Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

MEDIDA PROBABILÍSTICA E DENSIDADE DE PROBABILIDADE EM SISTEMAS CAÓTICOS

Edivagner Batista Ferreira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante

João Pessoa
Julho de 2022

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F383m Ferreira, Edivagner Batista.
Medida probabilística e densidade de probabilidade em sistemas caóticos / Edivagner Batista Ferreira. - João Pessoa, 2022.
44 f. : il.

Orientação: Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/Informática.

1. Probabilidade. 2. Medida probabilística. 3. Caos determinístico. 4. Densidade de probabilidade. 5. Sistemas dinâmicos. I. Cavalcante, Hugo Leonardo Davi de Souza. II. Título.

UFPB/BC CDU 519.2(043)

Elaborado por ANNA REGINA DA SILVA RIBEIRO - CRB-15/24

MEDIDA PROBABILÍSTICA E DENSIDADE DE PROBABILIDADE EM SISTEMAS CAÓTICOS

Edivagner Batista Ferreira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL (PPGMMC) DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.

Examinada por:

Hugo L.D.S. Cavalcante

Prof. Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante, D.Sc.

Tatiane Souza

Prof. Tatiene Correia de Souza, D.Sc.

Gilson Francisco de Oliveira Junior

Prof. Gilson Francisco de Oliveira Júnior, D.Sc.

Roberto Sant'Anna

Prof. Roberto Sant'Anna Sacramento, D.Sc.

JOÃO PESSOA, PB – BRASIL
JULHO DE 2022

A minha família, por estar
sempre me apoiando.

Agradecimentos

Aos meus pais, Edival e Francieuda, por estarem sempre me apoiando e me incentivando ao longo de toda a minha vida e que nos momentos mais difíceis sempre me dão força para continuar e enfrentar as adversidades que aparecem;

Aos meus irmãos, Edionaria e Edjalmo, por serem os melhores amigos que eu poderia ter, e também por serem os maiores incentivadores desse desafio;

Ao meu orientador, professor Hugo, que sempre esteve disponível para sanar dúvidas e contribuir com ideias ao longo do processo;

Aos colegas do mestrado, que formaram um vínculo de amizade e companheirismo que levarei para a vida toda.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MEDIDA PROBABILÍSTICA E DENSIDADE DE PROBABILIDADE EM SISTEMAS CAÓTICOS

Edivagner Batista Ferreira

Julho/2022

Orientador: Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

O estudo de sistemas dinâmicos que apresentam comportamento caótico fornece aplicações em várias áreas do conhecimento tais como previsões em engenharia, física, biologia, entre outros. Logo estudar tais sistemas é importante não só do ponto de vista intríseco da busca por entender fenômenos. Dentre as várias propriedades que esses sistemas exibem uma em particular é a característica de preservar alguma medida sob a ação da dinâmica, como a densidade de pontos ao longo do domínio da transformacão. Este trabalho tem como objetivo verificar a existência dessa medida através de simulações numéricas. Utilizaremos o Operador de Frobenius Perron para verificar que essa densidade é invariante em alguns mapas, que são os sistemas em tempo discreto e que fornecem a maneira mais simples de estudar o comportamento caótico, como o mapa logístico, deslocamentos de Bernoulli e o mapa da tenda. A metodologia utilizada consiste na construção de histogramas para captar a distribuição de pontos gerados pelo mapa e comparar com os resultados teóricos presentes na literatura.

Palavras-chave: Medida probabilística. Caos determinístico. Densidade de Probabilidade. Sistemas Dinâmicos.

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

PROBABILISTIC MEASURE AND PROBABILITY DENSITY IN CHAOTIC SYSTEMS

Edivagner Batista Ferreira

July/2022

Advisor: Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante

Program: Computational Mathematical Modelling

The study of dynamical systems that exhibit chaotic behavior provides applications in several areas of knowledge such as predictions in engineering, physics, biology, among others. Therefore, studying such systems is important not only from the intrinsic point of view of the search to understand phenomena. Among the various properties that these systems exhibit, one in particular is the characteristic of preserving some measure under the action of dynamics, such as the density of points along the transformation domain. This work aims to verify the existence of this measure through numerical simulations. We will use the Frobenius Perron Operator to verify that this density is invariant in some maps, which are discrete-time systems and which provide the simplest way to study chaotic behavior, such as the logistic map, Bernoulli shift and the tent map. The methodology used will be the construction of histograms to capture the distribution of points generated by the map and compare with the theoretical results present in the literature.
Keywords: Probabilistic measure. Deterministic chaos. Probability density. Dynamical Systems.

Sumário

Lista de Figuras **ix**

1 Introdução **1**

2 Conceitos Gerais **3**

2.1 Sistemas Dinâmicos . . . 3

2.1.1 Espaço de fase . . . 4

2.2 Estabilidade . . . 5

2.3 Caos . . . 6

2.3.1 Atrator . . . 8

2.3.2 Expoente de Lyapunov . . . 8

2.4 Mapas . . . 10

2.4.1 Mapa Logístico . . . 10

2.4.2 Mapa de Tenda . . . 12

2.4.3 Deslocamentos de Bernoulli . . . 13

2.5 Medida Invariante . . . 14

2.5.1 Distribuição uniforme . . . 15

3 Metodologia **17**

3.1 Densidade Invariante Natural . . . 17

3.2 Operador Frobenius Perron . . . 19

4 Resultados e Discussões **21**

4.1 Experimentos numéricos . . . 21

4.1.1 Mapa logístico . . . 21

4.1.2 Mapa de Tenda e Deslocamentos de Bernoulli . . . 23

5 Conclusões **27**

Referências Bibliográficas **28**

A Implementações em Python **30**

Lista de Figuras

2.1 Pêndulo simples 4
2.2 Trajetória do sistema do balanço do pêndulo para uma condicão inicial 5
2.3 Estabilidade 6
2.4 Série temporal do sistema de Lorenz 7
2.5 Atrator de Lorenz 9
2.6 Divergência de trajetórias próximas 9
2.7 mapa logístico com $r = 4$ 11
2.8 Diagrama de bifurcação 11
2.9 Mapa de Tenda 12
2.10 Segunda e terceira interação do mapa de tenda 13
2.11 Mapa 2x mod 1 14
2.12 Distribuição Uniforme 16

3.1 Derivacão da equação de Frobenius Perron 20

4.1 Densidade Invariante $\rho(x)$ para o mapa logístico com 100 iteracões . . 22
4.2 Densidade Invariante $\rho(x)$ para o mapa logístico com 1000 iteracões . 22
4.3 Densidade Invariante $\rho(x)$ para o mapa logístico com 100000 iteracões 23
4.4 Densidade Invariante $\rho(x)$ para o mapa logístico em escala logarítmica 23
4.5 Solução do mapa de Tenda com números em ponto flutuante 24
4.6 Histograma com a densidade do Mapa de Tenda 25
4.7 Histograma com a densidade do Mapa de Tenda em escala logarítmica 25
4.8 Histograma com a densidade do Mapa Deslocamentos de Bernoulli . . 25
4.9 Histograma com a densidade do Mapa Deslocamentos de Bernoulli em escala logarítmica 26

Capítulo 1

Introdução

O estudo dos sistemas dinâmicos, como conhecemos hoje, remonta ao final do século XIX com os trabalhos de Henri Poincaré. Todavia, modelar sistemas onde o estado muda conforme o passar do tempo já vem sendo estudado desde muito tempo. Um exemplo é a dinâmica do movimento desenvolvida por Newton no século XVII.

A teoria moderna segue o método qualitativo, que consiste em investigar o comportamento do sistema como um todo a longo prazo, se vai permancer estável ou se vai sofrer mudanças bruscas, como birfurcações, ou se vai permanecer em ciclos de repetição. Ou ainda, se vai apresentar caos, onde alguns sistemas determinísticos exibem comportamento aperiódico que depende de forma sensível das condições iniciais, impossibilitando previsões a longo prazo.

Os sistemas dinâmicos podem ser contínuos ou discretos, a depender se são descritos por equações diferenciais ou mapas, este último corresponde ao caso mais simples para estudar o comportamento caótico. Algumas propriedades podem ser observadas em sistemas com caos determinístico, como a presença de atratores, o expoente de Lyapunov e a densidade de pontos sob a ação da transformação, por exemplo. Uma maneira de fazer tal estudo é ao invés de escolher um único ponto como condição inicial escolher uma densidade de pontos e observar como ela se comportará com a dinâmica.

O estudo de médias em sistemas dinâmicos é importante porque, como diz Jafarizadeh et al. (2001), serve para fornecer dados estatísticos do comportamento de longo prazo das órbitas para praticamente qualquer condicão inicial que esteja na bacia de atracão.

Se o sistema, mesmo caótico, não varia sua densidade, dizemos que ele preserva uma medida, que possui uma densidade invariante. Segundo GWIRTZ (2017):

> Uma densidade invariante para um mapa é aquela para a qual a densidade, sob a ação do mapa, permanece inalterada. Isto é, dada uma densidade de probabilidade para a localização de uma partícula no espaço de estados no tempo n, dizemos que a densidade é invariante se for também a densidade de probabilidade para a localização da partícula no tempo $n+1$. Tais densidades fornecem uma descrição do comportamento estatístico de longo prazo de um sistema e, portanto, são de particular interesse quando a dinâmica subjacente é caótica.
> (Fonte: GWIRTZ (2017), p. 1, tradução nossa.)

Este trabalho visa apresentar uma revisão das derivações teóricas da presença de densidade invariante em casos simples, como no mapa logístico, o mapa de tenda e o deslocamentos de Bernoulli e fazer comparações com experimentos numéricos, a fim de verificar a veracidade ou discrepâncias em tais resultados.

Para efeito de organização, esta dissertação está distribuída em 5 capítulos. No capítulo 1, apresentamos uma pequena introducão, no capítulo 2, fazemos uma revisão bibliográfica sobre alguns dos conceitos que compõem o estudo de sistemas dinâmicos, enfatizando os sistemas de tempo discreto. No capítulo 3, apresentamos os métodos que propomos aplicar para a recuperação da dinâmica e previsão de sistemas dinâmicos. No capítulo 4 apresentaremos e discutimos os testes e resultados da metodologia aplicada aos mapas logístico, de tenda e deslocamentos de Bernoulli. Para isso, utilizamos a linguagem de programacão Python para realizar os experimentos numéricos. Por fim, no capítulo 5, apresentamos uma conclusão sobre todos os resultados obtidos nesta pesquisa.

Capítulo 2

Conceitos Gerais

Neste capítulo apresentamos definições e teoremas necessários ao entendimento do trabalho.

2.1 Sistemas Dinâmicos

Sistemas Dinâmicos são modelos matemáticos utilizados para representar fenômenos que evoluem com o tempo. São utilizadas equações diferenciais de primeira ordem da forma:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{dx^{(1)}}{dt} = F_1(x^1, x^2, ..., x^N), \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} = F_2(x^1, x^2, ..., x^N), \\ \vdots \\ \frac{dx^{(N)}}{dt} = F_N(x^1, x^2, ..., x^N) \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

Isso geralmente pode ser escrito na forma vetorial como:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = F[\mathbf{x}(t)], \tag{2.2}$$

onde $\mathbf{x}$ é um vetor N dimensional. Dada uma condição inicial, podemos determinar o estado futuro do sistema e assim, fazer previsões. Essas equações são autônomas no sentido de que a variável tempo não aparece de forma explícita nas equações. Por mais que a palavra sistema evoque um conjunto de equações, isso não é necessário para definir dinâmica, podemos ter um sistema com uma única equacão, ou seja, com uma dimensão, e ainda assim descrever uma dinâmica com a variação do tempo. STROGATZ (2018)

Exemplo

A equação que governa o balanço de um pêndulo simples, como o esquematizado na figura 2.1:

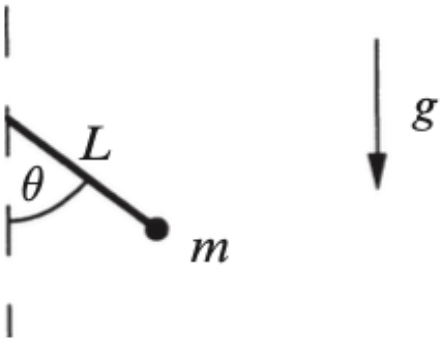
$$\ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0 \tag{2.3}$$

onde x representa o ângulo do pêndulo com a vertical, g é a aceleracão da gravidade e L é o comprimento do pêndulo, pode ser escrita como um sistema não linear, sendo que para simplificar a notação de derivada temporal utilizamos $\dot{x}$ no lugar de $\frac{dx}{dt}$:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -\tfrac{g}{L} \sin x_1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

.

Figura 2.1: Pêndulo simples



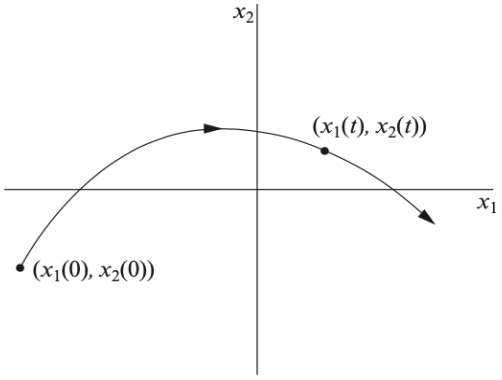
Fonte: Strogatz, 2018

2.1.1 Espaço de fase

É o espaço de domínio das soluções das equações que regem o sistema dinâmico. São também chamados de espaço de estados ou posições possíveis do sistema dinâmico, onde ficam as trajetórias que representam a evolução temporal do sistema, de acordo com algumas condições iniciais. É usado para compreender a evolução do sistema, visto que suas soluções podem ser difíceis de representar, em se tratando de sistemas não lineares. Logo as soluções numéricas obtidas através de simulações computacionais são representadas no espaço de fase. Na figura 2.2 vemos um exemplo simples para a trajetória do pêndulo.

De modo geral, escolhemos condições iniciais $x(0)$ no espaço de fase, e geramos trajetórias $x(t)$, de modo que o conjunto dos pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ representem um possível comportamento do sistema, dada aquela condicão inicial.

Figura 2.2: Trajetória do sistema do balanço do pêndulo para uma condicão inicial



Fonte: Strogatz, 2018

2.2 Estabilidade

Em um sistema dinâmico pode haver pontos estacionários ou de equilíbrio, solução que se mantém constante no tempo. Dado o sistema 2.1, um ponto $x^* \in \mathbb{R}^m$ é chamado de ponto fixo se

$$F(x^*) = 0 \tag{2.5}$$

Logo, se uma trajetória do sistema converge para esse ponto, permanecerá estacionária. Da mesma forma, se a condição inicial do sistema for um ponto fixo então o sistema permanecerá nesse ponto durante toda a evolução temporal do sistema.

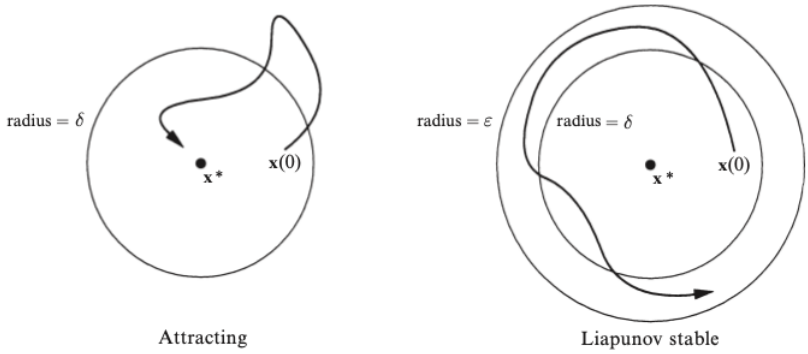
A estabilidade dos pontos fixos está associada a sua capacidade de resistir a pequenas pertubações. Este conceito é fundamental no estudo dos sistemas dinâmicos e está relacionado com a capacidade de resistência do sistema a pertubações, podendo ser *estáveis*, se a pertubação não for suficiente para afetar significamente uma dada solução, ou *instáveis*, caso contrário. Segundo STROGATZ (2018) um ponto fixo x^* é atrativo se existe um $\delta > 0$ tal que $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$ sempre que $|x(0) - x^*| < \delta$. Desse modo, as trajetórias que iniciam dentro de um raio de distância δ de x^* se aproximam de x^* em algum tempo eventual e se mantém próximas para todo o tempo positivo. Esse conjunto de condições iniciais que tendem para um mesmo ponto atrativo formam o que se chama de *bacia de atração*.

Dizemos que x^* é Lyapunov estável ou neutramente estável se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x(0) - x^*| < \delta$, então $|x(t) - x^*| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$. Desse modo, trajetórias que se iniciam dentro de uma raio de distância δ de x^* nunca se afastam mais do que um raio de distância ϵ de x^* para todo tempo positivo, isto é, permanecem confinadas.

Dizemos que x^* é estável se é atrativo e Lyapunov estável, fato ilustrado na figura 2.3 e que x^* é instável se nem é atrativo e nem é Liapunov estável.

É importante conhecer a estabilidade de um sistema porque quando estivermos

Figura 2.3: Estabilidade



Fonte: Strogatz, 2018

analisando sua dinâmica não queremos que o sistema fique estacionado em pontos fixos, o que não revelaria suas características e propriedades de comportamento a longo prazo.

2.3 Caos

Pode ser definido como um comportamento aparentemente estocástico, isto é, comportamento imprevisível, que certos sistemas determinísticos exibem a longo prazo, principalmente os que são não lineares, pois para esses, soluções exatas, em geral, não existem analíticamente, mas o comportamento futuro a pequenos tempos, normalmente, pode ser obtido por solução numérica (computacional) das equações de evolução.

Seu estudo remonta aos trabalhos do matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) e foi motivado pelo problema dos três corpos, que consistia em entender e prever a órbita de três planetas que se atraem mutuamente e são atraídos pelo sol, ao longo do tempo. A busca para compreender se esse sistema era estável a longo prazo levou ao desenvolvimento da área. Poincaré mostrou que mudanças sutis nas posições iniciais dos corpos irão levar a mudanças radicais no seu estado final, e como não havia maneiras de medir com precisão essas pertubacões, visto que o desemvolvimento dos computadores só aconteceria mais tarde, não seria posssível prever sua estabilidade.

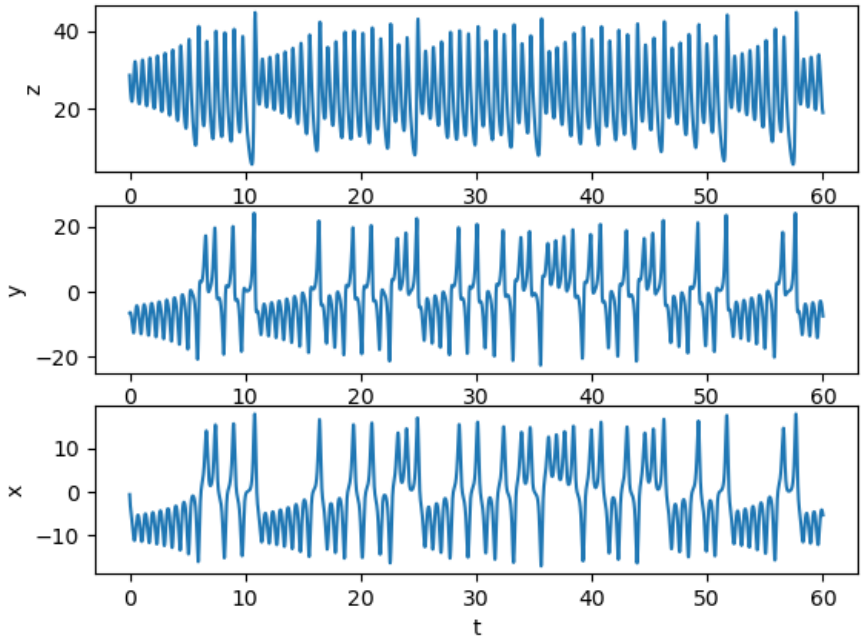
Nos anos 1960 o matemático e meteorologista Edward Lorenz estudando sistemas climáticos chegou a um sistema determinístico simplificado que modelava convecções de ar na atmosfera e que revelou ter comportamentos dinâmicos inesperados LORENZ (1963). O sistema é descrito por três equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - zx \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde $\sigma, r, b > 0$ são parâmetros. Estudando suas soluções a partir de condições iniciais específicas, Lorenz percebeu que as trajetórias ficam contidas numa região atratora do espaço gerando um objeto com dimenção fractal, ver figura 2.5. Os valores dos parâmetros que levam a essa solução são $\sigma = 10, r = 28$ e $b = \frac{8}{3}$.

Observando as soluções temporais obtidas através de simulações numéricas, percebe-se uma dinâmica errática, com trajetórias aperiódicas, isto é, que não se estabelecem em pontos fixos, órbitas periódicas, ou órbitas quasiperiódicas quando $t \to \infty$, como podemos ver na figura 2.4.

Figura 2.4: Série temporal do sistema de Lorenz



Fonte: Elaborada pelo autor

Segundo STROGATZ (2018) uma das definições aceitas para o caos e que serve para o que acontece com o sistema de Lorenz é o seguinte:

> Caos é um comportamento aperiódico de longo prazo em um sistema determinístico que exibe dependência sensível a condições iniciais.
> 1. 'Aperiódico de longo prazo' significa que existem trajetórias que não se fixam em pontos fixos, órbitas periódicas ou órbitas quase-periódicas quando $t \to \infty$. Por razões práticas, podemos ter certeza que essas trajetórias não são raras. De certa forma, podemos dizer que há um conjunto aberto de condições inicias que levam a trajetórias aperiódicas, ou talvez, dada uma condição inicial aleatória, obtenha trajetórias com probabilidade diferente de zero.
> 2. 'Determinístico' significa que os sistemas não são aleatórios ou tenham entradas ruidosas. O comportamento irregular surge pela não linearidade do sistema, mas não pelo ruido.
> 3. 'Dependência sensível a condições iniciais' significa que trajetórias bem próximas se afastam rapidamente a uma taxa exponencial, isto é, o sistema possui um expoente de Liapunov positivo.
> (Fonte: STROGATZ, p. 331, tradução nossa.)

2.3.1 Atrator

De acordo com STROGATZ (2018) um atrator pode ser definido como um conjunto para o qual todas as trajetórias suficientemente próximas convergem. De forma mais precisa seria uma conjunto A com as seguintes propriedades:

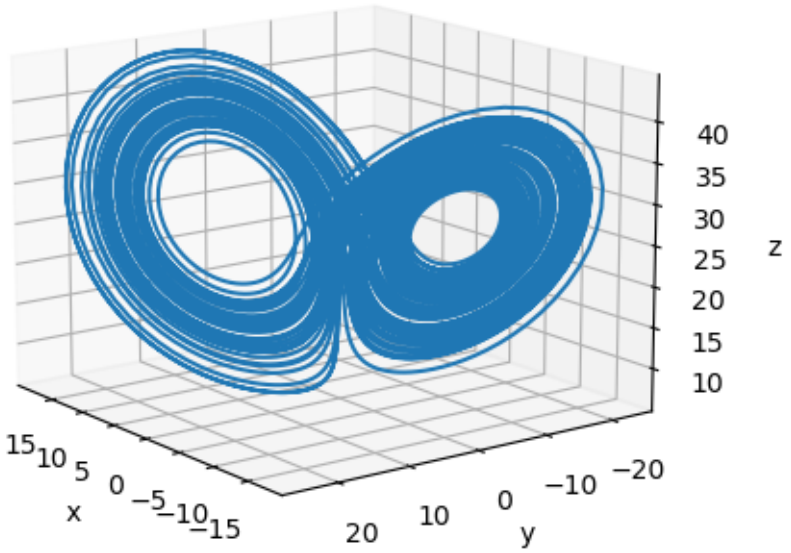
> 1. A é um conjunto *invariante*. Qualquer trajetória $X(t)$ que começa em A, permanece em A todo o tempo.
> 2. A atrai um conjunto aberto de condições iniciais: existe um conjunto aberto U contendo A tal que, se $X(0) \in U$, então a distância de $X(t)$ para A tende a zero quando $t \to \infty$. Isto significa que A atrai todas as trajetórias que começam suficientemente próximas a ele. O maior conjunto U é chamada de *bacia de atração* de A.
> 3. A é mínimo. Não há subconjunto próprio em A que satisfaça as condições 1 e 2.

As equacões de Lorenz geram um Atrator estranho, chamado assim por exibir dependência sensível as condições iniciais e por apresentar uma estrutura fractal. Na figura 2.5 vemos o atrator do sistema de Lorenz obtido através de simulações numéricas.

2.3.2 Expoente de Lyapunov

Ao estudarmos as trajetórias de um sistema dinâmico não-linear, desejamos saber como estas se comportam ao longo da ação da dinâmica. Se o sistema apresenta dependência sensível das condições inicias então trajetórias que começam muito próximas tendem a se afastar entre si rapidamente. Suponha $\mathbf{x(t)}$ um ponto de atração no tempo t, e considere um ponto próximo, por exemplo, $\mathbf{x(t)} + \delta(t)$, onde δ representa uma pequena variação da distância entre os pontos. Assim, vejamos como se dá a variação de $\delta(t)$ com a ação da dinâmica. Assume-se que, o raio $\delta(t)$

Figura 2.5: Atrator de Lorenz



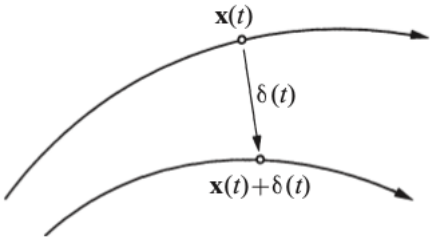
Fonte: Elaborada pelo autor

tenha variado exponencialmente ao longo do tempo, de maneira que a relação entre $\delta(0)$ e o valor correspondente no instante t, dado por $\delta(t)$, seja:

$$\| \delta(t) \| \quad \sim \quad \| \delta(0) \| e^{\lambda t} \tag{2.7}$$

onde λ é o *expoente de Lyapunov*. Na figura 2.6 temos a ilustração da divergência das trajetórias.

Figura 2.6: Divergência de trajetórias próximas



Fonte: Strogatz, 2015

Segundo STROGATZ (2018), na verdade, existem n expoentes de Liapunov

diferentes para um sistema n-dimensional, que podem ser definidos como a seguir. Considere a evolução de uma esfera infinitesimal de condições iniciais perturbadas. Durante sua evolução, a esfera será distorcida em um elipsoide infinitesimal. Seja $\delta_k(t),\ k = 1, \ldots, n$, tal qual denota o comprimento do k-ésimo eixo principal do elipsoide. Então, $\delta_k(t) \sim \delta_k(0)e_{\lambda_k t}$, onde os λ_k são os expoentes de Liapunov. Para t grande, o diâmetro do elipsoide é controlado pelo maior λ_k positivo. Assim, nosso λ é na verdade, o maior expoente de Liapunov. Além disso, λ depende (levemente) de qual trajetória estudamos. Devemos calcular a média de muitos pontos diferentes na mesma trajetória para obter o verdadeiro valor de λ_k.

2.4 Mapas

Mapas são exemplos de sistemas dinâmicos com tempo discreto em vez de contínuo e podem ser escritos, segundo Melo e Strien (2012), na forma vetorial:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n) \tag{2.8}$$

com $M : I \to I$, onde I é um intervalo, geralmente $[0, 1]$ ou o círculo e $\mathbf{x}_n$ é N dimensional, $\mathbf{x}_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, ..., x_n^{(n)})$. Se conhecermos o estado $\mathbf{x}_0$ podemos obter o estado no tempo $\mathbf{x}_1$ aplicando $\mathbf{x}_1 = \mathbf{M}(\mathbf{x}_0)$. Depois de determinar $\mathbf{x}_1$, fazemos $\mathbf{x}_2 = \mathbf{M}(\mathbf{x}_1)$ e assim sucessivamente, gerando com isso uma órbita.

Se considerarmos o espaço unidimensional dos números reais, podemos lidar com mapas mais simples e que ainda assim são capazes de exibir comportamento caótico. Como exemplos temos o mapa logístico, que foi o primeiro sistema discreto onde se mostrou a existência de caos determinístico, CAVALCANTE (2003), o mapa da tenda, Yoshida, Mori e Shigematsu (1983), e o deslocamento de Bernoulli, Schuster e Just (2006), entre outros.

2.4.1 Mapa Logístico

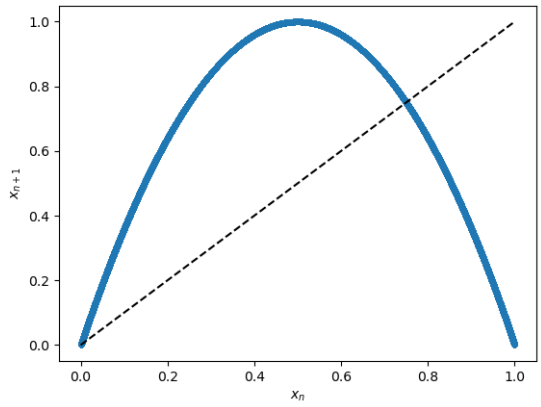
O mapa logístico, ver figura 2.7, é um modelo matemático usado para descrever variações nas populacões de seres vivos, especialmente insetos. Formulado pelo biólogo Robert May em 1976 e pode ser descrito pela seguinte equação:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \tag{2.9}$$

Onde r é um parâmetro que descreve a taxa de crescimento da população. Supondo condições constantes de clima, predadores, etc. a população no ano $n + 1$ pode ser determinada unicamente pela população no ano n.

Analisando a dinâmica do mapa $M(x)$, ver figura 2.7, vemos que o máximo ocorre

Figura 2.7: mapa logístico com $r = 4$



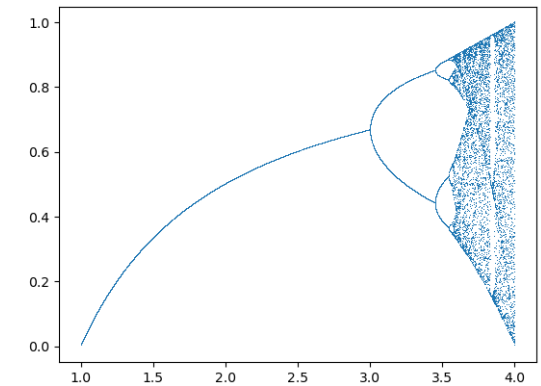
Fonte: Elaborada pelo autor.

quando $x = \frac{1}{2}$ e $M(\frac{1}{2}) = \frac{r}{4}$. Portanto, para $0 \leq r \leq 4$, se x_n está em $[0, 1]$ então x_{n+1} também está. Olhando para a dinâmica restrita a $[0, 1]$, o mapa logístico tem dois pontos fixos, dados pela solucão de $x = rx(1 - x)$, a saber, $x = 0$ e $x = 1 - \frac{1}{r}$. Se $r > 1$, então $M'(0) > 1$ e o ponto fixo $x = 0$ é instável. Já $M'(1 - \frac{1}{r}) = 2 - r$ será estável se $(|2 - r| < 1)$, ou seja, na faixa $1 < r < 3$, ou seja, $[0, 1]$ funciona como uma bacia de atracão para $x = 1 - \frac{1}{r}$. Bacia de atração é o conjunto de condições iniciais que convergem para o ponto fixo ou atrator do sistema.

Analisando a dinâmica usando o valor de $r > 3$. Começa a aparecer ocilações periódicas, primeiro com período 2, depois com período 4, 8, 16 e assim até um ponto de acumulação onde começa a ocorrer caos no sentido de não ter órbitas periódicas, esse ponto se dá para $r = r_\infty \approx 3.57$. Dentro da faixa do caos, existem zonas onde o sistema volta a ter comportamento periódico.

Para $r > r_\infty$, como mostra o diagrama de bifurcação na figura 2.8, aparecem janelas periódicas no meio da nuvem de caos.

Figura 2.8: Diagrama de bifurcação



Fonte: Elaborada pelo autor

2.4.2 Mapa de Tenda

Outro mapa simples é o Mapa de Tenda definido por:

$$x_{n+1} = 1 - 2\left|x_n - \frac{1}{2}\right| \tag{2.10}$$

que possui esse nome devido a sua representação gráfica, (ver figura 2.9). Ele também pode ser definido por partes como sendo:

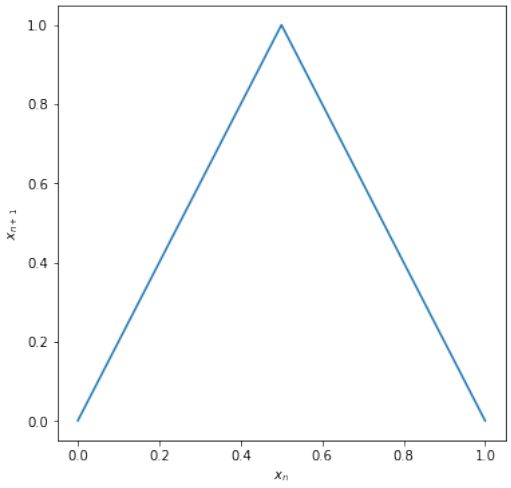
$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & \text{para } x_n < \frac{1}{2} \\ 2(1 - x_n), & \text{para } x_n > \frac{1}{2} \end{cases}$$

o mapa pode ser escrito de uma forma mais geral, utilizando um parâmetro r.

$$x_{n+1} = \begin{cases} rx_n, & \text{para } x_n < \frac{1}{2} \\ r(1 - x_n), & \text{para } x_n > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.11}$$

Mas a escolha de 2 como parâmetro faz com que a dinâmica fique confinada no intervalo $[0, 1]$. Para valores de $x_n < \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = 2x_n$, logo, condicões iniciais negativas permanecem negativas sob ação da dinâmica e vai para menos infinito dobrando a distância a cada iteração. Se $x_n > \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = 2(1-x_n)$. Logo, se $x_0 > 1$, então $x_1 < 0$ e os pontos subsequentes se moverão para menos infinito. Para x_n no intervalo $[0, 1]$, temos que $0 \leq x_{n+1} = 1-2\left|x_n - \frac{1}{2}\right| \leq 1$ e nas iteracões subsequentes, permanecerão confinadas ao intervalo $[0, 1]$.

Figura 2.9: Mapa de Tenda

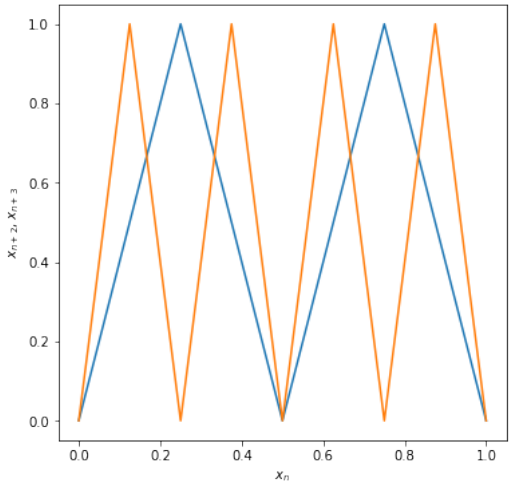


Fonte: Elaborada pelo autor

A dinâmica no mapa de tenda confinada ao intervalo $[0, 1]$ funciona da seguinte forma: no primeiro passo o intervalo é esticado de forma uniforme até medir duas vezes seu tamanho original. No segundo passo, o intervalo esticado é dobrado ao meio, de modo que o segmento de linha dobrado está agora contido no intervalo

original. Na figura 2.10 vemos o resultado depois da segunda e terceira iteração, nas cores azul e laranja, respectivamente.

Figura 2.10: Segunda e terceira interação do mapa de tenda



Fonte: Elaborada pelo autor

2.4.3 Deslocamentos de Bernoulli

Outro mapa interessante é o $2x$ mod 1, ver figura 2.11, definido por:

$$x_{n+1} = 2x_n \quad mod \quad 1 \tag{2.12}$$

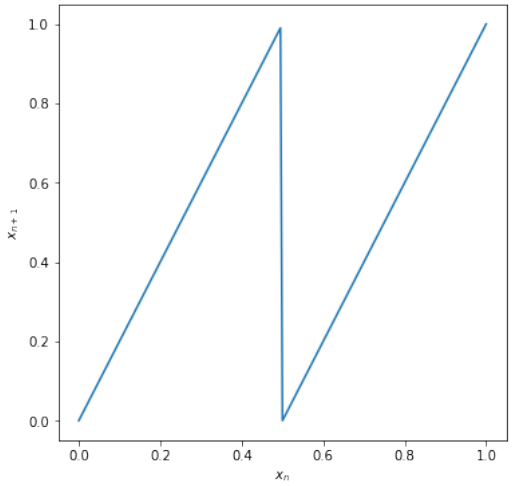
que pode ser comparado com a dinâmica em um círculo, devido ao mod 1 ou módulo 1. Onde x representaria a variável ângulo que vai de 0 a 1 em um círculo unitário, em um processo de estica e dobra semelhante ao mapa de tenda. Outra forma de ver a dinâmica é através da formação da sequência. Multiplicamos x_0 por 2, onde $x_0 \in [0, 1]$, se o resultado for maior do que 1, é subtraido uma unidade, de modo que x_1 ficará confinado no intervalo $[0, 1]$. A figura mostra o mapa com uma iteração.

O nome Deslocamento de Bernoulli segue do fato de se escrever a condição inicial em representacão decimal binária

$$x_0 = 0.a_1a_2a_3\cdots \equiv \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}a_j \tag{2.13}$$

onde cada dígito a_j é representado por 0 ou 1. Para $x_0 < \frac{1}{2}$, temos $a_1 = 0$, e $x_0 > \frac{1}{2}$ implica $a_1 = 1$. Então, a ação do mapa na representacão binária é deletar o primeiro dígito e deslocar a sequência restante para a esquerda,

Figura 2.11: Mapa 2x mod 1



Fonte: Elaborada pelo autor

$$x_1 = 0.a_2a_3a_4\ldots$$
$$x_2 = 0.a_3a_4a_5\ldots$$

e assim sucessivamente. Assim, pontos que estão distantes do lado direito na representação decimal binária, e que portanto possuem pouca influência no valor inicial de x, se tornarão eventualmente o primeiro dígito e terão mais relevância. Logo, uma pequena mudança na condicão inicial, como trocando o dígito a_{35} de 0 para 1, ira provocar, no tempo $n = 34$ uma mudança significativa em x_n.

2.5 Medida Invariante

O conceito de medida pode ser definido de maneira precisa utilizando a teoria da Medida, ramo da matemática desenvolvido por matemáticos como Émile Borel, Henri Lebesgue, entre outros, e versa sobre associar uma medida a subconjuntos de um dado espaço, bem como construir uma teoria de integração precisa para funções definidas neste espaço.

No escopo deste trabalho, a *medida probabilística*, μ, de um subconjunto do espaço de fase X é definida como a fração de tempo que as trajetórias do sistema passam nesse subconjunto com respeito ao tempo total passado no restante do espaço de fase disponível. Ver CAVALCANTE (2003).

Essa medida é dita *invariante* por uma tranformação f quando o resultado da iteração em um mapa, ou a evolução em um fluxo, preserva essa medida, ou seja, a probabilidade de um ponto estar em um dado conjunto X é igual a probabilidade

de que sua imagem esteja nesse conjunto. Isso significa que,

$$\mu(X) = \mu[f^{-1}(X)] \tag{2.14}$$

A medida é dita natural quando não é alterada sobre o efeito de pequenas pertubações. Um sistema no qual a medida natural é única é chamado *ergódico*. Ver OLIVEIRA e VIANA (2014). Por ser uma probabilidade a medida tem as caracteristícas usuais tais como a aditividade, ou seja, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, e de que a medida do conjunto todo é unitária.

Podemos descrever a medida invariante em termos de uma função densidade de probabilidade $\rho(x)$, definida por:

$$\rho(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x - x_n) \tag{2.15}$$

onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac, que é uma distribuição na reta real, que toma os valores infinito no ponto zero e é nula no restante da reta. Por definição sua integral vale 1.

2.5.1 Distribuição uniforme

A distribuição uniforme é a distribuição de probabilidade contínua mais simples de conceituar. Neste modelo, a probabilidade de gerar qualquer ponto em um intervalo contido no espaço amostral é proporcional ao tamanho do intervalo.

Definicão 1

Definicão 2 *Seja X uma variável aleatória contínua que tome todos os valores no intervalo $[a, b]$, onde a e b são ambos finitos. Se a função de distribuicão de probabilidades de X for dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & cc \end{cases}$$

Dizemos que X é uniformemente distribuída sobre o intervalo $[a, b]$

Uma variável aleatória uniformemente distribuída tem uma função densidade de probabilidade que é constante sobre o intervalo de definição. A fim de satisfazer à condição $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$, essa constante deve ser igual ao inverso do comprimento do intervalo.

Na figura 2.12 vemos um gráfico ilustrando o comportamento da distribuição uniforme.

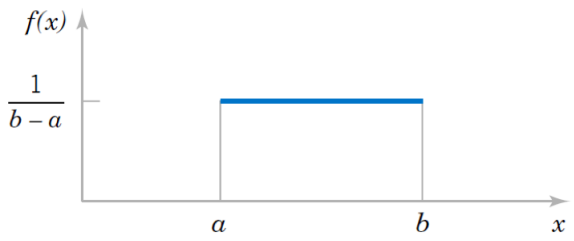


Figura 2.12: Distribuição Uniforme

Também é possível calcular a média, ou esperança, e a variância na distribuicão uniforme definida em um intervalo $[a, b]$:

$$E(X) = \frac{(a+b)}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Capítulo 3

Metodologia

Neste capítulo iremos descrever a densidade invariante natural iniciando pelo mapa logístico, que é um dos poucos exemplos onde é possível deduzir uma expressão analítica para tal densidade. Também descreveremos o operador de Frobenius Perron como a ferramenta para mostrar a evolução da densidade ou medida causada pela dinâmica. Em outras palavras, que a densidade invariante natural não é alterada pela ação da dinâmica. A proposta deste trabalho é verificar isso em alguns mapas simples, tais como o de Tenda e deslocamento de Bernoulli.

3.1 Densidade Invariante Natural

Em alguns mapas, como *2x módulo 1* ou o *mapa de tenda*, pontos em órbitas periódicas são densos em $[0, 1]$, isto é, para cada $x \in [0, 1]$ e dado um ϵ, não importa qual pequeno seja, existe um ponto de uma órbita periódica em $(x - \epsilon, x + \epsilon)$. Entretando, o conjunto dos pontos períodicos é infinito enumerável, enquanto que o conjunto de todos os pontos em $[0, 1]$ é não enumerável. Isto significa que pontos periódicos, mesmo densos, são muito menores do que o intervalo em questão. Segundo OTT (2002) isto implica dizer que se escolhermos de forma aleatória, uma condição inicial x_0 contido em $[0, 1]$ então a probabilidade de que x_0 gere uma órbita periódica é zero. Dizemos então que órbitas não periódicas são típicas para esses mapas.

Se fizermos um histograma das frações de tempo que órbitas de comprimento finito originadas por condições iniciais típicas caem em partições de igual tamanho ao longo do eixo x, no espaço de fase,

$$\left[\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}\right] \quad para \quad m = 1, 2, ..., N$$

então a fração de tempo gasta em cada partição se aproxima de $\frac{1}{N}$ a medida que o

comprimento da órbita vai para infinito.

Portanto, definimos uma funcão $\rho(x)$ tal que para cada intervalo $[a, b] \subset [0, 1]$, a fração de tempo que órbitas típicas passam em $[a, b]$ é

$$\int_a^b \rho(x)dx \tag{3.1}$$

e para mapas como o da *tenda* e o *2x módulo 1*, por exemplo, é:

$$\rho(x) = 1 \tag{3.2}$$

no intervalo $[0, 1]$, chamamos $\rho(x)$ de *densidade invariante natural*.

Para a grande maioria dos mapas só podemos esperar obter uma aproximação numérica da densidade invariante. Mas para alguns deles é possível derivar uma expressão analítica, como é o caso do mapa logístico, ver equação 2.9. Para isso, podemos usar o fato de que o mapa logístico e o mapa de tenda são isomorfos, no sentido de que um pode ser transformado no outro através de uma troca de variáveis.

Para x no intervalo $[0, 1]$, definimos y, também no intervalo $[0, 1]$, por:

$$x = \sin^2 \frac{\pi y}{2} = \frac{1}{2}[1 - \cos \pi y] \tag{3.3}$$

substituíndo em 2.9 obtemos:

$$\sin^2 \frac{\pi y_{n+1}}{2} = 1 - \cos^2 \pi y_n = \sin^2 \pi y_n \tag{3.4}$$

assim,

$$\frac{\pi y_{n+1}}{2} = \pm \pi y_n + s\pi \tag{3.5}$$

onde s é um inteiro. Como y está definido no intervalo $[0, 1]$, determina a escolha do s e do sinal de πy_n. Assim, obtemos $y_{n+1} = 2y_n$ (sinal positivo e $s = 0$), para $0 \leq y_n \leq \frac{1}{2}$ e $y_{n+1} = 2 - 2y_n$ (sinal negativo e $s = 1$), para $\frac{1}{2} \leq y_n \leq 1$, e isto é o mapa de tenda.

Usando $r = 4$ podemos considerar que condições iniciais típicas (escolhidas de forma aleatória) geram uma densidade invariante de pontos, tanto em um mapa como no outro, seja $\rho(x)$ a densidade invariante natural no mapa logístico e $\tilde{\rho}(y)$ a densidade invariante natural para o mapa de tenda. De acordo com a equação 3.2, $\tilde{\rho}(y) = 1$ para $0 \leq t \leq 1$. Para encontrarmos $\rho(x)$ usamos o fato de que o intervalo em y, $[y, y + dy]$, e o correspondente intervalo em x, $[x, dx]$, obtido pela aplicação da mudança de variável, é visitado por órbitas típicas dos respectivos mapas com a mesma frequência. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \rho(x)|dx| &= \tilde{\rho}(y)|dy| \\ \rho(x) &= \left|\frac{d\,y(x)}{dx}\right| \tilde{\rho}(y(x)) \end{aligned}$$

usando $\tilde{\rho}(y) = 1$ e aplicando a mudança de variável, ver OTT (2002), chegamos a expressão analítica para a densidade invariante natural do mapa logístico:

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \tag{3.6}$$

3.2 Operador Frobenius Perron

Podemos pensar em, ao invés de estudar a órbita sobre a ação da dinâmica de uma condicão inicial, pensar na evolução da densidade de pontos da distribuição do sistema Lasota e Mackey (2008), e para isso podemos utilizar o *Operador de Frobenius Perron*, que descreve a evolução das densidades no espaço de fase com o passar do tempo. Faremos isso da seguinte forma. Escolhendo uma infinidade de condições iniciais ao longo do eixo x com uma densidade suave $\rho_0(x)$ tal que a fração dessas condições iniciais em um intervalo $[a, b]$ é $\int_a^b \rho_0(x)dx$. Aplicando o mapa $M(x)$ a cada condicão inicial obteremos uma nova densidade $\rho_1(x)$. Da mesma forma, se aplicarmos o mapa novamente, obteremos $\rho_2(x)$, e assim sucessivamente. Podemos descrever a evolução da densidade no tempo através da relação:

$$\rho_{n+1}(x) = \int \rho_n(y)\delta[x - M(y)]dy \tag{3.7}$$

onde $\delta(x)$ é a função delta. A equação 3.7 é chamada de *equação de Frobenius Perron*. A densidade invariante satisfaz esta equação ao fazermos $\rho_{n+1}(x) = \rho_n(x) = \rho(x)$.

$$\rho(x) = \int \rho(y)\delta[x - M(y)]dy \tag{3.8}$$

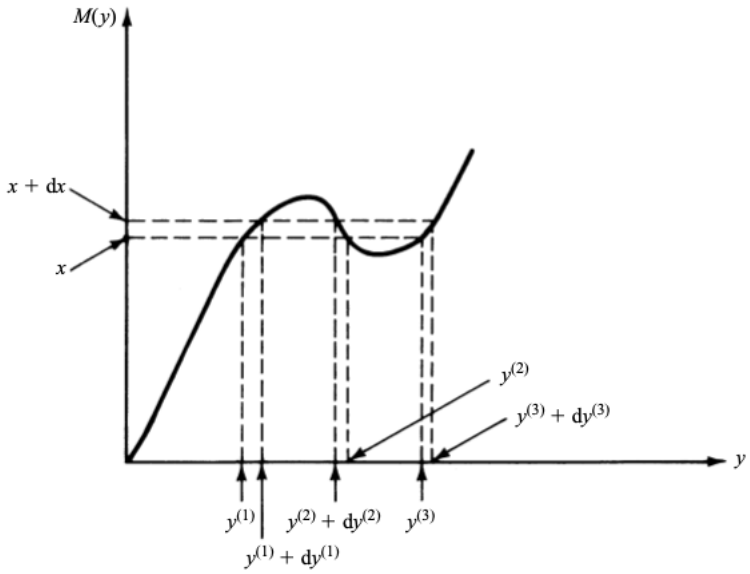
Na figura 3.1 podemos ver como isso é derivado.

Órbitas de pontos no intervalo x até $x+dx$ no tempo $n+1$ se originam no intervalo $y^{(i)}$ até $y^{(i)}+dy^{(i)}$ no tempo n, onde $y^{(i)}$ são as soluções da equacão $M(y) = x$. Logo, o número de órbitas de pontos no intervalo x até $x + dx$ no tempo $n + 1$ é a soma de pontos nos intervalos $y^{(i)}$ até $y(i) + dy(i)$ no tempo n,

$$\rho_{n+1}(x) = \sum_i \rho_n(y^{(i)}) \left|\frac{dx}{dy^{(i)}}\right|^{-1} = \sum_i \rho_n(y^{(i)}) \left|M'(y^{(i)})\right|^{-1} \tag{3.9}$$

isto é equivalente a equação 3.7 ao ultilizarmos a identidade da função delta:

Figura 3.1: Derivacão da equação de Frobenius Perron



Fonte: Ott, 2002

$$\delta(x - M(y)) = \sum_i \delta(y - y^{(i)}) \left|M'(y^{(i)})\right|^{-1} \tag{3.10}$$

Como exemplo, podemos ver a aplicacào no mapa da tenda, onde

$$\rho(x) = \frac{1}{2}[\rho(\frac{x}{2}) + \rho(1 - \frac{x}{2})] \tag{3.11}$$

o que leva a solução $\rho(x) = 1$.

Usaremos como metodologia para testar os resultados analíticos a construção de histogramas a partir de séries simuladas numericamente. Os códigos usados para construir os histogramas podem ser encontrados no Apêndice.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

Neste capítulo apresentaremos resultados numéricos com a finalidade de verificar computacionalmente a existência de uma densidade invariante em alguns mapas simples, relacionando com os resultados presentes na literatura.

4.1 Experimentos numéricos

4.1.1 Mapa logístico

A expressão analítica para a densidade invariante natural do mapa logístico:

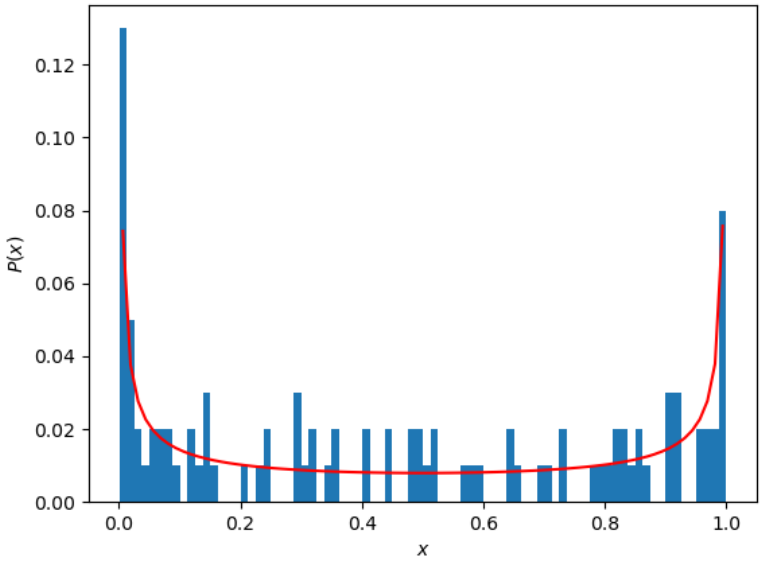
$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \tag{4.1}$$

foi obtida de forma algébrica, através de uma substituição de variáveis e usando o isoformismo com o mapa de tenda. Utilizamos a linguagem de programacão Python e plotamos o histograma da distribuição de pontos gerados pelo mapa no intervalo $[0, 1]$ com $m = 80$, $N = 100000$ e $x_0 = 0.8$ como condição inicial. Ao mesmo tempo, fizemos o plot em vermelho, da funcão 4.1 da densidade invariante gerada por órbitas típicas no mapa logístico, para verificar uma convergência com o resultado numérico.

Fizemos inicialmente com 100 iteracões, ver figura 4.1, e depois aumentamos o número de iteracões para 1000, ver figura 4.2 e 100000 iteracões na figura 4.3, onde é possível verificar que a densidade gerada pelo histograma vai se encaixando na densidade invariante obtida de forma algébrica. Podemos verificar também que há uma simetria no resultado, com a maioria da distribuição concentrada próxima de 0 ou de 1 com a concentracão mínima em $x = \frac{1}{2}$.

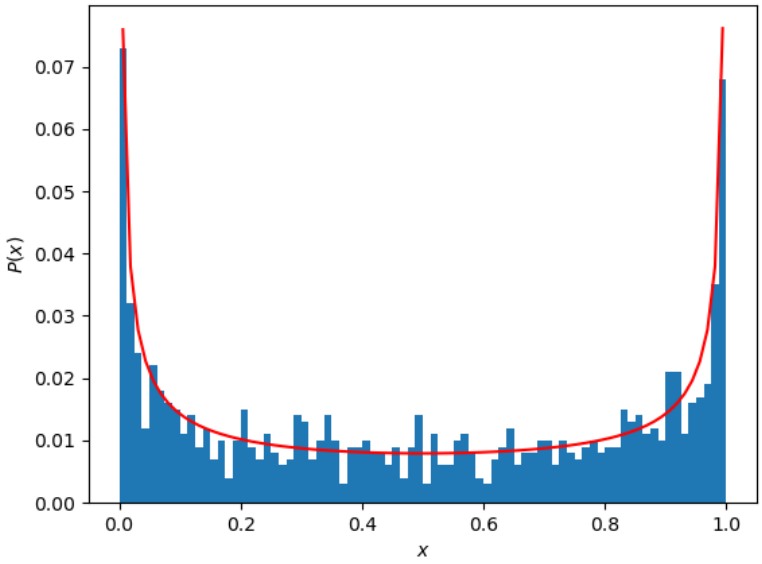
Na figura 4.4 é possível observar o histograma em escala logarítmica, onde é possível ver mais detalhes. Neste caso a curva em vermelho é o plot da função $\rho(x)$ e a curva em laranja é a que passa pelo ponto médio de cada barra m no histograma. Verificamos que a densidade calculada não fica perfeitamente encaixada na obtida

Figura 4.1: Densidade Invariante $\rho(x)$ para o mapa logístico com 100 iteracões



Fonte: Elaborada pelo autor

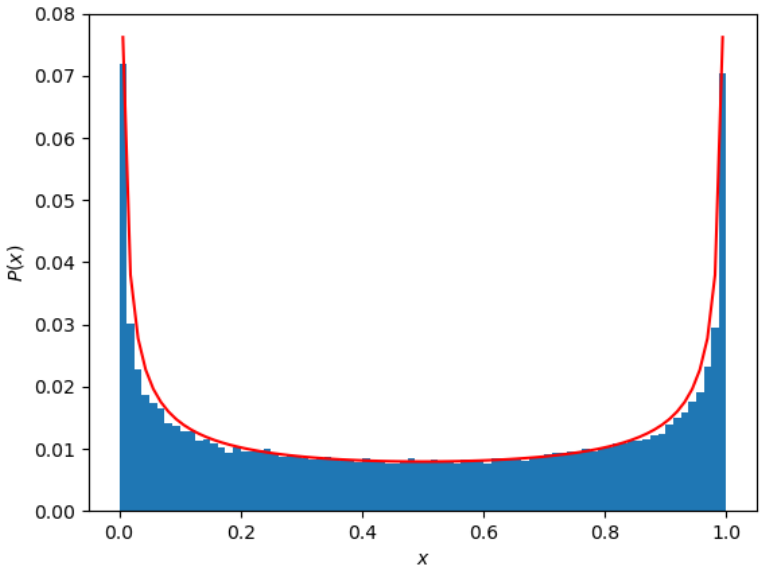
Figura 4.2: Densidade Invariante $\rho(x)$ para o mapa logístico com 1000 iteracões



Fonte: Elaborada pelo autor

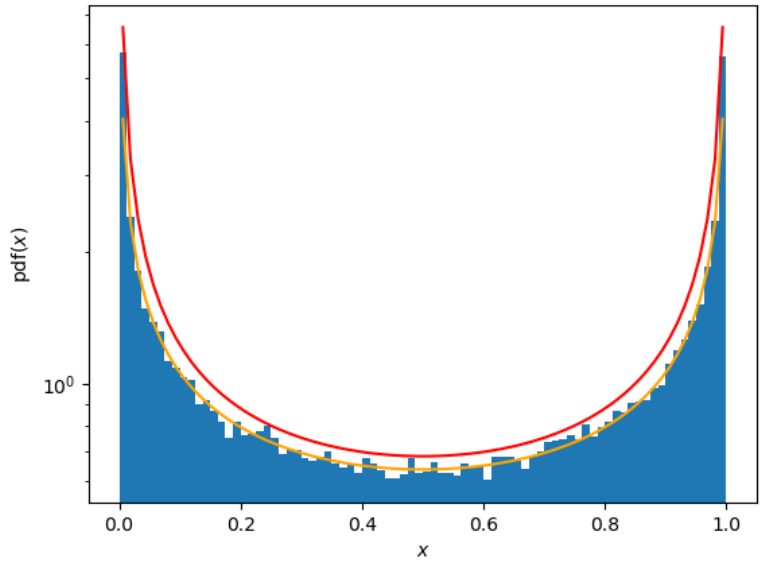
analiticamente. Isso se deve as limitações inerentes ao cálculo computacional. Se aumentarmos o tamanho da série temporal ou o número m no histograma essa diferença tende a diminuir.

Figura 4.3: Densidade Invariante $\rho(x)$ para o mapa logístico com 100000 iteracões



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.4: Densidade Invariante $\rho(x)$ para o mapa logístico em escala logarítmica

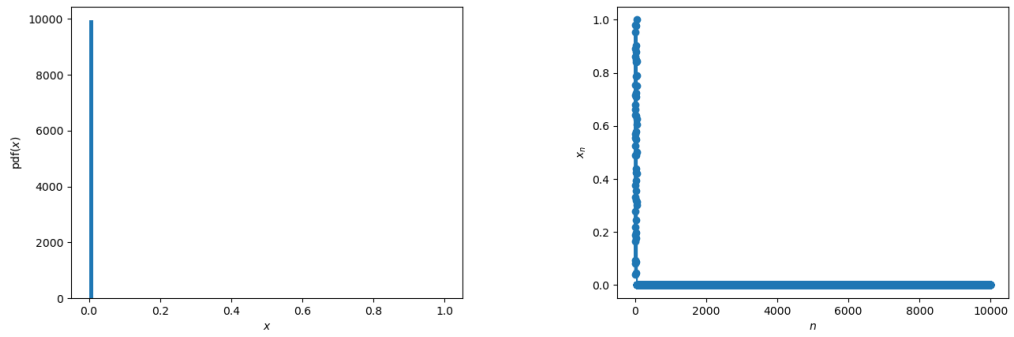


Fonte: Elaborada pelo autor

4.1.2 Mapa de Tenda e Deslocamentos de Bernoulli

Nesse caso o valor de $\rho(x) = 1$, o que corresponde a uma distribuição uniforme. Ao fazermos a implementação numérica nestes dois mapas encontramos um problema, como podemos ver na geracão do histograma e na série temporal na figura 4.5. A cada iteração nesses mapas um bit de informação é perdido, então depois de 50 iterações o número cai em 0 e fica preso neste ponto fixo. É um problema

Figura 4.5: Solução do mapa de Tenda com números em ponto flutuante



inerente a implementacão numérica em ponto flutuante, ver Li (2004).

Só conseguimos a representacão gráfica correta, usando o pacote Decimal do Python, que permite representar o número da forma que usamos usualmente no dia a dia, número com algarismos decimais, em vez dos binários que são usados corriqueiramente pelos computadores. Isso tem um efeito na precisão da representação de alguns números. Por exemplo: o número 0.1 não pode ser representado exatamente em binário, mas em decimal, sim.

Usando o pacote Decimal conseguimos gerar o histograma com a representacão de pontos formando a densidade gerada pelo mapa. Utilizamos números com a precisão de 100 casas decimais. Como podemos ver na figura 4.6 os pontos se distribuem de maneira uniforme. Na figura 4.7 vemos o aspecto da densidade em escala logarítmica. Para isso utilizamos $x_0 = \frac{\pi}{6}$ como condição inicial, em um tempo t discretizado, sobre um passo $dx = 0.005$. Também alteramos o mapa de tenda 4.2 e deslocamentos de Bernoulli 4.3, introduzindo um parânmetro para fazer uma aproximacão no valor de $r = 2.00000000000000000$ para $r = 1.99999999999999999$.

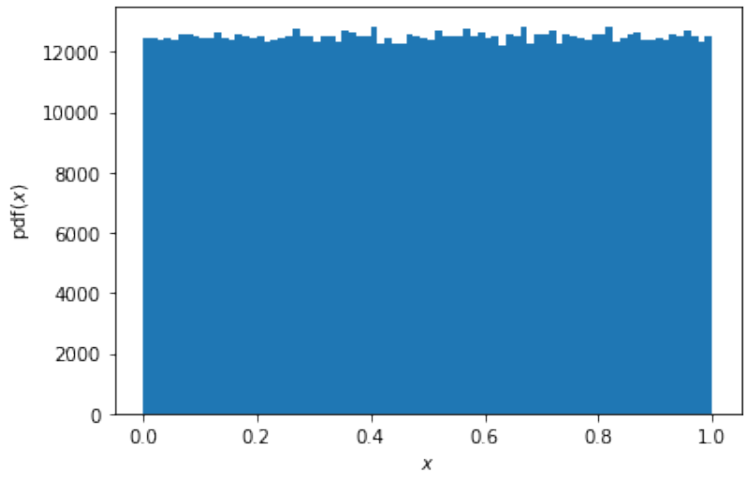
$$x_{n+1} = \begin{cases} rx_n, & \text{para } x_n < \frac{1}{2} \\ r(1 - x_n), & \text{para } x_n > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{4.2}$$

$$x_{n+1} = rx_n \quad mod \quad 1 \tag{4.3}$$

Nas figuras 4.8 e 4.9 temos o histograma com a densidade do mapa Deslocamentos de Bernoulli em escala normal e logarítmica. O resultado é muito semelhante ao mapa de tenda, apresentando uma distribuição que se aproxima da uniforme.

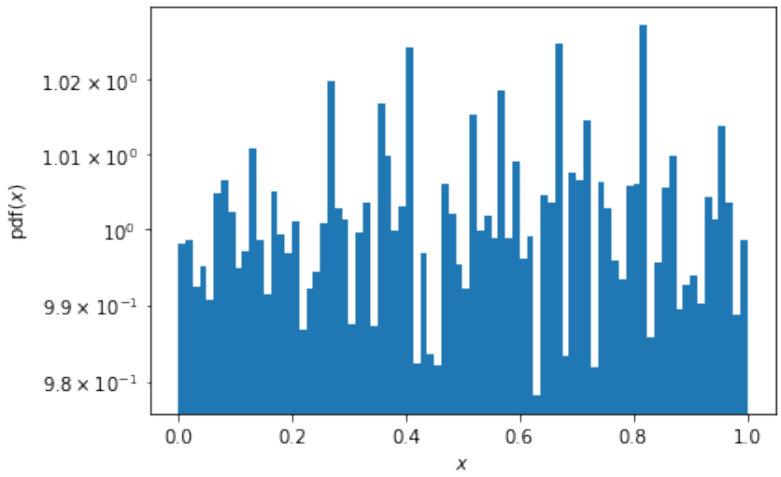
Logo, verificamos que existe uma densidade que é invariante pela ação da dinâmica e que se aproxima da uniforme, mas que não fica perfeitamente constante. Essa discrepância se dá pela limitacão do tamanho da série temporal e por problemas gerados pelos erros de arredondamentos.

Figura 4.6: Histograma com a densidade do Mapa de Tenda



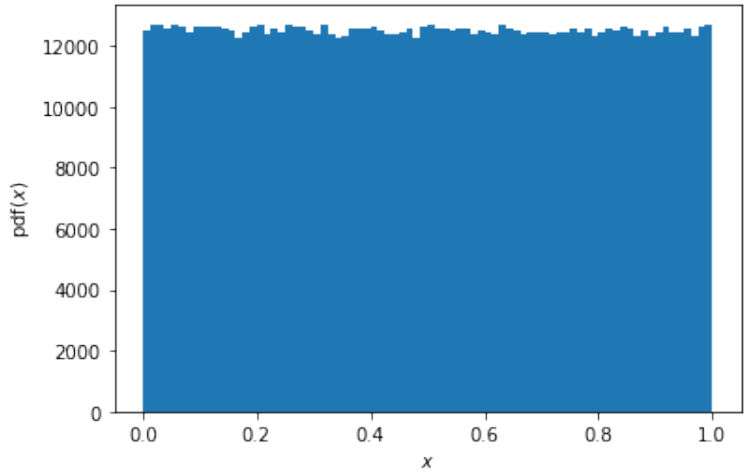
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.7: Histograma com a densidade do Mapa de Tenda em escala logarítmica



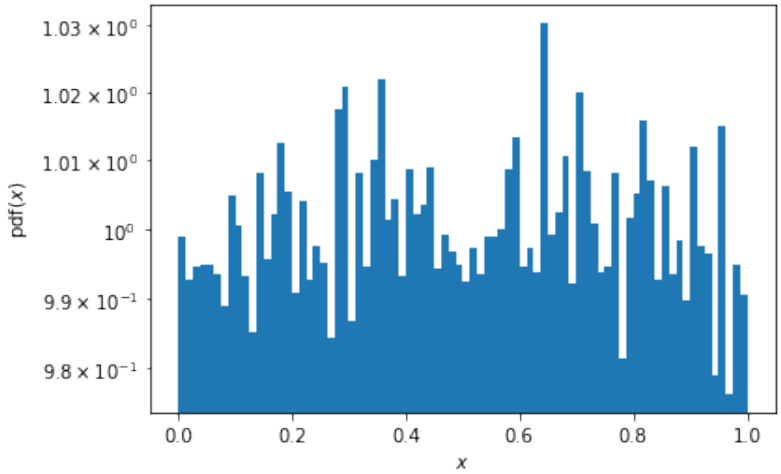
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.8: Histograma com a densidade do Mapa Deslocamentos de Bernoulli



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.9: Histograma com a densidade do Mapa Deslocamentos de Bernoulli em escala logarítmica



Fonte: Elaborada pelo autor

Capítulo 5

Conclusões

Muitas das propriedades que sistemas caóticos exibem são importantes para descrever o comportamento do sistema e fazer previsões a longo prazo. A existência de uma medida invariante é uma delas. Para tentar verificar a existência de uma densidade que é invariante sob a ação da dinâmica, fizemos um estudo em mapas simples unidimensionais.

No mapa logístico, é possível verificar analiticamente uma expressão para essa densidade invariante usando o fato de que com $r = 4$ o mapa é isoformo ao mapa de tenda. De posse dessa informação, utilizamos a linguagem de programação Python para construir um histograma com a distribuição dos pontos gerada pela iteração do mapa. Com isso verificamos que a densidade gerada pela implementacão converge numericamente para a densidade obtida analiticamente.

Para os mapas de tenda e deslocamentos de Bernoulli, o operador de Frobenius Perron assegura que a densidade é constante, $\rho(x) = 1$, gerando uma distribuicão uniforme. Neste caso, a implementacão numérica apresentou erros de arredondamento devido a arquitetura da linguagem de programação representar os números utilizando ponto flutuante, o que fazia com que as soluções ficassem presas em pontos fixos.

Na tentativa de contornar este problema utilizamos o pacote DECIMAL (2022), uma ferramenta do Python que permite representar os números na forma decimal e permite também aumentar a precisão dos números incrementando o tamanho das casas decimais de forma arbritária. Com isso foi possível verificar que a densidade gerada pelo histograma se aproxima de uma distribuição uniforme, tanto no mapa de tenda como no de deslocamentos de Bernoulli.

Em geral, podemos concluir que é possível confirmar a existência, numericamente, de uma medida inerente a sistemas com caos determinístico. Essa medida, a densidade invariante natural, mostra que tais sistemas possuem uma constante na sua evolucão com o tempo, mostrando que, mesmo caóticos, conservam algumas características que podem ser verificadas.

Referências Bibliográficas

BERLINER, L. M. Statistics, probability and chaos. *Statistical Science*, JSTOR, p. 69–90, 1992.

BILLINGS, L.; BOLLT, E. Probability density functions of some skew tent maps. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 12, n. 2, p. 365–376, 2001.

CAVALCANTE, H. L. D. d. S. *Bifurcações com intermitência e sincronismo de sistemas caóticos: circuitos eletrônicos e lasers*. Tese (Doutorado) — UFPE, 2003.

CAVALCANTE, H. L. d. S.; LEITE, J. R. Averages and critical exponents in type-iii intermittent chaos. *Physical Review E*, APS, v. 66, n. 2, p. 026210, 2002.

CAVALCANTE, H. L. D. S.; LEITE, J. R. R. Bifurcations and averages in the logistic map. *Dynamics and Stability of Systems*, Taylor & Francis, v. 15, n. 1, p. 35–41, 2000.

DECIMAL. *Decimal fixed point and floating point arithmetic*. 2022. Disponível em: <https://docs.python.org/3/library/decimal.html>. Acessado em: 14 de junho 2022.

GWIRTZ, K. Invariant densities on maps with noise. 2017.

JAFARIZADEH, M. et al. Hierarchy of chaotic maps with an invariant measure. *Journal of statistical physics*, Springer, v. 104, n. 5, p. 1013–1028, 2001.

LASOTA, A.; MACKEY, M. C. *Probabilistic properties of deterministic systems*. [S.l.]: Cambridge university press, 2008.

LI, S. When chaos meets computers. *arXiv preprint nlin/0405038*, 2004.

LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.

MAGALHÃES, M. N. *Probabilidade e variáveis aleatórias*. [S.l.]: Edusp, 2006.

MELO, W. D.; STRIEN, S. V. *One-dimensional dynamics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 25.

OLIVEIRA, K.; VIANA, M. Fundamentos da teoria ergódica. *IMPA, Brazil*, p. 3–12, 2014.

OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2002.

SCHUSTER, H. G.; JUST, W. *Deterministic chaos: an introduction*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006.

STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. 2. ed. [S.l.]: Westview press, 2018.

VIANA, M. What's new on lorenz strange attractors? *The Mathematical Intelligencer*, Springer, v. 22, n. 3, p. 6–19, 2000.

YOSHIDA, T.; MORI, H.; SHIGEMATSU, H. Analytic study of chaos of the tent map: band structures, power spectra, and critical behaviors. *Journal of statistical physics*, Springer, v. 31, n. 2, p. 279–308, 1983.

Apêndice A

Implementações em Python

Códigos em python usados para fazer as simulações numéricas propostas no trabalho.

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

## Histograma do mapa logistico
# Bibliotecas usadas

from numpy import *
from matplotlib.pyplot import *


N =100000
x0 = 0.8
r = 4.0

# Definindo o mapa logistico

def f(x):
  return r*x*(1-x)


x = zeros(N)
x[0] = x0


for n in range(N-1):
```

```
  x[n+1] = f(x[n])

y = f(x)
plot(x,y, '.')
plot([0,1], [0,1], '--', color = 'black')
xlabel('$x_{n}$')
ylabel('$x_{n+1}$')

# Implementando o histograma

nbins = 80
hist_x, edges = histogram(x, bins = nbins)
#print(shape(hist_x))
#print(shape(edges))
#print(edges[0:2])
#print(edges[-2:])
bin_centers = zeros(nbins)
bin_width = edges[1]-edges[0]
for i in range(nbins):
  bin_centers[i] = (edges[i]+edges[i+1])/2

figure(2)
#bar(bin_centers, hist_x, width = bin_width)
bar(bin_centers, hist_x/N, width = bin_width)



a1, a2 = 0.5, 0.5
def fit_pdf(x):
  #return a1/sqrt(x) + a2/sqrt(1-x)
  #return a1/x + a2/(1-x)
  return a1/x**(2/3) + a2/(1-x)**(2/3)

def fit_pdf_2(x):
  return 1/(pi*(x*(1-x))**0.5)

plot(bin_centers, 0.005*fit_pdf(bin_centers), color = 'red')
xlabel('$x$')
ylabel('$P(x)$')
```

```
# Histograma em escala logaritmica

figure(3)
pdf_x, edges = histogram(x, bins = nbins, density=True)
bar(bin_centers, pdf_x, width = bin_width)
plot(bin_centers, 0.43*fit_pdf(bin_centers), color = 'red')
plot(bin_centers, fit_pdf_2(bin_centers), color = 'orange')
xlabel('$x$')
ylabel('pdf$(x)$')
yscale('log')
```

##

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
"""

## Histograma do mapa de tenda
# Bibliotecas usadas

from matplotlib.pyplot import *
from numpy import *
from decimal import *

# aumentando as casas decimais

getcontext().prec = 60
n = 10000 #50  #  n mero de itera   es
#x0 = Decimal(2/(1+sqrt(5)))
x0 = Decimal(pi/6) # condi   o inicial


dx = Decimal("0.005") # 0.005  # passo para o gr fico
r = Decimal("1.999999999999999999") #1.999
#r = Decimal("2.0000000000000000000") #1.999
```

```
x_plot_i = Decimal('0.0')
x_plot_f = Decimal('1.0')

def f(x):
    if x < 0.5:
        return (r*x)
    else:
        return (r*(1-x))

# definindo a funcao do mapa de tenda

def f_Decimal(x):
    if x < Decimal("0.50"):
        return r*x
    else:
        return r*(Decimal("1.000")-x)


x_plot = arange(x_plot_i, x_plot_f+dx, dx)
y_plot = vectorize(f)(x_plot)

figure("f(x)", figsize = (6,6))
plot([0,1], [0,1], color = 'black')
plot(x_plot, y_plot)
xlabel('$x_n$')
ylabel('$x_{n+1}$')

x = zeros(n, dtype = Decimal)
x[0] = x0
for i in range(1,n):
    #x[i] = (f(x[i-1]))
    x[i] = f_Decimal(x[i-1])


figure('sequ ncia')
plot(x, '-o')
xlabel('$n$')
ylabel('$x_n$')
```

```
y2_plot = vectorize(f)(y_plot)
y3_plot = vectorize(f)(y2_plot)
figure("f( f(x) )", figsize = (6,6))
plot([0,1], [0,1], color = 'black')
plot(x_plot, y2_plot)
plot(x_plot, y3_plot)
xlabel('$x_n$')
ylabel('$x_{n+2}, x_{n+3}$')


X = x.astype(float64)    #tentativa para resolver o problema do histogram

# Histograma

nbins = 80 #300
hist_x, edges = histogram(X, bins = nbins)
#print(shape(hist_x))
#print(shape(edges))
#print(edges[0:2])
#print(edges[-2:])
bin_centers = zeros(nbins)
bin_width = edges[1]-edges[0]
for i in range(nbins):
  bin_centers[i] = (edges[i]+edges[i+1])/2

figure()
bar(bin_centers, hist_x, width = bin_width)
#bar(bin_centers, hist_x/N, width = bin_width)

#plot(bin_centers, color = 'red')
#xlabel('$x$')
#ylabel('$P(x)$')
xlabel('$x$')
ylabel('pdf$(x)$')

# Histograma em escala log

figure()
```

```
pdf_x, edges = histogram(X, bins = nbins, density=True)
bar(bin_centers, pdf_x, width = bin_width)
xlabel('$x$')
ylabel('pdf$(x)$')
yscale('log')


##############################################################################

## Histograma do mapa deslocamentos de Bernoulli
# Bibliotecas usadas

from matplotlib.pyplot import *
from numpy import *
from decimal import *

getcontext().prec = 100   # Definindo as casas decimais de precisao
n = 100000  #  numero de iterac es
x0 = Decimal(pi/6) # condic o inicial

dx = Decimal("0.005") # passo para o gr fico
#r = Decimal("2.00000000000000000000")
r = Decimal("1.99999999999999999999")
x_plot_i = Decimal('0.0')
x_plot_f = Decimal('1.0')

def f(x):
    if x>= 0 and x < 0.5:
        return (r*x)
    else:
        return (r*x - 1)

# Usando o pacote decimal na definicao da funcao.

def f_Decimal(x):
    if x < Decimal("0.50"):
        return r*x
    else:
        return r*x - Decimal("1.000")
```

```
x_plot = arange(x_plot_i, x_plot_f+dx, dx)
y_plot = vectorize(f)(x_plot)

figure("f(x)", figsize = (6,6))
plot([0,1], [0,1], color = 'black')
plot(x_plot, y_plot)
xlabel('$x_n$')
ylabel('$x_{n+1}$')

x = zeros(n, dtype = Decimal)
x[0] = x0
for i in range(1,n):
    #x[i] = f(x[i-1])
    x[i] = f_Decimal(x[i-1])


figure('sequencia')
plot(x, '-o')
xlabel('$n$')
ylabel('$x_n$')


y2_plot = vectorize(f)(y_plot)
y3_plot = vectorize(f)(y2_plot)
figure("f( f(x) )", figsize = (6,6))
plot([0,1], [0,1], color = 'black')
plot(x_plot, y2_plot)
plot(x_plot, y3_plot)
xlabel('$x_n$')
ylabel('$x_{n+2}, x_{n+3}$')

X = x.astype(float64)

# histograma

nbins = 80
hist_x, edges = histogram(X, bins = nbins)
#print(shape(hist_x))
```

```
#print(shape(edges))
#print(edges[0:2])
#print(edges[-2:])
bin_centers = zeros(nbins)
bin_width = edges[1]-edges[0]
for i in range(nbins):
  bin_centers[i] = (edges[i]+edges[i+1])/2

figure()
bar(bin_centers, hist_x, width = bin_width)
#bar(bin_centers, hist_x/N, width = bin_width)



#plot(bin_centers, color = 'red')
#xlabel('$x$')
#ylabel('$P(x)$')
xlabel('$x$')
ylabel('pdf$(x)$')

# histograma em escala log

figure()
pdf_x, edges = histogram(X, bins = nbins, density=True)
bar(bin_centers, pdf_x, width = bin_width)
xlabel('$x$')
ylabel('pdf$(x)$')
yscale('log')
```