



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

CAOS BOOLEANO: EM BUSCA DE SINCRONIZAÇÃO

Anderson Moraes de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: Hugo Leonardo Davi de Souza
Cavalcante

João Pessoa
Dezembro de 2021

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional
Universidade Federal da Paraíba

Ata da Sessão Pública de Defesa de Dissertação de Mestrado de **Anderson Morais de Souza**, candidato ao título de Mestre em Matemática Computacional, na Área de Modelagem Matemática e Computacional, realizada no dia 16 de dezembro de 2021.

Aos 16 dias do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte e um, às 9:00 horas, via videoconferência, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para julgar o Trabalho Final do Sr. **Anderson Morais de Souza**, vinculado à Universidade Federal da Paraíba sob matrícula nº 20191001242, candidato ao grau de Mestre em “*Modelagem Matemática e Computacional*”, na linha de pesquisa “Modelagem e Simulação de Sistemas”, do Programa de Modelagem Matemática e Computacional. A comissão examinadora foi composta pelos professores Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante, Orientador e Presidente da Banca; Ana Paula Pintado Wyse, Examinadora Interna ao Programa; Gilson Francisco de Oliveira Júnior, Examinador Externo à Instituição. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca cumprimentou os presentes, comunicou aos mesmos a finalidade da reunião e passou a palavra ao candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado “**Caos Booleano: em busca da sincronização**”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer: “*aprovado*”. Do ocorrido, eu Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante, Presidente da Banca Examinadora e membro do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional (PPGMMC), lavrei a presente ata que vai assinada por mim e pelos demais membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 16 de dezembro de 2021.

Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante
Professor do PPGMMC
SIAPE 1298679

Prof. Dr. Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante
Orientador (PPGMMC)

Hugo L. D. S. Cavalcante

Prof^{ta}. Dr. Ana Paula Pintado Wyse
Examinadora Interna ao Programa (PPGMMC)

Ana Paula Wyse

Prof. Dr. Gilson Francisco de Oliveira Júnior
Examinador Externo à Instituição (UFCA)

Gilson Francisco de Oliveira Junior

CAOS BOOLEANO: EM BUSCA DE SINCRONIZAÇÃO

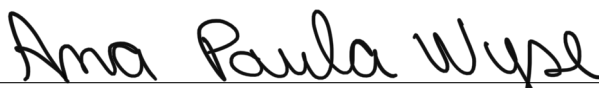
Anderson Morais de Souza

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL (PPGMMC) DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.

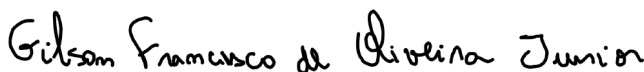
Examinada por:



Prof. Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante, D.Sc.



Prof. Ana Paula Pintado Wyse, D.Sc.



Prof. Gilson Francisco de Oliveira Junior, D.Sc.

.

.

JOÃO PESSOA, PB – BRASIL
DEZEMBRO DE 2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S729c Souza, Anderson Morais de.
Caos booleano : em busca de sincronização / Anderson
Morais de Souza. - João Pessoa, 2021.
121 f. : il.

Orientação: Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CI.

1. Matemática computacional. 2. Caos booleano. 3.
Redes booleanas autônomas. 4. Caos determinístico. I.
Cavalcante, Hugo Leonardo Davi de Souza. II. Título.

UFPB/BC

CDU 519.6(043)

*Aos meus avós, João Sobrinho
de Moraes e José Damião
Candido (In memoriam)*

Agradecimentos

- Agradeço à Deus, por estar presente em todos os momentos de minha vida.
- Agradeço ao meu orientador professor Hugo Cavalcante, pela paciência, ensinamento e apoio no decorrer dessa dissertação.
- Agradeço a professora Ana Wyse e ao professor Gilson Junior pela compreensão e disponibilidade.
- Agradeço aos meus amigos da Graduação e da Pós-Graduação. Diante da quantidade de pessoas que eu poderia listar neste parágrafo, omitirei os nomes para evitar prováveis esquecimentos. No entanto, posso dizer que eles não só participaram de momentos de descontração, mas também tiveram presença em momentos decisivos.
- Reservo esse parágrafo para agradecer à minha noiva, Rose Kelly, por todo o seu apoio, amor, carinho e cuidado, que se fez presente durante essa etapa da minha vida.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CAOS BOOLEANO: EM BUSCA DE SINCRONIZAÇÃO

Anderson Moraes de Souza

Dezembro/2021

Orientador: Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

O estudo dos sistemas dinâmicos possibilita a descrição de características e de comportamento de uma infinidade de fenômenos, em particular o estudo dos sistemas dinâmicos não lineares, que vêm se destacando no cenário da modelagem matemática por apresentar um comportamento, rico em informações dinâmicas e com várias particularidades próprias e universais. É neste contexto que este trabalho emprega ferramentas matemáticas e computacionais embasadas em conceitos da análise dos sistemas não lineares que são aplicadas no estudo do sistema de Lorenz. Fundamentado na análise dos planos de fases, espaços de fases, simulações numéricas e nos comportamentos que tal sistema apresenta é que analisaremos o comportamento caótico das Redes Booleanas Autônomas, onde a dinâmica futura da rede será determinada pelo histórico dos eventos de comutação, das interações anteriores e dos atrasos ao longo dos links, bem como, o estudo do comportamento não ideal das portas lógicas, a rejeição dos pulsos curtos e a análise do efeito de memória denominada de “degradação” apresentam um papel fundamental na compreensão da dinâmica e do caos apresentado pela rede em comento. Portanto, o conhecimento dos fatores que podem gerar o comportamento caótico em Redes Booleanas Autônomas com atrasos de tempo, permitirá o estudo da sincronização entre Redes Booleanas Autônomas.

Palavras-chave: Caos Booleano. Redes Booleanas Autônomas. Caos Determinístico.

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

BOOLEAN CHAOS: IN SEARCH OF SYNCHRONIZATION

Anderson Morais de Souza

December/2021

Advisor: Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante

Program: Computational Mathematical Modelling

The study of dynamical systems makes it possible to describe the characteristics of a infinity of phenomena, in particular, the study of nonlinear dynamical systems, which have stood out in the mathematical modeling scenario for presenting a rich behavior in dynamic informations and with several particularities. It is in this context that this work employs mathematical and computational tools based on concepts of analysis of nonlinear systems that are applied in the study of Lorenz system. Based on the analysis of phase plans, phase spaces, numerical simulations and the behaviors that such a system presents, we will analyze the dynamics of Autonomous Boolean Networks, in which the future state of the network will be determined by the history of switching events, previous interactions and delays along the links. As well as we will analyze the study of the non-ideal behavior of logic gates, the rejection of short pulses and an analysis of the memory effect called "degradation" play a fundamental role in understanding the dynamics and chaos presented by the network under discussion. Therefore, the knowledge of the factors that can generate chaotic behavior in Autonomous Boolean Networks with time delays will allow the study of synchronization between Autonomous Boolean Networks.

Keywords: Boolean Chaos. Autonomous Boolean Networks. Deterministic Chaos.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xv
1 Introdução	1
2 Fundamentação Teórica	4
2.1 Sistemas em tempo contínuo	4
2.1.1 Plano de Fase.	6
2.1.2 Noções de Estabilidade	9
2.1.3 Ponto fixo	9
2.1.4 Sistemas Caóticos	15
2.1.5 Atrator estranho	16
2.1.6 Expoente de Lyapunov.	28
3 Método Proposto	34
3.1 Sistema em Tempo Discreto.	34
3.1.1 Seção de Poincaré	34
3.1.2 Estabilidade	35
3.1.3 Mapa Logístico	41
3.1.4 Análise do mapa logístico	43
3.1.5 Diagrama de bifurcação	47
3.1.6 Mapa de Lorenz	49
3.2 Álgebra Booleana	51
3.2.1 Operações Fundamentais da Álgebra Booleana	52
3.2.2 Circuito a partir das Portas Lógica.	53
3.3 Portas lógicas NAND, NOR, XOR e XNOR	56
3.3.1 Nível lógico e pulso	60
3.3.2 Atraso de propagação.	62
4 Resultados e Discussões	64
4.1 Redes Booleanas	64

4.1.1	Divergência de trajetórias	78
4.1.2	Porta lógica Buffer (copiadora)	79
4.2	Sincronização	86
4.2.1	Sincronização completa por acoplamento via controle de feed-back.	87
4.2.2	Sincronização de sistemas discretos.	89
5	Conclusões	93
	Referências Bibliográficas	95
A	Álgebra Booleana	101

Lista de Figuras

2.1	Plano de fase.	7
2.2	Vista lateral do volume.	8
2.3	Evolução de um pedaço infinitesimal de área dA	8
2.4	Lyapunov estável.	10
2.5	Assintoticamente estável.	10
2.6	Nó estável no espaço bidimensional.	11
2.7	Nó instável no espaço bidimensional.	11
2.8	Espiral estável no espaço bidimensional.	11
2.9	Espiral instável no espaço bidimensional.	11
2.10	Ponto de sela.	12
2.11	Ciclo limite estável.	13
2.12	Ciclo limite instável.	13
2.13	Ciclo limite semi-estável.	13
2.14	Campo vetorial do contorno U	14
2.15	Interpretação geométrica de uma curva de nível definida por $L(x)$ e as possibilidades de projeções de f em ∇L	14
2.16	Evolução da variável $x(t)$ de um sistema caótico ao longo do tempo. .	15
2.17	Fenômeno de convecção térmica	17
2.18	Atrator estranho no espaço de fases tridimensional do sistema de Lo- renz para os parametros $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$. Condições iniciais $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ e $0 \leq t \leq 60$	18
2.19	Projeção do atrator estranho de Lorenz no plano de fase xy	19
2.20	Série temporal da variável x do sistema de Lorenz.	19
2.21	Projeção do atrator estranho de Lorenz no plano de fase xz	19
2.22	Série temporal da variável y do sistema de Lorenz.	19
2.23	Projeção do atrator estranho de Lorenz no plano de fase yz	20
2.24	Série temporal da variável z do sistema de Lorenz.	20
2.25	Sensibilidade às condições iniciais das séries temporais do sistema de Lorenz com $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ (preto) e $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1.01, 0)$ (vermelho).	21

2.26	Sensibilidade às condições iniciais. $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ (preto) e $(x'_0, y'_0, z'_0) = (0, 1, 0.1, 0)$ (azul), para $0 \leq t \leq 60$	22
2.27	Representação da limitação das soluções do sistema Lorenz.	27
2.28	Evolução de duas trajetórias.	28
2.29	Representação geométrica dos expoentes de Lyapunov.	30
2.30	Ponto de equilíbrio	32
2.31	Ciclo Limite	32
2.32	Toro Bidimensional.	32
2.33	Atrator estranho.	32
2.34	Expoente de Lyapunov para $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$ e condição inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$	33
3.1	Trajetoória periódica e a Seção de Poincaré.	34
3.2	Interpretação geométrica da seção de Poincaré para um ponto fixo, que representa uma órbita fechada.	35
3.3	Diagrama de Stair-step próximo do ponto fixo com $f'(x^*) > 0$ para $ f'(x^*) < 1$ (estável) e $ f'(x^*) > 1$ (instável), respectivamente. . . .	39
3.4	Diagrama de Stair-step próximo do ponto fixo com $f'(x^*) < 0$ para $ f'(x^*) < 1$ (estável) e $ f'(x^*) > 1$ (instável), respectivamente. . . .	39
3.5	Diagrama de Cobweb (teia de aranha) para um ponto fixo instável. . .	40
3.6	Diagrama de Cobweb (teia de aranha) para uma órbita de período um. . .	40
3.7	Diagrama de Cobweb (teia de aranha) para uma órbita de período dois. . .	41
3.8	Diagrama de Cobweb (teia de aranha) para uma órbita de período quatro.	41
3.9	Mapa logístico.	43
3.10	Para $r = 2.7$, existem dois pontos fixos x_a^* (repulsor) e x_b^* (atrator). . .	44
3.11	Bifurcação transcítica.	45
3.12	Dobramento de período.	47
3.13	Intersecção de f com a bissetriz ($y = x$).	47
3.14	Intersecção de f^2 com a bissetriz ($y = x$).	47
3.15	Diagrama de bifurcação do mapa logístico.	48
3.16	Diagrama de bifurcação do mapa logístico ampliado.	48
3.17	Projeção do atrator de Lorenz no plano xz	49
3.18	Série temporal $z(t)$	50
3.19	Mapa de Lorenz.	50
3.20	Órbita fechada.	51
3.21	Porta Lógica AND	52
3.22	Porta Lógica OR	52
3.23	Porta Lógica NOT	53

3.24	Diagrama do circuito logico AND-OR.	53
3.25	Circuito lógico com inversor	54
3.26	Circuito a partir de expressão booleana	55
3.27	Circuito equivalente a porta lógica NOR.	56
3.28	Porta lógica NOR.	56
3.29	Circuito equivalente a porta lógica NAND.	57
3.30	Porta lógica NAND.	57
3.31	Circuito equivalente à porta XOR	57
3.32	Porta lógica XOR	58
3.33	Circuito equivalente à porta XNOR	59
3.34	Porta lógica XNOR	59
3.35	Circuito equivalente à porta lógica buffer.	60
3.36	Porta lógica Buffer.	60
3.37	Usando a porta Buffer para criar uma linha de atraso.	60
3.38	Pulso positivo.	61
3.39	Pulso negativo	61
3.40	Particularidades de um pulso não ideal.	61
3.41	Tempo de propagação do pulso e tempo de Subida/Descida.	62
4.1	Diagrama para uma rede do tipo NK com três elementos.	66
4.2	Campo de comportamento.	67
4.3	Topologia de uma rede booleana, composta de duas portas lógicas (XOR).	68
4.4	Diagrama para rede booleana com um nó (XOR) e dois links com atraso.	69
4.5	Link de feedback $X(t - \tau_1)$, com $\tau_1 = 1$	69
4.6	Link de feedback $X(t - \tau_2)$, com $\tau_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	70
4.7	Solução $X(t)$ da equação de atraso (4.4), com dinâmica inicializada no tempo $t = 0$	70
4.8	Diagrama para rede booleana com um nó (AND) e dois links com atraso.	71
4.9	Link de feedback $X(t - \tau_1)$, com $\tau_1 = 1$	71
4.10	Link de feedback $X(t - \tau_2)$, com $\tau_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	71
4.11	Solução $X(t)$ da equação de atraso (4.5), com dinâmica inicializada no tempo $t = 0$	72
4.12	Diagrama para rede booleana com um nó (OR) e dois links com atraso.	72
4.13	Link de feedback $X(t - \tau_1)$, com $\tau_1 = 1$	72

4.14	Link de feedback $X(t - \tau_2)$, com $\tau_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	73
4.15	Solução $X(t)$ da equação de atraso (4.4), com dinâmica inicializada no tempo $t = 0$	73
4.16	Diagrama para rede booleana com um nó (NAND) e dois links com atraso.	73
4.17	Link de feedback $X(t - \tau_1)$, com $\tau_1 = 1$	74
4.18	Link de feedback $X(t - \tau_2)$, com $\tau_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	74
4.19	Solução $X(t)$ da equação de atraso (4.7), com dinâmica inicializada no tempo $t = 0$	74
4.20	Diagrama para rede booleana com um nó (NOR) e dois links com atraso.	75
4.21	Link de feedback $X(t - \tau_1)$, com $\tau_1 = 1$	75
4.22	Link de feedback $X(t - \tau_2)$, com $\tau_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	75
4.23	Solução $X(t)$ da equação de atraso (4.8), com dinâmica inicializada no tempo $t = 0$	76
4.24	Diagrama para rede booleana com um nó (XNOR) e dois links com atraso.	76
4.25	Link de feedback $X(t - \tau_1)$, com $\tau_1 = 1$	76
4.26	Link de feedback $X(t - \tau_2)$, com $\tau_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	77
4.27	Solução $X(t)$ da equação de atraso (4.9), com dinâmica inicializada no tempo $t = 0$	77
4.28	Rede Booleana Autônoma (Porta lógica Buffer)	80
4.29	Implementação do efeito de degradação.	81
4.30	Evolução temporal da rede booleana autônoma (4.28)	84
4.31	Evolução temporal da diferença entre $y(t) = g(X(t))$ e $y'(t) = g(X'(t))$. 85	
4.32	Função $g(x)$ responsável pela modulação dos pulsos da porta lógica buffer (copiadora).	85
4.33	Mapa de estado, gerada pela dinâmica da porta buffer (copiadora).	85
4.34	Mapa da dinâmica gerada pela porta buffer (copiadora).	86
4.35	Projeção no plano (x_m, x_e) , com $\alpha = 0$	88
4.36	Série temporal obtidas nos sistemas mestre e escravo utilizando as equações de Lorenz com entrada $x_m(t)$ e $\alpha = 0$	88
4.37	Projeção no plano (x_m, x_e) , com $\alpha = 5$	88
4.38	Série temporal obtidas nos sistemas mestre e escravo utilizando as equações de Lorenz com entrada $x_m(t)$ e $\alpha = 5$	88
4.39	Projeção no plano (x_m, x_e) , com $\alpha = 10$	89
4.40	Série temporal obtidas nos sistemas mestre e escravo utilizando as equações de Lorenz com entrada $x_m(t)$ e $\alpha = 10$	89

4.41 Sobreposição dos diagramas de fase dos mapas logísticos mestre (em preto (4.28)) e escravo (em vermelho (4.31)).	90
4.42 Projeção no plano (v_m, v_e) , com $\alpha = 0$	91
4.43 Projeção no plano (v_m, v_e) , com $\alpha = 0.2$	91
4.44 Projeção no plano (v_m, v_e) , com $\alpha = 0,5$	91
4.45 Projeção no plano (v_m, v_e) , com $\alpha = 0.7$	91
4.46 Projeção no plano (v_m, v_e) , com $\alpha = 0,9$	92
4.47 Projeção no plano (x_m, x_e) , com $\alpha = 1$	92

Lista de Tabelas

3.1	Tabela verdade da porta AND.	52
3.2	Tabela verdade da porta OR.	53
3.3	Tabela verdade da porta NOT.	53
3.4	Tabela verdade do circuito lógico AND-OR (Soma de produtos). . . .	54
3.5	Tabela verdade do circuito lógico (3.25)	55
3.6	Tabela verdade da porta lógica NOR (3.28)	56
3.7	Tabela verdade da porta lógica NAND (3.30)	57
3.8	Tabela verdade do circuito equivalente à porta XOR (3.31)	58
3.9	Tabela verdade da porta lógica XOR (3.32)	58
3.10	Tabela verdade do circuito equivalente a porta XNOR (3.33)	59
3.11	Tabela verdade da porta lógica XNOR (3.34)	59
3.12	Tabela verdade da porta Buffer (3.36).	60
4.1	Tabela verdade da função booleana de cada gene.	66
4.2	Tabela verdade com todos os possíveis estados de uma rede NK re- presentada pela Figura (4.1)	67

Capítulo 1

Introdução

A natureza, repleta de diversidade e não-linearidade de comportamento, vem sendo a fonte mais importante para o desenvolvimento científico.

A não linearidade é uma concepção matemática em que as leis que regem a evolução temporal de suas variáveis de estado dependem dos valores dessas variáveis de uma maneira que diverge da proporcionalidade, contrapondo-se aos sistemas lineares, que de alguma forma, podem ser descritos por uma proporção. Melhor dizendo, se a resposta de um sistema a uma perturbação é linear, então a resposta aumentará com o aumento da perturbação e diminuirá com a diminuição da perturbação. Se um comportamento ao longo do tempo é linearmente dependente de suas condições iniciais, então pequenas mudanças nas condições iniciais resultarão em pequenas mudanças no comportamento do sistema ao longo do tempo. Em sistemas não lineares, essas propriedades não são válidas. Pequenas mudanças podem surtir efeitos incongruentes.

Nesse sentido, um sistema linear é precisamente igual à soma de suas partes. Mas muitas coisas na natureza não agem dessa maneira. Sempre que partes de um sistema interferem, cooperam ou competem, ocorrem interações não lineares. A maior parte da vida cotidiana é não linear, e o princípio da superposição falha espetacularmente. Se você ouvir duas das suas músicas favoritas ao mesmo tempo, não terá o dobro do prazer! No reino da física, a não linearidade é vital para a operação de um laser, a formação de turbulência em um fluido. (STROGATZ, 2014, p.9, tradução nossa).

É nesse cenário de diversidade e incerteza que o matemático Edward Lorenz trabalhava tentando fundamentar matematicamente os fenômenos meteorológicos através dos sistemas de Equações Diferenciais. Com a ajuda de um computador, Lorenz simplificou o modelo de convecção térmica dos fluidos de Rayleigh-Bernard, reduzindo a um sistema de três equações diferenciais e observou que pequenas modi-

ficações nas condições iniciais podem causar grandes diferenças tornando o sistema praticamente imprevisível na evolução temporal. Nesse contexto temos um sistema determinístico cujos resultados podem ser imprevisíveis.

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad (1.1)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz, \quad (1.2)$$

$$\dot{z} = xy - bz. \quad (1.3)$$

As equações¹ (1.1), (1.2) e (1.3), propostas por Lorenz, formam um sistema que representa a simplificação do modelo de convecção de fluidos de Rayleigh-Bernard.

Em geral, a não linearidade e sua dinâmica sensível às condições iniciais podem ser vistas em diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, nas ciências naturais e sociais.

Os exemplos incluem ciências físicas (por exemplo, atmosfera terrestre, laser, circuito eletrônico, supercondutividade, turbulência de fluido etc.), química (reação de Belousov-Zhabotinsky, modelo de Brusselator etc.), biologia (sistemas neurais e cardíacos, processos bioquímicos), ecologia e ciências sociais (disseminação de enfraquecimento, disseminação de doenças, flutuações de preços de mercados e bolsas de valores etc.). (LAYEK, 2015, p.1, tradução nossa).

Este trabalho, tem como finalidade empregar conceitos e ferramentas da análise de sistemas não lineares com intuito de caracterizar alguns dos seus vários padrões dinâmicos, em particular o caos. Estudaremos questões relacionadas a sistemas caóticos como autonomia, linearidade, noções de estabilidade e as características da dinâmica caótica como o próprio caos, atrator e as particularidades do Expoente de Lyapunov e aplicaremos na Rede Booleana assim como DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010) empregou na investigação da origem do caos em Rede Booleana Autônoma, cujos resultados são verificados pelos mapas iterados gerados pela dinâmica da rede.

Organizamos esta dissertação da seguinte forma:

No Capítulo 1, fornecemos uma breve introdução aos conceitos relacionados à linearidade e não linearidade dos sistemas, apresentando a importância desses sistemas nas ciências naturais e sociais, na natureza e no desenvolvimento dos sistemas dinâmicos.

No capítulo 2, fornecemos algumas definições e teoremas que julgamos relevantes na teoria dos sistemas dinâmicos em tempo contínuo. Definindo o que venha a ser

¹Utilizaremos a notação $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ para representar $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dz}{dt}$, no intuito de simplificar a notação utilizada.

um sistema dinâmico, apresentando algumas características dos sistemas autônomos e não autônomos, plano de fase, sistemas conservativos e dissipativos, noções de estabilidade e exibimos os conceitos que caracterizam a dinâmica caótica, de modo semelhante, definimos o que venha ser um atrator e um atrator estranho. Em seguida apresentamos o sistema de Lorenz e seu comportamento no espaço de fase, nas séries temporais, concluindo o capítulo com a teoria que orienta a obtenção do(s) expoente(s) de Lyapunov.

No Capítulo 3, introduziremos a metodologia necessária para o entendimento do capítulo posterior, que confluem as características e propriedades dos sistemas dinâmicos em tempo discreto, tais como, seção de Poincaré, definição de ponto fixo em mapa unidimensional e Teorema da Estabilidade. Assim como, exibiremos uma breve introdução sobre o Mapa Logístico, diagrama de bifurcação e o Mapa de Lorenz, do mesmo modo que apresentaremos o comportamento das portas lógicas e circuitos lógicos.

No Capítulo 4, exibiremos resultados, discussões e as características que definem as redes booleanas de autônomas, apresentaremos a rede booleana proposta por KAUFFMAN (1969), em seu artigo, Estabilidade metabólica e epigênese em construção aleatória redes genéticas (*“Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets”*), assim como, as equações de atraso proposta por GHIL e MULLHAUPT (1985) e sobre a visão qualitativa, através da análise e simulações numéricas das redes booleanas autônomas propostas por DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010) em seu artigo, Sobre a origem do caos nas redes booleanas autônomas (*“On the origin of chaos in autonomous Boolean networks”*), exibiremos o possível comportamento caótico em uma rede booleana autônoma, composta por uma única porta lógica (Buffer) com um único link de feedback e através da tentativa e erro, empenho-se esforços na busca da sincronização da rede booleana.

E por fim, o capítulo 5 exhibe as conclusões e considerações finais.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Sistemas em tempo contínuo

De acordo com MONTEIRO (2002 p.39), um sistema apresenta-se como, “um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto” e dizemos que um “sistema é dito dinâmico quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo”, ou seja, um sistema dinâmico com variáveis contínuas pode ser entendido como uma relação matemática determinística, que irá descrever o comportamento ou evolução temporal do sistema com base no seu estado anterior.

Nesta seção, discutiremos sobre sistemas descritos por Equações Diferenciais Ordinárias - EDO's de primeira ordem, cuja variável independente é o tempo e sem ingerência de efeitos aleatórios, implicando em sistemas deterministas, que poderá ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

O sistema (2.1) pode ser escrito genericamente da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \text{ com } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\tag{2.2}$$

em que;

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

As n -equações diferenciais contidas em (2.1), constituem a representação da dinâmica dos fluxos no tempo e no espaço, em que:

- t é a variável independente, tempo;
- $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dots, \dot{x}_n)^T$ caracteriza o campo de velocidade desse sistema, ou seja, representa a evolução temporal definidas pelas velocidades instantâneas¹ $\dot{x}_i$ com $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$;
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ caracteriza a variáveis de estado ou variáveis de posição, desse sistema.

ou seja, um sistema dinâmico pode ser entendido como um movimento de evolução de estado num determinado tempo, em outras palavras, o estado do sistema é constantemente transformado por uma função que leva o sistema ao próximo instante.

A forma como f é definida implica na linearidade ou na não-linearidade do sistema dinâmico. Portanto, uma característica indispensável no estudo dos sistemas dinâmicos se dá pelo fato do sistema ser linear ou não-linear. A definição a seguir traz, sucintamente, as duas propriedades em que o sistema dinâmico deve se enquadrar para ser considerado linear.

Definição 1. (*Sistema Linear*)

Um sistema é linear se as seguintes condições forem satisfeitas:

- I. $f(x + y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R}^n$,
- II. $f(\alpha x) = \alpha f(x), \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^n$.

As condições I e II da definição de sistema linear podem ser sintetizadas em uma única, que atende pelo nome de princípio da superposição:

$$f(\alpha_1 x + \alpha_2 y) = \alpha_1 f(x) + \alpha_2 f(y), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ e } x, y \in \mathbb{R}^n$$

Definição 2. Um sistema é chamado não-linear, quando não for linear.

Faz-se importante destacar que os sistemas de equações diferenciais não-lineares, em geral, não apresentam soluções analíticas. Uma das alternativas para entendermos a dinâmica do sistema no tempo é a utilização dos métodos qualitativos e numéricos.

¹Por oportuno, destacamos a utilização da notação $\dot{x}$ para representar $\frac{dx}{dt}$.

Sistemas autônomo e não autônomo

Os sistemas dinâmicos podem ser classificados de diversas formas, mas destacamos os sistemas que não dependem explicitamente do tempo, pois essa categoria de sistemas dinâmicos são classificados como autônomos, já os sistemas dinâmicos em que existe a dependência explícita do tempo são classificados como não autônomos.

Definição 3. *Um sistema autônomo é um sistema composto por equações diferenciais ordinárias da forma:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \text{ com } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

em que $\mathbf{x}$ assume valores no espaço de n dimensões e t é o tempo.

Diferentemente, os sistemas não autônomos apresentam equações diferenciais da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t), \text{ com } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.5)$$

em que a lei que rege a evolução do sistema não depende apenas do estado atual do sistema, mas também depende do parâmetro t , que representa um sistema não autônomo.

Entretanto, qualquer sistema não autônomo poderá ser escrito numa forma autônoma, para isso, escrevemos (2.5), na forma de n equações diferenciais de primeira ordem e incluímos o elemento $x_{n+1} = t$, dessa forma teremos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ \dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ \dot{x}_{n+1} &= 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Observemos que o espaço de fases do sistema (2.5), possui n dimensões, já o espaço de fases reescrito (2.6) possui $n + 1$ dimensões, chamado espaço de fases estendido.

2.1.1 Plano de Fase.

Como já sabemos um sistema pode ser classificado como linear, com soluções analíticas, ou não-linear, em que as soluções analíticas não existem ou são difíceis de obter, dessa forma, em vez de analisar as propriedades quantitativas de um sistema, analisaremos as propriedades qualitativas do sistema. A análise qualitativa

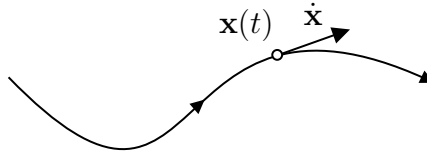
de um sistema bidimensional é conhecida como análise do plano de fase. Os sistemas bidimensionais apresentam uma dinâmica importante para nosso estudo.

Para entendermos melhor o estudo do plano de fase, tomemos como exemplo geral STROGATZ (2014), um sistema autônomo de duas equações diferenciais de primeira ordem no plano xy representada por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2),\end{aligned}$$

em que $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x), f_2(x))$, com $\mathbf{x}$ representando um ponto no plano de fase e $\dot{\mathbf{x}}$ representa o vetor velocidade naquele ponto. Ao fluir ao longo do campo vetorial, um ponto no plano de fase traça uma solução $\mathbf{x}(t)$ corresponde para uma trajetória sinuosa através do plano de fase representado na Figura (2.1).

Figura 2.1: Plano de fase.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Observem que a análise do plano de fase constitui uma ferramenta importante no estudo da evolução dos sistemas, principalmente para os sistemas não-lineares, os quais a solução analítica muitas das vezes não existe, cuja a alternativa é aproximação numérica.

Sistemas conservativo e dissipativo

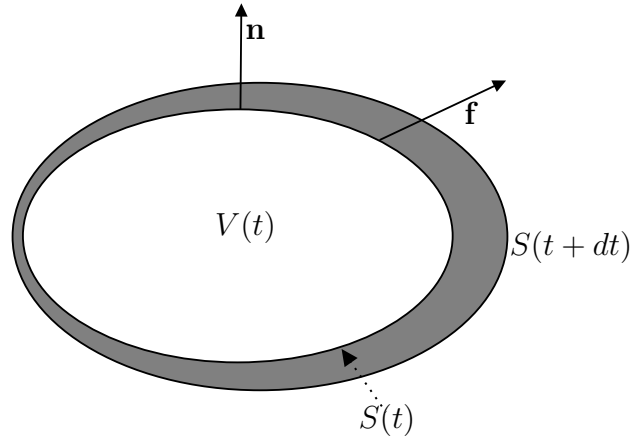
Suponhamos que estamos modelando um fenômeno físico representado por (2.2), decidir se a dissipação é ou não é importante para o modelo será bastante útil.

Para isso, dizemos que um sistema é dito conservativo se durante a evolução temporal há uma preservação de volume no espaço de fases, do contrário, tem-se um sistema dissipativo. Para entender esta variação de volume, consideremos o volume $V = V(t)$ do sistema (2.2);

Consideremos uma Superfície fechada $S(t)$ de volume $V(t)$, no espaço de fases. Os pontos em S e no seu interior são as condições iniciais das trajetórias. Deixe-as evoluir por um tempo infinitesimal dt . Com isso $S(t)$ evolui para uma nova

superfície, $S(t + dt)$.

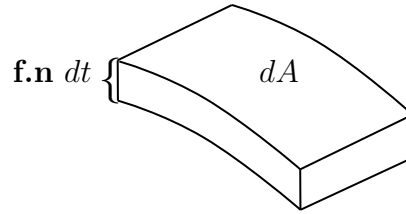
Figura 2.2: Vista lateral do volume.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Na Figura (2.2), $\mathbf{n}$ é um vetor de módulo unitário que aponta perpendicularmente para fora da superfície S e $\mathbf{f}$ é a velocidade instantânea do sistema no ponto $\mathbf{x}$. Portanto, o produto escalar $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}$ representa a componente normal da velocidade em $\mathbf{x}$, que aponta para fora de S .

Figura 2.3: Evolução de um pedaço infinitesimal de área dA .



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Num intervalo de tempo infinitesimal dt , a evolução de um pedaço infinitesimal de área dS cria um volume $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} dt) dS$. Assim $V(t + dt)$ é igual a $V(t)$ mais o volume criado pela evolução de cada pedaço infinitesimal de superfície, integrando-se sobre todos os pedaços. Isto é;

$$V(t + dt) = V(t) + \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} dt) dS$$

Reescrevendo:

$$\frac{V(t + dt) - V(t)}{dt} = \dot{V} = \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}) dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV \quad (2.7)$$

A última integral foi obtida empregando o teorema do divergente.

Observem que o sistema é dito conservativo se $dV/dt = 0$, ou seja, quando o divergente do campo vetorial $\mathbf{f}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0 \quad (2.8)$$

Dessa forma, a integral (2.7) se anula independentemente do volume V escolhido. O sistema será dito dissipativo quando $dV/dt < 0$, ou seja, $\nabla \cdot \mathbf{f} < 0$, mas para $\nabla \cdot \mathbf{f} > 0$ o sistema será dito expansivo.

2.1.2 Noções de Estabilidade

A noção de estabilidade é indispensável na análise dos sistemas dinâmicos. Intuitivamente podemos compreender a estabilidade de um sistema como a maneira ou modo de reação a uma perturbação.

O estudo da estabilidade de um sistema vem da necessidade de entender os fenômenos físicos que nos rodeia, Galileu Galilei, por exemplo, foi um dos pioneiros a tentar modelar as oscilações em torno de um ponto fixo, e a periodicidade de um pêndulo simples.

Para um melhor entendimento da estabilidade, apresentaremos a definição de ponto fixo.

2.1.3 Ponto fixo

Os pontos fixos, também chamado ponto de equilíbrio, ponto estacionário ou ponto crítico, são determinantes na análise do plano de fase,

Definição 4. (*Ponto Fixo*)

Um ponto $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \mathbf{x}_3^*, \cdots, \mathbf{x}_n^*)$ é um ponto fixo do sistema autônomo (2.2), se $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i^*) = 0$, com $i = (1, 2, 3, \cdots, n)$.

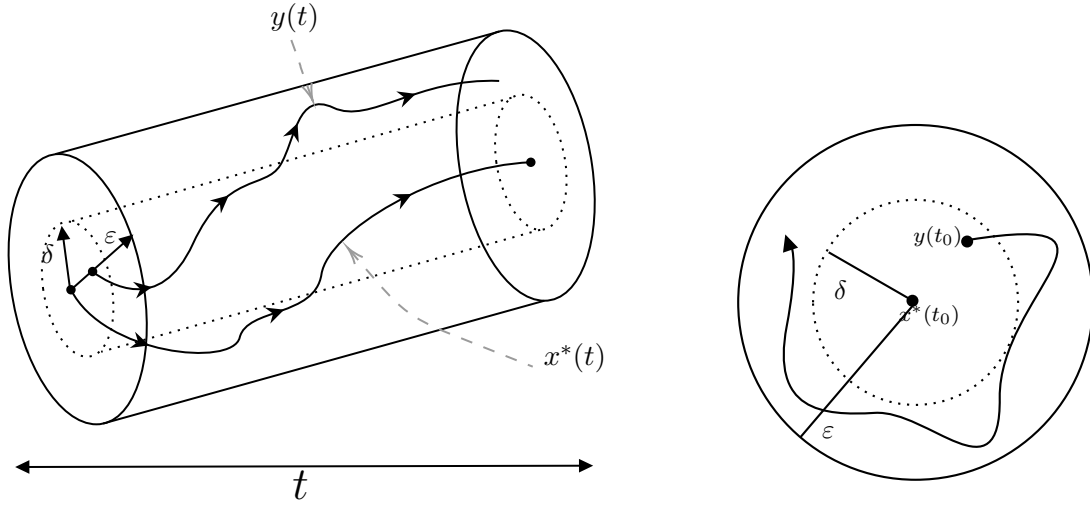
Estabilidade de Lyapunov

Seja $x^*(t)$ uma solução de (2.2). De modo geral, $x^*(t)$ é estável se as soluções que começarem ‘perto’ de $x^*(t)$ em um determinado momento permanece perto de $x^*(t)$ para todos os tempos posteriores. É assintoticamente estável se as soluções próximas não apenas permanecerem próximas, mas também convergirem para $x^*(t)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Definição 5. (*Lyapunov Estável*)

$x^*(t)$ é considerado estável (ou Lyapunov estável), se dado um $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para qualquer outra solução, $y(t)$ de (2.2), com $\|x^*(t_0) - y(t_0)\| < \delta$, tem-se $\|x^*(t) - y(t)\| < \varepsilon$, $\forall t \in [t_0, \infty)$ com $t \in \mathbb{R}$

Figura 2.4: Lyapunov estável.



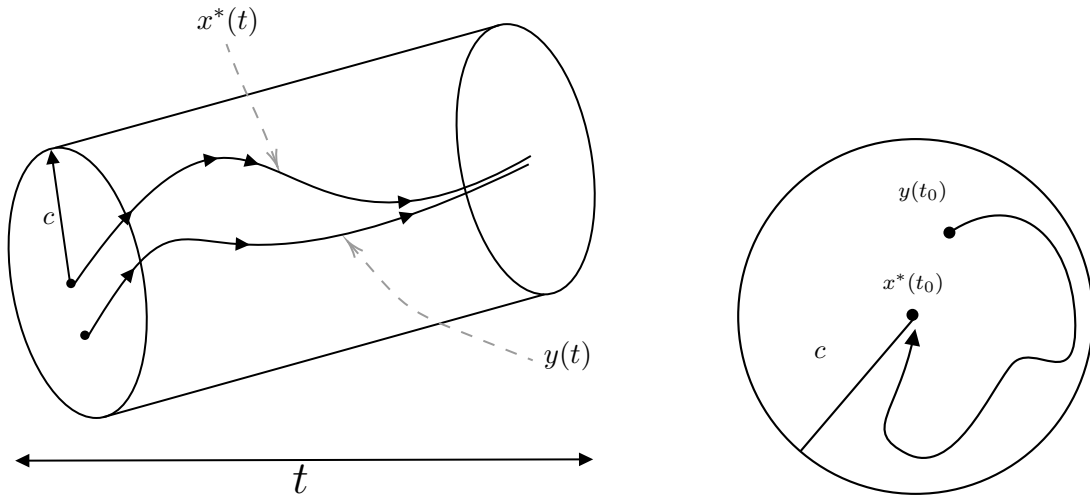
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em LAYEK (2015).

Definição 6. *Uma solução que não é estável é dita instável.*

Definição 7. *(Assintoticamente Estável)*

$x^*(t)$ é considerado assintoticamente estável se é Lyapunov estável e para qualquer outra solução, $y(t)$, de (2.2), estável e se existir uma constante $c > 0$ tal que $\|x^*(t_0) - y(t_0)\| < c$, tem-se $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x^*(t) - y(t)\| = 0$, $\forall t \in [t_0, \infty)$ com $c, t \in \mathbb{R}$

Figura 2.5: Assintoticamente estável.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em LAYEK (2015).

Da definição (4) temos que as soluções que iniciam no ponto fixo permanecem estacionárias, independente da evolução temporal. A estabilidade do ponto fixo está, de certa forma, associada à estabilidade do campo vetorial.

Por oportuno, destaquemos que a utilização do ponto cheio ($\bullet$) para representar a convergência e o ponto vazio ($\circ$) para representar a divergência, dar-se-á por convenção.

Figura 2.6: Nó estável no espaço bidimensional.

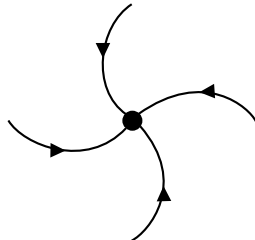
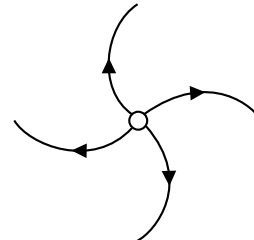


Figura 2.7: Nó instável no espaço bidimensional.



Fonte:Elaborada pelo autor, com base em LAYEK (2015).

Figura 2.8: Espiral estável no espaço bidimensional.

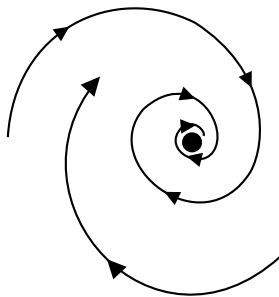
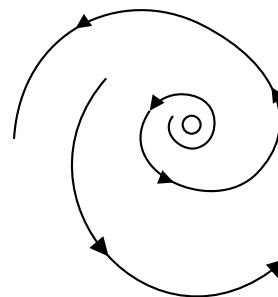


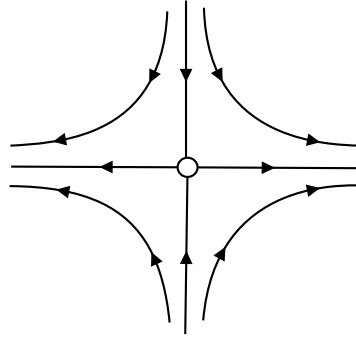
Figura 2.9: Espiral instável no espaço bidimensional.



Fonte:Elaborada pelo autor, com base em LAYEK (2015).

- Atratores: as trajetórias suficientemente próximas convergem para tais pontos. Em duas ou mais dimensões podem ser "nós estáveis", conforme ilustração na Figura (2.6) e na Figura (2.8);
- Repulsores: as trajetórias suficientemente próximas divergem. Em duas ou mais dimensões podem ser "nós instáveis", conforme ilustração na Figura (2.7) e na Figura (2.8);
- Ponto de sela: as trajetórias convergem ou divergem para os "nós". A convergência ou divergência dependerá da região do plano de fase, conforme ilustrado na Figura (2.10).

Figura 2.10: Ponto de sela.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Até aqui, vimos que um sistema pode admitir soluções estacionárias, o qual denomina-se ponto fixo, e as trajetórias próximas ao ponto fixo podem se aproximar ou afasta-se com o passar do tempo. Sabemos também que o sistema admite soluções periódicas, representadas por uma curva fechada no plano de fase.

Nos espaços de fase com duas ou mais dimensões é possível que haja comportamento periódico, ou seja, o ponto no espaço de fase "circula" continuamente por uma órbita fechada denominada, ciclo, pode atrair ou repelir as trajetórias próximas.

Definição 8. (*Ciclo Limite*)

Um ciclo limite é uma órbita associada a uma trajetória fechada e isolada que pode ocorrer no plano de fases de sistemas não lineares.

Por oportuno, destaquemos que apesar das soluções periódicas e do ciclo limite serem representados por uma curva fechada no plano de fase, apresentam diferenças como, por exemplo, nos ciclos limites as trajetórias próximas são espirais que se aproximam ou afastam-se do ciclo, ou seja, as trajetórias próximas não são fechadas.

Para UPADHYAY (2014), é difícil dizer se um sistema tem ciclo limite ou curva fechada (órbitas fechadas) a partir dos estudos das equações por métodos analíticos, contudo quando o sistema apresenta ciclo limite, podemos classificá-los em:

- Estável, se as trajetórias próximas ficam cada vez mais próximas (Figura (2.11)).
- Instáveis, se as trajetórias que inicialmente próximas se afastam (Figura (2.12)).
- Semi-estável, se as trajetórias interiores (exteriores) do ciclo são atraídas e as trajetórias exteriores (interiores) são repelidas (Figura (2.13)).

Figura 2.11: Ciclo limite estável.

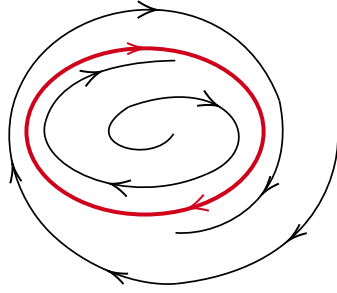
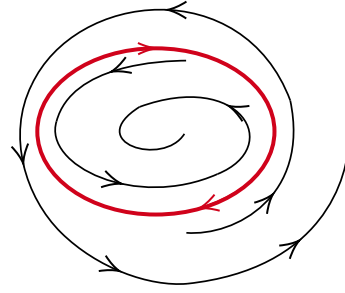
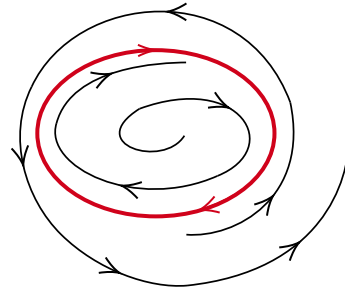
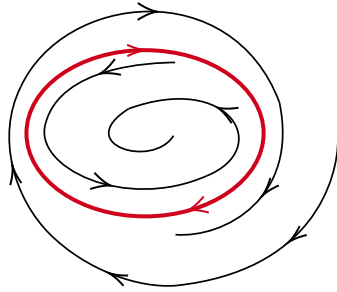


Figura 2.12: Ciclo limite instável.



Fonte:Elaborada pelo autor, com base em LAYEK (2015).

Figura 2.13: Ciclo limite semi-estável.



Fonte:Elaborada pelo autor, com base em LAYEK (2015).

MONTEIRO (2002) exhibe alguns critérios e teoremas, que nos orienta sobre a localização do ciclo limite em um espaço bidimensional.

Convenientemente, exibimos os atratores, através das Figuras (2.6), (2.8) e (2.11), dessa forma, esgotamos as possibilidades dos atratores bidimensionais (plano de fase). Essa conclusão se dá pelo "*Teorema de Poincaré-Bendixson*", o qual nos assegura que as trajetórias que se iniciam numa região R fechada, limitada e invariante² do plano de fase tende a um ponto fixo ou a um ciclo limite quando $t \rightarrow \infty$. (FABIO OIKAWA DOS, 2007, p. 6)

Função de Lyapunov

A estabilidade de um ponto fixo poderá ser determinada pelo método indireto de Lyapunov. Esse método emprega uma função escalar que é chamada função de Lyapunov. A função de Lyapunov nos permitirá fazer análise global do(s) ponto(s) fixo(s) e determinar seu comportamento assintótico mesmo quando as informações obtidas através da linearização são inconclusivas.

O método indireto de Lyapunov consiste em verificar se as órbitas que se iniciam em uma vizinhança U de um ponto fixo x^* e nela permanecem com passar do tempo.

²Região invariante R : qualquer trajetória que se inicie em R permanece em R por todo tempo.

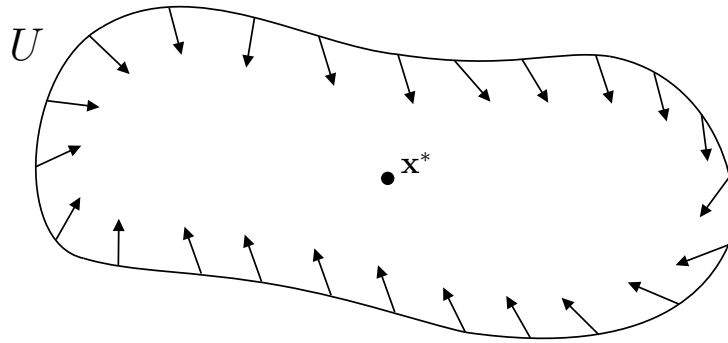
Essa condição é satisfeita se o campo vetorial for tangente ou apontar para o interior do contorno de U , conforme Figura (2.14) .

Para entendermos melhor esse método, consideremos o sistema (2.1) e seu ponto fixo x^* . A estabilidade desse ponto fixo poderá ser investigada através da função de Lyapunov representada por $L(x)$, de tal forma que $L(x^*) = 0$, $L(x) > 0$ e seu lugar geométrico ($L(x) = C$) forme uma curva fechada com o ponto fixo em seu interior.

Atentemos que por definição $L(x)$ é positiva e o gradiente (∇L) é perpendicular ao vetor tangente da curva $L(x) = C$, portanto teremos três possíveis resultados (2.9), proveniente do produto escalar entre $\nabla L \bullet \dot{x}$, representado pela Figura (2.15).

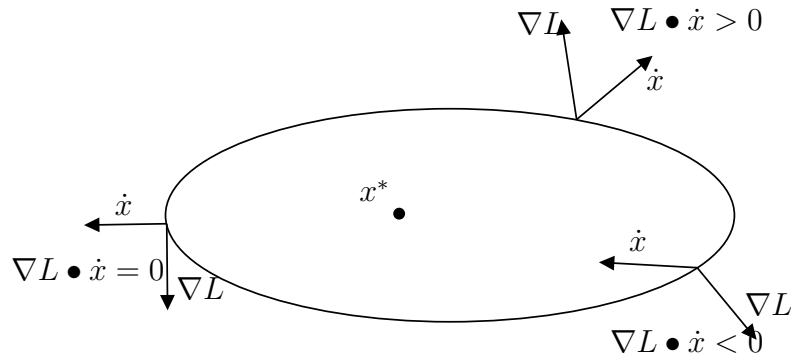
$$\begin{aligned}\dot{L} &= \nabla L \bullet \dot{x} = \nabla L \bullet f < 0 \\ \dot{L} &= \nabla L \bullet \dot{x} = \nabla L \bullet f = 0 \\ \dot{L} &= \nabla L \bullet \dot{x} = \nabla L \bullet f > 0\end{aligned}\tag{2.9}$$

Figura 2.14: Campo vetorial do contorno U .



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em SAVI(2017).

Figura 2.15: Interpretação geométrica de uma curva de nível definida por $L(x)$ e as possibilidades de projeções de f em ∇L .



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em SAVI (2017).

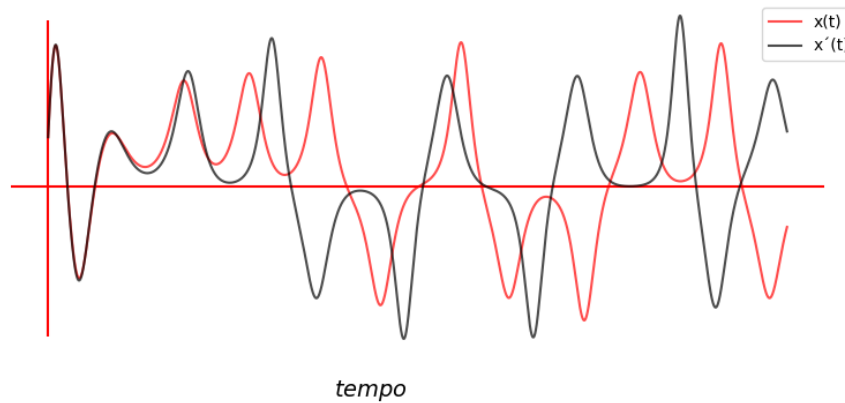
Oportunamente, ressaltamos que a função de Lyapunov é uma entre várias funções que poderá ser construída para a análise da estabilidade Global de um sistema

(2.1), portanto "a existência de uma função de Lyapunov é condição suficiente para a estabilidade do sistema, mas não é condição necessária: um sistema poderá ser estável e não se conhecer nenhuma função de Lyapunov associada"(SILVA, 2005, p. 80).

2.1.4 Sistemas Caóticos

Conforme LYNCH (2004, p.282) não existe uma definição universalmente aceita para o caos, mas a princípio os sistemas não-lineares que exibem dinâmica caótica, apresentam sensibilidade a flutuações microscópicas que evoluem após um tempo ao nível macroscópico. Para entendermos melhor esse fenômeno imaginemos duas trajetórias, ilustrada pela Figura (2.16).

Figura 2.16: Evolução da variável $x(t)$ de um sistema caótico ao longo do tempo.



Fonte:Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

A Figura (2.16), representa a evolução da variável $x(t)$ de um sistema caótico ao longo do tempo. Duas trajetórias, $x(t)$ e $x'(t)$, que se iniciem bastante próximas, acabam divergindo de trajetória após algum tempo devido às não-linearidades do sistema.

As trajetórias geradas por uma dinâmica caótica não são periódicas e não possuem um padrão comportamental. Esse comportamento excepcional é caracterizado como sendo extremamente complexo, irregular, e tão imprevisível que pode parecer aleatório. Entretanto, uma dinâmica caótica é regida por equações determinísticas.

STROGATZ (2014) ratifica LYNCH (2004) ao expressar que nenhuma definição do termo caos é universalmente aceita ainda, mas quase todas concordam com três características recorrentes nas dinâmicas caóticas:

- **Comportamento aperiódico de longo prazo:** significa que existem trajetórias que não se estabelecem em pontos fixos, órbitas periódicas ou quase-

periódicas órbitas quando $t \rightarrow \infty$. Por razões práticas, devemos exigir que tais trajetórias não são muito raras.

- **Determinístico:** significa que o sistema não possui aleatoriedade, ruídos na entrada ou parâmetros. O comportamento irregular surge em sistema não-linear, ao invés de forças motrizes ruidosas.
- **Dependência sensível das condições iniciais:** significa que as trajetórias próximas separam-se exponencialmente rápido.

Ou seja, um sistema é dito caótico quando apresenta um comportamento aperiódico de longo prazo e exibe dependência exponencialmente sensível às condições iniciais.

Como consequência das características comuns exposta por LYNCH (2004) e STROGATZ (2014), temos que os sistemas caóticos apresentam:

- sensibilidade exponencial às condições iniciais;
- imprevisibilidade após um tempo relativamente curto;
- espectro de frequência contínua de banda larga, porém limitada;
- presença do atrator denominado estranho.

2.1.5 Atrator estranho

Definição 9. (*Atrator estranho.*)

Conforme MONTEIRO (2002), um conjunto fechado de pontos A , no espaço de fases de um sistema dinâmico, é definido como um atrator se:

- A é um conjunto invariante, ou seja, qualquer trajetória $\mathbf{x}(t)$ que começa em A , permanece em A por todo tempo;
- A atrai um conjunto aberto ³ de condições iniciais, isto é, há um hiper-volume esférico B , que contém A , tal que para qualquer condição inicial $\mathbf{x}(t_0)$ pertencente a B , então a distância entre a trajetória $\mathbf{x}(t)$ e A tende a zero, quando $t \rightarrow \infty$. O maior conjunto de condições iniciais que satisfaz essa propriedade é chamado bacia de atração de A .
- A é mínimo, ou seja, não há sub-conjunto de A que satisfaça as duas condições anteriores.

³Um intervalo aberto no eixo- x é definido por $a < x < b$, sendo a e b constantes. Um conjunto aberto é uma generalização dessa definição, considerando-se mais dimensões. Um conjunto U é aberto se em qualquer ponto $\mathbf{x}$ de U , pode-se construir uma bola B centrada em $\mathbf{x}$ e contida em U .

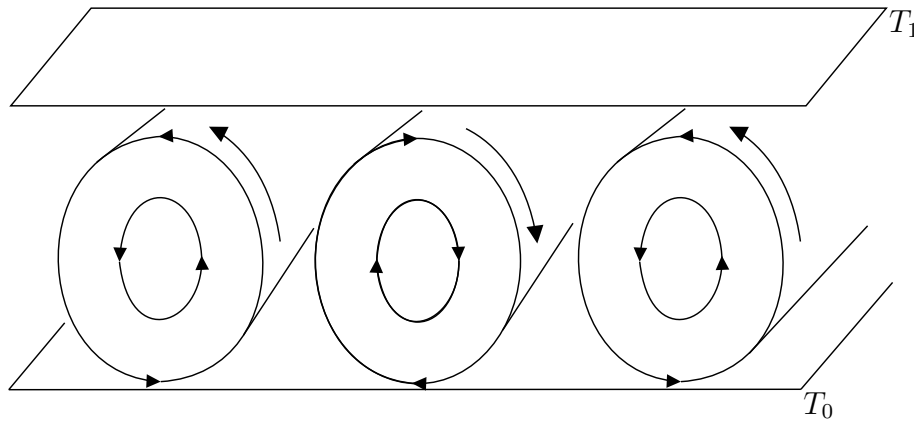
Sendo assim, o atrator estranho pode ser entendido como um atrator em que as trajetórias apresentam dependência exponencialmente sensível às condições iniciais.

Um exemplo de sistema caótico que exibe a presença de um atrator estranho é apresentado pelo meteorologista Edward Lorenz em 1963.

Sistema de Lorenz

O meteorologista Edward Norton Lorenz (1917-2008), com intuito de compreender a dinâmica atmosférica através das equações de hidrodinâmicas, publicou em 1963 o artigo intitulado fluxo não periódico determinístico (“*Deterministic nonperiodic flow*”), o qual exibe um modelo computacional simplificado em que simula a característica atmosférica conhecida como convecção térmica de uma célula de Rayleigh-Bénard.

Figura 2.17: Fenômeno de convecção térmica



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FIEDLER-FERRARA e PRADO (1994).

Este fenômeno ilustrado pela Figura (2.17) pode ser descrito como um fluido confinado entre duas placas horizontais rígidas e isotérmicas em que a placa inferior tem uma temperatura T_0 e a placa superior tem uma temperatura T_1 com $T_0 > T_1$. A diferença entre as temperaturas das placas é dada por $\Delta T = T_0 - T_1$, enquanto ΔT é pequena a camada de fluido permanecerá estática, portanto, estável. À medida que a diferença aumenta a camada do fluido torna-se instável, e como resultado aparecerá um rolo de convecção na camada de fluido. Este fenômeno é conhecido como fenômeno de convecção térmica.

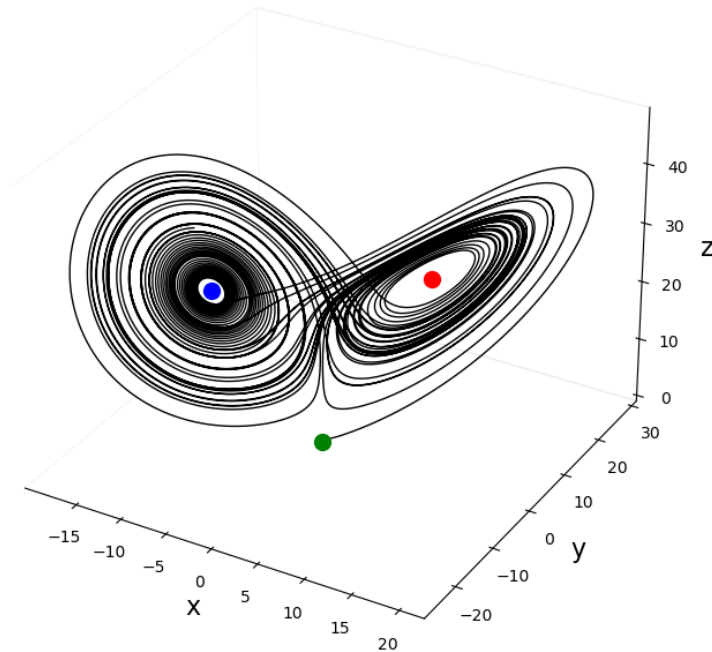
Em seu modelo Lorenz reduziu a complexidade do sistema em que era descrito por Equações Diferenciais Parciais – EDP a um sistema descrito por três Equações Diferenciais Ordinárias. O modelo simplificado pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma(y - x), \\
\dot{y} &= rx - y - xz, \\
\dot{z} &= xy - bz.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

em que os parâmetros, σ , r e b são definidos positivos. Por oportuno, cabe nos evidenciar que a variável x no sistema (2.10) está associada a intensidade do movimento do fluido, enquanto as variáveis y e z estão relacionadas as variáveis de temperatura nas direções horizontal e vertical, já os parâmetros são definidos positivos e tem-se:

- σ é chamado de *número de Prandtl* e descreve as características físicas do sistema, como a viscosidade do fluido,
- b depende do material e das propriedades geométricas da camada de fluido,
- r é proporcional à diferença de temperatura entre das placas, ou seja, Δt .

Figura 2.18: Atrator estranho no espaço de fases tridimensional do sistema de Lorenz para os parametros $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$. Condições iniciais $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ e $0 \leq t \leq 60$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

No decorrer deste exemplo vamos constatar que apesar do sistema (2.10) exibir aparência simples, a resolução analítica torna-se dificultosa e trabalhosa por exibir

dois termos não-lineares (xz e xy) e poderá apresentar uma dinâmica complicada para uma infinidade de valores dos parâmetros σ , r e b , conforme Figura (2.18).

Figura 2.19: Projeção do atrator estranho de Lorenz no plano de fase xy .

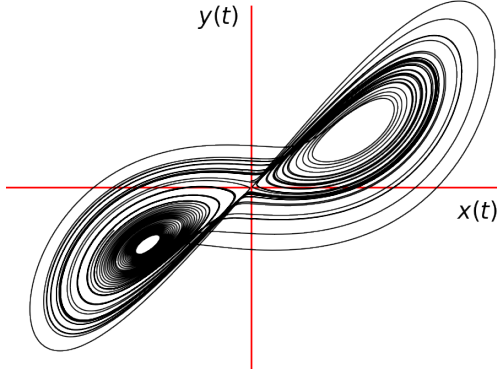
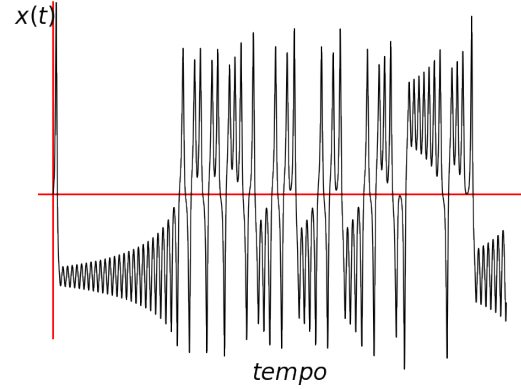


Figura 2.20: Série temporal da variável x do sistema de Lorenz.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Figura 2.21: Projeção do atrator estranho de Lorenz no plano de fase xz .

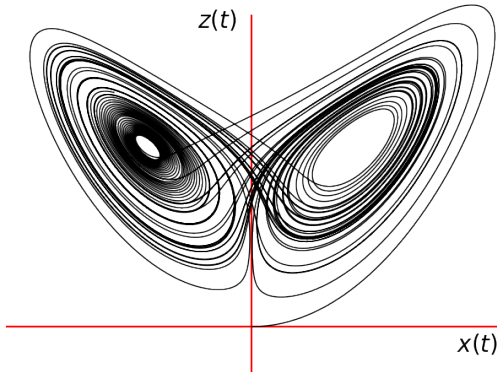
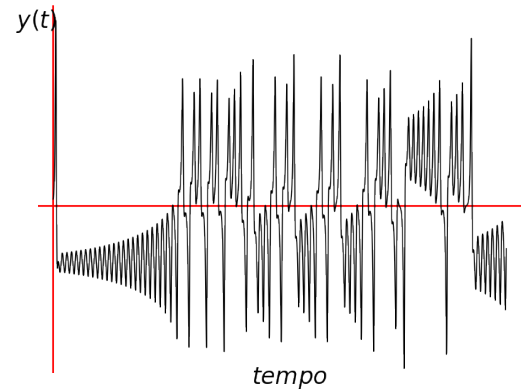


Figura 2.22: Série temporal da variável y do sistema de Lorenz.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Simetria

O sistema apresentado por Lorenz em 1963, possui simetria em relação aos eixos x e y . Observemos que substituindo (x, y, z) por $(-x, -y, z)$ no sistema (2.10), ele permanecerá invariante, ou seja, se $(x(t), y(t), z(t))$ é uma solução para o sistema de Lorenz, $(-x(t), -y(t), z(t))$ também é uma solução para o sistema (2.10). Logo essas soluções são simétricas ou possuem pares simétricos. Portanto, temos como consequência a projeção das órbitas no plano de fase x e y simétricas em relação à origem.

Figura 2.23: Projeção do atrator estranho de Lorenz no plano de fase yz .

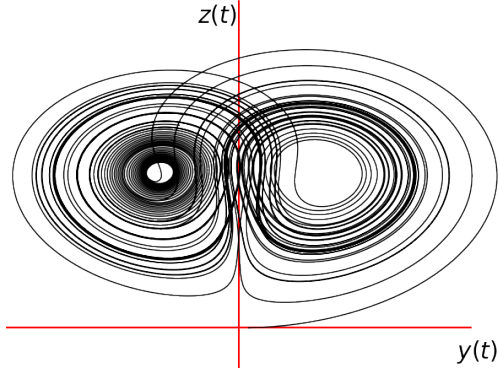
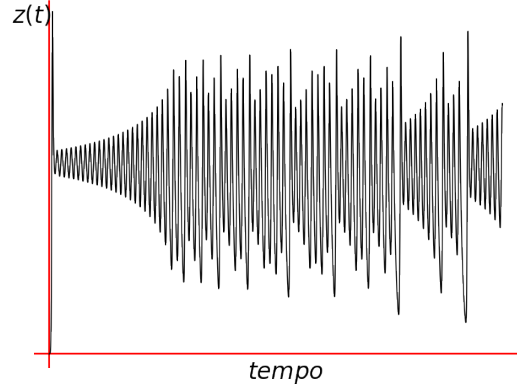


Figura 2.24: Série temporal da variável z do sistema de Lorenz.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Outra característica importante desse sistema é a invariância sobre o eixo z . Considerando que $(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, z(t))$ então x e y permanecem iguais a zero para todo t , pois $P_0 = (0, 0, 0)$ é um ponto de equilíbrio do sistema. Assim o eixo z é uma órbita, em que,

$$\dot{z} = -bz \Rightarrow z(t) = z(0)e^{-bt} \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

Sendo assim, as soluções que iniciam no eixo z tendem a origem com o passar do tempo.

A natureza dissipativa do sistema de Lorenz e a existência do atrator estranho.

A existência de um atrator estranho tem como condição necessária a dissipatividade do sistema, ou seja, o volume ocupado pelo sistema no espaço de fase diminui à medida que o sistema evolui no tempo. Aplicando a equação (2.8) no sistema (2.10), teremos;

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{f} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\sigma(y - x)) + \frac{\partial}{\partial y} (rx - y - xz) + \frac{\partial}{\partial z} (xy - bz) \\ &= -(\sigma + b + 1) \end{aligned}$$

ou seja, $\nabla \cdot \mathbf{f} = -(\sigma + b + 1) < 0$ portanto o sistema (2.10) é dito dissipativo. Desta maneira, a equação (2.7) pode ser reescrita;

$$\dot{V} = \int_V -(\sigma + b + 1) dV = -(\sigma + b + 1) V. \quad (2.12)$$

em outras palavras, (2.12) apresenta como solução $V(t) = V_0 e^{-(\sigma+b+1)t}$, sendo V_0 o volume inicial. Isso implica que quando $t \rightarrow \infty$ os volumes no espaço de fase diminuem exponencialmente rápido até atingir um conjunto atraente de volume zero. Portanto, o sistema de Lorenz é dito dissipativo por natureza.

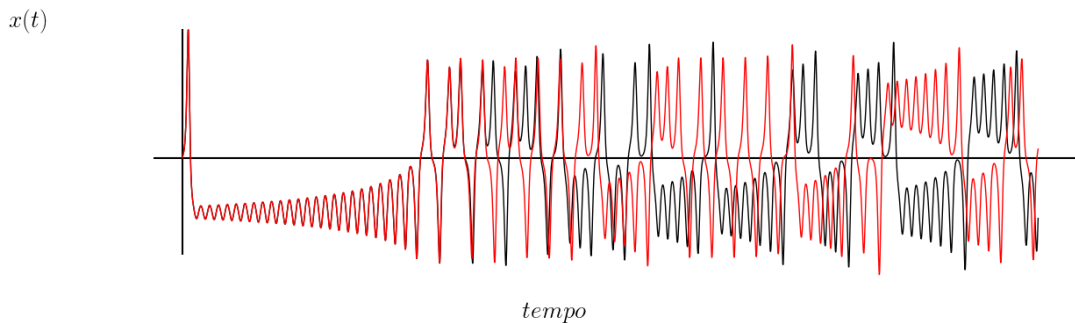
Consequentemente, se a dissipatividade do sistema for comprovada, a existência do atrator estranho pode ser encontrada na busca da instabilidade dos pontos fixos.

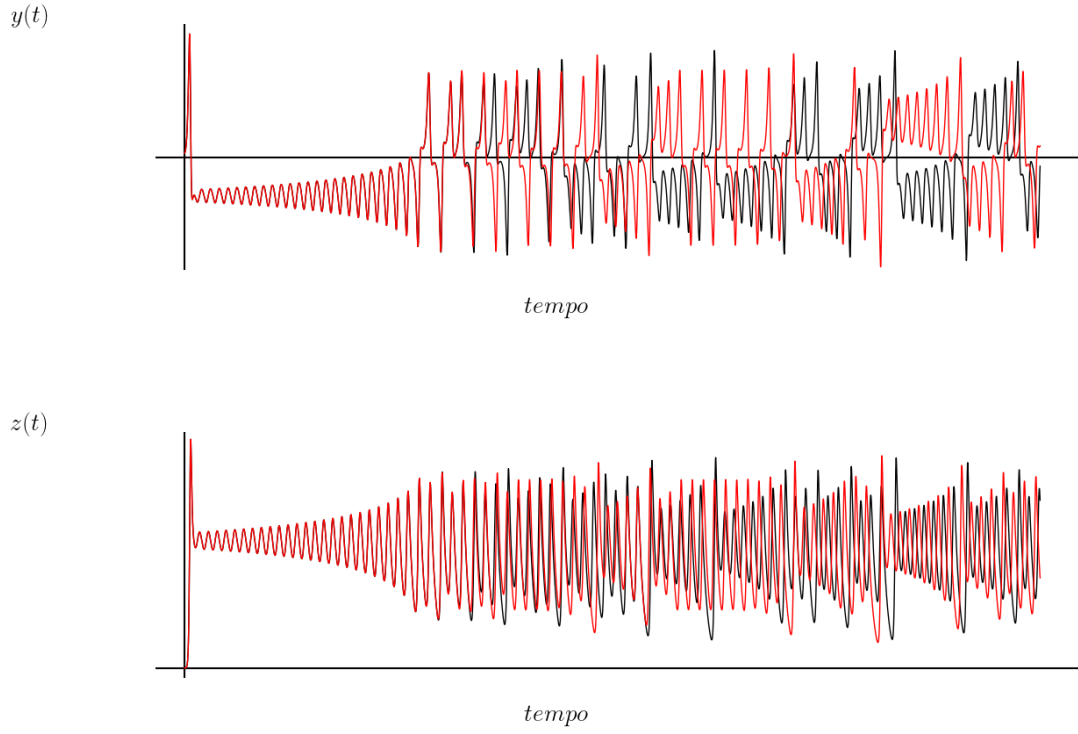
Além do sistema(2.10) ser dissipativo e não linear poderemos destacar:

- autonomia do sistema, ou seja, o tempo (variável t) não aparece explicitamente nas equações;
- exibe apenas derivadas de primeira ordem, ou seja, a evolução do sistema depende exclusivamente do valor instantâneo de (x, y, z) ;
- as soluções são limitadas.

Diante do que já foi apresentado, torna-se oportuno expor alguns aspectos qualitativo exibido pela dinâmica do sistema apresentado por Lorenz, que apresenta sensibilidade às condições iniciais. Através das Figuras (2.25) e (2.26) observamos que apesar das iniciais muito próximas às soluções do sistema de Lorenz apresentam dinâmica que até então era previsível passa a exibir um comportamento totalmente diferente da dinâmica cogitada.

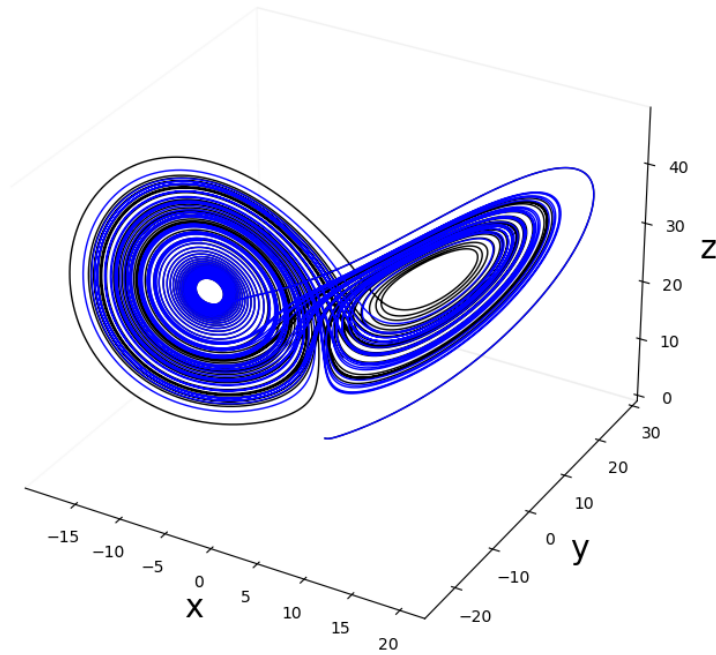
Figura 2.25: Sensibilidade às condições iniciais das séries temporais do sistema de Lorenz com $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ (preto) e $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1.01, 0)$ (vermelho).





Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Figura 2.26: Sensibilidade às condições iniciais. $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ (preto) e $(x'_0, y'_0, z'_0) = (0, 1.01, 0)$ (azul), para $0 \leq t \leq 60$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Estabilidade dos pontos fixos (equilíbrio).

Assumindo $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ do sistema (2.10), obtendo o sistema (2.13),

$$\begin{aligned}\sigma y - \sigma x &= 0, \\ rx - y - xz &= 0, \\ xy - bz &= 0.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Para estudar a estabilidade dos pontos, teremos que resolver o sistema em comentário. Da primeira equação, temos $x = y$. Eliminando a variável y da segunda e terceira equações, obtemos:

$$\begin{aligned}x(r - 1 - z) &= 0, \\ -bz + x^2 &= 0.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Uma possível solução para o sistema (2.13) é escolher $x = 0$, então $y = 0$ e consequentemente $z = 0$. Escolhendo $z = r - 1$ e substituindo no sistema (2.14) obtemos $x = \pm\sqrt{b(r-1)}$ e $y = \pm\sqrt{b(r-1)}$, ou seja,

$$\begin{aligned}C_0 &= (x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0), \\ C_+ &= (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1), \\ C_- &= (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1).\end{aligned}\tag{2.15}$$

Dessa forma, ao analisarmos a estabilidade dos pontos de equilíbrio, teremos que os pontos (2.15) só admitirão valores reais, se $0 < r \leq 1$. Para $r > 1$ o sistema apresentará os três pontos.

Com intuito de investigar a estabilidade local dos pontos de equilíbrio do sistema (2.13) montaremos a matriz Jacobiana do sistema de Lorenz,

$$J(x^*, y^*, z^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z^* & -1 & x^* \\ y^* & x^* & b \end{bmatrix}.\tag{2.16}$$

Desta forma, analisaremos a estabilidade dos pontos fixos (2.15) através dos autovalores dessa matriz (2.24) próximo de cada um desses pontos.

Estabilidade do ponto fixo C_0 .

A análise da estabilidade no ponto C_0 se dar pelo cálculo do determinante nesse ponto,

$$J_{C_0} = \begin{bmatrix} -\sigma - l & \sigma & 0 \\ r & -1 - l & 0 \\ 0 & 0 & -b - l \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

fornece-nos um polinômio característico,

$$\begin{aligned} P_{C_0}(l) &= (-\sigma - l)(-1 - l)(-b - l) - (-b - l)r\sigma, \\ &= -l^3 - bl^2 - l^2 - bl + b\sigma + l^2\sigma + bl\sigma + l\sigma + br\sigma + lr\sigma, \\ &= [l^2 + (\sigma + 1)l + \sigma(1 - r)](-b - l) = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Observemos que pela forma que organizamos o polinômio característico (2.18), evidenciamos que $l = -b$ é um autovalor, dessa forma, para a aproximação linear (2.24), a origem é assintoticamente estável para $0 \leq r < 1$. A conclusão de que a origem é assintoticamente estável envolve o termo $\dot{z}$, mas $\dot{z}$ pode ser desacoplado do sistema (2.20) de modo que

$$\dot{z} = -bz \Rightarrow z(t) = z_0 e^{-bt} \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty \quad (2.19)$$

Dessa forma o polinômio característico quadrático representa a natureza do fluxo no plano xy quando $t \rightarrow \infty$.

A forma linearizada do sistema de Lorenz (2.10) sobre o ponto fixo C_0 é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y, \\ \dot{z} &= -bz. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Resolvendo o sistema de Lorenz linearizado (2.20) para o ponto C_0 .

Daí a soma dos elementos diagonais da matriz, $\tau = \sigma - 1 = -(\sigma + 1) < 0$ e seu determinante $\Delta = (-\sigma)(-1) - \sigma r = \sigma(1 - r)$. Teremos a seguinte análise:

- se $r > 1$, então $\Delta < 0$ e então C_0 é um ponto de sela. Esta sela possui duas direções uma direção de saída (instável) e uma de entrada (estável).
- se $r < 1$, então $\Delta > 0$ e todas as direções estão entrando e a origem do ponto fixo estável. (nó estável).

Estabilidade global do ponto fixo C_0 .

Para analisar a estabilidade global do ponto fixo C_0 , utilizaremos o método indireto de Lyapunov, através da função (2.21).

$$L(x, y, z) = \frac{x^2}{\sigma} + y^2 + z^2 \quad (2.21)$$

Da seção (2.1.3) temos que a função de Lyapunov é definida positiva, ou seja, $L(x, y, z) > 0$ para $(x, y, z) \neq 0$ e $L(0) = 0$. Empregando a derivada direcional em (2.21), obteremos

$$\dot{L}(x, y, z) = \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial L}{\partial z} \dot{z} = \frac{2x\dot{x}}{\sigma} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} \quad (2.22)$$

substituindo $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ do sistema (2.10) em (2.22), teremos

$$\begin{aligned} \frac{\dot{L}}{2} &= \frac{x\dot{x}}{\sigma} + y\dot{y} + z\dot{z} \\ &= x(x - y) + y(rx - y - xz) + z(xy - bz) \\ &= -x^2 + (1 + r)xy - y^2 - bz^2 \\ &= -\left[x^2 - 2x\left(\frac{1+r}{2}\right)xy + \left(\frac{1+r}{2}\right)^2 y^2 \right] + \left(\frac{1+r}{2}\right)^2 y^2 - y^2 - bz^2 \\ &= -\left[x - \left(\frac{1+r}{2}\right)y \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{1+r}{2}\right)^2 \right] y^2 - bz^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Através da expressão (2.23), é possível constatar que $\dot{L}$ é negativa se $r < 1$, para todo $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Atentemos que a soma dos quadrados é negativa, em outras palavras, a primeira condição ($\dot{L} < 0$) é satisfeita. A segunda condição para C_0 ser globalmente estável é satisfeita quando substituimos $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ em (2.23). Sendo assim, podemos concluir que C_0 é um ponto fixo globalmente estável, para σ, b positivo e $r < 1$.

Estabilidade dos Pontos $C_{\pm}$.

A análise dos pontos fixos $C_{\pm}$ poderá se dar através do cálculo da matriz Jacobiana que nos fornecerá os autovalores do sistema de Lorenz,

$$J(x^*, y^*, z^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z^* & -1 & -x^* \\ y^* & x^* & b \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

em que o polinômio característica é obtido através do

$$\det \begin{bmatrix} -\sigma - l & \sigma & 0 \\ r - z^* & -1 - l & -x^* \\ y^* & x^* & b - l \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -\sigma - l & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - l & -(\sqrt{b(r-1)}) \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & b - l \end{bmatrix} = 0,$$

resultando num polinômio característico, que devido à simetria do sistema (2.10) obteremos o mesmo polinômio para os pontos C_+ e C_-

$$P_{\pm}(l) = -l^3 - (\sigma + b + 1)l^2 - b(\sigma + r)l - 2\sigma b(r - 1) = 0 \quad (2.25)$$

Para $1 < r < r_H$, as três raízes da equação cúbica (2.25) existem e são reais negativas e distintas,

$$r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \quad (2.26)$$

para $r > r_H$, existe um autovalor real negativo e dois autovalores complexos com parte real positiva, caracterizando a instabilidade do ponto.

Limitação das Soluções do Sistema de Lorenz

Para $r > 1$, as soluções do sistema de Lorenz são limitadas. Para constataremos consideremos a função,

$$V(x, y, z) = E = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 \leq c < \infty \quad (2.27)$$

de modo que todas as soluções do sistema de Lorenz (2.10) entram em E dentro de um tempo finito. Portanto, permanecem em E . Da expressão (2.27), temos, $V > 0$ e $V = 0$ em C_0 . Portanto, as superfícies de nível $V = c$ serão elipsoides, com centro em $(0, 0, 2r)$ e semieixos $(\sqrt{c/r}, \sqrt{c/r}, \sqrt{c/r})$. Para demonstrar o resultado em comento, derivemos (2.27) e obteremos

$$\dot{V}(x, y, z) = 2rx\dot{x} + 2\sigma y\dot{y} + \sigma(z - 2r)\dot{z} \quad (2.28)$$

substituindo $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ do sistema (2.10) em $\dot{V}(x, y, z)$ e operando algebricamente, teremos

$$\dot{V}(x, y, z) = rx^2 + y^2 + bz^2 - 2rbz < 0 \quad (2.29)$$

Assim, as trajetórias serão direcionadas para dentro do elipsoide E , se x , y e z estiverem contidos dentro de outro elipsoide D , obtida do Elipsoide E . Seja D

$$D \equiv rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 = br^2 \quad (2.30)$$

reescrevendo a (2.30), teremos

$$\frac{x^2}{(\sqrt{br})^2} + \frac{y^2}{(r\sqrt{b})^2} + \frac{(z-r)^2}{r^2} = 1. \quad (2.31)$$

Com centro $(0, 0, r)$ e comprimento dos semieixos são $\sqrt{br}$, $r\sqrt{b}$ e r respectivamente. De forma análoga, $(0, 0, 2r)$ é o centro do Elipsoide $E \equiv rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z-2r)^2 = c$, e o comprimento dos semieixos são $\sqrt{c/r}$, $r\sqrt{c/\sigma}$ e $\sqrt{c/\sigma}$ respectivamente. Visto que as coordenada x e y dos centros de E e D são $x = 0$ e $y = 0$ a extensão do elipsoide E nas direções x e y excedem a extensão do elipsoide D nas mesmas direções se,

$$\sqrt{c/r} > \sqrt{br},$$

$$\sqrt{c/\sigma} > r\sqrt{b},$$

ou seja, $c > br^2$ e $c > b\sigma r^2$.

Já para o eixo z , temos que o elipsoide D está contido em

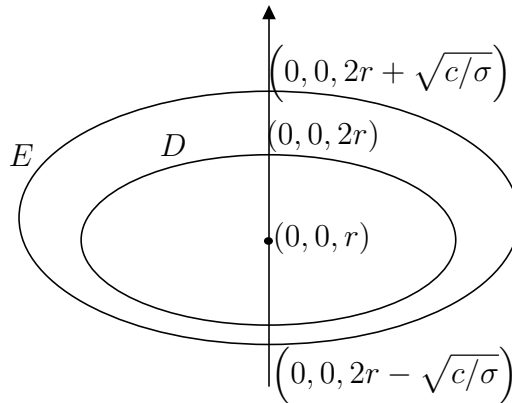
$$0 = r - r < z < r + r = 2r$$

enquanto, para o elipsoide E , teremos

$$2r - \sqrt{c/\sigma} < z < 2r + \sqrt{c/\sigma}$$

Atentemos que, $2r < 2r + \sqrt{c/\sigma}$, para todo c . Assim, o ponto mais baixo do elipsoide D é o ponto $(0, 0, 0)$, em outras palavras, o limite inferior do elipsoide D é o ponto $(0, 0, 0)$, que se encontra acima do limite inferior do elipsoide E , representado pelo ponto $(0, 0, 2r - \sqrt{c/\sigma})$. Para $2r - \sqrt{c/\sigma} < 0$, teremos $c > 4r^2\sigma$ e tomemos $c = c_{cr} = \max\{br^2, b\sigma r^2, 4\sigma r^2\}$, ou seja, D estará contido em E_{cr} . Sendo assim, qualquer ponto (x, y, z) exterior a D , terá trajetória direcionada para dentro de E , pois $\dot{V}(x, y, z) < 0$, conforme ilustrado na Figura (2.27).

Figura 2.27: Representação da limitação das soluções do sistema Lorenz.



Fonte:Elaborada pelo autor, com base em LAYEK (2015).

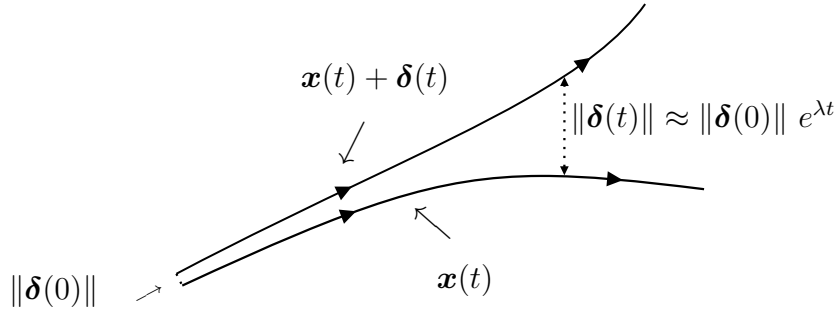
2.1.6 Expoente de Lyapunov.

O trabalho do matemático russo Aleksandr Lyapunov no século XIX deu origem ao desenvolvimento da teoria da estabilidade dos Sistemas Dinâmicos, em que a evolução dos Sistemas e seu comportamento é discutida. Podemos conhecer o caráter divergente, dissipativo ou conservador de um Sistema Dinâmico através do Expoente de Lyapunov (λ).

Ao realizarmos um estudo qualitativo dos sistemas, queremos entender, o comportamento da sua trajetória no tempo. Uma das características que queremos analisar é o quão sensível o sistema é a perturbações, ou seja, com qual velocidade duas trajetórias próximas se aproximam ou se afastam. Embora essa dependência as condições iniciais possa ser verificada, em alguns casos, pela análise do atrator do sistema, para muitos outros sistemas não são nada fácil.

O expoente de lyapunov apresenta-se como uma medida quantitativa do caos. Para compreendemos melhor a importância do expoente de Lyapunov no estudo de um sistema dinâmico, consideremos a Figura (2.28), que representa duas trajetórias próximas uma da outra, $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\delta}(t)$, em que $\boldsymbol{\delta}(t)$ é a distância entre elas e $t \in \mathbb{R}$.

Figura 2.28: Evolução de duas trajetórias.



Fonte:Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Considerando a evolução temporal das condições iniciais em um intervalo de tempo, observemos que as trajetórias crescem ou se contraem exponencialmente. Sendo assim, a diferença entre os pontos das trajetórias podem se descritas por⁴,

$$|\delta(t)| \approx |\delta(0)|e^{\lambda t}. \quad (2.32)$$

Operando algebricamente em (2.32).

$$\left| \frac{\delta(t)}{\delta(0)} \right| = e^{\lambda t}$$

⁴Por oportuno, destacamos a utilização da seguinte notação, $\|\delta(t)\| \equiv |\delta(t)|$, no intuito de simplificar a notação utilizada.

$$\begin{aligned}\ln(e^{\lambda t}) &= \ln \left(\left| \frac{\delta(t)}{\delta(0)} \right| \right) \\ \lambda t &= \ln \left(\left| \frac{\delta(t)}{\delta(0)} \right| \right) \\ \lambda &= \frac{1}{t} \ln \left(\left| \frac{\delta(t)}{\delta(0)} \right| \right).\end{aligned}$$

Neste caso o expoente de Lyapunov máximo pode ser definido da seguinte forma,

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{|\delta(t)| \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left(\left| \frac{\delta(t)}{\delta(0)} \right| \right). \quad (2.33)$$

O limite $|\delta(t)| \rightarrow 0$, garante a validade da aproximação linear a qualquer momento.

O aspecto caótico de um sistema pode ser caracterizados pela divergência exponencial das trajetórias que iniciam próximas conforme ilustrado na Figura (2.28). Nesse caso, a existência de um atrator estranho no espaço de fase é garantida pelo sistema que apresentar pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, ou seja, a condição para declarar que a dinâmica é caótica.

Observemos que da Figura (2.28) o expoente de lyapunov monitora a evolução das trajetórias que podem divergir ou convergir, em outras palavras, o expoente de Lyapunov descreve geometricamente o comportamento das trajetórias no tempo.

Para sistema de tempo discreto (mapas ou iterações de ponto fixo) $x_{n+1} = f(x_n)$, para uma órbita começando com x_0 isso se traduz em

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2.34)$$

Uma fórmula mais precisa e computacionalmente útil para λ pode ser derivada. Fazendo $\delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)$, obtemos

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{t} \ln \left(\left| \frac{\delta(t)}{\delta(0)} \right| \right) \\ &\approx \frac{1}{t} \ln \left(\left| \frac{f^t(x_0 + \delta_0) - f^t(x_0)}{\delta_0} \right| \right) \\ &= \frac{1}{t} \ln \left(|(f^n)'(x_0)| \right)\end{aligned}$$

Expoentes de Lyapunov.

A seguir veremos que o número de expoentes de um sistema é igual à dimensionalidade do seu espaço de fases.

Imaginemos agora essa descrição num espaço de fase para uma hiper-volume

esférico, onde $\delta(x_0)$ é o raio em torno do ponto x_0 com estado inicial vizinho igual a y_0 obteremos,

$$|y_0 - x_0| \leq \delta_0(x_0). \quad (2.35)$$

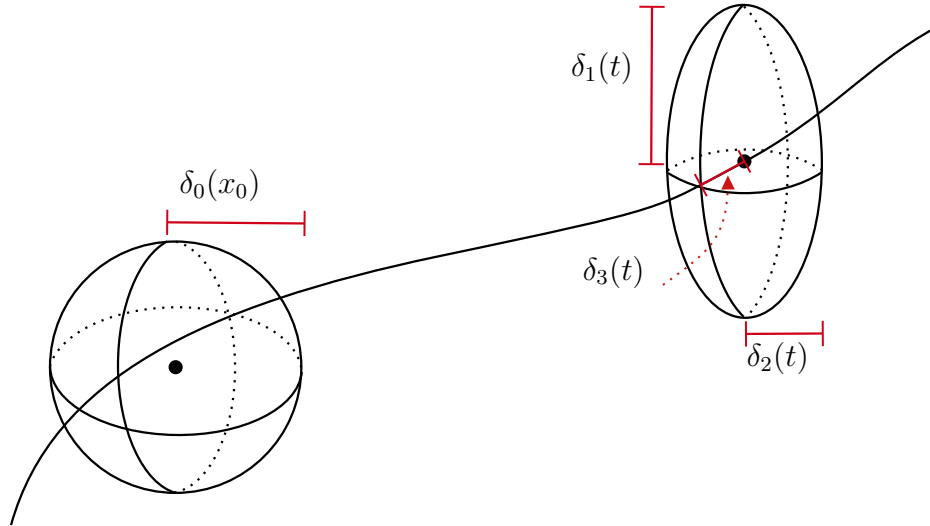
À medida que o tempo passa a hipersfera se deforma em um hiperelipsoide com trajetória de referência $\delta_i(t)$, em que $i = 1, 2, 3, \dots, n$, ilustrado pela Figura (2.29). Sendo:

$$\delta_i(t) \simeq \delta_0(x_0) e^{\lambda_i t}. \quad (2.36)$$

Os expoentes de Lyapunov serão definidos da seguinte forma,

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta_0(x_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta_i(t)}{\delta_0(x_0)}. \quad (2.37)$$

Figura 2.29: Representação geométrica dos expoentes de Lyapunov.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em LAYEK (2015).

Das equações (2.37) e (2.36) temos que:

- a presença de um ou mais de um expoente de Lyapunov positivo define uma instabilidade nas direções associadas,
- para um comportamento caótico é caracterizado pela existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo,
- para um comportamento periódico ou quase-periódico é caracterizada pela existência de pelo menos um expoente de Lyapunov negativo nas direções perpendiculares ao movimento e pelo menos um expoente de Lyapunov igual a zero ao longo da trajetória.

Num instante t o elemento de volume no espaço de fase é dado por:

$$V(t) = \prod_{i=1}^m \delta_i(t) \quad (2.38)$$

Substituindo (2.36) em (2.38), temos;

$$\begin{aligned} V(t) &= \prod_{i=1}^m \delta_0(x_0).e^{\delta_i t} \\ &= \prod_{i=1}^m \delta_0(x_0).exp\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i t\right) \\ &= V(0).exp\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i t\right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Da análise da equação (2.39), existem duas situações para qual o sistema não diverge:

- Quando $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$, temos $V(t) = V(0)$ e portanto o sistema é conservativo;
- Quando $\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$, temos $V(t) < V(0)$, o volume diminui e teremos um sistema dissipativo.

Num sistema tridimensional, teremos quatro tipos de atratores que correspondem aos três expoentes de Lyapunov λ_1 , λ_2 e λ_3 . Para ilustrar os quatro tipos de atratores, consideremos os sinais dos expoentes de Lyapunov.

- **Ponto de equilíbrio:** nesta situação os sinais dos expoentes de Lyapunov são negativos, ou seja, $(-, -, -)$. Sendo assim, as trajetórias convergem para um ponto;
- **Ciclo limite:** nesta situação teremos que os sinais dos expoentes de Lyapunov são $(0, -, -)$, sendo o expoente nulo corresponde à direção ao longo da trajetória;
- **Toro bidimensional:** para esse caso teremos duas trajetórias atratoras que se situam sobre a superfície. Os sinais dos expoentes de Lyapunov são $(0, 0, -)$;
- **Atrator estranho:** nesta situação um dos expoentes de Lyapunov deverá ser positivo para existir sensibilidade às condições iniciais. O sinal do outro expoente deverá ser nulo ao longo da trajetória e o terceiro expoente deverá ser

negativo e maior que o primeiro para que o sistema seja dissipativo, ou seja, $\sum_{i=1}^{m=3} \lambda_i < 0$. Sendo assim os sinais dos expoentes de Lyapunov são $(+, 0, -)$.

Evidenciando as Figuras (2.30), (2.31), (2.32) e (2.33) representam às quatro categorias de atratores, para um sistema com λ_1 , λ_2 e λ_3 , sendo os expoentes de Lyapunov. Por oportuno, cabe esclarecer que a Figura (2.33), representa o atrator estranho do sistema de Lorenz.

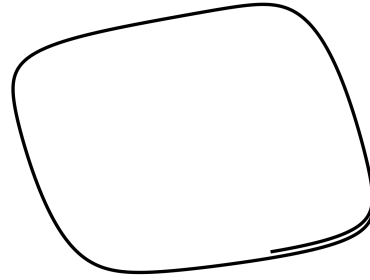
Figura 2.30: Ponto de equilíbrio



$Sinal = (-, -, -)$

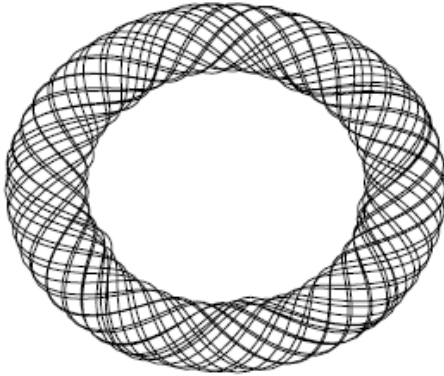
Fonte:Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Figura 2.31: Ciclo Limite



$Sinal = (0, -, -)$

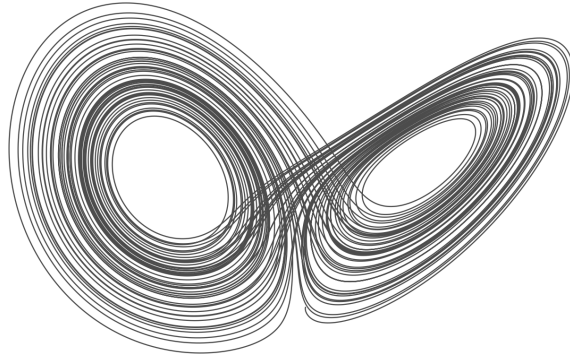
Figura 2.32: Toro Bidimensional.



$Sinal = (0, 0, -)$

Fonte:Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Figura 2.33: Atrator estranho.



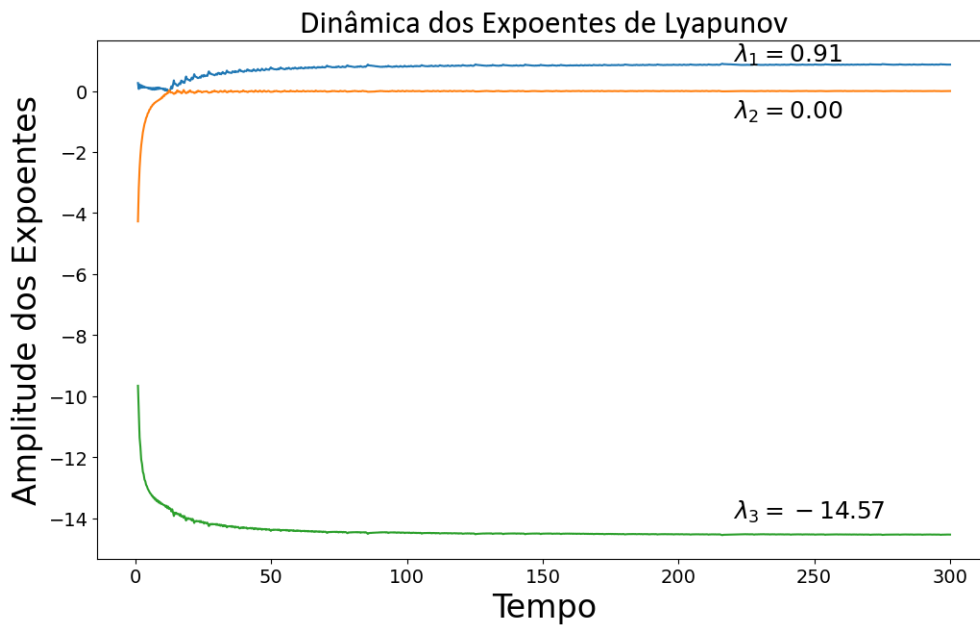
$Sinal = (+, 0, -)$

Destaquemos que além da presença de um comportamento irregular, os sistemas ditos caóticos são analisados pela sua sensibilidade as condições iniciais, ou seja, duas trajetórias que iniciam muito próximas apresentam trajetórias divergentes na evolução temporal. Diante do que foi exposto até o momento, os expoentes de Lyapunov são números que expressão quantitativamente a convergência ou divergência exponencial de um sistema.

Expoentes de Lyapunov para o sistema de Lorenz

Voltando ao sistema apresentado por Lorenz e utilizando o método proposto por WOLF *et al.* (1985) que calcula os expoentes de Lyapunov diretamente das séries temporais, em que os cálculos computacionais percorrem a dinâmica do atrator e estima a taxa de divergência ou convergência da trajetória referencial com a trajetória perturbada. Desta forma o algoritmo proposto por WOLF *et al.*, embasa-se no cálculo numérico das taxas média de divergência local entre as trajetórias para estimar os expoentes de Lyapunov. Para o sistema (2.10), obtemos a Figura (2.34).

Figura 2.34: Expoente de Lyapunov para $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$ e condição inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em WOLF *et al.* (1985)..

Observação 2.1. *O método proposto por Wolf poderá ser visto com maior detalhes em WOLF et al.(1985).*

Por oportuno, lembremos que o expoente de Lyapunov representa a taxa de divergência ou convergência entre as trajetórias, desta forma nos permite analisar a estabilidade ou instabilidade dos sistemas dinâmicos, assim como, oferece-nos, uma medida quantitativa do comportamento caótico. Pelo método proposto por Wolf, que consiste em estimar através da média dos expoentes de Lyapunov locais, ao longo da trajetória, desta forma, estamos procurando a presença dos expoentes de Lyapunov positivo. Consequentemente a presença de uma estimativa positiva para os expoentes em questão, exibirá dinâmica caótica para o sistema, apesar de não haver uma definição matemática universalmente aceita de Caos.

Capítulo 3

Método Proposto

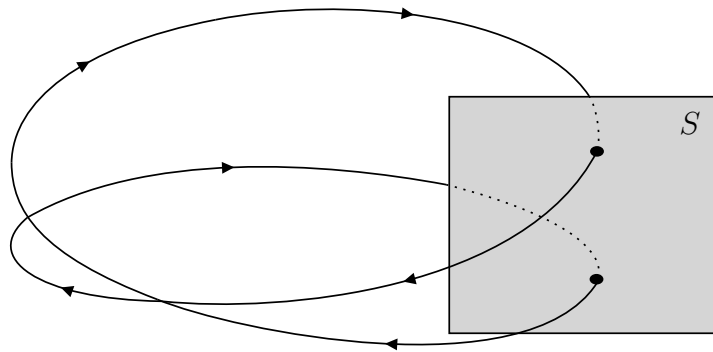
3.1 Sistema em Tempo Discreto.

3.1.1 Seção de Poincaré

Uma maneira simplificada de analisar o sistema (2.2) é através dos mapas iterados¹, onde a seção de Poincaré é um exemplo, que consiste em mapear os pontos de intersecção da trajetória gerada pela dinâmica do sistema mencionado, com uma hipersuperfície S , $(n - 1)$ -dimensional e transversal a trajetória, ou seja, nenhuma trajetória ficará contida em S .

As interseções da trajetória com a hipersuperfície S é uma aplicação $P : S \rightarrow S$, que faz o mapeamento dos pontos de intersecção, isto é, se $(\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é a sequência de pontos gerados pela intersecção, o Mapa de Poincaré será representado pela expressão $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{P}(\mathbf{x}_i)$,

Figura 3.1: Trajetória periódica e a Seção de Poincaré.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em LAYEK (2015).

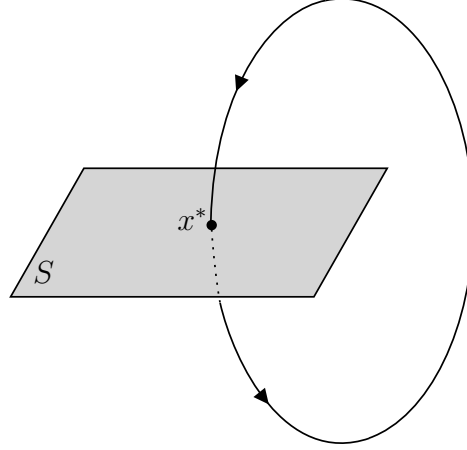
em que, dada uma condição inicial $\mathbf{x}_0$, a sequência de pontos $(\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ define uma

¹Conhecido também como, equações diferenças ou relação de recursão

órbita ou uma trajetória.

O elo entre a seção de Poincaré e a estabilidade do sistema (2.2) inicia-se pelo ponto fixo $\mathbf{x}^*$ de $\mathbf{P}$ em que, após a trajetória cruzar o hipersuperfície S (representado pela Figura (3.2)) no ponto $\mathbf{x}^*$, ela retornará a este mesmo ponto depois de um tempo.

Figura 3.2: Interpretação geométrica da seção de Poincaré para um ponto fixo, que representa uma órbita fechada.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em LAYEK (2015).

3.1.2 Estabilidade

A análise da estabilidade do sistema (2.2) poderá ser feita através do estudo de um mapa unidimensional. Para isso, consideremos a expressão (3.1) a qual representará o mapa unidimensional.

$$x_{i+1} = f(x_i) \quad (3.1)$$

Definição 10. *Um ponto fixo do mapa unidimensional (3.1) é um ponto x^* tal que $f(x^*) = x^*$.*

em que a estabilidade de x^* poderá ser analisada a partir de uma perturbação infinitesimal, ou seja, consideremos uma órbita próxima de x^* ,

$$x_0 = x^* + \eta_0 \quad (3.2)$$

em que η_0 é a perturbação infinitesimal do ponto fixo x^* . Desta forma, buscamos entender se

$$x_1 = f(x_0) = f(x^* + \eta_0) = x^* + \eta_1 \quad (3.3)$$

está mais próximo ou mais longe de x^* do que x_0 , ou seja, queremos saber se η_1 é maior ou menor que η_0 . Para isso, consideremos a expansão em série de Taylor

em torno do ponto fixo x^*

$$x^* + \eta_{i+1} = x_{i+1} = f(x_i) = f(x^* + \eta_i) = f(x^*) + f'(x^*)\eta_i + O(\eta_i^2) \quad (3.4)$$

Ignorando os termos $O(\eta_i^2)$ e considerando $x^* = f(x^*)$, obtemos uma equação linearizada para a perturbação η_i .

$$\eta_{i+1} = f'(x^*)\eta_i \quad (3.5)$$

Observemos que f' representa a derivada da função f em relação a x , sendo assim, conseguimos expressar (3.5) através do mapa linearizado

$$\eta_{i+1} = \lambda\eta_i, \quad (3.6)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \lambda\eta_0 \\ \eta_2 &= \lambda\eta_1 = \lambda^2\eta_0 \\ \eta_3 &= \lambda\eta_2 = \lambda^3\eta_0 \\ &\vdots \\ \eta_i &= \lambda^i\eta_0 \end{aligned}$$

sendo $\lambda = f'(x^*)$ multiplicador. Podemos evidenciar a estabilidade próximo de um ponto fixo através da análise de λ .

Em que,

- Para $|\lambda| < 1$, então $\eta_i \rightarrow 0$, quando $i \rightarrow \infty$ e o ponto fixo x^* é dito estável.
- Para $|\lambda| > 1$, então $\eta_i \rightarrow \infty$, quando $i \rightarrow \infty$ e o ponto fixo x^* é dito instável.
- Para $|\lambda| = 1$, temos o caso marginal do qual se conduz a análise do termo quadrático da expansão em série de Taylor (3.4) em torno do ponto fixo x^* .

Além do ponto fixo (órbitas que se restringem a um ponto), os mapas também admitem órbitas periódicas, ou seja, são aquelas que restringem a um conjunto finito de pontos.

Definição 11. *Um ponto x^* é dito periódico de período m (ou m -periódico) do mapa (3.1), se for um ponto fixo da m -ésima composição do mapa*

$$x^* = f^m(x^*), \quad (3.7)$$

de modo que os pontos $\{x^*, f(x^*), f^2(x^*), f^3(x^*), \dots, f^{m-1}(x^*)\}$, são todos distintos. Portanto, dependendo da estabilidade do ponto, esse conjunto poderá ser chamado atrator ou repulsor de período m .

Desta forma, um ciclo m -periódico é um conjunto de m pontos m -periódicos $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*\}$

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= f(x_i^*), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m-1) \\ x^* &= f(x_m^*) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Teorema 3.1. *(Teorema da estabilidade)*

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e p um ponto fixo de f .

- Se $|f'(p)| < 1$, então p está atraindo, ou seja, p é dito estável
- Se $|f'(p)| > 1$, então p está repelindo, ou seja, p é dito instável

Demonstração. Seja f uma função contínua e $f'(p)$ bem definida

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$

então,

$$|f'(p)| = \lim_{x \rightarrow p} \left| \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right|$$

1. Suponha que $|f'(p)| < 1$. Então existe um ponto $a \in \mathbb{R}$, com $0 < a < 1$ tal que $|f'(p)| < a < 1$. Uma vez que $f'(x)$ é contínuo em $x = p$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right| < a,$$

sempre que $|x - p| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(p)| < a|x - p|.$$

Agora,

$$\begin{aligned} |f^2(x) - f^2(p)| &= |f(f(x)) - f(f(p))| \\ &< a|f(x) - f(p)| \\ &< a^2|x - p|. \end{aligned}$$

Usando indução, obteremos,

$$|f^n(x) - f^n(p)| < a^n|x - p|$$

Desde $0 < a < 1$, $a^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Ou seja, sendo p um ponto fixo de f , implica $f^n(p) = p$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, da desigualdade acima, obtemos

$$|f^n(x) - p| \rightarrow 0 \text{ com } n \rightarrow \infty \quad (3.9)$$

sempre que $|x - p| < \varepsilon$, isto é, sempre que $x \in N(p)_\varepsilon = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Então, da definição, p é atrator.

2. Suponha que $|f'(p)| > 1$. Então existe um ponto $a \in \mathbb{R}$ com $|f'(p)| > a > 1$ tal que $|f'(p)| < a < 1$. Então existe $\varepsilon > 0$ para todo $x \in N(p)_\varepsilon$ tal que

$$\left| \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right| > a \Rightarrow |f(x) - f(p)| > a|x - p|.$$

Agora,

$$\begin{aligned} |f^2(x) - f^2(p)| &= |f(f(x)) - f(f(p))| \\ &> a|f(x) - f(p)| \\ &> a^2|x - p|. \end{aligned}$$

Usando indução, obteremos, $|f^n(x) - f^n(p)| > a^n|x - p|$. Desde $a > 1$, $a^n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Ou seja, sendo p um ponto fixo de f , implica $f^n(p) = p$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto

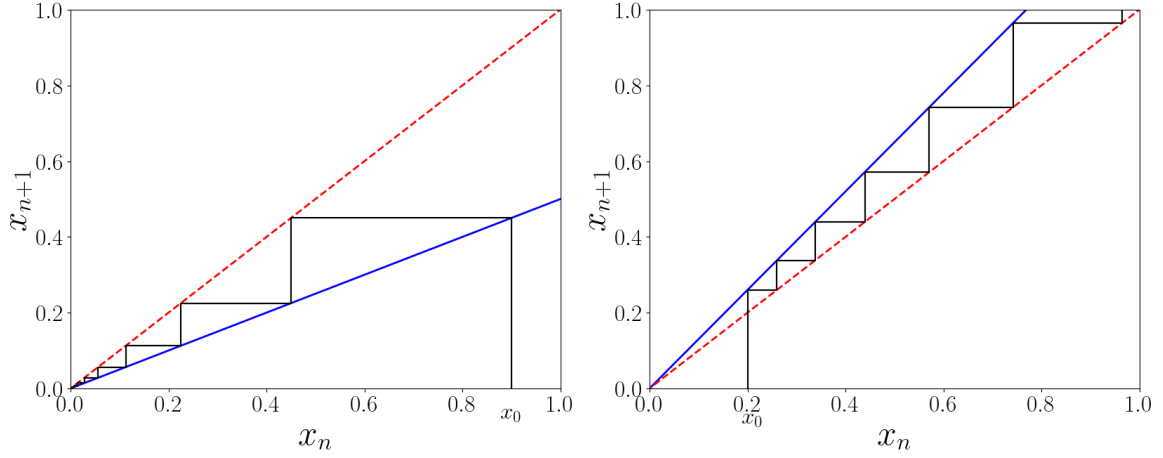
$$|f^n(x) - p| \rightarrow \infty \text{ com } n \rightarrow \infty, \quad (3.10)$$

sempre que, $x \in N(p)_\varepsilon$, p é um ponto fixo de f que repele.

□

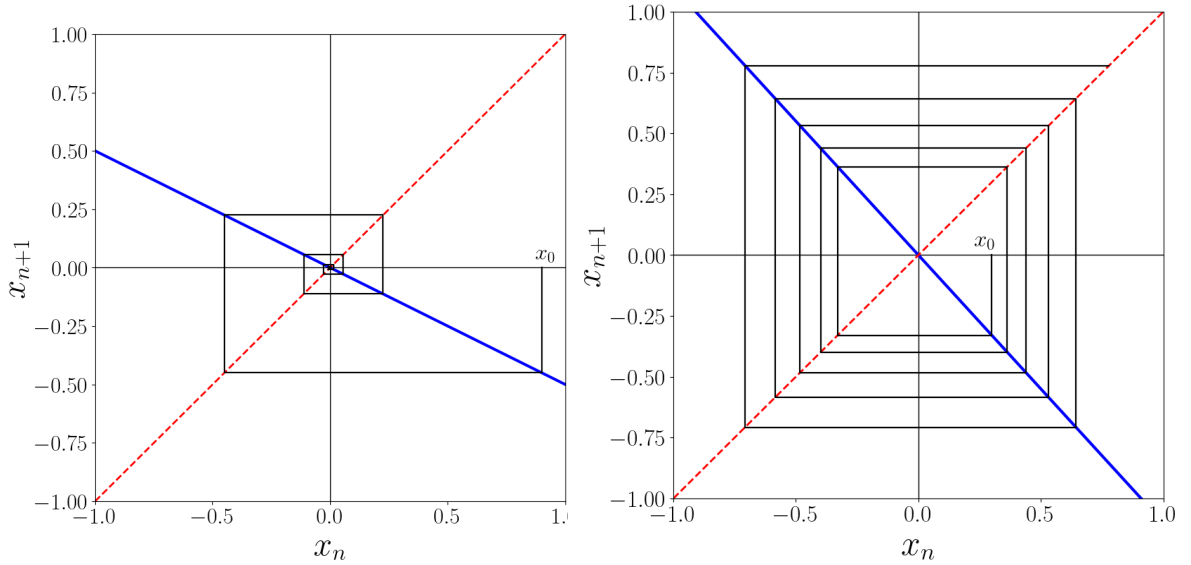
Atentemos que a solução de um sistema, representado por uma órbita, pode ser visualizado geometricamente através do diagrama de “Stair-step” HALE *et al.* (1996), em que as Figuras (3.3) e (3.4) exibem o mapa iterado $x_{i+1} = f(x_i)$ na cor azul e uma diagonal tracejada na cor vermelha. Faz-se importante perceber que os pontos fixos são gerados pela interseção do gráfico de (3.1) com a diagonal. Portanto, as Figuras (3.3) e (3.4) evidenciam a estabilidade do ponto.

Figura 3.3: Diagrama de Stair-step próximo do ponto fixo com $f'(x^*) > 0$ para $|f'(x^*)| < 1$ (estável) e $|f'(x^*)| > 1$ (instável), respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em HALE *et al.* (1996).

Figura 3.4: Diagrama de Stair-step próximo do ponto fixo com $f'(x^*) < 0$ para $|f'(x^*)| < 1$ (estável) e $|f'(x^*)| > 1$ (instável), respectivamente.



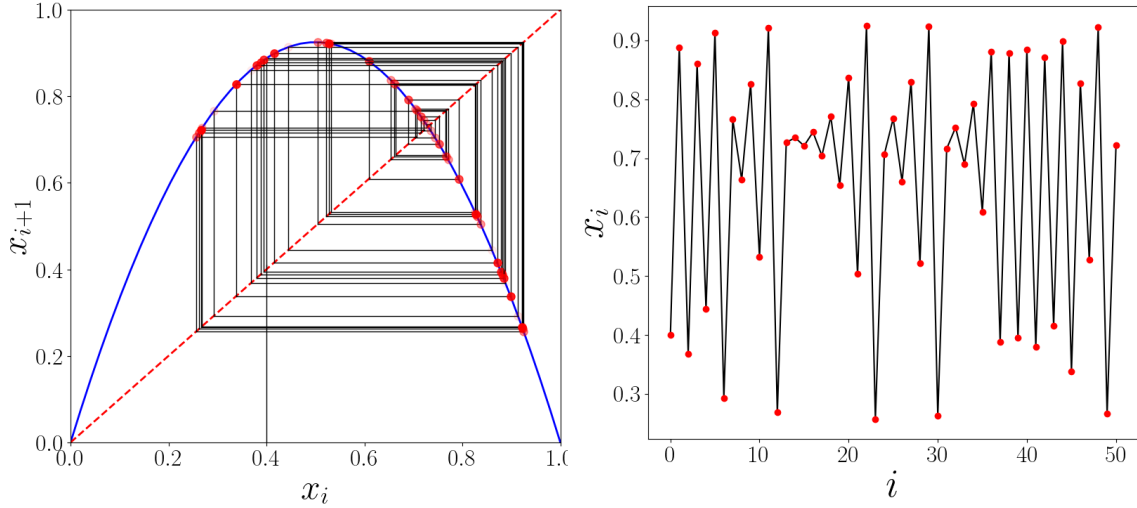
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em HALE *et al.* (1996)

Alguns pontos fixos podem não ser facilmente encontrados em alguns mapas e pela aproximação linear, não podemos determinar a estabilidade de um ponto fixo p de f quando $\lambda = |f'(p)| = 1$. Nesses casos marginais, usamos o diagrama Cobweb (*diagrama de teia de aranha*) desenhado no plano para analisar geometricamente o comportamento de estabilidade do(s) ponto(s) fixo(s).

Para descrever o diagrama Cobweb, consideremos o mapa unidimensional $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. O diagrama Cobweb de f que consiste num mesmo gráfico a função $y = x$ e a curva $y = f(x)$. As coordenadas x dos pontos onde o gráfico da função $y = x$

intersecta a curva $f(x)$, fornecem o(s) ponto(s) fixo(s) do mapa f , mas se $y = x$ não intercepta a curva $y = f(x)$, então f não tem ponto fixo.

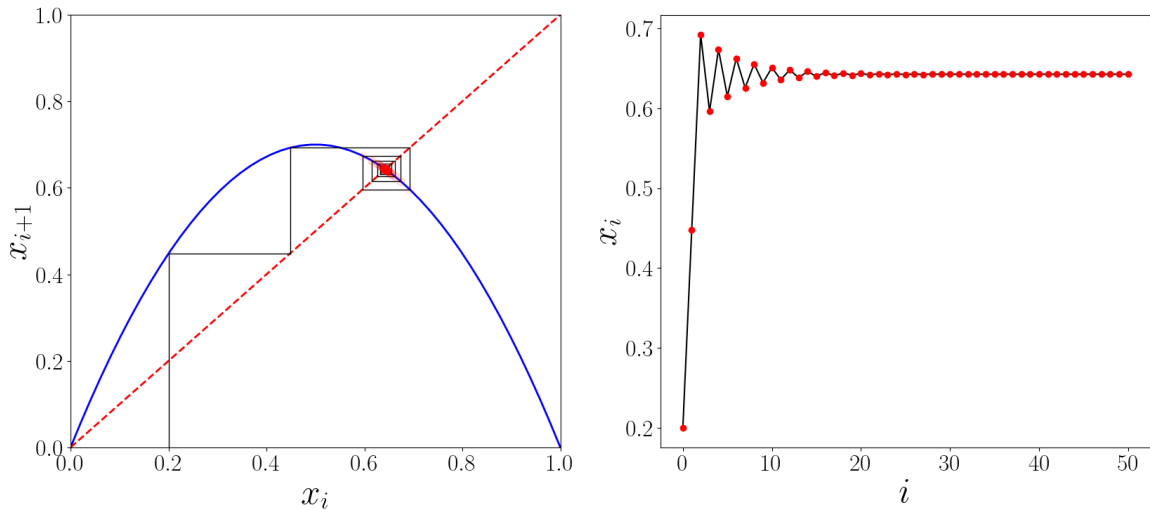
Figura 3.5: Diagrama de Cobweb (teia de aranha) para um ponto fixo instável.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

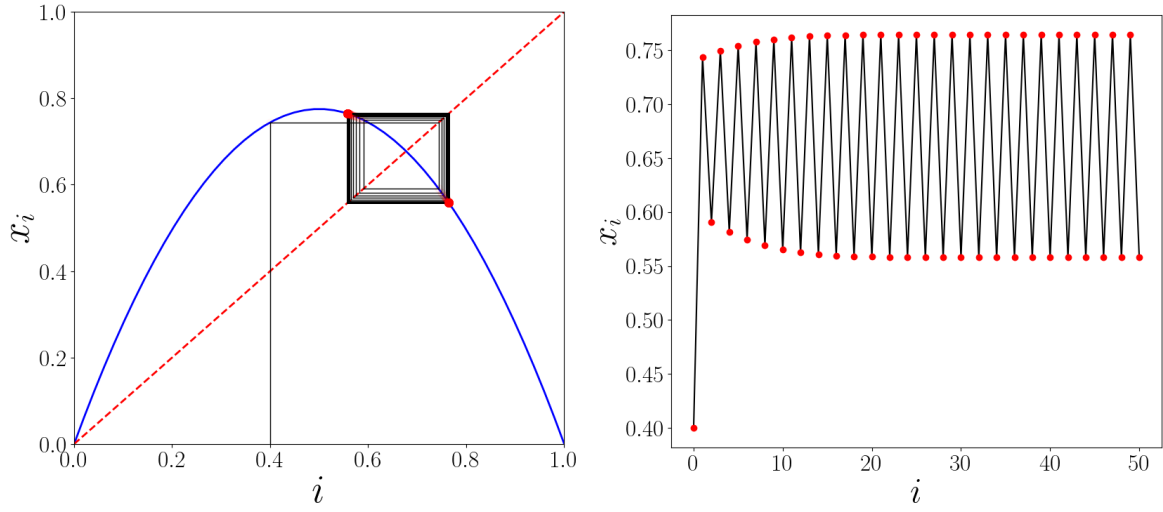
Por oportuno, analisaremos a estabilidade de um m -ciclo, para isso usaremos as notações dos mapas iterados. Dessa forma, um m -ciclo $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*\}$ é dito assintoticamente estável se, dada uma condição inicial suficientemente próxima de um ponto fixo, suponhamos que seja x_1^* , as interações subsequentes que se aproximam dos pontos periódicos, ou seja, cada um desses m pontos serão pontos fixos do mapa m vezes, com isso $x_i^* = f^m(x_i)$ com $i = 1, 2, \dots$, portanto o estudo da estabilidade m -ciclo resume-se à estabilidade de qualquer um dos pontos fixos $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$.

Figura 3.6: Diagrama de Cobweb (teia de aranha) para uma órbita de período um.



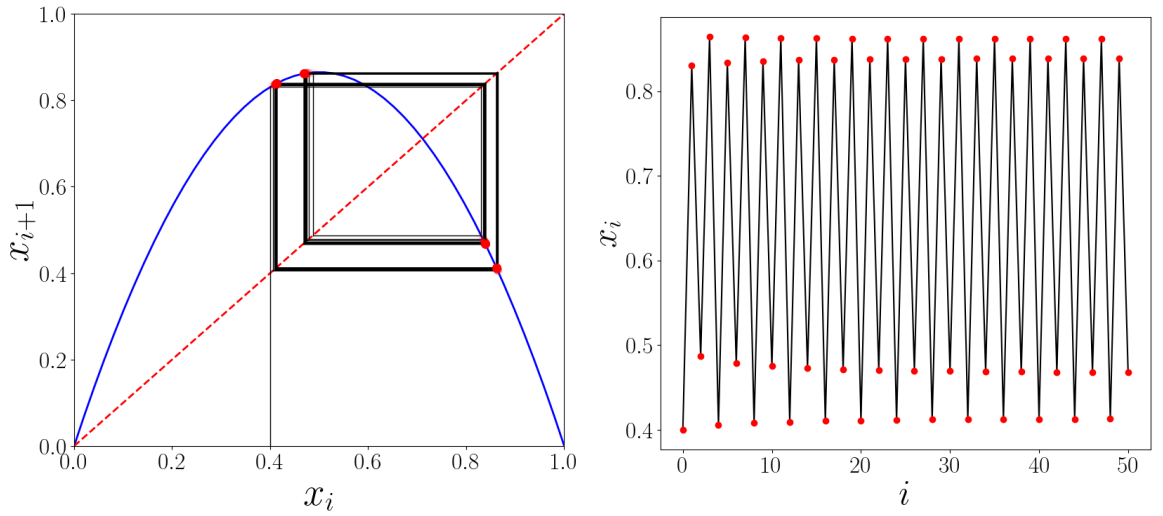
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Figura 3.7: Diagrama de Cobweb (teia de aranha) para uma órbita de período dois.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Figura 3.8: Diagrama de Cobweb (teia de aranha) para uma órbita de período quatro.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

3.1.3 Mapa Logístico

Em 1798 MALTHUS publica um livro intitulado, um ensaio sobre o princípio da população (“*An Essay on the Principle of Population*”), em que propôs o modelo (3.11) em que tentava descrever o crescimento populacional.

$$\dot{N} = r.N - m.N, \quad (3.11)$$

cujas constantes r representa a taxa de nascimentos, m representa a taxa de mortalidade da população e N representa o número de indivíduos de uma população no

tempo t . Atentemos que o modelo (3.11) é linear, mas sugere um crescimento ou decrescimento exponencial da população.

Considerando que a população inicial é igual a N_0 no instante $t = 0$, teremos como solução geral (3.11)

$$N = N_0 e^{(r-m)t} \quad (3.12)$$

Entretanto esse modelo apresenta apenas três comportamentos na dinâmica populacional:

- $r - m > 0$, a população cresce exponencialmente,
- $r - m < 0$, a população decresce exponencialmente, chegando à extinção, e
- $r - m = 0$, a população não apresenta variação.

Dessa forma, o modelo proposto por MALTHUS (1798) não descreve adequadamente o comportamento da população. Entretanto, em 1845 o matemático belga Pierre Verhulst propôs uma correção ao modelo (3.11). Esse novo modelo, não linear, considera que a mortalidade é proporcional ao quadrado da população, portanto o modelo proposto por Verhulst é dado por,

$$\dot{N} = (r - m.N)N \quad (3.13)$$

Posteriormente, no ano de (1976), o matemático australiano MAY reavendo o modelo proposto por, Pierre Verhulst em 1845, entretanto com uma abordagem de mapa iterado, cuja a equação (3.13), poderá ser reescrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned} N_1 &= rN_0 - mN_0^2 \\ N_2 &= rN_1 - mN_1^2 \\ N_3 &= rN_2 - mN_2^2 \\ &\vdots \\ N_{i+1} &= rN_i - mN_i^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde a capacidade máxima que o ambiente suporta será denotada por $N_{máx}$, portanto,

$$rN_{máx} - mN_{máx}^2 = 0 \Rightarrow N_{máx} = 0 \text{ ou } N_{máx} = \frac{r}{m}$$

Dividindo a equação (3.14) por $N_{máx}$ e operando algebricamente, obteremos,

$$\frac{N_{i+1}}{N_{máx}} = r \frac{N_i}{N_{máx}} - m \frac{N_i^2}{N_{máx}} \frac{N_{máx}}{N_{máx}}$$

Chamando $x_i = \frac{N_i}{N_{\text{máx}}}$, obteremos,

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= rx_i - mx_i^2 \frac{r}{m} \\ &= r(1 - x_i)x_i \end{aligned}$$

Portanto, o mapa logístico é determinado pela expressão $x_{i+1} = f(x_i)$, onde f é uma função controlada pelo parâmetro r com,

$$f(x) = rx(1 - x), \quad (3.15)$$

e o mapa logístico (ou equação logística) é definido como sendo,

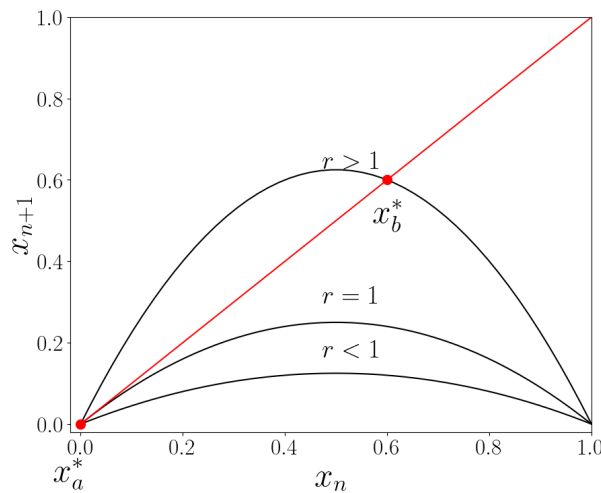
$$x_{i+1} = f(x_i) = rx_i(1 - x_i) \quad (3.16)$$

Atentemos que o mapa logístico é uma equação determinística, cuja situação atual determinará a condição futura, mas o que chamou atenção de MAY foi a sensibilidade do mapa logístico ao parâmetro r .

3.1.4 Análise do mapa logístico

O Mapa logístico (3.16) é uma transformação recursiva, que pode ser analisada variando o parâmetro r . Graficamente, através da Figura (3.9), percebe-se que a equação (3.16) para $0 < r < 4$ mapeia o intervalo $[0, 1]$.

Figura 3.9: Mapa logístico.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Visto que a função que define o mapa logístico intersecta a bissetriz $y = x$ dessa forma teremos, que para $r = 1$ a parábola encontra-se abaixo da bissetriz, portanto

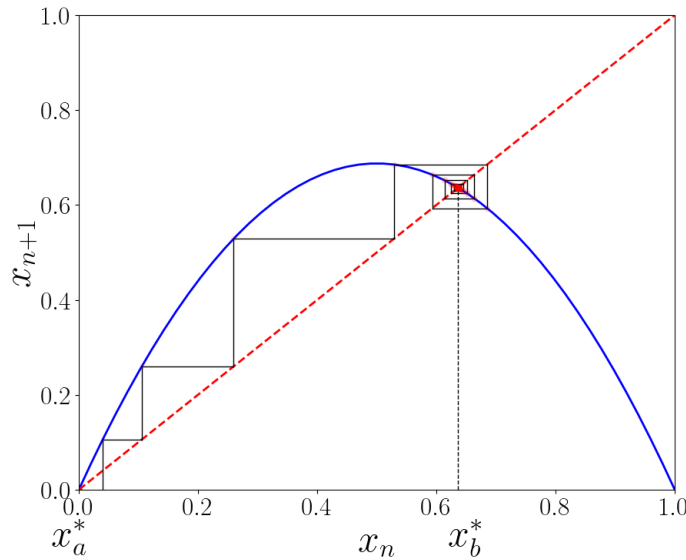
o único ponto fixo é a origem. À medida que r aumenta a parábola torna-se tangente à bissetriz, para $r = 1$. Já para $r > 1$, a parábola intersecta a bissetriz na origem (x_a^*) e num segundo ponto fixo que chamaremos x_b^* .

A existência de dois pontos fixos poderá ser constatada a partir da definição de ponto fixo,

$$\begin{aligned} x^* &= f(x^*) \\ &= rx^*(1 - x^*) \\ x^* - rx^*(1 - x^*) &= 0 \end{aligned}$$

obteremos $x_a^* = 0$ ou $x_b^* = 1 - \frac{1}{r}$.

Figura 3.10: Para $r = 2.7$, existem dois pontos fixos x_a^* (repulsor) e x_b^* (atrator).



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Atentemos que além do aumento dos números de pontos fixos, para parâmetro $r > 1$ teremos a mudança de estabilidade desses pontos conforme Figura (3.10). Esta característica é denominada bifurcação. Por oportuno, lembremos que a estabilidade de um ponto fixo está atrelada ao Teorema da estabilidade (3.1).

Observando a equação (3.16), para o parâmetro r teremos um ponto de bifurcação no sistema.

$$f'(x_a^*) = r(1 - 2x_a^*)|_{x_a^*=0} = r$$

pelo Teorema da estabilidade $|f'(x_a^*)| < 1$, implica que x_a^* será estável quando o parâmetro $r \in [0, 1]$.

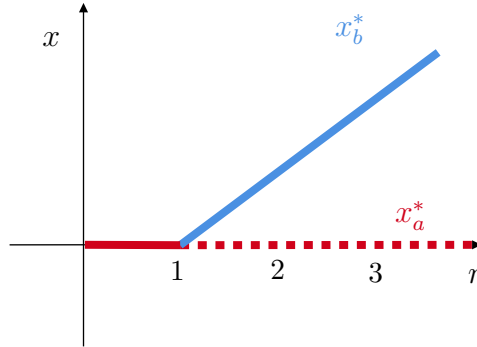
Para o ponto fixo x_b^* , teremos,

$$f'(x_b^*) = r(1 - 2x_b^*)|_{x_b^*=1-\frac{1}{r}} = 2 - r$$

ou seja, $|f'(x_b^*)| < 1$ será estável para $r \in (1, 3)$.

Dessa forma, a Figura (3.11) em que os traços contínuos representam estabilidade (assintótica) e os traços pontilhados representam a instabilidade e definem o comportamento da bifurcação transcritical.

Figura 3.11: Bifurcação transcritical.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Para o caso das órbitas periódicas particularizado, Figuras (3.7) e (3.8), teremos para uma órbita de período dois um conjunto de pontos fixos $\{x_1^*, x_2^*\}$, pontos fixos da composição f com f que define o mapa iterado, desde que $\{x_1^*, x_2^*\}$ não sejam pontos fixos de f . Assim,

$$\begin{aligned} x^* &= f^2(x^*) \\ &= rf(x^*)(1 - f(x^*)) \\ &= rrx^*(1 - x^*)(1 - rx^*(1 - x^*)) \\ &= r^2(-rx^{*4} + 2rx^{*3} - (1 + r)x^{*2} + x^*) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Reescrevendo (3.17), em forma de polinômio, obteremos, $p(x^*) = r^2(-rx^{*4} + 2rx^{*3} - (1 + r)x^{*2} + x^*) - x^* = 0$. De $p(x^*)$, temos que $x_a^* = 0$ e $x_b^* = 1 - \frac{1}{r}$ são raízes de $p(x)^*$, ou seja,

$$p(x) = (x - x_a^*)(x - x_b^*)q(x),$$

em que,

$$q(x) = -(r^2 - rx(1 + r) + 1 + r) \quad (3.18)$$

e suas raízes são,

$$x_1^* = \frac{1}{2r} \left(r + 1 + \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right)$$

ou

$$x_2^* = \frac{1}{2r} \left(r + 1 - \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right)$$

Atentemos que estamos analisando em que condições x_1^* e x_2^* pertencem ao conjunto dos números reais, ou seja, a órbita de período dois existirá para os valores de r em que o discriminante da equação $q(x) = 0$ é estritamente positivo. Então,

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow r^2 - 2r - 3 > 0 \Leftrightarrow r < -1 \text{ ou } r > 3$$

entretanto, $r \in [0, 1]$, sendo assim, a órbita de período dois com os pontos fixos $\{x_1^*, x_2^*\}$ existirá para $r > 3$. Sendo assim, e em face do exposto, teremos que para $r = 3$ existirá uma nova bifurcação, mas antes de classificá-la, estudaremos a estabilidade de uma órbita de período dois com $\{x_1^*, x_2^*\}$ sendo os pontos fixos

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{d}{dx} f(f(x_1^*)) \\ &= f'(f(x_1^*))f'(x_1^*) \\ &= f'(x_2^*)f'(x_1^*) \\ &= (r - 2x_2^*)(r - 2x_1^*) \\ &= r^2[1 - 2(x_2^* + x_1^*) + 4x_2^*x_1^*] \\ &= -r^2 + 2r + 4 \end{aligned}$$

Por oportuno, atentemos que $(x_1^* + x_2^*)$ e $(x_1^*x_2^*)$, são a soma e o produto das raízes de $q(x)$, Portanto,

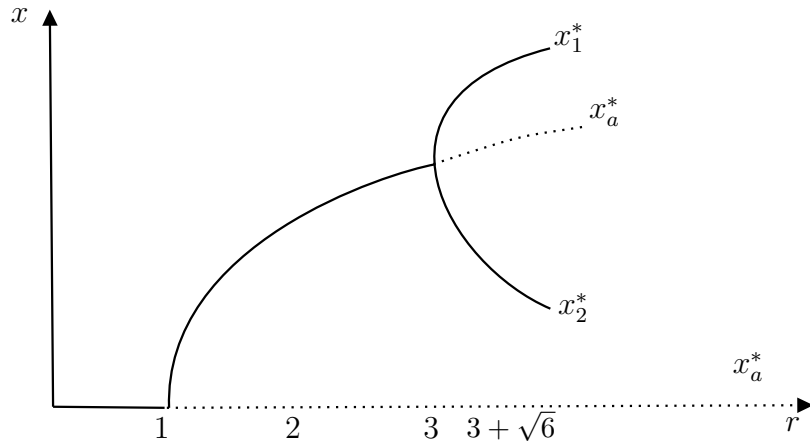
$$|\lambda_2| < 1 \Leftrightarrow |-r^2 + 2r + 4| < 1 \Leftrightarrow r \in [1 - \sqrt{6}, -1] \cup [3, 1 + \sqrt{6}]$$

Considerando que $r \in [0, 1]$, poderemos concluir que a órbita de período 2 é assintoticamente estável para $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ o que indica uma bifurcação do tipo duplicação de período, em que exhibe um diagrama de bifurcações exposto pela Figura (3.12).

Observemos que a Figura (3.12) além de apresentar uma bifurcação do tipo transcrítica para $r = 1$, o diagrama de bifurcações do mapa logístico (3.7) apresenta uma duplicação de período em $r = 3$.

A órbita de período 2 poderá ser verificada geometricamente como sendo as intersecções de $f^2(x)$ com a bissetriz ($y = x$) e que não coincidem com a intersecção da bissetriz com $f(x)$ e sua estabilidade poderá ser visualizada pelo mapa logístico (diagrama de Cobweb) ilustrado pela Figura (3.14). Observemos que na Figura (3.13) fica evidente que para $r < 3$ a órbita de período 2 não existe e x_b^* é um atrator, no entanto, para (3.14) x_b^* passa ser instável.

Figura 3.12: Dobramento de período.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Figura 3.13: Intersecção de f com a bissetriz ($y = x$).

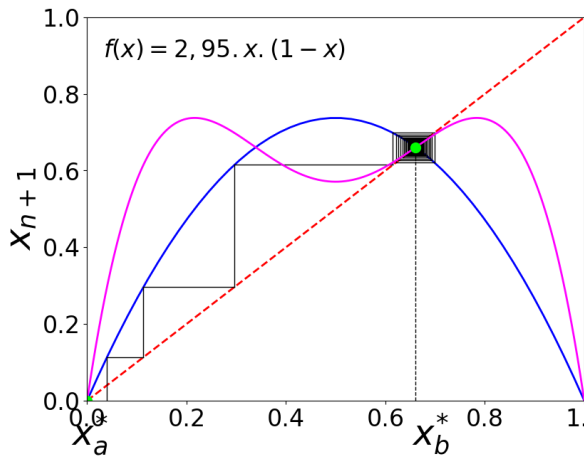
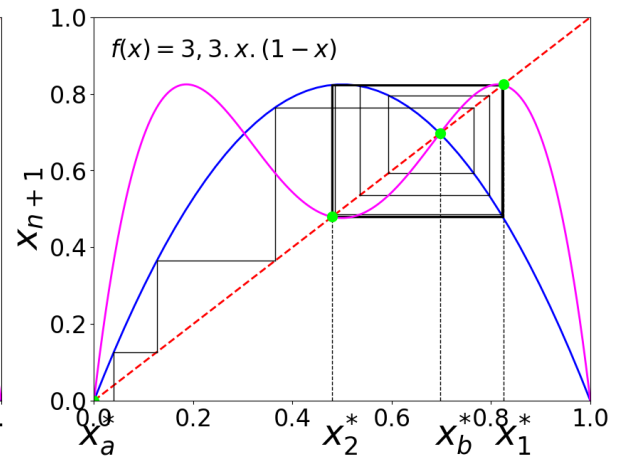


Figura 3.14: Intersecção de f^2 com a bissetriz ($y = x$).



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

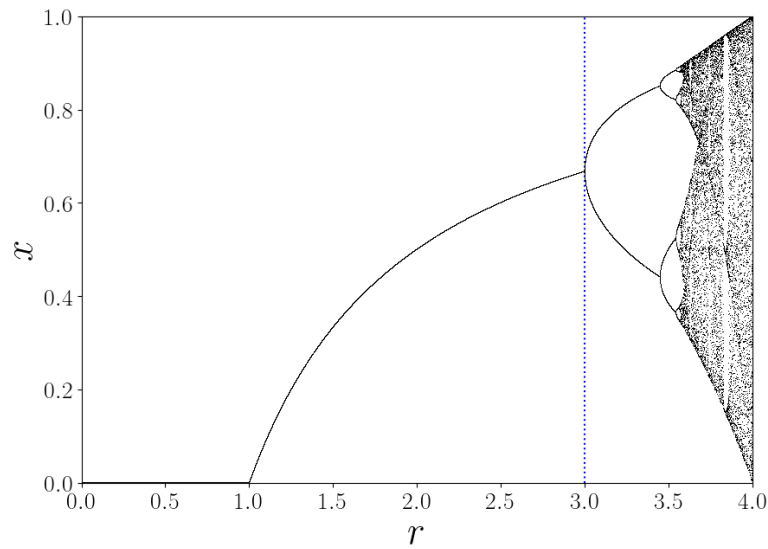
Apesar deste método se tornar inviável pelo crescimento exponencial do grau dos polinômios que definem as equações $f^m(x) = x$ ele apresenta observações interessantes, como, por exemplo, o fato que todos os pontos fixos podem ser confundidos com uma órbita de período m .

3.1.5 Diagrama de bifurcação

De acordo com MONTEIRO (2002), o termo bifurcação foi introduzido por Poincaré em 1985, trata-se de uma mudança qualitativa no plano de fase do sistema dinâmico, já para ALLIGOOD *et al.* (2000), o diagrama de bifurcações representa o comportamento de um sistema dinâmico, ao mudar um dos parâmetros de controle. Desta forma, o diagrama de bifurcação exibe observações das fases sucessivas de um movimento periódico, ou seja, apresenta uma visão global sobre a dinâmica do

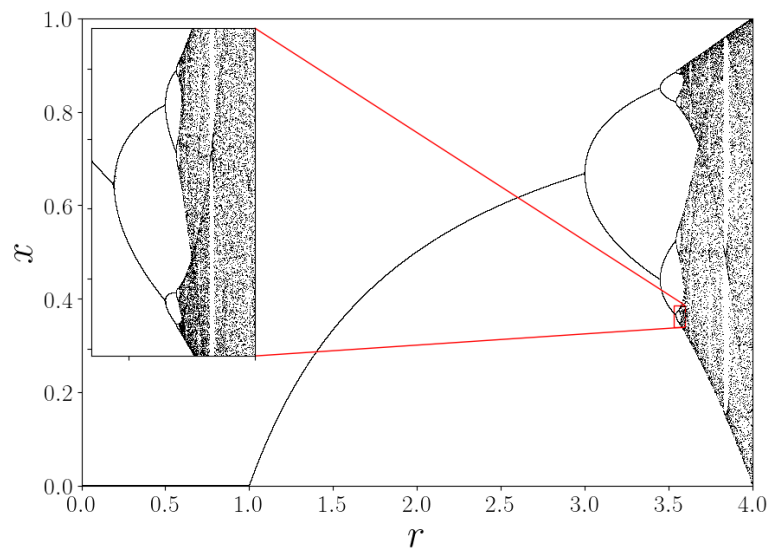
sistema. Para Figura (3.15) a qual apresenta o diagrama de bifurcação do mapa logístico, temos para a variação de r ($1 \leq r < 3$), uma forma diferente da apresentada na Figura (3.6) mas que exibe uma órbita de período um, já para $r = 3$, teremos um ponto de bifurcação. Aumentando um pouco o parâmetro r , o diagrama passa ter dois pontos de bifurcação associado a uma órbita de período dois. Essa sequência de sucessivas bifurcações com duplicação de períodos culmina na manifestação da dinâmica caótica, caracterizada por uma nuvem de pontos no diagrama representado pela Figura (3.15).

Figura 3.15: Diagrama de bifurcação do mapa logístico.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Figura 3.16: Diagrama de bifurcação do mapa logístico ampliado.



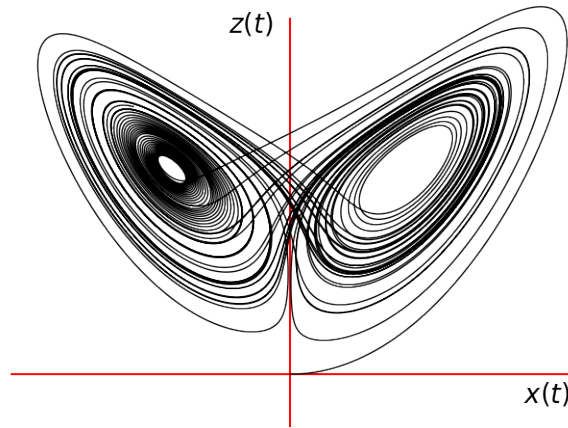
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Por oportuno, destaquemos através da Figura (3.16) a sequência de sucessivas bifurcações e duplicidade de período, assim como, destaquemos as lacunas na região caótica. Essas lacunas são exibidas, pois, o movimento caótico dá lugar a um movimento periódico, em outras palavras, são intervalos do parâmetro r em que a órbita é periódica.

3.1.6 Mapa de Lorenz

Lorenz em 1963 percebeu que o atrator estranho, representado pela Figura (2.18), possuía um comportamento caracterizado pela mudança no sentido da rotação do fluxo. Através da análise qualitativa da a Figura (2.21), percebemos que o fluxo rotaciona no sentido horário quando está na região negativa do eixo x , e rotaciona no sentido anti-horário quando está na região positiva do eixo x . Além dessa característica Lorenz percebeu, através do plano de fase (Figura (2.23)), que é possível indicar através de uma espiral o número de voltas na outra espiral.

Figura 3.17: Projeção do atrator de Lorenz no plano xz .

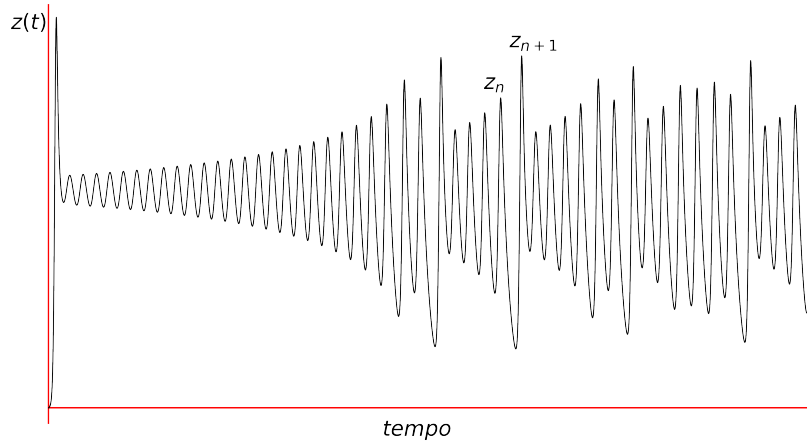


Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Imaginemos passar uma seção de Poincaré no atrator de Lorenz que deve conter o cruzamento do fluxo dessas duas regiões, que comumente utilizam a representação de dois semiplanos (semiplano A e semiplano B), de forma que o fluxo do atrator intersecta os dois semiplanos. Neste caso, os dois semiplanos são paralelos ao plano xy .

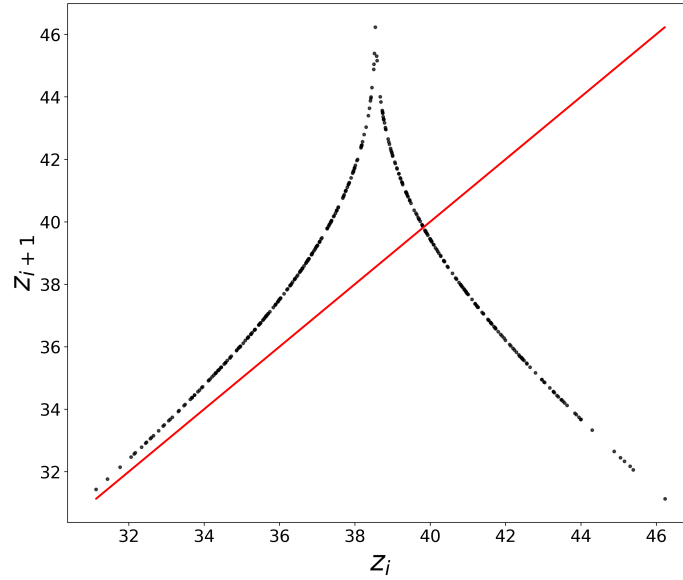
Lorenz implementou a ideia de que z_i prevê z_{i+1} . Para isso, ele integrou numericamente as equações e mediu os máximos locais de $z(t)$ e gerou o gráfico de $z_{i+1} \times z_i$ conforme ilustrado na Figura (3.19).

Figura 3.18: Série temporal $z(t)$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Figura 3.19: Mapa de Lorenz.



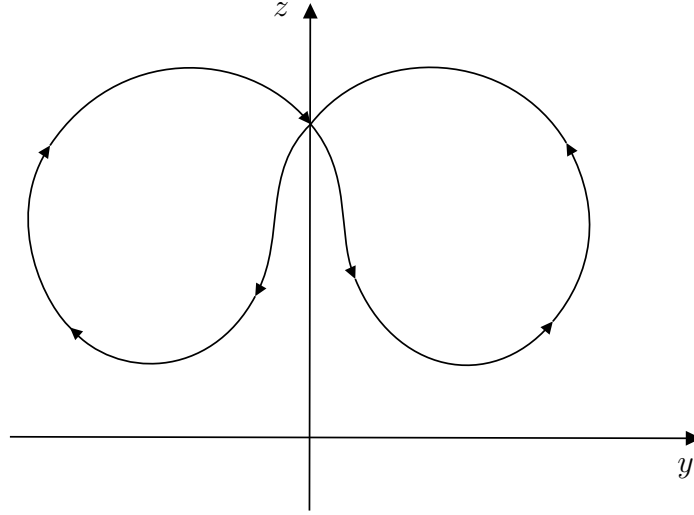
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Essa ideia engenhosa de Lorenz em que os pontos gerados pelos máximos da série temporal $z(t)$ representada através da Figura (3.19), foi intitulada de Mapa de Lorenz. Primeiramente cabe-nos esclarecer que o Mapa (3.19) tem como $z_{i+1} = f(z_i)$ e apresenta a dinâmica em que z_0 poderá prever $z_1 = f(z_0)$ e $z_2 = f(z_1)$ e assim por diante.

Apesar do Mapa de Lorenz parecer com uma curva, $f(z)$ não está bem definida, considerando que poderá haver mais de um z_{i+1} de saída para um único z_i de entrada. Entretanto, para STROGATZ (2014), os ganhos em tratar o Mapa de Lorenz como uma curva são maiores, pois o mapa apresenta um único ponto fixo, ou seja, exibe uma órbita fechada. Por conseguinte, a estabilidade desta órbita poderá ser

determinada por $|f'(z)|$, assim como foi exposto na seção (3.1.4), observemos que se $|f'(z)| > 1$, na Figura (3.19), implica na existência de algum ciclo limite instável. Essa conclusão se dá pela análise dos pontos fixos de f . A Figura (3.19) mostra que existe um ponto fixo, interceptando a bissetriz (diagonal), representando uma órbita fechada que parece na Figura (3.20).

Figura 3.20: Órbita fechada.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em STROGATZ (2014).

Para mostrarmos que esta órbita fechada é instável, consideremos uma trajetória e perturbemos essa trajetória $z_i = z^* + \eta_i$. Após linearizar, encontraremos $\eta_{i+1} \approx f'(z^*)\eta_i$. Desde que $|f'(z^*)| > 1$, obteremos,

$$|\eta_{n+1}| > |\eta_n|.$$

Portanto, o desvio η cresce a cada iteração, e assim a órbita fechada é instável.

Na próxima seção apresentaremos um resumo da Álgebra Booleana aplicada nas portas lógicas e no próximo capítulo correlacionamos os conceitos visto até aqui com as redes booleanas autônomas.

3.2 Álgebra Booleana

A álgebra Booleana recebe esse nome em homenagem ao matemático George Boole, que escreveu *An Investigation into the Laws of Thought* (“Uma Investigação das Leis do Pensamento”). O trabalho de George Boole fundamenta-se nos valores lógicos das preposições verdadeiras ou falsas, mas que poderiam ser resolvidos similar à álgebra comum. A metodologia desenvolvida é o emprego de símbolos e operadores para representar as decisões, tornando-se uma classe importante das álgebras, que é

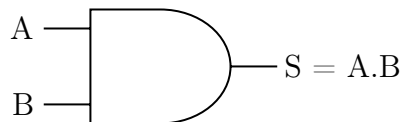
estudada e utilizada nas áreas de comunicação, sistemas eletrônicos dentre outras. Neste trabalho será utilizada para circuitos digitais, a qual fará uso das funções lógicas para explicar a origem do Caos em redes Booleanas. Para entender um pouco mais, o Apêndice A exibe uma breve apresentação da construção da Álgebra Booleana.

3.2.1 Operações Fundamentais da Álgebra Booleana

Porta lógica AND

A porta lógica “AND” ilustrada pela Figura (3.21) é composta por duas ou mais entradas e uma única saída e realiza a operação “AND”, que usualmente utiliza o símbolo $\cdot$ e só terá com saída o número 1 se e somente se as entradas A e B forem iguais a 1, conforme ilustrada na tabela verdade (3.1).

Figura 3.21: Porta Lógica AND



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Tabela 3.1: Tabela verdade da porta AND.

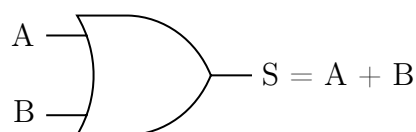
A	B	$S = A.B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Porta Lógica OR

A porta lógica “OR” ilustrada pela Figura (3.22) é composta por duas ou mais entradas e uma única saída e realiza a operação “OR”, que usualmente utiliza o símbolo $+$ e terá com saída o número 1, se pelo menos uma das entradas A ou B forem iguais a 1, conforme ilustrada na tabela verdade (3.2).

Figura 3.22: Porta Lógica OR



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Tabela 3.2: Tabela verdade da porta OR.

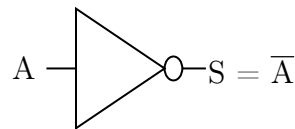
A	B	$S = A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Porta Lógica NOT

A porta lógica “NOT”, pode ser chamada de INVERSÃO, ilustrada pela Figura (3.23). Diferentemente das portas “AND” e “OR”, é composta por uma única entrada e realiza a operação “NOT”, e terá como saída a sua entrada invertida, conforme ilustrada na tabela verdade (3.3).

Figura 3.23: Porta Lógica NOT



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Tabela 3.3: Tabela verdade da porta NOT.

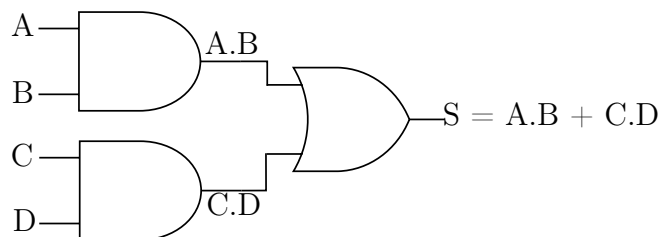
A	$S = \bar{A}$
0	1
1	0

Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

3.2.2 Circuito a partir das Portas Lógica.

É possível descrever e construir algebricamente quaisquer circuitos lógicos com as portas lógicas AND, OR e NOT, por exemplo, considere o circuito lógico da Figura (3.24).

Figura 3.24: Diagrama do circuito logico AND-OR.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Observemos que o circuito representado pela Figura (3.24) possui quatro entradas (inputs), e uma saída, usando as operações booleanas de cada porta lógica, conseguiremos expressar a lógica da saída, conforme tabela (3.4)

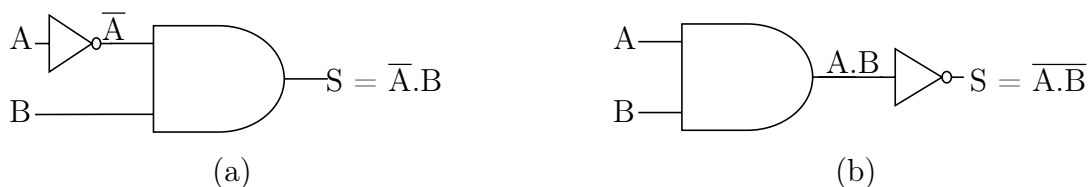
Tabela 3.4: Tabela verdade do circuito lógico AND-OR (Soma de produtos).

A	B	C	D	A.B	C.D	$S = A.B + C.D$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

A Figura (3.25), representa dois circuitos lógicos com a presença da porta NOT (ou inversor), na Figura (3.25) (a), a entrada A da porta lógica AND é alimentada pela saída da porta NOT, já na Figura (3.25) (b) a saída da porta AND é a entrada da porta NOT. Observemos que a presença da porta NOT em um circuito, significa a inversão dos demonstrados na tabela (3.5).

Figura 3.25: Circuito lógico com inversor



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Tabela 3.5: Tabela verdade do circuito lógico (3.25)

A	B	$\bar{A}$	$S = \bar{A}.B$	$S = \overline{A.B}$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Circuito a partir das combinações das portas lógicas, AND, OR e NOT

Quando o comportamento de um circuito é definido por uma expressão booleana, podemos representar o circuito lógico a partir das combinações das portas lógicas AND, OR e NOT. Por exemplo, se precisarmos de um circuito definido por $S = \bar{A}.B.C$, saberemos que a porta lógica que precisamos é a AND com três entradas, e uma das entradas possui um inversor, representado pela Figura (3.26) (a). Se precisarmos de um circuito definido por $S = (A+B).(\bar{B} + C)$, usaremos as três portas lógicas que conhecemos, o qual poderá ser representado pela Figura (3.26) (b). O mesmo raciocínio pode ser estendido para circuitos mais complexos.

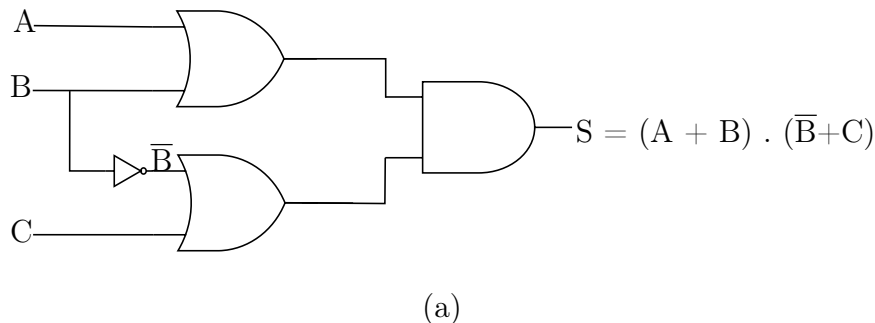
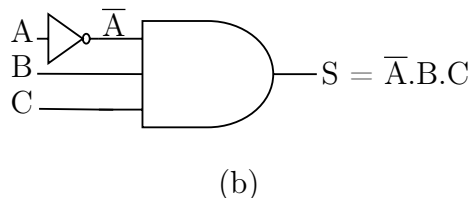


Figura 3.26: Circuito a partir de expressão booleana



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

3.3 Portas lógicas NAND, NOR, XOR e XNOR

Já sabendo que é possível construir circuitos digitais a partir das portas básicas (AND, OR e NOT), apresentaremos duas novas portas lógicas que têm sua representação simplificada pelo fato de serem muito usadas em circuitos digitais.

Porta Lógica NOR

O circuito ilustrado pela Figura (3.27), produz uma saída de nível lógico baixo quando qualquer uma de suas entradas possuir um nível lógico alto, esse comportamento poderá ser classificado pela operação “NOR”, semelhante à operação da porta lógica OR acompanhada da porta lógica NOT. Portanto, a porta lógica NOR é composta por duas ou mais entradas e uma única saída que realiza a operação “NOR”, conforme ilustra a tabela (3.6).

Figura 3.27: Circuito equivalente a porta lógica NOR.

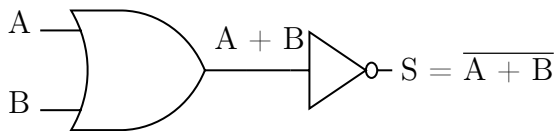
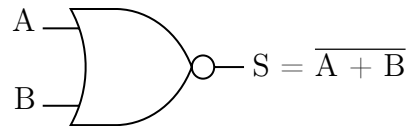


Figura 3.28: Porta lógica NOR.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Tabela 3.6: Tabela verdade da porta lógica NOR (3.28)

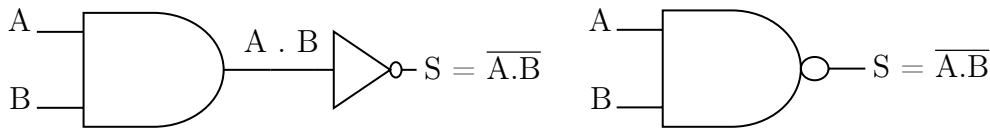
A	B	A+B	$S = \overline{A+B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Porta Lógica NAND

O circuito (3.29) produz uma saída de nível lógico baixo quando suas entradas possuir em um nível lógico alto, esse comportamento poderá ser classificado pela operação “NAND”, semelhante à operação da porta lógica AND acompanhada da porta lógica NOT. Portanto, a porta lógica NAND é composta por duas ou mais entradas e uma única saída que realiza a operação “NAND”, conforme ilustra a tabela (3.7).

Figura 3.29: Circuito equivalente a porta lógica NAND. Figura 3.30: Porta lógica NAND.



Fonte:

Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Tabela 3.7: Tabela verdade da porta lógica NAND (3.30)

A	B	A.B	$S = \overline{A.B}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

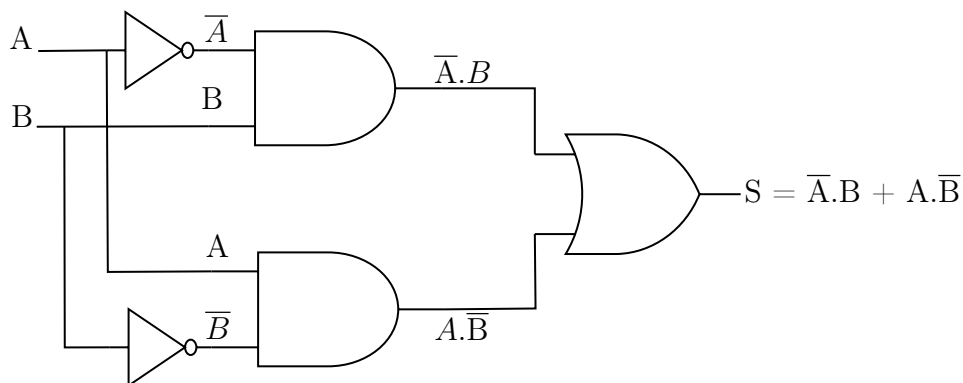
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Porta Lógica XOR

O circuito (3.31) tem como expressão de saída $S = \overline{A}B + A\overline{B}$, ou seja, a saída só terá nível lógico 1, se apenas uma de suas entradas tiver nível lógico 1.

O circuito (3.31) tem um símbolo próprio, ilustrado pela Figura (3.32) e poderá ser chamado de XOR (“ou exclusivo”), a qual é composta por duas ou mais entradas e uma única saída que realiza a operação “XOR”, que usualmente utiliza o símbolo $\oplus$ e terá como saída o número 1 se, e somente se, as entradas A e B diferirem, conforme ilustrada na tabela verdade (3.9).

Figura 3.31: Circuito equivalente à porta XOR



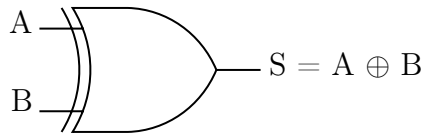
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Tabela 3.8: Tabela verdade do circuito equivalente à porta XOR (3.31)

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}.B$	$A.\overline{B}$	$S = \overline{A}.B + A.\overline{B}$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Figura 3.32: Porta lógica XOR



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Tabela 3.9: Tabela verdade da porta lógica XOR (3.32)

A	B	$S = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

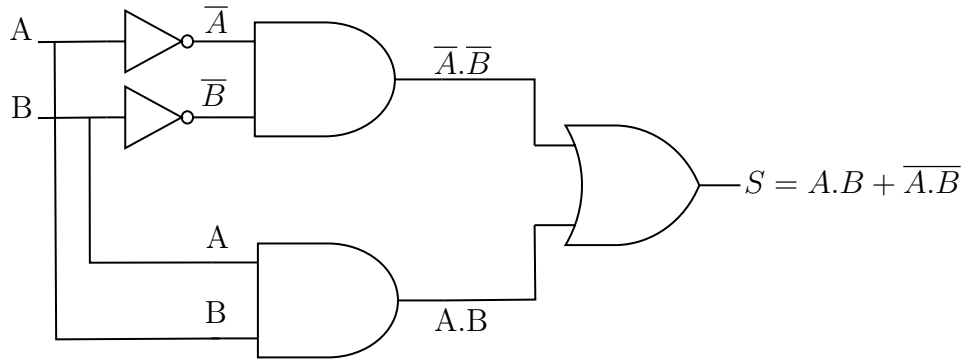
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Porta Lógica XNOR

O circuito (3.33) tem como expressão de saída $S = A.B + \overline{A}.\overline{B}$, ou seja, a saída só terá nível lógico alto sempre que as suas entradas estiverem no mesmo nível lógico.

O circuito (3.33) tem um símbolo próprio, ilustrado pela Figura (3.34) e poderá ser chamado XNOR, a qual é composta por duas ou mais entradas e uma única saída que realiza a operação “XNOR”, que usualmente utiliza a negação da operação “XOR” e terá como saída o número 1 se, e somente se, as entradas A e B forem iguais, conforme ilustrada na tabela verdade (3.12).

Figura 3.33: Circuito equivalente à porta XNOR



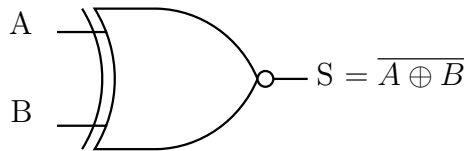
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Tabela 3.10: Tabela verdade do circuito equivalente a porta XNOR (3.33)

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A.B$	$\bar{A}.\bar{B}$	$S = A.B + \bar{A}.\bar{B}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1

Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Figura 3.34: Porta lógica XNOR



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Tabela 3.11: Tabela verdade da porta lógica XNOR (3.34)

A	B	$S = \bar{A} \oplus \bar{B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Porta Lógica Buffer

Conceitualmente, a porta lógica Buffer (copiadora) é composta por uma entrada e uma única saída, em os valores de entrada serão os mesmos da sua saída. Dessa forma, a representação da sua saída deve ser uma réplica perfeita da entrada; caso isso não ocorra, fica caracterizada distorção no sinal.

Figura 3.35: Circuito equivalente à porta lógica buffer.

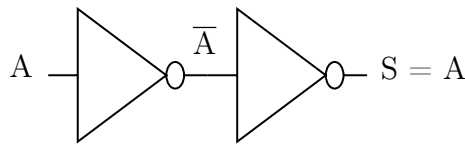
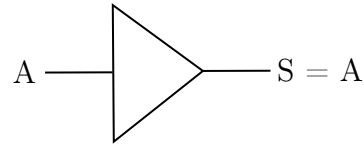


Figura 3.36: Porta lógica Buffer.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

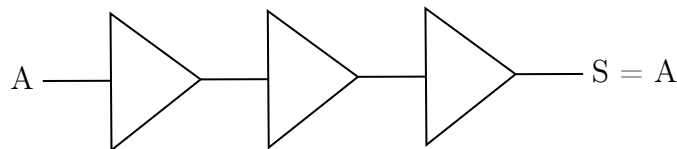
Tabela 3.12: Tabela verdade da porta Buffer (3.36).

A	S = A
0	0
1	1

Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Uma aplicação para a porta lógica Buffer é criar uma linha de atraso, conforme ilustrado na Figura (3.37). Como cada porta interligada demora um pouco para replicar em sua saída o que está em sua entrada, a porta lógica Buffer pode ser usado para retardar o sinal.

Figura 3.37: Usando a porta Buffer para criar uma linha de atraso.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

3.3.1 Nível lógico e pulso

Para entendermos melhor o comportamento de um pulso elétrico consideremos a Figura (3.38) que ilustra um único pulso positivo, gerado quando a tensão passa de um nível lógico baixo para um nível lógico alto e em seguida retorna ao nível lógico baixo. Já a Figura (3.39) ilustra um pulso negativo, gerado quando a tensão passa de um nível lógico alto para um nível lógico baixo e em seguida retorna ao nível lógico alto.

Figura 3.38: Pulso positivo.

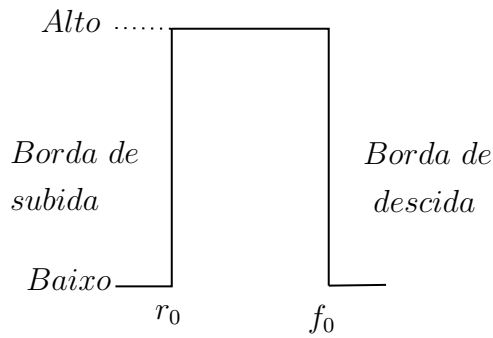
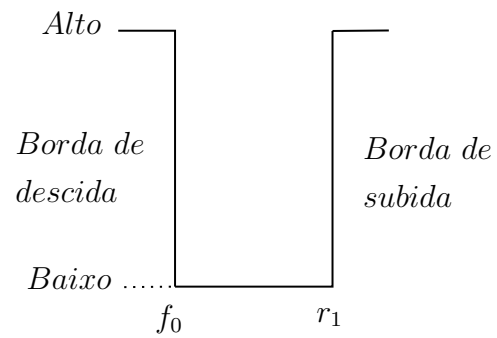


Figura 3.39: Pulso negativo

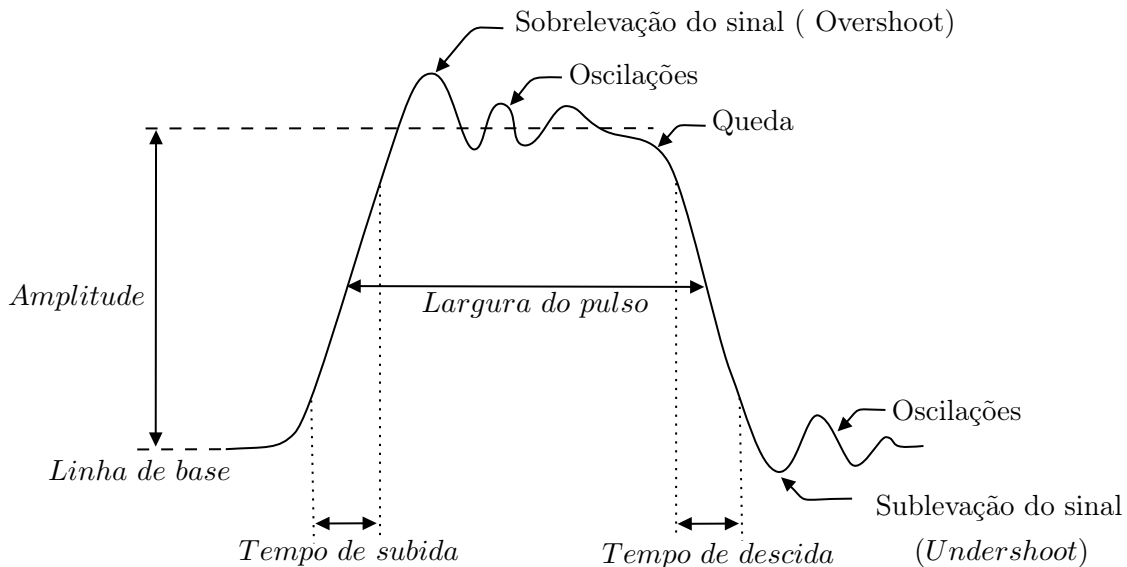


Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD (2000).

Os pulsos ilustrados nas figuras (3.38) e (3.39) são ideais porque considera que as bordas de subida e descida comutam instantaneamente. Na prática, essas transições nunca ocorrem instantaneamente. ZHANG *et al.* (2009) em seu artigo intitulado de Caos Booleano ("Boolean chaos"), considerou o tempo necessário para um pulso passar do nível baixo para o nível alto. Esse tempo poderá depender da largura do pulso que para BELLIDO-DÍAZ *et al.* (2000) é denominado efeito de degradação.

A princípio para entender melhor o efeito de degradação, consideremos a representação do pulso não ideal através da Figura (3.40).

Figura 3.40: Particularidades de um pulso não ideal.



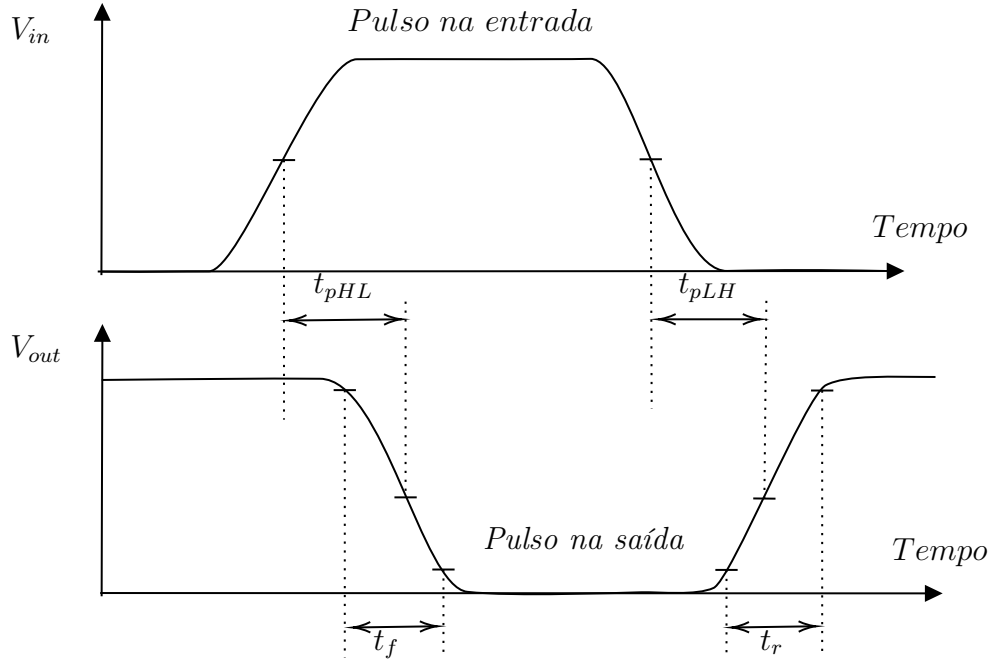
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em FLOYD

A Figura (3.40), simboliza um pulso não-ideal, em que todas ou algumas das características evidenciada na ilustração aparecem num pulso real.

3.3.2 Atraso de propagação.

O atraso de propagação de uma porta lógica, pode ser entendido como sendo a velocidade com que a porta lógica responde a uma mudança na sua entrada, ou seja, retrata o atraso que o pulso sofre ao passar pela porta lógica. O atraso que chamaremos de t_p é medido entre o meio da execução do sinal de entrada e o meio da execução do sinal de saída, conforme Figura (3.41).

Figura 3.41: Tempo de propagação do pulso e tempo de Subida/Descida.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em RABAEY (1996).

Onde t_{pLH} define o atraso associado a uma transição $L \rightarrow H$ (baixo para alto ou positivo) e t_{pHL} define o atraso associado a uma transição $H \rightarrow L$ (alto para baixo ou negativa), em que t_p será igual a,

$$t_p = \frac{t_{pHL} + t_{pLH}}{2}$$

Sendo t_p uma métrica artificial sem significado físico, mas de grande utilidade na comparação de diferentes tecnologias, sendo assim, o t_p está associada a tecnologia empregada pelos fabricantes desses componentes que tem como t_p associado a t_{pHL} e a t_{pLH} em torno de 10 ns e seus respectivos valores não são necessariamente iguais.

Faz-se importante destacar que apesar da tecnologia empregada, na confecção dos circuitos lógicos e portas lógicas, desempenharem um papel importante na diminuição do t_p , o atraso de propagação depende de outros fatores, tais como, a inclinação do sinal de entrada e da inclinação do sinal de saída da porta lógica.

Para quantificar e evitar incertezas sobre essa característica, a Figura (3.41) exhibe através do tempo de subida (t_r) e do tempo de descida (t_f) as métricas que

expressam a velocidade com que um sinal transita de diferentes níveis lógicos.

Por oportuno, apresentaremos no próximo capítulo aplicação desses conceitos, em uma rede composta por uma única porta lógica.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

4.1 Redes Booleanas

O estudo das redes booleanas é relativamente recente, a literatura nos remete ao artigo proposto por WALKER e ASHBY em 1966, como sendo o primeiro trabalho que trata as redes booleanas como um sistema de comportamento complexo, em seguida vem KAUFFMAN (1969) com seu artigo inovador que tem como título, Estabilidade Metabólica e Epigênese em Rede Genéticas Construídas Aleatoriamente (*“Metabolic Stability and Epigenesis in Randomly Constructed Genetic Nets”*), e introduz a hipótese que os genes podem ser modelados como um dispositivo binário, em que 1 (ou 0) corresponde ao estado ligado dos genes e 0 (ou 1) corresponde ao estado desligado. Com essa hipótese KAUFFMAN conseguiu correlacionar o seu estudo com a teoria das Redes Booleanas, em seguida as redes propostas por KAUFFMAN fundamentaram as equações de atraso booleanas, apresentada por DEE e GHIL (1984), GHIL e MULLHAUPT (1985) e posteriormente por MESTL *et al.* (1996).

Além das aplicações citadas acima, as redes booleanas podem ser usadas para construção de sistemas físicos, pois exibem capacidade de aplicação em processamento de sinais em virtude das propriedades presentes nas portas lógicas e por apresentarem alta velocidade de processamento. ZHANG *et al.* (2009). Nesse contexto DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010), apresenta em seu artigo, Sobre a origem do caos em Redes booleanas autônomo - (*“On the origin of chaos in autonomous Boolean networks”*) em que exhibe evidências do comportamento caótico em uma rede composta com uma única porta lógica (buffer).

Por oportuno, salientamos que as redes booleanas apresentam-se das seguintes formas:

Síncronas

As redes Booleanas Síncronas, pressupõem que todas as formas de onda são sincronizadas como uma espécie de temporizador de referência que denominamos clock. O clock é uma forma de onda temporizada e periódica em que cada intervalo entre os pulsos são iguais. Desta forma, a regra de atualização é determinada pelo clock existindo um número finito de estados totais e a rede eventualmente visitará um estado em que já foi antes. Por apresenta um comportamento periódico a rede se estabelecerá em um atrator periódico ou em um ponto fixo.

Assíncronas

Diferentemente das Redes Booleanas síncronas as Redes Booleanas Assíncronas não possuem influência de um temporizador de frequência (clock), e suas portas lógicas serão atualizadas espontaneamente e simultaneamente; porém, cada porta lógica possui seu tempo de atraso.

Autônomas

Nas Redes Booleanas Autônomas, o comportamento futuro será determinado pelo histórico dos eventos de comutação das interações anteriores, em que os atrasos ao longo dos links apresentam um papel fundamental. Ou seja, em uma Rede Booleana Autônoma, as atualizações do seu estado booleano acontecerão sempre que a transição estiver presente na sua porta e sem a influência de um sinal externo.

Modelos de rede booleana

Para entendemos melhor as aplicações das redes booleanas descritas na seção 4.1, exibiremos o modelo de rede proposta por KAUFFMAN (1969).

Rede proposta por Kauffman

No ano de 1969, KAUFFMAN popularizou uma descrição de rede booleana síncrona para circuitos de controle genético, onde os genes são aproximados como nós (portas lógicas) booleanos que mudam entre ativo ("ligado") e inativo ("desligado") e links que descrevem as interações de genes via funções booleanas. Os nós mudam seu estado booleano em um tempo fixo na evolução temporal síncrona. Isso é matematicamente descrito com um mapa iterado, em que uma etapa de tempo corresponde ao processamento do nó. Na descrição apresentada por KAUFFMAN (1969), N são os nós booleanos que interagem através dos seus estados X_i

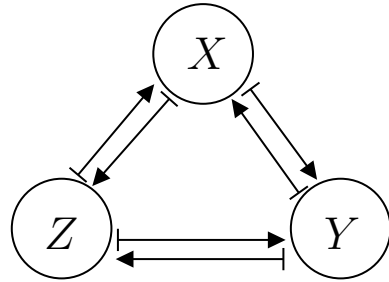
$$X_i(t+1) = \Lambda_i(X_{i1}(t), X_{i2}(t), \dots, X_{ik}(t)), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

em que $\Lambda_i(.) : \{0, 1\}^K \rightarrow \{0, 1\}$ são funções booleanas com K nós de entrada. Nessas condições, este modelo de rede é conhecido como redes NK (Kauffman Network), aceita que um gene i consegue ser representado por um elemento binário X_i , em que $X_i = 1$ (ligado) corresponde a um gene expressivo ¹ e $X_i = 0$ quando não está expresso.

Em termos matemáticos a equação (4.1) pode descrever um mapa iterado de estado finito, com espaço de fase composto por 2^N possíveis estados e regras para transição entre os estados.

Exemplo 1. Para exemplificar uma rede NK, utilizaremos o diagrama de rede booleana ilustrado por KAUFFMAN (1969) em que o "comportamento determinístico e aleatório de cada nó recebe apenas duas entradas de outros elementos é biologicamente razoável".

Figura 4.1: Diagrama para uma rede do tipo NK com três elementos.



$$\begin{aligned} X(T+1) &= \overline{Y(T)}.Z(T) \\ Y(T+1) &= X(T).Z(T) \\ Z(T+1) &= \overline{X(T)} + Y(T) \end{aligned}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, com base em KAUFFMAN (1969).

Tabela 4.1: Tabela verdade da função booleana de cada gene.

T			T+1
Y	$\overline{Y}$	Z	$X = \overline{Y}.Z$
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0

T		T+1
X	Z	$Y = X.Z$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

T			T+1
X	$\overline{X}$	Y	$Z = \overline{X} + Y$
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1

Fonte: Elaborada pelo autor, com base em KAUFFMAN (1969).

O diagrama representado pela Figura (4.1) fornecido por KAUFFMAN (1969), exibe uma rede booleana, em que os N podem ser entendidos como os nós e os K como sendo o número de links entre os N nós que compõe o diagrama.

Para a rede (4.1) em que temos, $N=3$ e $K=2$, colocaremos uma condição inicial $(X,Y,Z) = (0,0,1)$, com $T=0$, o estado seguinte poderá ser determinado pelas tabelas

¹Processo pelo qual a informação codificada em um gene é usada para direcionar a montagem de uma molécula de proteína INSTITUTE (2019).

verdades (4.1), que representa as operações ilustradas no diagrama (4.1), nos tempos T e $T+1$. Já a tabela (4.2), exibe todos os possíveis estados da rede (4.1) no tempo T e no tempo subsequente $T+1$.

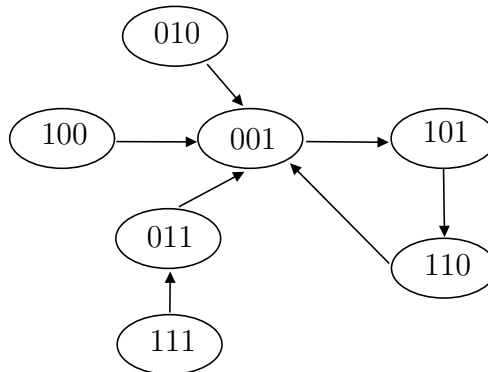
Tabela 4.2: Tabela verdade com todos os possíveis estados de uma rede NK representada pela Figura (4.1)

T			T+1		
X	Y	Z	$\bar{Y}.Z$	$X.Z$	$\bar{X}+Y$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

Fonte: Elaborada pelo autor, com base em KAUFFMAN (1969).

No diagrama, cada nó depende da função booleana ou ("or") ou da função booleana e ("and"). Como o sistema é determinístico teremos que para cada estado existirá um sucessor. Por exemplo, seja $(0,0,1)$ um estado inicial arbitrário, no tempo T , haverá um sucessor, o estado $(1,0,1)$ no tempo $T+1$. Seguindo esse raciocínio e pelo fato do número de estados do sistema ser finito, teremos que após algumas alterações de estado, o sistema poderá encontrar um estado que havia encontrado anteriormente, fazendo o sistema entrar num loop, ou seja, o sistema circulará repetidamente em torno de um ciclo, que KAUFFMAN (1993) denomina atrator dinâmico.

Figura 4.2: Campo de comportamento.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em KAUFFMAN (1969)

O diagrama representado pela Figura (4.2) é chamado campo de comportamento. Tal diagrama representa as trajetórias possíveis, o qual exibe sucessões de alterações

de estados dos elementos da rede. O campo de comportamento (4.2) exibe três possíveis percursos os quais leva a um ciclo de estado em que todos os estados estão convergindo para um estado.

Os modelos de rede booleana proposto por KAUFFMAN (1969) são bastantes cativantes, porque reduzem sistemas complexos de interação genética a funções booleanas e topologia de redes. Entretanto, descuida de alguns aspectos físicos que podem exercer papel importante na dinâmica, como, por exemplo, incluir interações em tempo contínuo, atrasos entre os nós, que para SCHOLL (2008) o atraso (delay) na dinâmica dos sistemas pode estabelecer a periodicidade das oscilações, assim como pode estabilizar ou desestabilizar pontos fixos e órbitas periódicas.

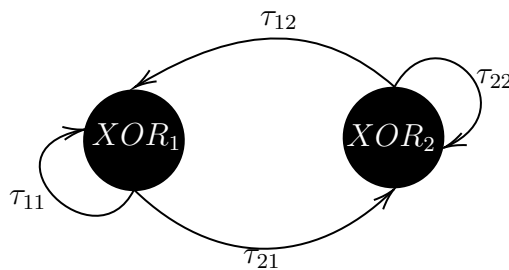
Equações de atraso booleanos propostas por GHIL e MULLHAUPT

Para FRIDMAN (2014) o atraso (delay) é uma característica encontrada com frequência em sistemas físicos, químicos, biológicos, econômicos, assim como, em atuadores, sensores, sistemas de telecomunicação e rede de comunicação, em que a origem desse atraso pode se dar de forma intencional, por exemplo, no controle de reações químicas; ou não intencional, quando o atraso é uma característica intrínseca do sistema. É nesse contexto de sistemas com atrasos intrínsecos que GHIL e MULLHAUPT (1985) introduziram as Equações de atraso booleanas II. Soluções Periódicas e Aperiódicas (*“Boolean Delay Equations. II. Periodic and Aperiodic Solutions”*), como um modelo de rede booleana, em que o estado de cada nó é dado por X_i e se desenvolve conforme a equação de atraso (4.2).

$$X_i(t) = \Lambda_i(X_{i1}(t - \tau_{i,1}), X_{i2}(t - \tau_{i,2}), \dots, X_{ik}(t - \tau_{i,N})), \quad i = 1 \dots N, \quad (4.2)$$

atentemos que a equação (4.2) exibi estrutura semelhante às redes apresentadas por KAUFFMAN na equação (4.1), no entanto, a dinâmica resultante pode ser muito diferente das redes NK, porque inclui atualizações em tempo contínuo e os atrasos τ_{ij} correspondem ao tempo ao longo dos links, conforme ilustrado pela Figura (4.3).

Figura 4.3: Topologia de uma rede booleana, composta de duas portas lógicas (XOR).



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em ZHANG *et al.* (2009).

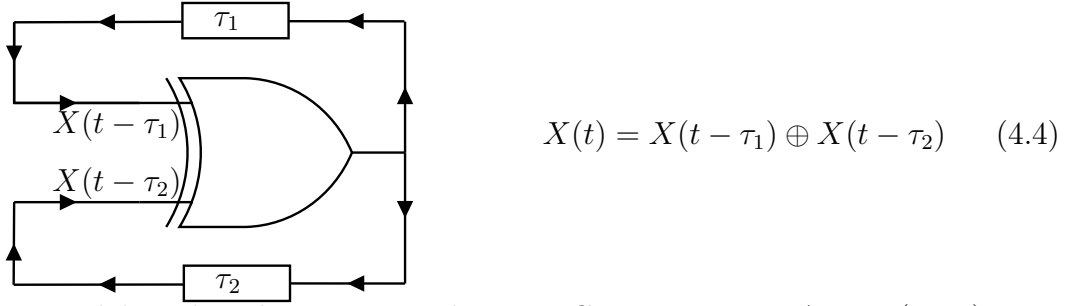
Interessados na dinâmica de uma determinada Rede Booleana, composta pela porta lógica XOR, obteremos a equação de atraso booleana.

$$X(t) = X(t - \tau_1) \oplus X(t - \tau_2) \oplus \cdots \oplus X(t - \tau_\delta), \quad (4.3)$$

em que a porta XOR possui no mínimo duas entradas, obteremos $\delta \geq 2$ na equação (4.3) e o tempo de atraso representado por τ_δ . Já o operador $\oplus : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, efetua a operação booleana "ou exclusivo"(XOR) visto na porta lógica (3.32).

Exemplo 2. Para ilustrar o comportamento da equação (4.3) consideremos a porta lógica XOR com duas entradas, conforme Figura (4.4).

Figura 4.4: Diagrama para rede booleana com um nó (XOR) e dois links com atraso.

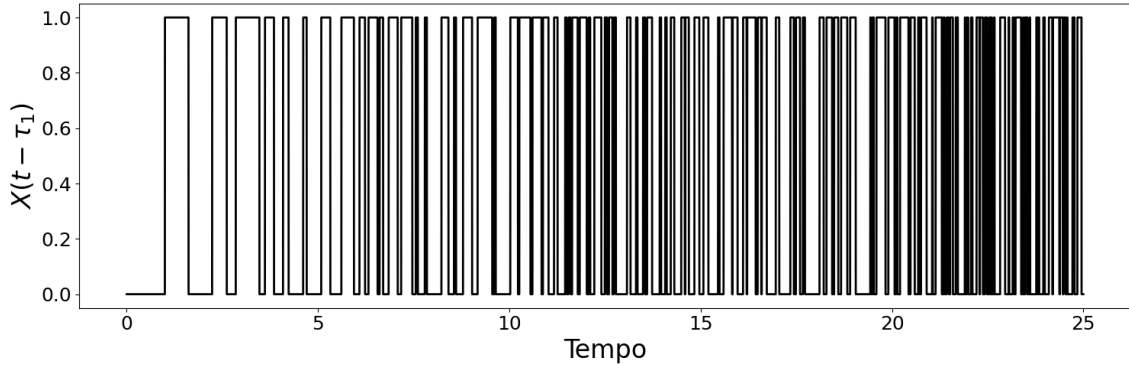


Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985) e DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010).

A Figura (4.4) ilustra uma rede booleana representada pela equação de atraso (4.4), em que $\delta = 2$ evidencia os atrasos nos links de feedbacks.

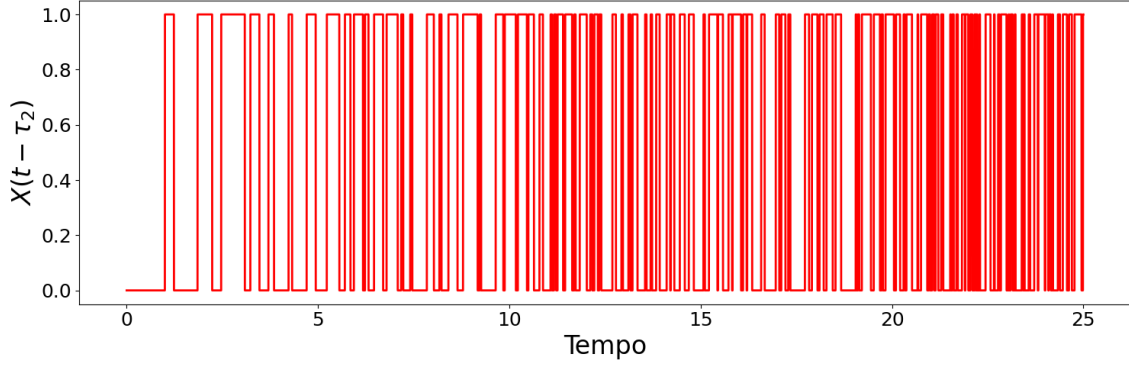
Da rede representada pela Figura (4.4), observemos ao menos que às duas entradas mudem seu estado lógico simultaneamente, teremos uma transição de saída diferente da entrada. Assim o tempo de transição fornecerá um conjunto discreto.

Figura 4.5: Link de feedback $X(t - \tau_1)$, com $\tau_1 = 1$.



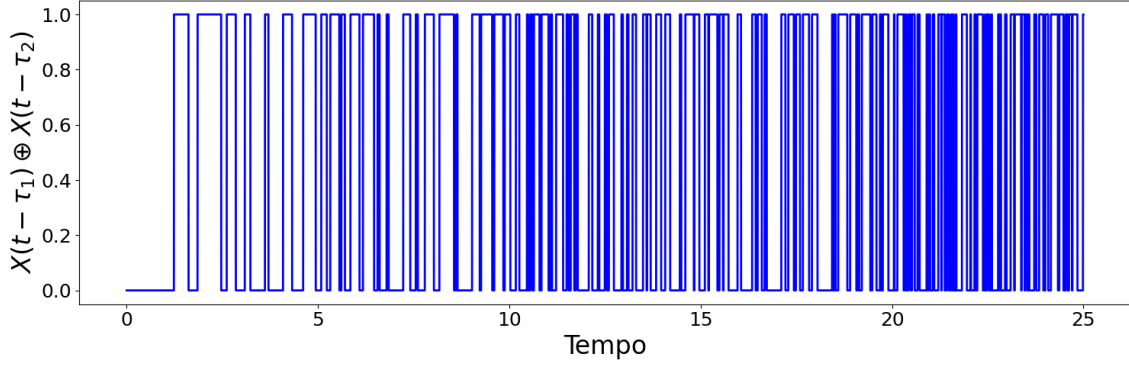
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

Figura 4.6: Link de feedback $X(t - \tau_2)$, com $\tau_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

Figura 4.7: Solução $X(t)$ da equação de atraso (4.4), com dinâmica inicializada no tempo $t = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

A Figura (4.7), exibe a dinâmica do sistema em que o número de transições (mudanças no estado lógico) aumenta de tal forma, que, GHIL e MULLHAUPT (1985) e GHIL et al. (2008) relatam que o número de transições podem crescer sem limites, seguindo uma lei de potência² no tempo. Entretanto esse comportamento complexo não deve ocorrer em sistemas físicos, pois a velocidade de resposta de uma porta lógica (XOR) é finita, ou seja, exibe uma frequência máxima de operação, evitando que duas transições que vêm em uma sucessão muito rápida sejam processadas simultaneamente. ZHANG et al. (2009) reporta-se a esse crescimento ilimitado na frequência de transições como uma catástrofe ultravioleta inevitável.

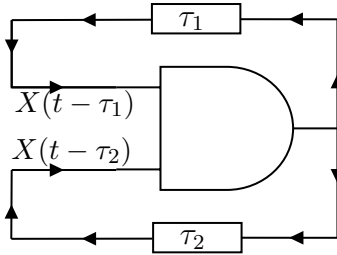
No exemplo 2 é apresentado uma rede booleana construída com uma porta lógica XOR, em que a dinâmica da rede é determinada pela equação (4.4) e seu comportamento exibido pela Figura (4.7). Substituindo a porta lógica XOR vista no exemplo

²Na Física, uma lei é dita lei de potência se entre dois escalares x e y a relação entre eles pode ser escrita da seguinte forma: $y = ax^k$, onde a é a constante de proporcionalidade e k um expoente constante.

2, pela portas lógicas, AND, OR, NAND, NOR e XNOR, ou seja, as portas lógicas que apresentam no mínimo duas entradas para representar uma rede booleana com dois links de feedbacks e os atrasos booleano.

Porta lógica AND

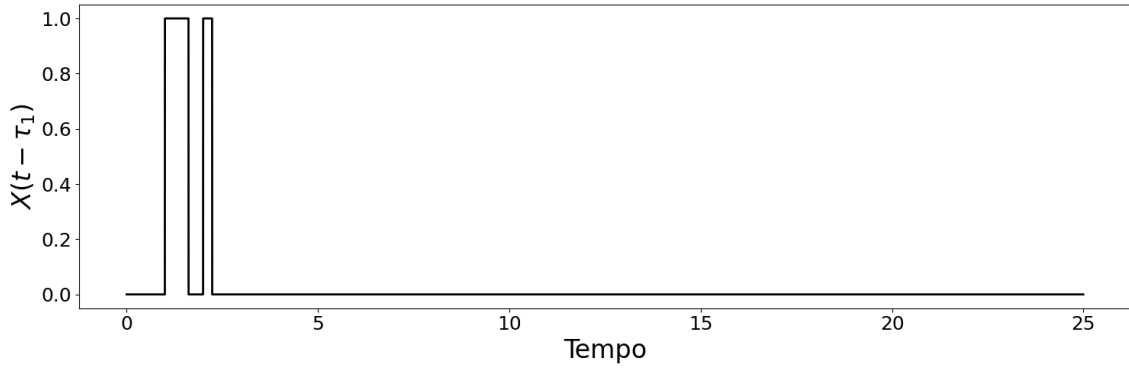
Figura 4.8: Diagrama para rede booleana com um nó (AND) e dois links com atraso.



$$X(t) = X(t - \tau_1).X(t - \tau_2) \quad (4.5)$$

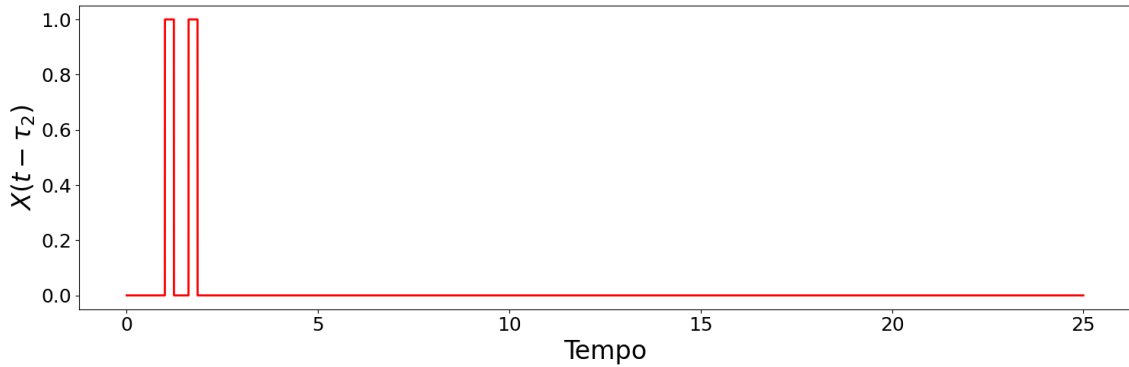
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985) e DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010).

Figura 4.9: Link de feedback $X(t - \tau_1)$, com $\tau_1 = 1$.



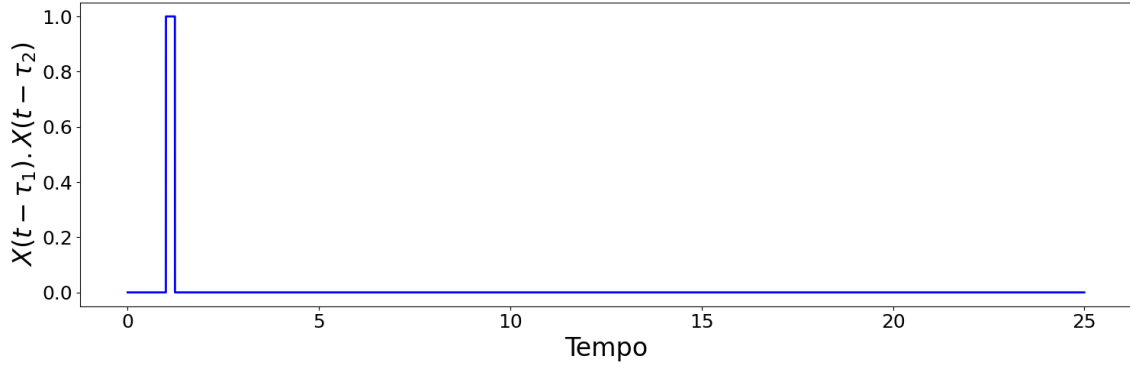
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

Figura 4.10: Link de feedback $X(t - \tau_2)$, com $\tau_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

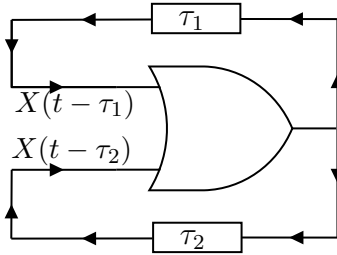
Figura 4.11: Solução $X(t)$ da equação de atraso (4.5), com dinâmica inicializada no tempo $t = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

Porta lógica OR

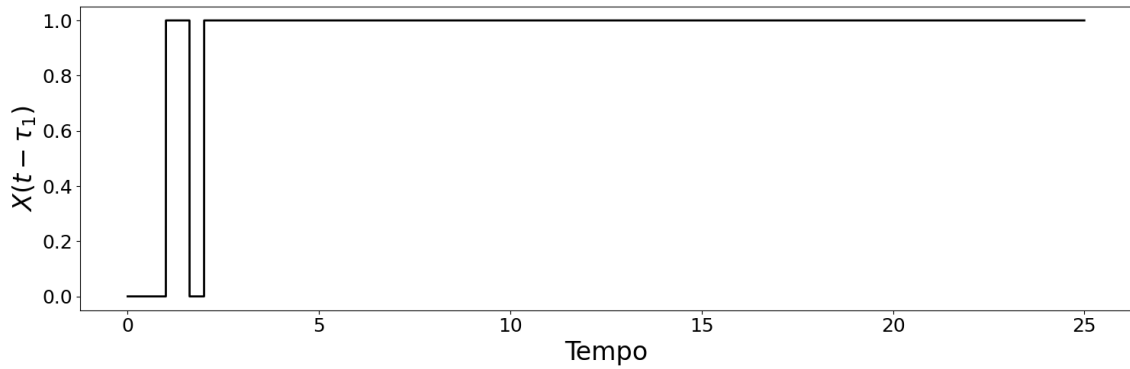
Figura 4.12: Diagrama para rede booleana com um nó (OR) e dois links com atraso.



$$X(t) = X(t - \tau_1) + X(t - \tau_2) \quad (4.6)$$

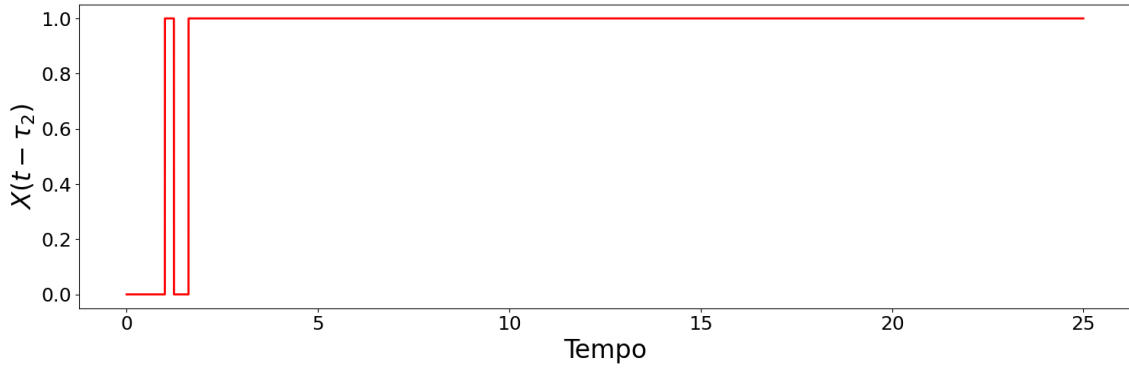
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985) e DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010).

Figura 4.13: Link de feedback $X(t - \tau_1)$, com $\tau_1 = 1$.



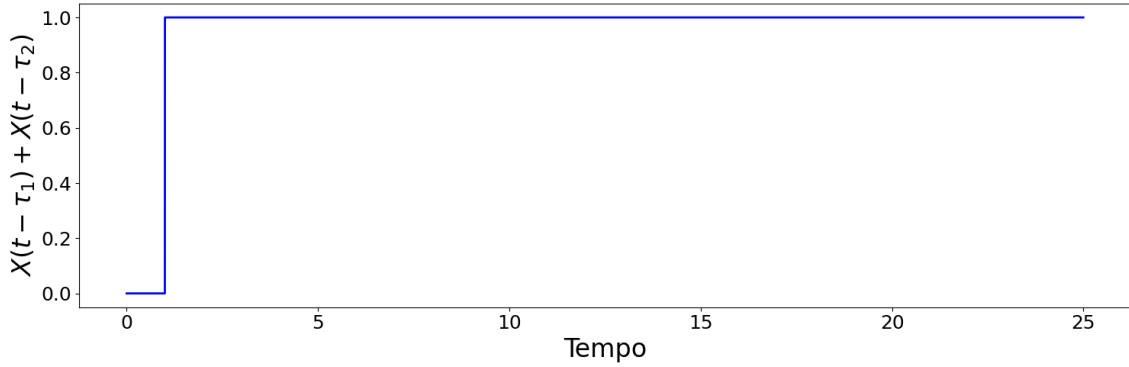
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

Figura 4.14: Link de feedback $X(t - \tau_2)$, com $\tau_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

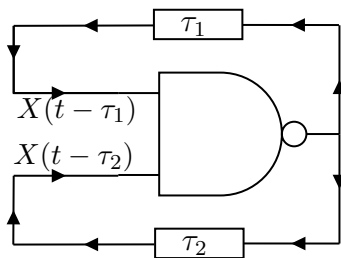
Figura 4.15: Solução $X(t)$ da equação de atraso (4.4), com dinâmica inicializada no tempo $t = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

Porta lógica NAND

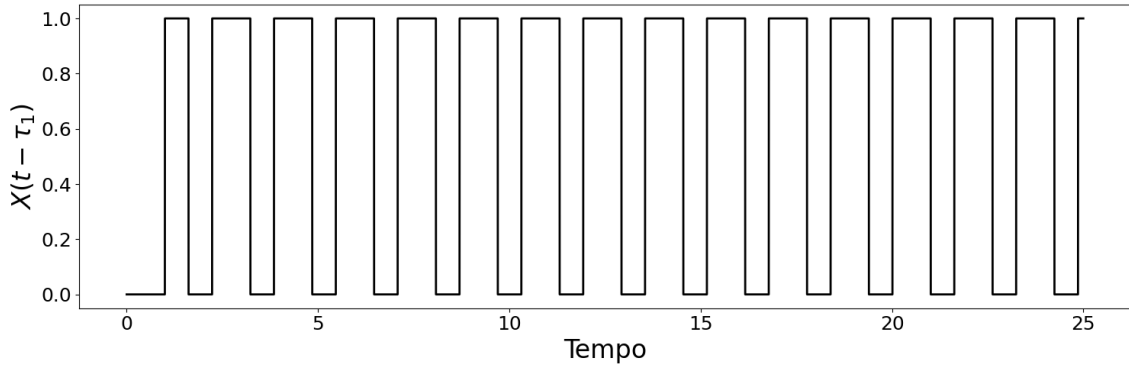
Figura 4.16: Diagrama para rede booleana com um nó (NAND) e dois links com atraso.



$$X(t) = \overline{X(t - \tau_1) \oplus X(t - \tau_2)} \quad (4.7)$$

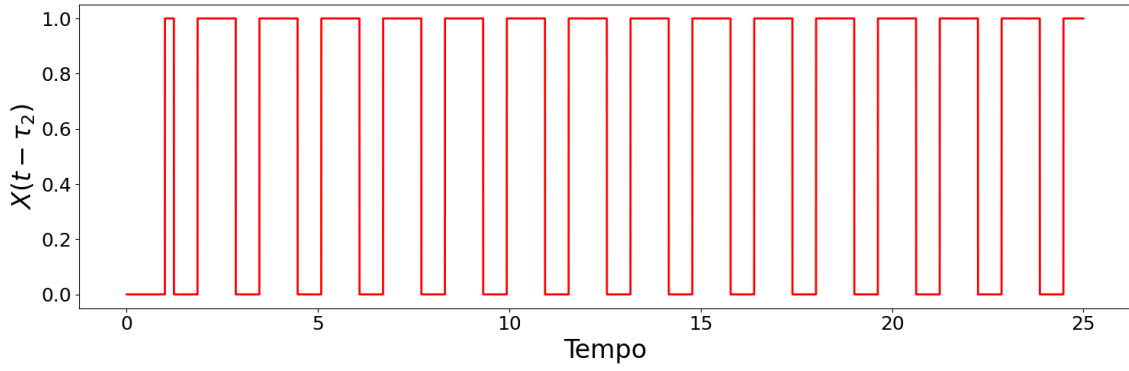
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985) e DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010).

Figura 4.17: Link de feedback $X(t - \tau_1)$, com $\tau_1 = 1$.



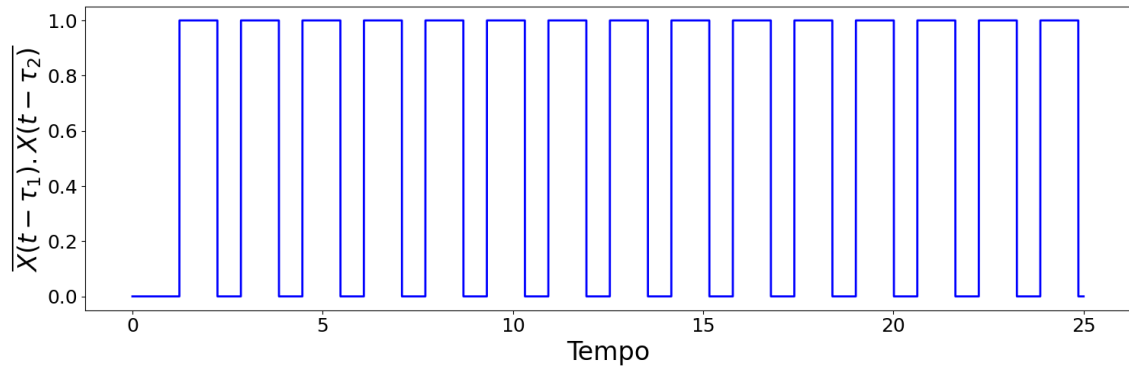
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

Figura 4.18: Link de feedback $X(t - \tau_2)$, com $\tau_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

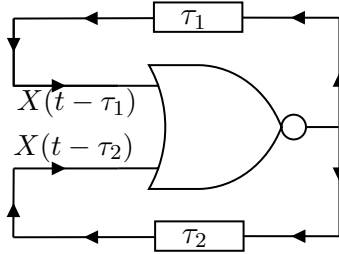
Figura 4.19: Solução $X(t)$ da equação de atraso (4.7), com dinâmica inicializada no tempo $t = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

Porta lógica NOR

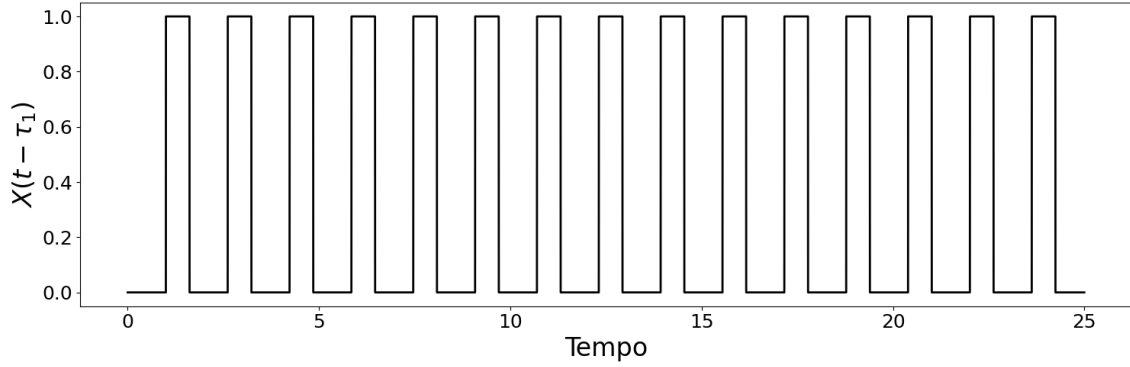
Figura 4.20: Diagrama para rede booleana com um nó (NOR) e dois links com atraso.



$$X(t) = \overline{X(t - \tau_1) \oplus X(t - \tau_2)} \quad (4.8)$$

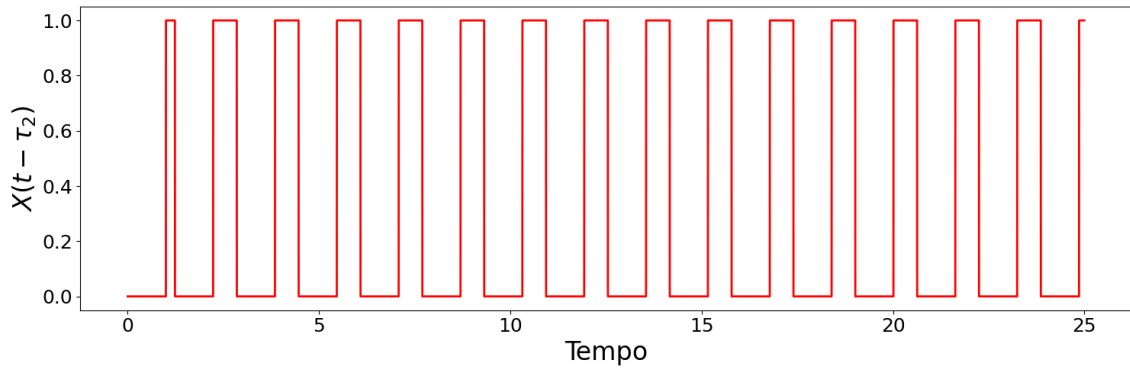
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985) e DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010).

Figura 4.21: Link de feedback $X(t - \tau_1)$, com $\tau_1 = 1$.



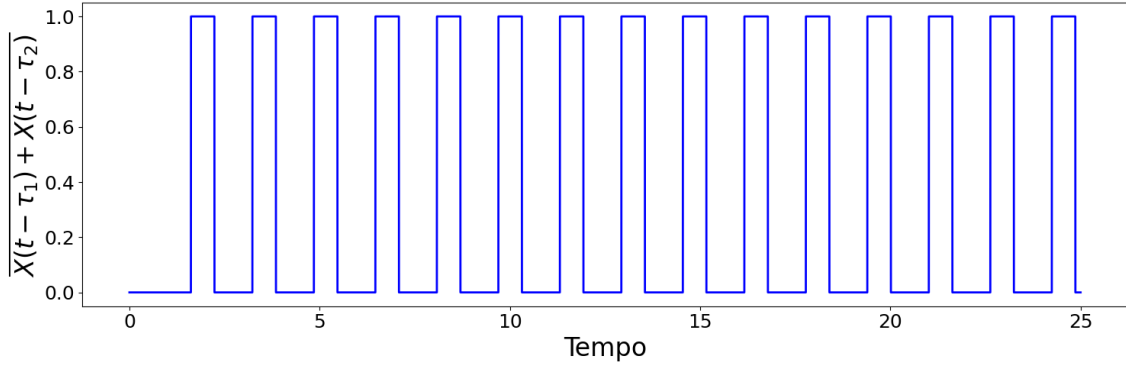
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

Figura 4.22: Link de feedback $X(t - \tau_2)$, com $\tau_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

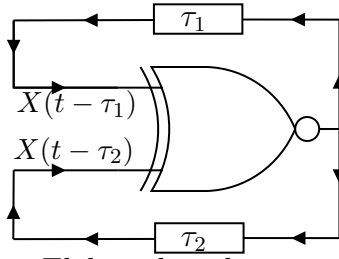
Figura 4.23: Solução $X(t)$ da equação de atraso (4.8), com dinâmica inicializada no tempo $t = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

Porta lógica XNOR

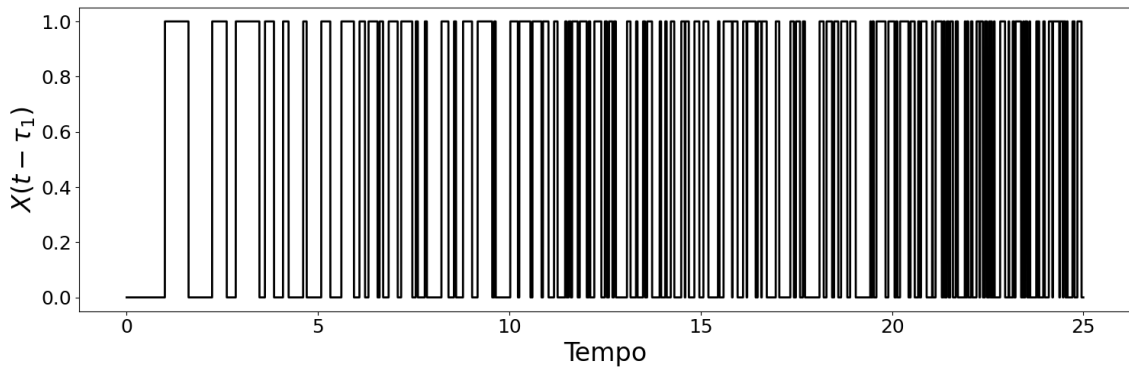
Figura 4.24: Diagrama para rede booleana com um nó (XNOR) e dois links com atraso.



$$X(t) = \overline{X(t - \tau_1) \oplus X(t - \tau_2)} \quad (4.9)$$

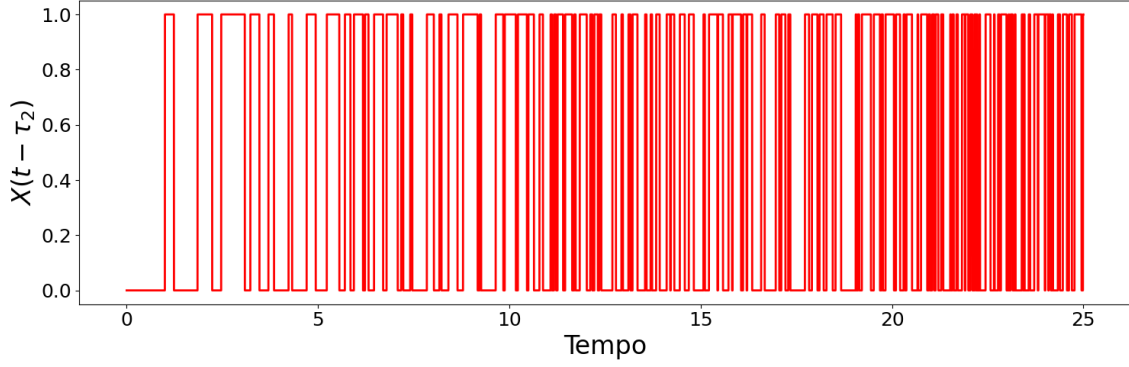
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985) e DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010).

Figura 4.25: Link de feedback $X(t - \tau_1)$, com $\tau_1 = 1$.



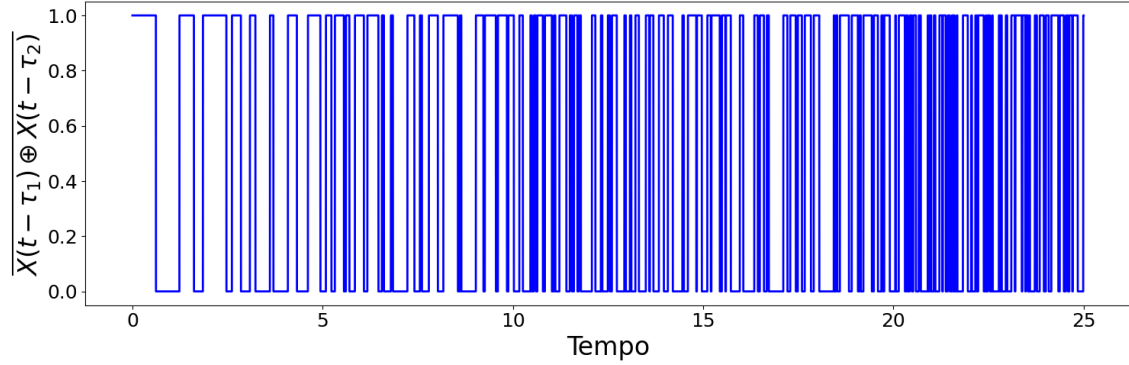
Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

Figura 4.26: Link de feedback $X(t - \tau_2)$, com $\tau_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

Figura 4.27: Solução $X(t)$ da equação de atraso (4.9), com dinâmica inicializada no tempo $t = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em GHIL e MULLHAUPT (1985)

Atentemos às dinâmicas das redes definidas pelas equações booleanas de atraso (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9), que apresentam a dinâmica resultante nas Figuras (4.11), (4.15), (4.19), (4.23) e (4.27), cujo comportamento na maioria dos casos conduz a um ponto fixo ou a uma transição simples. O caso da rede booleana definida pela porta XNOR, assim como apresentado na Figura (4.7), exibe um comportamento complexo, entretanto a dinâmica exposta por XNOR é idêntica à dinâmica exposta pela porta lógica XOR quando alteramos o nível lógico alto (1) para o nível lógico (0).

Para superar o aparecimento dos pulsos curtos na equação (4.4) de atraso booleano, DE S. CAVALCANTE *et al.* considera um ϵ com duração infinitesimal, tal que $X(t) \neq X(t - \epsilon)$, assinalando que uma mudança aconteceu no tempo t e $\int_0^{\tau_{spr}} X(t - s) \oplus X(t - \epsilon) \neq 0$, indicando que a dinâmica exibida pela porta lógica mudou em algum momento durante o intervalo de rejeição do pulso curto passado, então $X(t - s) = X(t - \tau_{spr})$, para todos $s \in [0, \tau_{spr})$, em que $\tau_{spr} \rightarrow 0$.

A dinâmica apresentada pelas equações (4.4) e (4.9), expõem um comportamento

complexo para rede booleana composta pela porta lógica XOR ou pela porta lógica XNOR composta por dois links de feedbacks, conforme Figuras (4.4) e (4.24), dificultando a análise qualitativa. Entretanto, a diminuição sucessiva da largura do pulso levará à catástrofe ultravioleta (GHIL e MULLHAUPT, 1985; GHIL *et al.*, 2008), considerando que a velocidade de resposta das portas lógicas é finita e implementando a rejeição dos pulsos curtos, obteremos que a dinâmica gerada deverá apresentar atratores periódicos, conforme o Teorema (4.1).

Teorema 4.1. *Para uma rede booleana autônoma com rejeição dos pulsos curtos, constituindo em uma única porta lógica XOR e composta por duas linhas de feedbacks com atrasos τ_1 e τ_2 , conforme Figura (4.4), exibirá atratores periódicos, sempre.*

Observação 4.1. *A demonstração do Teorema (4.1) poderá ser visto com detalhes em DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010).*

4.1.1 Divergência de trajetórias

DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010) em seu artigo, que fala sobre a origem do caos em redes booleanas autônomas (“*On the origin of chaos in autonomous Boolean networks*”), propões dois métodos para a análise da dinâmica traçadas pelo comportamento da rede booleana a uma pequena perturbação, ou seja, inserindo artificialmente uma pequena perturbação ϵ , que para nosso caso, será um atraso, mas poderia ser um adiantamento.

- Para o primeiro método, precisaremos construir uma sequência de tempo de comutação t_n , para dinâmica sem perturbação e t'_n , para dinâmica perturbada, posteriormente, plotemos $\delta_n = |t_n - t'_n| \times t_n$.
- para o segundo caso, a diferença booleana é definida como sendo
 - 0, se a porta lógica estiver no mesmo estado lógico nas duas trajetórias,
 - 1, se a porta lógica estiver em estado diferente

e depois DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010) integrou a diferença booleana entre as trajetórias original ($X(t')$), iniciada no tempo t_a e a trajetória perturbada ($X(t')$) iniciada no tempo t_b ,

$$d(s) = \frac{1}{T} \int_s^{s+T} X(t' + t_a) \oplus X(t' + t_b) dt' \quad (4.10)$$

em que $T = 10ns$ é um parâmetro fixo, $\oplus$ representa a operação booleana exibida nas portas do tipo XOR e a diferença booleana poderá ser entendida como a distância ($d(s)$) em que s representa o tempo entre a perturbação aplicada e o término do intervalo de integração.

Desta forma, o primeiro método poderá apresentar divergência de trajetória com a rejeição dos pulsos curtos em uma das trajetórias. Para DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010) não existe outro mecanismo que aumente ou diminua a diferença entre as transições de estado lógico. Atentemos que se existir a rejeição dos pulsos curtos, proposta pelo primeiro método, em um sistema, as transições lógicas geradas, geraram novas transições lógicas, fazendo com que as duas trajetórias divirjam. Para o caso particular em que a diferença dos pulsos seja um ϵ infinitesimal, a rejeição dos pulsos curtos poderá não acontecer, consequentemente inexistirá diferença de rejeição dos pulsos curtos, ou seja, teremos ausência da divergência de trajetória.

No segundo método proposto por DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010), teremos o distanciamento das trajetórias, este fato se dar pelo aumento das transições lógicas que advêm da perturbação ϵ infinitesimal. Atentemos que o distanciamento não poderá ser maior que $n\epsilon$, onde n é o número de transições lógicas que o atraso τ_2 comporta. Outro fato bastante interessante é que n é finito para qualquer valor diferente de zero e de τ_{spr} , consequentemente a dinâmica apresentada pelas transições lógicas não diverge exponencialmente para ϵ infinitesimal.

Sobre outra perspectiva, dado $\epsilon > 0$, eventualmente poderá existir um pulso com duração próximo de ϵ e próximo do pulso curto rejeitado. Para DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010), essa situação poderá levar a divergência exponencial, se considerarmos o tempo definido para rejeitar os pulsos curtos com o tempo necessário para acontecer a transição lógica, ou seja, gerando aproximadamente $n\tau_1$ novos pulsos.

4.1.2 Porta lógica Buffer (copiadora)

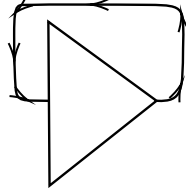
A princípio entenderemos melhor o efeito de degradação, para isso consideremos o pulso analógico representado pela Figura (3.40), atentemos para o atraso de propagação representado pela Figura (3.41), que ilustra o tempo gasto entre o pulso na entrada de uma porta lógica e o pulso resultante na saída. Podemos entender o tempo característico que uma porta lógica tem para responder ao pulso.

A Figura (3.41) ilustra duas formas diferentes de mensurar o atraso de propagação associado a uma porta lógica. São elas,

- t_{pLH} é o tempo entre o meio da excursão do pulso de entrada e o meio da excursão do pulso de saída, com a saída mudando de nível lógico alto para nível lógico baixo;
- t_{pHL} , é o tempo entre o meio da excursão do pulso de entrada e o meio da excursão do pulso de saída, com a saída mudando de nível lógico baixo para nível lógico Alto.

Consideremos uma Rede Booleana autônoma, ilustrada pela Figura (4.28), de um único nó (porta lógica Buffer).

Figura 4.28: Rede Booleana Autônoma (Porta lógica Buffer) .



Fonte: Elaborado pelo autor, com base em DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010)

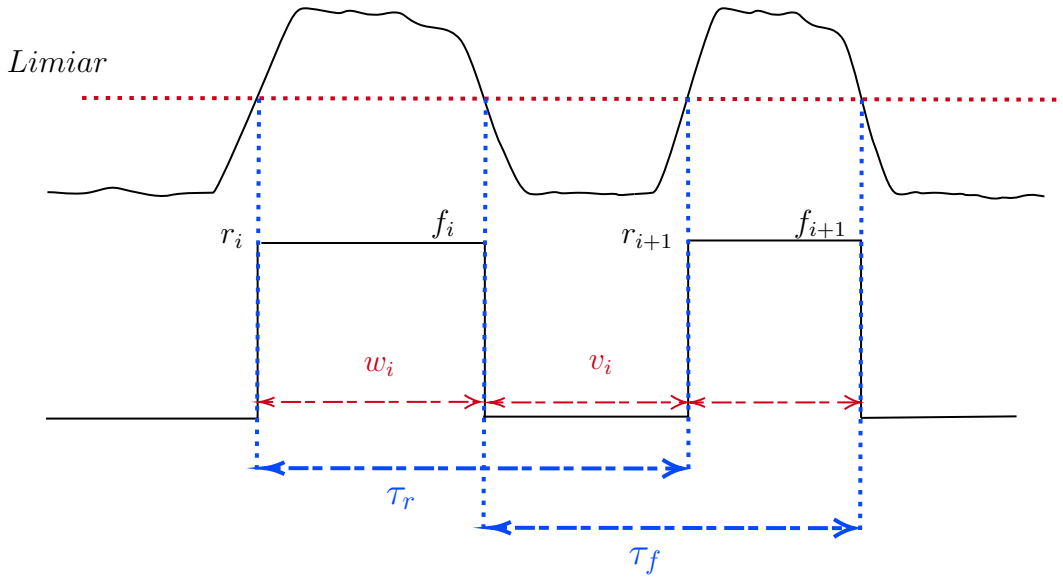
- o tempo de subida e o tempo de descida do sinal,
- o atraso característico do nó, em que representa uma porta lógica.

Uma maneira de implementar e representar o efeito de degradação em uma rede booleana autônoma é considerar a Figura (4.29) e;

- r como sendo o momento da comutação crescente do pulso de entrada;
- f como sendo o momento da comutação decrescente do pulso de entrada;
- r' como sendo o momento que ocorrer a comutação crescente do pulso de saída;
- f' como sendo o momento que ocorrer a comutação decrescente do pulso de saída.

Esses tempos, representados por r' e s' são os tempos reais, entretanto, para termos uma aproximação mais realista, teremos que considerar atrasos que dependerão do estado da porta lógica no momento da chegada da comutação. Em outras palavras, existirá um τ_r e um τ_f tal que o tempo real associado à comutação em r é expresso por, $r' - \tau_r$, em que τ_r representa um atraso de propagação, já o tempo real associado a f é expresso por, $f' - \tau_f$, em que τ_f representa outro atraso de propagação, com f caracterizando a função do tempo em que a porta lógica esteve ligada, ou seja, $f - (r' - \tau_r)$. Portanto, definimos $f - (r' - \tau_r)$ como sendo uma função de degradação, que nos dá o atraso, $f' - f$.

Figura 4.29: Implementação do efeito de degradação.



Fonte: Elaborado pelo autor, com base em DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010)

Entendendo a situação de um único pulso em uma porta lógica Buffer (copiadora), conforme ilustrado na Figura (4.29), em que a entrada da porta lógica é automática. Consideremos as equações de evolução para v_i e w_i .

$$v_i = r_{i+1} - f_i \quad (4.11)$$

e

$$w_i = f_i - r_i. \quad (4.12)$$

A não rejeição do pulso curto gerará uma nova comutação,

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= r_i + g_r(r_i - (f_i - \tau_r)) \\ &= r_i + g_r(\tau_r - w_i) \end{aligned} \quad (4.13)$$

e

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + g_f(f_i - (r_{i+1} - \tau_r)) \\ &= f_i + g_f(\tau_r - v_i) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por oportuno, cabe esclarecer que as constantes τ_r e τ_f , não precisam ser iguais, assim como, g_r e g_f não precisam ser diferentes. Mas como o nosso objetivo é exibir a existência de caos na porta lógica em comento, consideremos os casos em que $\tau_r = \tau_f = \tau$ e $g_r = g_f = g$

Definindo a largura do pulso, conforme ilustrado na Figura (4.29) e inserindo as equações (4.13) e (4.14) em (4.15),

$$w_{i+1} = f_{i+1} - r_{i+1}, \quad (4.15)$$

obteremos;

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= f_{i+1} - r_{i+1}, \\ &= (f_i + g(-v_i)) - (r_i + g(\tau - w_i)) \\ &= (f_i - r_i) + g(\tau - v_i) - g(\tau - w_i) \\ &= w_i + g(\tau - v_i) - g(\tau - w_i) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Operando algebricamente na equação (4.13) chegaremos a,

$$r_{i+2} = r_{i+1} - g(\tau - w_{i+1}) \quad (4.17)$$

Desta forma, inseriremos a equação (4.17) na equação (4.18),

$$v_{i+1} = r_{i+2} - f_{i+1}, \quad (4.18)$$

obteremos,

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= r_{i+2} - f_{i+1}, \\ &= r_{i+1} + g(\tau - w_{i+1}) - f_{i+1} \\ &= r_{i+1} + g(\tau - w_{i+1}) - (f_i + g(\tau - v_i)) \\ &= v_i + g(\tau - w_{i+1}) - g(\tau - v_i) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Da Figura (4.29), temos que w_i pode determinar v_i e v_i poderá determinar w_i , dessa forma é possível reduzir a equação (4.19) e a equação (4.16) a uma única variável, permitindo-nos fazer analogia a um mapa de uma variável.

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= v_i + g(\tau - w_{i+1}) - g(\tau - v_i) \\ \left[\begin{aligned} w_{i+1} &= f_{i+1} - r_{i+1} \\ &= f_{i+1} - r_{i+1} + (f_i - f_i) \\ &= (f_i - r_{i+1}) + (f_{i+1} - f_i) \\ &= -v_i + (f_{i+1} - f_i) \\ &= -v_i + [f_i + g(\tau - v_i) - f_i] \\ &= g(\tau - v_i) - v_i \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$\therefore v_{i+1} = v_i + g(\tau + v_i - g(\tau - v_i)) - g(\tau - v_i) \equiv h(v_{i+1}) \quad (4.20)$$

De forma análoga temos,

$$\begin{aligned}
w_{i+1} &= w_i + g(-v_i) - g(\tau - w_i) \\
\overline{v_i} &= r_{i+1} - f_i \\
&= r_{i+1} - f_i + (r_i - r_i) \\
&= (-f_i + r_i) + (r_{i+1} - r_i) \\
&= -w_i + (r_{i+1} - r_i) \\
&= -w_i + [r_i + g(\tau - w_i) - r_i] \\
&= g(\tau - w_i) - w_i \quad \text{—}
\end{aligned}$$

$$\therefore w_{i+1} = w_i + g(\tau + w_i g(\tau - w_i)) - g(\tau - w_i) \equiv h(w_{i+1}) \quad (4.21)$$

Da análise dos mapas dos gerados pelas equações (4.20) e (4.21), um ponto fixo estável, equivale a uma rede booleana autônoma com comportamento periódico, em que todos os pulsos de estado lógico alto terão largura w^* e todos os pulsos de estado lógico baixo terão largura v^* . Das equações (4.19) e (4.16) temos que $g_r(v^*) = g_f(w^*)$, entretanto não podemos afirmar que $v^* = w^*$.

Para o nosso estudo $g(x)$ deverá ter duas características fundamentais, que são;

- $g(x)$ deverá ser maior ou igual a τ , para todo $x \in \mathbb{R}$. Essa característica se faz necessária pelo tempo mínimo que o sinal necessita para atravessar o link.
- $g(x)$ deverá tender assintoticamente a uma constante $\tau_0 > \tau$, para x grande. Essa característica se deve ao fato da porta lógica se estabilizar em um estado fixo, caso sua entrada permaneça constante por um longo tempo.

Para uma melhor compreensão do papel da função $g(x)$, consideremos a Figura (4.32), em que representa a dinâmica da rede booleana autônoma representada pela Figura (4.28) e modulada pela função $g(x)$.

Com as características da função $g(x)$ obtidas experimentalmente, mas fundamentada no comportamento das portas lógicas reais, DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010) conseguiram modular a largura dos pulsos para gerar caos no modelo proposto. Dê forma análoga utilizaremos as funções (4.22) e (4.23), para o estudo do caos na dinâmica.

$$g(\tau - v) = \tau + a + b(\tau - v - c)\exp[-(\tau - v)/A] \quad (4.22)$$

ou

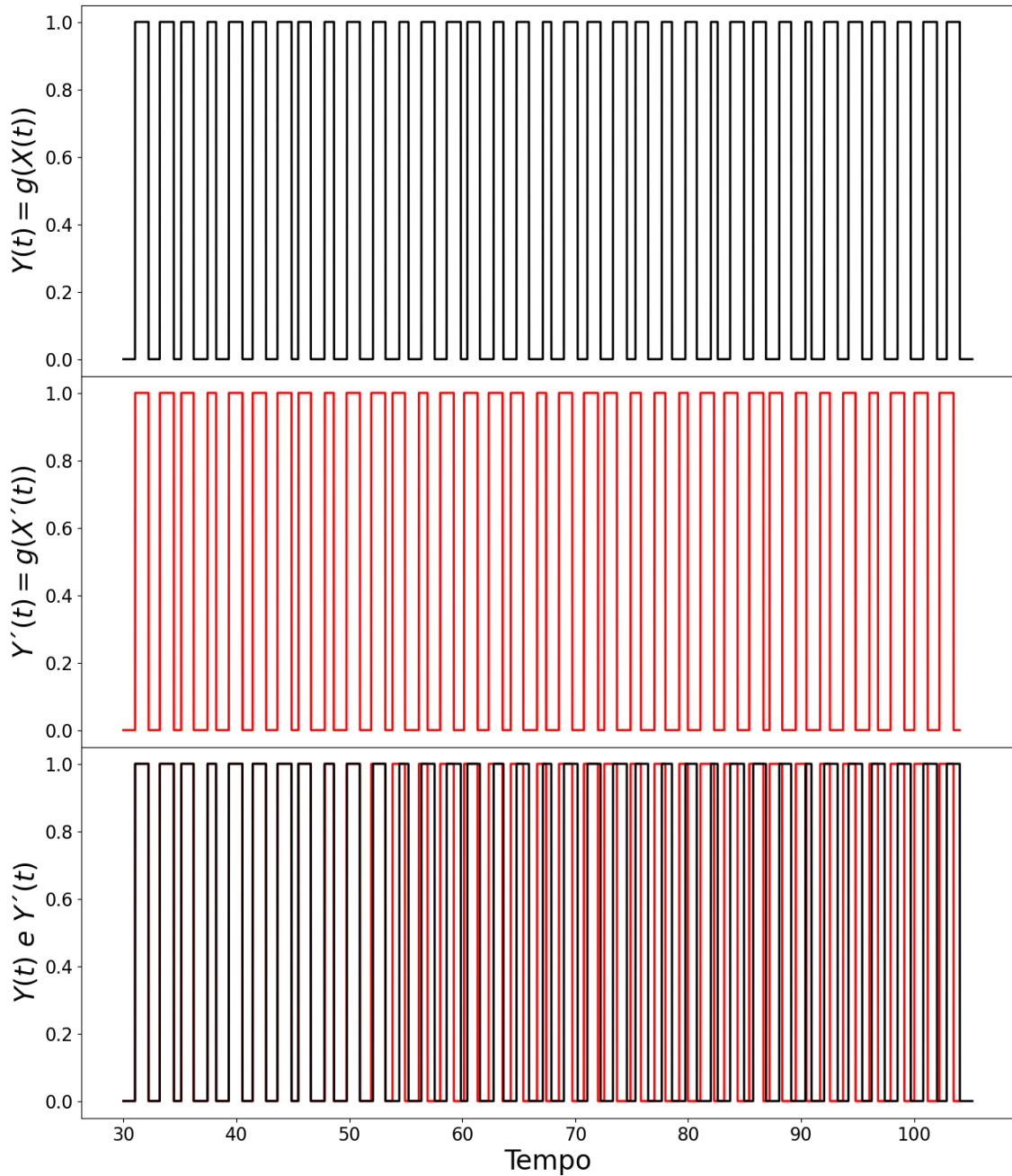
$$g(\tau - w) = \tau + a + b(\tau - w - c)\exp[-(\tau - w)/A] \quad (4.23)$$

em que $\tau = 1,3$, $a = 0,264$, $b = 13,4$, $c = 0,017$ e $A = 0,184$. Desta forma, as equações (4.22) e (4.23) modula a largura dos pulsos, descrevendo o tempo em que a

transição ficará no nível lógico alto (1) e no nível lógico baixo (0) e desempenha um papel fundamental no surgimento do caos na dinâmica da rede booleana autônoma composta por uma porta lógica buffer (copiadora).

A dinâmica da rede booleana autônoma descrita anteriormente, pode ser exibida através das simulações numéricas. A Figura (4.30), descreve a dinâmica da rede booleana autônoma (4.28), em que $y(t) = g(X(t))$ representa a dinâmica da rede e $y'(t) = g(X'(t))$ a dinâmica perturbada.

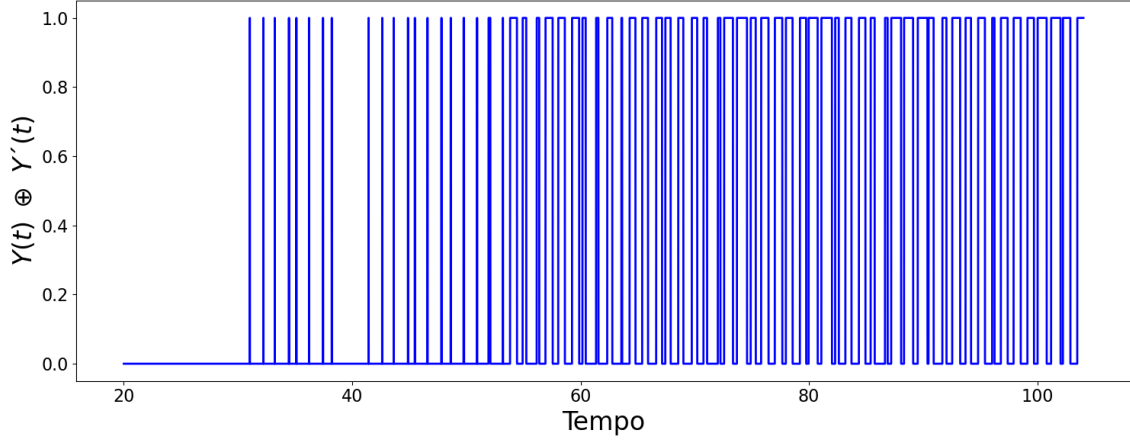
Figura 4.30: Evolução temporal da rede booleana autônoma (4.28)



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010)

A Figura (4.31) descreve, através da série temporal, o comportamento da diferença $y(t) = g(X(t))$ por $y'(t) = g(X'(t))$ da rede booleana autônoma ilustrada a divergência nas trajetórias da rede $y(t)$ e da $y'(t)$, evidenciando o momento em que as dinâmicas divergem.

Figura 4.31: Evolução temporal da diferença entre $y(t) = g(X(t))$ e $y'(t) = g(X'(t))$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010)

Desta forma, através da função $g(x)$ (função de degradação) que insere a rejeição dos pulsos curtos, DE S. CAVALCANTE *et al.* encontraram o mapa da dinâmica gerada pela equação (4.20) e o mapa unidimensional gerado pela porta buffer (copiadora).

Figura 4.32: Função $g(x)$ responsável pela modulação dos pulsos da porta lógica buffer (copiadora).

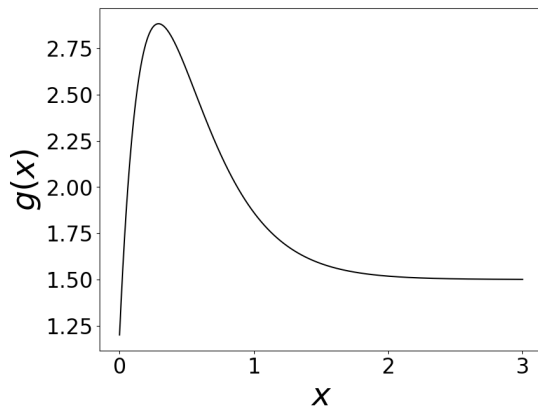
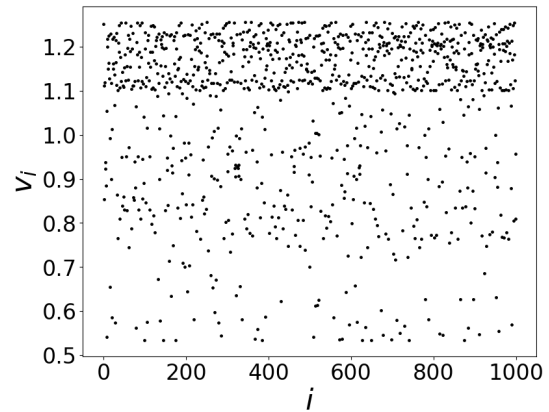


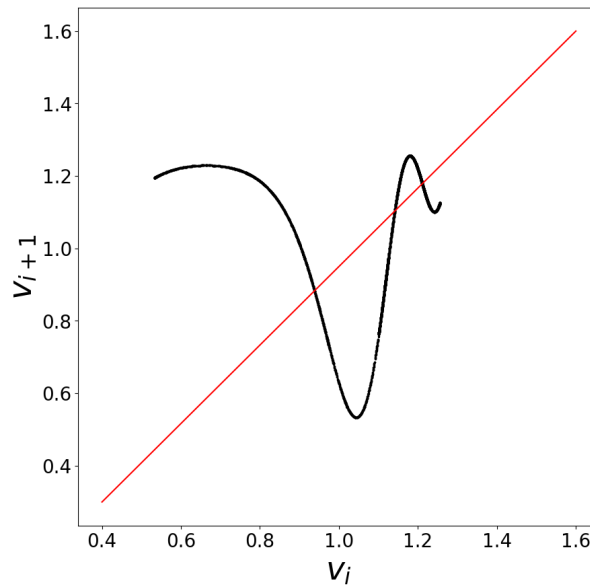
Figura 4.33: Mapa de estado, gerada pela dinâmica da porta buffer (copiadora).



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010)

Observemos que o mapa unidimensional gerado pelas larguras dos pulsos v_i e v_{i+1} não assume valores menores que 0.5, em outras palavras, a função $g(x)$, consegue rejeitar os pulsos curtos com largura $\tau_{spr} \approx 0,5$. A ausência de periodicidade no

Figura 4.34: Mapa da dinâmica gerada pela porta buffer (copiadora).



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010)

sistema foi constatado por DE S. CAVALCANTE *et al.*, ao executar o mapa por um milhão de vezes e sem qualquer evidência de periodicidade.

Usando a média das larguras dos pulsos DE S. CAVALCANTE *et al.* calcula o expoente de Lyapunov da série temporal gerada pela rede booleana (4.28). O sinal positivo do expoente de Lyapunov, confirma a sensibilidade exponencial as condições iniciais, sendo uma prova do caos determinístico.

4.2 Sincronização

No dicionário³ a palavra sincronizar significa: Tornar sincrônico; produzir sincronismo ou simultaneidade, para o nosso contexto, a sincronização existirá quando dois ou mais dispositivos apresentam os mesmos movimentos ao mesmo tempo. Essa ideia de combinar movimentos para sistemas dinâmicos cuja a dependência exponencial da(s) condição(ões) consegue exibir um comportamento caótico é aparentemente impossível. No entanto, no ano de 1990, PECORA e CARROLL apresentou um artigo que tem como título, Sincronização em Sistemas Caóticos (“*Synchronization in Chaotic Systems*”), neste artigo PECORA e CARROLL (1990) mostram que sistemas caóticos atuando na configuração mestre-escravo podem sincronizar entre si.

É nesse contexto que definimos, independente da abordagem (sistemas em tempo contínuo ou em tempo discreto), a definição matemática para a sincronização de sistemas caóticos:

³<https://michaelis.uol.com.br/busca?r=0f=0t=0palavra=sincronizar>

Definição 12. *Dados dois sistemas dinâmicos caóticos com condições iniciais $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}_0$. cujas trajetórias são descritas pelas equações diferenciais ordinárias.*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ e} \quad (4.24)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad (4.25)$$

em que, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial não linear, dizemos que os sistemas (4.24) e (4.25), estão sincronizados se $\|\mathbf{e}(t)\| = \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$

4.2.1 Sincronização completa por acoplamento via controle de feedback.

A sincronização através do controle de feedback, é uma ferramenta matemática que exerce influência na dinâmica do sistema. De forma geral, PECORA *et al.* (1997) considera dois sistemas caóticos idênticos, mas com condições iniciais diferentes. Desta forma, consideremos o sistema dinâmico com índice $m \in \mathbb{N}$ de sistema mestre, representado por (4.26),

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{f}(\mathbf{x}_m(t)), \quad (4.26)$$

cujo o vetor $\mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ representa as variáveis do sistema mestre e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função vetorial não linear. O seu correspondente, o sistema caótico escravo com índice $e \in \mathbb{N}$, representado por (4.27),

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{f}_e(\mathbf{x}_e(t)) + \alpha \mathbf{e}(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_e), \quad (4.27)$$

cujo o vetor $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ representa as variáveis do sistema escravo e $\alpha \mathbf{e}(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_e)$ é a informação passada do sistema mestre para o sistema escravo que tenta reestabelecer o vetor $\mathbf{x}_m(t)$, ou seja, $\alpha \mathbf{e}(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_e)$ é o parâmetro de acoplamento. Portanto $\alpha \mathbf{e}(t)$ representa o sinal transmitido ou o sinal de entrada do sistema escravo.

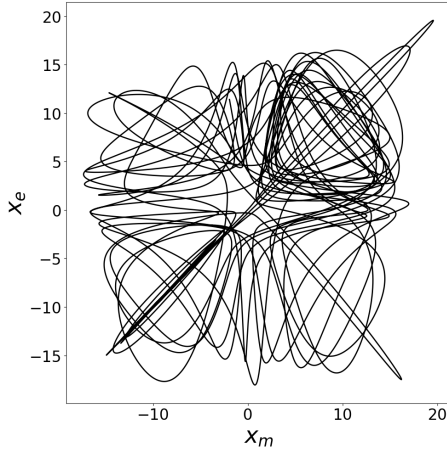
Exemplo 3. *Para dois sistemas de Lorenz, com os parâmetros $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$ e condições iniciais $(x_{m0}, y_{m0}, z_{m0}) = (1, 1, 1)$ e $(x_{e0}, y_{e0}, z_{e0}) = (1, 1.1, 1)$, podemos ter,*

$$\begin{cases} \dot{x}_m = 10(y_m - x_m) \\ \dot{y}_m = 28x_m - y_m - x_m z_m \\ \dot{z}_m = x_m y_m - 8/3 z_m \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_e = 10(y_e - x_e) + \alpha(x_m - x_e) \\ \dot{y}_e = 28x_e - y_e - x_e z_e \\ \dot{z}_e = x_e y_e - 8/3 z_e \end{cases}$$

temos que, $(x_{m0}, y_{m0}, z_{m0}) \neq (x_{e0}, y_{e0}, z_{e0})$, como já sabemos da sensibilidade exponencial do sistema as condições iniciais, as trajetórias divergem, no

entanto, se os sistemas conseguirem acoplar as trajetórias podem se tornar idênticas.

Figura 4.35: Projeção no plano (x_m, x_e) , com $\alpha = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em PECORA *et al.* (1997)

Figura 4.36: Série temporal obtidas nos sistemas mestre e escravo utilizando as equações de Lorenz com entrada $x_m(t)$ e $\alpha = 0$

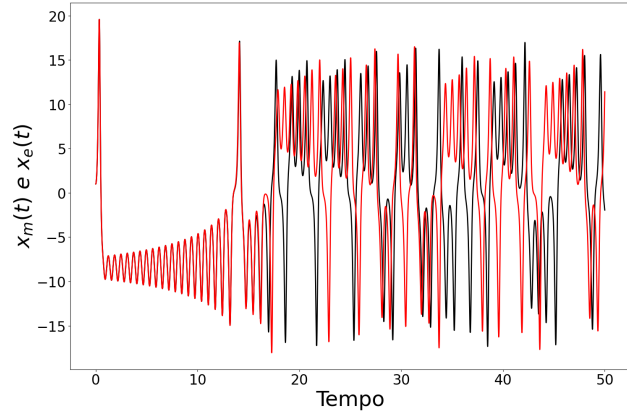
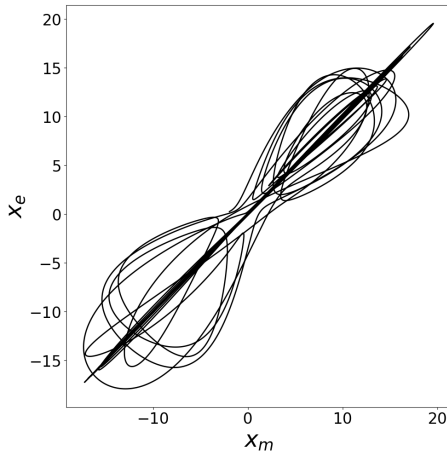


Figura 4.37: Projeção no plano (x_m, x_e) , com $\alpha = 5$.



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em PECORA *et al.* (1997)

Figura 4.38: Série temporal obtidas nos sistemas mestre e escravo utilizando as equações de Lorenz com entrada $x_m(t)$ e $\alpha = 5$

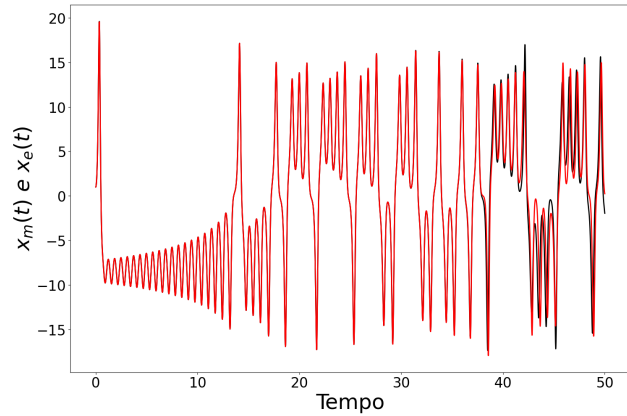


Figura 4.39: Projeção no plano (x_m, x_e) , com $\alpha = 10$.

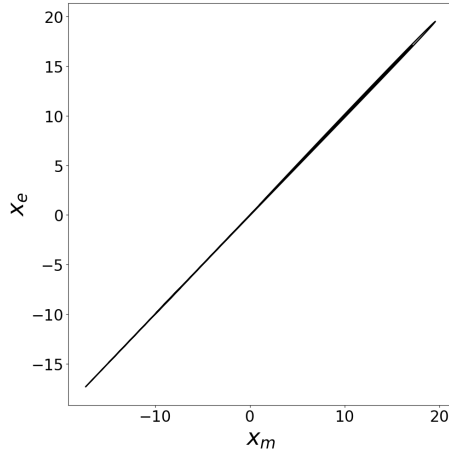
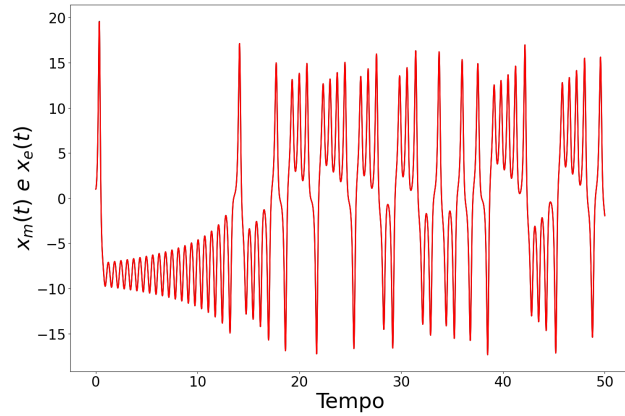


Figura 4.40: Série temporal obtidas nos sistemas mestre e escravo utilizando as equações de Lorenz com entrada $x_m(t)$ e $\alpha = 10$



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em PECORA *et al.* (1997)

4.2.2 Sincronização de sistemas discretos.

Muitos trabalhos e esforços têm sido despendidos no intuito de entender e desenvolver métodos que caracterizem a sincronização de sistemas dinâmicos em tempo discreto. Nesse contexto podemos citar os trabalhos de ALI (1997). Portanto, nesta seção apresentaremos o método conhecido por controle de feedback para sistemas dinâmicos em tempo discreto. Para exemplificar o método consideremos o mapa logístico. Desta forma nosso objetivo é sincronizar o mapa caótico,

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (4.28)$$

De fora semelhante ao mapa (4.28) construímos,

$$y_{n+1} = ry_n(1 - y_n) \quad (4.29)$$

em que n é o tempo discreto. Desta forma, o método de controle de feedback é realimentado através uma função $G(x_n, y_n)$ construída através das equações (4.28) e (4.30),

$$y_{n+1} = ry_n(1 - y_n) + G(x_n, y_n) \quad (4.30)$$

ou seja, as equações (4.28) e (4.30) descrevem mapas logísticos, onde são chamados de sistema mestre e sistema escravo, respectivamente. A sincronização do sistema escravo com o sistema mestre acontece quando a diferença dos sistemas tender a zero, em outras palavras, estamos dizendo que quando o tempo tende ao infinito,

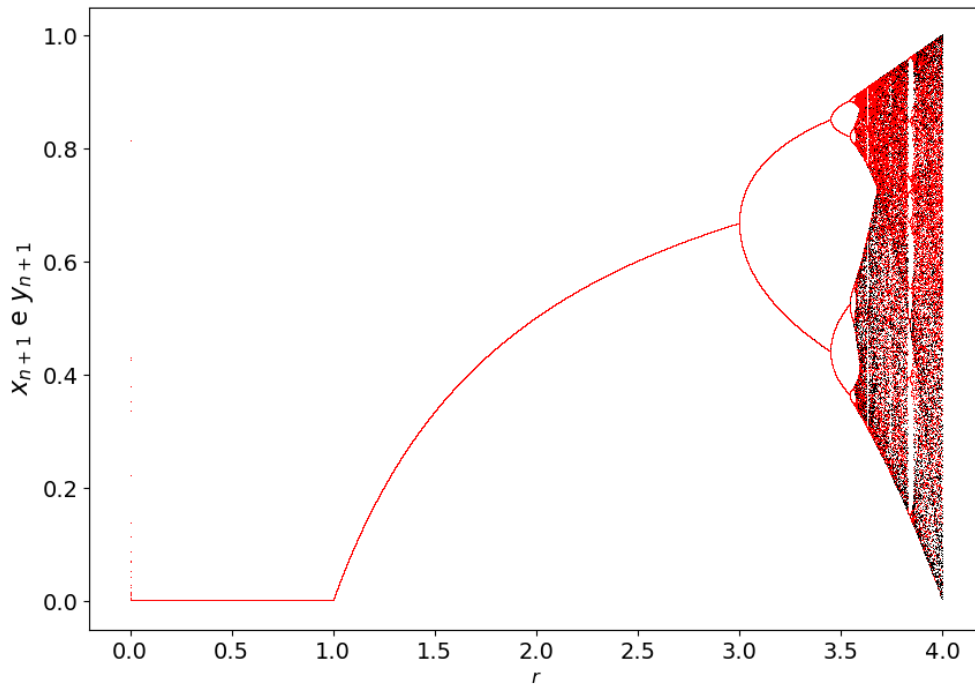
$G(x_n, y_n)$ tenderá a zero, conforme equação (4.31).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x_n, y_n) = 0 \quad (4.31)$$

em que, $G(x_n, y_n)$ poderá ser representada por uma função, $G(x_n, y_n) = (x_n - y_n)(2x_n - 1)$.

Por conseguinte, conseguimos visualizar, através do diagrama de fase do mapa logístico (Figura ??), que o sincronismo dos sistemas caóticos é um tanto inesperada, mesmo tendo iniciados arbitrariamente próximos.

Figura 4.41: Sobreposição dos diagramas de fase dos mapas logísticos mestre (em preto (4.28)) e escravo (em vermelho (4.31)).



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em ALI (1997)

Estendendo o método proposto por PECORA *et al.*(1997) para o caso discreto e procedendo semelhantemente às equações (4.26) e a (4.27), descrevemos um sistema de acoplamento mestre escravo em tempo discreto:

$$\mathbf{x}_{i+1}^m = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^m), \quad (4.32)$$

$$\mathbf{x}_{i+1}^e = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^e) + \alpha \mathbf{e}(\mathbf{x}_i^m - \mathbf{x}_i^e) \quad (4.33)$$

em que $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema ao passo que $i \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função não linear.

Exemplo 4. Para duas redes booleanas, com diferença na largura do pulso inicial de aproximadamente 10^{-4} .

$$\mathbf{v}_{i+1}^m = \mathbf{v}_i^m + \mathbf{g}(\tau + \mathbf{v}_i^m - \mathbf{g}(\tau - \mathbf{v}_i^m)) - \mathbf{g}(\tau - \mathbf{v}_i^m), \quad (4.34)$$

$$\mathbf{v}_{i+1}^e = \mathbf{v}_i^e + \mathbf{g}(\tau + \mathbf{v}_i^e - \mathbf{g}(\tau - \mathbf{v}_i^e)) - \mathbf{g}(\tau - \mathbf{v}_i^e) - \alpha \mathbf{e}(\mathbf{v}_i^m - \mathbf{v}_i^e) \quad (4.35)$$

em que a função g é a função (4.22).

De forma análoga ao exemplo 3 exibiremos a seguir algumas tentativas de sincronização, por esse método.

Figura 4.42: Projeção no plano (v_m, v_e) , com $\alpha = 0$

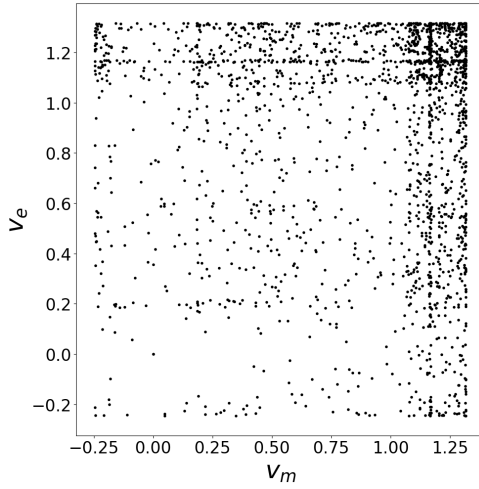
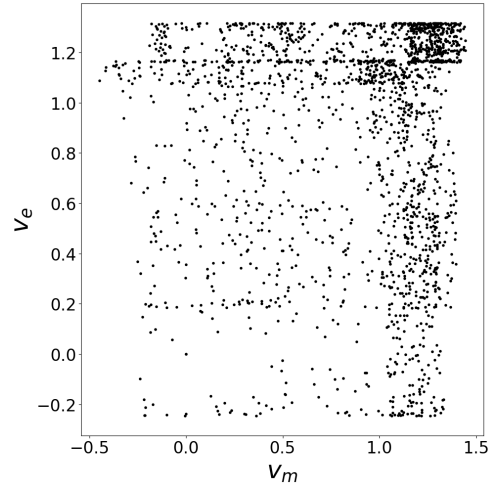


Figura 4.43: Projeção no plano (v_m, v_e) , com $\alpha = 0.2$



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em PECORA *et al.* (1997)

Figura 4.44: Projeção no plano (v_m, v_e) , com $\alpha = 0,5$

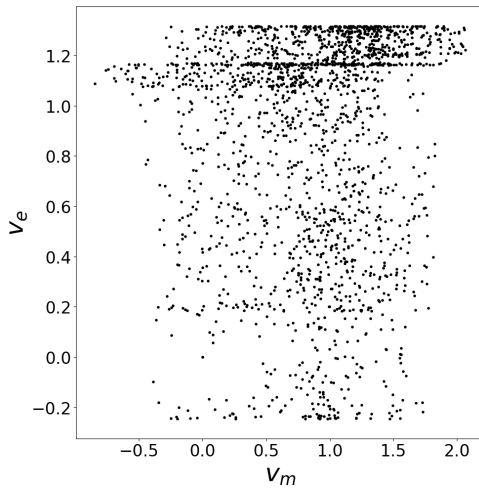
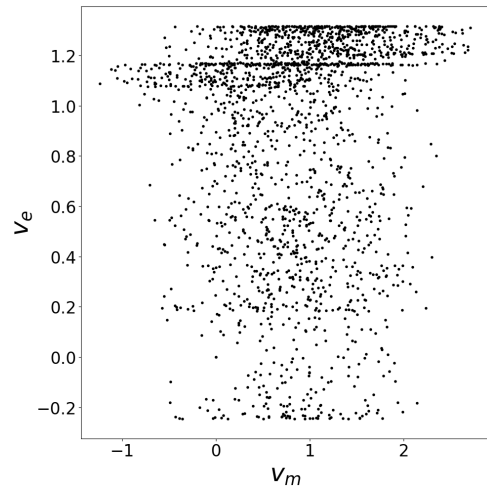


Figura 4.45: Projeção no plano (v_m, v_e) , com $\alpha = 0.7$



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em PECORA *et al.* (1997)

Figura 4.46: Projeção no plano (v_m, v_e) , com $\alpha = 0,9$

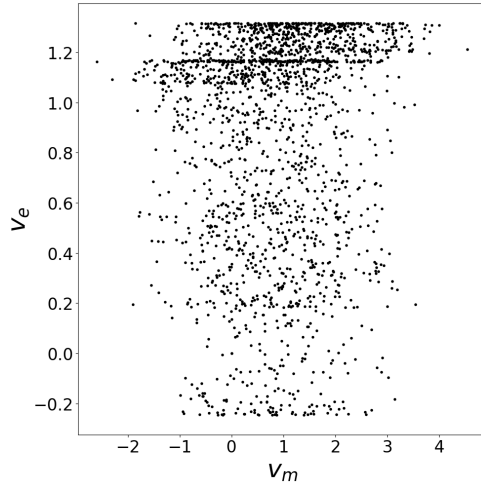
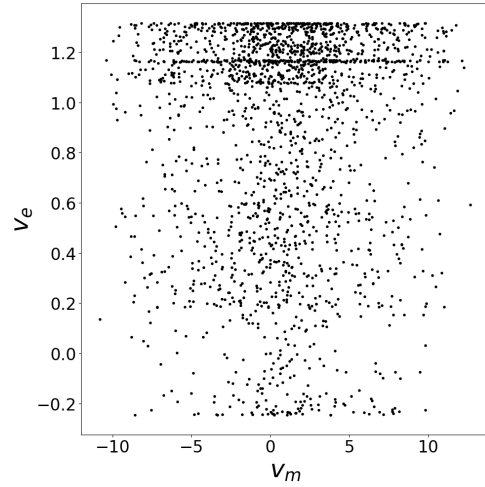


Figura 4.47: Projeção no plano (x_m, x_e) , com $\alpha = 1$



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em PECORA *et al.* (1997)

Por oportuno, vale salientar que a ocorrência ou não de sincronização de sistemas caóticos, mostra-se como uma ferramenta útil para o estudo e o desenvolvimento de aplicações e métodos de sincronização entre sistemas dinâmicos caóticos. Contudo a tentativa de sincronização, apresentada nesse trabalho, necessita de um estudo mais aprofundado dos métodos de sincronização.

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho estudamos, de forma sucinta, como as trajetórias de um sistema dinâmico evoluem com o passar do tempo. Então, começamos definindo os sistemas dinâmicos, em tempo contínuo, descritos por Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem. Nas seções, subsequentemente, focamos nos sistemas ditos não-lineares. Além dessa definição, introduzimos outras como ponto fixo, noções de estabilidade, função de Lyapunov e as características que um sistema deve ter para ser considerado caótico. Em seguida apresentamos o atrator estranho e o expoente de Lyapunov que se mostram ferramentas significativas nos estudos dos sistemas caóticos. Através do Sistema de Lorenz (1963) e da análise do modelo de crescimento populacional de MALTHUS (1798), Pierre Verhulst (1845) e MAY (1976), apresentamos e discutimos cuidadosamente a dinâmica em tempo contínuo e discreto, por meio dos conceitos de órbitas, conjunto invariante, diagrama de bifurcação, gráficos teia de aranha e mapas iterados com objetivo de fundamentar a compreensão concreta do caos.

Para descrever o comportamento das redes booleanas autônomas, realizamos estudos dos dispositivos que operam e trabalham com sinais lógicos, ou seja, as portas lógicas. Através da simulação numérica exibimos o comportamento da rede booleana proposta por KAUFFMAN (1969), das equações de atraso de GHIL e MULLHAUPT (1985) e de forma satisfatória reproduzimos resultados da literatura. Explorando o crescimento ilimitado da frequência de transições observado por ZHANG *et al.* (2009) constatamos, de forma qualitativa, em quais dispositivos lógicos poderíamos observar comportamento complexo. Por intermédio das séries temporais observamos a sensibilidade da rede booleana proposta por DE S. CAVALCANTE *et al.* (2010).

Para descrever o comportamento da rede booleana proposta por DE S. CAVALCANTE *et al.* implementamos simulações numéricas em que foi possível observar através do mapa de estado, representado pela Figura (4.34), a rejeição dos pulsos curtos e por intermédio do mapa unidimensional gerado pela dinâmica da rede composta por uma porta lógica Buffer, em que $g(x) = \tau + a + b(x - c)\exp[-(x)/A]$, com

$\tau = 1, 3$, $a = 0,264$, $b = 13.4$, $c = 0,017$ e $A = 0,184$, permitiu uma visualização do seu movimento caótico e através da média das larguras dos pulsos gerados pela dinâmica foi possível estimar o expoente de Lyapunov positivo, confirmando a sensibilidade exponencial as condições iniciais, sendo uma prova do caos determinístico.

Por último, através do conceito de sincronização caótico, utilizado por PECORA *et al.* (1997), acrescentamos ingredientes interessantes no estudo das redes booleanas autônomas. Surgindo novos horizontes na escolha dos métodos de sincronizações e aplicações dessa rede em sistemas de telecomunicação e segurança da informação.

Considerando a natureza explorativa dos estudos realizados nesse trabalho, uma proposta de trabalhos futuros seria a implementação prática da rede booleana autônoma, assim como, estudos comparativos do custo de diferentes metodologias de sincronização e o desenvolvimento da teoria subjacente ao estudo das redes booleanas autônomas que exibem comportamento caótico.

Referências Bibliográficas

- [1] AKUTSU, T., 2018, *Algorithms for Analysis, Inference, and Control of Boolean Networks*. WSPC. ISBN: 9813233427.
- [2] ALI, M. K., 1997, “Synchronization of a chaotic map in the presence of common noise”, *Physical Review E*, v. 55, n. 4 (apr), pp. 4804–4805. doi: 10.1103/physreve.55.4804.
- [3] ALLIGOOD, K. T., SAUER, T. D., YORKE, J. A., 2000, *Chaos*. Springer New York. ISBN: 0387946772.
- [4] BELLIDO-DÍAZ, M., JUAN-CHICO, J., ACOSTA, A., et al., 2000, “Logical modelling of delay degradation effect in static CMOS gates”, *IEE Proceedings - Circuits, Devices and Systems*, v. 147, n. 2, pp. 107. doi: 10.1049/ip-cds:20000197.
- [5] BOYCE, W., 2010, *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro, Grupo Gen - LTC. ISBN: 8521617569.
- [6] CHARLOT, N., CANADAY, D., POMERANCE, A., et al., 2021, “Hybrid Boolean Networks as Physically Unclonable Functions”, *IEEE Access*, v. 9, pp. 44855–44867. doi: 10.1109/access.2021.3066948.
- [7] CHEN, D., LI, S., WU, Q., 2018, “Rejecting Chaotic Disturbances Using a Super-Exponential-Zeroing Neurodynamic Approach for Synchronization of Chaotic Sensor Systems”, *Sensors*, v. 19, n. 1 (dec), pp. 74. doi: 10.3390/s19010074.
- [8] CHENG, D., QI, H., LI, Z., 2011, *Analysis and Control of Boolean Networks*. Springer-Verlag GmbH. ISBN: 0857290967. Disponível em: <https://www.ebook.de/de/product/12357281/daizhan_cheng_hongsheng_qi_zhiqiang_li_analysis_and_control_of_boolean_networks.html>.
- [9] COUDERT, O., “Timing and design closure in physical design flows”. In: *Proceedings International Symposium on Quality Electronic Design*. IEEE Comput. Soc. doi: 10.1109/isqed.2002.996796.

- [10] DE S. CAVALCANTE, H. L. D., GAUTHIER, D. J., SOCOLAR, J. E. S., et al., 2010, “On the origin of chaos in autonomous Boolean networks”, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 368, n. 1911 (jan), pp. 495–513. doi: 10.1098/rsta.2009.0235.
- [11] DEE, D., GHIL, M., 1984, “Boolean Difference Equations, I: Formulation and Dynamic Behavior”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 44, n. 1 (feb), pp. 111–126. doi: 10.1137/0144009.
- [12] DEVANEY, M. W. H. S. S. L., 2013, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier. doi: 10.1016/c2009-0-61160-0.
- [13] EDWARD OTT, O. E., 2008, *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press. ISBN: 0521010845. Disponível em: https://www.ebook.de/de/product/2451325/edward_ott_ott_edward_chaos_in_dynamical_systems.html.
- [14] FABIO OIKAWA DOS, S., 2007, *Dinâmica Caótica em um Circuito Eletrônico*. Discertação de mestrado.
- [15] FERRARA, N., 1994, *Caos : uma introducao*. Sao Paulo, Blucher. ISBN: 9788521200581.
- [16] FIEDLER-FERRARA, N., PRADO, C. P. C., 1994, *Caos: uma introducao*. Edgard Blucher.
- [17] FLOYD, T., 2000, *Sistemas digitais : fundamentos e aplicacoes (9a. ed.* City, Grupo A - Bookman. ISBN: 9788577801077.
- [18] FRIDMAN, E., 2014, *Introduction to time-delay systems : analysis and control*. Cham, Birkhauser. ISBN: 9783319093925.
- [19] GHIL, M., MULLHAUPT, A., 1985, “Boolean delay equations. II. Periodic and aperiodic solutions”, *Journal of Statistical Physics*, v. 41, n. 1-2 (oct), pp. 125–173. doi: 10.1007/bf01020607.
- [20] GHIL, M., ZALIAPIN, I., COLUZZI, B., 2008, “Boolean delay equations: A simple way of looking at complex systems”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 237, n. 23 (dec), pp. 2967–2986. doi: 10.1016/j.physd.2008.07.006.
- [21] GLASS, L., HILL, C., 1998, “Ordered and disordered dynamics in random networks”, v. 41, n. 6 (mar), pp. 599–604. doi: 10.1209/epl/i1998-00199-0.

- [22] GLEICK, J., 1990, *Caos a criacao de uma nova ciencia*. Rio de Janeiro, Campus. ISBN: 8570015941.
- [23] HALE, J. K., KOCAK, H., KOÇAK, H., 1996, *Dynamics and Bifurcations*. Springer New York. ISBN: 0387971416.
- [24] HILBORN, R., 2001, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. OXFORD UNIV PR. ISBN: 0198507232.
- [25] HOLGER KANTZ, T. S., 2006, *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press. ISBN: 0521529026.
- [26] INSTITUTE, N. H. G. R., 2019. “About the Talking Glossary of Genetic Terms”. Disponível em: <https://www.genome.gov/sites/default/files/media/files/2019-03/about_talking_glossary.pdf>. [Online; accessed 28-September-2021].
- [27] JUN MA, Z., RONG LIU, Z., ZHANG, G., 2007, “Generalized synchronization of discrete systems”, *Applied Mathematics and Mechanics*, v. 28, n. 5 (may), pp. 609–614. doi: 10.1007/s10483-007-0506-y.
- [28] KAUFFMAN, S., 1969, “Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets”, *Journal of Theoretical Biology*, v. 22, n. 3 (mar), pp. 437–467. doi: 10.1016/0022-5193(69)90015-0.
- [29] KAUFFMAN, S., 1993, *The origins of order : self-organization and selection in evolution*. New York, Oxford University Press. ISBN: 0195058119.
- [30] LAYEK, G., 2015, *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*. Springer India. doi: 10.1007/978-81-322-2556-0.
- [31] LI, Y., TANG, W. K. S., CHEN, G., 2005, “Hyperchaos evolved from the generalized Lorenz equation”, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, v. 33, n. 4, pp. 235–251. doi: 10.1002/cta.318.
- [32] LIU, D., WANG, Z., ZHANG, H., 2009, *Controlling Chaos*. Springer-Verlag GmbH. ISBN: 1848825234.
- [33] LYNCH, S., 2004, *Dynamical systems with applications using MATLAB*. Boston, Birkhauser. ISBN: 9780817643218.
- [34] LYNCH, S., 2018, *Dynamical Systems with Applications using Python*. Springer-Verlag GmbH. ISBN: 3319781448.

- [35] MALTHUS, T. R., 1798, *An Essay on the Principle of Population*. Macat Library. doi: 10.4324/9781912281176.
- [36] MAY, R. M., 1976, “Simple mathematical models with very complicated dynamics”, *Nature*, v. 261, n. 5560 (jun), pp. 459–467. doi: 10.1038/261459a0.
- [37] MESTL, T., LEMAY, C., GLASS, L., 1996, “Chaos in high-dimensional neural and gene networks”, v. 98, n. 1 (nov), pp. 33–52. doi: 10.1016/0167-2789(96)00086-3.
- [38] MONTEIRO, L., 2002, *Sistemas dinamicos*. Sao Paulo, Editora Livraria da Fisica. ISBN: 858832508X.
- [39] MOON, F. C., 1992, *Chaotic and fractal dynamics : an introduction for applied scientists and engineers*. New York, Wiley. ISBN: 9780471545712.
- [40] NICOLIS, G., 1995, *Introduction to nonlinear science*. Cambridge New York, Cambridge University Press. ISBN: 0521462282.
- [41] NOLTE, D. D., 2019, “Nonlinear Dynamics and Chaos”. In: *Introduction to Modern Dynamics*, Oxford University Press, pp. 111–153, sep. doi: 10.1093/oso/9780198844624.003.0004.
- [42] OLIVEIRA JUNIOR, G. F. D., 2016, *Estatística de falhas de sincronismo entre circuitos elétricos caóticos*. Tese de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/9547?locale=pt_BR>.
- [43] OTT, E., 2002, *Chaos in dynamical systems*. Cambridge, U.K. New York, Cambridge University Press. ISBN: 9780521811965.
- [44] OTT, E., GREBOGI, C., YORKE, J. A., 1996, “Controlling chaos”. In: *Controlling Chaos*, Elsevier, pp. 77–80. doi: 10.1016/b978-012396840-1/50032-1.
- [45] PECORA, L. M., CARROLL, T. L., 1990, “Synchronization in chaotic systems”, *Phys. Rev. Lett.*, v. 64 (Feb), pp. 821–824. doi: 10.1103/PhysRevLett.64.821. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.821>>.
- [46] PECORA, L. M., CARROLL, T. L., JOHNSON, G. A., et al., 1997, “Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 7, n. 4 (dec), pp. 520–543. doi: 10.1063/1.166278.

- [47] RABAEY, J., 1996, *Digital integrated circuits : a design perspective*. Upper Saddle River, N.J, Prentice Hall. ISBN: 0133942716.
- [48] ROSIN, D., 2015, *Dynamics of Complex Autonomous Boolean Networks*. Springer-Verlag GmbH. ISBN: 3319135775.
- [49] ROSIN, D. P., RONTANI, D., GAUTHIER, D. J., et al., 2013, “Experiments on autonomous Boolean networks”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 23, n. 2 (jun), pp. 025102. doi: 10.1063/1.4807481.
- [50] SAVI, M. A., 2017, *Dinâmica Não-Linear e Caos*. ISBN: 978-85-7650-554-9.
- [51] SCHOLL, E., 2008, *Handbook of chaos control*. Weinheim, Wiley-VCH. ISBN: 9783527406050.
- [52] SILVA, G. V. M., 2005, *Controle não linear*.
- [53] SOTOMAYOR, J., 1979, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA,.
- [54] STROGATZ, S. H., 2014, *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Taylor Francis Inc. ISBN: 0813349109.
- [55] TAVAKOL, R., 1997, “Introduction to dynamical systems”. In: *Dynamical Systems in Cosmology*, Cambridge University Press, pp. 84–104, jan. doi: 10.1017/cbo9780511524660.006.
- [56] TOCCI, R., WIDMER, N., MOSS, G., *Sistemas Digitais Princípios E Aplicações*. PEARSON BRASIL. ISBN: 9788576059226.
- [57] UPADHYAY, R., 2014, *Introduction to mathematical modeling and chaotic dynamics*. Boca Raton, CRC Press. ISBN: 9781439898864.
- [58] WALKER, C. C., ASHBY, W. R., 1966, “On temporal characteristics of behavior in certain complex systems”, v. 3, n. 2 (may), pp. 100–108. doi: 10.1007/bf00299903.
- [59] WIKIPÉDIA, 2021. “Lyapunov exponent — Wikipédia, the free encyclopedia”. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov_exponent>. [Online; accessed 28-April-2021].
- [60] WOLF, A., SWIFT, J. B., SWINNEY, H. L., et al., 1985, “Determining Lyapunov exponents from a time series”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 16, n. 3 (jul), pp. 285–317. doi: 10.1016/0167-2789(85)90011-9.

- [61] ZHANG, R., DE S.CAVALCANTE, H. L. D., GAO, Z., et al., 2009, “Boolean chaos”, *Physical Review E*, v. 80, n. 4 (oct), pp. 045202. doi: 10.1103/physreve.80.045202.

Apêndice A

Álgebra Booleana

Neste apêndice, apresentaremos a definição e o teorema da álgebra booleana

Definição 13. *Uma Álgebra Booleana é uma n -uplas $\{B, +, \cdot\}$, em que*

- *B é um conjunto de elementos;*
- *$+$ e $\cdot$ são operadores binários aplicadas sobre os elementos de B .*

que satisfazem os seguintes postulados:

Postulado 1. *Se $a, b \in B$, então*

$$I. \ a + b = b + a;$$

$$II. \ a \cdot b = b \cdot a$$

ou seja, “+” e “.”, soma e multiplicação são comutativas.

Postulado 2. *Se $a, b, c \in B$, então*

$$I. \ a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c);$$

$$II. \ a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Postulado 3. *O conjunto B tem dois elementos de identidades distintas, denotaremos como 0 e 1, tal que para cada elemento de B*

$$I. \ 0 + a = a + 0 = a;$$

$$II. \ 1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

Observação A.1. *Os elementos 0 e 1 são chamados elemento aditivo de identidade e elemento multiplicativo de identidade, respectivamente (estes elementos não devem ser confundidos com os números inteiros 0 e 1).*

Postulado 4. *Para todo elemento de $a \in B$, existe um elemento $\bar{a}$ chamado complemento de a , tal que*

$$I. a + \bar{a} = 1;$$

$$II. a.\bar{a} = 0.$$

Por oportuno, vale salientar que os símbolos “+” e “.” não são as operações aritméticas de soma e multiplicação respectivamente, mas representam a operação “OR” (OU) e “AND” (E), respectivamente.

Teorema A.1 (Princípio da Dualidade). *Toda identidade algébrica dedutível dos postulados de uma álgebra booleana permanece válida se*

I. as operações + e . são intercambiadas entre si em toda a expressão e ;

II. os elementos de identidade 0 e 1 também são intercambiados entre si em toda a expressão.

Demonstração. A Demonstração decorre do fato que, para cada um dos postulados, há outro (o dual), que é obtido da permutando + e ., bem como 0 e 1. $\square$

Por oportuno, destacamos a utilidade do Teorema A.1 na redução do número de teoremas que devem ser provados.

Teorema A.2. *Todo elemento de B tem um complementar único.*

Demonstração. Admitamos que $a \in B$ e supondo que $\bar{a}_1$ e $\bar{a}_2$ sejam complementos de a . Utilizando os postulados, podemos realizar as seguintes transformações:

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_1 &= \bar{a}_1.1 && \text{pelo postulado 3} \\
 &= \bar{a}_1.(a + \bar{a}_2) && \bar{a}_2 \text{ é um complemento de } a \\
 &= \bar{a}_1.a + \bar{a}_1.\bar{a}_2 && \text{postulado 2} \\
 &= a.\bar{a}_1 + \bar{a}_1.\bar{a}_2 && \text{postulado 1} \\
 &= 0 + \bar{a}_1.\bar{a}_2 && \bar{a}_1 \text{ é um complemento de } a \\
 &= \bar{a}_1.\bar{a}_2 && \text{postulado 3}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

De forma análoga, repetindo todos os passos de A.1 para $\bar{a}_2$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_2 &= \bar{a}_2.\bar{a}_1 \\
 &= \bar{a}_1.\bar{a}_2,
 \end{aligned}$$

portanto $\bar{a}_2 = \bar{a}_1$. $\square$

Teorema A.3. *Para qualquer $a \in B$*

I. $a + 1 = 1;$

II. $a.0 = 0.$

Demonstração. Usando os postulados, podemos realizar as seguintes transformações
Caso(I)

$a + 1 = 1.(a + 1)$	<i>pelo</i>
$= (a + \bar{a}).(a + 1)$	<i>postulado 3</i>
$= a + (\bar{a}.1)$	<i>postulado 4</i>
$= a + \bar{a}$	<i>postulado 2</i>
$= 1$	<i>postulado 3</i>
	<i>postulado 4</i>

Caso (II)

$a.0 = 0 + (a.0)$	<i>pelo</i>
$= (a.\bar{a}) + (a.0)$	<i>postulado 3</i>
$= a.(\bar{a} + 0)$	<i>postulado 4</i>
$= a.\bar{a}$	<i>postulado 2</i>
$= 0$	<i>postulado 3</i>
	<i>postulado 4</i>

□

Teorema A.4. *O complemento de 1 é 0, e vice-versa, ou seja,*

I. $\bar{0} = 1;$

II. $\bar{1} = 0.$

Demonstração. Pelo Teorema A.3,

$$0 + 1 = 1 \text{ e}$$

$$0.1 = 0$$

uma vez que, pelo Teorema A.2 o complemento de um elemento é único.

□

Teorema A.5 (Lei da Idempotência). *Para todo $a \in B$*

I. $a + a = a;$

II. $a.a = a$.

Caso (I)

$$\begin{array}{ll}
 & \text{pelo} \\
 a + a &= (a + a).1 & \text{postulado 3} \\
 &= (a + a).(a + \bar{a}) & \text{postulado 4} \\
 &= (a + (a.\bar{a})) & \text{postulado 2} \\
 &= a + 0 & \text{postulado 4} \\
 &= a & \text{postulado 3}
 \end{array}$$

O caso (II) poderá ser provado pela caso (I) em conjunto com o Teorema A.1 (princípio da dualidade).

Teorema A.6 (Lei da Involução). *Para todo $a \in B$*

$$a = \overline{(\bar{a})} \quad (\text{A.2})$$

Demonstração. A partir da definição de complemento, $\overline{(\bar{a})}$ e a são ambos complementos de $\bar{a}$. Mas pelo Teorema A.2, o complemento de um elemento é único, o que prova o teorema. $\square$

Teorema A.7 (Lei da Absorção). *Para todo par de elementos $a, b \in B$*

I. $a + a.b = a$;

II. $a.(a + b) = a$.

Demonstração. Caso (I)

$$\begin{array}{ll}
 & \text{pelo} \\
 a + a.b &= (a.1) + a.b & \text{postulado 3} \\
 &= a.(1 + b) & \text{postulado 1} \\
 &= a.(b + 1) & \text{postulado 1} \\
 &= a.1 & \text{Teorema A.3} \\
 &= a & \text{postulado 3}
 \end{array}$$

O caso (II) poderá ser provado pela caso (I) em conjunto com o Teorema A.1 (princípio da dualidade).

$\square$

Teorema A.8. Para todo par de elementos $a, b \in B$

$$I. a + \bar{a}.b = a + b;$$

$$II. a.(\bar{a} + b) = a.b.$$

Demonstração. Caso (I)

$$\begin{aligned} a + \bar{a}.b &= (a + \bar{a}).(a + b) && \text{pelo postulado 2} \\ &= 1.(a + b) && \text{postulado 4} \\ &= a + b && \text{postulado 3} \end{aligned}$$

O caso (II) poderá ser provado pela caso (I) em conjunto com o Teorema A.1 (princípio da dualidade).

□

Lema A.1. Para todos $a, b, e c \in B$, $a.[(a + b) + c] = a.$

Demonstração.

$$\begin{aligned} a.[(a + b) + c] &= [(a + b) + c].a && \text{pelo postulado 1} \\ &= 1.(a + b) && \text{postulado 4} \\ &= a + b && \text{postulado 3} \end{aligned}$$

□

Teorema A.9. Em uma álgebra booleana, cada uma das operações binárias $(+)$ e $(.)$ é associativa, ou seja, para todo $a, b, c \in B$

$$I. a + (a + c) = (a + b) + c;$$

$$II. a.(b.c) = (ab).c.$$

Teorema A.10 (Lei de DeMorgan). Para todo par de elementos $a, b \in B$

$$I. \overline{(a + b)} = \bar{a}.\bar{b};$$

$$II. \overline{(a.b)} = \bar{a} + \bar{b}.$$

Demonstração. Primeiramente demonstraremos que $(a + b)$ é o complemento de $\bar{a}.\bar{b}$. Pelo Postulado 4 em conjunto com Teorema A.2 (unicidade), que equivalem a mostrar que $(a + b) + \bar{a}.\bar{b} = 1$ e que $(a + b).(\bar{a}.\bar{b}) = 0$, obteremos

$$\begin{aligned}
 (a + b) + \bar{a}.\bar{b} &= [(a + b) + \bar{a}].[(a + b) + \bar{b}] && \text{pelo postulado 2} \\
 &= [(b + a) + \bar{a}].[(a + b) + \bar{b}] && \text{postulado 1} \\
 &= [b + (a + \bar{a})].[(a + (b + \bar{b}))] && \text{associatividade} \\
 &= (b + 1).(a + 1) && \text{postulado 4} \\
 &= 1.1 && \text{Teorema A.2} \\
 &= 1 && \text{Teorema A.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a + b).(\bar{a}.\bar{b}) &= (\bar{a}.\bar{b}).(a + b) && \text{pelo comutatividade} \\
 &= (\bar{a}.\bar{b})a + (\bar{a}.\bar{b}).b && \text{distributividade} \\
 &= (\bar{b}.\bar{a})a + (\bar{a}.\bar{b}).b && \text{comutatividade} \\
 &= \bar{b}.(\bar{a}.a) + \bar{a}.(\bar{b}.b) && \text{associatividade} \\
 &= \bar{b}.(a.\bar{a}) + \bar{a}.(b.\bar{b}) && \text{comutatividade} \\
 &= \bar{b}.0 + \bar{a}.0 && \text{postulado 4} \\
 &= 0 + 0 && \text{Teorema A.2} \\
 &= 0 && \text{Teorema A.4}
 \end{aligned}$$

□

Por dualidade $\overline{(a.b)} = \bar{a} + \bar{b}$.