, o sistema é globalmente nulo-controlável e assim, pelo Corolário 1.27 todos os autovalores de A possuem parte real não-positiva.

Por outro lado, a controlabilidade exata também implica que podemos sair do estado nulo e chegar em qualquer estado desejado em um tempo finito, isto é $A_\Omega(x_0, t) = \mathbb{R}^n$. Desta forma pelo Teorema 1.19, chegamos que a parte real dos autovalores de A devem ter parte real não-negativa. Com isso, obtemos que a parte real de todos os autovalores devem ser iguais a zero.

Reciprocamente suponha que todos os autovalores de A possuam parte real nula. Sejam x_0 e x_1 vetores em \mathbb{R}^n . Queremos provar que existe um controle admissível conduzindo x_0 a x_1 . Pelo Corolário 1.27, existe um controle u_1 e um tempo t_1 tal que a solução x_1 de (1.14) com $x_1(0) = x_0$ satisfaz $x_1(t_1) = 0$. Temos também pelo Teorema 1.19, que existe um controle u_2 e um tempo t_2 tal que a solução x_2 de (1.14) com $x_2(0) = 0$ satisfaz $x_2(t_2) = x_1$. Daí, defina

$$u_3(s) = \begin{cases} u_1(s), & \text{se } s \leq t_1 \\ u_2(s - t_1), & \text{se } s > t_1. \end{cases}$$

1. Controlabilidade

Se x_3 é a solução de (1.14) com $x_3(0) = x_0$, temos que

$$\begin{aligned} x_3(t_1 + t_2) &= e^{(t_1+t_2)A}x_0 + \int_0^{t_1+t_2} e^{(t_1+t_2-s)A}Bu_3(s) ds \\ &= e^{t_1} \left(e^{t_2}x_0 + \int_0^{t_1} e^{(t_2-s)A}x_0 + \int_0^{t_1} e^{(t_2-s)A}Bu_1(s) ds + \int_0^{t_2} e^{(t_2-s)A}Bu_2(s) ds \right) \\ &= e^{t_1A}x_1(t_1) + x_2(t_2) = 0 + x_1 = x_1. \end{aligned}$$

Portanto (1.14) é controlável. \square

Vejamos um exemplo sobre como resultados presentes nessa seção podem ser aplicados

Exemplo 1.4. (controle de um oscilador harmônico) Considere uma partícula de massa m com coordenada de posição x no tempo t , atraída para a origem por uma força linear $-k_2x$, com a constante de mola $k_2 > 0$. A equação de movimento de Newton é (em unidades e coordenadas apropriadas)

$$mx'' + k_2x = u(t),$$

onde a força de controle externa $u(t)$ deve ser limitada, isto é

$$|u(t)| \leq 1.$$

Para simplificar a exposição, vamos assumir $m = 1$ e $k_2 = 1$. Novamente, desejamos direcionar o estado inicial $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = y_0$ para a origem.

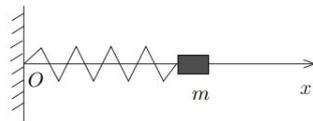


Figura 1.6: objeto de massa m preso a uma mola.

Podemos reduzir a equação anterior a um sistema de primeira ordem da forma

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + u, \end{cases}$$

ou, em notação matricial

$$X' = AX + Bu,$$

onde,

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

e as matrizes de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observemos que $0 \in \text{Int}(\Omega)$, e como a matriz de Kalman C tem a forma

$$C = [B \ AB]$$

temos que seu posto vale dois, o que corresponde à quantidade de variáveis do sistema. Mais ainda, os autovalores de A são i e $-i$ que possuem parte real nula. Assim de acordo com o Corolário 1.28, o sistema em questão é exatamente controlável com controles restritos ao intervalo $[-1, 1]$.

Até esse ponto, estudamos resultados de controle nulo ou exato, com controles restritos a subconjuntos do \mathbb{R}^m , para o caso em que o sistema em questão é autônomo, isto é, as matrizes A e B não dependem do parâmetro t na equação. É importante mencionarmos que, existem na literatura resultados de controlabilidade globais para sistemas não-autônomos com controles restritos ou não a uma região Ω . Na próxima seção provaremos um desses resultados, precisamente aquele devido a R. Kalman, em [15], que caracteriza a controlabilidade para sistemas não-autônomos sem restrição sobre o controle em termos da inversão da *matriz Gramiana*. Para resultados em sistema não-autônomos com controles restritos, podemos citar a referência de R. Conti, em [23], que estabelece a *condição integral divergente*, necessária e suficiente para a controlabilidade nula-global, quando os controles estão restritos a uma bola fechada, citamos também a referência de L. Pandolfi em [20], que define a noção de *expoente característico*, onde critérios de controlabilidade foram fornecidos em termos desse expoente. Importante mencionarmos também os resultados Schmitendorf e Barmish, em [26], que em um certo sentido generaliza os resultados de R. Conti para controles restritos a regiões Ω mais gerais.

1.3 Controlabilidade de Sistemas Lineares não-autônomos

O teorema a seguir, fornece uma condição necessária e suficiente de controlabilidade no caso não-autônomo, isto é, quando A e B dependem do tempo.

Teorema 1.29. (R. Kalman, [15]) O sistema

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad (1.37)$$

é controlável no tempo T (a partir de qualquer ponto inicial) se, e somente se, a matriz

$$C(T) = \int_0^T M(t)^{-1}B(t)B(t)^\top(M(t)^{-1})^\top dt,$$

conhecida como matriz de controlabilidade ou matriz de Gramiana, é invertível.

Observação 1.6. Essa condição depende de T , mas não depende do ponto inicial x_0 . Em outras palavras, se um sistema linear não-autônomo é controlável no tempo T a partir de x_0 , então ele é controlável no tempo T a partir de qualquer outro ponto.

Observação 1.7. Note que $C(T) = C(T)^\top$ e $x^\top C(T)x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, ou seja, $C(T)$ é uma matriz real quadrada, e simétrica positiva.

Demonstração. (Teorema 1.29) Para qualquer solução $x(t)$ de (1.37), temos pela fórmula de variação dos parâmetros,

$$x(T) = x^* + M(T) \int_0^T M(t)^{-1}B(t)u(t)dt,$$

onde

$$x^* = M(T)x_0 + M(T) \int_0^T M(t)^{-1}r(t)dt,$$

e $M(\cdot)$ é a matriz resolvente (veja (1.3)).

Vamos assumir que $C(T)$ é invertível e vamos mostrar que o sistema é controlável. Escrevamos $u(t) = B(t)^\top (M(t)^{-1})^\top \psi$, com $\psi \in \mathbb{R}^n$. Então,

$$\begin{aligned} x(T) &= x^* + M(T) \int_0^T M(t)^{-1}B(t)B(t)^\top (M(t)^{-1})^\top \psi dt \\ &= x^* + M(T)C(T)\psi. \end{aligned}$$

Tomando $\psi = C(T)^{-1}M(T)^{-1}(x_1 - x^*)$, obtemos

$$\begin{aligned} x(T) &= x^* + M(T)C(T)C(T)^{-1}M(T)^{-1}(x_1 - x^*) \\ &= x^* + (x_1 - x^*) = x_1. \end{aligned}$$

Portanto, o sistema é controlável.

Reciprocamente, se $C(T)$ não é invertível, então existe $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\psi^\top C(T)\psi =$

0. E assim, deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\| B(t)^\top (M(t)^{-1})^\top \psi \right\|^2 &= \int_0^T \left\langle \left(B(t)^\top (M(t)^{-1})^\top \psi \right)^\top, B(t)^\top (M(t)^{-1})^\top \psi \right\rangle dt \\ &= \psi^\top \int_0^T M(t)^{-1} B(t) B(t)^\top (M(t)^{-1})^\top dt \psi \\ &= \psi^\top C(T) \psi = 0, \end{aligned}$$

de onde $\psi^\top M(t)^{-1} B(t) = 0$ q.s. em $[0, T]$. Assim, para qualquer controle u , temos

$$\psi^\top \int_0^T M(t)^{-1} B(t) u(t) dt = 0.$$

Seja, $\psi_1 = (M(T)^{-1})^\top \psi$, onde temos claramente que $\psi_1 \neq 0$. Assim,

$$\langle \psi_1^\top, x_u(T) - x^* \rangle = \left\langle \psi^\top M(T)^{-1}, M(T) \int_0^T M(t)^{-1} B(t) u(t) dt \right\rangle = \psi^\top \int_0^T M(t)^{-1} B(t) u(t) dt = 0,$$

o que implica dizer que

$$M(T) \int_0^T M(t)^{-1} B(t) u(t) dt \perp \psi_1.$$

Seja $x = x_u - x^*$ a solução de um sistema da forma

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Notemos que $x(T) = M(T) \int_0^T M(t)^{-1} B(t) u(t) dt$ e que $\langle \psi_1^\top, x(T) \rangle = 0$. Sendo $x(t)$ controlável, então temos que para todo $x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe $u \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$ tal que $x(T) = x_1$. Tomando $x_1 = \psi_1$, teremos que $\langle \psi_1^\top, \psi_1 \rangle = 0$, o que é absurdo visto que $\psi_1 \neq 0$. Assim $C(T)$ é invertível. \square

Exemplo 1.5. Mostre que o sistema $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, com

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ e } B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é controlável a qualquer momento.

Solução: Por definição, o resolvente da matriz $A(t)$ é solução do sistema em (1.3). Dessa forma, obtemos

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t + 1 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

e assim,

$$M(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & t - 1 + \frac{1}{e^t} \\ 0 & \frac{1}{e^t} \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz Gramiana do sistema é dada por

$$\begin{aligned} C(T) &= \int_0^T M(t)^{-1} B(t) B(t)^\top (M(t)^{-1})^\top dt \\ &= \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} + 2\left(\frac{-T-1}{e^T} + 1\right) - \frac{1}{2}(e^{-2T} - 1) & \frac{-T-1}{e^T} + 1 - \frac{1}{2}(e^{-2T} - 1) \\ \frac{-T-1}{e^T} + 1 - \frac{1}{2}(e^{-2T} - 1) & -\frac{1}{2}(e^{-2T} - 1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos provar que $\det(C(T)) \neq 0$, implicando que o sistema é controlável a qualquer momento.

Exemplo 1.6. Considere o seguinte sistema de controle:

$$x_1' = u, x_2' = x_1 + tu,$$

onde $u \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, $T > 0$. Seja $x = (x_1, x_2)^\top$, então o sistema pode ser escrito da seguinte forma:

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad \forall t \in [0, T],$$

onde,

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

Nós temos

$$M(t)^{-1} = e^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} A^k = I - tA,$$

ou ainda que

$$M(t)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz Gramiana é dada por:

$$C(T) = \int_0^T M(t)^{-1} B(t) B(t)^\top (M(t)^{-1})^\top dt = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de onde temos que $\det(C(T)) = 0$, o que implica dizer que $C(T)$ não é invertível. Portanto, o sistema não é controlável.

O objetivo do próximo capítulo é de estudarmos a existência de trajetórias em um tempo mínimo conectando dois estados x_0 e x_1 .

Capítulo 2

Existência de trajetórias otimizadas no tempo

Vamos considerar como anteriormente o sistema de controle em \mathbb{R}^n

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad (2.1)$$

onde os controles u tomam valores em um compacto de interior não vazio $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Sejam x_0 e x_1 dois pontos de \mathbb{R}^n . Suponha que x_1 seja acessível a partir de x_0 , ou seja, que $x_1 \in A_\Omega(x_0) = \cup_{t \geq 0} A_\Omega(x_0, t)$. Entre todas as trajetórias conectando x_0 e x_1 , gostaríamos de caracterizar aquelas que o fazem em tempo mínimo t^* , isto é, queremos saber qual o menor tempo $t^* > 0$ possível tal que $x_1 \in A_\Omega(x_0, t^*)$.

Temos o primeiro resultado de caracterização do tempo mínimo:

Teorema 2.1. *(Existência de controles otimizados para o tempo) Supondo Ω compacto. Seja $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ fixos. Suponha que exista $T \geq 0$ tal que $x_1 \in A_\Omega(x_0, T)$. Então, o conjunto $\{t \geq 0, x_1 \in A_\Omega(x_0, t)\}$ tem um mínimo $t^* \geq 0$. Por definição, isto significa que $t^* = 0$ se, e somente se, $x_1 = x_0$, e se $t^* > 0$ então existe $u \in L^\infty(0, t^*; \Omega)$ tal que a solução correspondente x do sistema (1.1) satisfaz $x(t^*) = x_1$. O controle desta forma u é dito otimizado em relação ao tempo.*

Demonstração. Seja

$$E = \{t \geq 0 \mid x_1 \in A_\Omega(x_0, t)\}.$$

Por suposição, E não é vazio. Para mostrarmos que E tem um mínimo, vamos provar que E é fechado. Sejam $t_k \in E$, $k \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que $t_k \rightarrow t$ quando $k \rightarrow +\infty$. Temos que mostrar que $t \in E$, isto é, devemos provar que $x_1 \in A_\Omega(x_0, t)$, que é equivalente a

2. Existência de trajetórias otimizadas no tempo

provamos que $d(x_1, A_\Omega(x_0, t)) = 0$, onde d representa a distância de um ponto a um conjunto, isto é

$$d(x_1, A_\Omega(x_0, t)) = \inf_{y \in A_\Omega} |x_1 - y|_{\mathbb{R}^n}$$

Uma vez que Ω é compacto, segue que $A_\Omega(x_0, t)$ é compacto e portanto fechado. Não é difícil vermos que

$$d(x_1, A_\Omega(x_0, t)) \leq d(x_1, A_\Omega(x_0, t_k)) + d_H(A_\Omega(x_0, t_k), A_\Omega(x_0, t)).$$

Como $x_1 \in A_\Omega(x_0, t_k)$ por definição de t_k , temos que $d(x_1, A_\Omega(x_0, t_k)) = 0$. Agora, desde que $t_k \rightarrow t$, por continuidade do conjunto de pontos acessíveis (veja Teorema 1.1), existe $k \in \mathbb{N}$ grande o suficiente para que $d_H(A_\Omega(x_0, t_k), A_\Omega(x_0, t)) \leq \epsilon$. Portanto, provamos que $d(x_1, A_\Omega(x_0, t)) \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, assim $d(x_1, A_\Omega(x_0, t)) = 0$. Desta forma, provamos que E é fechado, uma vez que é limitado inferiormente, possui um mínimo. \square

Se t^* é o tempo mínimo, então $x_1 \notin A_\Omega(x_0, t)$ para todo $t < t^*$, caso contrário x_1 seria acessível a partir de x_0 em um tempo menor que t^* , o que é uma contradição. Daí,

$$t^* = \inf\{t > 0; x_1 \in A_\Omega(x_0, t)\}.$$

O tempo $t = t^*$ é o primeiro tempo para o qual x_1 é alcançável, ou seja é o primeiro tempo para o qual $A_\Omega(x_0, t)$ contém x_1 .

O corolário a seguir dá um resultado global para sistemas lineares autônomos, de existência de controle de tempo mínimo direcionando qualquer estado inicial à origem.

Corolário 2.2. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, considere o seguinte sistema autônomo:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

onde o domínio de restrição $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ no controle é compacto. Suponha que

1. $0 \in \text{int}(\Omega)$;
2. o par (A, B) é controlável;
3. para todo $\lambda \in \sigma(A)$, $\text{Re}(\lambda) < 0$.

Então existe um controle de tempo mínimo $u^*(\cdot) \subset \Omega$ em $[0, t^*]$ tal que $x(t^*) = 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 1.17, existe $T > 0$ tal que $0 \in A_\Omega(x_0, T)$. Assim, o resultado segue diretamente do Teorema 2.1. \square

Observação 2.1. Para os casos em que os autovalores do operador A , digamos λ satisfazem, $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$, ou $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ o resultado é análogo, bastando para isso utilizarmos os Corolários 1.27 e 1.28.

O Teorema 2.1 garante a existência de controles de tempo mínimo. Uma questão natural que surge está relacionada à unicidade desse controle. É sobre isso que trataremos na seção seguinte.

2.1 Existência do controle em tempo mínimo

Nesta seção, os resultados apresentados incluem o caso não-autônomo, isto é, quando as matrizes A e B dependem do parâmetro t .

Iniciamos a seção com o conceito de *controle extremo*.

Definição 2.1. O controle u é extremo em $[0, t]$ se a trajetória do sistema (1.1) associado a u satisfaz $x(t) \in \partial A_\Omega(x_0, t)$.

Agora, apresentaremos uma caracterização para o controle de tempo mínimo.

Teorema 2.3. (*Os controles de tempo mínimo são extremos*) Suponha que Ω seja compacto e sejam $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ com $x_0 \neq x_1$. Suponha que $x_1 \in A_\Omega(x_0)$ e seja t^* o tempo mínimo. Se $u \in L^\infty(0, t^*, \Omega)$ é um controle de tempo mínimo (cuja existência é garantida pelo Teorema 2.1), então o controle u é extremo em $[0, t^*]$.

Para a prova do Teorema 2.3, necessitaremos do seguinte resultado de análise convexa (veja por exemplo [29], Teorema 3.5), que será admitido em demonstração.

Demonstração. (Teorema 2.3) De acordo com a Definição 2.1, devemos mostrar que $x_1 \in \partial A_\Omega(x_0, t^*)$. Uma vez que sabemos que $A_\Omega(x_0, t^*)$ é um conjunto fechado e convexo, pelo Lema A.5, é equivalente a provar que existe $p \in \mathbb{R}^n$ com $p \neq 0$, tal que, para todo $\hat{x}_1 \in A_\Omega(x_0, t^*)$

$$\langle p, \hat{x}_1 \rangle \leq \langle p, x_1 \rangle. \quad (2.2)$$

Seja $t_k > 0$, tal que $t_k < t^*$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e tal que $t_k \rightarrow t^*$ quando $k \rightarrow +\infty$. Por definição de t^* , temos, $x_1 \notin A_\Omega(x_0, t_k)$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Em particular, $x_1 \notin \operatorname{Int}(A_\Omega(x_0, t_k))$. Uma vez que $A_\Omega(x_0, t_k)$ é convexo, segue novamente pelo Lema A.5 que existe $p_k \in \mathbb{R}^n$, com $p_k \neq 0$, tal que, para cada $w_1 \in A_\Omega(x_0, t_k)$,

$$\langle p_k, w_1 \rangle \leq \langle p_k, x_1 \rangle. \quad (2.3)$$

Como $p_k \neq 0$, podemos assumir que $\|p_k\|_{\mathbb{R}^n} = 1$. Como $(p_k)_k$ agora é uma sequência limitada, portanto, podemos extrair uma subsequência (denotado da mesma forma) tal que $p_k \rightarrow p$ quando $k \rightarrow +\infty$ para algum $p \in \mathbb{R}^n$ com $\|p\|_{\mathbb{R}^n} = 1$.

Seja $\hat{x}_1 \in A_\Omega(x_0, t^*)$ fixo, porém arbitrário. Devido à continuidade dos conjuntos alcançáveis, podemos considerar uma sequência $(\hat{x}_k^1)_k$ tal que $\hat{x}_k^1 \rightarrow \hat{x}_1$ quando $k \rightarrow +\infty$, com $\hat{x}_k^1 \in A_\Omega(x_0, t_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Assim, substituindo em (2.3) w_1 por \hat{x}_k^1 e realizando o limite quando $k \rightarrow \infty$, chegamos em (2.2). \square

Graças ao Teorema 2.3, podemos agora nos concentrar na noção de controle extremo.

O teorema apresentado na seção a seguir, nos fornece uma condição necessária e suficiente para que um controle seja extremo

2.1.1 Caracterização dos controles extremos: Princípio do máximo de Pontryagin (PMP)

O resultado apresentado nesta seção, devido ao matemático russo L. Pontryagin em [18], se dedica em caracterizar o controle que conduz um dado x_0 a um outro dado x_1 no menor tempo possível.

Teorema 2.4. (*Princípio do máximo de Pontryagin*) *Considere o sistema de controle linear (1.1), onde o domínio da restrição $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ no controle é compacto. Seja $T > 0$ e $u \in \mathcal{U}_{ad}$. As seguintes condições são equivalentes*

- a) *O controle u é extremo em $[0, T]$;*
- b) *Existe $p_1 \in \mathbb{R}^n$, com $p_1 \neq 0$, de modo que a solução p correspondente para o sistema adjunto*

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}p = A(t)^\top p(t), & t \in [0, T], \\ p(T) = p_1, \end{cases} \quad (2.4)$$

satisfaz

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)B(t)v, \quad (2.5)$$

para quase todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Seja u um controle extremo em $[0, T]$ e seja x a trajetória associada ao controle u . Temos por definição, que $x(T) \in \partial A_\Omega(x_0, T)$. Uma vez que temos pelo Teorema 1.1 que $A_\Omega(x_0, T)$ é um conjunto convexo e compacto, temos pelo Lema A.5 que a existência de tal controle é equivalente à existência de um $p_1 \in \mathbb{R}^n$, com $p_1 \neq 0$,

tal que

$$\langle p_1, \hat{x}^1 \rangle \leq \langle p_1, x(T) \rangle, \quad \forall \hat{x}^1 \in A_\Omega(x_0, T). \quad (2.6)$$

Por definição de $A_\Omega(x_0, T)$, existe um controle \hat{u} tal que a trajetória $\hat{x}(t)$ associada satisfaz $\hat{x}(T) = \hat{x}^1$. Lembremos que a solução do sistema linear (2.1) associado ao controle u com dado inicial $x(0) = x_0$ é da forma:

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds.$$

Desta forma, podemos reescrever a desigualdade (2.6) na forma

$$p_1 \int_0^T M(T)M(s)^{-1}B(s)(\hat{u}(s) - u(s))ds \leq 0.$$

Seja $p(t)$ a solução em $[0, T]$ de $p'(t) = -p(t)A(t)$ tal que $p(T) = p_1$. Então é claro que $p(t) = p(0)M(t)^{-1}$ e assim $p_1 = p(T) = p(0)M(T)^{-1}$. Daí, segue que segue que

$$p_1 M(T)M(s)^{-1} = p(0)M(s)^{-1} = p(s), \quad \text{para todo } s \in [0, T],$$

e portanto temos.

$$\int_0^T p(s)B(s)(\hat{u}(s) - u(s))ds \leq 0, \quad (2.7)$$

para todo $\hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}$, de onde chegamos em (2.5). Caso (2.5) não seja verdadeiro, então existe $v \in \Omega$ tal que

$$p(s)B(s)v > p(s)B(s)u(s) \quad q.s \text{ em } [0, T].$$

Assim, integrando a expressão anterior em $(0, T)$ chegamos em uma contradição a (2.7).

Reciprocamente, suponha que exista um vetor adjunto $p(t)$ tal que $p'(t) = -p(t)A(t)$ com $p(T) = p_1$ e um controle u que satisfaça

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)B(t)v.$$

Denotemos por $x(\cdot)$ a trajetória associada a u . Repetindo o raciocínio anterior, temos

$$\int_0^T p(s)B(s)(\hat{u}(s) - u(s))ds \leq 0, \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}.$$

de onde temos

$$\int_0^T p_1 M(T)M(s)^{-1}B(s)(\hat{u}(s) - u(s))ds \leq 0.$$

Daí

$$\langle p_1, \hat{x}^1 - x(T) \rangle \leq 0, \quad \forall \hat{x}^1 \in A_\omega(x_0, T),$$

ou seja,

$$\langle p_1, \hat{x}^1 \rangle \leq \langle p_1, x(T) \rangle, \quad \forall \hat{x}^1 \in A_\Omega(x_0, T).$$

Pelo Lema A.5, temos que $x(T) \notin \text{Int}(A_\Omega(x_0, T))$ e assim $x(T) \in \partial A_\Omega(x_0, T)$.

□

Vejam agora um exemplo sobre como o princípio do máximo pode ser útil para a caracterização de controles ótimos de tempo mínimo.

Exemplo 2.1. (Controles Bang-Bang) Os controles do tipo bang-bang são aqueles em $\mathcal{U}_{ad}(\Omega)$, tais que

$$u(t) \in \partial\Omega, \quad \text{q.s em } [0, T].$$

Teorema 2.5. *Seja Ω compacto e considere em \mathbb{R}^n o sistema linear autônomo*

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{2.8}$$

suponha que o par (A, B) é controlável. Seja u um controle direcionando x_0 à x_1 em um tempo mínimo $t^ > 0$, então $u(t) \in \partial\Omega$ q.s em $[0, t^*]$.*

O Teorema 2.5 garante que, em particular, controles ótimos de tempo mínimo são do tipo Bang-Bang.

Para a prova do Teorema 2.5, precisamos dos seguintes lemas:

Lema 2.6. *Seja U um subconjunto fechado de interior não vazio em \mathbb{R}^n , seja $q \in \mathbb{R}^n$ não nulo e seja a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(u) = q \cdot u$. Se $u_0 \in U$ é um ponto de máximo local de f então $u_0 \in \partial U$.*

Demonstração. *Seja $u_0 \in U$ um ponto de máximo local de f e suponha que $u_0 \in \text{Int}(U)$. Então existe $\epsilon > 0$ pequeno tal que $u_0 + \epsilon q \in U$. Mas*

$$f(u_0 + \epsilon q) = f(u_0) + \epsilon \|q\|^2 > f(u_0),$$

onde a desigualdade é estrita, pois $q \neq 0$. Isso contradiz o fato de que u_0 é um ponto de máximo local. □

Lema 2.7. *Suponha que (A, B) seja controlável. Então, para todo $p_1 \in \mathbb{R}^n$ com $p_1 \neq 0$ e $T > 0$, o conjunto*

$$Z = \{t \in (0, T), B^\top p(t) = 0\}$$

2. Existência de trajetórias otimizadas no tempo

é finito, onde p é a solução do sistema adjunto (2.4).

Demonstração. Suponha que Z seja infinito. Então, pela analiticidade de p , obtemos

$$B^\top p(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Pela dualidade que existe entre o sistema (2.8) e (2.4), chegamos que

$$x(T) \cdot p_1 - x_0 \cdot p(0) = \int_0^T u(t) \cdot B^\top p(t) dt, \quad (2.9)$$

para todo $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$. Como (A, B) é controlável, podemos escolher $x_0 = 0$ e um controle \tilde{u} tal que $x_1 \cdot p_1 = \int_0^T \tilde{u}(t) B^\top p(t) dt = 0$ para todo $x_1 \in \mathbb{R}^n$. De onde podemos concluir que $p_1 = 0$, uma contradição. \square

Demonstração. (Teorema 2.5) Mostramos que os controles de tempo mínimo são extremos, portanto u é extremo. De acordo com o PMP, temos que existe $p_1 \in \mathbb{R}^n$, com $p_1 \neq 0$, tal que $p(t) = p_1 M(T) M(s)^{-1}$ satisfaz

$$p(t)Bu(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)Bv \quad \text{q.s. em } [0, T]. \quad (2.10)$$

Para todo $t \in [0, T]$ e $v \in \Omega$, definimos $f_t(v) = p(t)B \cdot v$. Observe que pelo Lema 2.7 $p(t)B$ pode ser zero apenas para t em um conjunto finito $E \subseteq [0, T]$. Assim, por (2.10), para cada $t \in E^c$, o vetor $p(t)B$ é não nulo e, além disso, o valor $u(t)$ é um máximo de f_t . Daí, podemos utilizar o Lema 2.6 e chegamos que $u(t) \in \partial\Omega$. \square

Observação 2.2. No caso em que o sistema possui entrada única ($m = 1$), se $\Omega = [a, b]$ com $a < b$, vemos que a função do Lema 2.6 têm apenas um máximo, que é atingido em $u(t) = b$ se $q > 0$ e $u = a$ se $q < 0$. Portanto, neste caso, se u é um controle extremo, então

$$u(t) = \begin{cases} b & \text{se } p(t)B > 0, \\ a & \text{se } p(t)B < 0, \end{cases}$$

quase sempre em $[0, T]$. Isto explica a terminologia bang-bang. Em particular se além disso $\Omega = [-a, a]$ onde $a > 0$, os controles extremos de tempo mínimo tomam a forma

$$u(t) = a \operatorname{sinal}(p(t)B(t)).$$

Vimos que para determinarmos os controles Bang-Bang, necessitamos, essencialmente, saber como a função $p(t)B$ muda de sinal. Neste sentido, a proposição a seguir se torna muito importante.

Proposição 2.8. Considere em \mathbb{R}^n o sistema linear autônomo $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ com $B \in \mathbb{R}^n$ e $\Omega = [-1, 1]$, onde o par (A, B) é controlável.

- i. Se todo autovalor de A for real, então todo controle extremo terá no máximo $n - 1$ permutas de sinal.
- ii. Se todo autovalor de A tiver uma parte imaginária diferente de zero, então todo controle extremo terá um número infinito de permutações de sinal.

Antes de provarmos a Proposição 2.8, precisaremos do seguinte resultado.

Teorema 2.9. (*Forma de Brunovski*) Se $m = 1$ e se o par (A, B) é controlável, então é semelhante ao par (\tilde{A}, \tilde{B}) , onde

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e onde os coeficientes a_i são aqueles do polinômio característico de A isto é,

$$P_A(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n.$$

Demonstração. Queremos mostrar que podemos encontrar uma base (f_1, \dots, f_n) na qual o sistema de controle linear pode ser reescrito na forma:

$$x'(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t).$$

Sendo $B = (b_{j1})_{j=1}^n$ e como queremos representar a matriz B por \tilde{B} em uma nova base (f_1, \dots, f_n) , então devemos ter

$$B = 0f_1 + \cdots + 1f_n = f_n.$$

De modo análogo, como queremos representar a matriz A por \tilde{A} na nova base (f_1, \dots, f_n) então, temos que

$$\begin{aligned} Af_n &= 0f_1 + \cdots + 1f_{n-1} - a_1f_n = f_{n-1} - a_1f_n, \\ Af_{n-1} &= f_{n-2} - a_2f_n, \\ Af_{n-2} &= f_{n-3} - a_3f_n, \\ &\vdots \\ Af_2 &= f_1 - a_{n-1}f_n, \\ Af_1 &= -a_nf_n. \end{aligned}$$

Portanto, de acordo com as relações anteriores, definirmos os vetores f_1, \dots, f_n por

$$f_n = B, \quad f_{n-1} = Af_n + a_1f_n, \quad f_{n-2} = Af_{n-1} + a_2f_n, \quad \dots, \quad f_1 = Af_2 + a_{n-1}f_n.$$

2. Existência de trajetórias otimizadas no tempo

Observemos que a última condição ainda está pendente de ser compatível com as definições de $(f_j)_{j=1}^n$ logo acima. Antes de partirmos para este ponto, verifiquemos que (f_1, \dots, f_n) é de fato uma base de \mathbb{R}^n .

Note que, sendo $f_n = B$, temos que

$$\begin{aligned}\langle f_n \rangle &= \langle B \rangle \\ \langle f_n, f_{n-1} \rangle &= \langle B, AB \rangle \\ \langle f_n, f_{n-1}, f_{n-2} \rangle &= \langle B, AB, A^2B \rangle \\ &\vdots \\ \langle f_n, f_{n-1}, \dots, f_1 \rangle &= \langle B, AB, \dots, A^{n-1}B \rangle = \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Assim, temos claramente que $(f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n)$ é de fato uma base do \mathbb{R}^n . Verifiquemos agora a condição de compatibilidade

$$Af_1 = -a_n f_n.$$

É neste ponto que a escolha da entrada das matrizes estarem relacionadas aos coeficientes do polinômio característico se torna importante.

Por indução, verificamos que:

$$\begin{aligned}Af_1 &= A(Af_2 + a_{n-1}f_n) = A^2f_2 + a_{n-1}Af_n \\ &= A^2(Af_3 + a_{n-2}f_n) + a_{n-1}Af_n \\ &= A^3f_3 + a_{n-2}A^2f_n + a_{n-1}Af_n \\ &= A^3(Af_4 + a_{n-3}f_n) + a_{n-2}A^2f_n + a_{n-1}Af_n \\ &\vdots \\ &= A^n f_n + a_1 A^{n-1} f_n + a_2 A^{n-2} f_n + \dots + a_{n-1} A f_n \\ &= (A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A) f_n.\end{aligned}$$

Pelo teorema de Cayley Hamilton, temos que toda matriz é um zero do seu polinômio característico. Daí, segue que

$$A^n = -a_1 A^{n-1} - \dots - a_{n-1} A - a_n I,$$

de onde obtemos

$$Af_1 = -a_n I f_n = -a_n f_n.$$

Assim provamos que existe uma base (f_1, \dots, f_n) , onde o par (A, B) assume a forma (\tilde{A}, \tilde{B}) . □

Demonstração. (Proposição 2.8) Uma vez que temos que $m = 1$ e que (A, B) é controlável, podemos supor que o par (A, B) está na forma de Brunovski dada no Teorema

2.9.

Vimos na Observação 2.2 que todo controle extremo é da forma $u(t) = \text{sgn}(p(t)B)$, onde $p(t)$ é a solução da equação adjunta $p'(t) = -p(t)A$. Notemos que $p(t)B = p_n(t)$, onde $p_n(t)$ é a n -ésima componente de $p(t)$ na base $\{f_1, \dots, f_n\}$, e assim $u(t) = \text{sgn } p_n(t)$. Se $p_n(t) = \lambda(t)$, afirmamos que

$$\lambda^{(n)} - a_1\lambda^{(n-1)} + \dots + (-1)^n a_n \lambda = 0. \quad (2.11)$$

De fato, em termos da base $\{f_1, \dots, f_n\}$, a equação adjunta se escreve na forma

$$\begin{pmatrix} p'_1(t) \\ \vdots \\ p'_n(t) \end{pmatrix} = (p_1(t), \dots, p_n(t)) \cdot A,$$

de onde obtemos as equações:

$$\begin{aligned} p'_1(t) &= a_n \lambda(t) \\ p'_2(t) &= -p_1(t) + a_{n-1} \lambda(t) \\ p'_3(t) &= -p_2(t) + a_{n-2} \lambda(t) \\ &\vdots \\ p'_{n-1}(t) &= -p_{n-2}(t) + a_{n-(n-2)} \lambda(t) \\ \lambda'(t) &= -p_{n-1}(t) + a_1 \lambda(t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lambda^{(n)} &= -p'_{n-1}(t) + a_1 \lambda'(t) \\ &= -(-p_{n-2}(t) + a_2 \lambda(t)) + a_1 \lambda'(t) \\ &= p_{n-2}(t) - a_2 \lambda(t) + a_1 \lambda'(t). \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \lambda^{(n)}(t) &= p'_{n-2}(t) - a_2 \lambda'(t) + a_1 \lambda^{(2)}(t) \\ &= -p_{n-3}(t) + a_3 \lambda(t) - a_2 \lambda'(t) + a_1 \lambda^{(2)}(t). \end{aligned}$$

Por um argumento de indução, chegamos que

$$\lambda^{(n)}(t) = (-1)^n p'_1(t) + \dots + a_1 \lambda^{(n-1)}(t).$$

Finalmente, usando que $p'_1(t) = a_n \lambda(t)$, obtemos (2.11).

Agora, sendo $t \rightarrow \lambda(t)$ a solução da EDO linear acima, onde os a_i 's são escalares, ao definir $x = (\lambda, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n-1)})^\top$, esta equação escalar de ordem n , torna-se um sistema

de dimensão n de primeira ordem

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.12)$$

Neste ponto, dividiremos a conta entre os casos i) e ii).

Caso i. Suponhamos que todos os autovalores desta matriz A são reais. Então de acordo com os resultados clássicos na teoria das equações diferenciais ordinárias, veja por exemplo [21] pg.98, a solução real de (2.12) pode ser escrita na forma

$$\lambda(t) = \sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\lambda_j t},$$

onde P_j é um polinômio de grau menor ou igual a $n_j - 1$ e onde $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são os r autovalores distintos de A com as respectivas multiplicidades n_1, \dots, n_r . Observe que $n = n_1 + \dots + n_r$ e assim temos que $\lambda(t)$ admite no máximo $n - 1$ zeros, que corresponde ao cenário em que temos um único autovalor de multiplicidade n .

Caso ii. Se todo autovalor próprio de A tiver uma parte imaginária diferente de 0, por [21]

$$\lambda(t) = \sum_{j=1}^r (P_j(t) \cos(\beta_j t) + Q_j(t) \sin(\beta_j t)) e^{\alpha_j t},$$

onde $P_j(t)$ e $Q_j(t)$ são polinômios reais que não são todos nulos. Seja $t^k e^{\alpha_i t}$ o termo dominante, isto é, α_i é o maior elemento do conjunto $\{\alpha_j\}$ e t^k é o maior grau aparecendo nos polinômios P_i, Q_i . Escrevemos então

$$\lambda(t) = t^k e^{\alpha_i t} \sum_{j=1}^r \left(\frac{1}{t^k} P_j(t) \cos \beta_j t + \frac{1}{t^k} Q_j(t) \sin \beta_j t \right) e^{(\alpha_j - \alpha_i) t}.$$

Observe que se $i \neq j$, $e^{(\alpha_j - \alpha_i) t}$ converge exponencialmente a zero.

Escrevemos então

$$\lambda(t) = t^k e^{\alpha_i t} \left(\sum_{j \neq i} \left(\frac{1}{t^k} P_j(t) \cos \beta_j t + \frac{1}{t^k} Q_j(t) \sin \beta_j t \right) e^{(\alpha_j - \alpha_i) t} + \frac{P_i(t)}{t^k} \cos \beta_i t + \frac{Q_i(t)}{t^k} \sin \beta_i t \right),$$

Como k é o maior grau aparecendo em P_i, Q_i , então podemos supor que, quando $t \rightarrow \infty$

(I) $\frac{P_i(t)}{t^k} \rightarrow 0$ e $\frac{Q_i(t)}{t^k} \rightarrow A_0$,

(II) $\frac{P_i(t)}{t^k} \rightarrow A_0$ e $\frac{Q_i(t)}{t^k} \rightarrow 0$,

(III) $\frac{P_i(t)}{t^k} \rightarrow A_0$ e $\frac{Q_i(t)}{t^k} \rightarrow B_0$.

No caso (I), a função $\frac{P_i(t)}{t^k} \cos \beta_i t + \frac{Q_i(t)}{t^k} \sin \beta_i t$ oscila em torno de valores cada vez mais próximo de A_0 . O caso (II) é análogo ao (I). Para o caso (III) é suficiente vermos se a função $\frac{P_i(t)}{t^k} \cos \beta_i t + \frac{Q_i(t)}{t^k} \sin \beta_i t$ oscila em torno do zero. Observe que esta vale zero se,

e somente se

$$\tan(\beta_i t) = -\frac{Q_i(t)}{P_i(t)}, \quad (2.13)$$

Notemos que, quando $t \rightarrow \infty$, temos $-\frac{Q_j(t)}{P_j(t)} \rightarrow \frac{B_0}{A_0} \neq 0$, e, por outro lado, a função tangente varia de $-\infty$ a ∞ em períodos 2π . Portanto existem infinitos t 's onde a expressão (2.13) é válida. \square

No presente capítulo, estudamos um problema de controle ótimo em relação ao tempo de controlabilidade. No próximo capítulo, estudaremos um problema de otimização para sistemas lineares do tipo (2.1) onde os controles devem ser ótimos em relação a um custo quadrático. Este problema de otimização é denominado *Linear Quadrático*.

Capítulo 3

Teoria Linear Quadrática

Esta seção é dedicada ao estudo de problemas lineares quadráticos L.Q. Este é um problema de controle ótimo regido por uma dinâmica linear e onde o critério a ser minimizado é quadrático no controle e na trajetória associada. Realizaremos uma análise matemática completa, onde mostraremos a existência e a unicidade do controle ideal.

Consideremos o sistema de controle linear em \mathbb{R}^n .

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Introduzimos o custo quadrático do tipo

$$C(u) = x(T)^T Q x(T) + \int_0^T (x(t)^T W(t)x(t) + u(t)^T U(t)u(t)) dt, \quad (3.2)$$

onde $T > 0$ é fixo e para cada $t \in [0, T]$ temos que $U(t) \in M_m(\mathbb{R})$ é simétrica definida positiva, $W(t) \in M_n(\mathbb{R})$ é simétrica positiva e $Q \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz simétrica positiva. Mais ainda, assumiremos que A, B, W e U são L^∞ em $(0, T)$, e além disso consideramos controles em $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$.

Fixando o ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, o objetivo é determinarmos trajetórias partindo de x_0 que minimizam o custo $C(u)$. Neste caso, definimos:

$$\|x(t)\|_W^2 = x(t)^T W(t)x(t), \quad \|u(t)\|_U^2 = u(t)^T U(t)u(t), \quad \text{e} \quad g(x) = x^T Q x.$$

Assim, podemos escrever o custo na forma:

$$C(u) = g(x(T)) + \int_0^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt.$$

Observação 3.1. Se $Q = W = 0$, então o custo mínimo é atingido no controle $u = 0$.

O problema de controle ótimo consiste em minimizar a função de custo $C(u)$ dentre todos os controles mensuráveis $u(t)$ para os quais

$$\int_0^T \|u(t)\|_U^2 dt < \infty.$$

3.1 Existência de trajetórias ótimas

Apresentaremos a seguinte hipótese sobre U :

$$\exists \alpha > 0; \quad \forall u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \quad \int_0^T \|u(t)\|_U^2 dt \geq \alpha \int_0^T u(t)^T u(t) dt. \quad (3.3)$$

Um exemplo onde esta hipótese é verificada ocorre quando a aplicação $t \rightarrow U(t)$ é contínua. De fato sendo U positiva definida, a função

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : B_m[0, 1] \times [0, T] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (u, t) &\mapsto u^T U(t) u, \end{aligned}$$

onde $B_m[0, 1]$ representa a bola fechada em \mathbb{R}^m é contínua e está definida em um conjunto compacto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$. Assim, existe $\alpha > 0$ tal que $\mathcal{A}(u, t) \geq \alpha$ para todo $u \in B_m[0, 1]$ e todo $t \in [0, T]$ e daí, em particular $\frac{u^T U(t) u}{u^T u} \geq \alpha$ para todo $u \in \mathbb{R}^m$.

Temos o seguinte resultado de existência:

Teorema 3.1. *Sob a hipótese (3.3) existe uma única trajetória de minimização para o problema L.Q.*

Demonstração. Vamos primeiro mostrar a existência de trajetórias. Considere uma sequência minimizante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de controles em $[0, T]$, ou seja, a sequência $C(u_n)$ converge para o ínfimo dos custos. Em particular, a sequência $C(u_n)$ é limitada. Por hipótese, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que para todo $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, temos $C(u) \geq \alpha \|u\|_{L^2}^2$, ou seja, $\|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\alpha} C(u)$. Assim, podemos dizer que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\|u_n\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\alpha} C(u_n)$ e sendo $C(u_n)$ uma sequência limitada, deduzimos que a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. Consequentemente, a menos de uma subsequência, temos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fracamente para um controle u de $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. Denote por x_n a trajetória associada ao controle u_n em $[0, T]$. De acordo com a fórmula da variação da constante, temos, para todo $t \in [0, T]$,

$$x_n(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u_n(s) ds. \quad (3.4)$$

De forma análoga, denotando por x a trajetória associada ao controle u em $[0, T]$, temos

$$x(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1}B(s)u(s)ds. \quad (3.5)$$

Podemos ver facilmente que, a menos de uma subsequência, a sequência (x_n) converge para a aplicação x em $[0, T]$. Isto vem do fato que, se $u_n \rightarrow u$, então

$$\int_0^t M(s)^{-1}B(s)u_n(s)ds \rightarrow \int_0^t M(s)^{-1}B(s)u(s)ds. \quad (3.6)$$

Portanto, a função x é uma trajetória do sistema associado ao controle u . Mostremos que o controle u minimiza o custo $C(u)$.

Por (3.3) e do fato de U ser uma matriz em $L^\infty(0, T)$, temos que as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_U$ são equivalentes. Assim,

$$\|u\|_U \leq C\|u\| \leq C \liminf \|u_n\| \leq C \liminf \|u_n\|_U.$$

Por outro lado, as funções x_n e x são contínuas e por (3.6), $x_n(t)$ converge para $x(t)$ a menos de uma subsequência, para todo $t \in [0, T]$. O que nos permite concluir que

$$g(x_n(T)) \rightarrow g(x(T)),$$

onde a função $g(v) = v^\top Qv$ e também

$$\int_0^T x_n(t)^\top W(t)x_n(t) dt \rightarrow \int_0^T x(t)^\top W(t)x(t) dt.$$

Portanto,

$$C(u) \leq \liminf C(u_n)$$

e como $C(u_n)$ converge para o ínfimo de C , chegamos que u é mínimo. □

Para a unicidade, basta provarmos o seguinte lema:

Lema 3.2. O funcional C é estritamente convexo.

Demonstração. Em primeiro lugar, observe que para todo $t \in [0, T]$, a função $f(u) = u^\top U(t)u$ definida em \mathbb{R}^m é estritamente convexa, uma vez que pelo fato da matriz $U(t)$ ser simétrica positiva definida, sua hessiana é também positiva definida. De fato, $\text{hess} f(u) = 2U$ implicando que $f(u)$ é uma função estritamente convexa (veja [4], pg.39). De maneira análoga, uma vez que as matrizes $W(t)$ e $Q(t)$ são positivas semidefinidas, temos que as aplicações $u \rightarrow x(t)^\top W(t)x(t)$ e $u \rightarrow x(T)^\top Qx(T)$ são convexas. Daí, o resultado segue. □

Observação 3.2. Se a função g que aparece no custo é qualquer função contínua, de \mathbb{R}^n para \mathbb{R} , limitada inferiormente ou convexa, então ainda é possível provarmos a existência de um controle ótimo (veja [17] Teorema 2 pg.177), então, o teorema anterior permanece verdadeiro.

Na seção seguinte, faremos uma caracterização dos controles ótimos para o problema L.Q. e provaremos o princípio do máximo de Pontryagin para este caso.

3.2 Condição necessária e suficiente de otimalidade: Princípio do máximo no caso L.Q.

Segue o princípio do máximo de Pontryagin para o problema L.Q.:

Teorema 3.3. *A trajetória x associada ao controle u é ótima para o problema L.Q. se, e somente se, existir um vetor adjunto $p(t)$ que satisfaça, para quase todo $t \in [0, T]$, a equação*

$$p'(t) = -p(t)A(t) + x(t)^T W(t) \quad (3.7)$$

e a condição final

$$p(T) = -x(T)^T Q. \quad (3.8)$$

Além disso, o controle ótimo u é escrito para quase todo $t \in [0, T]$ na forma

$$u(t) = U(t)^{-1} B(t)^T p(t)^T. \quad (3.9)$$

Demonstração. Seja u o controle ótimo e x a trajetória associada ao controle u em $[0, T]$. Sendo u ótimo, o custo $C(u)$ é mínimo dentre todas as trajetórias de solução do sistema, partindo de x_0 e ponto final fixado.

Vamos considerar, portanto, as perturbações do controle u em $L^2[0, T]$ do tipo

$$u_{\text{pert}}(t) = u(t) + (u_\delta)(t),$$

gerando as trajetórias do tipo

$$x_{\text{pert}}(t) = x(t) + (x_\delta)(t),$$

Em outros termos, a trajetória x_{pert} deverá ser solução do sistema $x'_{\text{pert}} = Ax_{\text{pert}} + Bu_{\text{pert}}$, enquanto que

$$(x_\delta)' = A(x_\delta) + B(u_\delta), \quad (3.10)$$

com $(x_\delta)(0) = 0$. Desta forma, para todo $t \in [0, T]$,

$$(x_\delta)(t) = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) (u_\delta)(s) ds. \quad (3.11)$$

Além disso, é bastante claro que o custo $C(\cdot)$ é uma função suave em $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ no sentido de *Fréchet*, mais ainda devemos ter $C(u_{\text{pert}}) - C(u) = dC(u) \cdot (u_\delta) + o(u_\delta)$. Onde $\lim_{u_\delta \rightarrow 0} \frac{o(u_\delta)}{\|u_\delta\|} = 0$. Sendo u ótimo, sabemos que u minimiza o custo e assim temos

$$dC(u) = 0. \quad (3.12)$$

Calculemos a derivada $dC(u)$. É fácil ver que

$$\begin{aligned} C(u_{\text{pert}}) - C(u) &= x_{\text{pert}}(T)^T Q x_{\text{pert}}(T) \\ &+ \int_0^T (x_{\text{pert}}(t)^T W(t) x_{\text{pert}}(t) + u_{\text{pert}}(t)^T U(t) u_{\text{pert}}(t)) dt \\ &- \left(x(T)^T Q x(T) + \int_0^T (x(t)^T W(t) x(t) + u(t)^T U(t) u(t)) dt \right), \end{aligned}$$

de onde chegamos em

$$\begin{aligned} C(u_{\text{pert}}) - C(u) &= 2 \left(x(T)^T Q (x_\delta)(T) + \int_0^T (x(t)^T W(t) (x_\delta)(t) + u(t)^T U(t) (u_\delta)(t)) dt \right) + C(u_\delta). \end{aligned}$$

É claro que $C(u_\delta) \rightarrow 0$, quando $u_\delta \rightarrow 0$. Portanto, deduzimos que

$$\begin{aligned} dC(u) \cdot u_\delta &= 2 \left(x(T)^T Q (x_\delta)(T) + \int_0^T (x(t)^T W(t) (x_\delta)(t) + u(t)^T U(t) (u_\delta)(t)) dt \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por (3.12) concluímos que o controle ótimo deve satisfazer:

$$x(T)^T Q (x_\delta)(T) + \int_0^T (x(t)^T W(t) (x_\delta)(t) + u(t)^T U(t) (u_\delta)(t)) dt = 0, \quad (3.14)$$

para qualquer perturbação u_δ .

Agora, introduzimos o vetor adjunto $p(t)$ como uma solução para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} p'(t) = -p(t)A(t) + x(t)^T W(t), \\ p(T) = -x(T)^T Q. \end{cases} \quad (3.15)$$

A fórmula da variação dos parâmetros nos diz que

$$p(t) = \Lambda M(t)^{-1} + \int_0^t x(s)^\top W(s) M(s) ds M(t)^{-1}, \quad \forall t \in [0, T],$$

onde

$$\Lambda = -x(T)^\top Q M(T) - \int_0^T x(s)^\top W(s) M(s) ds.$$

Utilizando a variável p dada em (3.15) na equação (3.14), obtemos

$$-p(T)x_\delta(T) + \int_0^T (p'(t) + p(t)A(t)) x_\delta(t) dt + \int_0^T u(t)^\top U(t) u_\delta(t) dt = 0. \quad (3.16)$$

Trataremos cada um dos termos da equação (3.16). Para o primeiro, notemos que

$$\begin{aligned} -p(T)x_\delta(T) &= -\int_0^T \frac{d}{dt}(p(t)x_\delta(t)) dt + p(0)x_\delta(0) \\ &= -\int_0^T p'(t)x_\delta(t) dt - \int_0^T p(t)x_\delta'(t) dt. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Utilizando a equação (3.10) para x_δ , obtemos

$$\begin{aligned} -p(T)x_\delta(T) &= -\int_0^T p'(t)x_\delta(t) dt - \int_0^T p(t)(Ax_\delta + Bu_\delta)(t) dt \\ &= -\int_0^T (p'(t) + p(t)A) x_\delta(t) dt - \int_0^T p(t)Bu_\delta(t) dt. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Utilizando (3.18) em (3.16) temos

$$-\int_0^T p(t)Bu_\delta(t) dt + \int_0^T u(t)^\top U(t)u_\delta(t) dt = 0.$$

Para todo u_δ , daí

$$\int_0^T (-p(t)B + u(t)^\top U(t)) u_\delta(t) dt = 0,$$

para todo u_δ , de onde chegamos que

$$u(t)^\top U(t) = p(t)B, \quad (3.19)$$

ou ainda,

$$U(t)^\top u(t) = B^\top p(t)^\top.$$

Como U é simétrica

$$u(t) = U(t)^{-1} B^\top p(t)^\top.$$

A recíproca é imediata uma vez que os argumentos da primeira prova, mais especificamente de (3.13) em diante, são todos se, e somente se. Concluimos afirmando

que o controle u dado em (3.9) é único, uma vez que o funcional C é estritamente convexo. \square

Observação 3.3. Se o sistema de controle (3.1) é perturbado por uma força externa $r(t)$, então o teorema anterior permanece verdadeiro. Também, podemos assumir em (3.2), no lugar do termo $x(T)^\top Qx(T)$, uma função g convexa, arbitrária em $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, bastando substituir a condição final em (3.8) pela seguinte *condição de transversalidade*:

$$p(T) = -\frac{1}{2} \nabla g(x(T)).$$

De fato, neste caso

$$c(u_{\text{pert}}) - c(u) = g(x_{\text{pert}}(T)) + \int_0^T (\|x_{\text{pert}}(t)\|_W^2 + \|u_{\text{pert}}(t)\|_U^2) dt \\ - \left(g(x(T)) + \int_0^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt \right),$$

onde $x_{\text{pert}} = x + x_\delta$. Notemos que

$$g(x_{\text{pert}}(T)) - g(x(T)) = g(x(T) + x_\delta(T)) - g(x(T)) \\ = \langle \nabla g(x(T)), x_\delta(T) \rangle + r(x_\delta(T)), \quad \text{onde } \lim_{x_\delta(T) \rightarrow 0} \frac{r(x_\delta(T))}{\|x_\delta(T)\|} = 0.$$

Portanto, segue que

$$dC(u)(u_\delta) = \langle \nabla g(x(T)), x_\delta(T) \rangle + 2 \left(\int_0^T (x(t)^\top W(t)x_\delta(t) + u(t)^\top U(t)u_\delta(t)) dt \right),$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} dc(u) u_\delta = \frac{1}{2} \langle \nabla g(x(T)), x_\delta(T) \rangle + \left(\int_0^T (x(t)^\top W(t)x_\delta(t) + u(t)^\top U(t)u_\delta(t)) dt \right).$$

Daí, por um argumento análogo ao realizado em (3.14) e (3.15) vemos o surgimento da condição de transversalidade.

3.2.1 Princípio do máximo: Hamiltoniano

Nesta subseção reformularemos o Teorema 3.3 em termos da noção do Hamiltoniano.

Definição 3.1. O Hamiltoniano associado ao sistema de controle linear (3.1) e com o funcional custo definido em (3.2) é a aplicação $H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(x, p, u) = p(Ax + Bu) - \frac{1}{2}(x^\top Wx + u^\top Uu), \quad (3.20)$$

onde (x, p, u) denota um vetor genérico de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e sempre usando a convenção de que p é um vetor linha do \mathbb{R}^n .

Um cálculo elementar nas derivadas parciais do Hamiltoniano mostra que

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p} &= Ax + Bu, \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= pA - x^T W, \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= pB - u^T U.\end{aligned}$$

Agora, considerando o tripleto (x, p, u) obtido no Teorema (3.3), temos que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(t) &= Ax + Bu = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt}(t) &= -pA + x^T W = -\frac{\partial H}{\partial x}.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \tag{3.21}$$

já que $pB - u^T U = 0$ (veja 3.19). Como a função $v \rightarrow H(x, p, v)$ é estritamente convexa em $v \in \mathbb{R}^m$, para todo tripleto (t, x, p) fixado em $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, a equação (3.21) significa que

$$u(t) = \arg \min_{v \in \mathbb{R}^m} H(x(t), p(t), v), \quad \forall t \in [0, T].$$

Resumimos o exposto na seguinte versão do princípio do máximo de Pontryagin para o problema LQ.

Proposição 3.4. O controle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ é ótimo para o problema L.Q. se, e somente se, tivermos

$$u(t) = \arg \min_{v \in \mathbb{R}^m} H(x(t), p(t), v), \quad \forall t \in [0, T],$$

com

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \\ \frac{dp}{dt}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} - pA + x^T W =, \quad p(T) = -x(T)^T Q.\end{aligned}$$

Na próxima seção, mostraremos que o controle ótimo para o problema L.Q. pode ser caracterizado por um controle em um circuito fechado. Com esta finalidade, faremos uso das equações de Riccati.

3.3 Função de Valor

Seja $T > 0$ fixo, e seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Considere o problema L.Q. de encontrar uma trajetória de solução de

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3.22)$$

minimizando o custo quadrático

$$C_T(u) = x(T)^T Q x(T) + \int_0^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt. \quad (3.23)$$

Definição 3.2. A função de valor S_T no ponto x_0 é o limite inferior dos custos para o problema LQ. Em outras palavras

$$S_T(x_0) = \inf\{C_T(u) \mid x_u(0) = x_0\}.$$

Observação 3.4. De acordo com o Teorema 3.1, sob a hipótese (3.3) temos a existência de uma única trajetória ótima para o problema LQ. Neste caso, este limite inferior é um mínimo.

3.4 Equação de Riccati

O objetivo desta seção é mostrar que é possível, formular a qualquer momento $t \in [0, T]$ o controle ótimo $u(t)$ para o problema L.Q. como um circuito fechado sobre o estado $x(t)$.

Teorema 3.5. *Sob a hipótese (3.3), para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única trajetória ótima x associada ao controle u para o problema (3.22), (3.23). O controle ideal se escreve na forma de um circuito fechado*

$$u(t) = U(t)^{-1} B(t)^T E(t) x(t), \quad (3.24)$$

onde $E(t) \in M_n(\mathbb{R})$ é solução em $[0, T]$ da equação matricial de Riccati

$$\begin{cases} E'(t) = W(t) - A(t)^\top E(t) - E(t)A(t) - E(t)B(t)U(t)^{-1}B(t)^\top E(t), \\ E(T) = -Q. \end{cases} \quad (3.25)$$

Além disso, para todo $t \in [0, T]$, a matriz $E(t)$ é simétrica e,

$$S_T(x_0) = -x_0^\top E(0)x_0. \quad (3.26)$$

Observação 3.5. Em particular, o teorema afirma que o controle ótimo u assume a forma de um circuito fechado

$$u(t) = K(t)x(t),$$

onde $K(t) = U(t)^{-1}B(t)^\top E(t)$. Essa forma se presta bem a problemas de *estabilização*, como veremos mais adiante.

Demonstração. De acordo com o Teorema 3.1, existe uma trajetória ótima única, que de acordo com o Teorema 3.3, é caracterizada pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu = Ax + BU^{-1}B^\top p^\top, \\ p' = -pA + x^\top W, \end{cases}$$

com $x(0) = x_0$ e $p(T) = -x(T)^\top Q$. Uma vez que o controle ótimo se escreve como

$$u = U^{-1}B^\top p^\top,$$

devemos portanto, mostrar que podemos escrever $p(t)^\top = E(t)x(t)$, onde $E(t)$ é uma solução de (3.25).

Devemos mostrar duas condições:

1. Se $p(t)$ for escrito como $p(t) = x(t)^\top E(t)$, então $E(t)$ é uma solução de Riccati.
2. $E(t)$ é a solução de Riccati, então mostraremos que realmente temos $p(t) = x(t)^\top E(t)$.

Afirmção 1. Suponhamos que $p(t) = x(t)^\top E(t)$. Portanto,

$$x' = Ax + BU^{-1}B^\top p^\top = Ax + BU^{-1}B^\top E x = (A + BU^{-1}B^\top E)x(t).$$

Por um lado, temos que

$$\begin{aligned} p'(t) &= (x(t)^\top E(t))' = (x'(t))^\top E(t) + x(t)^\top E'(t) \\ &= [(A + BU^{-1}B^\top E)x(t)]^\top E(t) + x(t)^\top E'(t) \\ &= [x(t)^\top (A + BU^{-1}B^\top E)^\top] E(t) + x(t)^\top E'(t) \\ &= [x(t)^\top (A^\top + E^\top BU^{-1}B^\top)] E(t) + x(t)^\top E'(t) \\ &= x(t)^\top A(t)^\top E(t) + x(t)^\top E^\top BU^{-1}B^\top E + x(t)^\top E'(t). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} p'(t) &= -p(t)A(t) + x(t)^\top W(t) \\ &= -x(t)^\top E(t)A(t) + x(t)^\top W(t), \quad p(T) = -x(T)^\top Q. \end{aligned} \tag{3.28}$$

De (3.27) e (3.28), deduzimos que

$$-x(t)^\top E(t)A(t) + x(t)^\top W(t) = x(t)^\top A(t)^\top E(t) + x(t)^\top EBU^{-1}B^\top E + x(t)^\top E'(t),$$

ou equivalentemente

$$x(t)^\top [W(t) - E(t)A(t) - A(t)^\top E(t) - EBU^{-1}B^\top E] = x(t)^\top E'(t).$$

Sendo $x(t)$ uma solução não trivial, deduzimos, que $E(t)$ satisfaz a equação de Riccati. Da condição $p(T) = -x(T)^\top Q = x(T)^\top E(T)$, deduzimos que $E(T) = -Q$.

Afirmção 2. Seja $E(t)$ uma solução da equação matricial de Riccati. Utilizaremos a unicidade da trajetória ótima, para mostrarmos que p se escreve na forma $p(t) = x(t)^\top E(t)$.

Consideremos $p_1(t) = x_1(t)^\top E(t)$, onde x_1 é a solução de

$$x_1' = Ax_1 + Bu_1, \quad x_1(0) = x_0,$$

e

$$u_1 = U^{-1}B^\top E x_1.$$

Então,

$$\begin{aligned} p_1'(t) &= x_1'(t)^\top E(t) + x_1(t)^\top E'(t) \\ &= (Ax_1 + BU^{-1}B^\top E x_1)^\top E + x_1^\top (W - A^\top E - EA - EBU^{-1}B^\top E) \\ &= x_1^\top A^\top E + x_1^\top E^\top B(U^{-1})^\top B^\top E + x_1^\top W - x_1^\top A^\top E - x_1^\top EA - x_1^\top EBU^{-1}B^\top E \\ &= -x_1^\top EA + x_1^\top W \\ &= -p_1 A + x_1^\top W. \end{aligned}$$

Portanto,

$$p_1' = -p_1 A + x_1^\top W.$$

Em outras palavras, o tripleto (x_1, p_1, u_1) satisfaz exatamente as equações do Teorema 3.3, ou seja, (x_1, p_1, u_1) verifica o sistema

$$\begin{cases} x_1' = Ax_1 + Bu_1, & x_1(0) = x_0, \\ p_1' = -p_1 A + x_1^\top W, & p_1(T) = -x_1^\top Q, \\ u_1 = U^{-1}B^\top E^\top x_1 = U^{-1}B^\top p_1^\top. \end{cases}$$

Consequentemente, a trajetória x_1 é ótima e, por unicidade, resulta que $x_1 = x$, $u_1 = u$

e então $p_1 = p$. Em particular, temos $p = x^\top E$ e $u = U^{-1}B^\top E^\top x$.

Deduzamos agora a fórmula (3.26). Para isto, observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x(t)^\top E(t)x(t)) &= \frac{d}{dt} (p(t)x(t)) = \dot{p}(t)x(t) + p(t)\dot{x}(t) \\ &= x(t)^\top W(t)x(t) + p(t)B(t)u(t). \end{aligned}$$

Além disso, a partir da expressão de u , deduzimos:

$$\begin{aligned} u^\top U u &= (U^{-1}B^\top E x)^\top U (U^{-1}B^\top E x) \\ &= x^\top E B U^{-1} B^\top E x \\ &= p B u. \end{aligned}$$

Finalmente, temos a igualdade

$$\frac{d}{dt} (x(t)^\top E(t)x(t)) = x(t)^\top W(t)x(t) + u(t)^\top U(t)u(t).$$

Como $u = U^{-1}B^\top E^\top x$ é o controle que minimiza o custo $C(u)$, chegamos

$$\begin{aligned} S_T(x_0) = C(u) &= x(T)^\top Q x(T) + \int_0^T (x(t)^\top W(t)x(t) + u(t)^\top U(t)u(t)) dt \\ &= x(T)^\top Q x(T) + \int_0^T \frac{d}{dt} (x(t)^\top E(t)x(t)) dt \\ &= x(T)^\top Q x(T) + x(T)^\top E(T)x(T) - x(0)^\top E(0)x(0). \end{aligned}$$

Como $E(T) = -Q$ e como $x(0) = x_0$, segue que

$$S_T(x_0) = -x_0^\top E(0)x_0.$$

□

Para que a representação (3.26) seja verdadeira em todo instante de tempo, o lema a seguir se torna fundamental:

Lema 3.6. A aplicação $t \mapsto E(t)$ está bem definida para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Se a aplicação $E(t)$ não estiver definida para todo $t \in [0, T]$, então existe $0 < t_* < T$ tal que $\|E(t)\|$ tende a $+\infty$ à medida que t se aproxima de t_* digamos pela direita, isto é, que $\lim_{t \rightarrow t_*^+} \|E(t)\| = +\infty$. Em particular, para todo $\alpha > 0$, existe $t_0 \in]t_*, T]$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, com $\|x_0\| = 1$, tal que

$$|x_0^\top E(t_0)x_0| \geq \alpha. \quad (3.29)$$

De acordo com o Teorema 3.1, existe uma trajetória ótima única $x(\cdot)$ para o problema L.Q em $[t_0, T]$ tal que $x(t_0) = x_0$. Esta trajetória é caracterizada pelo sistema de equações

$$\begin{aligned} x' &= Ax + BU^{-1}B^\top p^\top, \quad x(t_0) = x_0, \\ p' &= -pA + x^\top W, \quad p(T) = -x(T)^\top Q. \end{aligned}$$

Seguindo raciocínio análogo ao da prova do Teorema 3.5, substituindo o intervalo $[0, T]$ pelo intervalo $[t_0, T]$, chegamos que $S_{T-t_0}(x_0) = -x_0^\top E(t_0)x_0$ e além disso, sendo u o controle que minimiza o custo, temos $S_{T-t_0}(x_0) = C(u)$ e, portanto, se \hat{x} é a trajetória que parte de x_0 associada ao controle nulo, chegamos que

$$S_{T-t_0}(x_0) \leq \hat{x}(T)^\top Q \hat{x}(T) + \int_{t_0}^T \|\hat{x}(t)\|_W^2 dt \leq D\|x_0\|^2,$$

Para alguma constante $D > 0$.

Portanto, deduzimos que $|x_0^\top E(t_0)x_0| \leq D\|x_0\|^2$, o que contradiz (3.29). \square

Observação 3.6. É claro pela expressão (3.26) para o custo mínimo que a matriz $E(0)$ é simétrica negativa. Pode-se melhorar este resultado se a matriz Q for além disso definida (ver lema a seguir).

Lema 3.7. Se a matriz Q é simétrica positiva definida, ou se para todo $t \in [0, T]$ a matriz $W(t)$ é simétrica definida positiva, então a matriz $E(0)$ é simétrica definida negativa.

Demonstração. Seja x_0 tal que $x_0^\top E(0)x_0$, vamos mostrar que $x_0 = 0$. Para isso consideramos o problema LQ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \\ \min & x(T)^\top Q x(T) + \int_0^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt \end{aligned}$$

para o qual, de acordo com o Teorema 3.5, o custo mínimo é $-x_0^\top E(0)x_0$. Consequentemente, como para todo t a matriz $U(t)$ é definida positiva, temos $u(t) = 0$ sobre $[0, T]$. Se, além disso, Q é definida positiva também temos $x(T) = 0$. Portanto, a trajetória $x(\cdot)$ é uma solução do problema de Cauchy $x' = Ax$, $x(T) = 0$, e por unicidade $x(\cdot)$ é identicamente nula. Em particular $x(0) = x_0 = 0$ o que completa a prova. No segundo caso, onde $W(t)$ é definida positiva, a conclusão é imediata. \square

3.4.1 Representação linear da equação de Riccati.

Em vez de resolver um sistema diferencial quadrático, podemos considerar o seguinte sistema diferencial linear com $2n$ equações.

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ (p'(t))^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BU^{-1}B^\top \\ W & -A^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t)^\top \end{pmatrix},$$

onde denotamos por $R(t) = e^{(T-t)\mathbb{A}}$ o resolvente associado a este sistema diferencial. Observe que podemos escrever

$$R(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) & R_2(t) \\ R_3(t) & R_4(t) \end{pmatrix},$$

onde cada bloco pertence a $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Por definição de resolvente, temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= R_1(t)x(T) + R_2(t)p(T)^\top, \\ p(t)^\top &= R_3(t)x(T) + R_4(t)p(T)^\top. \end{aligned}$$

Como sabemos que $p(T)^\top = -Qx(T)$, segue que

$$x(t) = (R_1(t) - R_2(t)Q)x(T) \text{ e } p(t)^\top = (R_3(t) - R_4(t)Q)x(T).$$

Como mostrado anteriormente, temos que $p(t)^\top = E(t)x(t)$. Assim, concluímos que

$$E(t) = (R_3(t) - R_4(t)Q)x(T)x(t)^{-1},$$

ou seja, $E(t) = (R_3(t) - R_4(t)Q)(R_1(t) - R_2(t)Q)^{-1}$.

Em conclusão, a solução da matriz $E(t)$ da equação de Riccati também é obtida a partir do resolvente do sistema linear de tamanho $2n$ acima definido. Esta expressão é interessante na prática, reduz a dificuldade em encontrar a função $E(t)$ resolvendo um problema não linear à de determinar o operador resolvente de uma matriz de tamanho $2n$.

3.4.2 Aplicação da Teoria L.Q.

O problema de regulador de estado (ou problema de rastreamento)

Considere o sistema de controle linear perturbado

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3.30)$$

e seja $\xi(t)$ é uma certa trajetória de $[0, T]$ em \mathbb{R}^n , partindo de um ponto ξ_0 (e que não é necessariamente uma solução do sistema (3.30)).

O objetivo é determinar um controle tal que a trajetória associada à solução de (3.30), siga o melhor possível a trajetória de referência $\xi(t)$.

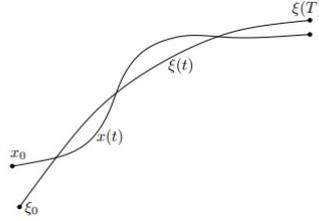


Figura 3.1: O problema de rastreamento.

Definindo em $[0, T]$

$$z(t) = x(t) - \xi(t),$$

o erro entre a trajetória factível e a desejada, vemos que

$$z'(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t) + r_1(t), \quad z(0) = z_0,$$

onde $z_0 = x_0 - \xi_0$ e $r_1(t) = A(t)\xi(t) - \xi'(t) + r(t)$. Nesse sentido, é razoável querermos minimizar o custo

$$C(u) = z(T)^\top Qz(T) + \int_0^T (\|z(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt.$$

Para "absorver" a perturbação r_1 , vamos aumentar o sistema em uma dimensão, definindo

$$z_1 = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} A & r_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Para que possamos minimizar o custo

$$\tilde{C}(u) = z_1(T)^\top Q_1 z_1(T) + \int_0^T (\|z_1(t)\|_{W_1}^2 + \|u(t)\|_U^2) dt, \quad (3.32)$$

para o sistema de controle

$$z_1' = A_1 z_1 + B_1 u,$$

iniciando do ponto $z_1(0)$. Notemos que $C(u) = \tilde{C}(u)$ para todo u e, portanto, é indiferente minimizarmos C ou \tilde{C} .

Como já estudado anteriormente, a teoria LQ prevê que o controle ideal existe, é

único e se escreve

$$u(t) = U(t)^{-1}B_1(t)^\top E_1(t)z_1(t), \quad (3.33)$$

onde $E_1(t)$ é solução da equação matricial de Riccati

$$E_1' = W_1 - A_1^\top E_1 - E_1 A_1 - E_1 B_1 U^{-1} B_1^\top E_1, \quad E_1(T) = -Q_1, \quad (3.34)$$

sendo E_1 uma matriz aumentada simétrica, se escrevendo na forma geral

$$E_1(t) = \begin{pmatrix} E(t) & h(t) \\ h(t)^\top & \alpha(t) \end{pmatrix}.$$

Substituindo na equação (3.34), podemos estabelecer as equações diferenciais de E, h, α :

$$\begin{aligned} E' &= W - A^\top E - EA - EBU^{-1}B^\top E, & E(T) &= -Q, \\ h' &= -A^\top h - Er_1 - EBU^{-1}B^\top h, & h(T) &= 0, \\ \alpha' &= -2r_1^\top h - h^\top BU^{-1}B^\top h, & \alpha(T) &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Resumimos o exposto na seguinte proposição:

Proposição 3.8. Seja ξ uma trajetória de \mathbb{R}^n em $[0, T]$. Considere o problema de rastreo para o sistema de controle

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0,$$

onde queremos minimizar o custo

$$C(u) = (x(T) - \xi(T))^\top Q(x(T) - \xi(T)) + \int_0^T (\|x(t) - \xi(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt. \quad (3.36)$$

Então há um único controle ótimo da forma:

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^\top E(t)(x(t) - \xi(t)) + U(t)^{-1}B(t)^\top h(t), \quad (3.37)$$

onde $E(t) \in M_n(\mathbb{R})$ é simétrica e $h(t) \in \mathbb{R}^n$ são soluções em $[0, T]$ de

$$\begin{aligned} E' &= W - A^\top E - EA - EBU^{-1}B^\top E, & E(T) &= -Q, \\ h' &= -A^\top h - E(A\xi - \dot{\xi} + r) - EBU^{-1}B^\top h, & h(T) &= 0. \end{aligned}$$

Além disso, o custo mínimo é então igual à

$$\begin{aligned} &-(x(0) - \xi(0))^\top E(0)(x(0) - \xi(0)) - 2h(0)^\top (x(0) - \xi(0)) \\ &- \int_0^T (2(A(t)\xi(t) - \dot{\xi}(t) + r(t))^\top h(t) + h(t)^\top B(t)U(t)^{-1}B(t)^\top h(t)) dt. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Demonstração. De (3.31) temos que $z_1(t)^\top Q_1 z_1(t) = z(t)^\top Q z(t) = (x(t) - \xi(t))^\top Q (x(t) - \xi(t))$. Portanto, substituindo em (3.32), chegamos em (3.36).

Por outro lado, uma vez que temos que o controle ótimo é escrito como na forma (3.33), temos novamente por (3.31) que

$$u(t) = U(t)^{-1} B(t)^\top E(t) (x(t) - \xi(t)) + U(t)^{-1} B(t)^\top h(t),$$

obtendo (3.37).

Além disso, por (3.26), temos que

$$S_T(z_1(0)) = -z_1(0)^\top E_1(0) z_1(0),$$

onde substituindo diretamente os valores de z_1 e de E_1 , chegamos em (3.38). \square

Observação 3.7. Observe que o controle ideal é bem escrito como um circuito fechado

$$u(t) = k(t) (x(t) - \xi(t)) + H(t),$$

onde $H(t) = U(t)^{-1} B(t)^\top h(t)$.

Observação 3.8. Se $\xi' = A\xi + r$, ou seja, a trajetória de referência é a solução do sistema (3.30) sem controle, então em (3.31) $r_1 = 0$ e, portanto, deduzimos que $h(t)$ e $\alpha(t)$ são identicamente nulas.

Vemos então que um problema de rastreamento permite as seguintes classificações:

- $\xi = 0$ e $r = 0$ problema LQ padrão;
- $r = 0$ problema de rastreamento da trajetória ξ ;
- se $\xi = 0$, problema de regulação com a perturbação r .

O problema de seguir uma saída (ou "rastreamento de saída")

Adicionamos ao problema anterior uma variável de saída:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x_0, \\ y(t) &= D(t)x(t). \end{aligned}$$

e dado um sinal de referência $\xi(t)$, buscamos um controle tal que, ao longo da trajetória associada, o $y(\cdot)$ observável esteja próximo de $\xi(\cdot)$. Observe que no tópico anterior resolvemos este problema para o caso $y(t) = x(t)$.

Colocando $z(t) = y(t) - \xi(t)$, estamos interessados em minimizar o custo

$$C(u) = z(T)^\top Q z(T) + \int_0^T (\|z(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt.$$

Vamos então definir

$$x_1 = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} D(T)^\top Q D(T) & -D(T)^\top Q \xi(T) \\ -\xi^\top(T) Q D(T) & \xi^\top(T) Q \xi(T) \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} C^\top W D & -D^\top W \xi \\ -\xi^\top W C & \xi^\top W \xi \end{pmatrix},$$

e A_1, B_1 como antes (com $r_1 = r$). Em seguida, procuramos um controle u , associado à solução da trajetória x_1 de $x_1' = A_1 x_1 + B_1 u$, minimizando o custo

$$C(u) = x_1(T)^\top Q_1 x_1(T) + \int_0^T (\|x_1(t)\|_{W_1}^2 + \|u(t)\|_U^2) dt.$$

Raciocinando como antes, chegamos ao seguinte resultado.

Proposição 3.9. Seja ξ uma trajetória de \mathbb{R}^p em $[0, T]$. Considere o problema de rastreamento de sinal ξ para o sistema de controle com saída

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x_0, \\ y(t) &= D(t)x(t), \end{aligned}$$

onde queremos minimizar o custo

$$C(u) = (y(T) - \xi(T))^\top Q (y(T) - \xi(T)) + \int_0^T (\|y(t) - \xi(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt.$$

Então, há um único controle ótimo, que é escrito

$$u(t) = U(t)^{-1} B(t)^\top E(t)x(t) + U(t)^{-1} B(t)^\top h(t),$$

onde $E(t) \in M_n(\mathbb{R})$ e $h(t) \in \mathbb{R}^p$ são soluções em $[0, T]$ de

$$\begin{aligned} E' &= D^\top W D - A^\top E - E A - E B U^{-1} B^\top E, & E(T) &= -D(T)^\top Q D(T), \\ h' &= -D^\top W \xi - A^\top h - E r - E B U^{-1} B^\top h, & h(T) &= D(T)^\top Q \xi(T). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Além disso, o custo mínimo é então igual a

$$-x(0)^\top E(0)x(0) - 2h(0)^\top x(0) - \alpha(0),$$

onde α é solução de

$$\alpha' = \xi^\top W \xi - 2r^\top h - h^\top B U^{-1} B^\top h, \quad \alpha(T) = -\xi(T)^\top Q \xi(T).$$

Observação 3.9. Outras variações deste problema podem ser encontradas em [27],

com o mesmo problema definido acima exceto com o problema de minimizar o funcional

$$C(u) = x(T)^\top Q x(T) + \int_0^T (\|y(t) - \xi(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt, \quad y(t) = D(t)x(t).$$

A única mudança está na matriz aumentada Q_1 que será da forma

$$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto, nas condições de E e h soluções das equações dada em (3.39) se tornam $E(T) = -Q$ e $h(T) = 0$.

3.4.3 Filtro Determinístico de Kalman

Este famoso problema é o seguinte: conhecendo um sinal de referência $\xi(t)$ em $[0, T]$, procuramos uma trajetória de solução em $[0, T]$ de

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

minimizando o custo

$$C(u) = x(0)^\top Q x(0) + \int_0^T (\|(D(t)x(t) - \xi(t))\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt.$$

Esta é uma variação dos problemas de rastreamento anteriores, a única diferença está na inclusão do estado inicial no custo e mais importante o fato de que a minimização deve ser realizada entre todas as trajetórias possíveis, não apenas entre aquelas que partem de um estado inicial fixo.

A motivação para estudar essa questão é a seguinte: considere o sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), & x(0) &= x_0, \\ y(t) &= D(t)x(t) + v(t), \end{aligned}$$

onde as funções $u(t)$ e $v(t)$ são pensadas como perturbações independentes e desconhecidas que afetam o sistema, sendo o estado inicial x_0 desconhecido. A função ξ representa uma observação de y no intervalo $[0, T]$ e deseja-se obter um valor estimado da trajetória do estado e em particular, do estado final $x(T)$, com base nesta observação. Além disso, deseja-se obter a estimativa "melhor possível", em que "melhor" significa aquela para a qual as perturbações u e v , bem como o estado inicial x_0 teriam sido os menores possíveis.

A mesma pergunta pode ser interpretada em termos estatísticos, sendo mais apro-

priadamente chamada de problema de filtragem de Kalman. Nessa versão u e v são processos de ruído branco independentes e x_0 é um vetor aleatório, todos assumidos como tendo distribuição gaussiana e média zero. Com Q , $W(t)$ e $U(t)$ sendo, respectivamente, os inversos das matrizes de covariância x_0 , $v(t)$, $u(t)$, o problema de minimização que propusemos é interpretado como o problema de estimar o estado final de variância mínima, sabendo a observação $\xi(t)$. A terminologia filtragem reflete o objetivo de filtrar o ruído a fim de recuperar o estado x , interpretado como o sinal de interesse, a partir do sinal ξ medido (sobre este assunto, veja por exemplo [2]). Além disso, as matrizes Q , W e U devem ser escolhidas de acordo com a importância do ruído, por exemplo, se for conhecido que o ruído de medição v em algum componente da saída é muito grande em comparação com o ruído u e a incerteza na condição inicial, então deve-se tender a atribuir menos valores a essas observações, ou seja, as entradas correspondentes de $W(t)$ devem ser consideradas pequenas.

O problema de filtragem é reduzido ao problema de rastreamento, portanto, é necessário primeiro reverter o tempo, de modo que o custo seja imposto como antes no estado final, e então minimizando todas as soluções possíveis para o problema de rastreamento, em todos os estados iniciais possíveis. Por outro lado, neste problema supõe-se que a matriz Q seja simétrica positiva definida.

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= x(T-t), \tilde{u}(t) = u(T-t), \tilde{A}(t) = -A(T-t), \tilde{B}(t) = -B(T-t), \\ \tilde{\xi}(t) &= \xi(T-t), \tilde{W}(t) = W(T-t), \tilde{U}(t) = U(T-t), \tilde{D}(t) = D(T-t),\end{aligned}$$

de modo que voltamos ao problema de determinar uma trajetória de solução de $\tilde{x}' = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u}$, minimizando o custo

$$\tilde{C}(\tilde{u}) = \tilde{x}(T)^\top Q \tilde{x}(T) + \int_0^T (\|\tilde{D}(t)\tilde{x}(t) - \tilde{\xi}(t)\|_{\tilde{W}}^2 + \|\tilde{u}(t)\|_{\tilde{U}}^2) dt.$$

Observe que, por construção, temos $\tilde{C}(\tilde{u}) = C(u)$.

Fixemos um dado inicial $\tilde{x}(0)$ e apliquemos, para este dado inicial, o mesmo raciocínio dos casos anteriores. Nós então obtemos

$$\tilde{u}(t) = \tilde{U}^{-1} \tilde{B}^\top \tilde{E} \tilde{x} + \tilde{U}^{-1} \tilde{B}^\top \tilde{h},$$

onde

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{E}} &= \tilde{D}^\top \tilde{W} \tilde{D} - \tilde{A}^\top \tilde{E} - \tilde{E} \tilde{A} - \tilde{E} \tilde{B} \tilde{U}^{-1} \tilde{B}^\top \tilde{E}, & \tilde{E}(T) &= -Q, \\ \dot{\tilde{h}} &= -\tilde{D}^\top \tilde{W} \tilde{\xi} - \tilde{A}^\top \tilde{h} - \tilde{E} \tilde{B} \tilde{U}^{-1} \tilde{B}^\top \tilde{h}, & \tilde{h}(T) &= 0, \\ \dot{\tilde{\alpha}} &= \tilde{\xi}^\top \tilde{W} \tilde{\xi} - \tilde{h}^\top \tilde{B} \tilde{U}^{-1} \tilde{B}^\top \tilde{h}, & \tilde{\alpha}(T) &= 0,\end{aligned}$$

e o custo mínimo para este dado inicial fixo $\tilde{x}(0)$ vale

$$-\tilde{x}(0)^\top \tilde{E}(0) \tilde{x}(0) - 2\tilde{x}(0)^\top \tilde{h}(0) - \tilde{\alpha}(0).$$

Devemos agora encontrar $\tilde{x}(0)$ de forma que esse custo seja mínimo. Então vamos definir

$$f(x) = -x^\top \tilde{E}(0)x - 2x^\top \tilde{h}(0) - \tilde{\alpha}(0).$$

Devemos, portanto, determinar um mínimo de f . Sendo a matriz Q definida positiva, o Lema 3.7 nos diz que a matriz $E(0)$ é definida negativa. Em particular, a função f é estritamente convexa e, portanto, admite um mínimo único. Nesse ponto, devemos ter $f'(x) = 0$, portanto $x = -\tilde{E}(0)^{-1}\tilde{h}(0)$.

Finalmente, voltando ao curso positivo do tempo, e definindo para todo $t \in [0, T]$

$$E(t) = -\tilde{E}(T-t), \quad h(t) = -\tilde{h}(T-t),$$

chegamos no seguinte resultado.

Proposição 3.10. Seja $\xi(\cdot)$ uma trajetória definida em $[0, T]$ com valores em \mathbb{R}^p . Consideramos o problema de determinar uma trajetória de solução em $[0, T]$ de

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

minimizando o custo

$$C(u) = x(0)^\top Qx(0) + \int_0^T (\|(D(t)x(t) - \xi(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt.$$

onde a matriz Q também é considerada positiva definida. Então, há uma trajetória de minimização única associada ao controle

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^\top E(t)x(t) + U(t)^{-1}B(t)^\top h(t),$$

e para a condição final

$$x(T) = -E(T)^{-1}h(T),$$

onde

$$\begin{aligned} E' &= D^\top W D - A^\top E - EA - EBU^{-1}B^\top E, & E(0) &= Q, \\ h' &= -D^\top W \xi - A^\top h - EBU^{-1}B^\top h, & h(0) &= 0, \end{aligned}$$

e o custo mínimo é então

$$-h(T)^\top E(T)^{-1}h(T) + \int_0^T (\xi(t)^\top W(t)\xi(t) - h(t)^\top B(t)U(t)^{-1}B(t)^\top h(t)) dt.$$

O estado final $x(T) = -E(T)^{-1}h(T)$ são os dados que nos interessam principalmente no problema do filtro de Kalman, que é um problema de estimação. A estimativa deste estado final pode ser simplificada como segue.

Seja $F(t) = E(t)^{-1}$. É fácil encontrar, uma vez que $F' = -FE'F$.

$$\dot{F} = BU^{-1}B^\top + AF + FA^\top - FD^\top WDF, \quad F(0) = Q^{-1}.$$

Além disso, se definirmos $z(t) = -F(t)h(t)$, descobrimos que

$$z' = (A - FD^\top WD)z + FD^\top W\xi, \quad z(0) = 0.$$

Finalmente chegamos ao seguinte resultado

Proposição 3.11. Sob as premissas da Proposição 3.10, o estado final $x(T)$ da solução ótima é igual a $z(T)$, onde

$$\begin{aligned} z' &= (A - FD^\top WD)z + FD^\top W\xi, & z(0) &= 0, \\ F' &= BU^{-1}B^\top + AF + FA^\top - FD^\top WDF, & F(0) &= Q^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, vemos que o estado final $x(T)$ para a solução ótima pode ser obtido resolvendo as equações z' e F' . Assim, $z(T)$ fornece um valor estimado desejado de $x(T)$.

Apêndice A

Resultados Básicos

A.1 Forma canônica de Jordan para matrizes sobre o corpo dos números reais

Este Lema é dado em [14][pg.97]

Lema A.1. Seja A uma matriz real $n \times n$. Existe uma matriz real não singular Q com a seguinte propriedade: A matriz J definida por $J = QAQ^{-1}$ é uma matriz diagonal da seguinte forma

$$QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{bmatrix},$$

onde as matrizes J_i são diagonais por blocos do tipo

$$J_{i,k} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

(bloco $k \times k$ correspondendo ao divisor elementar $(\lambda - \lambda_i)^k$), ou do tipo

$$\left[\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_k \\ 1 & \beta_k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & \gamma_k \\ 1 & \beta_k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & & \ddots & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & \gamma_k \\ 1 & \beta_k \end{pmatrix} \end{array} \right] \quad (\text{A.2})$$

(bloco $2l \times 2l$ correspondendo ao divisor elementar $(\lambda^2 - \beta_k \lambda - \gamma_k)^l$ com $\beta_k^2 + 4\gamma_k < 0$).

Para o nosso propósito devemos agrupar todos os blocos da forma A.1 com o mesmo valor de λ_i em um bloco da forma

$$B_i = \lambda_i I_i + F_i,$$

onde B_i é uma matriz $m_i \times m_i$, m_i é a multiplicidade do autovalor real λ_i , I_i é a matriz identidade de ordem $m_i \times m_i$ e F_i é uma matriz da seguinte forma

$$F_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

isto é, cujos únicos elementos não nulos possíveis valem 1 na diagonal superior. A matriz F_i é nilpotente (ou seja $F_i^j = 0$ para algum inteiro não negativo $j \leq m_i$).

Além disso, devemos agrupar todos os blocos da forma A.2 com o mesmo valor de β_{j_q} em um bloco da forma

$$C_j = \begin{bmatrix} Dj_1 & & & \\ & Dj_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Dj_i \end{bmatrix}$$

onde D_{j_q} tem a forma A.2 com todos os D_{j_q} tendo o mesmo valor β_j .

Referências Bibliográficas

- [1] AMMAR-KHODJA, Farid et al. Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems: a survey. *Mathematical Control and Related Fields*, 1 (3), 267-306., 2011.
- [2] ANDERSON, Brian DO; MOORE, John B. *Optimal filtering*. Courier Corporation, 2012.
- [3] BELLMAN Richard, I. Glicksberg and O.A. Gross, Some aspects of the mathematical theory of control processes, Rand Corporation, Santa Monica, Calif., Rep. No. R-313, 1958.
- [4] BORWEIN, Jonathan M. et al. *Convex functions: constructions, characterizations and counterexamples*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [5] BOYD, Stephen; BOYD, Stephen P.; VANDENBERGHE, Lieven. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [6] BRAMMER, Robert F. Controllability in linear autonomous systems with positive controllers. *SIAM Journal on Control*, v. 10, n. 2, p. 339-353, 1972.
- [7] BREZIS, Haim. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [8] COLONIUS, Fritz; KLIEMANN, Wolfgang. *The dynamics of control*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] CORON, Jean-Michel. *Control and nonlinearity*. American Mathematical Soc., 2007.
- [10] E. L. LIMA, *Curso de análise*. vol. 1, Projeto Euclides. Rio de Janeiro, 1999.
- [11] FERNÁNDEZ CARA, Enrique; ZUAZUA IRIONDO, Enrique. Control theory: History, mathematical achievements and perspectives. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, 26, 79-140., 2003.

- [12] HAUTUS, controllability and observability conditions of linear autonomous systems. 1969. p. 443-448.
- [13] HERMES, Henry et al. Functional analysis and time optimal control. 1969.
- [14] JACOBSON, Nathan. Lectures in Abstract Algebra: II. Linear Algebra. Springer Science & Business Media, 2013.
- [15] KALMAN, Rudolf Emil. Mathematical description of linear dynamical systems. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control, v. 1, n. 2, p. 152-192, 1963.
- [16] KALMAN, Rudolph E.; BUCY, Richard S. New results in linear filtering and prediction theory. 1961.
- [17] LEE, Ernest Bruce; MARKUS, Lawrence. Foundations of optimal control theory. Minnesota Univ Minneapolis Center For Control Sciences, 1967.
- [18] PONTRYAGIN, Lev Semenovich. Mathematical theory of optimal processes. CRC press, 1987.
- [19] OLIVE, Guillaume. Introduction to linear control theory. Lecture notes, Shandong University, 2017.
- [20] PANDOLFI, L. Linear control systems: Controllability with constrained controls. Journal of Optimization Theory and Applications, v. 19, n. 4, p. 577-585, 1976.
- [21] L.S, Pontryagin . Ordinary Differential Equations (LS Pontryagin). Editora: Addison- Wesley p. 298, 1962.
- [22] LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. Algebra Linear: Coleção Schaum. Bookman Editora, 2009.
- [23] R. CONTI, Teoria del Controllo e del Controllo Ottimo, UTET, Torino, Italy, 1974.
- [24] SAPERSTONE, Stephen H. Global controllability of linear systems with positive controls. SIAM Journal on Control, v. 11, n. 3, p. 417-423, 1973.
- [25] SAPERSTONE, Stephen H.; YORKE, James A. Controllability of linear oscillatory systems using positive controls. SIAM Journal on Control, v. 9, n. 2, p. 253-262, 1971.

- [26] SCHMITENDORF, W. E.; BARMISH, B. R. Null controllability of linear systems with constrained controls. *SIAM Journal on control and optimization*, v. 18, n. 4, p. 327-345, 1980.
- [27] SONTAG, Eduardo D. *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [28] TRÉLAT, Emmanuel. *Contrôle optimal: théorie & applications*. Paris: Vuibert, 2005.
- [29] ZABCZYK, Jerzy. *Mathematical control theory- an introduction*. Springer International Publishing, 2020.