

Eliza Michelly de Brito Guedes

Movimento browniano quântico induzido por
flutuações de vácuo de um campo escalar não massivo
sob condições de Dirichlet

João Pessoa - PB

2023

Eliza Michelly de Brito Guedes

**Movimento browniano quântico induzido por flutuações de
vácuo de um campo escalar não massivo sob condições de
Dirichlet**

Trabalho de conclusão do curso de graduação
em Física do Centro de Ciências Exatas e da
Natureza da Universidade Federal da Paraíba
como requisito parcial para a obtenção do
título de Bacharel em Física.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Centro de Ciências Exatas e da Natureza – CCEN

Departamento de Física – DF

Orientador: Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota

João Pessoa - PB

2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

G924m Guedes, Eliza Michelly de Brito.

Movimento browniano quântico induzido por flutuações de vácuo de um campo escalar não massivo sob condições de Dirichlet / Eliza Michelly de Brito Guedes. - João Pessoa, 2023.

54 p. : il.

Orientação: Herondy Francisco Santana Mota.

TCC (Curso de Bacharelado em Física) - UFPB/CCEN.

1. Movimento browniano quântico induzido. 2. Teoria quântica de campos. 3. Equação de Langevin. 4. Condições de Dirichlet. I. Mota, Herondy Francisco Santana. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 53(043.2)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Coordenação dos Cursos de Graduação em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa do Trabalho
de Conclusão de Curso de Bacharelado em
Física, da discente Eliza Michelly de Brito
Guedes.

Aos 26 dias do mês de maio do ano de 2023, às 10h30, na sala 201 - Departamento de Física/CCEN/UFPB, realizou-se a Sessão Pública da Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso de Bacharelado em Física, da discente Eliza Michelly de Brito Guedes, sendo a Banca Examinadora constituída pelos docentes Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota (UFPB), orientador e presidente da banca, Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos (UFPB), Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra (UFPB) e Prof. Dr. Knut Bakke Filho (UFPB – suplente). Dando início aos trabalhos, o professor orientador e presidente da banca examinadora comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, concedeu a palavra à discente para que fizesse a explanação de seu Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado “*Movimento browniano induzido por flutuações de vácuo de um campo escalar não massivo sob condições de Dirichlet*”. Concluída a exposição, a discente foi arguida pelos membros presentes da Banca Examinadora. Após as arguições, a Banca, de comum acordo, declarou que o Trabalho apresentado foi aprovado com nota 10. E para constar, encerrada a sessão, lavrou-se esta ata que será assinada pelos presentes. João Pessoa, 26 de maio de 2023.

Herondy F.S. Mota

Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota
UFPB – Orientador

Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos

Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos
UFPB

Valdir Barbosa Bezerra

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
UFPB

Knut Bakke Filho
UFPB - suplente

Eliza Michelly de Brito Guedes

Eliza Michelly de Brito Guedes
Discente

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Elizete e José Guedes, e ao meu irmão, Allef, por serem minha fonte constante de apoio e motivação em todas as minhas escolhas.

Ao meu professor e orientador, Herondy Mota, sou extremamente grata pelo suporte, orientação e paciência durante todo o processo.

Ao meu colega e coorientador, Éwerton Ferreira, sou imensamente grata pela sua dedicação em me ajudar e por estar sempre disponível para esclarecer minhas dúvidas.

Ao meu melhor amigo, Pedro Henrique, por sempre me apoiar e por me encorajar a acreditar em mim mesma. Sou imensamente grata por ter sua amizade.

A todos os professores do departamento de física e aos colegas que fiz durante o curso, cujo ensinamento e convívio foram fundamentais para minha formação acadêmica.

E ao CNPq pelo apoio financeiro concedido, que possibilitou a realização deste trabalho.

*Razão, sempre tereis a visão de um só olho,
vós e todos os que são nutridos por vossa doutrina.
(Marguerite Porete)*

Resumo

Neste trabalho, investigamos o movimento browniano de uma partícula carregada, provocado pelas flutuações do vácuo do campo escalar na teoria quântica de campos escalares. Para introduzir o assunto, começamos com a descrição clássica do movimento browniano, no qual partículas se movem aleatoriamente devido às colisões com outras partículas. Na teoria quântica de campos, o movimento browniano é descrito pelo movimento browniano induzido, que ocorre devido às flutuações do estado fundamental de um campo quântico, como o campo escalar. Para compreender melhor esse fenômeno, é necessário entender a teoria quântica do campo escalar e a função de dois pontos associada, conhecida como função de Wightman. Neste sentido, revisamos o movimento browniano induzido no espaço-tempo de Minkowski em $(1+1)$ dimensões sob condição de Dirichlet aplicada a um campo escalar não massivo. Em seguida, motivados pelo caso em $(1+1)$ dimensões, estudamos o movimento browniano induzido em $(3+1)$ dimensões sob condições de Dirichlet aplicadas também ao campo escalar não massivo, mas com a partícula carregada entre dois planos paralelos perfeitamente refletivos. Em ambos os cenários, a equação de Langevin é resolvida e as dispersões na posição e na velocidade da partícula são obtidas. Por fim, apresentamos gráficos que ilustram o comportamento das dispersões na velocidade e na posição da partícula carregada, discutindo importantes divergências presentes nos resultados e a abrangência de validade do modelo estudado.

Palavras-chave: Movimento browniano quântico induzido; Teoria quântica de campos; Equação de Langevin; Condições de Dirichlet.

Abstract

In this work, we investigate the Brownian motion of a charged particle induced by fluctuations in the scalar field vacuum in scalar quantum field theory. To introduce the subject, we start with the classical description of Brownian motion, where particles move randomly due to collisions with other particles. In quantum field theory, Brownian motion is described by induced Brownian motion, which arises from fluctuations in the ground state of a quantum field, such as the scalar field. To better understand this phenomenon, it is necessary to comprehend the quantum theory of the scalar field and the associated two-point function, known as the Wightman function. In this regard, we review induced Brownian motion in $(1+1)$ -dimensional Minkowski spacetime under Dirichlet boundary conditions applied to a massless scalar field. Then, motivated by the $(1+1)$ -dimensional case, we study induced Brownian motion in $(3+1)$ dimensions under Dirichlet conditions applied to a massless scalar field, but with the charged particle located between two perfectly reflecting parallel planes. In both scenarios, the Langevin equation is solved, and the particle's position and velocity dispersions are obtained. Finally, we present graphs illustrating the behavior of the dispersions in the velocity and position of the charged particle, discussing important divergences present in the results and the validity range of the studied model.

Keywords: Quantum Brownian motion induced; Quantum field theory; Langevin equation; Dirichlet condition.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Comportamento da dispersão na velocidade em função de $\frac{t}{\tau}$	18
Figura 2 – Alteração da ordem de integração da região de domínio D para a região de domínio $\bar{D}$	19
Figura 3 – Comportamento da dispersão na posição em função de $\frac{t}{\tau}$	20
Figura 4 – Comportamento da dispersão na velocidade da partícula em (1+1) dimensões em função da razão τ/x	33
Figura 5 – Comportamento da dispersão na posição da partícula carregada em (1+1) dimensões em função da razão τ/x	35
Figura 6 – Comportamento da dispersão na posição da partícula carregada em (1+1) dimensões em função da razão τ/x para diferentes valores de q/m	36
Figura 7 – Alteração da ordem de integração da região de domínio D para a região de domínio $\bar{D}$	41
Figura 8 – Comportamento da dispersão na velocidade para a componente x da partícula em função do parâmetro τ_a para diferentes valores de x_a	44
Figura 9 – Comportamento da dispersão na velocidade para a componente y da partícula em função do parâmetro τ_a para diferentes valores de x_a . A componente z possui o mesmo comportamento.	45
Figura 10 – Comportamento da componente x da dispersão na posição da partícula carregada em (3+1) dimensões em função de τ_a para diferentes valores de x_a	47
Figura 11 – Comportamento da componente y da dispersão na posição da partícula carregada em (3+1) dimensões em função de τ_a para diferentes valores de x_a . A componente z possui o mesmo comportamento.	47
Figura 12 – Gráficos da condição (5.45) para a direção $i = y$, considerando valores arbitrários de x_a e dois valores da grandeza adimensional $\bar{q} = q/ma$	48

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	MOVIMENTO BROWNIANO E FORÇAS ESTOCÁSTICAS	12
2.1	Equação de Langevin	13
2.2	Solução da equação de Langevin	14
3	INTRODUÇÃO À TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS ESCALAR NO ESPAÇO DE MINKOWSKI	22
3.1	O espaço-tempo de Minkowski	22
3.2	Campo escalar não massivo	23
3.3	Quantização do campo escalar	24
4	REVISÃO SOBRE O MOVIMENTO BROWNIANO QUÂNTICO IN- DUZIDO EM (1+1) DIMENSÕES	27
4.1	Equação de Langevin	28
4.1.1	Quantização do campo escalar e função de Wightman	30
4.2	Solução da equação de Langevin	31
5	MOVIMENTO BROWNIANO QUÂNTICO INDUZIDO EM (3+1) DI- MENSÕES COM DOIS PLANOS REFLETORES	37
5.1	Equação de Langevin	37
5.1.1	Quantização do campo escalar e função de Wightman	38
5.2	Solução da equação de Langevin	42
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
	REFERÊNCIAS	51

1 Introdução

O movimento browniano refere-se ao movimento aleatório de partículas causado por colisões com as moléculas de um fluido. A descrição clássica desse fenômeno tem uma longa história e remonta ao século XIX, quando o botânico Robert Brown observou a movimentação desordenada de partículas de pólen em suspensão em um líquido. Esse comportamento aleatório do movimento browniano clássico foi posteriormente explicado e modelado matematicamente por Albert Einstein, em 1905, que associou o movimento das partículas às flutuações térmicas do meio¹.

Na física clássica, o movimento browniano é uma descrição do comportamento de objetos macroscópicos, baseada nas leis do movimento de Newton. Essa abordagem clássica fornece previsões determinísticas e precisas para o comportamento das partículas. No entanto, ao adentrarmos em um contexto mais avançado da física, como a teoria quântica de campos, a descrição do movimento browniano é conceitualmente distinta, porém contém uma similaridade matemática com o caso clássico. Nessa perspectiva, o movimento browniano quântico induzido ocorre devido às flutuações presentes no estado fundamental (ou de vácuo) de um campo quântico (FULLING et al., 1989). Essas flutuações de vácuo dão origem a efeitos quânticos que influenciam o movimento e o comportamento de partículas carregadas. Através dessa abordagem, é possível explorar as complexas interações entre partículas e campos quânticos, revelando fenômenos únicos e distintos do contexto clássico.

No caso do campo eletromagnético, uma das manifestações mais conhecidas e cientificamente comprovada das flutuações quânticas de vácuo na presença de fronteiras é o efeito Casimir (MOSTEPANENKO, 2000; BORDAG et al., 2009). Esse fenômeno ocorre quando as flutuações quânticas geram uma força atrativa em decorrência de duas placas paralelas usadas como fronteiras. No caso do movimento browniano quântico, tais fronteiras resultam em alterações no comportamento de partículas acopladas com o campo. O estudo do efeito Casimir e de outros fenômenos similares contribui para uma compreensão mais aprofundada das interações entre partículas e campos quânticos (CASIMIR, 1948).

A compreensão do movimento browniano induzido de uma partícula carregada nas proximidades de uma fronteira, sob a influência das flutuações quânticas de vácuo de um campo, é de grande interesse e relevância científica. O estudo desse fenômeno é motivado pela necessidade de compreender os efeitos quânticos em sistemas físicos e explorar as interações complexas entre partículas carregadas e campos quânticos. O artigo “Vacuum

¹ O modelo difusivo de Einstein, proposto por Albert Einstein em seu famoso artigo de 1905 *"Investigations on the Theory of the Brownian Movement"* (EINSTEIN, 1956), (SALINAS, 1997) descreve o movimento aleatório de partículas em suspensão em um fluido.

fluctuations and Brownian motion of a charged test particle near a point-like reflecting boundary” (LORENCI; JR; SILVA, 2014) aborda essa temática, investigando o movimento browniano quântico induzido em uma teoria quântica de campo escalar não massivo em $(1+1)$ dimensões. Neste trabalho, as limitações do modelo adotado são evidenciadas e discutidas, revelando a importância de se estudar as flutuações quânticas de vácuo na dinâmica de partículas carregadas próximas a fronteiras refletoras.

Para explorar experimentalmente os efeitos das flutuações quânticas do vácuo de campos sobre uma partícula carregada próxima a uma fronteira refletora, o artigo “Probing quantum vacuum fluctuations over a charged particle near a reflecting wall” (LORENCI; RIBEIRO; SILVA, 2016) propõe um possível aparato experimental. Esse aparato envolve o uso de técnicas avançadas de manipulação e detecção de partículas carregadas, bem como a criação de condições adequadas para estudar as flutuações quânticas em um ambiente controlado. Estudar o movimento browniano induzido pela interação entre uma partícula carregada e o vácuo de um campo quântico é fundamental para compreender melhor os processos de difusão e propagação de partículas em escala microscópica. Além disso, a investigação do movimento browniano quântico se estende a diversos contextos, explorando como características geométricas e dinâmicas de um universo em expansão podem influenciar esse fenômeno (BÉSSA; BEZERRA; FORD, 2009).

Nesse contexto, esses estudos oferecem uma contribuição significativa para a compreensão desses fenômenos, ao investigar os efeitos das flutuações quânticas de vácuo na dinâmica de uma partícula carregada próxima a uma fronteira refletora. Através dessas pesquisas, busca-se ampliar nosso conhecimento sobre os mecanismos subjacentes ao movimento browniano quântico e suas implicações em sistemas físicos complexos.

Para estudar esse fenômeno de forma mais aprofundada, no presente trabalho de monografia, é necessário entender os conceitos da teoria quântica de campos escalares não massivos e as técnicas de quantização do campo. Assim, investigaremos o fenômeno do movimento browniano quântico induzido por condições de contorno de Dirichlet impostas sobre dois planos paralelos perfeitamente refletoras no espaço-tempo de Minkowski em $(3+1)$ dimensões. Esse estudo fez parte de um trabalho mais abrangente publicado na Ref. (FERREIRA; GUEDES; MOTA, 2023). Para compreender o contexto desse estudo, é importante começar com uma breve descrição do movimento browniano clássico e, posteriormente, fazer uma revisão sobre o movimento browniano induzido em $(1+1)$ dimensões reportado na Ref. (LORENCI; JR; SILVA, 2014). Em nossa abordagem, adotaremos o sistema de unidades naturais em que a velocidade da luz c e a constante de Planck $\hbar$ são iguais a unidade, isto é $c = \hbar = 1$.

2 Movimento browniano e forças estocásticas

O movimento irregular, ou aleatório, de uma partícula macroscópica e suficientemente pequena imersa num fluido foi observado pela primeira vez em 1828, pelo botânico inglês Robert Brown. Ele notou que grãos de pólen em suspensão na água adquiriam uma espécie de movimento errático, que posteriormente ficaria conhecido como movimento browniano. Essas flutuações erráticas ou de caráter irregular, tanto macroscópicas quanto microscópicas, são espontâneas e inerentes aos fenômenos da natureza (TOMÉ, 2001). Durante várias décadas a causa do movimento browniano permaneceu um mistério, vários experimentos de laboratório mostravam que o movimento da partícula ficava mais intenso quando se reduzia a viscosidade do meio ou o tamanho da partícula e também quando se elevava a temperatura do fluido. Somente a partir de 1860, quando se eliminou a suspeita de qualquer tipo de perturbação mecânica ou instabilidades que poderiam estar presentes no fluido, constatou-se que o movimento aleatório realizado pela partícula poderia ser devido às colisões com as moléculas existentes no fluido (SILVA; LIMA, 2007).

A verdadeira causa do fenômeno foi elucidada por Einstein em 1905 e posteriormente verificado por Jean Perrin em suas famosas experiências. A solução de Einstein representou um passo importante para o estabelecimento da estrutura atômica da matéria, além de representar um grande avanço científico das ideias atomísticas da teoria cinética dos gases. De acordo com a teoria cinética, os fluidos são formados por moléculas que se movem aleatoriamente devido as flutuações térmicas. Por causa disso, se uma partícula externa, ou partícula browniana, estiver imersa no fluido, suas moléculas irão colidir com a partícula browniana, assim como colidem entre si, conferindo portanto à partícula externa o movimento aleatório observado. Então, o movimento browniano nos permite observar as flutuações estatísticas que ocorrem em um sistema em equilíbrio térmico (SILVA, 2013).

Posteriormente ao trabalho de Einstein, houve importantes contribuições dadas por Smoluchowski, Langevin, Fokker e muitos outros para compreender o movimento browniano. O movimento da partícula browniana fornece uma visão considerável dos mecanismos responsáveis pela existência de flutuações que constituem um fundo de ruído que impõe limitações à precisão de medidas físicas exatas (REIF, 2009). Atualmente, muitos desses sistemas são encontrados em diversas áreas da física, e estão presentes em escala microscópica e macroscópica, até escalas astronômicas, podendo ser observado em sistemas estelares (CHANDRASEKHAR, 1943). Embora nosso objetivo no presente monografia seja estudar o movimento browniano quântico, achamos esclarecedor começar nossa análise pela origem do fenômeno, neste caso, considerando o movimento browniano

clássico. Desta forma, neste capítulo, abordaremos o movimento browniano clássico usando o modelo de Langevin, que explica como uma partícula se move estocasticamente através de uma equação diferencial estocástica.

2.1 Equação de Langevin

Considere uma partícula de massa m imersa em um líquido com uma temperatura T , onde a coordenada do centro de massa em um tempo t é descrita por $x(t)$. Supondo que o movimento browniano seja produzido pela colisão da pequena partícula browniana com as moléculas do fluido, podemos escrever a equação de Langevin (SALINAS, 1997), aplicando a Segunda Lei de Newton, como

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \frac{\mathbf{v}}{\alpha} + \mathbf{F}(t), \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{v}$ é a velocidade da partícula, $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ é uma força externa, α é o coeficiente de atrito viscoso e $\mathbf{F}(t)$ é uma força estocástica que representa o bombardeamento incessante da partícula browniana pelas moléculas do fluido.

Na equação de Langevin a influência do meio sobre o movimento da partícula é dividida em duas partes: (i) uma que varia lentamente devido a fricção dinâmica sobre o movimento da partícula, correspondente ao segundo termo no lado direito da equação acima, o qual é proporcional a velocidade da partícula; e (ii) outra parte referente a contribuição aleatória $\mathbf{F}(t)$, que varia rapidamente em comparação com o tempo de observação. Para simplificar a notação vamos considerar o caso unidimensional, nesse caso a equação de Langevin é dada por

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\text{ext}} - \frac{v}{\alpha} + F(t). \quad (2.2)$$

Para a função $F(t)$, Langevin definiu duas propriedades devido a sua característica estatística e aleatória. A primeira propriedade é que a média de $F(t)$ é nula, o que é expresso pela equação

$$\langle F(t) \rangle = 0. \quad (2.3)$$

A segunda propriedade, expressa pela equação

$$\langle F(t)F(t') \rangle = g\delta(t' - t), \quad (2.4)$$

é conhecida como função de correlação da função $F(t)$ e $\delta(t - t')$ é a função delta de Dirac.

A função de correlação é definida por

$$C(t, t') = \langle F(t)F(t') \rangle - \langle F(t) \rangle \langle F(t') \rangle, \quad (2.5)$$

ou seja, quando não há correlação entre as forças em t e t' , a média conjunta $\langle F(t)F(t') \rangle$ é igual o produto das médias individuais $\langle F(t) \rangle \langle F(t') \rangle$, assim $C(t, t') = 0$ (HUANG, 2009).

Aqui, o símbolo $\langle . \rangle$ denota o valor esperado de uma grandeza, enquanto g na Eq.(2.4) é uma constante que representa a intensidade do ruído branco (REICHL, 1999).

O ruído branco² é um tipo especial de sinal estocástico que possui a mesma intensidade em todas as frequências, tornando-o uma fonte de sinal estocástico com características únicas. Por ser um processo estocástico, a força em um determinado instante de tempo é completamente independente da força em qualquer outro instante de tempo, indicando que a correlação entre os valores da função $F(t)$ é não nula somente para um tempo zero, ou seja, muito menor do que qualquer outra escala de tempo física no problema. Esse tipo de correlação é característico de processos estocásticos com correlação de curto alcance. No movimento browniano, por exemplo, o tempo de correlação da força $F(t)$ é da ordem de 10^{-20} segundos, que é o tempo de colisão molecular. Isso significa que, para todos os propósitos práticos, uma partícula browniana é movida por ruído branco. As equações (2.3) e (2.4) são propriedades muito importantes da força estocástica $F(t)$ e ocorrem com frequência em sistemas físicos que exibem um comportamento dessa natureza (PAPOULIS; PILLAI, 2002).

Além das propriedades citadas acima, a força estocástica $F(t)$ é definida por duas hipóteses principais. A primeira pressupõe que $F(t)$ não depende da velocidade $v(t)$ e $F(t)$ varia extremamente rápido comparado com as variações provenientes da velocidade $v(t)$. A segunda suposição implica que existem intervalos de tempo com duração Δt tais que, durante esse intervalo, as variações esperadas em $v(t)$ são muito pequenas, enquanto que durante o mesmo intervalo $F(t)$ pode sofrer várias flutuações. Resumidamente, embora se espere que exista uma diferença de valor, mesmo que insignificante, entre $v(t)$ e $v(t + \Delta t)$, não existirá nenhuma correlação entre $F(t)$ e $F(t + \Delta t)$.

Por fim, ao resolver a equação de Langevin sujeita a todas as suposições feitas até o momento, será possível derivar as relações fisicamente significativas referente ao movimento da partícula browniana (CHANDRASEKHAR, 1943).

2.2 Solução da equação de Langevin

Vamos considerar aqui o caso de uma partícula livre, isto é, com força externa nula ($F_{\text{ext}} = 0$), assim

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \mathcal{F}, \quad (2.6)$$

com $\tau = \alpha m$ e $\mathcal{F} = F(t)/m$. A Eq. (2.6) corresponde a uma equação diferencial linear que, em nosso caso, é conhecida como uma equação diferencial estocástica (EDE), devido as flutuações produzidas por $\mathcal{F}$.

² A força aleatória tem as propriedades: (i) $\langle F_\omega \rangle = 0$ e (ii) $\langle F_\omega F_{\omega'} \rangle = 2\pi K(\omega) \delta(\omega + \omega')$, onde $F_\omega = F_{*-\omega}$ é a transformada de Fourier de $F(t)$. A função de correlação associada à força é $\langle F(t)F(t') \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} K(\omega) e^{-i\omega t}$. No caso do espectro do ruído branco, $K(\omega)$ é independente de ω , o que implica que $\langle F(t)F(t') \rangle = 2\pi K_0 \delta(t - t')$.

A solução da equação de Langevin deve ser entendida como a busca por uma distribuição de probabilidade gaussiana $p(v, t; v_0)$ que descreva a probabilidade de ocorrência de uma velocidade v , em um tempo t , admitindo que a velocidade inicial é v_0 em $t = 0$. A função $p(v, t; v_0)$ deve satisfazer duas condições fundamentais. A primeira requer que, quando t tende a zero, $p(v, t; v_0)$ deve tender à função delta de Dirac,

$$p(v, t \rightarrow 0; v_0) = \delta(v - v_0). \quad (2.7)$$

A segunda exige que, quando t tende ao infinito, $p(v, t; v_0)$ deve tender à distribuição de Maxwell-Boltzmann para a temperatura T do fluido circundante, independente do valor de v_0 , assim

$$p(v, t \rightarrow \infty; v_0) \rightarrow \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right) \text{Exp} \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right). \quad (2.8)$$

Essas condições físicas são fundamentais para que a solução da equação de Langevin seja relevante e possa ser utilizada para descrever o comportamento de partículas em fluidos.

A distribuição de probabilidade $p(v, t; v_0)$ encontrada através da equação de Langevin pode ser utilizada para calcular médias estatísticas e outras grandezas relevantes, como a difusão das partículas. Ao levar em consideração as informações mencionadas, podemos investigar uma suposição analítica³ para a equação de Langevin, tratando a Eq. (2.6) como uma equação diferencial ordinária (EDO), conforme apresentado por Lima (SILVA; LIMA, 2007). Nessa abordagem, supomos que a força estocástica $\mathcal{F}$ seja: (i) bem comportada e gaussiana, e (ii) não dependa de $v(t)$. Além disso, é importante ressaltar que essa suposição considera que a partícula browniana é mais pesada que as moléculas do fluido com as quais interage. Ao considerar que a partícula browniana é mais pesada, podemos supor que ela terá uma inércia maior em comparação com as moléculas do fluido. Isso significa que a partícula terá uma tendência a se mover mais lentamente em resposta aos impactos das moléculas do fluido e terá menos probabilidade de ser deslocada significativamente por esses impactos.

Em geral, uma EDO pode ser resolvida multiplicando-se ambos os lados da equação por uma função apropriada chamada de fator integrante $I(t)$ (STEWART, 2006). Temos então,

$$I \left(\dot{v} + \frac{v}{\tau} \right) = \frac{d(Iv)}{dt}, \quad (2.9)$$

onde o uso do 'ponto' sobre a variável v representa uma derivada com relação ao tempo. Para encontrarmos a função $I(t)$, devemos igualar o lado direito da equação acima com o mesmo lado da Eq. (2.6), multiplicado por $I(t)$. Assim,

$$\frac{d(Iv)}{dt} = I\mathcal{F}. \quad (2.10)$$

³ Um tratamento matematicamente rigoroso e apropriado para outros exemplos de regimes físicos para a solução da equação de Langevin pode ser encontrado nas Refs. (SANTOS, 2011), (KANNMAN; BHARUCHA-REID, 1972) e (KUBO, 1966). Essas referências fornecem análises detalhadas, métodos e técnicas específicas para resolver a equação de Langevin em contextos variados.

Integrando ambos os lados, teremos

$$Iv = \int I\mathcal{F}dt + C, \quad (2.11)$$

onde C é uma constante de integração. Desse modo a solução será

$$v(t) = \frac{1}{I(t)} \left[\int I(t)\mathcal{F}dt + C \right]. \quad (2.12)$$

Para encontrar $I(t)$, podemos reescrever a Eq. (2.9) da seguinte forma

$$\frac{I(t)}{\tau} = \dot{I}(t). \quad (2.13)$$

A equação para $I(t)$, tem solução dada por

$$I(t) = e^{\frac{t}{\tau}}. \quad (2.14)$$

Então, a fórmula para a solução geral da Eq. (2.6) é fornecida pela Eq. (2.12), onde $I(t)$ é dado pela Eq. (2.14). Dessa forma, utilizando os resultados obtidos, a solução geral da equação de Langevin é dada por

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t \mathcal{F}(t') e^{\frac{t'}{\tau}} dt', \quad (2.15)$$

onde a constante $C = v_0$ foi determinada exigindo que, em $t = 0$, $v(0) = v_0$.

Sabendo que a velocidade da partícula é dada pela Eq.(2.15), o valor esperado pode ser obtido através da equação

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t \langle \mathcal{F}(t') \rangle e^{\frac{t'}{\tau}} dt'. \quad (2.16)$$

Além disso, utilizando a condição dada na Eq. (2.3), temos

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.17)$$

Uma outra quantidade de interesse é o desvio da média $\Delta v = v(t) - \langle v(t) \rangle$, a qual fornece

$$\Delta v = e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t e^{\frac{t'}{\tau}} \mathcal{F}(t') dt'. \quad (2.18)$$

Note que o valor médio da equação acima é zero e, conseqüentemente, nenhuma informação é obtida dessa operação. No entanto, podemos usar (2.18) para calcular a dispersão, ou seja,

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = e^{-\frac{2t}{\tau}} \int_0^t \int_0^t e^{\frac{1}{\tau}(t'+t'')} \langle \mathcal{F}(t') \mathcal{F}(t'') \rangle dt' dt'', \quad (2.19)$$

onde, por definição, $\langle (\Delta v)^2 \rangle = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$. Utilizando a Eq. (2.4) é direto obter

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = g e^{-\frac{2t}{\tau}} \int_0^t \int_0^t e^{\frac{1}{\tau}(t'+t'')} \delta(t'' - t') dt' dt''. \quad (2.20)$$

Fazendo a mudança de variável $u = (t'' - t')$ na Eq. (2.20), obtemos

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = g e^{-\frac{2t}{\tau}} \int_0^t e^{\frac{2t'}{\tau}} dt' \int_{-t'}^{t-t'} e^{\frac{u}{\tau}} \delta(u) du, \quad (2.21)$$

assim,

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = g e^{-\frac{2t}{\tau}} \int_0^t e^{\frac{2t'}{\tau}} [\theta(t - t') - \theta(-t')] dt', \quad (2.22)$$

onde $\theta(x)$ é a função de Heaviside, com $\theta(x) = 1$ para $x > 0$ e $\theta(x) = 0$ para $x < 0$. Assumindo que t e t' são positivos e $(t - t') > 0$, a dispersão será dada por

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \frac{g\tau}{2} (1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}). \quad (2.23)$$

O parâmetro g pode ser encontrado quando consideramos o limite para tempos longos ($t \rightarrow \infty$), em comparação com o tempo de flutuação da função $\mathcal{F}$, ou seja, quando a distribuição está em um regime estacionário. Nesse caso, vamos ter que $\langle v(t) \rangle = 0$ na Eq. (2.17). Assim, utilizando a Eq. (2.23), temos

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \langle v^2 \rangle = \frac{g\tau}{2}. \quad (2.24)$$

Sabendo ainda que no regime estacionário, para tempos longos, o teorema da equipartição da energia é válido e garante que a energia cinética média de uma partícula em movimento seja dada por

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T, \quad (2.25)$$

podemos combinar os resultados fornecidos pelas Eqs. (2.24) e (2.25) para obter que

$$g = \frac{2k_B T}{m\tau}, \quad (2.26)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e T a temperatura. Portanto, a dispersão na velocidade é escrita como

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \frac{k_B T}{m} (1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}). \quad (2.27)$$

Note que para tempos pequenos, em primeira ordem, a equação acima é linear com o tempo, indicando que vai a zero em $t = 0$. É possível observar o comportamento da dispersão na velocidade para tempos longos e muito pequenos na Figura (1).

Com os resultados acima, a distribuição de probabilidade gaussiana será dada por

$$p(v, t; v_0) = [2\pi \langle (\Delta v)^2 \rangle]^{-\frac{1}{2}} \text{Exp} \left[-\frac{(v - \langle v \rangle)^2}{2 \langle (\Delta v)^2 \rangle} \right], \quad (2.28)$$

isto é,

$$p(v, t; v_0) = \left[\frac{m}{2\pi k_B T (1 - e^{-\frac{2t}{\tau}})} \right]^{\frac{1}{2}} \text{Exp} \left[-\frac{m(v - v_0 e^{-\frac{t}{\tau}})^2}{2k_B T (1 - e^{-\frac{2t}{\tau}})} \right]. \quad (2.29)$$

Note que, quando fazemos ($t \rightarrow \infty$), para tempos muito longos, $p(v, t; v_0)$ tende a função de Maxwell-Boltzmann para um gás unidimensional e independente de v_0 como exigido pela Eq. (2.8) (SALINAS, 1997).

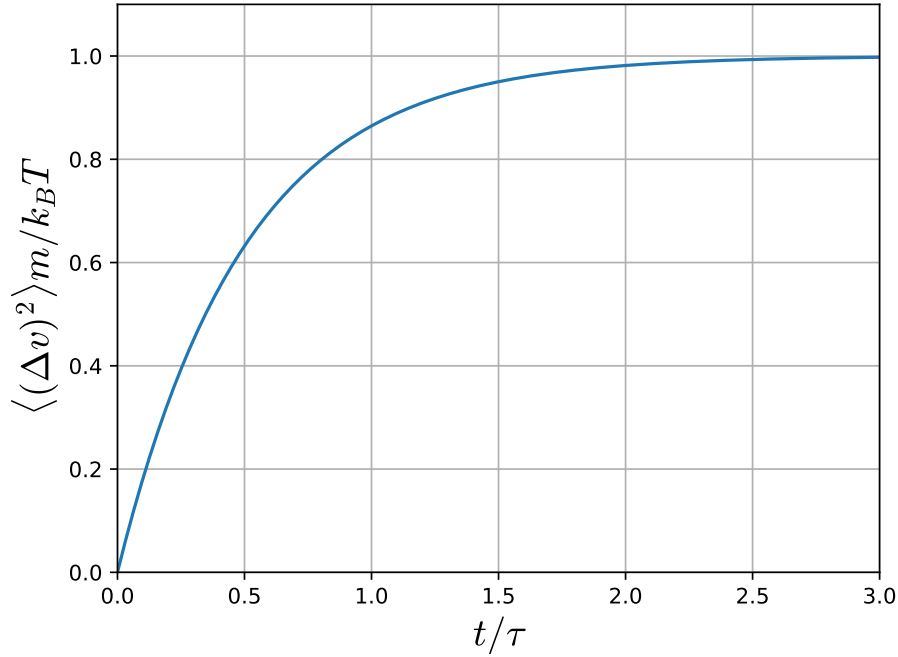


Figura 1 – Comportamento da dispersão na velocidade em função de $\frac{t}{\tau}$.

Podemos ainda, utilizando os resultados obtidos até então, calcular a dispersão na posição da partícula browniana. Assim, uma vez que $v(t) = dx/dt$, temos

$$x(t) = \int v(t)dt + C. \quad (2.30)$$

Desta forma, o valor esperado da posição será dado por

$$\langle x(t) \rangle = x_0 + \int_0^t \langle v(t') \rangle dt', \quad (2.31)$$

em que consideramos $x(0) = x_0 = C$ para $t = 0$.

Utilizando a Eq. (2.17) para o valor esperado da velocidade, temos

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= x_0 + \int_0^t v_0 e^{-\frac{t'}{\tau}} dt' \\ &= x_0 + v_0 \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \end{aligned} \quad (2.32)$$

O desvio da média para a posição da partícula browniana pode ser obtido escrevendo $\Delta x = x - \langle x \rangle$ e usando as Eqs. (2.30), (2.32) and (2.15). Neste caso, obtemos

$$\Delta x = \int_0^t e^{-\frac{t'}{\tau}} dt' \int_0^{t'} \mathcal{F}(t'') e^{\frac{t''}{\tau}} dt''. \quad (2.33)$$

O integrando acima é uma função de t' e t'' , isto é, $f(t', t'')$, que pode ser facilmente resolvido mudando a ordem das integrações. A integral $\iint_D f(t', t'') dt' dt''$ com $D = \{f(t', t''), 0 \leq$

$t' \leq t, 0 \leq t'' \leq t'\}$, pode ser vista como $\iint_{\bar{D}} f(t', t'') dt' dt''$ com $\bar{D} = \{f(t', t''), t'' \leq t' \leq t, 0 \leq t'' \leq t\}$, como mostra a Figura 2. Com isto, temos

$$\Delta x = \int_0^t \mathcal{F}(t'') e^{\frac{t''}{\tau}} dt'' \int_{t''}^t e^{-\frac{t'}{\tau}} dt'. \quad (2.34)$$

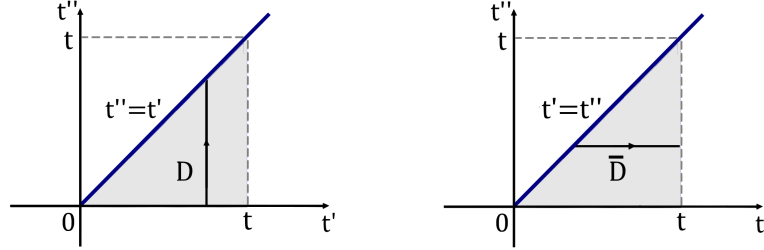


Figura 2 – Alteração da ordem de integração da região de domínio D para a região de domínio $\bar{D}$.

Consequentemente, o desvio da média da posição é escrito como

$$\Delta x = \tau \int_0^t \mathcal{F}(t'') (1 - e^{\frac{1}{\tau}(t''-t)}) dt''. \quad (2.35)$$

A dispersão na posição pode então se escrita como

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \tau^2 \int_0^t \int_0^t \langle \mathcal{F}(t') \mathcal{F}(t'') \rangle (1 - e^{\frac{1}{\tau}(t'-t)}) (1 - e^{\frac{1}{\tau}(t''-t)}) dt' dt''. \quad (2.36)$$

Para resolvermos as integrais acima, devemos considerar a Eq. (2.4), e em seguida fazer a mudança de variável $u = (t'' - t')$, considerando t' e t positivos e $(t - t') > 0$. Isso conduzirá a equação

$$\begin{aligned} \langle (\Delta x)^2 \rangle &= g\tau^2 \int_0^t \int_{-t'}^{t-t'} \delta(u) \left(e^{\frac{1}{\tau}(2t'+u-2t)} - e^{\frac{1}{\tau}(u+t'-t)} - e^{\frac{1}{\tau}(t'-t)} + 1 \right) dt' du \quad (2.37) \\ \langle (\Delta x)^2 \rangle &= g\tau^2 \left[\frac{\tau}{2} (1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}) - 2\tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + t \right]. \end{aligned}$$

Portanto, a expressão final para a dispersão na posição será dada por

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{k_B T \tau^2}{m} \left(\frac{2t}{\tau} + 4e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}} - 3 \right), \quad (2.38)$$

na qual usamos a definição (2.26) para parâmetro g .

É importante observarmos aqui dois limites interessantes para a dispersão acima, que são os casos de tempos muito pequenos e tempos muito longos. Para valores de tempo tais que $t \ll \tau^4$, temos

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \approx v_0^2 t^2, \quad (2.39)$$

⁴ Em 2005, foi experimentalmente detectado o regime balístico no movimento browniano, no qual partículas movem-se em trajetórias lineares por períodos prolongados, sem serem afetadas pelas colisões com o fluido. Essa descoberta desafiou as expectativas teóricas baseadas na equação de Langevin padrão, que descreve o movimento browniano difusivo (LUKIĆ et al., 2005).

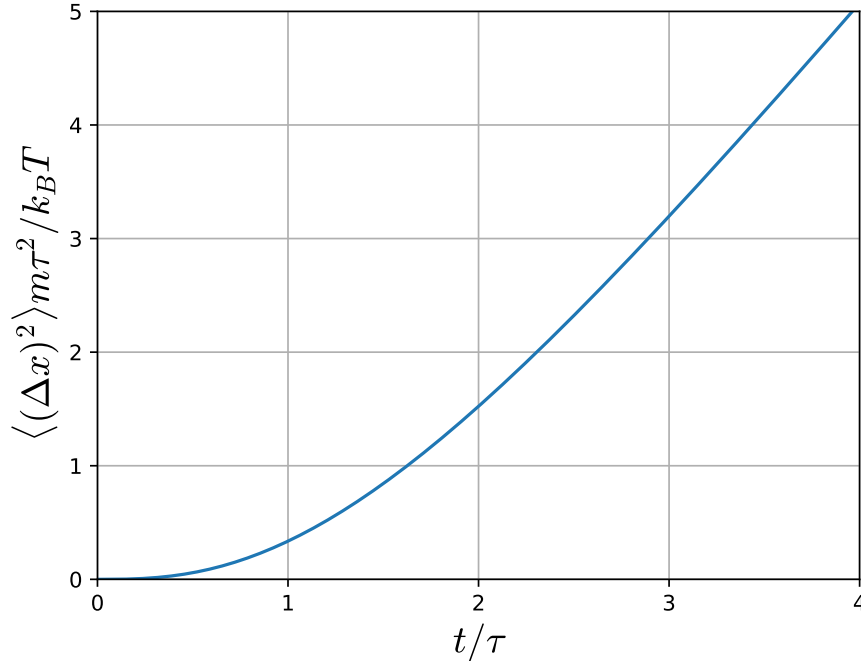


Figura 3 – Comportamento da dispersão na posição em função de $\frac{t}{\tau}$.

Esse resultado está de acordo com a mecânica clássica, quando $F(t)$ não está incluída na equação de movimento.

Por outro lado, para tempos longos, ou seja, $t \gg \tau$, a contribuição dominante corresponde ao primeiro termo no lado direito da Eq. (2.38), logo

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{2k_B T \tau}{m} t. \quad (2.40)$$

Essa relação nos mostra que a partícula terá uma grande incerteza em sua posição à medida que o tempo passa, e essa incerteza continuará a crescer com o tempo, resultando em uma dispersão cada vez maior para a sua posição ao longo do tempo. Além disso, o resultado acima foi deduzido por Einstein, que definiu a constante de difusão como $D = k_B T \tau / m$, que indica a natureza estocástica do movimento browniano. Interessantemente, o resultado obtido pela abordagem de Langevin é equivalente ao resultado de Einstein no regime de tempos longos.

Utilizando os resultados para o desvio da média e dispersão associados a posição obtidos acima, podemos ainda escrever a distribuição gaussiana $p(x, t; x_0)$, como

$$p(x, t; x_0) = [2\pi \langle (\Delta x)^2 \rangle]^{-\frac{1}{2}} \text{Exp} \left[-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2 \langle (\Delta x)^2 \rangle} \right]. \quad (2.41)$$

Para tempos longos, a expressão acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$p(x, t; x_0) = (4\pi Dt)^{-\frac{1}{2}} \text{Exp} \left[-\frac{(x - x_0 - v_0 \frac{1}{\tau})^2}{4Dt} \right], \quad (2.42)$$

a qual é uma solução da equação de difusão unidimensional,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (2.43)$$

que aponta o caráter irreversível do movimento browniano (SALINAS, 1997). Os resultados obtidos para $\langle(\Delta v)^2\rangle$ e $\langle(\Delta x)^2\rangle$ fornecem distribuições gaussianas que definem um caráter estatístico ou estocástico para uma partícula browniana imersa em um líquido com flutuações térmicas.

Como foi discutido anteriormente, na descrição clássica do movimento browniano, a trajetória da partícula é modelada por meio de uma equação diferencial estocástica, como a equação de Langevin, que considera a influência das colisões aleatórias do fluido. Recentes descobertas revelaram uma versão quântica do movimento browniano, conhecido como movimento browniano quântico induzido, ou movimento tipo browniano, que é explicado no contexto da teoria quântica de campos.

O movimento browniano clássico é descrito pela teoria cinética dos gases, enquanto o movimento browniano quântico ocorre quando uma partícula carregada é afetada por flutuações quânticas em sua vizinhança, resultando em um tipo de movimento aleatório em seu deslocamento. Esses dois fenômenos são importantes em diferentes campos da física e fornecem uma compreensão fundamental do comportamento aleatório das partículas em diferentes escalas. No próximo capítulo, serão apresentados os conceitos básicos do espaço de Minkowski e da teoria quântica de campos, necessários para entender esse fenômeno.

3 Introdução à teoria quântica de campos escalar no espaço de Minkowski

3.1 O espaço-tempo de Minkowski

O espaço de Minkowski é um espaço-tempo plano de quatro dimensões que consiste em três dimensões espaciais e uma dimensão temporal. É caracterizado pela métrica de Minkowski, que é dada por uma forma quadrática ds^2 , a qual define o intervalo de espaço-tempo entre dois eventos. Essa métrica é fundamental na formulação da teoria da relatividade especial de Einstein e é usada para descrever a geometria do espaço-tempo em termos de distâncias e intervalos de tempo⁵.

Considere um referencial inercial $\mathcal{O}$ e outro referencial inercial $\mathcal{O}'$, que se move em relação a $\mathcal{O}$ com velocidade v ao longo do eixo x , onde os eixos de $\mathcal{O}'$ são paralelos aos eixos de $\mathcal{O}$. Suponha que as origens O e O' coincidam no instante $t = t' = 0$. Quando dois observadores em repouso nesses referenciais observam o mesmo evento, eles atribuem diferentes coordenadas (x, y, z, t) e (x', y', z', t') ao evento. Essas coordenadas estão relacionadas por

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

conhecidas como transformações de Lorentz. Esse conjunto de transformações foram deduzidas por Einstein em 1905 com base no postulado fundamental da constância da velocidade da luz no vácuo. Quando consideramos $c \gg v$ nas transformações de Lorentz, obtemos o limite não relativístico definido pelas transformações de Galileu, que descrevem a física clássica, em que o tempo e o espaço são independentes e absolutos.

Podemos facilmente e convenientemente generalizar as transformações de Lorentz para uma direção arbitrária e eliminar a particularidade da escolha da velocidade v ao longo do eixo x (LEMOS, 2007). Essa generalização é escrita como

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}}{\beta^2} \boldsymbol{\beta} - \gamma c \boldsymbol{\beta} t, \tag{3.2}$$

⁵ A métrica de Minkowski, fundamentalmente descrita por Einstein (1905) em seu artigo "*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*" ("*Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento*"), é um conceito-chave na formulação da teoria da relatividade especial (EINSTEIN et al., 1905).

$$t' = \gamma(t - \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}}{c}), \quad (3.3)$$

em que

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c, \quad (3.4)$$

sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ o vetor posição referente a $\mathcal{O}$ e $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ o vetor posição referente a $\mathcal{O}'$. É direto ver que para uma direção particular x , as Eqs. (3.2) and (3.3) se reduzem as expressões em (3.1).

O intervalo ds entre dois eventos infinitesimalmente próximos, com coordenadas (x, y, z, t) e $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$, respectivamente, é definido por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.5)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski.

Do conjunto de transformações de Lorentz, por exemplo, em (3.1), deduzimos

$$dx' = \gamma(dx - vdt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \gamma(dt - vdx/c^2). \quad (3.6)$$

Consequentemente

$$ds^2 = ds'^2. \quad (3.7)$$

Este é um importante resultado: o intervalo entre dois eventos é uma grandeza invariante sob transformações de Lorentz, o que é um resultado fundamental da teoria da relatividade especial. As transformações de Lorentz preservam a forma da métrica de Minkowski e, portanto, as leis da física são invariantes sob essas transformações.

3.2 Campo escalar não massivo

Considere um campo escalar sem massa $\phi(\mathbf{r}, t)$ definido em todos os pontos $(\mathbf{r}, t)$ de um espaço-tempo de Minkowski 4-dimensional. Esse campo satisfaz a equação de onda relativística conhecida como equação de Klein-Gordon, dada por

$$\square\phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.8)$$

onde $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ é o operador d'Alembertiano e $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ é o operador de derivada covariante. Nesse contexto, a velocidade da luz c e a constante de Planck reduzida $\hbar$ são assumidas iguais a 1, seguindo um sistema de unidades naturais. Na teoria quântica de campos, no caso massivo, a equação equivalente considerando a massa descreve mésons escalares, que são partículas sem spin e com massa m .

Podemos construir um modelo de campo escalar não massivo, que forneça a Eq. (3.8), partindo da densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi, \quad (3.9)$$

por construção da ação

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} d^4x \quad (3.10)$$

e exigindo que a variação com respeito a ϕ seja

$$\delta\mathcal{S} = 0. \quad (3.11)$$

Um conjunto de soluções não normalizadas da Eq.(3.8) é dado por (BIRRELL; DAVIES, 1984)

$$\phi(\mathbf{r}, t) = N e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}, \quad (3.12)$$

onde N é a constante de normalização a ser obtida, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ representa o vetor de onda, com componentes em cada direção e $\omega^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ são as auto frequências do campo. Note que as componentes cartesianas k_i possuem valores no intervalo

$$-\infty < k_i < \infty, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.13)$$

A constante N pode ser obtida a partir da condição de normalização

$$2\omega_{\mathbf{k}} \int dV \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \phi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}, t) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (3.14)$$

onde o símbolo delta $\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ é entendido como uma delta de Kronecker para números quânticos discretos e uma função delta de Dirac para números quânticos contínuos.

3.3 Quantização do campo escalar

Na mecânica quântica, os estados físicos de um sistema são representados por vetores de estados $|\alpha\rangle$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ (SAKURAI; COMMINS, 1995). A probabilidade de encontrar o sistema descrito pelo vetor $|\alpha\rangle$ no autoestado $|\beta\rangle$ de um observável dado é

$$\text{Probabilidade de } \beta = |\langle\beta|\alpha\rangle|^2, \quad (3.15)$$

desde que $|\alpha\rangle$ esteja normalizado. Além disso, um operador $A^\dagger$ é chamado de adjunto hermitiano, ou simplesmente adjunto de A no espaço $\mathcal{H}$, quando

$$A^\dagger = A. \quad (3.16)$$

Os operadores hermitianos são de grande importância na física, uma vez que possuem propriedades fundamentais que os tornam essenciais para a descrição de sistemas físicos quânticos. Em particular, esses operadores são notáveis por possuir autovalores reais, o que é crucial para a medição de observáveis em sistemas quânticos. Quando um sistema está no auto estado de um operador hermitiano, a medição do observável associado a esse operador sempre produz um resultado real (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018).

Além disso, na mecânica quântica, o valor esperado do observável A quando o sistema está no estado $|\alpha\rangle$ é dado por

$$\langle A \rangle \equiv \langle \alpha | A | \alpha \rangle. \quad (3.17)$$

Esse valor representa a previsão teórica para o resultado médio de várias medições do observável A em um grande número de sistemas idênticos, todos no estado $|\alpha\rangle$.

Uma das formas de se quantizar o campo na mecânica quântica é tratá-lo como um operador. Ao fazer isso, o sistema é quantizado e seus modos normais, descritos pela equação (3.12), juntamente com seus complexos conjugados, formam uma base ortogonal no espaço de Hilbert, com o produto escalar dado pela equação (3.14). Essa base é essencial para a expansão do campo na forma de uma série de modos, permitindo uma descrição precisa do comportamento quântico do campo. Por meio dessa base, o campo pode ser escrito como uma combinação linear dos modos normais dada por

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \left[a_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} \phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}, t) \right], \quad (3.18)$$

onde $a_{\mathbf{k}}$ e $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ são os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, e satisfazem as relações de comutação

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = 0, \quad (3.19)$$

$$[a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = 0, \quad (3.20)$$

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}. \quad (3.21)$$

Uma base conveniente para nosso estudo no espaço de Hilbert é formada por vetores normalizados, que podem ser construídos a partir do vetor $|0\rangle$, definido como estado de vácuo. O estado $|0\rangle$ tem a propriedade de ser aniquilado por todos os operadores a_{σ} ,

$$a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0, \quad \forall a_{\mathbf{k}}, \quad (3.22)$$

e tem valor associado

$$\langle 0 | a_{\mathbf{k}}^{\dagger} = 0, \quad \forall a_{\mathbf{k}}^{\dagger}. \quad (3.23)$$

Juntamente com essa propriedade, temos

$$\langle 0 | a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^{\dagger} | 0 \rangle = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (3.24)$$

de onde obtemos

$$W(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle 0 | \hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \hat{\phi}(\mathbf{r}', t') | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}', t'), \quad (3.25)$$

que representa a função de Wightman de dois pontos quando o sistema está no estado de vácuo quântico $|0\rangle$. Essa equação é conhecida como a função de correlação de dois pontos do campo escalar $\phi(\mathbf{r}, t)$. Ela descreve como o campo em um ponto $(\mathbf{r}, t)$ está correlacionado

com o campo em outro ponto $(\mathbf{r}', t')$ quando o sistema está no estado de vácuo quântico. A soma sobre $\mathbf{k}$ na equação (3.25) representa a soma sobre todos os possíveis modos de oscilação do campo. Cada modo $\mathbf{k}$ contribui com um termo para a função de correlação e a combinação de todos esses termos resulta na função completa (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 2008). A função de Wightman é uma ferramenta importante na teoria quântica de campos, pois permite calcular a probabilidade de transição de um estado para outro e será construída com base nas condições de fronteira estabelecidas (PESKIN; HALZEN, 1995). A função de Wightman, em teoria quântica de campos, também permite identificar e eliminar infinitos para obtermos observáveis físicos finitos, em um processo conhecido como regularização seguido de renormalização. Com esta função, é ainda possível calcular dispersões não nulas do campo.

É importante notar que estamos interessados em estudar o movimento tipo browniano de uma partícula carregada, no estado de vácuo do campo escalar quântico. Nesse caso, consideramos $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$ como um operador atuando em um espaço de Hilbert. Para estudar a influência do campo quântico sobre o movimento da partícula, podemos entender que a influência gerada pelo campo quântico será considerada como uma força estocástica clássica, como veremos mais adiante. Assim, os valores esperados associados à velocidade e à posição da partícula podem ser calculados usando os momentos da força estocástica, que serão dados em termos dos valores esperados de vácuo do campo quântico. No caso em que $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$ é uma quantidade puramente quântica, vamos ver que o valor esperado da velocidade é nulo, devido ao estado de vácuo, enquanto que a dispersão da velocidade da partícula poderá ser não nula e finita, dependendo de condições de fronteira impostas ao campo. Além disso, na ausência de condições de fronteira, a dispersão da velocidade da partícula renormalizada será nula.

Mesmo no caso em que contribuições clássicas existem, a dispersão resultante é uma quantidade puramente quântica. Vamos supor que o campo é formado pela soma de uma contribuição clássica $\hat{\phi}_C(\mathbf{r}, t)$ e quântica $\hat{\phi}_Q(\mathbf{r}, t)$, então o valor esperado no vácuo pode ser escrito como

$$\langle \hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \hat{\phi}_C(\mathbf{r}, t) \rangle + \langle \hat{\phi}_Q(\mathbf{r}, t) \rangle = \hat{\phi}_C(\mathbf{r}, t). \quad (3.26)$$

Porém, a função de correlação será dada por (SWENDSEN, 2020)

$$C(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle \hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \hat{\phi}(\mathbf{r}', t') \rangle - \langle \hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \hat{\phi}(\mathbf{r}', t') \rangle = \langle \hat{\phi}_Q(\mathbf{r}, t) \hat{\phi}_Q(\mathbf{r}', t') \rangle, \quad (3.27)$$

de forma que, a função de correlação é identificada como sendo a própria função de Wightman

$$C(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = W(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'). \quad (3.28)$$

Isso ocorre porque a função de correlação é uma quantidade puramente quântica, uma vez que a contribuição clássica do campo se cancela na subtração. Portanto, para simplificar, consideramos $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$ como um campo quântico sem perda de generalidade.

4 Revisão sobre o movimento browniano quântico induzido em (1+1) dimensões

Neste capítulo, será apresentada uma revisão dos resultados obtidos para o movimento browniano de uma partícula carregada interagindo com um campo escalar sem massa em (1+1) dimensões no espaço-tempo de Minkowski. Os autores do artigo “Quantum Brownian motion near a point-like reflecting boundary” (LORENCI; JR; SILVA, 2014) investigaram o movimento tipo browniano de uma partícula teste interagindo com um campo escalar quântico com condição de fronteira de Dirichlet. Foram derivadas as expressões para as dispersões na velocidade e na posição da partícula carregada, as quais foram comparadas com os resultados de uma carga elétrica interagindo com um campo eletromagnético quântico próxima a uma fronteira plana refletora do artigo “Vacuum fluctuations and Brownian motion of a charged test particle near a reflecting boundary” (YU; FORD, 2004).

A investigação de uma partícula teste de carga elétrica e e massa m acoplada às flutuações eletromagnéticas do vácuo, colocada a uma distância x da fronteira, revelou que o vácuo modificado induz um tipo de movimento browniano na partícula teste. Esse movimento browniano é caracterizado pelas seguintes dispersões renormalizadas das componentes de sua velocidade no instante τ :

$$\langle (\Delta v_x)^2 \rangle = \frac{e^2}{32\pi m^2} \frac{\tau}{x^3} \ln \left(\frac{2x + \tau}{2x - \tau} \right)^2, \quad (4.1)$$

$$\langle (\Delta v_y)^2 \rangle = \frac{e^2}{8\pi m^2} \left[\frac{\tau}{4x^3} \ln \left(\frac{2x + \tau}{2x - \tau} \right)^2 - \frac{\tau^2}{x^2(\tau^2 - 4x^2)} \right], \quad (4.2)$$

que podem ser negativas em algumas situações devido à renormalização do sistema. Além disso, $\langle (\Delta v_z)^2 \rangle = \langle (\Delta v_y)^2 \rangle$. Assim, tanto no estudo do movimento tipo browniano de uma partícula carregada interagindo com um campo escalar quântico quanto no estudo da interação de uma carga elétrica com um campo eletromagnético quântico próximo a uma fronteira colocada a uma distância x , foi notado um comportamento divergente para as dispersões na origem e no intervalo de tempo correspondente a uma viagem de ida e volta de um pulso de luz entre a partícula e a fronteira, como veremos abaixo.

Neste contexto, é possível considerar o campo quântico como uma variável estocástica, sem perda de generalidade. Isso nos permite entender que as flutuações estão presentes mesmo no estado de vácuo, e assim, uma partícula carregada interagindo com o campo exibirá um movimento semelhante ao movimento browniano, no vácuo quântico. Ainda não está claro se o movimento browniano pode ser observado no estado de vácuo de Minkowski. O vácuo de Minkowski é o espaço-tempo plano da relatividade especial, e como

tal, é um espaço vazio sem partículas (SCHWARTZ, 2014). Em outras palavras, embora não se possa observar o movimento browniano no vácuo de Minkowski, as flutuações do vácuo podem ser vistas como uma manifestação do movimento aleatório e incerto das partículas quânticas em um estado de energia mínima e podem produzir efeitos observáveis, como no caso do efeito Casimir na eletrodinâmica quântica (LAMOREAUX, 1997).

É importante notar que o vácuo quântico, que é o estado de menor energia de um campo quântico, está sujeito a flutuações quânticas. Embora essas flutuações que geram o movimento tipo browniano não sejam exatamente as mesmas que geram o movimento browniano clássico em um meio, elas compartilham algumas propriedades semelhantes, como a aleatoriedade e a incerteza na posição e momento. A partir dessa observação, pode-se derivar a equação de Langevin para a partícula, o que nos permite analisar graficamente e analiticamente a dispersão da velocidade e posição da partícula, além de estudar o comportamento dessas grandezas.

4.1 Equação de Langevin

O sistema que iremos considerar é descrito pela ação total

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{par}} + \mathcal{S}_{\text{fld}} + \mathcal{S}_{\text{int}}, \quad (4.3)$$

onde $\mathcal{S}_{\text{par}}$ representa a ação da partícula browniana, $\mathcal{S}_{\text{fld}}$ é a ação do campo com o qual a partícula browniana interage e $\mathcal{S}_{\text{int}}$ descreve a interação entre a partícula browniana e o campo (GOUR; SRIRAMKUMAR, 1999). Consideramos que a partícula browniana interage com um campo escalar sem massa em (1+1) dimensões, com a ação $\mathcal{S}_{\text{fld}}$ dada por

$$\mathcal{S}_{\text{fld}} = \int dt \int dx \left\{ \frac{1}{2} \partial^\mu \hat{\phi} \partial_\mu \hat{\phi} \right\}, \quad (4.4)$$

obedecendo a condição de fronteira de Dirichlet

$$\hat{\phi}(x=0, t) = 0 \quad (4.5)$$

onde $\hat{\phi}(x, t)$ denota o campo escalar sem massa quantizado.

Considerando que a partícula browniana se move de forma não relativística, a ação $\mathcal{S}_{\text{par}}$ que descreve a partícula browniana de massa m e carga q deslocando-se ao longo do eixo x é dada por

$$\mathcal{S}_{\text{par}} = \int dt \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad (4.6)$$

onde $\dot{x} = dx/dt$.

Por último, para a partícula escalar carregada interagindo com o campo escalar, a ação $\mathcal{S}_{\text{int}}$ será dada por

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = \int dt \int dx \rho \hat{\phi}, \quad (4.7)$$

onde ρ é a densidade de carga. A densidade de carga para uma partícula carregada não relativística movendo-se ao longo do eixo x é dada por

$$\rho(x, t) = q\delta(x - x(t)), \quad (4.8)$$

onde q é a intensidade da carga. Assim, o sistema completo está descrito pela ação (4.3) com $\mathcal{S}_{\text{int}}$ dada pelas Eqs. (4.7) e (4.8).

Ao variar a ação (4.3) em relação ao campo escalar $\hat{\phi}$ e à trajetória $x(t)$ da carga, descobrimos que as equações de movimento satisfeitas pelo campo e pela partícula carregada são dadas, respectivamente, por

$$\square\hat{\phi} = q\delta(x - x(t)) \quad (4.9)$$

e

$$m\ddot{x} = q\frac{\partial\hat{\phi}(x, t)}{\partial x}, \quad (4.10)$$

onde $\ddot{x} = d^2x/dx^2 = dv/dt$.

O campo escalar $\hat{\phi}$ que satisfaz a Eq. (4.9) pode ser decomposto em sua componente homogênea $\hat{\phi}_{\text{H}}$ e particular $\hat{\phi}_{\text{P}}$, como se segue

$$\hat{\phi}(x, t) = \hat{\phi}_{\text{H}(x, t)} + \hat{\phi}_{\text{P}}(x, t). \quad (4.11)$$

A componente homogênea do campo $\hat{\phi}_{\text{H}}$ é independente da densidade de carga ρ e satisfaz a equação de Klein-Gordon homogênea, cuja solução mais geral é dada por uma superposição de modos de ondas planas. Já a componente particular do campo $\hat{\phi}_{\text{P}}$ é uma solução da equação de Klein-Gordon não homogênea e está relacionada com a densidade de carga ρ . Nesse contexto, vamos assumir que a partícula escalar carregada interage com o campo escalar, mas sua contribuição é insignificante e pode ser negligenciada. Assim, a equação de Klein-Gordon pode ser aproximada como $\square\hat{\phi} \approx 0$, referente à componente homogênea $\hat{\phi}_{\text{H}}(x, t)$ do campo. Os efeitos gerados pela solução não homogênea, para o mesmo sistema, mas sem condição de fronteira, foram analisados na Ref. (GOUR; SRIRAMKUMAR, 1999). Esses efeitos estão relacionados à dissipação e ao *backreaction* do sistema, tornando-se significativos em regimes de tempo longo.

A aproximação utilizada no artigo analisado considera um modelo idealizado, em que apenas a solução homogênea do sistema é levada em conta. Essa abordagem simplificada é adotada com o objetivo de facilitar a análise e obter resultados mais tratáveis matematicamente. Nesse contexto, os efeitos da solução não homogênea são ignorados devido ao seu impacto insignificante nos resultados e nos aspectos associados ao modelo (LORENCI; JR; SILVA, 2014).

4.1.1 Quantização do campo escalar e função de Wightman

Considere o campo escalar $\hat{\phi}(x, t)$ sem massa em (1+1) dimensões, que deve satisfazer a equação de Klein-Gordon

$$\square \hat{\phi}(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \hat{\phi}(x, t) = 0. \quad (4.12)$$

Estamos interessados em considerar a condição de fronteira de Dirichlet

$$\hat{\phi}(x = 0, t) = 0 \quad (4.13)$$

na solução do campo escalar sem massa. Utilizando a Eq. (3.18) para expandir o campo em modos normais, temos

$$\hat{\phi}(x, t) = \sum_k \left[a_k \phi_k(x, t) + a_k^\dagger \phi_k^*(x, t) \right], \quad (4.14)$$

onde as funções $\phi_k(x, t)$ devem ser soluções da Eq. (4.12), com k sendo o momento na direção x em (1+1) dimensões, isto é,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi_k(x, t) = 0. \quad (4.15)$$

Aplicando a condição de fronteira de Dirichlet, com $\phi_k(x = 0, t) = 0$, temos

$$\phi_k(x, t) = N e^{-i\omega_k t} \sin(kx). \quad (4.16)$$

com $\omega_k = k$.

Para determinar a constante de normalização N utilizamos o produto interno definido pela Eq. (3.14), adaptada para (1+1)-dimensões. Assim

$$(2\omega N^2) \int_0^\infty \sin(kx) \sin(k'x) dx = \delta(k - k'), \quad (4.17)$$

que resulta em

$$N = \frac{1}{\sqrt{\pi\omega_k}}. \quad (4.18)$$

Note que a integral em (4.17) é dada por $\frac{\pi}{2} \delta(k - k')$ (ARFKEN; WEBER, 1999).

Com a constante de normalização determinada, podemos escrever a solução normalizada como

$$\phi_k(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\omega_k}} e^{-i\omega_k t} \sin(kx). \quad (4.19)$$

A função de Wightman é definida pela Eq. (3.25). Para o caso de (1+1) dimensões, vamos ter

$$W(x, t; x', t') = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_k \Delta\tau}}{\omega_k} \sin(kx) \sin(kx') dk_x, \quad (4.20)$$

onde $\Delta\tau = i(t - t')$. A integral em k pode ser resolvida, por exemplo, com a ajuda de *softwares* como o *Mathematica*, fornecendo o seguinte resultado:

$$W(x, t; x', t') = \frac{1}{4\pi} \left\{ \ln \left[(x + x')^2 - (t - t')^2 \right] - \ln \left[(x - x')^2 - (t - t')^2 \right] \right\}. \quad (4.21)$$

É importante ressaltar que a função de Wightman pode conter divergências que impedem a sua manipulação matemática. Por esse motivo, é necessário realizar o processo de renormalização da função de Wightman, que consiste em remover as divergências presentes na função. Esse processo é fundamental para garantir que os resultados obtidos a partir da função de Wightman sejam físicos e consistentes. Para isso, devemos remover a parte que diverge no limite de coincidência $x = x'$, isto é, descartar o termo devido ao vácuo de Minkowski dado pelo segundo termo do lado direito de (4.21). Assim, a função de Wightman renormalizada será dada por

$$W_R(x, t; x, t') = \frac{1}{4\pi} \ln \left[(x + x')^2 - (t - t')^2 \right]. \quad (4.22)$$

Portanto, podemos ver que a função de Wightman acima é finita em $x = x'$.

4.2 Solução da equação de Langevin

O movimento de uma partícula de massa m e carga q interagindo com um campo escalar $\hat{\phi}(x, t)$, em um regime não relativístico, é dado pela Eq. (4.9). Restringindo nosso estudo ao caso onde a posição da partícula não varia apreciavelmente no tempo (modelo idealizado) (LORENCI; JR; SILVA, 2014), a velocidade da partícula será

$$v = \frac{q}{m} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\tau \hat{\phi}(x, t) dt, \quad (4.23)$$

em que $x(t)$ no argumento do campo será considerado aproximadamente constante no tempo⁶. Assim, o valor esperado da expressão acima é dado por

$$\langle v \rangle = \langle 0|v|0 \rangle = \frac{q}{m} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\tau \langle \hat{\phi}(x, t) \rangle dt. \quad (4.24)$$

Como o estado de vácuo é definido por (3.22) e (3.23), observa-se que $\langle a \rangle = \langle 0|a|0 \rangle = \langle 0|a^+|0 \rangle = 0$. Assim, a Eq. (4.24) se torna

$$\langle v \rangle = 0. \quad (4.25)$$

A partir da Eq.(4.23) para a velocidade da partícula, podemos escrever v^2 como

$$v^2 = \frac{q^2}{m^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_0^\tau \int_0^\tau \hat{\phi}(x, t) \hat{\phi}(x', t') dt dt' \right]_{x'=x}. \quad (4.26)$$

⁶ Ao assumir essa condição, é possível simplificar a análise e os cálculos envolvidos no modelo, facilitando a compreensão e permitindo obter resultados mais tratáveis matematicamente. Isso ocorre porque a variável x , nesse caso, não depende do tempo t , o que elimina a complexidade associada à consideração do movimento temporal da partícula.

Como consequência, o valor esperado associado será

$$\langle v^2 \rangle = \langle (\Delta v)^2 \rangle = \frac{q^2}{m^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_0^\tau \int_0^\tau W_R(x, t; x', t') dt dt' \right]_{x'=x}, \quad (4.27)$$

que coincide com a dispersão na velocidade em decorrência de (4.25).

Utilizando a Eq. (4.22), temos

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \frac{q^2}{4\pi m^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_0^\tau \int_0^\tau \ln [(x + x')^2 - (t - t')^2] dt dt' \right]_{x'=x}. \quad (4.28)$$

Calculando as derivadas e aplicando o limite de coincidência $x' = x$, obtemos

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \frac{q^2}{4\pi m^2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \left[\frac{2}{4x^2 - (t - t')^2} - \frac{16x^2}{4x^2 - (t - t')^2} \right]. \quad (4.29)$$

A integral em t' fornece a expressão

$$\langle (\Delta v^2) \rangle = -\frac{q^2}{2\pi m^2} \int_0^\tau dt \left[\frac{t - \tau}{(t - \tau)^2 - 4x^2} - \frac{t}{t^2 - 4x^2} \right]. \quad (4.30)$$

Finalmente, calculando a integral em relação a t , obtemos a dispersão da velocidade da partícula, dada por

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = -\frac{q^2}{4\pi m^2} \ln \left(\frac{4x^2}{\tau^2 - 4x^2} \right)^2. \quad (4.31)$$

A equação (4.31) apresenta duas divergências significativas. A primeira ocorre em $x = 0$, devido à condição de fronteira de Dirichlet imposta. Essa divergência surge devido à singularidade na origem do sistema coordenado. A segunda divergência ocorre em $\tau = 2x$ para qualquer valor de x . Embora sutil, essa divergência é crucial, pois representa o tempo necessário para um sinal de luz (fóton) percorrer a distância entre o plano e a partícula e retornar. Essa singularidade pode ter um impacto significativo nos resultados, uma vez que afeta o comportamento do sistema em relação ao tempo.

É importante ressaltar que essas singularidades surgem devido ao modelo idealizado adotado, onde consideramos a posição da condição de fronteira como bem definida⁷. O uso da Figura (4) pode ser útil para visualizar as divergências mencionadas anteriormente e compreender melhor a sua natureza e consequências no contexto do modelo em questão.

A obtenção de um valor negativo para a dispersão de velocidade indica um efeito de sub-vácuo⁸, ou seja, uma supressão da incerteza da velocidade da partícula em comparação

⁷ A consideração da posição da condição de fronteira como bem definida, no modelo em questão, baseia-se na suposição de que a fronteira é clássica. Isso significa que a fronteira é tratada como uma entidade estática e bem definida, cuja posição é fixa e não está sujeita a flutuações quânticas.

⁸ A obtenção de um valor negativo para a dispersão de velocidade, como observado neste contexto, indica a ocorrência de um efeito de sub-vácuo. Esse efeito implica que as velocidades das partículas estão abaixo das expectativas teóricas para um vácuo, ou seja, apresentam velocidades menores do que as previstas em um ambiente vazio. Essa observação sugere a presença de interações ou perturbações que reduzem a velocidade média das partículas em relação aos valores teóricos.

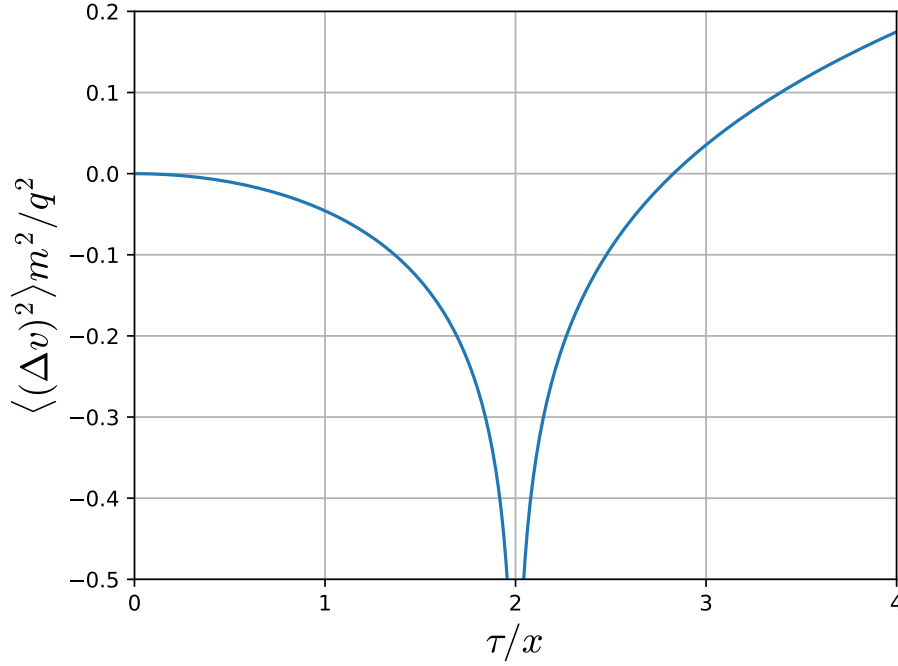


Figura 4 – Comportamento da dispersão na velocidade da partícula em (1+1) dimensões em função da razão τ/x .

com o vácuo de Minkowski. Durante o processo de renormalização, as divergências que surgem na parte da função de Wightman na presença da condição de fronteira em $x = 0$, são anuladas pelas divergências correspondentes que aparecem na parte da função de Wightman relativa a Minkowski. No entanto, a divergência remanescente em $x = 0$ da expressão renormalizada (4.31) existe porque consideramos $\phi(x = 0, t) = 0$. Nesse caso, estamos subtraindo uma quantidade finita de uma quantidade infinita, o que faz com que a renormalização falhe nesse ponto⁹.

Agora, vamos concentrar nosso cálculo nos valores esperados relacionados à posição da partícula. A dispersão da posição será dada por $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$. Notando que $dx = v(t)dt$, a partir da Eq.(4.24) podemos obter

$$\langle x \rangle - \langle x_0 \rangle = \frac{q}{m} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} dt \langle \hat{\phi}(x, t) \rangle, \quad (4.32)$$

que se torna $\langle x \rangle = \langle x_0 \rangle$, em decorrência de $\langle \hat{\phi}(x, t) \rangle = 0$. A expressão para $\langle x^2 \rangle$ pode ser obtida direto da definição de $x(t)$.

Desta forma, a dispersão da posição pode ser facilmente obtida e é escrita da

⁹ A renormalização pode falhar em resolver completamente as divergências matemáticas, resultando em dificuldades na obtenção de resultados físicos consistentes. Isso pode ocorrer devido a escolhas inadequadas nas quantidades renormalizadas, a simetrias não consideradas em modelos idealizados.

seguinte forma

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \frac{q^2}{m^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2 \int_0^{t_1} dt \int_0^{t_2} dt' W_R(x, t : x', t') \right]_{x'=x}. \quad (4.33)$$

Assim, substituindo a Eq. (4.22) na equação acima, obtemos que

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \frac{q^2}{4\pi m^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2 \int_0^{t_1} dt \int_0^{t_2} dt' \ln [(x+x')^2 - (t-t')^2] \right\}_{x'=x}. \quad (4.34)$$

Realizando as derivadas e aplicando o limite de coincidência $x' = x$, temos

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \frac{q^2}{4\pi m^2} \int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2 \int_0^{t_1} dt \int_0^{t_2} dt' \left[\frac{2}{4x^2 - (t-t')^2} - \frac{16x^2}{4x^2 - (t-t')^2} \right]. \quad (4.35)$$

Novamente utilizando a ajuda do *Mathematica*, as integrais acima podem ser executadas de modo a fornecer a dispersão na posição, ou seja, (SILVA, 2013)

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \frac{x^2 q^2}{8\pi m^2} \left[\left(\frac{\tau^2}{x^2} - 4 \right) \ln \left(\frac{\tau^2 - 4x^2}{4x^2} \right)^2 - 2 \frac{\tau^2}{x^2} \right]. \quad (4.36)$$

A Figura (5) apresenta o comportamento da dispersão na posição da partícula carregada. Para qualquer posição arbitrária x da partícula que seja diferente de zero, a dispersão na posição $\langle(\Delta x)^2\rangle$ é uma função regular do tempo τ . Especificamente, em $\tau = 2x$, a dispersão na posição é igual a $-(q^2/\pi m^2)x^2$, que é uma função regular da posição x . Em um trabalho recente onde foi analisado, dentre outras coisas, o movimento tipo browniano considerando condições de fronteira em dois planos paralelos perfeitamente refletores, esse comportamento regular também aparece para as componentes da dispersão da posição paralelas as placas (FERREIRA; GUEDES; MOTA, 2023). No entanto, para a componente perpendicular o comportamento é irregular.

Durante a derivação dos resultados acima, pressupomos que a partícula mantém sua posição quase inalterada ao longo do tempo. Essa suposição pode ser formulada como $|\langle(\Delta x)^2\rangle/x^2| \ll 1$, o que significa que a posição x da partícula pode ser considerada constante, de modo que

$$\frac{q^2}{8\pi m^2} \left| \left(\frac{\tau^2}{x^2} - 4 \right) \ln \left(\frac{\tau^2 - 4x^2}{4x^2} \right) - 2 \frac{\tau^2}{x^2} \right| \ll 1. \quad (4.37)$$

Dessa forma, para $\tau = 2x$ a Eq. (4.37) nos fornece o resultado

$$\frac{q^2}{\pi m^2} \ll 1. \quad (4.38)$$

Uma vez que a carga q e a massa m são constantes, essa desigualdade deve ser válida para todos os valores de x e τ .

A desigualdade da Eq. (4.37) limita a validade dos resultados, sendo que quanto menor o valor de q/m , maior será o intervalo de validade. Por exemplo, se q/m for igual a

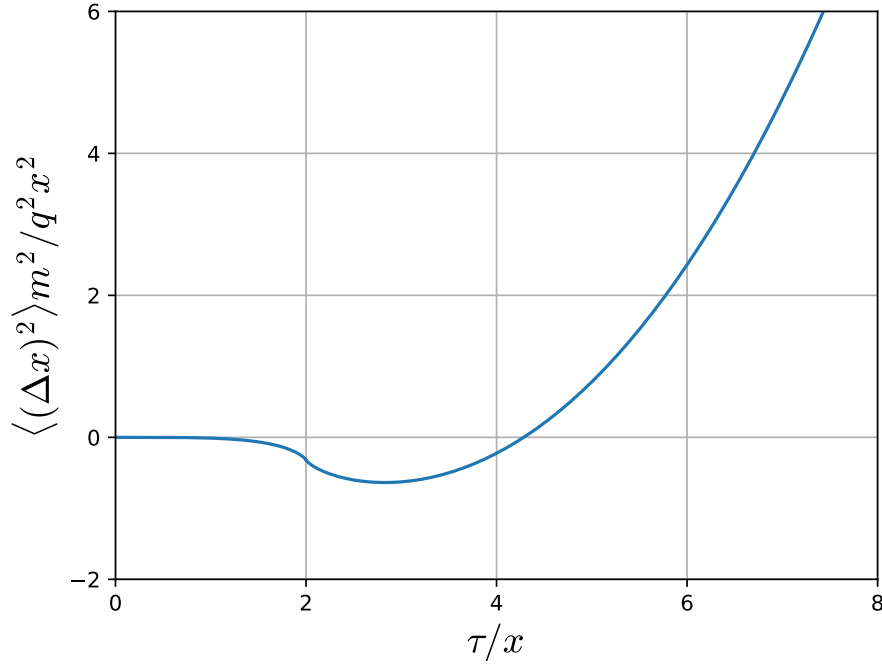


Figura 5 – Comportamento da dispersão na posição da partícula carregada em (1+1) dimensões em função da razão τ/x .

0.2, $\frac{\tau}{x}$ terá um upper bound próximo de 12, enquanto que para $q/m = 1$, o upper bound estará próximo de 5. Ou seja, quanto menor for a razão q/m maior será o alcance de validade dos valores obtidos para as dispersões na velocidade e posição da partícula. A análise do comportamento da dispersão na posição mostrado na Figura (6) pode ajudar a entender essa conclusão.

No contexto do artigo estudado (LORENCI; JR; SILVA, 2014), considerou-se o campo escalar como um campo quântico, enquanto a partícula e a fronteira foram consideradas em posições fixas. Além disso, o artigo também cita que uma descrição mais realista do sistema deveria levar em conta a natureza quântica de todos os seus componentes. Para simular esse aspecto, seria necessário permitir que a posição da partícula flutuasse em torno de x e que considerássemos a natureza quântica da posição da partícula adicionando uma flutuação estocástica em torno de sua posição, como forma de regularizar as divergências presentes nas dispersões.

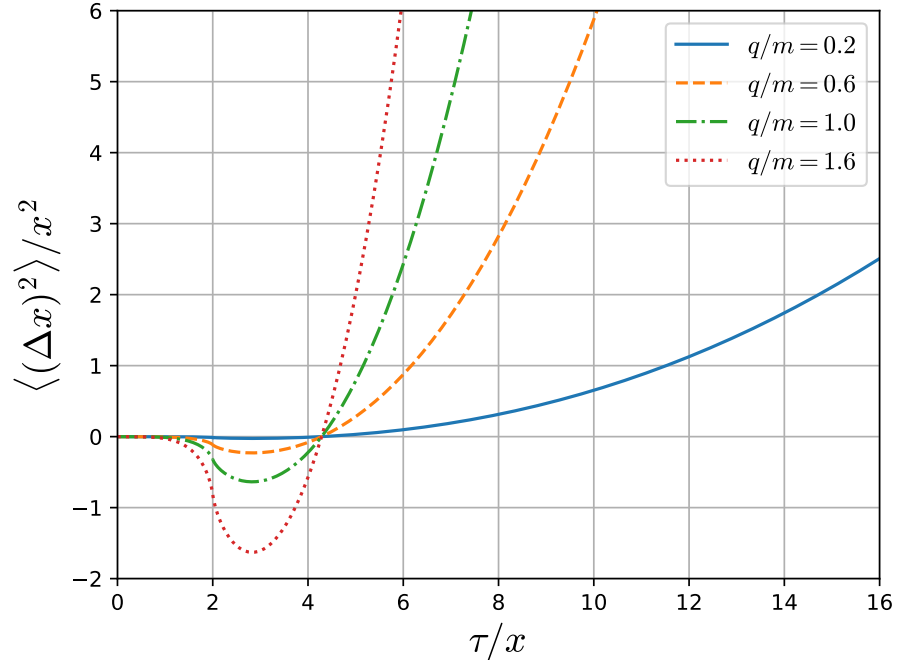


Figura 6 – Comportamento da dispersão na posição da partícula carregada em (1+1) dimensões em função da razão τ/x para diferentes valores de q/m .

5 Movimento browniano quântico induzido em (3+1) dimensões com dois planos refletorres

Neste estudo, incentivado pelo caso em (1+1) dimensões, investigaremos a situação que abrange a interação entre uma partícula browniana carregada e um campo escalar sem massa no espaço-tempo de Minkowski em (3+1) dimensões. O campo escalar será submetido a uma condição de fronteira (contorno) de Dirichlet, imposta sobre dois planos refletorres situados sobre o eixo x , nas posições $x = 0$ e $x = a$.

Semelhante ao caso unidimensional revisado no Capítulo 4, estaremos interessados em estudar as dispersões nos observáveis velocidade e posição da partícula. Através do estudo dessas quantidades será possível analisar como a interação entre a partícula e as flutuações quânticas do campo são influenciadas por essa nova configuração.

5.1 Equação de Langevin

Iniciamos escrevendo a ação total $\mathcal{S}$ que representa o sistema, que para a configuração em questão será dada por

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{par}} + \mathcal{S}_{\text{fld}} + \mathcal{S}_{\text{int}}, \quad (5.1)$$

onde

$$\mathcal{S}_{\text{fld}} = \int dt \int dV \{ \frac{1}{2} \partial^\mu \hat{\phi} \partial_\mu \hat{\phi} \}, \quad (5.2)$$

corresponde a ação para o campo escalar sem massa e,

$$\mathcal{S}_{\text{par}} = \int dt \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2, \quad (5.3)$$

representa a ação da partícula brownian com massa m e velocidade $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$. Por fim,

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = q \int dt \int dV \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\phi}, \quad (5.4)$$

descreve a interação entre a partícula browniana e o campo não massivo ϕ . Na equação (5.4), q é uma que equivale a carga da partícula e $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ é a função delta de Dirac em três dimensões.

A variação da ação (5.1) em relação ao campo escalar ϕ , quando admitida ser um mínimo, nos fornece a equação de movimento

$$\square \hat{\phi} = q \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5.5)$$

De forma similar, a variação da ação do sistema com respeito a posição r_i nos fornece as equações de movimento da partícula, a saber,

$$m\ddot{r}_i = q \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i}, \quad (5.6)$$

onde $r_i = (r_x, r_y, r_z) = (x, y, z)$. Essa equação é similar a 2ª lei de Newton para um corpo pontual de massa m com aceleração $\ddot{r}_i = dv_i/dt$ devido a um potencial $-q\phi$.

O campo escalar $\hat{\phi}$ que satisfaz a equação não-homogênea (5.5) pode ser decomposto em suas componentes homogênea $\hat{\phi}_H$ e particular $\hat{\phi}_P$, isto é,

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\phi}_H(\mathbf{r}, t) + \hat{\phi}_P(\mathbf{r}, t). \quad (5.7)$$

Conforme admitido no Capítulo 4 vamos assumir novamente a hipótese de que a partícula escalar carregada interage com o campo escalar, mas que sua contribuição para a solução da Eq. (4.9) é insignificante e pode ser negligenciada. Assim, a equação (5.5) pode ser aproximada como

$$\square \hat{\phi} \approx 0, \quad (5.8)$$

que é uma equação de Klein-Gordon homogênea cuja solução correspondente é a parcela $\hat{\phi}_H(\mathbf{r}, t)$ em (5.7). Daqui por diante vamos omitir o subscrito a fim de simplificar a notação. Uma vez estabelecidas as equações de movimento para cada componente do sistema, vamos prosseguir com a quantização do sistema.

5.1.1 Quantização do campo escalar e função de Wightman

Considere o campo escalar $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$ sem massa em (3+1) dimensões no espaço-tempo de Minkowski, que deve satisfazer a equação de Klein-Gordon homogênea (5.8), ou seja, obedecendo a equação de movimento

$$\square \hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (5.9)$$

No início do capítulo estabelecemos como objetivo o interesse particular em considerar o campo na presença de dois planos refletores paralelos. A condição de Dirichlet exige que a solução do campo seja nula nas posições especificadas, que na ocasião correspondem as posições dos planos situados em $x = 0$ e $x = a$. Portanto, as soluções obtidas para a equação (5.9) devem necessariamente obedecer ambas as condições de contorno

$$\hat{\phi}(x = 0, y, z, t) = 0 \quad (5.10)$$

e

$$\hat{\phi}(x = a, y, z, t) = 0. \quad (5.11)$$

Utilizando a Eq. (3.18) para expandir o campo em termos dos modos normais, temos que as funções $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$, agora, devem ser soluções da Eq. (5.9), isto é,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (5.12)$$

Aplicando a condição de fronteira de Dirichlet, dada pelas Eqs. (5.10) e (5.11), encontramos que a solução normalizada é dada por

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\omega_n a}} \sin(k_n x) e^{-i\omega_n t + ik_y y + ik_z z}, \quad (5.13)$$

onde $\mathbf{k} = (n, k_y, k_z)$ constitue o conjunto de números quânticos, com as auto-frequências dadas por $\omega_n^2 = k_n^2 + k_y^2 + k_z^2$ e $k_n = \frac{n\pi}{a}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $-\infty < k_y, k_z < +\infty$. Ressalta-se que a normalização da Eq. (5.13) foi realizada através da condição (3.14).

Utilizando a definição da função de Wightman (3.25) para as soluções (5.13), temos que

$$\sum_{\mathbf{k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z.$$

Portanto,

$$W(w, w') = \frac{1}{4\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{ik_y \Delta y} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z \Delta z} \sin(k_n x) \sin(k_n x') \frac{e^{-i\omega_n \Delta t}}{\omega_n}, \quad (5.14)$$

onde definimos $\Delta t = (t - t')$, $\Delta y = (y - y')$ e $\Delta z = (z - z')$. Vale ressaltar que a notação $w = (\mathbf{r}, t)$ é introduzida para especificar as coordenadas no espaço-tempo.

Neste ponto, realizaremos uma mudança de coordenadas com o objetivo de simplificar a resolução das integrais presentes na equação (5.14). Vamos tratar as coordenadas de momentum k_y e k_z como coordenadas em um espaço abstrato do tipo polar em que $dk_y dk_z \equiv k dk d\theta$, com $k^2 = k_y^2 + k_z^2$, $0 \leq k \leq \infty$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Com essa mudança, obteremos a função de Wightman em coordenadas tipo polares, dada por

$$W(w, w') = \frac{1}{4\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} k dk \int_0^{2\pi} d\theta e^{ik \Delta r \cos \theta} \sin(k_n x) \sin(k_n x') \frac{e^{-i\omega_n \Delta t}}{\omega_n}, \quad (5.15)$$

onde definimos convenientemente $\Delta r = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}$. Ao resolvermos a integral em relação a θ , obtemos

$$W(w, w') = \frac{1}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} k dk J_0(k \Delta r) \sin(k_n x) \sin(k_n x') \frac{e^{-i\omega_n \Delta t}}{\omega_n}, \quad (5.16)$$

onde $J_0(k \Delta r)$ corresponde à função de Bessel de ordem zero, de primeira espécie.

Podemos utilizar a fórmula de Abel-Plana para resolver a soma em relação ao índice discreto n presente na Eq. (5.16). Essa fórmula é dada por (SAHARIAN, 2007)

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \frac{1}{2} F(0) + \int_0^{\infty} d\xi F(\xi) + i \int_0^{\infty} d\xi \frac{[F(i\xi) - F(-i\xi)]}{(e^{2\pi\xi} - 1)}, \quad (5.17)$$

onde $F(n)$ é a função que depende da soma. Essa fórmula nos permite relacionar uma soma infinita com uma integral, o que pode tornar a solução mais fácil de ser calculada. Dessa forma, identificando

$$F(n) = \sin(k_n x) \sin(k_n x') \frac{e^{-i\omega_n \Delta t}}{\omega_n},$$

podemos reescrever a função de Wightman (5.16) como

$$\begin{aligned} W(w, w') &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^\infty k dk J_0(k \Delta r) \left\{ \int_0^\infty d\xi \sin\left(\frac{\xi \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\xi \pi x'}{a}\right) \frac{e^{-i\omega_\xi \Delta t}}{\omega_\xi} \right. \\ &\quad \left. + i \int_0^\infty d\xi \frac{\sin\left(\frac{i\xi \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{i\xi \pi x'}{a}\right)}{(e^{2\pi\xi} - 1)} \left[\frac{e^{-i\omega_{+i\xi} \Delta t}}{\omega_{+i\xi}} - \frac{e^{-i\omega_{-i\xi} \Delta t}}{\omega_{-i\xi}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde usamos o fato de que $F(0) = 0$ e temos definido $\omega_{\pm i\xi} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{\pm i\xi \pi}{a}\right)^2}$, observando que

$$\omega_{\pm i\xi} = \begin{cases} (\pm i) \sqrt{\left(\frac{\xi \pi}{a}\right)^2 - k^2}, & \text{para } \xi > \frac{ka}{\pi} \\ \sqrt{k^2 - \left(\frac{\xi \pi}{a}\right)^2}, & \text{para } \xi < \frac{ka}{\pi}. \end{cases} \quad (5.19)$$

Para fins de particidade e simplificação matemática podemos dividir a Eq. (5.18) em duas partes, W_1 e W_2 , e realizar a mudança de variável $s = \frac{\xi \pi}{a}$. Assim, encontramos que

$$W(w, w') = W_1(w, w') + W_2(w, w') \quad (5.20)$$

com

$$W_1(w, w') = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty ds \sin(sx) \sin(sx') \int_0^\infty dk \frac{k J_0(k \Delta r) e^{-i\Delta t \sqrt{s^2 + k^2}}}{\sqrt{s^2 + k^2}} ds, \quad (5.21)$$

e

$$W_2(w, w') = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty k dk J_0(k \Delta r) \int_k^\infty ds \frac{\sin(isx) \sin(isx') \cosh(\Delta t \sqrt{s^2 - k^2})}{(e^{2sa} - 1) \sqrt{s^2 - k^2}}. \quad (5.22)$$

As integrais em W_1 e W_2 podem ser facilmente encontradas nas referências Prudnikov et al. (1986) (PRUDNIKOV; BRYCHKOV; MARICHEV, 1986) e Gradshteyn e Ryzhik (2007) (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2007), ou resolvidas (quando devidamente organizadas) com o uso do *software Mathematica*. Assim, para W_1 , após a solução da integral em k , temos

$$W_1(w, w') = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \sin(isx) \sin(isx') ds \frac{e^{-s\sqrt{(\Delta r)^2 - (\Delta t)^2}}}{\sqrt{(\Delta r)^2 - (\Delta t)^2}}, \quad (5.23)$$

que definindo $\alpha^2 = (\Delta r)^2 - (\Delta t)^2$ fornece

$$W_1(w, w') = \frac{1}{4\pi^2 \alpha} \left\{ \frac{1}{[\alpha^2 + (\Delta x)^2]} - \frac{1}{[\alpha^2 + \Delta x]} \right\}, \quad (5.24)$$

com $\Delta x = (x - x')$ e $\overline{\Delta x} = (x + x')$.

A solução das integrais em $W_2(w, w')$ pode ser vista de uma maneira mais simples através de uma mudança de região. Em termos estruturais, na Eq. (5.22) temos que $\iint_D f(k, s) dA$, onde $f(k, s)$ representa todo o integrando de (5.22) e $dA \equiv dk ds$, com a região de integração definida $D = \{f(k, s), 0 \leq k < \infty, k \leq s < \infty\}$. De forma equivalente essa integração pode ser vista como, $\iint_{\bar{D}} f(k, s) dA$ com $\bar{D} = \{f(k, s), 0 \leq k < s, 0 \leq s < \infty\}$. Na Figura (7) mostramos uma ilustração desse processo. Dessa forma, podemos

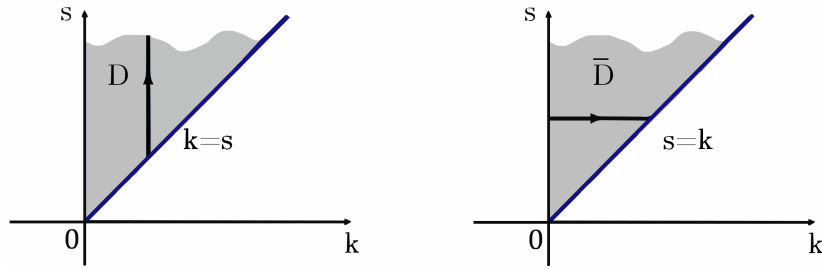


Figura 7 – Alteração da ordem de integração da região de domínio D para a região de domínio $\bar{D}$.

expressar $W_2(\omega, \omega')$ como

$$W_2(w, w') = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin(isx)\sin(isx')}{(e^{2sa} - 1)} ds \int_0^s \frac{k J_0(k\Delta r) \cosh(\Delta t \sqrt{s^2 - k^2})}{\sqrt{s^2 - k^2}} dk. \quad (5.25)$$

Resolvendo a integral em k , obtemos

$$\begin{aligned} W_2(w, w') &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin(isx)\sin(isx')}{(e^{2sa} - 1)} \frac{\sin(s\sqrt{(\Delta r)^2 - (\Delta t)^2})}{\sqrt{(\Delta r)^2 - (\Delta t)^2}} ds \\ &= \frac{1}{2\pi^2\alpha} \int_0^\infty \frac{[\cosh(s\Delta x) - \cosh(s\overline{\Delta x})]\sin(\alpha s)}{(e^{2sa} - 1)} ds. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Finalmente, resolvendo a integral em s , obtemos

$$\begin{aligned} W_2(w, w') &= \frac{1}{4\pi^2\alpha} \left\{ \frac{1}{[\alpha^2 + \overline{\Delta x}]} - \frac{1}{[\alpha^2 + (\Delta x)^2]} \right\} + \frac{1}{8\pi a\alpha} \left\{ \frac{\sinh(\frac{\pi\alpha}{a})}{[\cosh(\frac{\pi\alpha}{a}) - \cos(\frac{\pi\Delta x}{a})]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sinh(\frac{\pi\alpha}{a})}{[\cosh(\frac{\pi\alpha}{a}) - \cos(\frac{\pi\overline{\Delta x}}{a})]} \right\}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde as quantidades α , Δx e $\overline{\Delta x}$ já foram definidas anteriormente.

É interessante notar que o primeiro termo da Eq. (5.27) corresponde a $-W_1(w, w')$, de forma que $W(w, w')$, em virtude da definição (5.20), será dado por

$$W(w, w') = \frac{1}{8\pi a\alpha} \left\{ \frac{\sinh(\frac{\pi\alpha}{a})}{[\cosh(\frac{\pi\alpha}{a}) - \cos(\frac{\pi\Delta x}{a})]} - \frac{\sinh(\frac{\pi\alpha}{a})}{[\cosh(\frac{\pi\alpha}{a}) - \cos(\frac{\pi\overline{\Delta x}}{a})]} \right\}. \quad (5.28)$$

Para simplificar a Eq. (5.28), podemos utilizar a identidade

$$\frac{\sinh(\frac{\pi\alpha}{a})}{[\cosh(\frac{\pi\alpha}{a}) - \cos(\frac{\pi\Delta x}{a})]} = \frac{2a\alpha}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(\Delta x - 2an)^2 + \alpha^2]}. \quad (5.29)$$

Dessa forma, a função de Wightman em (3+1) dimensões em coordenadas cartesianas será dada por

$$\begin{aligned} W(w, w') &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[(\Delta x - 2an)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta t)^2]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{[(\overline{\Delta x} - 2an)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta t)^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

A partir do resultado anterior observa-se que a contribuição de Minkowski é proveniente do termo $n = 0$ no primeiro membro da equação (5.30), uma vez que é divergente quando tomamos o limite de coincidência. Por outro lado, o termo $n = 0$ do segundo membro dessa mesma equação é finito quando o limite de coincidência $w' \rightarrow w$ é realizado. Nesse sentido, para evitar a divergência, é necessário realizar uma renormalização, removendo o termo que diverge. Assim, a função de Wightman renormalizada pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} W_R(w, w') &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty'} \frac{1}{[(\Delta x - 2an)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta t)^2]} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(\overline{\Delta x} - 2an)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta t)^2]} \right\}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde a linha no primeiro somatório significa que o termo $n = 0$ foi excluído do intervalo.

5.2 Solução da equação de Langevin

Considere uma partícula de carga q e massa m interagindo com um campo escalar $\hat{\phi}(w)$ em um regime não relativístico, cuja posição não varia significativamente no tempo. Conforme obtido na Seção 5.1, a equação de movimento da partícula é dada pela relação (5.6). A partir dessa expressão, observa-se que $\langle v_i \rangle = 0$, pois $\langle \hat{\phi} \rangle = 0$. Assim, semelhante ao que já vimos anteriormente, o valor médio da posição ao quadrado será igual a dispersão. Portanto, utilizando a Eq. (5.6) a dispersão de velocidades da partícula pode ser escrita como

$$\langle (\Delta v_i)^2 \rangle = \frac{q^2}{m^2} \left[\frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r'_i} \int_0^\tau \int_0^\tau W_R(w, w') dt dt' \right]_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}}, \quad (5.32)$$

em que $W_R(w, w')$ é a função de Wightman renormalizada. Nessa expressão estamos assumindo que a dependência temporal das coordenadas r_i é desprezível, ou seja, que r_i é aproximadamente constante.

Substituindo a Eq. (5.31) na Eq. (5.32), temos

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v_i)^2 \rangle &= \frac{q^2}{4\pi^2 m^2} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r'_i} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{1}{[(\Delta x - 2an)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta t)^2]} dt dt' \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{1}{[(\overline{\Delta x} - 2an)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta t)^2]} dt dt' \right\}_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Podemos reescrever $\langle (\Delta v_i)^2 \rangle$ usando a seguinte identidade

$$\int_0^\tau \int_0^\tau f(|t - t'|) dt dt' = 2 \int_0^\tau (\tau - \xi) f(\xi) d\xi. \quad (5.34)$$

Portanto, segue que

$$\langle (\Delta v_i)^2 \rangle = \frac{q^2}{2\pi^2 m^2} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r'_i} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\tau (\tau - \xi) \frac{1}{\eta^2 - \xi^2} d\xi - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\tau (\tau - \xi) \frac{1}{\mu^2 - \xi^2} d\xi \right]_{r'_i=r_i}, \quad (5.35)$$

com $\eta^2 = (\Delta x - 2an)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ e $\mu^2 = (\overline{\Delta x} - 2an)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$. Realizando as integrais, obtemos

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v_i)^2 \rangle &= \frac{q^2}{4\pi^2 m^2} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r'_i} \left\{ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ln \left| \frac{\tau^2 - \eta^2}{\eta^2} \right| + \frac{\tau}{\eta} \ln \left| \frac{\eta + \tau}{\eta - \tau} \right| \right] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ln \left| \frac{\tau^2 - \mu^2}{\mu^2} \right| + \frac{\tau}{\mu} \ln \left| \frac{\mu + \tau}{\mu - \tau} \right| \right] \right\}_{r'_i=r_i}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Agora vamos analisar cada direção particular. Tomando $i = x$, derivando a Eq. (5.36) com respeito a x e aplicando o limite de coincidência, encontramos que a dispersão da velocidade para a componente x é dada por

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v_x)^2 \rangle &= - \left(\frac{q}{\pi m} \right)^2 \frac{1}{32} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\tau_a}{a^2 (x_a - n)^3} \ln \left(\frac{2(x_a - n) + \tau_a}{2(x_a - n) - \tau_a} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{4\tau_a^2}{a^2 (x_a - n)^2 (4(x_a - n)^2 - \tau_a^2)} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\tau_a}{a^2 n^3} \ln \left(\frac{2n + \tau_a}{2n - \tau_a} \right)^2 + \frac{4\tau_a^2}{a^2 n^2 (4n^2 - \tau_a^2)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

onde definimos as quantidades adimensionais $\tau_a = \tau/a$ e $x_a = x/a$. Além disso, uma vez que $0 \leq x \leq a$, dividindo ambos os lados por dessa desigualdade por a , percebemos que $0 \leq x_a \leq 1$.

Fazendo o mesmo cálculo para a componente $i = y$, obtemos que a dispersão de velocidades em y é expressa por

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v_y)^2 \rangle &= - \left(\frac{q}{\pi m} \right)^2 \frac{1}{64} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\tau_a}{a^2 (x_a - n)^3} \ln \left(\frac{2(x_a - n) + \tau_a}{2(x_a - n) - \tau_a} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\tau_a}{a^2 n^3} \ln \left(\frac{2n + \tau_a}{2n - \tau_a} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Um cálculo similar nos mostra que a equação para a dispersão de velocidades na direção z é exatamente a mesma, isto é, $\langle(\Delta v_y)^2\rangle = \langle(\Delta v_z)^2\rangle$.

Considerando os resultados acima, Eqs. (5.37) e (5.38), podemos ver que as componentes da velocidade podem ser divididas em duas partes: uma que é paralela à fronteira, representada por v_x , e outra que é perpendicular à fronteira, representada por v_y e v_z . Nas Figuras (8) e (9) mostramos como as dispersões nas componentes x e y (ou z) da velocidade da partícula, respectivamente, evoluem em função do tempo τ_a , admitindo diferentes valores para o parâmetro x_a .

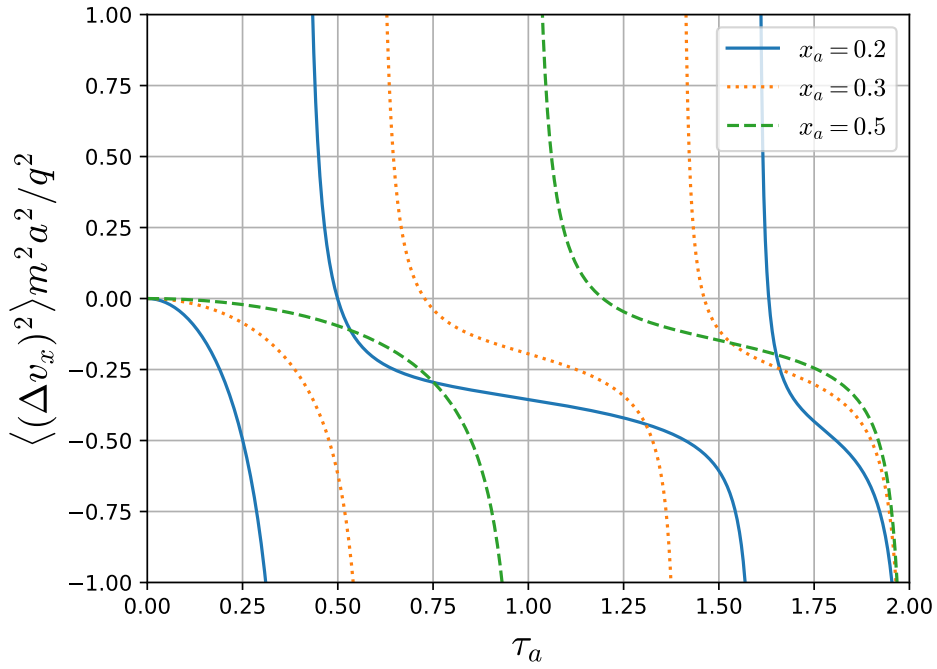


Figura 8 – Comportamento da dispersão na velocidade para a componente x da partícula em função do parâmetro τ_a para diferentes valores de x_a .

Ao examinar as expressões (5.37) e (5.38), é evidente a presença de divergências nos pontos $x = 0$ e $x_a = 1$, que correspondem às posições dos planos. Essas divergências são resultado da imposição da condição de contorno de Dirichlet, que faz com que o campo se anule nessas posições específicas. De acordo com o argumento apresentado por De Lorenci et al. (2014) (LORENCI; JR; SILVA, 2014), essas divergências são uma consequência direta dessa condição de contorno e, como resultado, a renormalização aplicada às nossas expressões não é bem-sucedida em eliminar essas divergências.

Para posições entre os planos, isto é, $x_a \neq 0$ e $x_a \neq 1$, também existem divergências e elas estão relacionadas ao tempo que um sinal de luz leva para viajar de um dos planos até um ponto x_a . Matematicamente, podemos expressar isso como $\tau_a = 2|x_a - n|$. A presença do número inteiro n significa que cada modo do campo contribui com uma divergência. Essas divergências podem ser vistas nos gráficos (8) e (9).

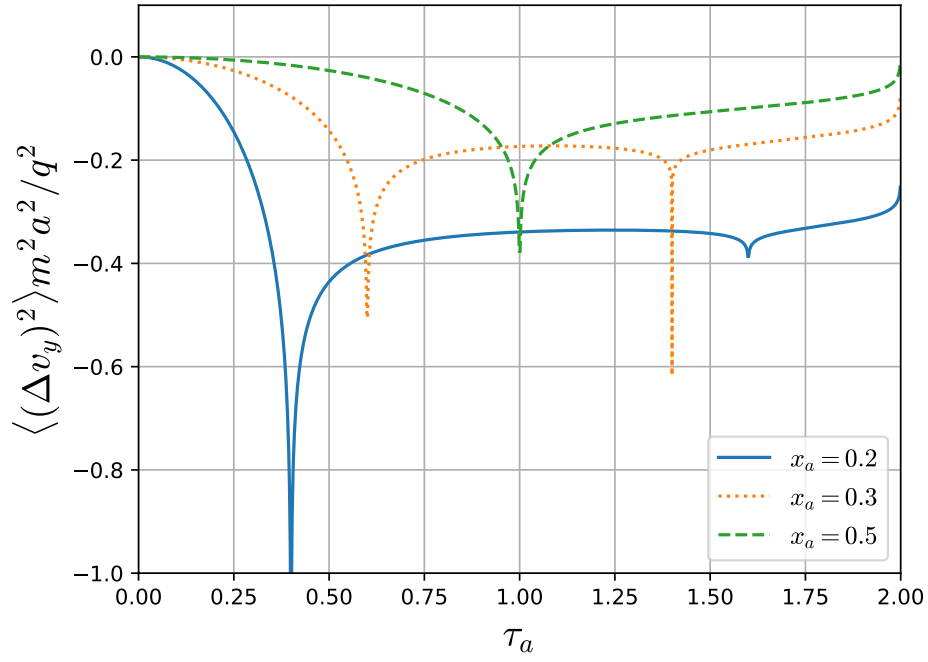


Figura 9 – Comportamento da dispersão na velocidade para a componente y da partícula em função do parâmetro τ_a para diferentes valores de x_a . A componente z possui o mesmo comportamento.

Observando que $v_i = dr_i/dt$, integrando a equação (5.6) duas vezes com respeito ao tempo, podemos encontrar uma equação para a posição da partícula. Então, a partir dessa equação, admitindo que a sua posição inicial é nula, a equação para a dispersão nas coordenadas de posição da partícula será dada por

$$\langle (\Delta r_i)^2 \rangle = \frac{q^2}{m^2} \left[\frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r'_i} \int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2 \int_0^{t_1} dt \int_0^{t_2} dt' W_R(w, w') \right]_{r'_i=r_i}. \quad (5.39)$$

Semelhante os cálculos da dispersão de velocidades, na sequência, vamos estudar cada componente da dispersão na posição separadamente.

A dispersão da posição em x pode ser obtida substituindo a Eq. (5.31) na Eq. (5.39) e em seguida derivando em relação a x e x' . Dessa forma, no limite de coincidência, temos que

$$\begin{aligned} \langle (\Delta x)^2 \rangle &= \frac{q^2}{4\pi^2 m^2} \int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2 \int_0^{t_1} dt \int_0^{t_2} dt' \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{(4(an)^2 - (t-t')^2)^2} \right. \right. \\ &\quad - \frac{64(an)^2}{(4(an)^2 - (t-t')^2)^3} \Big] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{((2x-2an)^2 - (t-t')^2)^2} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{8(2x-2an)^2}{((2x-2an)^2 - (t-t')^2)^3} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Após efetuar as integrais, a expressão resultante para a dispersão na posição x será

$$\begin{aligned} \langle (\Delta x)^2 \rangle &= \frac{q^2}{24\pi^2 m^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\tau_a^2}{n^2} - \frac{\tau_a^3}{2n^3} \ln \left(\frac{2n + \tau_a}{2n - \tau_a} \right)^2 + 2 \ln \left(\frac{\tau_a^2 - 4n^2}{4n^2} \right)^2 \right] \right. \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\tau_a^2}{2(x_a - n)^2} - \frac{\tau_a^3}{4(x_a - n)^3} \ln \left(\frac{2(x_a - n) + \tau_a}{2(x_a - n) - \tau_a} \right)^2 \right. \\ &\left. \left. + \ln \left(\frac{\tau_a^2 - 4(x_a - n)^2}{4(x_a - n)^2} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

onde usamos as definições dos parâmetros τ_a e x_a .

Da mesma forma, tomando $i = y$ na Eq. (5.39), encontramos que

$$\begin{aligned} \langle (\Delta y)^2 \rangle &= \frac{q^2}{4\pi^2 m^2} \int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2 \int_0^{t_1} dt \int_0^{t_2} dt' \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4(an)^2 - (t - t')^2)^2} \right. \\ &\left. - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{((2x - 2an)^2 - (t - t')^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Resolvendo as integrais, obtemos que a expressão para a dispersão em y é dada por

$$\begin{aligned} \langle (\Delta y)^2 \rangle &= \frac{q^2}{24\pi^2 m^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\tau_a^2}{n^2} + \frac{\tau_a^3}{4n^3} \ln \left(\frac{2n + \tau_a}{2n - \tau_a} \right)^2 + 2 \ln \left(\frac{\tau_a^2 - 4n^2}{4n^2} \right)^2 \right] \right. \\ &- \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\tau_a^2}{2(x_a - n)^2} + \frac{\tau_a^3}{8(x_a - n)^3} \ln \left(\frac{2(x_a - n) + \tau_a}{2(x_a - n) - \tau_a} \right)^2 \right. \\ &\left. \left. + \ln \left(\frac{\tau_a^2 - 4(x_a - n)^2}{4(x_a - n)^2} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

a qual também corresponde a dispersão na coordenada z , isto é $\langle (\Delta y)^2 \rangle = \langle (\Delta z)^2 \rangle$. Novamente, temos utilizado a definição dos parâmetros adimensionais τ_a e x_a . É importante notar que, tanto para a dispersão da posição quanto para a dispersão da velocidade, a componente que representa a incerteza na direção y é igual à componente que representa a incerteza na direção z . Essa relação entre as componentes indica que a partícula está se movendo de forma isotrópica em relação aos eixos y e z . O comportamento das Eqs. (5.42) e (5.44) podem ser observados, respectivamente, nas Figuras (10) e (11). Além disso, as divergências nessas equações são similares as que encontramos no estudo da dispersão de velocidades.

Como já discutido, a suposição de que uma partícula mantém sua posição quase constante ao longo do tempo pode ser formulada matematicamente pela expressão

$$\left| \frac{\langle (\Delta r_i)^2 \rangle}{x^2} \right| \ll 1. \quad (5.45)$$

Essa expressão compara o desvio quadrático médio da posição da partícula, representado por $\langle (\Delta r_i)^2 \rangle$, com a posição da partícula ao quadrado, representada por x^2 . Se

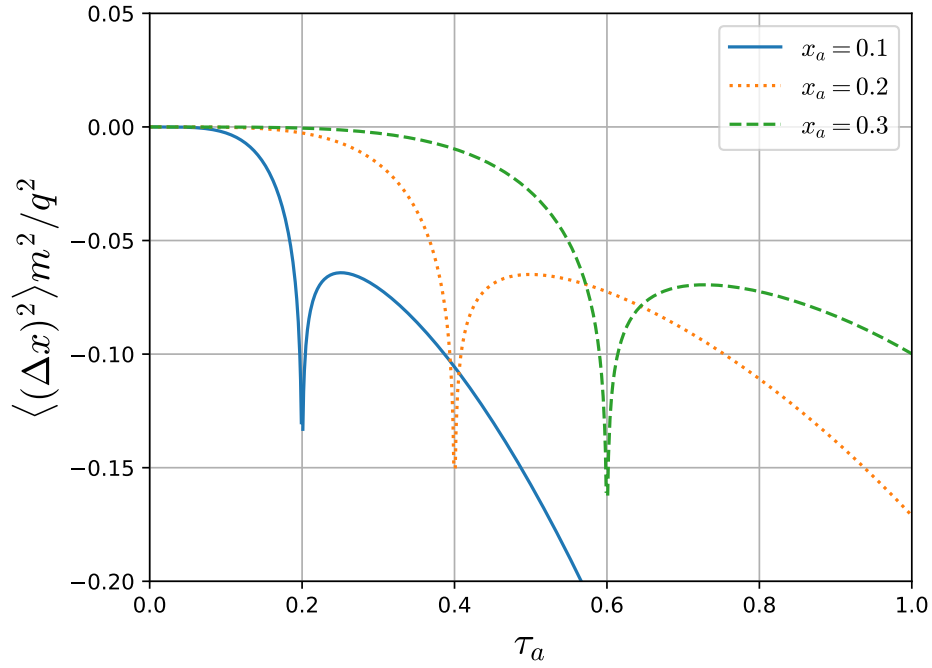


Figura 10 – Comportamento da componente x da dispersão na posição da partícula carregada em (3+1) dimensões em função de τ_a para diferentes valores de x_a

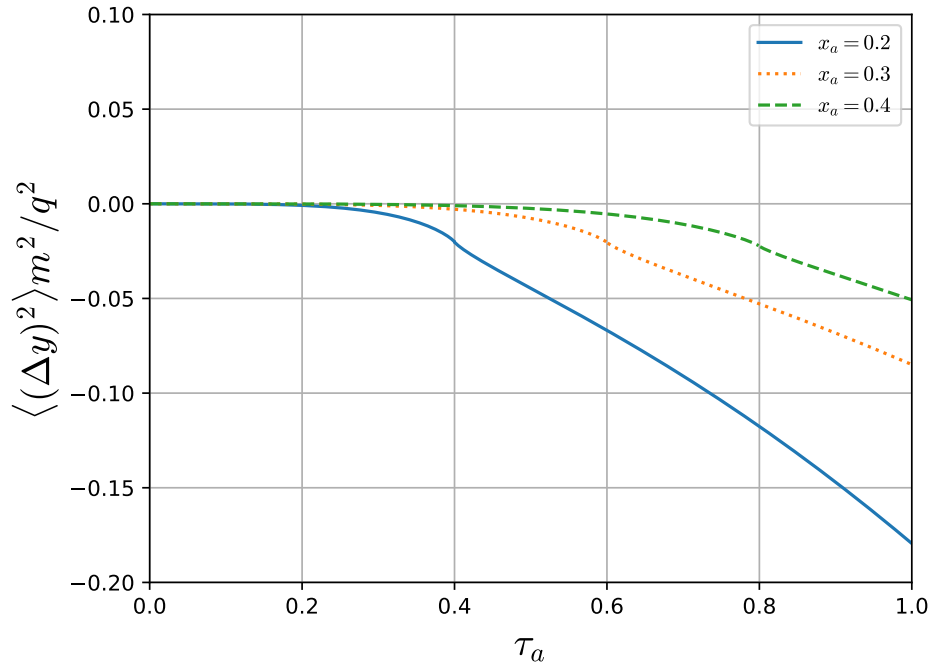


Figura 11 – Comportamento da componente y da dispersão na posição da partícula carregada em (3+1) dimensões em função de τ_a para diferentes valores de x_a . A componente z possui o mesmo comportamento.

a Eq. (5.45) for muito menor que 1, significa que o desvio quadrático médio da posição da partícula é muito pequeno em relação à posição da partícula ao quadrado. Isso, por

sua vez, significa que a partícula está mantendo sua posição quase constante ao longo do tempo, conforme suposto.

Visto que as dispersões das posições dependem do tempo, consequentemente, a dispersão relativa (5.45) também será uma função do tempo. Devido a essa dependência existe a possibilidade de obtermos um valor maior que 1, violando a nossa consideração de a posição varia muito pouco com o tempo. Então, diante disso, uma forma de verificarmos qual o valor de tempo máximo para o qual nossos resultados são validos é observar o comportamento gráfico da equação (5.45) e verificar a interseção da sua curva com a reta definida pelo valor limite 1. Por exemplo, na Figura (12), mostramos a condição (5.45) para a direção y , assumindo diferentes valores de x_a e do parâmetro de carga adimensional definido por $\bar{q} = q/ma$.

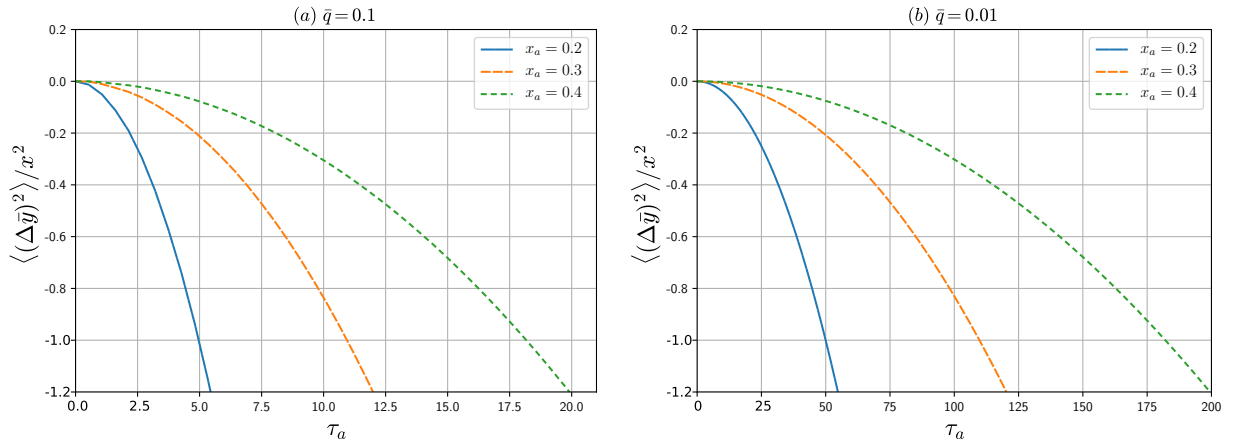


Figura 12 – Gráficos da condição (5.45) para a direção $i = y$, considerando valores arbitrários de x_a e dois valores da grandeza adimensional $\bar{q} = q/ma$.

Observando Fig. (12), percebemos que o parâmetro $\bar{q}$ modifica a escala dos valores da dispersão relativa $|\langle (\Delta y)^2 \rangle| / x^2$. Além disso, notamos que o valor do tempo τ_a também varia para diferentes valores de x_a . No caso da Fig. (12a) observamos que os valores superiores de tempo que a condição (5.45) pode atingir variam, aproximadamente, entre 5 e 18,2. Por outro lado, o caso mostrado na Fig. (12b) indica que os valores de tempo superiores para a condição (5.45) são maiores praticamente por uma ordem de grandeza, isto é, variam entre 50 e 182. Logo, a conclusão é que quanto maior o valor de $\bar{q}$ a condição (5.45) será satisfeita com mais eficácia. Essa é uma conclusão que está de acordo com a análise feita por De Lorenci et al. (2014) (LORENCI; JR; SILVA, 2014).

A partir das equações que descrevem a dispersão na posição e na velocidade de uma partícula carregada, sujeita às flutuações do campo escalar no vácuo, é possível concluir que o movimento dessa partícula não é igual em todas as direções. As direções x e y têm comportamentos diferentes. Além disso, tanto a incerteza na velocidade quanto na posição podem ser negativas, um fato que pode ser observado nos gráficos das Figuras (8), (9), (10)

e (11). Uma explicação para esse fato é que ele ocorre devido ao processo de renormalização. Ao usarmos a função de Wightman renormalizada em nosso estudo, estamos removendo a contribuição do vácuo de Minkowski, que é infinita no limite de coincidência. Isso significa que a incerteza na posição e na velocidade na ausência da fronteira é maior do que na presença dela. Além disso, podemos concluir que o movimento de uma partícula carregada sujeita às flutuações do campo escalar no vácuo não é isotrópico, e que a renormalização é um processo importante para entendermos os efeitos dessas flutuações na posição e na velocidade da partícula.

6 Considerações finais

Conforme observado anteriormente, as flutuações quânticas no vácuo do campo quântico causam um movimento semelhante ao movimento browniano clássico em partículas carregadas. No entanto, o vácuo de Minkowski geralmente produz observáveis que divergem, o que dificulta a identificação dos efeitos das flutuações quânticas em partículas no espaço vazio. Porém, ao introduzirmos modificações sutis no vácuo de Minkowski, podemos estudar as implicações dessas flutuações no movimento da partícula. Um exemplo simples de modificação é adicionar uma fronteira em que o campo é forçado a anular-se em um ponto específico. Essa alteração já nos proporciona resultados extremamente interessantes em relação ao movimento de uma partícula sujeita ao movimento browniano.

As divergências mencionadas nas dispersões surgem devido à idealização do nosso sistema. Foram identificados resultados divergentes nas dispersões de velocidade, relacionados às divergências comuns nos planos em $x = 0$ e $x = a$. Essas divergências surgem do tempo que um sinal de luz leva para percorrer um trajeto de ida e volta de um dos planos até um ponto x , assim como o tempo que leva para percorrer toda a direção restringida. Especificamente, observamos uma divergência independente da posição no caso dos planos paralelos, associada a um aumento no número de trajetos de ida e volta que um sinal de luz faz entre os planos. Além disso, foi constatado que dispersões de velocidade negativas também são possíveis. Com base em discussões encontradas na literatura, isso pode ser entendido como uma redução na dispersão da velocidade da partícula devido à presença dos planos e ao mecanismo de restrição. Ao considerarmos uma fronteira com posição fixa, estamos simplificando o sistema para facilitar a análise. No entanto, é importante ressaltar que essa idealização não reflete completamente a complexidade do mundo real, onde as fronteiras podem ter posições variáveis. Portanto, é importante considerar que essas divergências surgem devido às simplificações adotadas em nosso modelo idealizado.

No momento, estão em curso estudos que exploram diversas abordagens para resolver as divergências, demandando um profundo domínio matemático e habilidades avançadas de programação. Mesmo em um modelo idealizado, como o exemplo que foi analisado aqui, os cálculos e a representação gráfica já apresentam uma considerável complexidade. Portanto, em futuras pesquisas que visem diferentes configurações, como a inclusão de um campo massivo, será necessário um conhecimento sólido em matemática e física teórica. Tais modelos não apenas ampliam nosso entendimento da física teórica específica do fenômeno em estudo, mas também nos fornecem métodos matemáticos eficientes para lidar com cálculos mais complexos.

Referências

- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists*. [S.l.]: American Association of physics teachers, 1999.
- BÉSSA, C. H.; BEZERRA, V. B.; FORD, L. Brownian motion in robertson–walker spacetimes from electromagnetic vacuum fluctuations. *Journal of mathematical physics*, American Institute of Physics, v. 50, n. 6, p. 062501, 2009.
- BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. Quantum fields in curved space. Cambridge university press, 1984.
- BORDAG, M. et al. *Advances in the Casimir effect*. [S.l.]: OUP Oxford, 2009. v. 145.
- CASIMIR, H. B. On the attraction between two perfectly conducting plates. In: *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* [S.l.: s.n.], 1948. v. 51, p. 793.
- CHANDRASEKHAR, S. Stochastic problems in physics and astronomy. *Reviews of modern physics*, APS, v. 15, n. 1, p. 89, 1943.
- COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. Quantum mechanics. vol. 2. ; quantenmechanik. bd. 2. 2008.
- EINSTEIN, A. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. [S.l.]: Courier Corporation, 1956.
- EINSTEIN, A. et al. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der physik*, v. 17, n. 10, p. 891–921, 1905.
- FERREIRA, É. J.; GUEDES, E.; MOTA, H. F. S. Quantum brownian motion induced by an inhomogeneous tridimensional space and a $s1 \times r3$ topological space-time. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2023, n. 4, p. 1–45, 2023.
- FULLING, S. A. et al. *Aspects of quantum field theory in curved spacetime*. [S.l.]: Cambridge university press, 1989.
- GOUR, G.; SRIRAMKUMAR, L. Will small particles exhibit brownian motion in the quantum vacuum? *Foundations of Physics*, Springer, v. 29, n. 12, p. 1917–1949, 1999.
- GRADSHTEYN, I.; RYZHIK, I. *Table of Integrals, Series, and Products*. [S.l.]: Elsevier, 2007.
- GRIFFITHS, D. J.; SCHROETER, D. F. *Introduction to quantum mechanics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2018.
- HUANG, K. *Introduction to statistical physics*. [S.l.]: CRC press, 2009.
- KANNMAN, D.; BHARUCHA-REID, A. Random integral equation formulation of a generalized langevin equation. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 5, p. 209–233, 1972.

- KUBO, R. The fluctuation-dissipation theorem. *Reports on progress in physics*, IOP Publishing, v. 29, n. 1, p. 255, 1966.
- LAMOREAUX, S. K. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μ m range. *Physical Review Letters*, APS, v. 78, n. 1, p. 5, 1997.
- LEMOIS, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.
- LORENCI, V. D.; JR, E. M.; SILVA, M. Quantum brownian motion near a point-like reflecting boundary. *Physical Review D*, APS, v. 90, n. 2, p. 027702, 2014.
- LORENCI, V. D.; RIBEIRO, C.; SILVA, M. Probing quantum vacuum fluctuations over a charged particle near a reflecting wall. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 10, p. 105017, 2016.
- LUKIĆ, B. et al. Direct observation of nondiffusive motion of a brownian particle. *Physical review letters*, APS, v. 95, n. 16, p. 160601, 2005.
- MOSTEPANENKO, V. M. New experimental results on the Casimir effect. *Brazilian Journal of Physics*, scielo, v. 30, p. 309 – 315, 06 2000. ISSN 0103-9733.
- PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. *Probability, random variables and stochastic processes*. [S.l.: s.n.], 2002.
- PESKIN, M. E.; HALZEN, F. *AN INTRODUCTION TO QUANTUM FIELD THEORY*, by Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. [S.l.]: Addison-Wesley, 1995.
- PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV, O. I. *Integrals and series: special functions*. [S.l.]: Gordon and Breach Science Publishers, 1986. v. 2.
- REICHL, L. E. *A modern course in statistical physics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999.
- REIF, F. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. [S.l.]: Waveland Press, 2009.
- SAHARIAN, A. A. The Generalized Abel-Plana formula with applications to Bessel functions and Casimir effect. 8 2007.
- SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. *Modern quantum mechanics, revised edition*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1995.
- SALINAS, S. R. *Introdução a física estatística vol. 09*. [S.l.]: Edusp, 1997.
- SANTOS, F. F. T. d. Classes de soluções para a equação de langevin generalizada. 2011.
- SCHWARTZ, M. D. *Quantum field theory and the standard model*. [S.l.]: Cambridge university press, 2014.
- SILVA, J. M. d.; LIMA, J. Quatro abordagens para o movimento browniano. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 29, p. 25–35, 2007.
- SILVA, M. M. d. Flutuações quânticas do vácuo na presença de uma fronteira e suas implicações sobre o comportamento de uma partícula teste nas suas proximidades. 2013.
- STEWART, J. *Cálculo 2*. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2006.

- SWENDSEN, R. *An introduction to statistical mechanics and thermodynamics*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2020.
- TOMÉ, T. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade Vol. 35*. [S.l.]: Edusp, 2001.
- YU, H.; FORD, L. Vacuum fluctuations and brownian motion of a charged test particle near a reflecting boundary. *Physical Review D*, APS, v. 70, n. 6, p. 065009, 2004.