

**Universidade Federal da Paraíba**  
**Centro de Ciências Exatas e da Natureza**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado em Matemática**

**Sobre o Teorema da Fibrção de  
Lê-Milnor e a Topologia da Fibra**

**Antonia Charmilla Freire Batista**

JOÃO PESSOA – PB  
ABRIL DE 2023

**Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática**

# **Sobre o Teorema da Fibração de Lê-Milnor e a Topologia da Fibra**

por

**Antonia Charmilla Freire Batista**

sob a orientação de

**Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto**

e coorientação de

**Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira**

**João Pessoa – PB  
Abril de 2023**

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

B333s Batista, Antonia Charmilla Freire.

Sobre o teorema da fibração de Lê-Milnor e a topologia da fibra / Antonia Charmilla Freire Batista.

- João Pessoa, 2023.

96 f. : il.

Orientação: Aurélio Menegon Neto.

Coorientação: Miriam da Silva Pereira.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Fibrção de Lê-Milnor. 3. Topologia da fibra. 4. Estratificação de Whitney. 5. Número de Milnor. I. Menegon Neto, Aurélio. II. Pereira, Miriam da Silva. III. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

# Sobre o Teorema da Fibrção de Lê-Milnor e a Topologia da Fibra

por

**Antonia Charmilla Freire Batista**

Dissertaçõ apresentada ao Corpo Docente do Programa de Põs-Graduaçõ em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtençõ do título de Mestre em Matemática.

**Área de Concentraçõ:** Geometria/ Topologia

**Aprovada em 12 de Abril de 2023.**

**Banca Examinadora:**

Documento assinado digitalmente  
 AURELIO MENEGON NETO  
Data: 17/04/2023 11:23:14-0300  
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

---

**Profª. Drª. Aurélio Menegon Neto – UFPB**  
**(Orientador)**

Documento assinado digitalmente  
 MICHELLE FERREIRA ZANCHETTA MORGADI  
Data: 17/04/2023 11:45:09-0300  
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

---

**Profa. Dra. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado – UNESP**  
**(Examinador Externo)**

Documento assinado digitalmente  
 THAIS MARIA DALBELO  
Data: 17/04/2023 12:08:56-0300  
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

---

**Profa. Dra. Thaís Maria Dalbelo – UFSCar**  
**(Examinador Externo)**

“Os rios não bebem sua própria água; as árvores não comem seus próprios frutos. O sol não brilha para si mesmo; e as flores não espalham sua fragrância para si. Viver para os outros é uma regra da natureza. (...) A vida é boa quando você está feliz; mas a vida é muito melhor quando os outros estão felizes por sua causa”.

**Papa Francisco**

“A beleza da matemática só se mostra para os seguidores mais pacientes”.

**Maryam Mirzakhani**

# Agradecimentos

Ao fim desse trabalho meu coração transborda de gratidão. Agradeço a Deus, causa primária de todas as coisas, a Jesus minha eterna fonte de inspiração.

A minha família pelo apoio, em especial aos meus pais, por todo o sacrifício que fizeram para me proporcionar uma boa educação. Amo vocês.

Ao meu Orientador, professor Aurélio, por ter me apresentado ao lindo mundo da Teoria de Singularidades. Sou muito grata por você ter me proporcionado o seu tempo e ter compartilhado comigo seu conhecimento. Obrigada por ter me incentivado a me mudar para João Pessoa, foi uma experiência muito enriquecedora em todos os sentidos. Com certeza, você foi um dos melhores professores com que tive contato.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para o meu conhecimento durante o mestrado, em especial: Jacqueline Rojas, Elizandra Gloss, Evelina Shamarova, Rui Tojeiro e Marco Antonio.

Agradeço ao meu Tio Luiz e a Edmar por todos os conselhos, ensinamentos e por me proporcionarem de forma direta ou indireta a viver muitas experiências.

Agradeço aos meus amigos Matheus e Gustavo por tornarem os dias mais leves em João Pessoa, por todas as nossas noites de diversão na cidade (saudades hahaha...) e aos dias de sol na praia. Vocês foram muito necessários. Agradeço também a todos os outros colegas que fiz no PPGMAT-UFPB.

Ao professor Edvater Sena, por ter plantado em mim essa semente de partir para a pós-graduação. Obrigada pelas dicas e por sempre me escutar.

Agradeço as professoras Miriam Pereira, Michelle Morgado e Thaís Dalbelo por terem dedicado seus respectivos tempos e com isso dado valiosas dicas que acrescentaram no meu trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Essa vitória é um pouco de cada um de vocês.

# Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo mostrar o Teorema de Fibrção Local de Lê-Milnor e dar algumas caracterizações algébricas e topológicas para o número de Milnor  $\mu$ . O resultado central afirma que  $\mu$  é igual ao número de Betti na dimensão média da fibra. Abordamos o caso clássico do Teorema de Fibrção estudada por J. Milnor e a generalização apresentada por Lê D.T., para o caso de germes de funções analíticas definidas no conjunto analítico complexo singular  $X$ , sendo o caso mais geral aquele em que consideramos  $f(X, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  uma função analítica com singularidade possivelmente não isolada em  $\underline{0}$ . Além disso, discutimos alguns resultados que dizem respeito a topologia da fibra e do link. Para facilitar a compreensão da teoria mais geral, optamos por apresentar exemplos resolvidos ao longo de determinados capítulos.

**Palavras-chave:** Fibrção na Esfera, Fibrção de Lê-Milnor, Topologia da Fibra, Estratificação de Whitney, Número de Milnor.

# Abstract

The main goal of this work is to show the Lê-Milnor local fibration theorem and to give some algebraic and topological characterizations for the Milnor number  $\mu$ . The main result states that  $\mu$  is equal to the Betti number of fiber in middle dimension. We approach the classic case of the fibration theorem studied by J. Milnor and the generalization presented by Lê D.T., for the case of germs of analytic functions defined in the singular complex analytic set  $X$ , the most general case being the one in which we consider  $f(X, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  function analytic with possibly non-isolated singularity at  $\underline{0}$ . Furthermore, we discuss some results concerning the topology of the fibrations in the sphere and in the "Milnor tube". To facilitate the understanding of the more general theory, we chose to present solved examples throughout certain chapters.

**Keywords:** Sphere Fibration, Lê-Milnor Fibration, Topology of the Fiber, Whitney Stratification, Milnor Number.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Variedades Suaves . . . . .	5
1.1.1 Definições . . . . .	5
1.1.2 O Teorema da Função Inversa . . . . .	9
1.1.3 Imersões . . . . .	10
1.1.4 Submersões . . . . .	12
1.1.5 Teorema do Posto Local . . . . .	13
1.1.6 Espaço Projetivo Real e Variedade de Grassmann . . . . .	14
1.1.7 Transversalidade e os Pontos Críticos de uma Restrição . . . . .	14
1.2 Fibrados Localmente Triviais e Lema de Ehresmann . . . . .	19
1.3 Topologia Algébrica . . . . .	24
1.3.1 Homotopia e Tipo de Homotopia . . . . .	24
1.3.2 Complexo CW . . . . .	27
1.3.3 Suspensão e o Cone de um Espaço Topológico . . . . .	29
1.3.4 Soma Wedge de Espaços Topológicos . . . . .	29
1.3.5 Homologia Simplicial . . . . .	30
1.3.6 Característica de Euler . . . . .	36
1.4 O Teorema do ponto fixo de Lefschetz . . . . .	37
1.5 O Grau Topológico de uma Aplicação . . . . .	38
<b>2 Conjuntos Analíticos Complexos</b>	<b>39</b>
2.1 Fatos Elementares sobre Conjuntos Analíticos Complexos . . . . .	39
2.2 Estrutura Cônica Local . . . . .	43
2.3 Lema de Seleção da Curva . . . . .	52
<b>3 Estratificação de Whitney e Condição <math>a_f</math> de Thom</b>	<b>53</b>
3.1 Estratificação e Condição da Fronteira . . . . .	53
3.2 Estratificação de Whitney . . . . .	55

---

3.3	Condição $a_f$ de Thom . . . . .	63
<b>4</b>	<b>O Teorema da Fibração Local de Lê-Milnor</b>	<b>65</b>
4.1	Background sobre Fibrações de Lê-Milnor . . . . .	66
4.2	Teorema da Fibração Local de Lê-Milnor para Singularidades Isoladas . . .	71
4.3	Monodromias Geométricas de Fibrações . . . . .	72
4.4	Teorema da Fibração Local para Singularidades Não Isoladas . . . . .	73
<b>5</b>	<b>O Número de Betti da Fibra na Dimensão Média</b>	<b>76</b>
5.1	Fibração de Milnor na Esfera . . . . .	76
5.2	A Topologia da Fibra e do Link $K_f$ . . . . .	81
5.3	O Número de Betti da Fibra na Dimensão Média . . . . .	83
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>88</b>

# Introdução

O Teorema de Fibração para aplicações analíticas próximo a um ponto crítico é uma ferramenta atribuída a Milnor e apresentada em 1968 no livro *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Este resultado é considerado uma das bases para a Teoria de Singularidades. Com ele, é possível analisar localmente a estrutura topológica da fibra singular a partir da topologia das fibras não singulares. No caso complexo, esse resultado nos diz: *Dado uma função analítica complexa  $f : \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $f(\underline{0}) = 0$ , existe um número real suficientemente pequeno  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,*

$$\frac{f}{\|f\|} : \mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1} \setminus K_f \rightarrow \mathbb{S}^1 \quad (1)$$

*é a projeção de um fibrado suave localmente trivial, onde  $\mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1}$  é a esfera  $(2N + 1)$ -dimensional de raio  $\varepsilon$ , centrada na origem e  $K_f := f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1}$  é chamado o link de  $V(f) := f^{-1}(0)$ .*

O resultado em (1) é tido como a primeira versão do Teorema de Fibração de Milnor que é também conhecido como fibração de Milnor na esfera. É importante ressaltar a existência de uma segunda versão desse Teorema, que generaliza essa versão dada por Milnor e que garante a existência da fibração no "tubo de Milnor". Esse último, foi obtida por D.T. Lê e nos diz: *Dado um conjunto analítico complexo  $X \subset \mathbb{C}^N$ , com singularidade isolada em  $\underline{0}$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica, com  $f(\underline{0}) = 0$ , existem  $\varepsilon$  e  $\delta$  positivos suficientemente pequenos, tal que temos um fibrado suave localmente trivial*

$$\mathbb{B}_\varepsilon \cap X \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\delta^*) \rightarrow \mathring{\mathbb{D}}_\delta^*,$$

*induzido por  $f$ .*

Na literatura, o Teorema obtido por Lê é também conhecido como o Teorema de Lê-Milnor. É importante salientar que as fibras dessas duas versões são difeomorfas (veja em [13] Teorema 5.2).

Em [13], Milnor mostrou resultados sobre a topologia do link de  $V(f)$  e sobre as fibras  $F_\theta$ . Destacamos o Teorema que nos diz que a fibra  $F_\theta$  tem o tipo de homotopia de um buquê de esferas  $\mathbb{S}^N \wedge \dots \wedge \mathbb{S}^N$ , sendo o número de esferas do buquê chamado, posteriormente, o número de Milnor e denotado por  $\mu$ . O número de Milnor é um importante invariante

---

topológico e desempenha um papel fundamental na Teoria de Singularidades, pois através dele obtêm-se informações topológicas e geométricas de  $f$ .

O principal objetivo do trabalho consiste em mostrar o Teorema de fibração local de Lê-Milnor e dar algumas caracterizações algébricas e topológicas para o número de Milnor  $\mu$ . O resultado central está baseado em [13] e afirma que  $\mu$  é igual ao número de Betti na dimensão média da fibra, dessa forma o grupo de homologia  $H_n(F_\theta)$  é um grupo abeliano livre de torção com posto  $\mu$ .

Para isso, estruturamos o trabalho da seguinte forma:

No capítulo 1, apresentamos conceitos básicos e resultados clássicos sobre topologia diferencial com foco nas variedades suaves, topologia algébrica, além de uma breve introdução ao Teorema do ponto fixo de Lefschetz.

No capítulo 2, fazemos um estudo sobre conjuntos analíticos complexos, que são definidos como zero comuns de funções analíticas na vizinhança de cada ponto  $x$ . O principal resultado do capítulo consiste em mostrar o Teorema da estrutura cônica local, que nos dará uma característica topológica do conjunto analítico em termos do seu link. Além disso, para facilitar a compreensão da teoria apresentamos alguns exemplos. Finalizamos esse capítulo enunciando o Teorema de Seleção da Curva.

Para o estudo de singularidades de conjuntos analíticos, desenvolvido no capítulo 3, é utilizado a teoria de estratificações, que consiste em particionar um conjunto analítico singular em variedades suaves disjuntas, chamadas de estratos. Para a melhor compreensão do leitor, abordamos as condições da estratificação de Whitney através de exemplos. Além disso, descrevemos um tipo de propriedade para estratificações de funções analíticas definidas sobre um conjunto analítico complexo  $X$ , chamada condição  $a_f$  de Thom. O principal resultado do capítulo é o Teorema de Hironaka [7], que nos diz: *Para toda função analítica  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , existe uma estratificação de Whitney de  $X$  adaptada a  $f$ , que satisfaz a condição  $a_f$  de Thom com respeito a  $f$ .*

No capítulo 4, nos dedicamos a estudar o Teorema de Fbração Local de Lê-Milnor. Como já foi comentado, essa é uma versão mais geral do Teorema de Fbração na Esfera. Apresentamos duas versões, a primeira considera  $X$  e  $f$  com singularidade isolada em  $\underline{0}$ , a segunda versão é mais completa e admite  $f$  com singularidade possivelmente não isolada em  $\underline{0}$ . Para mostrar ambos os Teoremas, definimos bola de Milnor e apresentamos três Lemas que nos darão suporte juntamente com o Lema de Ehresmann. No Teorema em que consideramos  $f$  com singularidade possivelmente não isolada, foi também necessário utilizarmos o Teorema de Hironaka.

Por fim, no capítulo 5, abordamos a topologia da fibra  $F_\theta$  e do link  $K_f$ . Com isso, foi possível definir topologicamente o número de Milnor  $\mu$  e desenvolver alguns aspectos algébricos para esse importante invariante. A necessidade de termos formas algébricas de

---

calcular o número de Milnor, faz-se relevante pois muitas vezes não é simples de obtermos através de métodos topológicos. Nesse capítulo, atribuímos a  $\mu$  as seguintes equivalências algébricas:

- É a multiplicidade de um ponto crítico isolado;
- É igual ao grau de  $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ , onde  $f : \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função polinomial complexa e  $\nabla f$  representa o  $\overline{\mathbf{grad}(f)}$  (conjugado complexo de  $\mathbf{grad} f(z)$  em  $\mathbb{C}^{N+1}$ );
- Coincide com o número de Betti na dimensão média da Fibra, principal resultado do capítulo.

# Capítulo 1

## Preliminares

Apresentamos neste capítulo definições e resultados clássicos sobre variedades suaves, fibrados localmente triviais e topologia algébrica, que serão necessários para a compreensão dos capítulos subsequentes, além disso, fixamos notações e fazemos exemplos que facilitarão a compreensão da teoria mais geral.

As principais referências são: [5], [6], [8] e [11]

### 1.1 Variedades Suaves

De maneira intuitiva, as variedades suaves são espaços que localmente são como espaços euclidianos. O estudo da teoria das variedades suaves é feito através de uma extensão natural das ferramentas do cálculo diferencial, de forma que obtemos informações e propriedades a respeito desses espaços geométricos mais gerais. As principais referências são: [5] e [11].

#### 1.1.1 Definições

Iniciamos nosso estudo com o conceito de *espaço euclidiano de dimensão  $n$* , que é o produto cartesiano de  $n$  fatores iguais a  $\mathbb{R}$ :

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}.$$

Os pontos de  $\mathbb{R}^n$  são, pois, todas as  $n$ -listas  $x = (x_1, \dots, x_n)$  cujas coordenadas  $x_1, \dots, x_n$  são números reais.

Os vetores  $e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, \dots, 0, 0)$ , ...,  $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$  constituem a *base natural ou canônica* de  $\mathbb{R}^n$ .

Definimos  $\mathring{\mathbb{B}}_\varepsilon(x) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \varepsilon\}$  como sendo o conjunto das bolas abertas de centro  $x$  e raio  $\varepsilon$  e  $\mathbb{B}_\varepsilon(x) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \varepsilon\}$  como sendo o conjunto das bolas fechadas de centro  $x$  e raio  $\varepsilon$ . O subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é aberto se  $A$  for uma união de bolas abertas, já o subconjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  é fechado se  $\mathbb{R}^n - F$  é aberto.

## 1. Preliminares

---

Seja  $A$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ , uma aplicação  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  fica determinada por suas  $m$  funções coordenadas  $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Escrevemos  $f = (f_1, \dots, f_m)$ .

**Definição 1.1.1.** Uma aplicação  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , com  $U$  subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , é dita **suave** ou de **classe  $C^\infty$**  se todas as derivadas parciais de suas funções coordenadas existem e são contínuas.

**Definição 1.1.2.** Uma aplicação  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida em um subconjunto  $M$  de  $\mathbb{R}^n$ , é dita **suave**, se pode ser localmente estendida a uma aplicação suave. Em outras palavras: se para todo  $x \in M$  existir uma vizinhança aberta  $U$  de  $x$  em  $\mathbb{R}^n$  e uma aplicação suave  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $f$  coincide com  $\varphi$  em  $U \cap M$ .

**Definição 1.1.3.** Sejam  $M, N$  subconjuntos de um espaço euclidiano. Uma aplicação suave  $f : M \rightarrow N$  é dita um **difeomorfismo** se  $f$  é bijetora e a aplicação inversa  $f^{-1} : N \rightarrow M$  é também suave.

**Definição 1.1.4.** Dizemos que um subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$ , é uma **variedade suave** de dimensão  $k$ , se para cada  $x \in M$  existir uma vizinhança  $V \cap M$ , com  $V$  vizinhança aberta de  $x$  em  $\mathbb{R}^n$ , difeomorfa a um subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^k$ . Os difeomorfismos  $\varphi : V \cap M \rightarrow U$  são chamados **sistemas de coordenadas locais**, e sua inversas  $\varphi^{-1} : U \rightarrow V \cap M$ , são chamadas de **parametrizações**.

**Exemplo 1.1.5.** A esfera unitária  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma variedade suave 2-dimensional.

Com efeito, tome os subconjuntos abertos  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  de  $\mathbb{R}^2$  e  $V_1^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Seja,

$$\begin{aligned} \varphi_1^+ : U &\longrightarrow V_1^+ \cap \mathbb{S}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}) \end{aligned}$$

Essa aplicação define um difeomorfismo. De fato, é bijetiva, suave, pois as funções coordenadas de  $\varphi_1^+$  são suaves e além disso, a aplicação inversa correspondente a  $\varphi_1^+$  é também suave. Dessa forma podemos cobrir a esfera  $\mathbb{S}^2$  através de seis parametrizações semelhantes a esta. De fato, considere as seguintes aplicações:

$$\varphi_1^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+, \varphi_2^-, \varphi_3^+, \varphi_3^- : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Definidas por:

$$\begin{cases} \varphi_1^\pm(x, y) = (x, y, \pm\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}); \\ \varphi_2^\pm(x, y) = (x, \pm\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, y); \\ \varphi_3^\pm(x, y) = (\pm\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, x, y). \end{cases}$$

## 1. Preliminares

Pode-se provar que  $\varphi_1^\pm, \varphi_2^\pm, \varphi_3^\pm$  são parametrizações de  $U$  respectivamente sobre  $V_1^\pm \cap \mathbb{S}^2, V_2^\pm \cap \mathbb{S}^2$  e  $V_3^\pm \cap \mathbb{S}^2$ . Onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}; \\ V_1^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}; \\ V_2^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} V_2^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y < 0\}; \\ V_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}; \\ V_3^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0\}. \end{array} \right.$$

são abertos de  $\mathbb{R}^3$ , tal que cada  $V_i^\pm$  é uma vizinhança aberta de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$

Logo, para cada  $p \in \mathbb{S}^2$  existe uma vizinhança  $V_i^\pm \cap \mathbb{S}^2$ , difeomorfa ao disco aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Portanto,  $\mathbb{S}^2$  é uma variedade suave de dimensão 2.

Enquanto variedades suaves são forjadas localmente em  $\mathbb{R}^k$ , variedades com bordo (ou fronteira) são modeladas localmente no hiperplano superior  $k$ -dimensional

$$H^k = \{(x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^k : x_k \geq 0)\}.$$

O bordo de  $H^k$  é  $\mathbb{R}^{k-1}$  sob sua imersão usual em  $\mathbb{R}^k$ .

**Definição 1.1.6.** Um subconjunto  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  é uma **variedade com bordo**  $k$ -dimensional se todo ponto de  $M$  possui uma vizinhança difeomorfa a um conjunto aberto no espaço  $H^k$ . Como antes, tal difeomorfismo é chamado de **parametrização local** de  $M$ . A fronteira de  $M$ , denotada por  $\partial M$ , consiste naqueles pontos que pertencem à imagem da **fronteira** de  $H^k$  sob alguma parametrização local. Seu complemento é chamado de **interior** de  $M$ ,  $\text{Int}(M) = M - \partial M$ .

Se  $M$  e  $Z$  são ambas variedades suaves em  $\mathbb{R}^n$  e  $Z \subset M$ , então  $Z$  é dita uma **subvariedade** de  $M$ . Em particular,  $M$  é ele próprio uma subvariedade de  $\mathbb{R}^n$ . Qualquer aberto de  $M$  é uma subvariedade de  $M$ .

Suponha que  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação suave, definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , e seja  $x \in U$ . Sua derivada é a aplicação linear  $df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , que possui em relação as bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ , uma matriz  $m \times n$  chamada a **matriz jacobiana** de  $f$  no ponto  $x$ , indicada com a notação  $Jf(x)$  e é dada por:

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

**Definição 1.1.7.** Um **caminho**  $\gamma$  em  $M$  que passa por  $x \in M$  é uma aplicação contínua

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$$

## 1. Preliminares

---

onde  $\gamma(t) = x$ , para algum  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Para definir o espaço tangente em um ponto  $x \in M$ , em que  $M$  é uma variedade suave de  $\mathbb{R}^n$ , é preciso inicialmente considerarmos um caminho  $\gamma$  em  $M$  que passa por  $x$ . Dizemos que o caminho  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  tem *vetor-velocidade* no ponto  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  se existe o limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h},$$

denotado por  $\gamma'(t)$ . O vetor-velocidade  $\gamma'(t)$  existirá se, e somente se, o caminho  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  for diferenciável em  $M$ .

**Definição 1.1.8.** *Sejam  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade suave com  $x \in M$ . Um vetor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  é tangente à  $M$  em  $x$ , se  $\vec{v}$  é o vetor-velocidade de algum caminho suave que passa por  $x$  em  $M$ . O conjunto de tais vetores tangentes, é denotado por  $T_x M$  e será chamado de **espaço tangente** de  $M$  em  $x$ . Isto é:*

$$T_x M = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \gamma'(t) = \vec{v}, \text{ para algum caminho } \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ com } \gamma(t) = x \}$$

Notamos, que  $T_x M$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ , cuja translação paralela  $x + T_x M$  é a melhor aproximação linear de  $M$  em  $x$ .

**Definição 1.1.9.** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^k$ ,  $N \subset \mathbb{R}^l$  superfícies suaves. Dizemos que uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  é suave em um ponto  $p \in M$  se para as parametrizações*

$$\begin{aligned} \varphi: U \subset \mathbb{R}^k &\rightarrow V \\ \psi: W \subset \mathbb{R}^l &\rightarrow Z, \end{aligned}$$

de uma vizinhança coordenada  $V$  de  $p$  e de uma vizinhança coordenada  $Z$  de  $f(p)$  a composta

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow W \subset \mathbb{R}^l$$

é suave em  $\varphi^{-1}(p)$ . Dizemos que  $f$  é suave se  $f$  é suave em todo ponto. Dizemos que  $f$  é um **difeomorfismo** se  $f$  é um homeomorfismo e  $f, f^{-1}$  são suaves.

Agora iremos construir a melhor aproximação linear de uma aplicação suave entre variedades suaves arbitrárias  $M$  e  $N$  no ponto  $x$ . Seja  $f: M \rightarrow N$  e  $x$  um ponto de  $M$ . Suponhamos que  $f(x) = y$ , que  $\varphi: U \rightarrow M$  parametriza  $M$  em  $x$  e  $\phi: V \rightarrow N$  parametriza  $N$  em  $y$ , onde  $U \subset \mathbb{R}^k$  e  $V \subset \mathbb{R}^l$  tal que  $\varphi(0) = x$ ,  $\phi(0) = y$ . Se  $U$  é uma vizinhança suficientemente pequena, então teremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \uparrow \phi & & \uparrow \phi \\
 U & \xrightarrow{h=\phi^{-1} \circ f \circ \phi} & V
 \end{array}$$

Com isso, obtemos que o seguinte diagrama das transformações lineares é comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 T_x M & \xrightarrow{df_x} & T_y N \\
 d\phi_0 \uparrow & & d\phi_0 \uparrow \\
 \mathbb{R}^k & \xrightarrow{dh_0} & \mathbb{R}^l
 \end{array}$$

Assim, podemos definir a derivada:

$$df_x : T_x M \longrightarrow T_y N$$

como sendo a transformação linear entre espaços tangentes de  $M$  e  $N$  respectivamente, que é dada pela composição:

$$df_x := d\phi_0 \circ dh_0 \circ d\phi_0^{-1}.$$

É possível provar que a definição acima não depende das escolhas das parametrizações, logo  $df_x$  está bem definida.

**Definição 1.1.10.** *Duas aplicações suaves  $f : M \rightarrow N$  e  $\tilde{f} : M_1 \rightarrow N_1$  dizem-se **equivalentes** se, e somente se, existir um par de difeomorfismos  $\phi : M \rightarrow M_1$  e  $\varphi : N \rightarrow N_1$  tais que  $\varphi \circ f = \tilde{f} \circ \phi$ . Em outras palavras, o seguinte diagrama é comutativo.*

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 M_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & N_1
 \end{array}$$

### 1.1.2 O Teorema da Função Inversa

Suponha que  $M$  e  $N$  são variedades suaves de mesma dimensão e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave. Temos um *difeomorfismo local*  $f$ , se para cada  $x \in M$  existir uma vizinhança  $U$  de  $x$ , tal que  $f|_U : U \rightarrow V$  for um difeomorfismo sobre uma vizinhança  $V$  de  $f(x)$ .

Uma condição necessária para que  $f$  seja um difeomorfismo local em  $x$  é que sua derivada  $df_x : T_x M \rightarrow T_y N$  seja um isomorfismo, com  $f(x) = y$ . De fato, por  $f$  ser um difeomorfismo local em  $x$ , existem as respectivas vizinhanças abertas  $U, V$  de  $x$  e  $f(x)$ , tais que para  $f : U \cap M \rightarrow V \cap N$ , temos as expressões:

$$f \circ f^{-1} = id \text{ e } f^{-1} \circ f = id,$$

pela Regra da Cadeia obtemos que  $df_x$  é um isomorfismo, cuja inversa é  $df_{f(x)}^{-1}$ . Temos que nesse caso a recíproca é válida e é dada pelo célebre Teorema da Função Inversa, que a seguir é enunciado e demonstrado.

**Teorema 1.1.11** (Teorema da Função Inversa). *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave entre variedades suaves, tal que  $x \in M$  e  $f(x) = y \in N$ . Se  $df_x : T_x M \rightarrow T_y N$  é um isomorfismo então  $f$  é um difeomorfismo local de  $x$ .*

**Demonstração:** Como  $df_x$  é um isomorfismo, então  $\dim M = \dim N$ . Suponha que  $\phi : U \rightarrow \tilde{U} \cap M$  parametriza  $M$  em  $x$ ,  $\varphi : V \rightarrow \tilde{V} \cap N$  parametriza  $N$  em  $y$ , tal que  $\phi(0) = x$  e  $\varphi(0) = y$ . Seja  $h = \varphi^{-1} \circ f \circ \phi$ . Temos que por hipótese  $df_x$  é um isomorfismo, logo  $dh_0 = d\varphi^{-1} \circ df \circ d\phi$  é isomorfismo, pelo Teorema da Função Inversa para aplicações em  $\mathbb{R}^n$ , temos que existem vizinhanças abertas  $A \subset U$  de  $0$  e  $B \subset V$  de  $h(0)$ , tal que  $h|_A : A \rightarrow B$  é um difeomorfismo. Segue que  $f = \varphi \circ h \circ \phi^{-1}$  é um difeomorfismo da vizinhança  $\phi(A)$  de  $x$  na vizinhança  $\varphi(B)$  de  $y$ . ■

### 1.1.3 Imersões

Seja a aplicação suave entre variedades suaves  $f : M \rightarrow N$ . Suponhamos que  $M$  seja uma variedade  $k$ -dimensional e  $N$  uma variedade  $l$ -dimensional.

**Definição 1.1.12.** *A aplicação  $f : M \rightarrow N$  é uma **imersão** em  $x \in M$  se a derivada dada por  $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  é injetiva. Se  $f$  é uma imersão em todo ponto  $x \in M$ , então dizemos que  $f$  é uma **imersão**.*

Se  $f : M \rightarrow N$  é uma imersão segue da Definição 1.1.12 que  $k \leq l$ .

**Exemplo 1.1.13.** (Inclusão Canônica) *Sejam  $n < m$  e a aplicação  $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $i(x) = (x, 0)$ , onde  $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$ . Observe que  $i$  é imersão, pois  $i$  é linear e assim para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , a derivada da aplicação é a própria transformação, que é injetora.*

O resultado que demonstramos a seguir, mostrará que uma imersão, localmente, possui uma forma muito simples. Provamos que toda imersão, a menos de mudança de variáveis, localmente é como a inclusão canônica.

**Teorema 1.1.14** (Forma Local de Imersões). *Suponha que  $f : M \rightarrow N$  é uma imersão em  $x$  e  $y = f(x)$ . Então existem coordenadas locais em torno de  $x$  e  $y$  tal que*

$$f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$

## 1. Preliminares

---

Em outras palavras,  $f$  é localmente equivalente a inclusão canônica.

**Demonstração:** Tome as seguintes parametrizações locais  $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ ,  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^l \rightarrow N$ , com  $\phi(0) = x$  e  $\varphi(0) = y$ , que fazem o diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \phi \uparrow & & \uparrow \varphi \\ U & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

Note que  $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \phi$  e que  $dg_0$  é injetiva, logo o posto da matriz  $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(0)\right)_{l \times k}$  é igual a  $k$ , isso significa que a matriz jacobiana  $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{l \times k}$  tem as suas  $k$  colunas linearmente independentes e, portanto, tem pelo menos  $k$  linhas linearmente independentes. Sem perda de generalidade, podemos supor que isso ocorre com as primeiras  $k$  linhas. Em outras palavras  $\det \left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)}\right)$  é diferente de zero. Defina a aplicação auxiliar  $G : U \times \mathbb{R}^{l-k} \rightarrow \mathbb{R}^l$  dada por  $G(x, z) = g(x_1, \dots, x_k) + (0, \dots, z_{k+1}, \dots, z_l)$ . A aplicação  $G$  tem a seguinte matriz Jacobiana:

$$JG(0) = \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial g_i}{\partial(x_1, \dots, x_k)}(0) & 0 \\ \hline \frac{\partial g_j}{\partial(x_1, \dots, x_k)}(0) & I \end{array} \right)$$

com  $i \in \{1, \dots, k\}$  e  $j \in \{k+1, \dots, l\}$ . Logo, o determinante de  $JG(0)$  é diferente de zero e assim  $G$  é um difeomorfismo local em 0. Note que,  $g = G \circ i$ . Por  $\varphi$  e  $G$  serem difeomorfismos locais em 0, então  $\varphi \circ G$  também será. Assim,  $\varphi \circ G$  pode ser usado como parametrizações locais de  $N$  em torno do ponto  $y$ . Além disso, para  $U$  e  $V$  suficientemente pequenos, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \phi \uparrow & & \uparrow \varphi \circ G \\ U & \xrightarrow{\text{inclusão canônica}} & V \end{array}$$

■

### 1.1.4 Submersões

Seja a aplicação suave entre variedades suaves  $f : M \rightarrow N$ . Suponhamos que  $M$  seja uma variedade  $k$ -dimensional e  $N$  uma variedade  $l$ -dimensional.

**Definição 1.1.15.** A aplicação  $f : M \rightarrow N$  é uma **submersão** em  $x \in M$  se a derivada dada por  $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  é sobrejetiva. Se  $f$  é uma submersão em todo ponto  $x \in M$ , então dizemos que  $f$  é uma **submersão**.

Se  $f : M \rightarrow N$  é uma submersão, segue da Definição 1.1.15 que  $l \leq k$ .

**Exemplo 1.1.16.** (Projeção Canônica) Seja  $l < k$  e a aplicação  $\pi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$  dada por  $\pi(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_l)$ . Observe que  $\pi$  é submersão, pois  $\pi$  é linear e assim para todo  $x \in \mathbb{R}^k$ , a derivada da aplicação é a própria transformação, que é sobrejetora.

**Teorema 1.1.17** (Forma Local de Submersões). Suponha que  $f : M \rightarrow N$  é uma submersão em  $x$  e  $y = f(x)$ . Então existem coordenadas locais em torno de  $x$  e  $y$  tal que

$$f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_l).$$

Em outras palavras,  $f$  é localmente equivalente a projeção canônica.

**Demonstração:** Tome as seguintes parametrizações locais  $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ ,  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^l \rightarrow N$ , com  $\phi(0) = x$  e  $\varphi(0) = y$ , que fazem o diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \phi \uparrow & & \uparrow \varphi \\ U & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

Note que  $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \phi$  e que  $dg_0$  é sobrejetora, logo o posto da matriz  $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(0)\right)_{l \times k}$  é igual a  $l$ , isso significa que a matriz jacobiana  $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(0)\right)_{l \times k}$  tenha as suas  $l$  linhas linearmente independentes e, portanto, tem pelo menos  $l$  colunas linearmente independentes. Sem perda de generalidade, podemos supor que isso ocorre com as primeiras  $l$  colunas. Em outras palavras,  $\det \left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_l)}{\partial(x_1, \dots, x_l)}\right)$  é diferente de zero. Defina a aplicação auxiliar  $G : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  dada por  $G(a) = (g(a), a_{l+1}, \dots, a_k)$ , onde  $a = (a_1, \dots, a_k)$ . A aplicação  $G$  tem a seguinte matriz Jacobiana:

$$JG(0) = \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial g_i}{\partial(x_1, \dots, x_l)} & \frac{\partial g_j}{\partial(x_{l+1}, \dots, x_k)} \\ \hline 0 & I \end{array} \right)$$

com  $i \in \{1, \dots, l\}$  e  $j \in \{l+1, \dots, k\}$ . Logo, o determinante de  $JG(0)$  é diferente de zero, e assim,  $G$  é um difeomorfismo local em 0. Portanto,  $G^{-1}$  existe como um difeomorfismo de alguma vizinhança aberta  $U'$  de 0 em  $U$ . Por construção,  $g = \pi \circ G$ , então  $g \circ G^{-1}$  é uma submersão canônica. Portanto, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \uparrow \phi \circ G^{-1} & & \uparrow \phi \\
 U' & \xrightarrow{\text{projeção canônica}} & V
 \end{array}$$

■

**Definição 1.1.18.** *Seja  $f : M \rightarrow N$ , com  $M$  e  $N$  variedades suaves com dimensões  $k$  e  $l$ , respectivamente. Suponha que  $k \geq l$ , então*

- i) *Dizemos que  $x \in M$  é **ponto regular** de  $f$  é uma submersão em  $x \in M$ , caso contrário  $x$  é dito ponto crítico de  $f$ ;*
- ii) *Dizemos que  $y \in N$  é um **valor regular** de  $f$  se todo ponto em  $f^{-1}(y)$  é regular, caso contrário  $y$  é dito valor crítico de  $f$ .*

### 1.1.5 Teorema do Posto Local

O Teorema do Posto Local generaliza as noções vistas nas seções sobre imersão e submersão. Lembremos que as aplicações de posto constante têm uma boa descrição em termos de coordenadas locais.

**Teorema 1.1.19** (Teorema do Posto Local). *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave entre variedades suaves  $M$  e  $N$  de dimensões  $k$  e  $l$ , respectivamente. Se  $df_x$  tem posto  $\rho$  para todo  $x \in M$ , então  $f$  tem uma representação local em qualquer vizinhança na forma*

$$f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_\rho, 0, \dots, 0).$$

*Em particular, o conjunto dos pontos de  $M$  onde  $f$  tem posto  $\rho$  é aberto.*

**Demonstração:** Ver Teorema 4.12 em [8].

■

### 1.1.6 Espaço Projetivo Real e Variedade de Grassmann

O espaço projetivo é um exemplo de variedade suave bastante utilizado na matemática.

**Definição 1.1.20.** *O espaço projetivo real de dimensão  $n$ , denotado por  $\mathbb{R}P^n$ , é o conjunto definido por retas em  $\mathbb{R}^{n+1}$  passando pela origem.*

Seja  $\mathbb{S}^n$  uma esfera unitária centrada na origem em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Defina em  $\mathbb{S}^n$  a seguinte relação de equivalência:

$$z \sim w \text{ se, e somente se, } z = \pm w.$$

Dado  $a \in \mathbb{S}^n$ , chama-se *classe de equivalência* determinada por  $a$ , pela relação  $\sim$ , o subconjunto  $[a]$  de  $\mathbb{S}^n$  constituído pelos elementos  $x$  tais que  $x \sim a$ , isto é,  $[a] = \{a, -a\}$ . O conjunto das classes de equivalência dos elementos de  $\mathbb{S}^n$  será denotado por  $M = \mathbb{S}^n / \sim$  e chamado *conjunto quociente*.

A função  $d_1 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $d_1([y], [z]) = \min\{\|y - z\|, \|y + z\|\}$ , é uma métrica em  $M$ , a qual induz uma topologia  $\tau_1$  no conjunto  $M$ . Logo,  $(M, \tau_1)$  é um espaço topológico.

Seja  $f : \mathbb{R}P^n \rightarrow M$  uma função, naturalmente definida se tomarmos as retas que passam pela origem em  $\mathbb{R}^{n+1}$  interseção a esfera unitária centrada na origem  $\mathbb{S}^n$ , note que cada elemento de  $\mathbb{R}P^n$  intersecta a esfera  $\mathbb{S}^n$  em exatamente dois pontos antípodas. É fácil ver que  $f$  é uma bijeção.

Definamos a métrica  $d_2$  em  $\mathbb{R}P^n$  da seguinte forma:  $d_2(s, t) := d_1(f(s), f(t))$ . Notemos que  $d_2(s, t)$  induz uma topologia  $\tau_2$  em  $\mathbb{R}P^n$ . Portanto,  $(\mathbb{R}P^n, \tau_2)$  é um espaço topológico. Agora, é possível concluir que  $f$  um homeomorfismo.

O espaço projetivo tem uma generalização natural, a Grassmanniana, que a seguir é definida.

**Definição 1.1.21.** *A variedade de Grassmann ou Grassmanniana, denotada por  $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ , é o conjunto de todos os subespaços vetoriais de dimensão  $r$  do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{n+r}$ .*

Observamos que a variedade de Grassmann  $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$  é compacta (veja [11], página 126).

### 1.1.7 Transversalidade e os Pontos Críticos de uma Restrição

Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave entre variedades suaves, observamos que se  $y \in N$  for um valor regular, então obtemos que  $f^{-1}(y)$  é uma subvariedade suave em  $M$  (Proposição 1 em [11], p. 169). Agora, seja  $S \subset N$  uma subvariedade suave de  $N$ . Em que condições a imagem inversa  $f^{-1}(S)$  será uma subvariedade suave em  $M$ ? A resposta para essa pergunta é dada através da noção de transversalidade, que traz uma sofisticação para o conceito de valor regular.

**Definição 1.1.22.** Dizemos que  $f$  é **transversal** a  $S$  no ponto  $a \in f^{-1}(S)$  se:

$$\text{Im}(df_a) + T_bS = T_bN, \quad b = f(a) \in S,$$

isto é, quando a imagem da diferencial de  $f$  aplicada em no ponto  $a$  adicionada do subespaço  $T_bS$  geram  $T_bN$ . Dizemos ainda que  $f$  é **transversal** a  $S$ , se para todo ponto  $a \in f^{-1}(S)$ ,  $f$  é transversal a  $S$  em  $a$ .

**Exemplo 1.1.23.**

1. Se  $S = \{b\}$ , então  $f$  é transversal a  $b$  se, e somente se,  $b$  é valor regular de  $f$ ;
2. Se  $f(M) \cap S = \emptyset$ , então,  $f$  é automaticamente transversal a  $S$ ;
3. Se  $f$  é uma submersão, então  $f$  é transversal a  $S$ , qualquer que seja a subvariedade  $S \subset N$ .

A noção de transversalidade ganha mais conteúdo geométrico, quando consideramos  $M$  e  $S$  subvariedades de  $N$  e na Definição 1.1.22  $f$  é a aplicação inclusão.

**Definição 1.1.24.** Duas subvariedades suaves  $M \subset N$  e  $S \subset N$  de uma variedade suave  $N$ , são **transversais** em  $N$  no ponto  $p \in M \cap S$  se, e somente se,

$$T_pM + T_pS = T_pN$$

Isso significa que  $T_pM$  adicionado de  $T_pS$  geram  $T_pN$ . Escrevemos  $M \pitchfork_p S$ , para dizer que  $M$  e  $S$  são transversais no ponto  $p$ .  $M \pitchfork S$  para significar que  $M$  e  $S$  são transversais em todos os pontos da interseção.

A noção de transversalidade é estável, ou seja, pequenas perturbações próxima a interseção das subvariedades ainda preservam a transversalidade.

**Observação 1.1.25.** A transversalidade depende do espaço ambiente. De fato, se considerarmos duas curvas  $\alpha$  e  $\beta$  em  $\mathbb{C}^3$ , tal que existe um ponto  $p$  na interseção de  $\alpha$  e  $\beta$ , teremos que  $T_p\alpha + T_p\beta \neq T_p\mathbb{C}^3 \simeq \mathbb{C}^3$ , logo  $\alpha \not\pitchfork_p \beta$  em  $\mathbb{C}^3$ . Mas caso  $\alpha$  e  $\beta$  estejam imersas em  $\mathbb{C}^2$ , teremos a possibilidade que as curvas  $\alpha$  e  $\beta$  podem ou não serem transversais, como podemos ver no próximo exemplo:

**Exemplo 1.1.26.** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  curvas em  $\mathbb{C}^2$ , com  $p \in \alpha \cap \beta$ .

- a) Se  $T_p\alpha$  é ortogonal a  $T_p\beta$ , fica claro que  $T_p\alpha + T_p\beta = \mathbb{C}^2$ . Logo, são transversais em  $p$ .

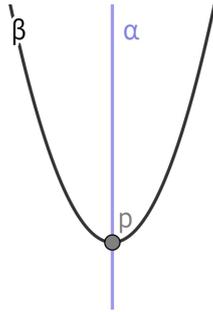


Figura 1.1: Representação de duas curvas transversais em  $\mathbb{R}^2$

b) Agora se  $T_p\alpha = T_p\beta$ , então  $T_p\alpha + T_p\beta \neq \mathbb{C}^2$ . Logo,  $\alpha$  e  $\beta$  não são transversais.



Figura 1.2: Representação de duas curvas não transversais em  $\mathbb{R}^2$

Dada uma subvariedade  $S \subset N$ , chamamos *codimensão* de  $S$  em  $N$ , denotado por  $\text{codim}(N, S)$  à diferença de dimensão entre  $N$  e  $S$ . De outra forma, temos:

$$\text{codim}(N, S) := \dim(N) - \dim(S)$$

**Teorema 1.1.27.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave transversal a uma subvariedade suave  $S \subset N$ . Então, ou  $f^{-1}(S) = \emptyset$  ou  $f^{-1}(S)$  é subvariedade suave de  $M$  cuja codimensão em  $M$  é igual a codimensão de  $S$  em  $N$ .*

**Demonstração:** Ver Proposição 4 de [11] p. 180. ■

**Teorema 1.1.28.** *Seja  $M$  uma variedade suave e  $N, K$  subvariedades suaves de  $M$  com dimensões  $m, n$  e  $k$ , respectivamente. Se  $N$  e  $K$  se intersectam transversalmente, então:*

i) *A interseção  $N \cap K$  é uma variedade suave;*

ii)  $\text{codim}(N \cap K) = \text{codim}(N) + \text{codim}(K)$ .

**Demonstração:** Ver, respectivamente, o Corolário 2 em [11] p. 180 e o Teorema p.30 de [5].

■

**Lema 1.1.29.** *Seja a aplicação suave  $f : M \rightarrow N$  que é uma submersão entre variedades suaves  $M$  e  $N$  de dimensões  $m$  e  $n$ , respectivamente. O espaço tangente à  $f^{-1}(f(x))$  no ponto  $x$  é igual ao kernel da diferencial de  $f$  aplicado em  $x$ , para todo  $x \in M$ . De outro modo:*

$$T_x f^{-1}(f(x)) = \text{Ker}(df_x), \forall x \in M,$$

onde  $\text{Ker}(df_x) = \{\vec{v} \in T_x M \mid df_x(\vec{v}) = \vec{0} \in T_{f(x)} N\}$  e  $f^{-1}(f(x)) = \{p \in M \mid f(p) = f(x) \in N\}$

**Demonstração:** Consideremos o caminho  $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow f^{-1}(f(x))$ , com  $\lambda(0) = x$  e  $\lambda'(0) = \vec{v} \in T_x f^{-1}(f(x))$ , então  $df_x(\vec{v}) = \vec{0}$ . De fato,  $df_x(\vec{v}) = f'(\lambda(0)) \cdot \lambda'(0) = (f \circ \lambda)'(0) = 0$ , pois  $f \circ \lambda$  é constante. Logo,  $\vec{v} \in \text{Ker}(df_x)$ . Reciprocamente, por  $f$  ser uma submersão,  $T_x f^{-1}(f(x))$  e  $\text{Ker}(df_x)$  serem subespaços  $(m-n)$ -dimensionais, lembrando que  $T_x f^{-1}(f(x)) \subset \text{Ker}(df_x)$ , segue que  $T_x f^{-1}(f(x)) = \text{Ker}(df_x)$ .

■

**Lema 1.1.30** (Lema dos Pontos Críticos de uma Restrição). *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave, com  $M$  e  $N$  variedades suaves. Seja  $Z \subset M$  uma subvariedade suave e  $g := f|_Z : Z \rightarrow N$ . O conjunto dos pontos críticos de  $g$  é dado por:*

- i. *Os pontos críticos de  $f$  que estão em  $Z$ ;*
- ii. *Os pontos regulares  $x$  de  $f$  que estão em  $Z$  tais que  $f^{-1}(f(x))$  intersecta  $Z$  não transversalmente em  $x \in M$ .*

**Demonstração:** Podemos escrever  $g = f \circ i : Z \rightarrow N$ , onde  $i : Z \rightarrow M$  é a aplicação inclusão.

Pela Regra da Cadeia, dado  $x \in Z$  temos que  $dg_x : T_x Z \rightarrow T_{f(x)} N$  é dada pela composição:

$$T_x Z \xrightarrow{d_x i = i} T_x M \xrightarrow{d_x f} T_{f(x)} N, \quad \forall x \in Z.$$

Se  $x \in Z$  é um ponto crítico de  $f$ , então  $df_x : T_x Z \rightarrow T_{f(x)} N$  não é sobrejetiva, e portanto a composição acima não será sobrejetiva. Concluimos que todo ponto crítico de  $f$  em  $Z$  é ponto crítico de  $g$ .

Por outro lado suponha que  $x \in Z$  é um ponto regular de  $f$  e que as variedades suaves  $M$ ,  $N$  e  $Z$  possuam respectivamente dimensões  $m$ ,  $n$  e  $z$ .

Por  $T_x M$  ser um espaço vetorial, podemos expressa-lo como a seguinte soma direta:

$$T_x M = \text{Ker}(df_x) \oplus E,$$

onde  $E$  é o complemento ortogonal de  $\text{Ker}(df_x)$ , lembre-se que pelo Lema 1.1.29,  $\text{Ker}(df_x) = T_x f^{-1}(f(x))$ .

Pelo Teorema do Núcleo e Imagem de uma transformação linear e usando que  $df_x$  é sobrejetiva, obtemos que  $\dim(T_x f^{-1}(f(x))) = m - n$ . Sendo assim, é possível concluir que  $df_x|_E : E \rightarrow T_{f(x)} N$  é um isomorfismo.

Podemos escrever  $T_x Z = A \oplus B$ , tal que  $A \subset T_x f^{-1}(f(x))$  e  $B \subset E$ . Pelo isomorfismo anterior, a diferencial de  $g$  será sobrejetiva em  $x$  se, e somente se,  $B$  definido como  $\text{proj}(T_x Z)$  em  $E$  coincidir com  $E$ , isso ocorre se, e somente se,  $\dim(B) = n$ .

Afirmamos que:  $T_x f^{-1}(f(x)) \cap_x T_x Z$  se, e somente se,  $\dim(B) = n$ . De fato,

$$\begin{aligned} T_x M = T_x Z + T_x f^{-1}(f(x)) &\Leftrightarrow \\ (A \oplus B) + T_x f^{-1}(f(x)) &\Leftrightarrow \\ B + T_x f^{-1}(f(x)) &\Leftrightarrow \\ \dim(B) = n. & \end{aligned}$$

Assim, é possível concluir que  $dg_x : T_x Z = A \oplus B \rightarrow T_{f(x)} N$  é sobrejetiva se, e somente se,  $T_x f^{-1}(f(x)) \cap_x T_x Z$ .

■

**Exemplo 1.1.31.** *Seja a função suave  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, z) = z$  e  $\mathcal{T}$  o toro de revolução<sup>1</sup> em  $\mathbb{R}^3$ .*

*O vetor gradiente  $\vec{\nabla} f(x, y, z) = (0, 0, 1)$  para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , logo  $f$  não possui pontos críticos. Note que as fibras  $f^{-1}(3)$ ,  $f^{-1}(1)$ ,  $f^{-1}(-1)$  e  $f^{-1}(-3)$ , são formadas por planos e coincidem respectivamente com os planos tangentes do Toro  $\mathcal{T}$  nos pontos  $p_1 = (0, 0, 3)$ ,  $p_2 = (0, 0, 1)$ ,  $p_3 = (0, 0, -1)$  e  $p_4 = (0, 0, -3)$ .*

*Agora, defina  $g := f|_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , pelo Lema 1.1.30, temos que os pontos críticos de  $g$  serão dados pelo pontos críticos de  $f$ , que não há, mais os pontos regulares de  $f$ ,  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ , tais que  $f^{-1}(f(p_i))$  com  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  intersecta  $\mathcal{T}$  não transversalmente.*

---

<sup>1</sup> O toro de revolução  $T$  é obtido pela rotação do círculo:

$$C = \begin{cases} (y-2)^2 + x^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

de centro  $(0, 2, 0)$ , no plano-xy, em torno do eixo-Ox

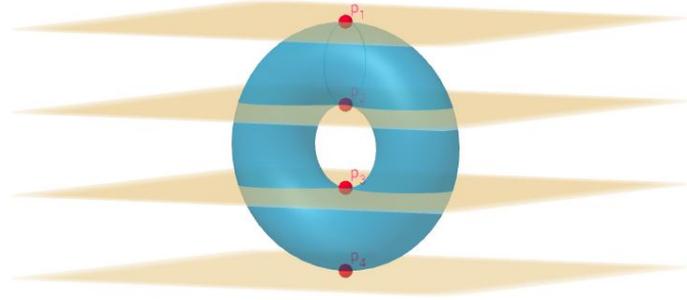


Figura 1.3: Fibras da função  $f$  intersectando o Toro  $\mathcal{T}$  não transversalmente nos pontos  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  e  $p_4$

## 1.2 Fibrados Localmente Triviais e Lema de Ehresmann

Apresentamos os fibrados topológicos e fibrados suaves, que nos permitem estudar os espaços de origem através de "retalhos" e esses, por sua vez, nos darão boas propriedades como serem homeomorfos, no caso de fibrados topológicos, e difeomorfos para o caso de fibrados suaves a um produto cartesiano de dois espaços topológicos. A principal referência é [8].

**Definição 1.2.1.** Um **fibrado topológico localmente trivial** sobre  $B$  com fibra  $F$  é uma terna  $(E, B, F)$  de espaços topológicos e uma aplicação  $\pi : E \rightarrow B$  contínua e sobrejetiva, tal que para cada  $x \in B$  existe uma vizinhança  $U \subseteq B$  de  $x$ , de modo que temos um homeomorfismo  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ , tal que  $\pi = \text{proj} \circ \varphi$ , ou seja, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ & \searrow \pi & \downarrow \text{proj} \\ & & U \end{array}$$

Denominamos:  $E$  de espaço total,  $B$  de espaço base e  $F$  de fibra.  $\pi$  é chamada de projeção ou aplicação fibrada.

Segue da definição acima que para cada  $y \in B$  a variedade  $\pi^{-1}(y)$  é difeomorfa a  $F$  e é chamada de fibra sobre  $y$  de  $B$ .

**Exemplo 1.2.2.** Seja  $M$  o cilindro em  $\mathbb{R}^3$ , tal que  $M := \mathbb{S}^1 \times I$ , onde  $\mathbb{S}^1$  é o círculo unitário e  $I$  intervalo aberto da reta real. Seja  $\pi : M \rightarrow \mathbb{S}^1$  uma aplicação definida pela projeção na primeira coordenada, a saber  $\pi(x, y) = x$ . Então,  $(M, \mathbb{S}^1, F)$  define um fibrado topológico localmente trivial, com a fibra  $F := I$ .

De fato, é fácil ver que  $\pi$  é contínua e sobrejetiva. Tome  $x \in \mathbb{S}^1$ . Temos que para qualquer vizinhança  $U$  de  $x$  em  $\mathbb{S}^1$  é tal que  $\pi^{-1}(U) = U \times I$ . Sendo assim, temos que

## 1. Preliminares

$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times I$  tomada pela identidade é um homeomorfismo e  $\pi(x,y) = \text{proj}(\varphi(x,y))$ , logo o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times I \\ & \searrow \pi & \downarrow \text{proj} \\ & & U \end{array}$$

Portanto, a terna  $(M, \mathbb{S}^1, F)$  de espaços topológicos com a aplicação  $\pi$  define um fibrado topológico localmente trivial.

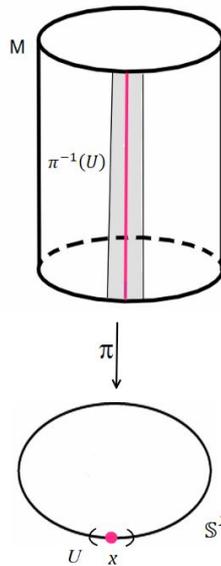


Figura 1.4: Projeção do Cilindro  $M$  em  $\mathbb{S}^1$  e seu Fibrado Topológico

**Exemplo 1.2.3.** Seja  $M$  o cilindro do exemplo anterior e  $I$  intervalo aberto da reta real. Seja  $\sigma : M \rightarrow I$ , dada pela projeção na segunda coordenada, a saber  $\sigma(x,y) = y$ . Então,  $(M, I, F)$  define um fibrado topológico localmente trivial, com a fibra  $F := \mathbb{S}^1$ .

De fato, é fácil ver que  $\sigma$  é contínua e sobrejetiva. Tome  $x \in I$ . Temos que para qualquer vizinhança  $U$  de  $x$  em  $I$  é tal que  $\sigma^{-1}(U) = U \times \mathbb{S}^1$ . Logo temos que  $\varphi : \sigma^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{S}^1$  tomada pela identidade, é um homeomorfismo e  $\sigma(x,y) = \text{proj}(\varphi(x,y))$ , logo o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \sigma^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{S}^1 \\ & \searrow \sigma & \downarrow \text{proj} \\ & & U \end{array}$$

Portanto, a terna  $(M, I, F)$  de espaços topológicos com a aplicação  $\sigma$ , define um fibrado topológico localmente trivial.

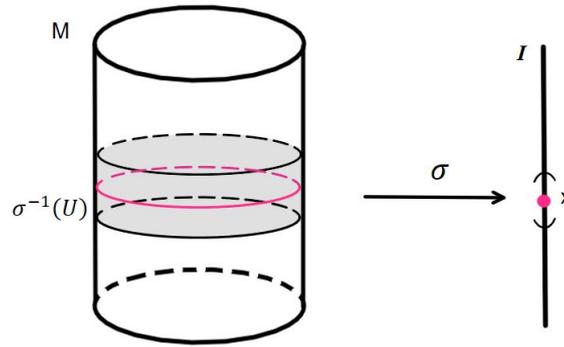


Figura 1.5: Projeção do Cilindro  $M$  em  $I$  e seu Fibrado Topológico

**Observação 1.2.4.** Note que os fibrados dos exemplos anteriores são distintos, embora tenham os mesmos espaços totais.

**Definição 1.2.5.** Um **fibrado suave** localmente trivial sobre  $B$  com fibra  $F$  é uma terna  $(E, B, F)$  de variedades suaves e uma aplicação  $\pi : E \rightarrow B$  submersão e sobrejetiva, tal que para cada  $x \in B$  existe uma vizinhança  $U \subseteq B$  de  $x$ , de modo que temos um difeomorfismo  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  tal que  $\pi = \text{proj} \circ \varphi$ , ou seja, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ & \searrow \pi & \downarrow \text{proj} \\ & & U \end{array}$$

Denominamos:  $E$  de espaço total,  $B$  de espaço base e  $F$  de fibra. A aplicação  $\pi$  é chamada de projeção ou aplicação fibrada.

Quando podemos escolher  $U = B$ , nas condições de trivialidade local, dizemos que o fibrado é globalmente trivial e desta forma,  $E$  é difeomorfa a  $B \times F$ .

**Teorema 1.2.6.** Se  $(E, B, F, \pi)$  é um fibrado tal que o espaço base é contrátil, então a trivialização é global.

**Demonstração:** Ver em [2] Corolário 2.6, p. 48. ■

**Definição 1.2.7.** Sejam  $M, N$  espaços topológicos e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação contínua. Dizemos que  $f$  é uma **aplicação própria** se para todo  $K \subset N$  compacto, tem-se  $f^{-1}(K) \subset M$  é compacto.

**Definição 1.2.8.** Sejam  $M$  uma variedade suave e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. O **suporte** de  $f$ , denotado por  $\text{supp}(f)$ , é o fecho de  $\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}$ .

**Definição 1.2.9.** *Seja  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$  uma cobertura aberta de  $M$ . Uma **partição da unidade** subordinada a  $\mathcal{V}$  é uma família  $\{\lambda_i : M \rightarrow [0, 1]\}$  de funções suaves tal que:*

- i)  $\text{supp}(\lambda_i) \subset V_i$ ;
- ii)  $\{\text{supp}(\lambda_i)\}$  é uma família localmente finita, isto é, todo ponto de  $M$  tem uma vizinhança que intersecta no máximo um número finito de elementos da família;
- iii)  $\sum_{i \in I} \lambda_i(x) = 1$ .

Note que a soma em iii) é finita para cada  $x \in M$  devido a ii).

O resultado a seguir dá uma condição suficiente para que uma aplicação entre duas variedades seja a projeção de um fibrado suave localmente trivial. Vamos enunciá-lo para variedades com bordo, que será a situação mais geral que nos depararemos neste trabalho. A sua demonstração está baseada em Tráng et al. [18].

**Lema 1.2.10** (Lema de Ehresmann). *Seja  $\varphi : M \rightarrow N$  uma aplicação suave da variedade suave  $M$  com bordo,  $\partial M$ , na variedade suave  $N$ , com  $\partial N = \emptyset$ . Suponha que:*

1. A aplicação  $\varphi$  é própria;
2. A restrição de  $\varphi$  em  $M - \partial M$  é sobrejetiva e submersão;
3. Se o bordo  $\partial M$  é não vazio, a restrição de  $\varphi$  no bordo  $\partial M$  é também uma aplicação sobrejetiva e submersão.

Então,  $(M, N, \varphi^{-1}(t), \varphi)$  definem um fibrado suave localmente trivial.

**Demonstração:** Para mostrar que  $\varphi$  é um fibrado suave localmente trivial, devemos mostrar que para qualquer ponto  $p \in N$ , existe uma vizinhança  $U$  tal que temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} U \times \varphi^{-1}(p) & \xrightarrow{\Psi} & \varphi^{-1}(U) \\ & \searrow \text{proj} & \downarrow f \\ & & U \end{array}$$

com o difeomorfismo  $\Psi$ , onde  $\text{proj}$  é a projeção no primeiro fator e  $f := \varphi|_U$  é induzido por  $\varphi$ .

Iremos construir um campo vetorial cujo fluxo nos dará o difeomorfismo  $\Psi$ . Podemos considerar uma vizinhança aberta  $U_0$  do ponto  $p \in N$  que é difeomorfa ao conjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ , onde  $n$  é a dimensão de  $N$  no ponto  $p$  e temos as coordenadas locais  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Considere o ponto  $q \in \varphi^{-1}(p)$ . Se  $q$  é um ponto do interior de  $M \setminus \partial M$ , por  $\varphi$  ser submersão, existe uma vizinhança aberta  $V(q)$  de  $q$  em  $M \setminus \partial M$ , uma vizinhança aberta  $U(p)$  de  $p$

em  $N$  e uma vizinhança aberta  $U'(q)$  de  $q$  em  $\varphi^{-1}(p)$ , tal que pelo Teorema da forma local de submersão,  $U(p) \times U'(q)$  é difeomorfa a  $V(q)$  e a projeção de  $U(p) \times U'(q)$  em  $U(p)$  é isomorfo a aplicação induzida de  $\varphi$  sobre  $V(q)$  para  $U(p)$ . Sempre podemos assumir que  $U(p) \subset U_0$ .

Se  $q \in \varphi^{-1}(p)$  é um ponto na fronteira de  $M$ , existe uma vizinhança aberta  $V_0(q)$  de  $q$  em  $M$  que tem uma fronteira  $\partial V_0(q)$ . Uma vez que a restrição  $\varphi|_{\partial M}$  de  $\varphi$  em  $\partial M$  é submersão em  $q$ , podemos escolher a vizinhança  $V_0(q)$  tal que existe uma vizinhança aberta  $U(p)$  de  $p$  em  $N$  e uma vizinhança aberta  $U'_0(q)$  de  $q$  em  $\varphi^{-1}(p)$  na qual o produto  $U(p) \times U'_0(q)$  é difeomorfa à  $V_0(q)$  e a projeção de  $U(p) \times U'_0(q)$  para  $U(p)$  é isomorfo a aplicação induzido por  $\varphi$  de  $V_0(q)$  para  $U(p)$ . Novamente, podemos assumir  $U(p) \subset U_0$ .

Por  $\varphi$  ser própria, a fibra  $\varphi^{-1}(p)$  é compacta. Podemos escolher um número finito de pontos  $q_1, \dots, q_k$  tal que as vizinhanças correspondentes  $V(q_i)$  ou  $V_0(q_j)$  cobrem a fibra  $\varphi^{-1}(p)$ . Portanto, temos uma bola fechada  $\mathbb{B}$  centrada em  $p$  com coordenadas locais de  $N$  fixadas acima, tal que

$$\mathbb{B} \subset \cap_i \varphi(V(q_i)) \cap_j \varphi(V_0(q_j))$$

Denotaremos  $\mathring{\mathbb{B}}$  o interior de  $\mathbb{B}$ . Iremos construir um campo vetorial em  $\varphi^{-1}(\mathring{\mathbb{B}})$ .

Vamos considerar  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  o campo vetorial associado a coordenadas  $x_i$  de  $N$ . Então, se  $q \in M \setminus \partial M$ , o campo vetorial  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  define um campo vetorial em  $U(p)$  que pode ser estendido trivialmente para  $U(p) \times U'(q)$  e usando o difeomorfismo em  $V(q)$ , temos que isso define um campo vetorial  $v_q^i$  em  $V(q)$ . A imagem por  $\varphi$  desse campo vetorial  $v_q^i$  é  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ .

Similarmente se  $q \in \partial M$ , pela extensão trivial de  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  temos um campo vetorial sobre  $U(p) \times U'_0(q)$  que é tangente a fronteira  $U(p) \times \partial U'_0(q)$  e essa imagem por o difeomorfismo obtido acima é um campo vetorial  $v_q^i$  de  $V_0(q)$  que é tangente ao bordo  $V_0(q) \cap \partial M$ . A imagem de  $v_q^i$  por  $\varphi$  é  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  em  $U(p)$ .

Após o "levantamento do campo  $v_q^i$ " para a vizinhança de  $q$  em  $M$ , consideramos como acima  $q_1, \dots, q_k$  tal que as vizinhanças abertas associadas à  $V(q)$  ou  $V_0(q)$  cobrem  $\varphi^{-1}(p)$ . Seja  $(\rho_1, \dots, \rho_k)$  as partições da unidade associadas à essas vizinhanças abertas. A soma  $\sum_i^k \rho_i v_i^i$  define o campo vetorial  $W_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ , nestas uniões de vizinhanças abertas. Por

$$\mathbb{B} \subset \cap_i \varphi(V(q_i)) \cap_j \varphi(V_0(q_j))$$

o campo vetorial  $W_i$  define o campo  $\theta_1, \dots, \theta_n$  em  $\varphi^{-1}(\mathring{\mathbb{B}})$ . Por construção o campo vetorial  $\theta_1, \dots, \theta_n$  são tangentes ao bordo de  $M$ .

A imagem de  $\theta_i$  por  $\varphi$  no ponto  $z$  de  $\varphi^{-1}(\mathring{\mathbb{B}})$  é igual

$$d_z \varphi(\sum_i^k \rho_i v_i^i) = (\sum_i^k \rho_i(z)) \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

pois  $(\rho_1, \dots, \rho_k)$  é uma partição da unidade. Portanto, a imagem do campo vetorial de  $\theta_i$  por  $\varphi$  é o campo vetorial  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  de  $\mathring{\mathbb{B}}$ . Vamos escolher o conjunto aberto  $U$  para ser a bola aberta  $\mathring{\mathbb{B}}$ . Agora, definimos o difeomorfismo  $\Psi : \mathring{\mathbb{B}} \times \varphi^{-1}(p) \rightarrow \varphi^{-1}(\mathring{\mathbb{B}})$ .

Seja  $\Phi_i$  o fluxo definido por  $\theta_i$ , i.e, a aplicação

$$\Phi_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \varphi^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}) \rightarrow \varphi^{-1}(\mathring{\mathbb{B}})$$

tal que  $\Phi_i(0, q) = q$  e  $\Phi_i(t, q)$  define o caminho integral  $\gamma$  tangente à  $\theta_i$ , tal que  $\gamma(0) = q$ . Defina  $\Psi : \mathring{\mathbb{B}} \times \varphi^{-1}(p) \rightarrow \varphi^{-1}(\mathring{\mathbb{B}})$  por:

$$\Psi(u_1, \dots, u_n, q) = \Phi_1(u_1, \Phi_2(\dots, \Phi_n(u_n, q)))$$

onde  $(u_1, \dots, u_n) \in \mathring{\mathbb{B}}$  e  $q \in \varphi^{-1}(p)$ . O fluxo  $\Phi(u_i, q)$  é definido desde que o ponto esteja definido em  $\varphi^{-1}(\mathring{\mathbb{B}})$ . De fato, o espaço  $\varphi^{-1}(\mathring{\mathbb{B}})$  é compacto pois  $\varphi$  é própria e as curvas do fluxo estão em  $\varphi^{-1}(\mathring{\mathbb{B}})$ , portanto todo o fluxo é definido em  $\varphi^{-1}(\mathring{\mathbb{B}})$ .

Temos

$$u = f(\Psi(u, q))$$

pois, a imagem de  $\theta_i$  por  $\varphi$  é  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , temos:

$$f(\Phi_j(u_j, q)) = f(\Phi_j(0, q)) + u_j e_j = p + u_j e_j$$

como o fluxo de  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  é  $\phi(u_j, p) = p + u_j e_j$ , onde  $e_j$  é o vetor unitário da  $j$ -coordenada de  $\mathring{\mathbb{B}}$ .

Resta provar que  $\Psi$  é um difeomorfismo. De fato, é bijeção por  $\Psi$  esta bem definido, de modo que a inversa é dada por  $\Psi^{-1}(z) = \Phi_1(-u_1, \Phi_2(\dots, \Phi(-u_n, y)))$ , com  $\varphi(z) = (u_1, \dots, u_n)$ . A suavidade é garantida pela fluxo  $\Phi_j$  e por  $\varphi$  ser suave. Isso prova o Lema de Ehresmann. ■

## 1.3 Topologia Algébrica

A Topologia Algébrica propõe estudar a natureza dos espaços topológicos através de métodos algébricos. Nessa seção estudaremos dois pontos centrais da Topologia Algébrica: Homotopia e Homologia. De modo especial, a homologia nos dará suporte para definirmos a característica de Euler para um Complexo CW. As principais referências são: [6] e [10].

### 1.3.1 Homotopia e Tipo de Homotopia

**Definição 1.3.1.** *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $I$  o intervalo  $[0, 1]$ . Uma **homotopia** é uma família de aplicações  $f_t : X \rightarrow Y$ ,  $t \in I$ , onde a aplicação associada  $H : X \times I \rightarrow Y$  dada por  $H(x, t) = f_t(x)$  é contínua para todo  $x \in X$ .*

**Definição 1.3.2.** *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicações contínuas. Dizemos que  $f$  e  $g$  são **homotópicas** se, e somente se, existe uma aplicação  $H : X \times I \rightarrow Y$  contínua, tal que  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ , para todo  $x \in X$ . Nesse caso, a aplicação  $H$  chama-se **homotopia** entre  $f$  e  $g$ .*

*Usaremos a notação  $f \simeq g$  quando essas aplicações forem homotópicas.*

Uma homotopia entre  $f$  e  $g$  pode ser imaginada como uma deformação contínua da aplicação  $f$  na aplicação  $g$  ao longo do parâmetro  $t \in [0, 1]$ , e isso define uma família de funções contínuas  $H(x, t) = f_t(x)$ , onde para  $t = 0$  temos a aplicação  $f$  e para  $t = 1$ , temos a aplicação  $g$ . Uma outra interpretação pode ser dada, definindo o conjunto  $\mathfrak{X}$  como o conjunto das aplicações contínuas em  $Y$ , sendo assim, homotopia entre  $f$  e  $g$  é a existência de um caminho contínuo em  $\mathfrak{X}$ , ligando essas duas aplicações.

**Exemplo 1.3.3.** *Seja  $Y \subset \mathbb{C}^N$  um subconjunto convexo, isto é, para cada par de pontos  $x, y \in Y$ , o segmento de reta  $[x, y] = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}$  está inteiramente contido em  $Y$ . Dado um espaço topológico qualquer  $X$  e  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicações contínuas, é possível concluir que  $f$  e  $g$  são homotópicas.*

*De fato, defina a aplicação  $H : X \times I \rightarrow Y$ , tal que  $H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ . Essa aplicação é contínua, pois é a soma de funções contínuas e  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = g(x)$ . Concluímos que  $H$  é uma homotopia entre  $f$  e  $g$ , tal homotopia leva o nome de **Homotopia Linear**.*

**Exemplo 1.3.4.** *Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  aplicações contínuas definidas por  $f(x) = (x, x^2)$  e  $g(x) = (x, x)$ . Então  $f$  é homotópica a  $g$ . De fato, definimos a homotopia  $H : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $H(x, t) = (x, x^2 - tx^2 + tx)$ . Claramente,  $H$  é contínua, além disso  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

**Definição 1.3.5.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$  um subespaço. Uma aplicação contínua  $\pi : X \rightarrow X$  chama-se uma **retração** de  $X$  em  $A$ , quando:*

i)  $\pi(X) = A$ ;

ii)  $\pi|_A = id_A$ .

Onde  $id_A$  denota a aplicação identidade em  $A$ .

A seguir definimos um caso particular da noção de Homotopia, o chamado Retrato por Deformação, que exemplifica a homotopia entre um espaço topológico e um subespaço.

**Definição 1.3.6.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$  um subespaço. Seja  $\pi : X \rightarrow X$  uma retração de  $X$  sobre  $A$ . Um **retrato por deformação** é uma homotopia da identidade de  $X$  na retração de  $X$  sobre  $A$ .*

**Exemplo 1.3.7.** Considere  $X$  o cilindro em  $\mathbb{R}^3$  e  $A$  a circunferência inferior deste cilindro. Seja  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  o quadrado em  $\mathbb{R}^2$ . Defina a seguinte relação de equivalência em  $Q$ :

$$(x, 0) \sim (x, 1) \text{ se, e somente se, são pontos em lados opostos do quadrado.}$$

Notemos que  $Q$  é um subespaço topológico de  $\mathbb{R}^2$  e  $\sim$  uma relação de equivalência definida em  $Q$ , a topologia quociente em  $Q/\sim$  é a topologia final induzida pela projeção natural de  $Q$  em  $Q/\sim$ . Por tudo isso podemos identificar  $Q/\sim$  como o cilindro  $X$ .

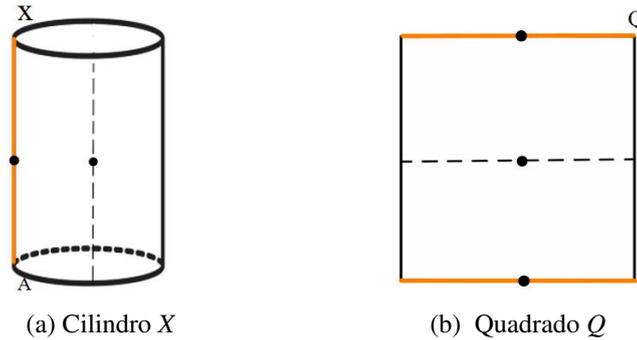


Figura 1.6: Espaço quociente do cilindro

Considere a homotopia  $H : X \times I \rightarrow A$ , dada por  $H(x, t) = (1 - t)id_X + t\pi(x)$ . Onde:  $id_X : X \rightarrow X$  é a aplicação identidade no cilindro e  $\pi : X \rightarrow A$  é a projeção do cilindro na base  $A$ . Logo,  $A$  é um retrato por deformação de  $X$ .

**Definição 1.3.8.** Uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  chama-se uma **equivalência homotópica** quando existe  $g : Y \rightarrow X$  contínua, tal que  $g \circ f \simeq id_X$  e  $f \circ g \simeq id_Y$ . Neste caso dizemos que  $g$  é uma **inversa homotópica** de  $f$  e que os espaços  $X$  e  $Y$  têm o mesmo **tipo de homotopia**, ou que são **homotopicamente equivalentes**. Escrevemos, neste caso,  $X \equiv Y$  ou  $f : X \equiv Y$ .

Pela definição acima, temos que todo homeomorfismo é uma equivalência homotópica, mas a recíproca não é válida, como segue no próximo exemplo.

**Exemplo 1.3.9.** O círculo  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  tem o mesmo tipo de homotopia de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . De fato, defina  $i : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , dado pela inclusão e seja  $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ , dado por  $r(y) = \frac{y}{\|y\|}$ .

Note que,  $r \circ i = r(x) = \frac{x}{\|x\|} = x$ , ou seja,  $r \circ i = id_{\mathbb{S}^1}$  e  $i \circ r$  é homotópico a identidade de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , pois  $y$  pode ser ligado ao ponto  $r(y)$  através de segmentos de reta contida em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , uma vez que  $0$  não pertence ao segmento  $[y, r(y)]$ . Sendo assim, podemos definir a homotopia linear  $H(y, t) : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , dada por  $(1 - t)\frac{y}{\|y\|} + ty$ .

**Definição 1.3.10.** Um espaço topológico  $X$  é dito **contrátil** quando ele tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

### 1.3.2 Complexo CW

Sejam  $e^n = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| < \varepsilon\}$ , chamado  $n$ -célula, o disco  $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| \leq \varepsilon\}$  e  $\mathbb{S}^{n-1}$  a fronteira de  $\mathbb{D}^n$ .

**Definição 1.3.11.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $Z \subseteq X$  fechado. Seja  $h : Z \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Defina  $A := X \sqcup Y$ , dada pela união disjunta de  $X$  e  $Y$ . Tome  $\sim$  a relação de equivalência em  $A$ , onde  $z \sim y$  se, e somente se, pelo menos uma das seguintes condições é satisfeitas:*

- i)  $z = y$ ;
- ii)  $z, y \in Z$  e  $h(z) = h(y)$ ;
- iii)  $z \in Z$  e  $y = h(z) \in Y$ .

A partir dessa relação, podemos definir o espaço quociente  $A / \sim$  que o chamaremos de **espaço de colagem** de  $Z$  em  $Y$  via aplicação  $f$ . A aplicação  $f$  é chamada de **aplicação colagem**.

**Exemplo 1.3.12.** *Considere  $\mathbb{D}^1 = [a, b]$ ,  $\partial\mathbb{D}^1 = \{a, b\}$  e o conjunto discreto  $Y = \{p_1, p_2, p_3\}$ . Defina,  $f_\alpha : \partial\mathbb{D}_\alpha^1 \rightarrow Y$  uma aplicação contínua, dada por:  $f_0(a) = p_1$ ,  $f_0(b) = p_2$  e  $f_1(a) = p_3 = f_1(b)$ . Defina o espaço  $E := \mathbb{D}_\alpha^1 \bigsqcup_{\alpha=0}^1 Y / \sim$ , em que a relação  $\sim$  é como a definida em 1.3.11 para cada  $\alpha \in \{0, 1\}$ .*

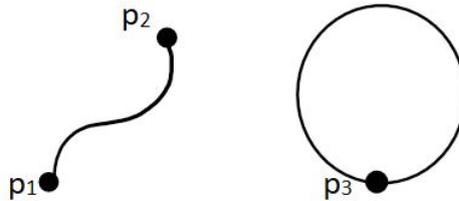


Figura 1.7: Espaço quociente  $E$

O **complexo CW** é o espaço topológico  $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$ , onde  $X^n$  é construído por indução da seguinte forma:

Para  $n = 0$ ,  $X^0$  é um conjunto com a topologia discreta (seus pontos são chamados 0-células  $e_\alpha^0$ ). Agora, dado  $X^0$  construiremos  $X^1$  anexando 1-célula  $e_\alpha^1$ , via aplicações  $f_\alpha : \partial\mathbb{D}_\alpha^1 \rightarrow X^0$ . Dessa forma  $X^1 := X^0 \bigsqcup_{\alpha=0}^1 \mathbb{D}_\alpha^1 / \sim$ , em que a relação  $\sim$  é como a definida em 1.3.11 para cada  $\alpha$ .

Seguindo de forma indutiva, temos que dado  $X^{n-1}$  construiremos  $X^n$  anexando as  $n$ -células  $e_\alpha^n$ , via aplicações  $f_\alpha : \partial\mathbb{D}_\alpha^n \rightarrow X^{n-1}$ , tal que  $X^n := X^{n-1} \bigsqcup_{\alpha=0} \mathbb{D}_\alpha^n / \sim$ . Em que a relação  $\sim$  é como a definida em 1.3.11 para cada  $\alpha$ .  $X^n$  é chamado  $n$ -esqueleto e  $f_\alpha$  é chamado de aplicação colagem.

Pode-se, parar este processo indutivo em um estágio finito, definindo  $X = X^n$ , para algum  $n < \infty$ , ou pode-se continuar indefinidamente, tomando  $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$ . No último caso,  $X$  recebe a topologia fraca: Um conjunto  $A \subset X$  é aberto (ou fechado) se  $A \cap X^n$  é aberto (ou fechado) em  $X$  para cada  $n$ .

Para os próximos exemplos, ainda utilizaremos da classe de equivalência  $\sim$  como definido em 1.3.11.

**Exemplo 1.3.13.** *A esfera  $n$ -dimensional  $\mathbb{S}^n$  é um CW-complexo, que consiste de uma 0-célula  $e_\alpha^0$ , e uma  $n$ -célula  $e_\alpha^n$ , tal que a  $n$ -célula é anexada via a aplicação constante  $f_\alpha : \partial\mathbb{D}_\alpha^n \rightarrow e_\alpha^0$ , isto é,  $\mathbb{S}^n := e_\alpha^0 \bigsqcup_{\alpha=0} \mathbb{D}_\alpha^n / \sim$ .*

**Exemplo 1.3.14.** *O Toro  $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  é um CW-complexo. De fato, comece com uma 0-célula  $e_\alpha^0$ , então anexe através da aplicação colagem  $f_\alpha$  duas 1-células  $e_\alpha^1$ , para obter  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ , o wedge de dois círculos. (Ver 1.3.4). Finalmente anexe uma 2-célula  $e_\alpha^2$  em  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ .*

**Exemplo 1.3.15.** *O  $n$ -espaço real projetivo  $\mathbb{R}P^n$  é definido como sendo o conjunto das retas reais passando pela origem em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Cada reta é determinada por vetores não nulos em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Além disso,  $\mathbb{R}P^n$  é topologicamente equivalente ao espaço quociente de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  sob a relação de equivalência  $v \sim \lambda v$  para todo os escalares reais  $\lambda \neq 0$ . Se nos restringirmos à vetores de norma unitária, teremos que  $\mathbb{R}P^n$  poderá ser identificado como o espaço quociente  $\mathbb{S}^n / (v \sim -v)$ , a esfera com pontos antípodas.*

Agora, notemos que o 0-espaço projetivo  $\mathbb{R}P^0$  pode ser identificado como um ponto  $\{p\}$  da reta real, ou seja,  $\mathbb{R}P^0$  pode ser visto como uma única 0-célula  $e_\alpha^0$ . Agora, dado  $\mathbb{R}P^0$  podemos construir  $\mathbb{R}P^1$  adicionando uma 1-célula  $e_\alpha^1$ . Para isso, defina a aplicação  $f_\alpha : \partial\mathbb{D}_\alpha^1 \rightarrow \mathbb{R}P^0$ , dada por  $f_\alpha(x) = [x]$ , em que  $[x]$  denota a classe de equivalência de  $x$ . Assim, teremos  $\mathbb{R}P^1 := \mathbb{D}_\alpha^1 \bigsqcup_{\alpha=0} \mathbb{R}P^0 / \sim$ . Agora, definido  $\mathbb{R}P^1$ , teremos que  $\mathbb{R}P^2$  é construído adicionando uma 2-célula  $e_\alpha^2$  através da aplicação  $f_\alpha : \partial\mathbb{D}_\alpha^2 \rightarrow \mathbb{R}P^1$  tomando  $f_\alpha(x) = [x]$ , onde temos que  $\mathbb{R}P^2 := \mathbb{D}_\alpha^2 \bigsqcup_{\alpha=0} \mathbb{R}P^1 / \sim$ . Seguindo de forma indutiva, suponha que é dado  $\mathbb{R}P^{n-1}$ , então é possível obter  $\mathbb{R}P^n$  definindo a aplicação  $f_\alpha : \partial\mathbb{D}_\alpha^n \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ , dado por  $f_\alpha(x) = [x]$ . Logo,  $\mathbb{R}P^n = \mathbb{D}_\alpha^n \bigsqcup_{\alpha=0} \mathbb{R}P^{n-1} / \sim$ . Por fim, notemos que  $\mathbb{R}P^n$  tem a estrutura de complexo celular  $e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n$ , com cada célula  $e^i$  com dimensão  $i \leq n$ .

A importância do estudo da topologia do CW-complexo de dimensão finita vem do fato que toda variedade compacta de dimensão  $n$  tem o tipo de homotopia de CW-complexo de dimensão  $n$ .

### 1.3.3 Suspensão e o Cone de um Espaço Topológico

Para um espaço topológico  $X$ , a *suspensão*  $SX$  de  $X$ , é o espaço quociente obtido de  $X \times I = [0, 1]$ , colapsando  $X \times \{0\}$  em um ponto e  $X \times \{1\}$  em outro ponto.

Por exemplo, se  $X = \mathbb{S}^n$ , observemos que o conjunto  $X \times I$  é equivalente ao cilindro. Daí colapsando  $X \times \{0\} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$  e  $X \times \{1\} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}, 1) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$  nos pontos  $(0, \dots, 0)$  e  $(0, \dots, 1)$ , temos portanto que  $SX$  é homeomorfo a  $\mathbb{S}^{n+1}$ .

O *cone* sobre  $X$ , denotado por  $CX = (X \times I) / X \times \{0\}$ , onde  $X \times \{0\}$  é colapsado em um ponto. Por exemplo, para  $X = \mathbb{S}^2$ , temos um cone sobre a esfera  $\mathbb{S}^2$ .

### 1.3.4 Soma Wedge de Espaços Topológicos

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Dados os pontos  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$ , temos que a *Soma Wedge*  $X \vee Y$ , é o quociente da união disjunta  $X \sqcup Y$  identificando os pontos  $x_0$  e  $y_0$  em um único ponto.

Podemos estender essa noção para uma família arbitrária de espaços topológicos  $X_\alpha$ , fixando para cada índice  $\alpha$ , um ponto  $x_\alpha \in X_\alpha$  e partindo da união disjunta  $\bigsqcup_{\alpha=0} X_\alpha$  identificando os pontos  $x_\alpha$  em um único ponto.

**Definição 1.3.16.** *Dada uma coleção de esferas  $\mathbb{S}^{n_1}, \dots, \mathbb{S}^{n_k}$ , o wedge  $\mathbb{S}^{n_1} \vee \dots \vee \mathbb{S}^{n_k}$  é chamado de *buquê de esferas*.*

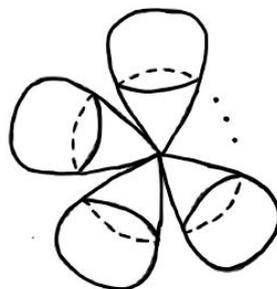


Figura 1.8: Buquê de Esferas

### 1.3.5 Homologia Simplicial

Uma combinação afim de pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  em  $\mathbb{R}^m$  é uma expressão do tipo  $p = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$  com  $\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$ . Se, além disso, tivermos  $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0$ , dizemos que  $p$  é uma *combinação convexa* dos pontos  $x_0, \dots, x_n$ .

Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^m$  é *convexo* se, e somente se, toda combinação convexa de elementos de  $X$  ainda pertencer a  $X$ .

O conjunto de todas as combinações convexas de um conjunto arbitrário  $X \subset \mathbb{R}^m$  é convexo. Ele é chamado a *envoltória convexa* de  $X$  e está contido em qualquer conjunto convexo que contenha  $X$ . Neste sentido, a envoltória convexa de  $X$  é o menor conjunto convexo contendo  $X$ . Podemos descrevê-la como o *fecho convexo* de  $X$ , ou seja, a interseção de todos os conjuntos convexas que contêm  $X$ .

**Definição 1.3.17.** Um  $n$ -simplexo  $s$  do  $\mathbb{R}^m$  é o fecho convexo de uma coleção de  $n + 1$  pontos  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  no  $\mathbb{R}^m$ , onde  $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$  forma um conjunto linearmente independente. Os elementos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  são chamados *vértices* de  $s$ . Denotamos o  $n$ -simplexo por  $[x_0, \dots, x_n]$ .

Se  $p = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \in s$  com  $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0$  e  $\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$ , os números  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  chamam-se as *coordenadas baricêntricas* do ponto  $p$ .

**Definição 1.3.18.** O  $n$ -simplexo  $\Delta^n$  do  $\mathbb{R}^{n+1}$  com vértices  $x_0 = (1, 0, \dots, 0), x_1 = (0, 1, \dots, 0), \dots, x_n = (0, \dots, 0, 1)$  é denominado o  $n$ -simplexo padrão.

Ao retirar um dos  $n + 1$  vértices de  $[x_0, \dots, x_n]$  teremos que os  $n$  vértices restantes formam um  $(n - 1)$ -simplexo, o qual será chamado de *face* de  $[x_0, \dots, x_n]$  e representada por  $[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$ . A união de todas as faces de  $\Delta^n$  é o *bordo* de  $\Delta^n$  que é denotado por  $\partial\Delta^n$ . O interior de  $\Delta^n$  será o *simplexo aberto*  $\mathring{\Delta}^n = \Delta^n - \partial\Delta^n$ .

**Exemplo 1.3.19.** Em dimensões 0, 1, 2 e 3, o  $n$ -simplexo padrão é respectivamente: um ponto, um segmento de reta, um triângulo e um tetraedro.

**Definição 1.3.20.** Um *complexo simplicial*  $X$  é uma coleção finita de simplexos em  $\mathbb{R}^m$ , tal que:

- i) Toda face de um simplexo de  $X$  é ainda um simplexo de  $X$ ;
- ii) Se  $s$  e  $t$  são simplexos de  $X$  então  $s \cap t$  é vazio ou é uma face comum a  $s$  e  $t$  (e, portanto, é um simplexo de  $X$ ).

**Definição 1.3.21.** Uma estrutura  $\Delta$ -complexo em um espaço  $X$  é uma coleção de aplicações  $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$ , com  $n$  dependendo do índice  $\alpha$ , tal que:

## 1. Preliminares

- i) A restrição  $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$  é injetiva e cada ponto de  $X$  esta na imagem de exatamente uma dessas restrições  $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ ;
- ii) Cada restrição de  $\sigma_\alpha$  a uma face de  $\Delta^n$  é uma aplicação  $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \rightarrow X$ . Aqui identificamos a face de  $\Delta^n$  com  $\Delta^{n-1}$  pelo homeomorfismo linear canônico que preserva a ordenação dos vértices;
- iii) Um conjunto  $A \subset X$  é aberto se, e somente se,  $\sigma^{-1}(A)$  é aberto em  $\Delta^n$  para cada  $\sigma_\alpha$ .

Pensando em um  $\Delta$ -complexo  $X$  como um espaço quociente de uma coleção de simplexes disjuntos, não é difícil ver que  $X$  deve ser um espaço de Hausdorff. A Condição iii) então implica que cada restrição  $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$  é um homeomorfismo sobre sua imagem, que é portanto, um simplexo aberto em  $X$ . Na Proposição A.2 do Apêndice, Hatcher [6], prova que estes simplexes abertos  $\sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^n)$  são as células  $e^n$  de uma estrutura complexa CW em  $X$  com os  $\sigma_\alpha$ 's como aplicações características.

**Definição 1.3.22.** Um grupo abeliano  $G$  é chamado *livre* se existe um subconjunto  $A \subset G$ , tal que todo elemento  $g \in G$  tem uma única representação

$$\sum_{x \in A} n_x x$$

onde  $n_x$  é um inteiro que é não nulo apenas para um número finito de  $x$  em  $A$ . O conjunto  $A$  é dito uma base para  $G$ .

Definimos agora o *grupo de homologia simplicial* de um  $\Delta$ -complexo  $X$ . Seja  $\Delta_n(X)$  um grupo abeliano livre com base no  $n$ -simplexo aberto  $e_\alpha^n$  de  $X$ . Os elementos de  $\Delta_n(X)$  são chamados de  $n$ -cadeias, podemos escrevê-los com uma soma finita  $\sum_\alpha n_\alpha \cdot e_\alpha^n$ , com coeficientes  $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ . Equivalentemente, poderíamos escrever  $\sum_\alpha n_\alpha \cdot \sigma_\alpha$ , quando  $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$  é o mapa característico de  $e_\alpha^n$ , com imagem o fecho de  $e_\alpha^n$ .

Em termos de cadeias, dizemos que o *bordo* de  $[x_0, \dots, x_n]$  é a  $(n-1)$ -cadeia formada pela soma das faces  $[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$ . No entanto, para dar um sentido orientado podemos escrever o bordo de  $[x_0, \dots, x_n]$  como sendo

$$\sum_i (-1)^i [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$$

**Definição 1.3.23.** Definimos a *aplicação bordo* como o homomorfismo  $\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$  dado por

$$\Delta_n(\sigma_\alpha) = \sum_i (-1)^i \sigma_\alpha|_{[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]}$$

**Exemplo 1.3.24.** Calculemos a seguinte composição  $\Delta_2 \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1 \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0$ . Teremos

## 1. Preliminares

$$\partial_1([x_1, x_2] - [x_0, x_2] + [x_0, x_1]) = \partial_1[x_1, x_2] - \partial_1[x_0, x_2] + \partial_1[x_0, x_1].$$

Note que os simplexos de orientações opostas cancelam, logo:

$$[x_2] - [x_1] - [x_2] + [x_0] + [x_1] - [x_0] = 0.$$

Portanto,  $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$

Podemos generalizar o exemplo acima, como mostra o próximo Lema.

**Lema 1.3.25.** A composição  $\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}(X)$  é homomorfismo nulo.

**Demonstração:** Veja o Lema 2.1 de [6].

Uma sequência de grupos abelianos  $C_n = \Delta_n(X)$  conectados por homomorfismos  $\partial_n$  como definido em 1.3.23 tal que  $(\partial_n \circ \partial_{n+1})(\sigma) = 0$ , para todo  $\sigma \in C_{n+1}$ , é chamado **complexo de cadeia**. Ou seja, um complexo de cadeias é uma sequência do tipo:

$$\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \xrightarrow{\partial_0} \{0\}.$$

Onde os elementos de  $\text{Ker}(\partial_n)$  são chamados **ciclos** e os elementos de  $\text{Im}(\partial_{n+1})$  são ditos **bordos**. Pelo Lema 1.3.25, temos  $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subset \text{Ker}(\partial_n)$ . Como cada grupo de cadeia  $C_n$  é abeliano todos os seus subgrupos são normais. Então, por  $\text{Ker}(\partial_n)$  ser subgrupo de  $C_n$ ,  $\text{Ker}(\partial_n)$  é abeliano, portanto,  $\text{Im}(\partial_{n+1})$  é um subgrupo normal de  $\text{Ker}(\partial_n)$ . Logo, podemos definir o grupo quociente:

$$H_n(X, G) = \frac{\text{Ker}(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$$

que é chamado de  **$n$ -ésimo grupo de homologia simplicial** de  $X$  com coeficientes em  $G$ .

**Exemplo 1.3.26.** Seja  $X = \mathbb{S}^1$ . Calculamos os grupos de homologia simplicial de  $\mathbb{S}^1$  com coeficientes inteiros, considerando uma estrutura de  $\Delta$ -complexo em  $\mathbb{S}^1$ . Como na Figura 1.9.

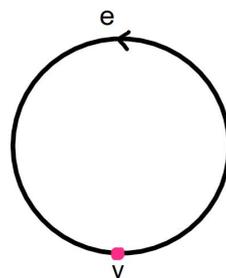


Figura 1.9: Estrutura simplicial do  $\mathbb{S}^1$

Assim, obtemos uma estrutura de  $\Delta$ -complexo em  $\mathbb{S}^1$  com 1 vértice (0-simplexo):  $v$  e 1 aresta (1-simplexo):  $e$ .

Construiremos os grupos das cadeias simplexas.

## 1. Preliminares

---

- Seja  $C_0$  o grupo livre gerado pelo 0-simplexo. Então, dada a 0-cadeia  $\kappa_0$ , temos que

$$\kappa_0 = k_1 v$$

Portanto,  $C_0 = \langle v \rangle \simeq \mathbb{Z}$ , com  $k_1 \in \mathbb{Z}$ .

- Agora, seja  $C_1$  o grupo livre gerado pelos 1-simplexo. Então, dada a 1-cadeia  $\kappa_1$ , temos que

$$\kappa_1 = k_1 e$$

Portanto,  $C_1 = \langle e \rangle \simeq \mathbb{Z}$ , com  $k_1 \in \mathbb{Z}$ .

Obtemos o seguinte complexo de cadeia:

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$$

As aplicações bordo são definidas da seguinte forma:

O homomorfismo  $\partial_0 : C_0 \rightarrow \{0\}$  é a aplicação bordo para as 0-cadeias. Assim,

$$\partial_0(v) = 0.$$

Logo, dado qualquer  $\kappa_0 \in C_0$ , temos que  $\partial_0(\kappa_0) = \partial_0(v) = 0$ .

Obtemos:  $Im(\partial_0) = \{0\}$  e  $Ker(\partial_0) = C_0 \simeq \mathbb{Z}$ .

O homomorfismo  $\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$  é a aplicação bordo para a 1-cadeia. Assim,

$$\partial_1(e) = v - v.$$

Logo, para qualquer  $\kappa_1 \in C_1$ , teremos que  $\partial_1(\kappa_1) = \partial_1(e) = 0$ .

Obtemos:  $Im(\partial_1) = \{0\}$  e  $Ker(\partial_1) = C_1 \simeq \mathbb{Z}$ .

O homomorfismo  $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$  é a aplicação bordo para as 2-cadeias. Assim, como não temos 2-simplexo, obtemos:  $Im(\partial_2) = 0$ .

Calculamos o  $i$ -ésimo grupo de homologia simplicial do espaço  $\mathbb{S}^1$  por:

$$H_0(\mathbb{S}^1) = \frac{Ker(\partial_0)}{Im(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} \simeq \mathbb{Z}$$

$$H_1(\mathbb{S}^1) = \frac{Ker(\partial_1)}{Im(\partial_2)} = \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} \simeq \mathbb{Z}$$

**Exemplo 1.3.27.** Calculamos a homologia simplicial do Toro,  $\mathbb{T}$ , com coeficientes em  $\mathbb{Z}$  considerando uma estrutura de  $\Delta$ -complexo em  $\mathbb{T}$ , como na Figura 1.10.

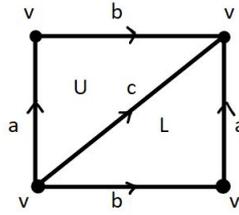


Figura 1.10: Estrutura simplicial de  $\mathbb{T}$

Assim, obtemos uma estrutura de  $\Delta$ -complexo em  $\mathbb{T}$ , com 1 vértice (0-simplexo):  $v$ ; 3 aresta (1-simplexo):  $a, b, c$  e 2 triângulos (2-simplético):  $U$  e  $L$ .

- $C_0$  é o grupo livre gerado pelo 0-simplexo. Então, dada a 0-cadeia  $\kappa_0$ , temos que

$$\kappa_0 = k_1 v$$

Logo,  $C_0 = \langle v \rangle \simeq \mathbb{Z}$ , com  $k_1 \in \mathbb{Z}$ .

- $C_1$  é grupo livre gerado pelo 1-simplexo. Dada uma 1-cadeia  $\kappa_1$ , temos que

$$\kappa_1 = k_1 a + k_2 b + k_3 c$$

em que  $k_i \in \mathbb{Z}$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Então,  $C_1 = \langle a, b, c \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

- $C_2$  é o grupo livre gerado pelo 2-simplexo. Logo, dado uma 2-cadeia  $\kappa_2$ , temos que

$$\kappa_2 = k_1 U + k_2 L$$

em que  $k_i \in \mathbb{Z}$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Logo,  $C_2 = \langle U, V \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Obtemos o seguinte complexo de cadeia:

$$C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$$

em que as aplicações bordo são definidas da seguinte forma:

O homomorfismo  $\partial_0 : C_0 \rightarrow \{0\}$  é a aplicação bordo para as 0-cadeias. Assim,

$$\partial_0(v) = 0$$

Portanto, dado  $\kappa_0 \in C_0$  temos que:  $\partial_0(\kappa_0) = \partial_0(v) = 0$ .

Obtemos:  $Im(\partial_0) = \{0\}$  e  $Ker(\partial_0) = C_0 = \langle v \rangle \simeq \mathbb{Z}$ .

O homomorfismo  $\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$  é a aplicação bordo para as 1-cadeias. Assim,

$$\partial_1(a) = \partial_1(b) = \partial_1(c) = v - v = 0$$

## 1. Preliminares

Portanto, dado qualquer  $\kappa_1 \in C_1$ , temos que:

$$\partial_1(\kappa_1) = \partial_1(k_1a + k_2b + k_3c) = k_1\partial_1(a) + k_2\partial_1(b) + k_3\partial_1(c) = 0$$

Obtemos:  $Im(\partial_1) = \{0\}$  e  $Ker(\partial_1) = C_1 = \langle a, b, c \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

O homomorfismo  $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$  é a aplicação bordo para as 2-cadeias. Assim,

$$\partial_2(U) = \partial_2[v_0, v_1, v_3] = [v_1, v_3] - [v_0, v_3] + [v_0, v_1] = b - c + a$$

$$\partial_2(L) = \partial_2[v_0, v_2, v_3] = [v_0, v_2] - [v_0, v_3] + [v_2, v_3] = b - c + a$$

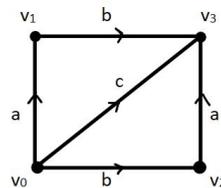


Figura 1.11: Fronteira do 2-simplexo

Obtemos:  $Im(\partial_2) = \langle b - c + a \rangle$  e  $Ker(\partial_2) = \mathbb{Z}$

O homomorfismo  $\partial_3 : C_3 \rightarrow C_2$  é a aplicação bordo para as 3-cadeias. Assim, como não existem 3-simplexos, obtemos que  $Im(\partial_3) = \{0\}$ .

Calculamos o  $i$ -ésimo grupo de homologia simplicial do espaço  $\mathbb{T}$  por:

$$H_0(\mathbb{T}) = \frac{Ker(\partial_0)}{Im(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} \simeq \mathbb{Z}$$

$$H_1(\mathbb{T}) = \frac{Ker(\partial_1)}{Im(\partial_2)} = \frac{\langle a, b, c \rangle}{\langle b - c + a \rangle} \simeq \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$H_2(\mathbb{T}) = \frac{Ker(\partial_2)}{Im(\partial_3)} = \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} \simeq \mathbb{Z}$$

### Observação 1.3.28.

1. Se  $X$  é um CW-complexo de dimensão  $n$  é possível provar que  $H_k(X) = 0$  para  $k > n$ . (Lema 2.34 em [6]);
2. Se  $X$  é um espaço conexo então  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ . (Proposição 2.7 em [6]);
3. Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos conexos por caminhos. Se  $X$  tem o mesmo tipo de homotopia de  $Y$  (em particular se são homeomorfos), então  $H_k(X) = H_k(Y)$ ,  $\forall k \geq 0$ . (Proposição 1.11 de [21])

### 1.3.6 Característica de Euler

Para um CW-complexo finito  $X$ , a *característica de Euler*  $\chi(X)$  é definido como a soma alternada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n$$

onde  $c_n$  é o número de  $n$ -células de  $X$ .

**Exemplo 1.3.29.** Para os Exemplos 1.3.13 e 1.3.14, calculemos respectivamente as seguintes características de Euler:

a) Para  $X = \mathbb{S}^n$ , teremos  $c_0 = 1$  e  $c_n = 1$ . Portanto,  $\chi(\mathbb{S}^n) = 1 + (-1)^n$ ;

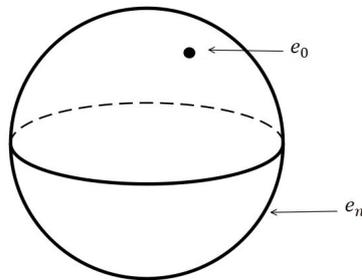


Figura 1.12: Representação de  $\mathbb{S}^n$  como um CW-complexo e suas células

b) Já para  $X = \mathbb{T}$ , teremos  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 2$  e  $c_2 = 1$ . Portanto,  $\chi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = 1 - 2 + 1 = 0$ .

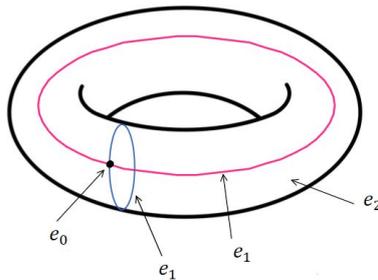


Figura 1.13: Representação de  $\mathbb{T}$  como um CW-complexo e suas células

O seguinte resultado mostra que  $\chi(X)$  pode ser definido puramente em termos de homologia, portanto dependente apenas do tipo de homotopia de  $X$ . Em particular,  $\chi(X)$  é independente da escolha da estrutura de CW em  $X$ .

**Teorema 1.3.30.**  $\chi(X) = \sum_n (-1)^n \text{posto} H_n(X)$ .

**Demonstração:** Ver Teorema 2.44 em [6].

■

O posto de um grupo abeliano finitamente gerado é a quantidade de  $\mathbb{Z}$  somados, quando o grupo é expresso como um soma direta de grupos cíclicos.

Segue da classificação de grupos abelianos finitamente gerados <sup>2</sup> que  $H_n(X) = \mathbb{Z}^t \oplus T$ , onde  $T$  é o grupo de torção e  $t \geq 0$  (chamado posto de  $H_n(X)$ ). É importante ressaltar que  $t$  pode ser descrito como o  $n$ -ésimo **número de Betti**  $b_n$ . Por exemplo, para o grupo de homologia do Toro,  $H_n(\mathbb{T})$ , temos para  $H_0(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}$ ,  $H_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}^2$  e  $H_2(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}$ , portanto temos respectivamente os seguintes números de Betti:  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 2$  e  $b_2 = 1$ . Essa definição vale também quando consideramos  $X$  como um  $\Delta$ -complexo com uma quantidade finita de  $n$ -simplexos.

## 1.4 O Teorema do ponto fixo de Lefschetz

Seja a aplicação suave  $f : M \rightarrow M$  em uma variedade orientada compacta  $M$ . Definimos o número de Lefschetz pela seguinte interseção

$$\tau(f) = (\Delta \cap \Gamma_f : M \times M)$$

onde  $\Delta = \{(x, x); x \in M\}$  é a diagonal e  $\Gamma_f = \{(x, f(x)); x \in M\}$  é o gráfico de  $M$ . Observe que  $\Gamma_f \cap \Delta = \text{Fix}(f)$ , tal que,  $\text{Fix}(f) = \{x \in M; f(x) = x\}$ . Assim, podemos usar a teoria da interseção para contar seus pontos comuns. Note que,  $f$  pode realmente ter um número infinito de pontos fixos, sendo a aplicação identidade um exemplo.

**Teorema 1.4.1.**  $\tau(f)$  é um invariante topológico.

**Demonstração:** Ver [5], página 120. ■

Suponha que  $\Delta \pitchfork_{x,x} \Gamma_f$ . Tais aplicações, chamadas *aplicações de Lefschetz*, têm apenas um número finito de pontos fixos, embora a recíproca seja falsa. Nessas circunstâncias, podemos definir uma orientação  $\pm 1$  na interseção de  $\Gamma_f$  com  $\Delta$ , denotada por  $i(x, f)$ , índice de  $f$  em  $x$ . Isto é,  $i(x, f)$  é o número de interseções de  $\Delta$  com  $\Gamma_f$  no ponto  $(x, x)$ , com isso temos

$$\tau(f) = \sum_{x \in \text{Fix}(f)} i(x, f)$$

Para uma aplicação  $f : X \rightarrow X$  de um complexo CW de  $X$ , ou mais geral, para qualquer espaço que tenha uma homologia de grupos finitamente gerada e se anula em alguma dimensão superior, o número de Lefschetz  $\tau(f)$  é definido por:

---

<sup>2</sup> ver [4] página 341

$$\sum_n (-1)^n \text{tr}(f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(X))$$

onde  $\text{tr}$  denota o traço da matriz dos geradores do  $n$ -ésimo grupo de homologia de  $X$ .

Em particular, se  $f$  é a identidade, ou é homotópica a identidade, temos que  $\tau(f)$  é igual a característica de Euler  $\chi(X)$ , já que o traço da matriz identidade  $n$  é  $n$ .

**Teorema 1.4.2** (Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz). *Se  $X$  é um complexo simplicial finito, ou mais geral, um retrato de complexo simplicial finito, e  $f : X \rightarrow X$  é uma aplicação, com  $\tau(f) \neq 0$ , então  $f$  tem um ponto fixo.*

**Demonstração:** Ver [6], página 179. ■

## 1.5 O Grau Topológico de uma Aplicação

Seja  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  uma aplicação contínua, com  $n > 0$ , o mapa induzido por  $f_* : H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$ , é um homomorfismo de um grupo cíclico infinito nele mesmo, onde  $H_n(\mathbb{S}^n)$  representa o  $n$ -ésimo grupo de homologia de  $\mathbb{S}^n$ . Considerando o fato de que  $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ , obtemos que  $f_*$  é da forma  $f_* : x \mapsto dx$  para algum  $d \in \mathbb{Z}$ . Esse  $d$  é chamado o **grau** de  $f$ , com a notação  $\text{deg}(f)$ . Aqui temos algumas propriedades básicas:

- 1) Se  $f := \text{Id}$ , onde  $\text{id}$  é a identidade, então  $\text{deg}(f) = 1$ , por  $f_* = \text{Id}$
- 2) Se  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$ , ou seja,  $f$  é aplicação reflexão, então  $\text{deg}(f) = -1$ . Podemos dar a  $\mathbb{S}^n$  uma estrutura de  $\Delta$ -complexo com os dois hemisférios complementares, dado pelos  $n$ -simplexos  $\Delta_1^n$  e  $\Delta_2^n$ , o gerador para  $H_n(\mathbb{S}^n)$  é da forma  $\Delta_1^n - \Delta_2^n$  e a reflexão envia em  $\Delta_2^n - \Delta_1^n$ .
- 3)  $\text{deg}(f \circ g) = \text{deg}(f) \cdot \text{deg}(g)$ , por  $(f \circ g)_* = f_* \cdot g_*$ .
- 4) Se  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, -x_{n+1})$ , ou seja,  $f$  é a aplicação antípoda, teremos que  $\text{deg}(f) = (-1)^{n+1}$ , pois podemos obter  $f$  fazendo  $n+1$  reflexões, cada uma mudando o sinal de uma coordenada em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

# Capítulo 2

## Conjuntos Analíticos Complexos

O capítulo está dividido em três seções. A primeira delas comentamos e demonstramos alguns resultados elementares sobre conjuntos analíticos complexos. A seção seguinte conta com o resultado mais importante do capítulo: O Teorema da Estrutura Cônica Local, que nos dará uma característica topológica do conjunto analítico  $X$  em termos do link. Na seção 2.3, enunciamos o Lema de Seleção da Curva

As principais referências foram: [3] e [13].

### 2.1 Fatos Elementares sobre Conjuntos Analíticos Complexos

Essa seção será importante para fixarmos notações e definirmos conceitos como de conjuntos analíticos, germe de conjuntos e germe de funções que serão bastante utilizados em capítulos subsequentes.

**Definição 2.1.1.** *Uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , definida em um subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{C}$ , é **analítica** se, para todo  $z_0 \in U$ , existe uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)w^n$ , com raio de convergência  $\omega > 0$ , tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)(z - z_0)^n$$

para todo  $z \in U$  tal que  $|z - z_0| < \omega$ .

Do teorema sobre diferenciabilidade das funções representadas por séries de potência decorre que toda função analítica  $f$  é também holomorfa.

Seja  $\mathbb{C}$  o corpo dos números complexos. Dado  $X \subset \mathbb{C}^N$ , dizemos que  $X$  é um **conjunto analítico complexo** ou simplesmente conjunto analítico, se para cada  $p \in X$  existe uma vizinhança aberta  $U_p \subset \mathbb{C}^N$  de  $p$  e funções analíticas  $f_{p_i} : U_p \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $i \in \{1, \dots, k\}$  definidas em  $U_p$ , tal que  $X \cap U_p$  é o conjunto de zeros comuns dessas funções. Em outras palavras:

## 2. Conjuntos Analíticos Complexos

$$X \cap U_p = \{x \in U_p \mid f_{p_1}(x) = f_{p_2}(x) = \dots = f_{p_k}(x) = 0\}$$

**Exemplo 2.1.2.** Seja  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(x,y) = x^2 - y^3$ . O conjunto  $X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) = 0\}$  é um conjunto analítico complexo.

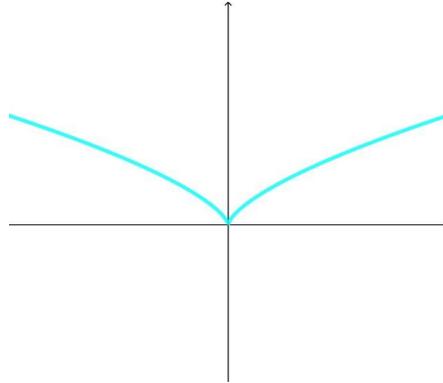


Figura 2.1: Representação da Variedade  $X_1$  em  $\mathbb{R}^2$

**Exemplo 2.1.3.** Seja  $g : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  e  $h : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ , definidas respectivamente por  $g(x,y,z) = z$  e  $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . O conjunto  $X_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0\}$  é um conjunto analítico complexo.

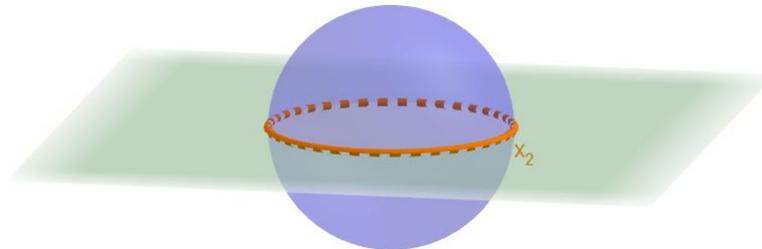


Figura 2.2: Representação da Variedade  $X_2$  em  $\mathbb{R}^3$

**Teorema 2.1.4.** Se  $A$  e  $B$  forem conjuntos analíticos complexos de  $\mathbb{C}^N$ , então  $A \cup B$  e  $A \cap B$  são conjuntos analíticos complexos.

**Demonstração:** Se  $A$  e  $B$  são conjuntos analíticos complexos, então para cada  $a \in A$  e  $b \in B$ , existem vizinhanças abertas  $U_a$  e  $U_b$  tal que  $A \cap U_a = \{x \in U_a \mid f_{a_1}(x) = \dots = f_{a_k}(x) = 0\}$  e  $B \cap U_b = \{x \in U_b \mid g_{b_1}(x) = \dots = g_{b_l}(x) = 0\}$ .

Defina  $h_r^{ij} = f_{a_i} \cdot g_{b_j}$ , uma função analítica, com  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $j \in \{1, \dots, l\}$  e  $r \in \{1, \dots, m\}$ , onde  $m = i \cdot j$ . Afirmamos que  $A \cup B$  é um conjunto analítico complexo. De fato, para cada  $z \in A \cup B$  existe uma vizinhança aberta  $U_z$  de  $z \in \mathbb{C}^N$  tal que  $(A \cup B) \cap U_z = \{x \in U_z \mid h_{z_1}^{ij}(x) = \dots = h_{z_r}^{ij}(x) = 0\}$ , assim é possível concluir que  $(A \cup B)$  é um conjunto analítico complexo.

Agora, dado  $z \in A \cap B$ , tome  $U_z \subset \mathbb{C}^N$  uma vizinhança aberta de  $z$  em  $A$  e  $V_z \subset \mathbb{C}^N$  uma vizinhança aberta de  $z$  em  $B$ . Como  $A$  e  $B$  são conjuntos analíticos, temos que  $A \cap U_z = \{x \in$

## 2. Conjuntos Analíticos Complexos

$U_z \mid f_{z_1}(x) = \dots = f_{z_k}(x) = 0\}$  e  $B \cap V_z = \{x \in V_z \mid g_{z_1}(x) = \dots = g_{z_l}(x) = 0\}$ . Tomando a interseção dos conjuntos  $A \cap U_z$  com  $B \cap V_z$ , concluímos que  $A \cap B$  é um conjunto analítico complexo. ■

Sejam  $f_1, \dots, f_k$  as funções que definem localmente o conjunto analítico complexo  $X \subset \mathbb{C}^N$  no ponto  $x$ . Defina a aplicação  $F : X \rightarrow \mathbb{C}^k$  tal que  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ , com  $x = (x_1, \dots, x_N)$ . Para cada  $x \in X$  considere a matriz:

$$JF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_N}(x) \end{pmatrix}_{k \times N}$$

que denotaremos a partir de agora por:  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{k \times N}$ , com  $i \in \{1, \dots, k\}$  e  $j \in \{1, \dots, N\}$ .

Seja  $\rho$  o posto máximo que essa matriz atinge nos pontos de  $X$ .

**Definição 2.1.5.** Um ponto  $x \in X$  é chamado *não-singular ou regular* se a matriz  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{k \times N}$  tem posto máximo  $\rho$ . Caso contrário,  $x \in X$  será chamado de *singular*.

Denotamos por  $\Sigma(X)$  o conjunto de todos os pontos singulares do conjunto analítico complexo  $X$ .

**Lema 2.1.6.** O conjunto  $\Sigma(X)$ , de todos os pontos singulares de  $X$ , formam um subconjunto analítico complexo próprio (possivelmente vazio) de  $X$ .

**Demonstração:** Da definição de posto, segue que o conjunto  $X \setminus \Sigma(X)$  é não vazio. De fato se supormos que  $X \subset \Sigma(X)$ , então  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$  tem posto menor que  $\rho$  para todo ponto em  $x$ , mas isso é absurdo, logo,  $\Sigma(X) \subsetneq X$ . Note que  $\Sigma(X)$ , é constituído de pontos de  $X$  que anulam os determinantes dos menores  $\rho \times \rho$  da matriz  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{k \times N}$ . Reciprocamente, se  $x$  anula o determinante dos menores  $\rho \times \rho$ ,  $x$  é um ponto singular e  $x \in \Sigma(X)$ . Então,  $\Sigma(X)$  é o conjunto dos pontos que anulam as funções analíticas que são dadas por cada determinante menor  $\rho \times \rho$ . ■

Consideramos  $X \subset \mathbb{C}^N$  um conjunto analítico complexo e  $\rho$  como definido anteriormente. Vamos apresentar alguns resultados sobre o conjunto  $M = X \setminus \Sigma(X)$  dos pontos não singulares de  $X$ .

**Teorema 2.1.7. (Whitney)** *O conjunto  $X \setminus \Sigma(X)$ , pontos regulares de  $X \subset \mathbb{C}^N$ , forma uma variedade suave não vazia. Além disso,  $X \setminus \Sigma(X)$  é uma variedade suave analítica complexa e tem dimensão  $N - \rho$ .*

**Demonstração:** Ver [13], Teorema 2.3. ■

**Teorema 2.1.8. (Whitney)** *Para duas variedades analíticas complexas em  $\mathbb{C}^N$ ,  $X$  e  $W$ , com  $X \supset W$ , o conjunto  $X \setminus W$  tem no máximo um número finito de componentes topológicas.*

**Demonstração:** Ver [13], Teorema 2.4. ■

**Corolário 2.1.9.** *Seja  $X$  um conjunto analítico complexo. O conjunto  $X$  pode ser expressado como união finita disjunta*

$$X = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p$$

*onde cada  $M_j$  é uma variedade suave com uma quantidade finita de componentes conexas. Analogamente, a diferença entre as variedades  $X \setminus W$  também pode ser expresso como uma união finita de variedades suaves.*

**Demonstração:** No Corolário 2.6 de [13], Milnor mostra para o caso em que  $X$  é um conjunto algébrico. No entanto, para o caso em que consideramos  $X$  um conjunto analítico a demonstração é feita de modo similar. ■

Seja  $Z$  um espaço topológico de  $\mathbb{C}^N$  e  $x \in Z$  um ponto. No conjunto  $P(Z)$  de todos os subconjuntos de  $Z$ , definimos a seguinte relação de equivalência em  $x$ :

$$A \sim_x B \text{ se, e somente se, } A \cap U_x = B \cap U_x$$

para alguma vizinhança aberta  $U_x \subset \mathbb{C}^N$  de  $x$

**Definição 2.1.10.** *Uma classe de equivalência da relação  $\sim_x$  é chamada **germe de um subconjunto de  $Z$  em  $x$** . E denotamos a classe de equivalência de  $A \subset Z$  por  $(A, x)$ .*

**Definição 2.1.11.** *Dizemos que um germe de um conjunto analítico  $(Y, x)$  é **irredutível**, quando para quaisquer germes de conjuntos analíticos  $(Y_1, x)$  e  $(Y_2, x)$ , tais que  $Y = Y_1 \cup Y_2$ , então  $Y = Y_1$  ou  $Y = Y_2$ . Caso contrário é dito **redutível**.*

**Exemplo 2.1.12.** Consideremos o germe do conjunto analítico  $(X_1, 0)$  do exemplo 2.1.2. O germe  $X_1$  é irredutível em  $\mathbb{C}[x, y]$ . Se supormos o contrário, então necessariamente temos:

$$x^2 - y^3 = (x + h(y)) \cdot (x - g(y))$$

com  $h(y), g(y) \in \mathbb{C}[y]$ .

Em particular, isso implica que  $y^3 = h(y) \cdot g(y)$ . Então,  $h(y) = y^n$ , com  $n \in \{1, 2, 3\}$ , mas descartamos facilmente os três valores possíveis para  $n$ .

**Exemplo 2.1.13.** Seja  $W = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2y - y^2 = 0\}$  um conjunto analítico complexo. O germe de conjunto analítico  $(W, 0)$  é redutível, pois existem os germes  $(W_1, 0)$  e  $(W_2, 0)$ , com  $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y = 0\}$  e  $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 - y = 0\}$ , tal que  $W = W_1 \cup W_2$ , com  $W_1, W_2 \subsetneq W$ .

Novamente considere  $Z$  um espaço topológico e  $x \in Z$  um ponto. Defina o conjunto  $M = \{(U_x, f) \mid \text{tal que } U_x \text{ é uma vizinhança aberta de } x \text{ e uma função } f : U_x \rightarrow \mathbb{C}\}$ . Introduziremos uma relação de equivalência em  $M$ :

$$(U_1, f_1) \approx_x (U_2, f_2) \text{ se, e somente se, } f_1|_{U_x} = f_2|_{U_x}$$

onde  $U_x \subset U_1 \cap U_2$ .

**Definição 2.1.14.** Uma classe de equivalência da relação  $\approx_x$  é chamada **germe de funções** de  $Z$  em  $\mathbb{C}$  no ponto  $x$ . Denotamos a classe de equivalência de  $(U, f)$  por  $f : (U, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, f(x))$ .

Seja  $U \subset \mathbb{C}^N$  um aberto, defina

$$O(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é analítica}\},$$

note que esse conjunto tem a estrutura de anel comutativo com unidade em relação as operações de adição e multiplicação de funções. Seja  $O_{N, \underline{0}}$  o **conjunto dos germes de funções analíticas** em  $\underline{0} \in U$ . Sendo  $O_{N, \underline{0}} \subset O(U)$ , então  $O_{N, \underline{0}}$  é induzido a ser também um anel comutativo com unidade.

## 2.2 Estrutura Cônica Local

Seja  $X \subset \mathbb{C}^N$  um conjunto analítico complexo. Dado  $x \in X$ , temos que existe uma vizinhança aberta  $U_x$  de  $x$  e  $k$  funções analíticas  $\{f_1, \dots, f_k\}$  definidas nesta vizinhança, tal que  $X \cap U_x$  é o conjunto de zeros comuns dessas funções. Sejam  $\rho$  o posto máximo da matriz  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{k \times N}$  nos pontos de  $X$ ,  $M = X \setminus \Sigma(X)$  a variedade suave de pontos regulares de  $X$ . Tome  $g : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  uma função polinomial.

**Lema 2.2.1.** *O conjunto dos pontos críticos de  $g$  restrito a  $M$ ,  $g|_M$ , é a interseção de  $M$  com o conjunto analítico  $W$ , onde  $W$  é formado por pontos  $a \in X$ , tal que a matriz*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_N}(a) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix}$$

tem posto menor ou igual a  $\rho$ .

**Demonstração:** Defina  $F : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^k$ , dada por  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ , com  $x = (x_1, \dots, x_N)$ . Para cada  $a \in M$ , a matriz  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{k \times N}$  terá posto máximo  $\rho$ , onde  $i \in \{1, \dots, k\}$  e  $j \in \{1, \dots, N\}$ . Com isso, para  $F$  restrita a  $M$ , teremos posto constante  $\rho$  em todo elemento  $a$  dessa restrição, pelo Teorema do Posto,  $F$  terá uma representação local em qualquer vizinhança na forma:  $F(x) = (u_1, \dots, u_\rho, 0, \dots, 0)$ . Se  $a \in M$  temos que  $F(a) = 0$ , então teremos que  $u_1 = \dots = u_\rho = 0$ , logo  $M$  corresponde ao lugar geométrico:

$$\{(u_1, \dots, u_\rho) \in X \mid u_1 = \dots = u_\rho = 0\}.$$

Tomemos  $x_{\rho+1}, \dots, x_N$  como as coordenadas locais em  $M$ . Observe que  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_l}(a)\right) = 0$ , para todo  $a \in M$  e  $l \geq \rho + 1$  e que a matriz  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_l}\right)$  tem posto  $\rho$  por ser coluna equivalente à  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ , então as  $\rho$  primeiras colunas de  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_l}\right)$  são linearmente independentes.

Assim, a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_1}(a) & \dots & \frac{\partial g}{\partial u_N}(a) \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_N}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial u_N}(a) \end{pmatrix}$$

tem posto  $\rho$  se, e somente se,

$$\frac{\partial g}{\partial u_{\rho+1}}(a) = \dots = \frac{\partial g}{\partial u_N}(a) = 0.$$

Mas isso ocorre se, e somente se, o ponto  $a$  for um ponto crítico de  $g|_M$ . Por a matriz acima ser coluna equivalente a matriz dada em 2.2.1, o resultado segue. ■

## 2. Conjuntos Analíticos Complexos

É importante entendermos o conteúdo geométrico por trás do Lema 2.2.1. Inicialmente, note que ao inserirmos uma nova linha constituída pelo vetor gradiente de  $g$ ,  $\vec{\nabla}g$ , na matriz  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)\right)_{k \times N}$ , de posto máximo  $\rho$ , teremos duas possibilidades ou o posto máximo da matriz aumenta ou posto continua sendo  $\rho$ . No caso em que o posto não aumenta, temos que  $\vec{\nabla}g$  será combinação linear das linhas de baixo, ou seja,  $\vec{\nabla}g$  está contido no espaço vetorial  $\rho - dimensional$  gerado pelos vetores gradientes das  $f_i$ 's e com isso o hiperplano tangente  $T_x g^{-1}(g(x))$  de dimensão  $N - 1$  contém o hiperplano tangente em qualquer ponto de  $M = X \setminus \Sigma(X)$ , e pela definição 1.1.24 temos que a fibra  $g^{-1}(g(x))$  intersecta não transversalmente a variedade  $M$  em  $x$ .

**Exemplo 2.2.2.** *Seja  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica complexa, dada por  $f(x, y) = x^2 - y^3$ . As identidades,*

$$\operatorname{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) = \frac{1}{2}(x^2 - y^3 + \bar{x}^2 - \bar{y}^3) \text{ e } \operatorname{Im}(f) = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}) = \frac{1}{2i}(x^2 - y^3 - \bar{x}^2 + \bar{y}^3)$$

*expressam a parte real e a parte imaginária em termos dos números complexos e seu conjugado. Então, a matriz jacobiana de  $f$  com respeito às variáveis  $x, \bar{x}, y, \bar{y}$  é dada por:*

$$Jf(x, \bar{x}, y, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 2x & 2\bar{x} & -3y^2 & -3\bar{y}^2 \\ 2x & -2\bar{x} & -3y^2 & 3\bar{y}^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2x & 0 & 3y^2 & 0 \\ 0 & 2\bar{x} & 0 & -3\bar{y}^2 \end{pmatrix}$$

*e tem posto máximo 2. O conjunto de pontos críticos de  $f$  é dado por  $\Sigma_1 := \{x = y = 0\}$ .*

*Agora, seja  $g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x, y) = \|(x, y)\|^2$ . Da mesma forma podemos expressar a função  $g$  em termos de números reais, através da identidade:*

$$\operatorname{Re}(g) = \frac{1}{2}(g + \bar{g}) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2) \quad \operatorname{Im}(g) = \frac{1}{2i}(g - \bar{g}) = 0.$$

*Portanto, temos a seguinte matriz jacobiana:*

$$Jg(x, \bar{x}, y, \bar{y}) = \begin{pmatrix} x & \bar{x} & y & \bar{y} \end{pmatrix}$$

*cujo posto máximo é 1. Os pontos crítico de  $g$  são dados por  $\Sigma_2 := \{x = y = 0\}$ .*

*Defina  $(g, f_1, f_2) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . A matriz jacobiana dessa função nas variáveis  $(x, \bar{x}, y, \bar{y})$  é dada por:*

$$\begin{pmatrix} x & \bar{x} & y & \bar{y} \\ -2x & 0 & 3y^2 & 0 \\ 0 & 2\bar{x} & 0 & -3\bar{y}^2 \end{pmatrix}$$

*Devemos notar que se  $x = 0$  o determinante de todo menor  $3 \times 3$  será nulo, pois teremos para cada um desses menores uma coluna inteiramente nula o mesmo acontece se supormos  $y = 0$ . Logo, o conjunto de pontos críticos da aglutinação de funções  $(g, f_1, f_2)$  é dado por  $\Sigma_3 := \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$ .*

## 2. Conjuntos Analíticos Complexos

---

Pelo Lema 2.2.1, os pontos críticos de  $g$  restrita a variedade suave  $f^{-1}(f(p))$ , com  $p \neq 0$ , é dado pela interseção  $f^{-1}(f(p))$  com o conjunto analítico  $\Sigma_3$ .

Em particular, para  $p = 1$ , temos que:

i) Se  $y = 0$ , então para  $x^2 - y^3 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ . Tome  $\varepsilon = \|(-1, 0)\|^2 = 1$ . Teremos que  $g^{-1}(g(\varepsilon))$  intersecta não transversalmente  $f^{-1}(f(1))$  nos pontos  $(1, 0), (-1, 0)$ .

ii) Se  $x = 0$ , então para  $x^2 - y^3 = 1 \Rightarrow y^3 = -1$ . Tome  $\varepsilon = \|(0, -1)\|^2 = 1$ . Teremos que  $g^{-1}(g(\varepsilon))$  intersecta não transversalmente  $f^{-1}(f(1))$  nos pontos  $(0, -1), (0, -w)$  e  $(0, -w^2)$ , onde  $w$  é uma 3-raiz da unidade.

**Corolário 2.2.3.** Uma função polinomial  $g$  em  $M = X \setminus \Sigma(X)$  tem um número finito de valores críticos.

**Demonstração:** Pelo Lema 2.2.1 sabemos que os pontos críticos de  $g|_M$  é dado pela interseção de  $W \cap M$ , note que  $W \subset X$ , logo os pontos críticos de  $g$  podem ser expressos pela diferença entre os conjuntos  $W \setminus \Sigma(X)$ , onde ambos são conjuntos analíticos.

Pelo Corolário 2.1.9, esta diferença pode ser escrita como uma união finita de variedades suaves, isto é:

$$W \setminus \Sigma(X) = M'_1 \cup M'_2 \cup \dots \cup M'_r$$

onde cada  $M'_i$  tem um número finito de componentes conexas.

Cada ponto  $x$  de  $M'_i$  é um ponto crítico de  $g|_M$ , em particular, cada ponto  $x$  também é um ponto crítico de  $g|_{M'_i}$ . Como todos os pontos de  $M'_i$  são pontos críticos, temos que a diferencial da função  $g$  se anulam em todos eles, logo  $g$  é constante em cada componente conexa de  $M'_i$ . Além disso, como a quantidade de componentes conexas é finita, temos que para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ , a imagem  $g(M'_i)$  é um conjunto finito.

Portanto, o conjunto dos valores críticos de  $g|_M$  dado por :

$$g(W \setminus \Sigma(X)) = g(M'_1) \cup \dots \cup g(M'_r)$$

é finito. ■

Novamente considere  $X$  um conjunto analítico complexo. Seja  $x^0$  um ponto regular de  $X$  ou ponto isolado no conjunto singular  $\Sigma(X)$ .

**Corolário 2.2.4.** Existe  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeno, tal que toda esfera  $\mathbb{S}_\varepsilon$ , com  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , centrada em  $x^0$  intersecta  $X$  em uma variedade suave (possivelmente vazia).

**Demonstração:** Defina  $r : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$  uma função polinomial, dada por  $r(x) = \|x - x^0\|^2$ . Pelo Corolário 2.2.3, temos que o conjunto dos valores críticos de  $r|_{X \setminus \Sigma(X)}$  é finito. Seja  $\varepsilon_0^2 > 0$  menor que qualquer valor crítico positivo dessa restrição, dessa forma note que  $\varepsilon_0^2$  é um valor regular como também todo  $\varepsilon^2$ , onde  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  e portanto todo ponto em  $r^{-1}(\varepsilon^2)$  é regular. Dessa forma pelo Lema 2.2.1, temos que o conjunto  $r^{-1}(\varepsilon^2)$  intersecta transversalmente  $X \setminus \Sigma(X)$ . Assim

$$r^{-1}(\varepsilon^2) \cap (X \setminus \Sigma(X)) = \mathbb{S}_\varepsilon \cap (X \setminus \Sigma(X)).$$

e pelo Teorema 1.1.28 essa interseção é uma variedade suave  $K_X$ . Mas se  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno então  $\mathbb{S}_\varepsilon$  não intersecta  $\Sigma(X)$ . Portanto  $K_X = \mathbb{S}_\varepsilon \cap X$ . ■

**Definição 2.2.5.** Chamaremos de **link do conjunto analítico** o conjunto  $\mathbb{S}_\varepsilon \cap X$ , para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, como no Corolário 2.2.4, e será denotado por  $K_X$ .

**Definição 2.2.6.** Sejam  $x^0 \in \mathbb{C}^N$  e  $Z \subset \mathbb{C}^N$ . O **cone** sobre  $Z$  com base em  $x^0$  é definido como a união de todos os segmentos de reta

$$ta + (1-t)x^0, \quad 0 \leq t \leq 1, \forall a \in Z$$

e denotado por  $\text{Cone}_{x^0}(Z)$ .

O próximo teorema nos dará localmente uma característica topológica de  $X$  na vizinhança do ponto  $x^0$  em termos do link  $K_X$ . De modo mais específico, mostraremos que o cone sobre link  $K_X$  é homeomorfo à  $X \cap \mathbb{D}_\varepsilon$ , onde  $\mathbb{D}_\varepsilon$  é o disco fechado de raio  $\varepsilon$ . Para isso, construiremos um campo de vetores na vizinhança de  $x^0$  e através de partições da unidade iremos globalizar a construção desse campo e ao integralizarmos, ele nos dará o homeomorfismo do Teorema.

**Teorema 2.2.7** (Teorema da Estrutura Cônica). *Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno a interseção de  $X$  com  $\mathbb{D}_\varepsilon$  é homeomorfo ao cone sobre  $K_X = X \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ . Além disso, o par  $(\mathbb{D}_\varepsilon, X \cap \mathbb{D}_\varepsilon)$  é homeomorfo ao par  $(\text{Cone}_{x^0}(\mathbb{S}_\varepsilon), \text{Cone}_{x^0}(K_X))$ .*

**Demonstração:** Seja  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, tal que  $\mathbb{D}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{C}^{N+1} \mid \|x - x^0\| \leq \varepsilon\} \subset \mathbb{C}^N$  interseção ao conjunto analítico  $X$ , não contenha pontos singulares e nem pontos críticos de  $r|_M$ , exceto  $x^0$ , onde  $M = X \setminus \Sigma(X)$  e  $r(x) = \|x - x^0\|^2$ , com  $r : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$ .

Inicialmente, nosso objetivo é construir um campo suave  $v(x) : \mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{x^0\} \rightarrow \mathbb{C}^N$ , com duas propriedades:

- i) O vetor  $v(x)$  aponta para "fora" de  $x^0$  para todo  $x$  (isto é,  $\langle v(x), x - x^0 \rangle > 0$ );
- ii)  $v(x)$  é tangente a  $M$ , para todo  $x \in M$ .

## 2. Conjuntos Analíticos Complexos

Dado qualquer  $x^a \in \mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{x^0\}$  construiremos localmente um campo vetorial  $v^a(x)$  em cada vizinhança  $U^a$  de  $x^a$ , de modo que as propriedades *i*) e *ii*) sejam satisfeitas.

Se  $x^a \notin X$ , então defina  $v^a(x) = x - x^0$ , para todo  $x$  em uma vizinhança  $U^a$  de  $x^a$  em  $\mathbb{C}^N \setminus X$ . Logo, temos que  $v^a(x)$  é suave e

$$\langle v^a(x), x - x^0 \rangle > 0, \quad \text{já que } x \neq x^0.$$

Agora, se  $x^a$  pertencer  $X$ , e portanto pertencer também a  $M$ , escolha um sistema de coordenadas locais  $u_1, \dots, u_N$ , em toda vizinhança de  $x^a$ , onde  $M$  corresponde ao lugar geométrico  $u_1 = \dots = u_p = 0$ . Note que,  $x^a$  não é um ponto crítico da função  $r|_M$ , segue da demonstração do Teorema 2.2.1, que pelo menos uma das derivadas parciais

$$\frac{\partial r}{\partial u_{p+1}}(x^a), \dots, \frac{\partial r}{\partial u_N}(x^a)$$

é não nula. Seja,  $\frac{\partial r}{\partial u_h}(x^a) \neq 0$ , então por continuidade, temos que para todo  $x$  em uma vizinhança suficientemente pequena e conexa  $U^a$  de  $x^a$  que  $\frac{\partial r}{\partial u_h}(x) \neq 0$ , tal que na direção da curva  $u_h$ -coordenada em  $X$  o vetor

$$v^a(x) = \pm \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_h}(x), \dots, \frac{\partial x_N}{\partial u_h}(x) \right)$$

é tangente a curva  $u_h$ -coordenada e portanto é tangente a  $M$ , pois essa curva esta contida na variedade  $M$  e o sinal é escolhido de acordo com o sinal  $\frac{\partial r}{\partial u_h}(x)$  é positivo ou negativo. Temos que:

$$\begin{aligned} 2\langle v^a(x), x - x^0 \rangle &= \sum_{i=1}^N 2(x_i - x_i^0) \left( \pm \frac{\partial x_i}{\partial u_h}(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial r}{\partial x_i}(x) \right) \left( \pm \frac{\partial x_i}{\partial u_h}(x) \right) \\ &= \pm \frac{\partial r}{\partial u_h}(x) > 0, \quad \forall x \in U^a \end{aligned}$$

Logo, o campo  $v^a(x)$  é suave e obedece as duas propriedades, como isso é possível fazer para todo ponto  $a \in M$ , então  $U^a$  é uma cobertura aberta de  $\mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{x^0\}$ , dessa forma é garantida a existência da partição da unidade suave  $\{\lambda^a\}$ , com suporte  $\lambda^a \subset U^a$ . Então, o campo vetorial

$$v(x) = \sum \lambda^a(x) v^a(x)$$

em  $\mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{x^0\}$ , satisfaz *i*) e *ii*):

## 2. Conjuntos Analíticos Complexos

---

i)  $\langle v(x), x - x^0 \rangle = \langle \sum \lambda^a(x) v^a(x), x - x^0 \rangle = \sum \lambda^a(x) \langle v^a(x), x - x^0 \rangle > 0$ , pois  $\lambda_a(x) \geq 0$  e  $\langle v_a(x), x - x^0 \rangle > 0$  e essa soma é finita, já que somente um número finito de  $\lambda_a$  são não nulos;

ii) Cada  $v^a(x)$  é tangente à  $M$ , logo  $v(x)$  é tangente a  $M$ .

Assim, temos um campo vetorial bem definido sobre  $\mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{x^0\}$ , logo temos uma equação diferencial.

Seja

$$w(x) = \frac{v(x)}{2\langle x - x^0, v(x) \rangle}$$

e considere a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = w(x)$$

As soluções são curvas diferenciais  $x = p(t)$  definidas para todo  $t \in (\alpha, \beta)$ , que satisfazem:

$$\frac{dp}{dt}(t) = w(p(t)) = w(x)$$

Dada qualquer solução  $p(t)$ , a derivada da composição  $r(p(t))$  é dada por :

$$\begin{aligned} \frac{d(r \circ p)}{dt}(t) &= \frac{\partial r}{\partial x_1}(x) \frac{dp_1}{dt}(t) + \dots + \frac{\partial r}{\partial x_n}(x) \frac{dp_n}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial r}{\partial x_1} w_1 + \dots + \frac{\partial r}{\partial x_N} w_N \\ &= 2(x_1 - x_1^0) w_1(x) + \dots + 2(x_N - x_N^0) w_N(x) \\ &= \langle 2(x - x^0), w(x) \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

onde  $x = p(t)$ . Assim, a função  $r(p(t))$  deve ser igual a  $t + c$ , em que  $c$  é uma constante. Portanto, subtraindo a constante  $c$  do parâmetro  $t$ , se necessário, podemos assumir que

$$r(p(t)) = \|p(t) - x^0\|^2 = t.$$

**Afirmção 2.2.8.** A solução  $p(t)$  pode ser estendida em todo o intervalo  $0 < t \leq \varepsilon^2$ .

**Demonstração da Afirmção 2.2.8:** Com efeito, podemos assumir que o campo vetorial  $w(x)$  foi construído sobre um conjunto aberto maior do que  $\mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{x^0\}$ , de modo que os pontos da fronteira de  $\mathbb{D}_\varepsilon$  não causem nenhum problema. Defina  $R$  o conjunto de todos os intervalos abertos em que  $p(t)$  é definido. Seja  $\{S_\lambda\}_{\lambda \in L}$  uma cadeia totalmente ordenada com  $c_\lambda \in R$ ,

## 2. Conjuntos Analíticos Complexos

para todo  $\lambda \in L$ . Essa cadeia é limitada. Pelo Lema de Zorn, temos um elemento maximal  $\alpha' < t < \beta'$ , em que  $p(t)$  pode ser estendida.

Suponha por absurdo que  $\beta' \leq \varepsilon^2$ . Então estenderemos a solução  $p(t)$  sobre um intervalo ligeiramente maior, contradizendo a definição de  $\beta'$ .

Os pontos  $p(t)$  com  $\alpha' < t < \beta'$  pertencem ao conjunto compacto  $\mathbb{D}_\varepsilon$ , existe pelo menos um ponto limite  $x'$  de  $\{p(t)\}$  quando  $t \rightarrow \beta'$  e, por construção,  $r(x') = \beta' \neq 0$  de modo que  $x' \in \mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{x^0\}$ .

Usando o Teorema da Existência, Unicidade e Diferenciabilidade na equação diferencial  $\frac{dx}{dt} = w(x)$  numa vizinhança  $U$  de  $x'$ , podemos garantir que para cada  $x'' \in U$  e cada  $t''$  em algum intervalo arbitrariamente pequeno  $I$  contendo  $\beta'$  existe uma única solução  $x = q(t)$ ,  $t \in I$  satisfazendo a condição inicial  $q(t'') = x''$  e além disso,  $q(t)$  é uma função diferenciável de  $x''$ ,  $t''$  e  $t$ . Para aplicar este teorema, escolha  $t'' \in (\alpha', \beta') \cap I$  e seja  $x''$  igual a  $p(t'')$ . Usando o Teorema de Unicidade Local, podemos verificar que  $p(t) = q(t)$  para todo  $t$  no domínio comum da definição  $(\alpha', \beta') \cap I$ . Assim, as soluções  $p$  e  $q$  podem ser unidas para fornecer uma solução definida no intervalo maior  $(\alpha', \beta') \cup I$ . Contradição. Segue que  $\beta' > \varepsilon^2$ . O mesmo raciocínio pode ser aplicado para concluir que  $\alpha' = 0$ . ■

Note que a solução  $p(t)$ ,  $0 < t \leq \varepsilon^2$ , é unicamente determinada pelo valor inicial

$$p(\varepsilon^2) \in \mathbb{S}_\varepsilon.$$

Para cada  $a \in \mathbb{S}_\varepsilon$ , seja

$$p_a(t) = P(a, t), \quad 0 < t \leq \varepsilon^2.$$

a única solução que satisfaz a condição inicial

$$p_a(\varepsilon^2) = P(a, \varepsilon^2) = a.$$

Então,

$$\begin{aligned} P : \mathbb{S}_\varepsilon \times (0, \varepsilon^2] &\longrightarrow \mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{x^0\} \\ (a, t) &\longrightarrow p_a(t) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo local.

De fato, temos que  $r(p_a(t)) = t$ , logo  $p_a$  tem inversa à esquerda e portanto é sobrejetora. Dado  $x \in \mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{x^0\}$ , existe  $t_0$  tal que  $x = p_a(t_0) = P(a, t_0)$ . Isto mostra que  $P$  é sobrejetora. Para a injetividade suponha que  $P(a, t_1) = P(b, t_2)$ , então  $p_a(t_1) = p_b(t_2)$ . Assim:

## 2. Conjuntos Analíticos Complexos

$$\| p_a(t_1) - x^0 \|^2 = \| p_b(t_2) - x^0 \|^2$$

$$\Rightarrow r(p_a(t_1)) = r(p_b(t_2)) \Rightarrow t_1 = t_2.$$

Tomando  $t_1 = t_2 = \varepsilon^2$  temos  $p_a(\varepsilon^2) = p_b(\varepsilon^2)$ , ou seja,  $a = b$ . Logo,  $P$  é injetora. Por cada  $p_a$  ser diferenciável segue que  $P$  é diferenciável. E como  $P$  é não nula temos, pelo Teorema da Função Inversa, que  $P$  é um difeomorfismo local.

Como o campo vetorial  $w(x)$  é tangente à  $M$  para todo  $x \in M$ , segue que toda curva solução que toca  $M$  deve estar contida em  $M$ . Portanto,  $P$  aplica o produto  $K_X \times (0, \varepsilon^2]$  difeomorficamente em  $X \cap (\mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{x^0\})$ .

Finalmente, note que  $P(a, t)$  tende uniformemente para  $x^0$  quando  $t \rightarrow 0$ . Assim, a correspondência

$$ta + (1-t)x^0 \mapsto P(a, t\varepsilon^2)$$

definida para  $0 < t \leq 1$ , estende-se, unicamente, a um homeomorfismo do  $\text{Cone}_{x^0}(\mathbb{S}_\varepsilon)$  à  $\mathbb{D}_\varepsilon$ . Além disso, este homeomorfismo leva o  $\text{Cone}_{x^0}(K_X)$  em  $X \cap \mathbb{D}_\varepsilon$ . ■

Seja  $X$  um conjunto analítico complexo como na figura 2.3a. Considere a esfera  $\mathbb{S}_\varepsilon$  centrada na singularidade isolada  $x^0$  de  $X$ . Abaixo temos a representação do link  $K_X = X \cap \mathbb{S}_\varepsilon$  e do  $\text{Cone}_{x^0}(K_X)$ .

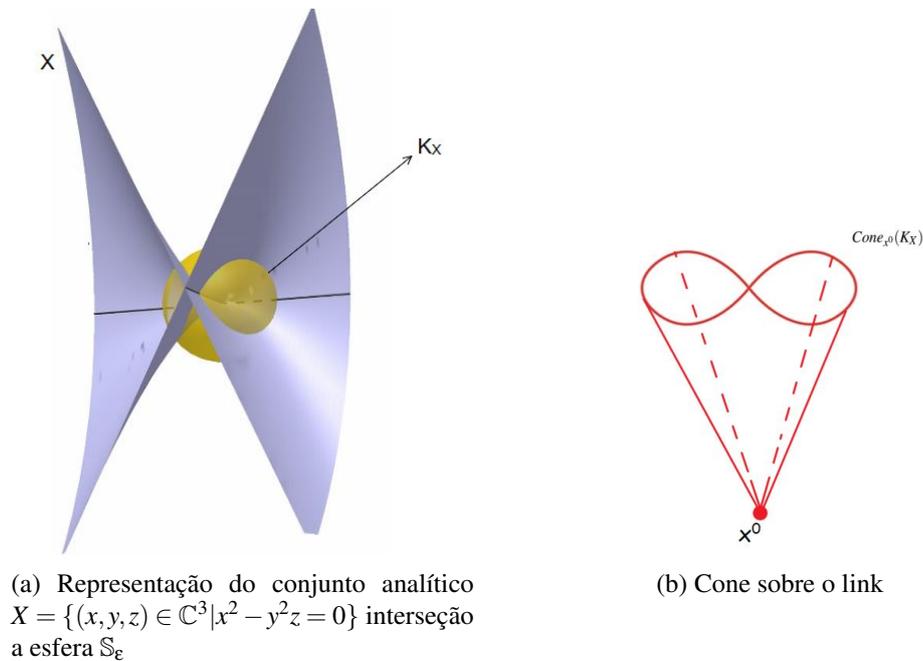


Figura 2.3: Estrutura Cônica Local

### 2.3 Lema de Seleção da Curva

O principal resultado dessa seção é o Lema de Seleção da Curva, que é um resultado fundamental sobre a estrutura local dos conjuntos semianalíticos, enunciado e demonstrado por Milnor em [13]. A próxima definição é fundamental para a formulação das hipótese do Lema, e foi baseada em [1].

**Definição 2.3.1.** *Um conjunto  $X \subset \mathbb{C}^N$  é semianalítico se para cada  $x \in X$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  em  $\mathbb{C}^N$  e funções analíticas  $f_{jk}, g_{jk}$  definidas em  $U$  tais que:*

$$X \cap U = \bigcup_{j=1}^l \left( \bigcap_{k=1}^{s_j} \{x \in \mathbb{C}^N; f_{jk}(x) = 0, g_{jk}(x) > 0\} \right)$$

Todo conjunto analítico é um conjunto semianalítico.

**Exemplo 2.3.2.** *Considere a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(x) = x$ . Observe que o conjunto  $S = \{x \in \mathbb{C} \mid f(x) \geq 0\}$  é um conjunto semianalítico. De fato, note que  $S = (\{x - y = 0\} \cap \{x > 0\}) \cup (\{x = 0\} \cap \{y = 0\})$ .*

**Lema 2.3.3.** *(Lema de Seleção da Curva). Seja  $X \subset \mathbb{C}^N$  um conjunto semianalítico. Se  $p \in \bar{X}$  (fecho topológico de  $X$  em  $\mathbb{C}^N$ ) então existe uma curva analítica complexa  $\gamma : [0, \delta) \rightarrow X \cup \{p\}$  com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(t) \in X$  para todo  $t \in (0, \delta)$ .*

**Demonstração:** Ver Lema 3.1 de [13].

■

## Capítulo 3

# Estratificação de Whitney e Condição $a_f$ de Thom

Nesse capítulo é explorado o conceito de estratificação, cuja ideia central é particionar um conjunto analítico complexo singular em variedades suaves disjuntas, chamadas de estratos. Fazemos uma abordagem aplicando as condições da estratificação de Whitney através de exemplos. Além disso, estudamos a condição de Thom para estratificações de Whitney em uma aplicação analítica complexa  $f$  definida em um conjunto analítico complexo  $X$ . O principal resultado do capítulo, nos diz que toda função analítica  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , tem a propriedade da condição  $a_f$  de Thom. Ao longo desse capítulo, todos os conjuntos são considerados sobre o corpo dos números complexos, no entanto é usamos desenhos (reais) para ilustrar a geometria desses conjuntos.

As principais referências para a construção desse capítulo foram: [19] e [20].

### 3.1 Estratificação e Condição da Fronteira

Nesta seção, abordamos noções básicas de estratificações, que intuitivamente consiste em dividir um espaço topológico em variedade suaves, chamadas de estratos. Além disso, definimos a primeira condição de regularidade, que pode ser pensada como um controle de como estas variedades suaves se reencontram, essa condição será chamada de condição da fronteira.

**Definição 3.1.1.** *Seja  $X \subset \mathbb{C}^N$  um conjunto analítico complexo. Uma **estratificação finita**  $S = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $X$  é uma partição para  $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$  em subvariedades suaves disjuntas  $X_\alpha$  de  $\mathbb{C}^N$  (chamadas de estratos), tais que para todo ponto de  $X$  existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  em  $\mathbb{C}^N$  que intersecta apenas um número finito de estratos.*

**Exemplo 3.1.2.** *Seja  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica, definida por  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . O conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$  é um conjunto analítico complexo. Podemos tomar*

uma estratificação finita  $\mathcal{S} = \{X_1, X_2\}$  de  $X$ , em que  $X_1 := \{y = x\}$  e  $X_2 := \{y = -x\} \setminus \{0\}$ . Note que esses estratos são dois a dois disjuntos e  $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ , com  $A = \{1, 2\}$ . Uma outra estratificação possível de  $X$ , é dada por  $\mathcal{V} = \{X_1, X_2, X_3\}$ , em que  $X_1 := \{y = x\} \setminus \{0\}$ ,  $X_2 := \{y = -x\} \setminus \{0\}$  e  $X_3 := \{0\}$ , note que esses estratos são dois a dois disjuntos e  $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ , com  $A = \{1, 2, 3\}$ .

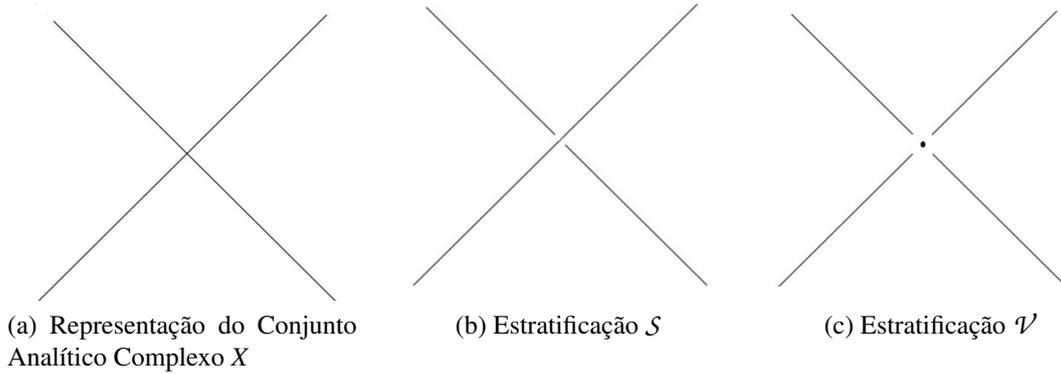


Figura 3.1: Conjunto Analítico  $X$  e Possíveis Estratificações

Milnor em [13] mostrou que todo conjunto algébrico real  $V$  em  $\mathbb{R}^n$  pode ser particionada em um número finito de subvariedades suaves conexas de  $\mathbb{R}^n$ . Tal estratificação é obtida mostrando que o conjunto singular de  $V$  é novamente algébrico e de dimensão estritamente menor que  $V$

$$V \supset \Sigma(V) \supset \Sigma(\Sigma(V)) \supset \dots$$

Ressaltamos que essa estratificação também pode ser construída para conjuntos analíticos no corpo dos complexos.

**Definição 3.1.3.** Uma estratificação finita  $\mathcal{S} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  satisfaz a **condição da fronteira** se para todo  $(\alpha, \beta) \in A \times A$  tal que  $\bar{X}_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ , então  $X_\beta \subseteq \bar{X}_\alpha$ . Como os estratos são disjuntos, isso significa que ou  $X_\alpha = X_\beta$  ou  $X_\beta \subset \bar{X}_\alpha \setminus X_\alpha$ .

**Exemplo 3.1.4.** Sejam  $X \subset \mathbb{C}^3$ ,  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x = y = 0\}$  e  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z = 0\}$ . Note que,  $Z$  é difeomorfo a  $\mathbb{C}$  e  $W$  é difeomorfo a  $\mathbb{C}^2$ . Defina  $X = Z \cup W$ , com  $Z$  intersectando  $W$  na origem. Pela Teorema 2.1.4,  $X$  é um conjunto analítico complexo.

Se tomarmos os estratos  $X_1 = W \setminus \{0\}$  e  $X_2 = Z$ , temos que  $\bar{X}_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ , no entanto  $X_2 \not\subseteq \bar{X}_1$ , logo a estratificação  $\{X_1, X_2\}$  não satisfaz a condição da fronteira.

Porém, podemos tomar uma outra estratificação que satisfaz a condição da fronteira, seja ela  $X_1 = W \setminus \{0\}$ ,  $X_2 = Z \setminus \{0\}$  e  $X_3 = \{0\}$ . Nesse caso,

i)  $\bar{X}_1 \cap X_2 = \emptyset$ ;

ii)  $\bar{X}_1 \cap X_3 \neq \emptyset$  e  $X_3 \subset \bar{X}_1$ ;

iii)  $\bar{X}_2 \cap X_3 \neq \emptyset$  e  $X_3 \subset \bar{X}_2$ .

Portanto, a estratificação  $\{X_1, X_2, X_3\}$  satisfaz a condição da fronteira.

## 3.2 Estratificação de Whitney

Nesta seção estudamos mais uma condição de regularidade, dessa vez proposta por Whitney. Para melhor compreensão, aplicamos tais condições de estratificação em exemplos.

Seja  $\mathcal{S} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  uma estratificação finita do conjunto analítico complexo  $X$  que satisfaz a condição da fronteira.

**Definição 3.2.1.** O par de estratos  $(X_\alpha, X_\beta)$  de  $\mathcal{S}$ , com  $X_\beta \subseteq \bar{X}_\alpha$ , satisfaz a **a)-condição da estratificação de Whitney** em  $y \in X_\beta$ , se para toda sequência de pontos  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $X_\alpha$  que converge para  $y$ , com  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} X_\alpha = T$ , tem-se que:

$$T_y X_\beta \subseteq T.$$

Dizemos que o par de estratos  $(X_\alpha, X_\beta)$  satisfaz a a)-condição de Whitney, se ele satisfaz a a)-condição de Whitney em todo  $y \in X_\beta$ .

Quando todo par de estratos de  $\mathcal{S}$  satisfaz a a)-condição de Whitney, dizemos que a estratificação é a)-regular.

**Definição 3.2.2.** O par de estratos  $(X_\alpha, X_\beta)$  de  $\mathcal{S}$ , com  $X_\beta \subseteq \bar{X}_\alpha$ , satisfaz a **b)-condição da estratificação de Whitney** em  $y \in X_\beta$ , se para todas as sequências  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  respectivamente em  $X_\alpha$ ,  $X_\beta$ , tais que:

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ ;

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} X_\alpha = T$ ;

iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ;

iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x_n y_n} = l$ , onde cada  $(\overline{x_n y_n})$  denota a reta que liga os pontos  $x_n$  e  $y_n$

tem-se que,

$$T \supset l.$$

Dizemos que o par de estratos  $(X_\alpha, X_\beta)$  satisfaz a b)-condição de Whitney, se ele satisfaz a b)-condição de Whitney em todo  $y \in X_\beta$ .

Quando todo par de estratos de  $\mathcal{S}$  satisfaz a b)-condição de Whitney, dizemos que a estratificação é b)-regular.

**Teorema 3.2.3.** *Sejam  $X$  um conjunto analítico complexo de  $\mathbb{C}^N$  e  $S = \{X_1, \dots, X_k\}$  uma estratificação finita de  $X$ . Suponha que o par de estratos  $(X_\alpha, X_\beta)$ , com  $X_\beta \subseteq \bar{X}_\alpha$ , satisfaça a b)-condição de Whitney em  $y \in X_\beta$ , então o par  $(X_\alpha, X_\beta)$  também satisfaz a a)-condição de Whitney em  $y$ .*

**Demonstração:** Assuma que  $(X_\alpha, X_\beta)$  satisfaz a b)-condição de Whitney para  $y \in X_\beta$ . Considere a sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $X_\alpha$  que converge para  $y$  e a sequência de espaços tangentes  $T_{x_n}X_\alpha$  convergindo para o espaço tangente  $T$ . Para valer a a)-condição de Whitney em  $y$ , devemos mostrar que  $T_yX_\beta \subseteq T$ .

Suponha o contrário. Então, existe uma reta  $l$  em  $\mathbb{R}^N$  que passa pela origem, tal que  $l \subset T_yX_\beta$ , mas  $l \not\subset T$ .

Por definição de espaço tangente  $T_yX_\beta$ , existe uma sequência  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_\beta$  com limite  $y$ , tal que a sequência de retas secantes  $\overline{y_n y}$  convergem para  $l$ . Como a sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $y$  e  $\mathbb{R}P^n$  é um espaço métrico, temos que existe  $a \in \mathbb{N}$  tal que a distância entre as retas  $\overline{y_n x_{n^a}}$  e  $\overline{y_n y}$  converge para zero, logo por  $\overline{y_n y}$  convergir para a reta  $l$ , concluímos que a sequência de retas  $\overline{y_n x_{n^a}}$  também convergem para  $l$ . Logo, como estamos supondo que vale a b)-condição de Whitney em  $y$ , temos que  $l \subset T$ . Contradição. ■

No exemplo seguinte, vemos uma aplicação para o Teorema anterior.

**Exemplo 3.2.4.** *Seja  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica, tal que  $f(x, y, z) = xz$ . O conjunto  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$  é um conjunto analítico complexo. Seja  $S = \{X_1, X_2\}$  uma estratificação para  $D$ , tal que  $X_1 = D \setminus \Sigma$  e  $X_2 = \Sigma$ , onde  $\Sigma := \{x = z = 0\}$ . Mostraremos que essa estratificação é b)-regular. De fato, notemos que  $S$  satisfaz a condição da fronteira, já que  $\bar{X}_1 \cap X_2 \neq \emptyset$  e  $X_2 \subset \bar{X}_1$ .*

*Sejam  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequências tomadas respectivamente nos estratos  $X_1$  e  $X_2$ , que convergem para um ponto arbitrário  $c = (0, y_0, 0)$  em  $X_2$ , com  $p_n = (x_n, y_n, z_n)$ , onde ou  $x_n \equiv 0, y_n \rightarrow y_0, z_n \rightarrow 0$  ou  $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow y_0, z_n \equiv 0$  e  $q_n = (0, k_n, 0)$  tal que  $k_n \rightarrow y_0$ .*

*Suponha que  $z_n \equiv 0$  na sequência  $p_n$ . Seja  $\vec{\nabla}f(p_n) = (0, 0, x_n)$ , o vetor gradiente de  $f$  aplicado em  $p_n$ . O vetor unitário  $\vec{w}_n = \frac{\vec{\nabla}f(p_n)}{\|\vec{\nabla}f(p_n)\|}$  é dado por  $(0, 0, 1)$ , então temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{w}_n = (0, 0, 1)$ . Como o vetor gradiente  $\vec{\nabla}f(p_n)$  é ortogonal ao plano  $T_{p_n}X_\alpha$ , para cada  $n$ , temos que o vetor direção dado pelo limite de  $\vec{w}_n$  é ortogonal a  $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{p_n}X_\alpha$ .*

*Seja  $l$  o limite da sequência de retas  $\overline{p_n q_n}$ , para determinarmos a direção da reta  $l$  é necessário analisarmos o vetor diretor  $\vec{v}_n$  da reta  $\overline{p_n q_n}$ , para cada  $n$ , que é dado por  $(x_n, y_n - k_n, 0)$ .*

*Notemos que para  $S$  ser b)-regular, precisamos concluir que  $l \subset T$ . Equivalentemente isso ocorre se, e somente se, todo vetor ortogonal a  $T$  é também ortogonal a  $l$ . Em particular,*

para cada  $n$ , a reta  $\overline{p_n q_n}$  está no plano  $T$ , pois o produto interno hermitiano  $\langle \vec{v}_n, (0,0,1) \rangle$  é 0. Logo, como  $l$  é o limite da sequência dessas retas, temos que também estará contida em  $T$ . O ponto  $c \in X_2$  foi tomado arbitrário, temos que essa estratificação é  $b$ )-regular e pelo Teorema 3.2.3 temos que é  $a$ )-regular.

O caso em que temos  $x_n \equiv 0$  na sequência  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a demonstração segue de modo análogo.

No entanto, em geral não temos a recíproca do Teorema 3.2.3, como vemos no próximo exemplo.

**Exemplo 3.2.5.** Seja  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica definida por  $f(x, y, z) = y^2 - x^2 z^2 - x^3$ . O conjunto  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$  é um conjunto analítico complexo conhecida como "Cúspide de Whitney".

Tome  $S = \{X_1, X_2\}$  uma estratificação para  $E$ , onde  $X_1 = E \setminus \Sigma$  e  $X_2 = \Sigma$ , com  $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3; x = y = 0\}$ .

Notemos que é satisfeita a condição da fronteira para  $S$ , pois  $\overline{X_1} \cap X_2 \neq \emptyset$  e  $X_2 \subset \overline{X_1}$ .

Sejam  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência no estrato  $X_1$ ,  $c = (0, 0, 0)$  um ponto no estrato  $X_2$ , com  $p_n = (x_n, y_n, z_n)$  convergindo para  $c$  e  $T$  o plano que é limite da sequência de planos tangentes  $T_{p_n} X_1$ . Afirmamos que  $T_c X_2 \subset T$ , onde  $T_c X_2 = \Sigma$ . De fato, seja  $\vec{\nabla} f(p_n) = (-2x_n z_n^2 - 3x_n^2, 2y_n, -2x_n^2 z_n)$ , o vetor gradiente de  $f$  aplicado em  $p_n$ . Considere o vetor unitário dado por  $\vec{w}_n = \frac{\vec{\nabla} f(p_n)}{\|\vec{\nabla} f(p_n)\|}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{w}_n = \vec{a}$ . Lembremos que  $\vec{\nabla} f(p_n)$  é ortogonal ao plano tangente  $T_{p_n} X_1$ , para cada  $n$ , logo  $\vec{a}$  é ortogonal a  $T$ . Pela Afirmação <sup>1</sup>, temos que para a afirmação é equivalente a mostrar que  $\vec{a}$  tem a última coordenada nula. Para isso basta que:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2x_n^2 z_n}{-2x_n z_n^2 - 3x_n^2} = 0 \quad e \quad ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2x_n^2 z_n}{2y_n} = 0$$

Como  $f$  é analítica, podemos escolher um caminho analítico arbitrário dado por  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$  em  $X_1$ , tal que  $\lambda(0) = (0, 0, 0)$ . Se  $\lambda_i(t) \neq 0$ , para  $t \neq 0$ , com  $i \in \{1, 2, 3\}$ , então podemos escrever:

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \dots \\ \lambda_2(t) = b_1 t + b_2 t^2 + \dots \\ \lambda_3(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \dots \end{cases}$$

Escolha  $r_1, r_2$  e  $r_3$  as ordens<sup>2</sup> para as respectivas expansões em séries de potência de  $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$  e  $\lambda_3(t)$ . Então, podemos reescrever:

<sup>1</sup>**Afirmação:** Seja  $P$  um plano de  $\mathbb{C}^3$  contendo a origem e  $\vec{u} = (a, b, c)$  um vetor ortogonal a  $P$ . Nessas condições,  $\vec{u}$  tem a última coordenada nula se, e somente se, o eixo complexo  $Z$  esta contido em  $P$ .

<sup>2</sup>**Observação:** A ordem de um polinômio é definida como sendo a menor potência entre os monômios não nulos de um polinômio. No caso em que temos uma função racional convergindo a zero, tal que o numerador e o denominador são polinômios, então a ordem do numerador é maior que a do denominador.

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = a_{r_1}t^{r_1} + \dots \\ \lambda_2(t) = b_{r_2}t^{r_2} + \dots \\ \lambda_3(t) = c_{r_3}t^{r_3} + \dots \end{cases}$$

Com isso, para o limite i) temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2\lambda_1^2(t)\lambda_3(t)}{-2\lambda_1(t)\lambda_3^2(t) - 3\lambda_1^2(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2(a_{r_1}^2t^{2r_1} + \dots)(c_{r_3}t^{r_3} + \dots)}{-2(a_{r_1}t^{r_1} + \dots)(c_{r_3}^2t^{2r_3} + \dots) - 3(a_{r_1}^2t^{2r_1} + \dots)}$$

Note que, a ordem do numerador é  $2r_1 + r_3$  e do denominador será dado pelo mínimo entre  $\{r_1 + 2r_3, 2r_1\}$ .

No caso em que  $2r_1$  é o mínimo entre  $\{r_1 + 2r_3, 2r_1\}$ , teremos  $2r_1 + r_3 > 2r_1$  e pela observação acima:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2\lambda_1^2(t)\lambda_3(t)}{-2\lambda_1(t)\lambda_3^2(t) - 3\lambda_1^2(t)} = 0.$$

Agora, se o mínimo entre  $\{r_1 + 2r_3, 2r_1\}$  for  $r_1 + 2r_3$ , observando que  $r_1 + 2r_3 < 2r_1 < 2r_1 + r_3$ , concluímos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2\lambda_1^2(t)\lambda_3(t)}{-2\lambda_1(t)\lambda_3^2(t) - 3\lambda_1^2(t)} = 0.$$

Logo, em qualquer caso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2x_n^2z_n}{-2x_nz_n^2 - 3x_n^2} = 0.$$

Mostraremos que o limite em ii) é também zero. Para isso analisaremos a distância entre as expressões dadas nos limites i) e ii). Ainda usando o caminho analítico  $\lambda(t)$ , com  $t \neq 0$ , temos:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{-2\lambda_1^2(t)\lambda_3(t)}{-2\lambda_1(t)\lambda_3^2(t) - 3\lambda_1^2(t)} - \frac{-2\lambda_1^2(t)\lambda_3(t)}{2\lambda_2(t)} \right| = \left| \frac{-4\lambda_1^2(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t) - 4\lambda_1^3(t)\lambda_3^3(t) - 6\lambda_1^4(t)\lambda_3(t)}{-4\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3^2(t) - 6\lambda_1^2(t)\lambda_2(t)} \right| \\ & = \left| \frac{-4\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t) - 4\lambda_1^2(t)\lambda_3^3(t) - 6\lambda_1^3(t)\lambda_3(t)}{-4\lambda_2(t)\lambda_3^2(t) - 6\lambda_1(t)\lambda_2(t)} \right| \\ & = \left| \frac{-4(a_{r_1}t^{r_1} + \dots)(b_{r_2}t^{r_2} + \dots)(c_{r_3}t^{r_3} + \dots) - 4(a_{r_1}t^{2r_1} + \dots)(c_{r_3}t^{3r_3} + \dots) - 6(a_{r_1}t^{3r_1} + \dots)(c_{r_3}t^{r_3} + \dots)}{-4(a_{r_2}t^{r_2} + \dots)(c_{r_3}t^{2r_3} + \dots) - 6(a_{r_1}t^{r_1} + \dots)(b_{r_2}t^{r_2} + \dots)} \right| \end{aligned}$$

Podemos observar que a ordem do numerador é  $r_1 + r_2 + r_3$ , que é maior que a ordem do denominador dada por  $r_1 + r_2$ . Pela observação acima temos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{-4\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t) - 4\lambda_1^2(t)\lambda_3^3(t) - 6\lambda_1^3(t)\lambda_3(t)}{-4\lambda_2(t)\lambda_3^2(t) - 6\lambda_1(t)\lambda_2(t)} \right| = 0$$

Portanto, como o limite dado em  $i$ ) é zero, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2x_n^2 z_n}{2y_n} = 0$$

Por tudo isso, concluímos que  $\vec{a}$  tem a última coordenada nula, e portanto o par de estratos  $(X_1, X_2)$  satisfaz a a)-condição de Whitney em  $c = (0, 0, 0)$  para  $\lambda_i \neq 0$ .

Agora, se impormos a condição em que  $\lambda_1(t) = 0$ , então  $\lambda_2(t) = 0$  e isso implica que  $\lambda(t) \notin X_1$ . Supondo a mesma condição para  $\lambda_2(t) = 0$ , obteremos a mesma conclusão. No caso em que  $\lambda_3(t) = 0$ , temos que  $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 0$  implicando que  $\lambda(t) \notin X_1$ .

No entanto, mostraremos que com essa estratificação não teremos satisfeito a b)-condição da estratificação de Whitney para  $c = (0, 0, 0) \in X_2$ . Com efeito, tome as sequências  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_1$  e  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_2$ , tal que  $t_n = \left(-\frac{1}{n^2}, 0, \frac{1}{n}\right)$  e  $q_n = \left(0, 0, \frac{1}{n}\right)$ , ambas convergindo para  $c$ .

Suponha que  $l$  seja o limite da sequência de retas  $\overline{t_n q_n}$ . Para analisarmos a direção da reta  $l$  é necessário determinarmos o vetor diretor  $\vec{v}_n$  das retas  $\overline{t_n q_n}$ , para cada  $n$ , que é dado por  $\left(\frac{-1}{n^2}, 0, 0\right)$  e define um vetor unitário  $\vec{u}_n = \frac{\vec{v}_n}{\|\vec{v}_n\|}$  igual a  $(1, 0, 0)$ , então teremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{u}_n = (1, 0, 0)$ , que determina a direção da reta  $l$ .

Seja  $\vec{\nabla} f(t_n) = \left(\frac{-1}{n^4}, 0, \frac{-2}{n^5}\right)$ , o vetor gradiente de  $f$  aplicado em  $t_n$ , temos que o vetor unitário  $\vec{w}_n = \frac{\vec{\nabla} f(t_n)}{\|\vec{\nabla} f(t_n)\|}$  é dado por  $\frac{1}{A} \left(\frac{-1}{n^4}, 0, \frac{-2}{n^5}\right)$ , com  $A = \sqrt{\frac{1}{n^8} + \frac{4}{n^{10}}}$ . Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{w}_n = \vec{\omega}$ , teremos que  $\vec{\omega}$  possui a primeira coordenada não nula<sup>3</sup>. Como o vetor gradiente  $\vec{\nabla} f(t_n)$  ser ortogonal ao plano tangente  $T_{t_n} X_1$ , para cada  $n$ , temos que  $\vec{\omega}$  é ortogonal a  $T$ , onde  $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{t_n} X_1$ .

Afirmamos que  $l \not\subset T$ . Equivalentemente mostraremos que existe um vetor que é ortogonal ao plano  $T$  que não é ortogonal a reta  $l$ . Em particular, pelo produto interno hermitiano, temos que:

$$\langle (1, 0, 0), \vec{\omega} \rangle = 1 \cdot \overline{\pm 1} + 0 + 0 \neq 0,$$

logo, a reta  $l$  não é ortogonal a  $\vec{\omega}$ . Concluímos que  $l \not\subset T$ .

<sup>3</sup>De fato,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n^4 \sqrt{\frac{1}{n^8} + \frac{4}{n^{10}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n^8 \left(\frac{1}{n^8} + \frac{4}{n^{10}}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{4}{n^2}}} = \pm 1$

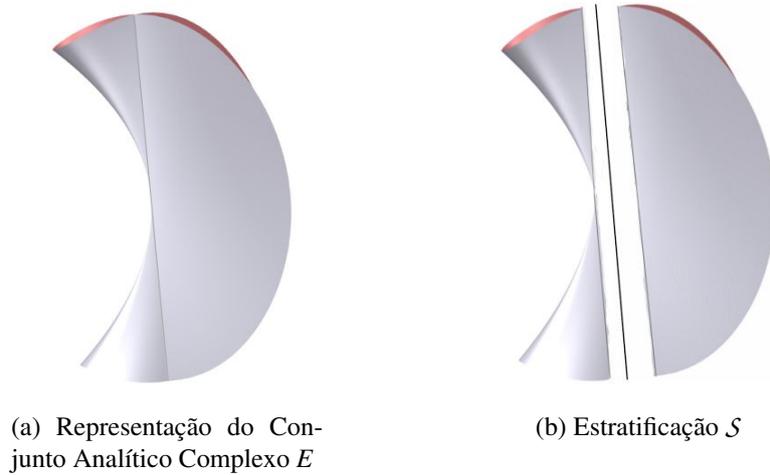


Figura 3.2: Cúspide de Whitney e Estratificação  $\mathcal{S}$

**Exemplo 3.2.6.** Seja  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica definida por  $f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{y}^2 - \tilde{x}^2 \tilde{z}^2 - \tilde{x}^3$ . O conjunto  $F = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathbb{C}^3 \mid f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0\}$  é um conjunto analítico complexo.

Seja a estratificação  $\mathcal{V} = \{X_1, X_2, X_3\}$ , com  $X_1 = F \setminus \Sigma$ ,  $X_2 = \Sigma \setminus \{0\}$  e  $X_3 = \{0\}$ , com  $\Sigma := \{\tilde{x} = \tilde{y} = 0\}$ . Afirmamos que  $\mathcal{V}$  é  $b$ -regular.

De fato, inicialmente, considere o par de estratos  $(X_1, X_2)$  e um ponto arbitrário  $c = (0, 0, a) \in X_2$ , com  $a \neq 0$ . Note que esse par de estratos satisfaz a condição da fronteira. Afim de facilitar as contas, tome  $(x, y, z)$  o sistema de eixos coordenados complexos que é a translação do sistema  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  para a nova origem  $c = (0, 0, a)$ , com  $\tilde{x} = x$ ,  $\tilde{y} = y$  e  $\tilde{z} = z - a$ . Logo, em novas coordenadas teremos  $f(x, y, z) = y^2 - x^2(z - a)^2 - x^3$ . Seja  $\vec{\nabla} f(x, y, z) = (-2x(z - a)^2 - 3x^2, 2y, -2x^2(z - a))$  o vetor gradiente de  $f$ .

Como  $f$  é uma função analítica, tomemos um caminho analítico arbitrário dado por  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$  no estrato  $X_1$ , tal que  $\lambda(0) = c$  e  $\lambda_i(t) \neq 0$  para  $t \neq 0$ , com  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Seja

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)) &= (-2\lambda_1(t)(\lambda_3(t) - a)^2 - 3\lambda_1^2(t), 2\lambda_2(t), -2\lambda_1^2(t)(\lambda_3(t) - a)) \\ &= (-2\lambda_1(t)\lambda_3^2(t) + 4a\lambda_1(t)\lambda_3(t) - 2a^2\lambda_1(t) - 3\lambda_1^2(t), 2\lambda_2(t), -2\lambda_1^2(t)\lambda_3(t) + 2a\lambda_1^2(t)) \end{aligned}$$

o vetor gradiente aplicado no caminho  $\lambda(t) \in X_1$ . Podemos ainda reescrever  $\vec{\nabla} f(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$  analisando a ordem (como definido no exemplo 3.2.5) de cada expansão em série de potência nas entradas desse vetor, teremos:

$$\vec{\nabla} f(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)) = (-2a^2\lambda_1(t), 2\lambda_2(t), 0) + \vec{\omega}(t),$$

onde  $\vec{\omega}(t) = (-2\lambda_1(t)\lambda_3^2(t) + 4a\lambda_1(t)\lambda_3(t) - 3\lambda_1^2(t), 0, -2\lambda_1^2(t)\lambda_3(t) + 2a\lambda_1^2(t))$ , é tal que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{\omega}(t)}{t} = 0$ .

Agora, podemos determinar o vetor unitário  $\vec{u}(t) = \frac{\vec{\nabla}f(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))}{\|\vec{\nabla}f(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))\|}$ , tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{u}(t) = \frac{(-a, \pm 1, 0)}{\sqrt{a^2 + 1}}. \quad 4$$

Seja  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_1$  uma seqüência que converge para  $c$ , tal que  $p_n = (x_n, y_n, z_n)$ . Note que,  $\vec{\nabla}f(p_n)$  é ortogonal a  $T_{p_n}X_1$ , para cada  $n$ , em particular o vetor  $\frac{(-a, \pm 1, 0)}{\sqrt{a^2 + 1}}$  é ortogonal  $T$ , onde  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{p_n}X_1 = T$ .

Tome a seqüência  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_2$ , que também converge para  $c$ , com  $q_n = (0, 0, k_n)$ . Seja  $l$  o limite da seqüência de retas  $\overline{p_n q_n}$ , tal que  $\vec{v}_n = p_n - q_n$  é o vetor diretor para cada reta determinada por essa diferença, que é dado por  $(x_n, y_n, z_n - k_n)$ .

Lembramos que, queremos mostrar que o par de estratos  $(X_1, X_2)$  satisfazem a b)-condição de Whitney para o ponto  $c$  em  $X_2$ , onde  $c$  é um ponto qualquer, logo precisamos concluir que  $l \subset T$ . No entanto, isso ocorre se, e somente se,  $l$  é ortogonal a todo vetor ortogonal ao plano  $T$ , em particular, pelo produto interno hermitiano, temos que:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \langle (x_n, y_n, z_n - k_n), (-a, \pm 1, 0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (-x_n \cdot a \pm y_n)$$

fazendo  $n \rightarrow \infty$ , temos que  $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \langle (x_n, y_n, z_n - k_n), (-a, \pm 1, 0) \rangle$  converge para 0. (Note que,  $y_n \rightarrow ax_n$ ).

Portanto, para cada  $n$ , as retas  $\overline{p_n q_n}$  estão contidas em  $T$ . Logo,  $l \subset T$  e o par de estratos  $(X_1, X_2)$  satisfaz a b)-condição de Whitney em  $c \in X_2$ .

Para o par de estratos  $X_1$  e  $X_3$ , temos que eles satisfazem a condição da fronteira já que  $X_3 \cap \overline{X_1} \neq \emptyset$  e  $X_3 \subset \overline{X_1}$ . Tome uma seqüência  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_3$ , e note que  $r_n \equiv 0$ , portanto para uma seqüência  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_1$  que converge para 0 temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{r_n s_n} = l \subset T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{s_n}X_1$ . O mesmo vale para o par de estratos  $(X_2, X_3)$ .

Concluimos que essa estratificação é b)-regular.

---

<sup>4</sup>Note que,  $\lambda_2^2(t) = \lambda_1^2(t)(\lambda_3(t) - a)^2 - \lambda_1^3(t)$  analisando a ordem de cada expansão em série de potência temos que  $\lambda_2^2(t) = a^2 \lambda_1^2(t) + r(t)$ , onde  $r(t) = \lambda_1^2(t) \lambda_3^2(t) - 2a \lambda_1^2(t) \lambda_3(t) - \lambda_1^3(t)$ , com  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t} = 0$

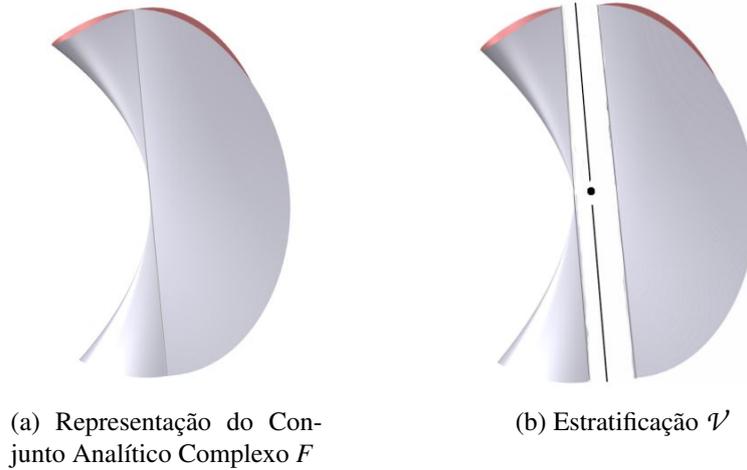


Figura 3.3: Cúspide de Whitney e Estratificação  $\mathcal{V}$

**Exemplo 3.2.7.** Seja  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica dada por  $f(x, y, z) = x^2 - y^2z$ . O conjunto  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$  é um conjunto analítico complexo, conhecida como "guarda-chuva de Whitney".

Seja  $S = \{X_1, X_2\}$  uma estratificação para  $G$ , onde  $X_1 = G \setminus \Sigma$  e  $X_2 = \Sigma$ , tal que  $\Sigma := \{x = y = 0\}$ .

Tome uma sequência  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_1$ , que converge para o ponto  $c = (0, 0, 0) \in X_2$ , com  $p_n = \left(0, \frac{1}{n}, 0\right)$ . Seja  $\vec{\nabla}f(p_n) = \left(0, 0, -\frac{1}{n^2}\right)$ , o vetor gradiente de  $f$  aplicado em  $p_n$ .

O plano tangente em  $p_n$ , para cada  $n$ , é obtido fazendo:

$$\left\langle \left(0, 0, -\frac{1}{n^2}\right), \left((x-0), \left(y-\frac{1}{n}\right), (z-0)\right) \right\rangle = -\frac{\bar{z}}{n^2}$$

Portanto, ao fazermos  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{p_n}X_1$  obtemos que o limite  $T$  é definido pelo conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3; z = 0\}$ . Agora, note que  $T_cX_2 = Z$ , onde  $Z = \{x = y = 0\}$ . Concluimos que  $T_cX_2 \not\subseteq T$ . Logo, o par de estratos  $(X_1, X_2)$  não satisfaz a a)-condição de Whitney em  $c$ , então não satisfaz b)-condição de Whitney em  $c$ .

Podemos refinar a estratificação do Exemplo 3.2.7, de modo a obter a estratificação  $\mathcal{V} = \{X_1, X_2, X_3\}$ , com  $X_1 = G \setminus \Sigma$ ,  $X_2 = \Sigma \setminus \{0\}$  e  $X_3 = \{0\}$ , que é  $\mathcal{V}$  é b)-regular.

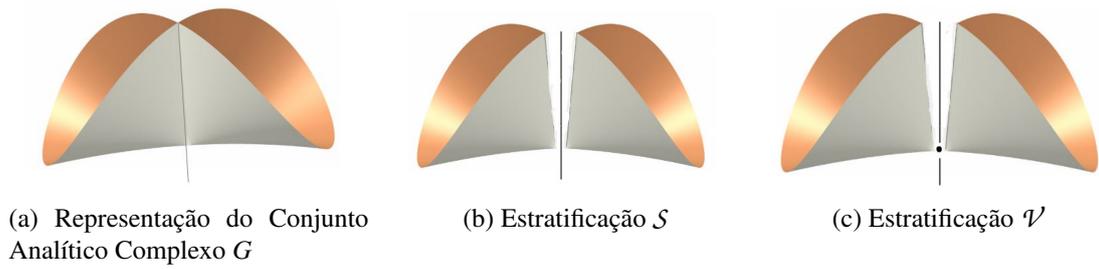


Figura 3.4: Guarda-chuva de Whitney e Possíveis Estratificações

**Teorema 3.2.8.** *Toda variedade analítica admite, localmente, uma estratificação de Whitney.*

**Demonstração:** Ver [22].

■

### 3.3 Condição $a_f$ de Thom

Sejam  $X$  um conjunto analítico complexo e  $f : X \rightarrow \mathbb{C}^N$  uma aplicação analítica, tal que  $S = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  é uma estratificação de Whitney para  $X$ .

**Definição 3.3.1.** *Dizemos que a estratificação  $S$  de  $X$  é **adaptada** a  $f$ , se  $X \setminus f^{-1}(0) = \bigcup_{\alpha \in A'} X_\alpha$ , para algum  $A' \subset A$ .*

**Definição 3.3.2.** *Uma estratificação de Whitney  $S$  de  $X$  adaptada a  $f$  satisfaz a **condição  $a_f$  de Thom** com respeito a  $f$ , se para todo par de estratos  $(X_\alpha, X_\beta)$ , com  $X_\beta \subset \overline{X_\alpha}$ , e para toda sequência de pontos  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_\alpha$  convergindo para  $x \in X_\beta$ , tivermos que o limite da sequência dos planos tangentes  $T_{x_n}(f^{-1}(f(x_n)) \cap X_\alpha)$  existe e é igual a  $T$ , então*

$$T_x(f^{-1}(f(x)) \cap X_\beta) \subset T$$

**Definição 3.3.3.** *Dizemos que  $f$  tem a **propriedade  $a_f$  de Thom** se existe uma estratificação de Whitney  $S$  de  $X$  que satisfaz a condição  $a_f$  de Thom com respeito a  $f$ .*

**Exemplo 3.3.4.** *Seja  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica complexa, dada por  $f(x, y) = x^2 - y^3$ . O conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$  define um conjunto analítico complexo em  $\mathbb{C}^2$ , chamada de cúspide. Seja  $\vec{\nabla} f(x, y) = (2x, -3y^2)$  o vetor gradiente de  $f$ . Como  $\vec{\nabla} f(x, y) = 0$  se, e somente se,  $(x, y) = (0, 0)$ , então a origem é o único ponto crítico para o conjunto analítico  $X$ . Considere  $S = \{X_1, X_2, X_3\}$  a estratificação de Whitney em  $\mathbb{C}^2$ , em que  $X_1 = \mathbb{C}^2 \setminus X$ ,  $X_2 = X \setminus \{0\}$  e  $X_3 = \{0\}$ . Note que a estratificação  $S$  é adaptada a  $f$ , já que  $\mathbb{C}^2 \setminus f^{-1}(0) = X_1$ .*

*Mostraremos que essa estratificação satisfaz a condição  $a_f$  de Thom. Inicialmente tome o par de estratos  $(X_1, X_2)$ , com  $X_2 \subseteq \overline{X_1}$ . Considere  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_1$ , convergindo para o ponto*

### 3. Estratificação de Whitney e Condição $a_f$ de Thom

$a = (x_1, x_2) \in X_2$ , com  $p_n = (x_n, y_n)$ . O plano tangente à  $f^{-1}(f(p_n)) \cap X_1$  em  $p_n$  é dado por  $2x_n(x - x_n) - 3y_n^2(y - y_n) = 0$ , logo  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n}(f^{-1}(f(x_n)) \cap X_1) = 2x_1(x - x_1) - 3x_2^2(y - x_2)$ , que é o mesmo plano tangente referente à  $f^{-1}(f(a)) \cap X_2$  em  $a$ . Logo,  $T_a(f^{-1}(f(a)) \cap X_2) \subset \lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n}(f^{-1}(f(x_n)) \cap X_1)$ . Agora, considere o par  $(X_1, X_3)$  com  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_1$  convergindo para  $b \in X_3$ , note que  $T_b(f^{-1}(f(b)) \cap X_3) = \{0\}$ , então o par  $(X_1, X_3)$  tem a condição  $a_f$  de Thom. O mesmo vale para  $(X_2, X_3)$ . Portanto,  $f$  tem a propriedade  $a_f$  de Thom.

**Teorema 3.3.5.** (Teorema de Hironaka) Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica definida no conjunto analítico complexo  $X$ . Existe uma estratificação de Whitney de  $X$  adaptada a  $f$ , que satisfaz a condição  $a_f$  com respeito a  $f$ .

**Demonstração:** Ver [7], Corolário 1, p.248. ■

No próximo exemplo, baseado em [15], vemos que nem sempre uma aplicação analítica possui a propriedade de Thom.

**Exemplo 3.3.6.** Considere a aplicação  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , definida por  $f(x, y, z) = (x^2 - y^2z, y)$ . Mostraremos que não existe uma estratificação de Whitney adaptada a  $f$ , que satisfaça a condição  $a_f$  de Thom.

Inicialmente, notemos que o conjunto dos pontos críticos  $\Sigma$ , consiste dos pontos onde a matriz Jacobiana  $Jf$  tem posto menor que 2. Temos:

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & -2yz & -y^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

logo  $\Sigma = \{(x, y, x) \in \mathbb{C}^3; x = y = 0\}$ . Note que  $f^{-1}(0) = \Sigma$ .

Suponha que a aplicação  $f$  satisfaça a condição  $a_f$  de Thom, então existe uma estratificação de Whitney que satisfaz a propriedade  $a_f$  de Thom com respeito a  $f$ . Veremos no capítulo 4 que se  $f$  satisfaz a condição  $a_f$  de Thom, então vale o Teorema da Fibração no Tubo de Lê-Milnor, de modo que as fibras dessa fibração são difeomorfas.

No entanto, as fibras para o ponto  $t_1 = (a, 0)$ , com  $0 < a \ll 1$ , são duas retas paralelas parametrizada por  $z \mapsto (\pm\sqrt{a}, 0, z)$ . Em particular  $f^{-1}(t_1) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$  terá duas componentes conexas. Já a fibra sobre  $t_2 = (0, a)$  é parametrizada por  $x \mapsto (x, a, \frac{x^2}{a^2})$ , logo  $f^{-1}(t_2) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$  possui uma única componente conexa. Portanto, essas fibras não são difeomorfas. Contra-dição.

## Capítulo 4

# O Teorema da Fibração Local de Lê-Milnor

Este capítulo está dividido da seguinte forma: Na primeira seção apresentamos noções preliminares sobre a fibração de Lê-Milnor, com a hipótese que  $X$  é um conjunto analítico complexo com singularidade isolada em  $\underline{0}$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função analítica não constante. Discutimos a existência de "bolas de Milnor" para o caso em que  $X$  é equidimensional (esse fato implica que  $X$  tem a estrutura cônica local). Além disso, mostramos que para um germe de uma função analítica  $f : (X, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  e para um representante suficientemente pequeno  $X$  de  $(X, \underline{0})$ , existe  $\delta > 0$  suficientemente pequeno tal que para todo  $t, \delta > |t| > 0$ , o conjunto  $\{f = t\} \cap X$  é não singular, em outras palavras, podemos assumir que  $0 \in \mathbb{C}$  é um valor crítico isolado de  $f$ .

Na seção seguinte, apresentamos o Teorema da fibração local de Lê-Milnor, que garante a existência da fibração no "tubo de Milnor". Para a sua demonstração utilizamos resultados apresentados na primeira seção e o Lema de Ehresmann. Definiremos  $F_t$  como a fibra de Milnor, essa definição é consistente uma vez que essas fibras são difeomorfas.

Na seção 4.3, fizemos um breve estudo sobre monodromia geométrica que é definida através de um automorfismo  $h : F_t \rightarrow F_t$ , induzido por uma restrição do fibrado da Fibração Local de Lê-Milnor.

Por fim, apresentamos uma versão mais geral do Teorema da fibração local de Lê-Milnor, visto na seção 4.3. Nesse caso, adicionamos a hipótese de que  $f$  é uma função analítica com singularidade possivelmente não isolada em  $\underline{0}$ .

A principal referência para este capítulo é [18].

## 4.1 Background sobre Fibrações de Lê-Milnor

Seja  $(X, \underline{0})$  o germe na origem  $\underline{0}$  em um espaço complexo  $\mathbb{C}^N$  de um conjunto analítico complexo  $X$  de dimensão  $n + 1$ .

**Definição 4.1.1.** Um ponto  $x \in X$  é chamado uma **singularidade isolada** de  $X$  se existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $x$  em  $X$  tal que  $(X \cap U) \setminus \{x\}$  é uma variedade suave.

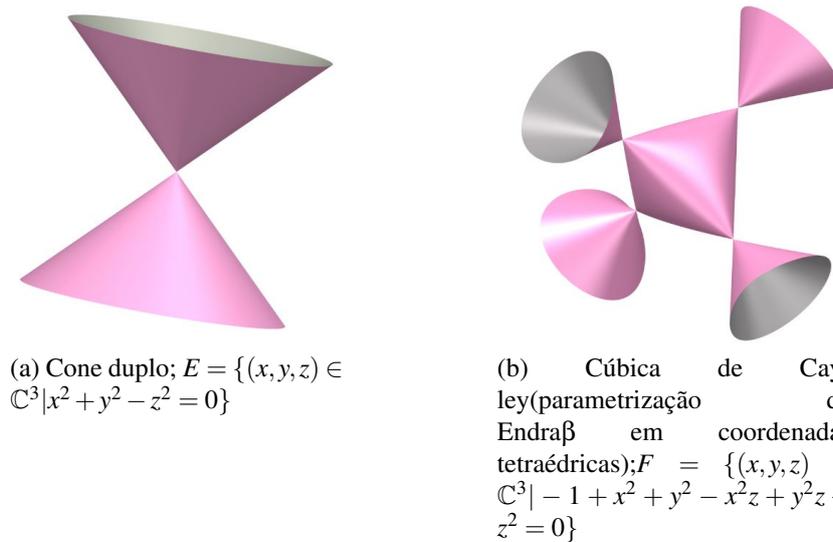


Figura 4.1: Superfícies com Singularidades Isoladas

**Definição 4.1.2.** O ponto  $x$  de  $X$  é chamado uma **singularidade não isolada** se para toda vizinhança aberta  $U$  de  $x$  em  $X$  tivermos que  $X \cap U \setminus \{x\}$  não é variedade suave.

A Cúspide de Whitney e o Guarda-Chuva de Whitney apresentados nos respectivos Exemplos 3.2.5 e 3.2.7, são variedades analíticas com singularidades não isoladas.

**Definição 4.1.3.** Sejam  $f : (X, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  uma função analítica não constante e  $\mathcal{S} = (S_\alpha)_{\alpha \in A}$  uma estratificação de Whitney de  $X$ . Dado  $x \in X$ , seja  $S_{\alpha(x)}$  o estrato que contém  $x$ . Dizemos que  $x$  é **ponto regular de  $f$**  com respeito à estratificação  $\mathcal{S}$  se  $f|_{S_{\alpha(x)}} : S_{\alpha(x)} \rightarrow \mathbb{C}$  for submersão em  $x$ .

Denotaremos os pontos singulares de  $f$  por  $\Sigma(f)$ .

Em particular, diremos que  $f$  tem **singularidade isolada** em  $\underline{0} \in X$  se existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $\underline{0}$  em  $X$ , tal que para todo  $\alpha \in A$  tem-se:

$$f|_{(S_\alpha - \{\underline{0}\}) \cap U} : (S_\alpha - \{\underline{0}\}) \cap U \rightarrow \mathbb{C} \text{ é submersão.}$$

Em outras palavras: existe  $U$  vizinhança de  $\underline{0}$  em  $X$  tal que  $\Sigma(f) \cap U = \{\underline{0}\}$ .

**Definição 4.1.4.** Dizemos que um conjunto analítico  $X \subset \mathbb{C}^N$  é **equidimensional**, se todas as componentes irredutíveis de  $X$  tem a mesma dimensão.

**Exemplo 4.1.5.** As superfícies representadas na Figura 4.1, Cone Duplo e a Cúbica de Cayley, são exemplos de conjuntos analíticos equidimensionais.

Considere  $X$  um conjunto analítico complexo com singularidade isolada no ponto  $\underline{0}$  e seja  $f : (X, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  uma função analítica complexa não constante com singularidade isolada em  $\underline{0}$ .

**Definição 4.1.6.** Dizemos que um número real  $\varepsilon > 0$  é um **raio de Milnor**, se todas as esferas  $\mathbb{S}_{\varepsilon_1}$  intersectam transversalmente  $X \setminus \{\underline{0}\}$ , com  $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ .

**Definição 4.1.7.** A bola aberta  $\mathring{\mathbb{B}}_\varepsilon \subset \mathbb{C}^N$  de centro  $\underline{0}$  e raio  $\varepsilon > 0$ , é chamada **bola de Milnor** em  $X \setminus \{\underline{0}\}$ , se  $\varepsilon$  for um raio de Milnor.

Para o caso em que  $X \subset \mathbb{C}^N$  e  $f : (X, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  possuem singularidades isoladas em  $\underline{0}$ , a existência de bolas de Milnor é dada pelo seguinte Lema, atribuído a Whitney:

**Lema 4.1.8.** Sejam  $X$  um conjunto analítico complexo e  $z_n$  uma sequência de pontos não singulares de  $X$  que convergem a  $\underline{0}$ . Considere  $T_{z_n}X$  a sequência de espaços tangentes de  $X$  em  $z_n$ . Assuma que essa sequência de espaços tangentes tem limite  $T$  e a sequência das retas  $\overline{\underline{0}z_n}$  tem limite  $l$ , então

$$l \subset T.$$

**Demonstração:** Suponhamos inicialmente o caso em que  $X$  é um conjunto irredutível, logo equidimensional de dimensão  $d$ . Seja  $\mathbb{P}^{N-1}$  o espaço de retas passando por  $\underline{0}$  e o espaço de Grassmann  $G_d(\mathbb{C}^N)$  como definido em 1.1.21, lembre que  $G_d(\mathbb{C}^N)$  é compacto. Como em todo conjunto compacto as subsequências são convergentes, podemos escolher uma subsequência de  $(z_n)$ , se necessário, tal que a sequência de retas  $\overline{\underline{0}z_n}$  e espaços tangentes  $T_{z_n}X$  tenham os limites  $l$  e  $T$ , respectivamente.

De fato, seja  $U$  uma vizinhança aberta de  $\underline{0}$  em  $X$  e considere a aplicação:

$$U \cap X \setminus \{\underline{0}\} \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}^{N-1} \times G_d(\mathbb{C}^N)$$

dada por  $\phi(z) = (\overline{\underline{0}z}, T_zX)$ .

O gráfico de  $\phi$  em  $U \cap X \setminus \{\underline{0}\} \times \mathbb{P}^{N-1} \times G_d(\mathbb{C}^N)$  tem o seu fecho como um subespaço analítico (ver Teorema 16.4 de [22]). Portanto, como todo conjunto analítico é semianalítico, temos pelo Lema de Seleção da Curva 2.3.3 que o limite  $(l, T)$  é também o limite ao longo de um arco analítico complexo  $p : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (X, \underline{0})$ , onde  $p(0) = \underline{0}$  e  $p(t) \in X \setminus \{\underline{0}\}$ , para  $t \neq 0$ .

Agora, para  $t \neq 0$  o vetor tangente:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \dot{p}(t)$$

do arco analítico no ponto  $p(t)$  é também um vetor tangente em  $T_{p(t)}X$ .

Provamos a seguir que quando  $t$  converge para zero a reta  $\underline{0}p(t)$  e a reta definida pelo vetor velocidade  $\dot{p}(t)$  tem o mesmo limite. Temos:

$$p(t) = a_i t^i + a_{i+1} t^{i+1} + \dots$$

quando  $i \geq 1$  e  $a_i \neq 0$ . Seja,  $[c]$  uma classe em  $\mathbb{P}^{N-1}$  com  $c \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ . Então,

$$[p(t)] = [a_i t^i + a_{i+1} t^{i+1} + \dots] = [a_i + a_{i+1} t + \dots] \longrightarrow [a_i]$$

quando  $t \longrightarrow 0$ . Analogamente,

$$[\dot{p}(t)] = [i a_i t^{i-1} + (i+1) a_{i+1} t^i + \dots] = [i a_i + (i+1) a_{i+1} t + \dots] \longrightarrow [i a_i] = [a_i]$$

quando  $t \longrightarrow 0$ .

Portanto, temos que o limite das duas retas convergem para o mesmo limite. Note que  $\dot{p}(t) \subset T_{p(t)}X$ . Temos  $\lim \underline{0}\dot{p}(t) = \lim \overline{\underline{0}p(t)} \subset \lim T_{p(t)}X$ . Logo, temos a prova do Lema 4.1.8 para o caso em que  $X$  é irredutível.

O caso em que  $X$  não é irredutível em  $\underline{0}$ , podemos assumir que a sequência  $(z_n)$  pertença a alguma componente irredutível de  $X$  em  $\underline{0}$ . A dimensão em cada componente irredutível é bem definida, podendo assim considerarmos o espaço de Grassmann em cada uma delas e com isso podemos extrair eventualmente uma subsequência e o resultado segue como na primeira parte mostrada. Isso completa a prova do teorema. ■

**Observação 4.1.9.** *Notamos que o Lema 4.1.8 está provando que se equiparmos uma pequena vizinhança  $U$  de  $\underline{0}$  com a estratificação  $(X \cap U \setminus \{\underline{0}\}, \{\underline{0}\})$ , então essa estratificação satisfaz a condição b de Whitney e, portanto, é Whitney regular.*

**Observação 4.1.10.** *Sejam  $X$  e  $\mathbb{S}^{N-1}$  subconjuntos de  $\mathbb{C}^N$ . Pela Definição 1.1.24, temos que  $X \not\pitchfork_x \mathbb{S}^{N-1}$ , com  $x \in X \cap \mathbb{S}^{N-1}$ , se  $T_x X + T_x \mathbb{S}^{N-1} \neq T_x \mathbb{C}^N$ . Escrevemos  $T_x \mathbb{C}^N = T_x \mathbb{S}^{N-1} + (T_x \mathbb{S}^{N-1})^\perp$ . Suponhamos por absurdo que  $T_x X \not\subset T_x \mathbb{S}^{N-1}$ , então existe  $\vec{v} \in T_x X$  tal que  $\vec{v} \notin T_x \mathbb{S}^{N-1}$ , logo  $\vec{v} \in (T_x \mathbb{S}^{N-1})^\perp$ , com isso,  $\vec{v} + T_x \mathbb{S}^{N-1} = T_x \mathbb{C}^N$  e portanto  $T_x X + T_x \mathbb{S}^{N-1} = T_x \mathbb{C}^N$ . Contradição. Com isso temos o seguinte resultado: Se  $X \not\pitchfork_x \mathbb{S}^{N-1}$ , com  $x \in X \cap \mathbb{S}^{N-1}$ , então  $T_x X \subset T_x \mathbb{S}^{N-1}$ .*

O próximo resultado é uma consequência do Lema 4.1.8 é:

**Lema 4.1.11.** *Seja  $X$  um conjunto analítico complexo equidimensional com singularidade isolada em  $\underline{0}$ . Existe  $\varepsilon_1$  tal que  $\mathring{\mathbb{B}}_{\varepsilon_1}$  é uma bola de Milnor de  $X$  em  $\underline{0}$ . Nesse caso, a estrutura diferenciável de  $X \cap \mathbb{S}_\varepsilon$  não depende de  $\varepsilon$ , para  $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$ , quando  $\mathbb{S}_\varepsilon$  é a esfera que limita a bola de Milnor  $\mathring{\mathbb{B}}_\varepsilon$ .*

**Demonstração:** Suponha por absurdo, que para todo  $\varepsilon > 0$  a bola  $\mathring{\mathbb{B}}_\varepsilon$  não é uma bola de Milnor, ou seja,  $\varepsilon$  não é um raio de Milnor.

Existe uma sequência  $\varepsilon_n$  de números positivos que tende a  $\underline{0}$ , onde para cada  $n$  existe um ponto  $z_n \in X$  tal que  $X$  intersecta  $\mathbb{S}_{\|z_n\|}$  não transversalmente em  $z_n$ . Tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que a sequência  $z_n$  é escolhida tal que  $(\underline{0}z_n)$  tem limite  $l$ , a sequência de espaços tangentes  $(T_{z_n}X)$  tem limite  $T$  e o limite de  $(T_{z_n}\mathbb{S}_{\|z_n\|})$  é  $\tau$ .

Como os pontos  $z_n$  do espaço  $X$  são não transversais a  $\mathbb{S}_{\|z_n\|}$ , pela observação 4.1.10, vale:

$$T_{z_n}X \subset T_{z_n}\mathbb{S}_{\|z_n\|}.$$

Note que, o  $\lim_n \overline{\underline{0}z_n} = l$  é ortogonal a  $\tau$ . Por  $T_{z_n}X \subset T_{z_n}\mathbb{S}_{\|z_n\|}$ , implica que  $T \subset \tau$ , logo  $l \not\subset T$ , fato que contradiz o Lema 4.1.8.

Por assumirmos que a função  $f$  tem uma singularidade isolada em  $\underline{0}$ , o subespaço  $V(f) := \{f = 0\}$  de  $X$  tem uma singularidade isolada em  $\underline{0}$ . Logo, podemos escolher  $\varepsilon_1$  tal que a bola  $\mathring{\mathbb{B}}_{\varepsilon_1}$  de  $\mathbb{C}^N$  é também uma bola de Milnor de  $V(f)$  de  $\underline{0}$ .

Portanto, para  $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$  a interseção  $X \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ , quando  $\mathbb{S}_\varepsilon$  é a esfera que limita  $\mathring{\mathbb{B}}_\varepsilon$ , é uma variedade analítica suave real, já que  $X$  intersecta transversalmente  $\mathbb{S}_\varepsilon$ . Similarmente por a função analítica  $(X, \underline{0}) \xrightarrow{f} (\mathbb{C}, 0)$  ter uma singularidade isolada no ponto  $\underline{0}$ , para  $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$ , a interseção  $V(f) \cap \mathbb{S}_\varepsilon$  é uma variedade analítica suave real.

Afirmamos que a estrutura diferenciável de  $X \cap \mathbb{S}_\varepsilon$  e de  $V(f) \cap \mathbb{S}_\varepsilon$  não depende de  $\varepsilon$ , para  $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$ . Provaremos a assertiva para  $X$ , o caso para  $V(f)$  é feito de modo análogo.

Considere a bola de Milnor  $\mathring{\mathbb{B}}_{\varepsilon_1}$  para  $X \setminus \{\underline{0}\}$ . Seja  $\varphi$  a restrição para o conjunto  $X \cap \mathring{\mathbb{B}}_{\varepsilon_1} \setminus \{\underline{0}\}$  da função distância ao ponto  $\underline{0} \in \mathbb{C}^N$ , que define uma aplicação suave:

$$X \cap \mathring{\mathbb{B}}_{\varepsilon_1} \setminus \{\underline{0}\} \xrightarrow{\varphi} (0, \varepsilon_1)$$

A partir daí podemos extrair algumas informações:

1. Dado  $K \subset (0, \varepsilon_1)$  compacto, temos que por  $X \cap \mathring{\mathbb{B}}_{\varepsilon_1} \setminus \{\underline{0}\}$  ser limitada e por  $\varphi$  ser analítica, obtemos que o conjunto fechado  $\varphi^{-1}(K)$  é compacto em  $X \cap \mathring{\mathbb{B}}_{\varepsilon_1} \setminus \{\underline{0}\}$ . Portanto,  $\varphi$  é própria.
2.  $\varphi$  é submersão. De fato, pelo Lema 1.1.30 temos que os pontos críticos da função distância em  $X \cap \mathring{\mathbb{B}}_{\varepsilon_1} \setminus \{\underline{0}\}$ , são os pontos críticos de  $\varphi$  em  $X \cap \mathring{\mathbb{B}}_{\varepsilon_1} \setminus \{\underline{0}\}$ , (que não há),

juntamente com os pontos regulares de  $\varphi$  em  $X \cap \mathring{\mathbb{B}}_{\varepsilon_1} \setminus \{0\}$ , tal que  $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \not\subset_x (X \cap \mathring{\mathbb{B}}_{\varepsilon_1} \setminus \{0\})$ , no entanto isso não ocorre para  $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$ , já que  $\mathring{\mathbb{B}}_{\varepsilon_1}$  é uma bola de Milnor para  $X \setminus \{0\}$ .

3. É claro que  $\varphi$  é sobrejetiva.

Portanto, pelo Lema de Ehresmann 1.2.10, temos que  $\varphi$  é um fibrado diferenciável localmente trivial. Logo  $X \cap \mathbb{S}_{\varepsilon'}$  e  $X \cap \mathbb{S}_{\varepsilon''}$  são difeomorfas para  $\varepsilon'$  e  $\varepsilon'' \in (0, \varepsilon_1)$ . ■

Com isso podemos definir:

**Definição 4.1.12.** Quando  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno, como no Lema 4.1.11, chama-se  $K_X = X \cap \mathbb{S}_\varepsilon$  o **link do conjunto analítico**  $X$  em  $\underline{0}$ . Definimos de modo similar o **link de**  $V(f)$  no ponto  $\underline{0}$  e o denotamos por  $K_f$ .

**Lema 4.1.13.** Seja  $f : (X, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de uma função analítica em um conjunto analítico complexo equidimensional  $X$  com uma singularidade isolada em  $\underline{0}$ . Então, para um representante suficientemente pequeno  $X$  de  $(X, \underline{0})$ , existe  $\delta > 0$  suficientemente pequeno tal que para todo  $t$ ,  $\delta > |t| > 0$ , o espaço  $\{f = t\} \cap X$  é não singular.

**Demonstração:** Seja  $\Sigma(f)$  o conjunto dos pontos críticos de  $f$ , que é definido pelos pontos onde a matriz  $(df_1, \dots, df_k, df)$  de  $k + 1$  linhas e  $N$  colunas, terá posto  $\leq N - \dim X$ . As funções  $f_1, \dots, f_k$  definem  $X$  em  $\underline{0} \in \mathbb{C}^N$ . Note que  $\Sigma(f)$  é um subespaço analítico de  $X$ .

Localmente temos uma quantidade finita de estratos para  $\Sigma(f)$ , onde cada estrato  $\Sigma_k$  representa uma variedade suave analítica complexa. Temos que,  $\Sigma(f)$  é a união disjunta desses  $\Sigma_k$ :

$$\Sigma(f) = \bigsqcup_k \Sigma_k.$$

Da partição  $(\Sigma_k)$  ser localmente finita, em uma vizinhança  $X_0$  de  $\underline{0}$  em  $X$ , existe apenas um número finito de estratos  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$  com  $\underline{0}$  em seu fecho.

A restrição de  $f$  a  $\Sigma_i \setminus \{0\}$  é formada por pontos críticos, já que cada  $\Sigma_i \setminus \{0\}$  está contido em  $\Sigma(f)$ , então a função  $f$  é constante para  $i = 1, \dots, n$ . Seu valor é o mesmo de  $f(\underline{0}) = 0$ . Com isso, é possível concluir que todo ponto crítico próximo de  $\underline{0}$  é enviado em 0. Portanto, para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno,  $X \cap f^{-1}(t)$  é não singular para todo  $t$  com  $\delta > |t| > 0$ . ■

**Observação 4.1.14.** Se  $X$  não é equidimensional, mas possui uma singularidade isolada em  $\underline{0}$ , o espaço  $\{f = t\}$  para  $t$  pequeno e diferente 0, intersecta localmente cada componente irredutível de  $(X, \underline{0})$ , em pontos não singulares.

**Observação 4.1.15.** *Note que a prova do Lema 4.1.13, mostra mais do que é afirmado: Mostra que se tomarmos um representante de  $X$  suficientemente pequeno, podemos assumir que  $0 \in \mathbb{C}$  é o único valor crítico de  $f$ .*

## 4.2 Teorema da Fibração Local de Lê-Milnor para Singularidades Isoladas

No próximo capítulo discorreremos sobre o Teorema de Milnor (Corolário 4.5 em [13]), que diz que para um germe de função analítica  $f : (\mathbb{C}^{N+1}, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  com singularidade isolada em  $\underline{0}$ , existe um número real suficientemente pequeno  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,

$$\phi := \frac{f}{\|f\|} : \mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1} \setminus K_f \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

é a projeção de um fibrado suave localmente trivial, onde  $\mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1}$  é a esfera  $(2N+1)$ -dimensional de raio  $\varepsilon$ , centrada na origem. Essa é conhecida como a primeira versão do Teorema da Fibração de Milnor, ou também como fibração de Milnor na esfera.

O próximo resultado dessa seção, trata da existência de uma segunda versão desse Teorema, a "fibrção no tubo", de modo que generaliza a primeira versão proposta por Milnor. A grosso modo, nesse resultado a função analítica  $f$  é definida no conjunto analítico complexo  $X$  e nos diz que as fibras são difeomorfas à variedade complexa obtida considerando um valor regular  $t$  suficientemente próximo de  $0 \in \mathbb{C}$  e olhando para  $f^{-1}(t)$  contido dentro da bola aberta  $\mathring{\mathbb{B}}_\varepsilon$  limitada por  $\mathbb{S}_\varepsilon$ .

**Teorema 4.2.1.** *Sejam  $X$  um conjunto analítico complexo com singularidade isolada em  $\underline{0}$  e  $f : (X, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  uma função analítica com singularidade isolada no ponto  $\underline{0}$ . Seja  $\mathring{\mathbb{B}}_{\varepsilon_1}$  uma bola de Milnor de  $X$  e de  $V(f)$  em  $\underline{0}$ . Seja  $\varepsilon > 0$  tal que  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ , então existe  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, para todo  $t$  com  $\delta \geq |t|$ , a fibra  $\{f = t\}$  intersecta a variedade suave  $\mathbb{S}_\varepsilon \cap X$  transversalmente em  $X$ . Temos um fibrado suave localmente trivial:*

$$\phi : \mathbb{B}_\varepsilon \cap X \cap f^{-1}(\mathring{\mathbb{D}}_\delta) \setminus V(f) \longrightarrow \mathring{\mathbb{D}}_\delta \setminus \{0\}$$

induzido por  $f$ , onde  $\mathbb{B}_\varepsilon$  é a bola fechada e  $\mathring{\mathbb{D}}_\delta$  é o disco aberto de raio  $\delta$ .

**Demonstração:** Primeiramente, suponha que  $X$  é irredutível. Defina  $g := f|_{\mathbb{S}_\varepsilon \cap X} : \mathbb{S}_\varepsilon \cap X \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $X$  possuindo apenas uma componente analítica em  $\underline{0}$ .

Pela observação 4.1.15, temos que  $0 \in \mathbb{C}$  é valor crítico isolado de  $g$ , ou seja, existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $t \in \mathring{\mathbb{D}}_\delta \setminus \{0\}$  é valor regular de  $g$ . Sendo assim, todo  $x \in g^{-1}(t)$  é ponto regular de  $g$ . Pelo Lema 1.1.30, podemos concluir que  $f^{-1}(t) \pitchfork_x (\mathbb{S}_\varepsilon \cap X)$  em  $X$ .

Se  $X$  possui mais de uma componente analítica, podemos aplicar o argumento anterior para cada uma dessas componentes.

Considere

$$\phi : \mathbb{B}_\varepsilon \cap X \cap f^{-1}(\mathring{\mathbb{D}}_\delta) \setminus V(f) \longrightarrow \mathring{\mathbb{D}}_\delta \setminus \{0\}$$

induzida por  $f$ . Mostraremos que a restrição de  $f$  nesse conjunto é a projeção de um fibrado suave localmente trivial. De fato:

- i. Seja  $K \subset \mathring{\mathbb{D}}_\delta \setminus \{0\}$  um conjunto compacto. Como  $\mathbb{B}_\varepsilon$  é compacto, o conjunto  $\mathbb{B}_\varepsilon \cap X \cap f^{-1}(\mathring{\mathbb{D}}_\delta) \setminus V(f)$  é limitado, e por  $f$  ser analítica temos que  $\phi^{-1}(K)$  é fechado nesse conjunto, assim segue que  $\phi$  é própria para esse conjunto;
- ii-a. Analisaremos  $\phi$  restrita ao conjunto  $\mathring{\mathbb{B}}_\varepsilon \cap X \cap f^{-1}(\mathring{\mathbb{D}}_\delta) \setminus V(f)$ . Precisamos lembrar que  $\mathring{\mathbb{B}}_\varepsilon$  é uma bola de Milnor e que todos os pontos críticos de  $f : (X, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  são enviados em 0. Portanto, fica claro que o conjunto  $\mathring{\mathbb{B}}_\varepsilon \cap X \cap f^{-1}(\mathring{\mathbb{D}}_\delta) \setminus V(f)$  possui apenas pontos regulares, sendo assim  $\phi$  é submersão nesse conjunto;
- ii-b. Por fim, estudaremos  $\phi$  restrita ao conjunto  $\mathbb{S}_\varepsilon \cap X \cap f^{-1}(\mathring{\mathbb{D}}_\delta) \setminus V(f)$ . Pela primeira parte do Teorema sabemos que o conjunto  $\{f = t\}$  intersecta transversalmente  $\mathbb{S}_\varepsilon \cap X$ , além disso,  $f$  não tem pontos críticos nesse conjunto. Portanto, pelo Lema 1.1.30,  $\phi$  é submersão nesse conjunto;
- iii.  $\phi$  é claramente sobrejetiva, uma vez que  $\phi$  é a restrição de  $f$  que possui singularidade isolada em  $\underline{0}$ .

Portanto, pelo Lema de Ehresmann 1.2.10,  $\phi$  é um fibrado suave localmente trivial. ■

**Definição 4.2.2.** A fibração obtida na Proposição 4.2.1 é chamada a **fibração local de Lê-Milnor** de  $f$  em  $\underline{0}$ . As fibras  $F_t = f^{-1}(t) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$  são as fibras de Milnor de  $f$  em 0 e  $\phi$  é a aplicação fibrada.

### 4.3 Monodromias Geométricas de Fibrações

Nas condições do Teorema 4.2.1, temos que a aplicação  $\phi : \mathbb{B}_\varepsilon \cap X \cap f^{-1}(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{S}^1$  é um fibrado suave localmente trivial, pois é a restrição do fibrado  $\phi : \mathbb{B}_\varepsilon \cap X \cap f^{-1}(\mathring{\mathbb{D}}_\delta) \setminus V(f) \longrightarrow \mathring{\mathbb{D}}_\delta \setminus \{0\}$ . Esse novo fibrado induz um automorfismo  $h : F_t \rightarrow F_t$  que chamamos de **monodromia geométrica** de  $f$ .

**Definição 4.3.1.** *Seja  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{S}^1$  uma fibração suave localmente trivial sobre o círculo unitário  $\mathbb{S}^1$ . Suponha que  $\varphi$  é uma aplicação própria. A integração do campo de vetores obtida do levantamento através de  $\varphi$  dos vetores unitários tangentes à  $\mathbb{S}^1$ , define um difeomorfismo suave da fibra nela mesma, ou seja, temos um automorfismo  $h : F_0 \rightarrow F_0$  que chamamos de **monodromia geométrica da fibração  $\varphi$** .*

Devido ao levantamento de vetores de  $\mathbb{S}^1$  não ser único, a monodromia geométrica não é única. Mas é possível provar que sua classe de isotopia é unicamente determinada por  $\varphi$ .

**Lema 4.3.2.** *Duas fibrações localmente suaves  $E_1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  e  $E_2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  são isomorficas se elas possuem fibras difeomorficas e monodromias geométricas isomorfas.*

**Demonstração:** Ver Lema 6.1.15 de [18]. ■

Vejamos uma aplicação para esse Lema:

**Exemplo 4.3.3.** *Seja  $\varphi_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  uma fibração localmente suave sobre  $\mathbb{S}^1$  com fibra  $[0, 1]$ , onde  $E_1$  é o cilindro de  $\mathbb{R}^3$  definido por  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . Seja  $h_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  a monodromia geométrica dessa fibração, definida pela identidade. Agora, tome  $\varphi_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  um fibrado localmente suave com fibra  $[0, 1]$ , onde  $E_2$  é definida como a faixa de Möebius. Seja  $h_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  a monodromia geométrica dessa fibração dada por  $h_2(x) = 1 - x$*

*Defina, a homotopia  $H(t, x) = t(1 - x) + (1 - t)x$  entre as funções  $h_1$  e  $h_2$ . Note que para  $t = \frac{1}{2}$  a aplicação  $H(t, x)$  não é um homeomorfismo. Portanto, não temos uma isotopia entre as monodromias e além disso as fibrações  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são não isomorficas, pois os espaços totais não são homeomorfos.*

## 4.4 Teorema da Fibração Local para Singularidades Não Isoladas

Assumindo que  $X \subset \mathbb{C}^N$  é um conjunto analítico complexo com singularidade isolada em  $\underline{0}$  e que  $f : (X, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é uma função analítica com singularidade possivelmente não isolada em  $\underline{0}$ , existe um Teorema da fibração mais geral do que o enunciado no Teorema 4.2.1.

Note que,  $X \setminus f^{-1}(0)$  é não singular (ver Lema 4.1.13). Nesse caso, teremos o seguinte Teorema da fibração:

**Teorema 4.4.1.** *Sejam  $X$  um conjunto analítico complexo com singularidade isolada em  $\underline{0}$  e  $f : (X, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  uma função analítica. Então, existem  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  suficientemente pequenos, com  $\delta$  dependente de  $\varepsilon$ , tal que  $(X \cap \mathbb{B}_\varepsilon) \setminus f^{-1}(0)$  é não singular e*

$$X \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\delta^*) \longrightarrow \mathbb{D}_\delta^*$$

é um fibrado suave localmente trivial, onde  $\mathbb{D}_\delta^*$  é o disco perfurado em  $\mathbb{C}$  centrado em  $\underline{0}$  e com raio  $\delta$ .

**Demonstração:** A condição que  $(X \cap \mathbb{B}_\varepsilon) \setminus f^{-1}(0)$  é não singular segue imediatamente da Observação 4.1.15. Já a prova de que temos uma fibrção como descrita no enunciado, segue essencialmente os passos da demonstração do Teorema 4.2.1 aplicando o Lema de Ehresmann, onde os critérios *i*), *ii* – *a*) e *iii*) são análogos. Mostraremos que vale *ii* – *b*).

Seja  $f : (X, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de uma função analítica com singularidade não isolada em  $\underline{0}$ . Pelo Teorema de Hironaka 3.3.5, podemos tomar uma estratificação de  $f$  que satisfaça a condição  $a_f$  de Thom. Seja  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, tal que a esfera  $\mathbb{S}_\varepsilon$  seja transversal em  $\mathbb{C}^N$  aos estratos da estratificação  $a_f$  contidos em  $f^{-1}(0)$ , de modo que para  $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$  a esfera  $\mathbb{S}_{\varepsilon_1}$  ainda seja transversal aos estratos de  $f^{-1}(0)$ .

Afirmamos que existe  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, tal que para todo  $t$ ,  $0 < t < \delta$ , no disco aberto  $\mathbb{D}_\delta^*$ ,  $f^{-1}(t)$  intersecta transversalmente  $X \cap \mathbb{S}_\varepsilon$  no sentido estratificado.

Caso contrário, podemos tomar  $x_n$  em  $(X \setminus f^{-1}(0)) \cap \mathbb{S}_\varepsilon$  que converge para  $y$  em  $f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ , tal que as fibras  $f^{-1}(f(x_n))$  são não transversais à  $\mathbb{S}_\varepsilon$  em  $x_n$ . Como  $X$  tem singularidade isolada em  $\underline{0}$ , obtemos pela observação 4.1.10 que

$$T_{x_n} f^{-1}(f(x_n)) \subset T_{x_n} \mathbb{S}_\varepsilon. \quad (4.1)$$

Como  $f$  satisfaz a condição  $a_f$  de Thom, tome os estratos  $X_\alpha$  e  $X_\beta$  respectivamente em  $X \setminus f^{-1}(0)$  e  $f^{-1}(0)$ , tal que  $x_n \in X_\alpha$  e  $y \in X_\beta$ . Por (4.1), obtemos:

$$T_{x_n}(X_\alpha \cap f^{-1}(f(x_n))) \subset T_{x_n} f^{-1}(f(x_n)) \subset T_{x_n} \mathbb{S}_\varepsilon.$$

Uma vez que as grassmanianas são compactas, podemos supor que a sequência de espaços tangentes  $T_{x_n}(f^{-1}(f(x_n)) \cap X_\alpha)$  tem limite  $T$ . Usando a condição  $a_f$  de Thom, temos:

$$T_y X_\beta \subset T \subset T_y \mathbb{S}_\varepsilon$$

Mas pelo Teorema da estrutura cônica,  $X_\beta$  intersecta transversalmente  $\mathbb{S}_\varepsilon$ . Contradição. Portanto, pelo Lema de Ehresmann vale que temos um fibrado suave localmente trivial. ■

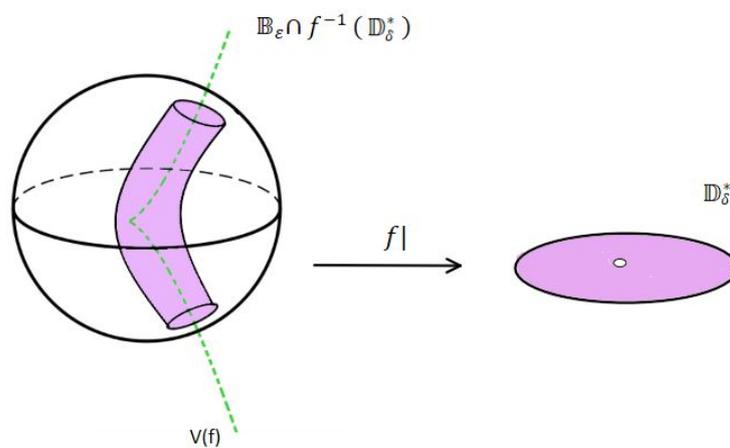


Figura 4.2: Representação da Fibração do Teorema 4.4.1

## Capítulo 5

# O Número de Betti da Fibra na Dimensão Média

Este capítulo é baseado no trabalho de Milnor [13] e tem como principal objetivo mostrar aplicações algébricas para o número de Milnor  $\mu$ . Para isso, foi necessário estudarmos a fibração de Milnor na esfera e darmos uma descrição topológica do link  $K_f$  e da fibra  $F_\theta$ , ressaltaremos que a fibra  $F_\theta$  da fibração na esfera é *difeomorfa* à da fibração dada no Teorema 4.4.1. O principal resultado da seção 5.2, abrange o fato que as fibras  $F_\theta$ , com dimensão real  $2N$ , tem o mesmo tipo de homotopia de um buquê de esferas  $\mathbb{S}^N \wedge \dots \wedge \mathbb{S}^N$  e a quantidade de esferas desse buquê é definido como o número de Milnor  $\mu$ . Na seção 5.3, são dadas caracterizações algébricas para  $\mu$ : A primeira delas é que  $\mu$  é a multiplicidade de um ponto crítico isolado; é o grau topológico de  $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ , onde  $f : \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função polinomial complexa e  $\nabla f$  representa o  $\overline{\text{grad}f(z)}$  (conjugado complexo de  $\text{grad}f(z)$  em  $\mathbb{C}^{N+1}$ ); Além disso, mostramos que  $\mu$  coincide com o número de Betti na dimensão média da fibra, principal resultado do capítulo.

### 5.1 Fibração de Milnor na Esfera

Inicialmente recordemos que o gradiente de uma função analítica complexa  $f : \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{C}$ , no ponto  $z \in \mathbb{C}^{N+1}$  é dada pela  $(N+1)$ -upla:

$$\text{grad}f(z) = \left( \frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{N+1}}(z) \right),$$

onde a  $i$ -ésima parcial é o complexo conjugado de  $\frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$ , com  $1 \leq i \leq N+1$ .

Seja  $p : I \rightarrow \mathbb{C}^{N+1}$  um caminho suave, dada por  $p(t) = (p_1(t), \dots, p_{N+1}(t))$ . A derivada direcional de  $f$  no ponto  $z = p(t)$ , na direção do vetor  $v = p'(t) = \frac{dp(t)}{dt}$ , é dada por:

$$\frac{d(f \circ p)}{dt}(t) = df(p(t)) \cdot \frac{dp(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{dp_i}{dt} = \langle v, \mathbf{grad} f(z) \rangle$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno hermitiano.

**Observação 5.1.1.** O espaço vetorial hermitiano  $\mathbb{C}^{N+1}$  pode ser visto como o espaço vetorial euclidiano de dimensão  $2N + 2$ .

De fato, consideremos o isomorfismo  $\xi : \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2N+2}$  dado por:

$$\xi(x_1 + iy_1, \dots, x_{N+1} + iy_{N+1}) = (x_1, y_1, \dots, x_{N+1}, y_{N+1}).$$

Tome  $z = (x_1 + iy_1, \dots, x_{N+1} + iy_{N+1})$  e  $w = (x'_1 + iy'_1, \dots, x'_{N+1} + iy'_{N+1})$  e seja

$$\mathbf{Re} \langle z, w \rangle = \mathbf{Re} \left( \sum_{j=1}^{N+1} (x_j + iy_j) \overline{(x'_j + iy'_j)} \right) = \sum_{j=1}^{N+1} (x_j x'_j + y_j y'_j) = \langle \xi(z), \xi(w) \rangle_E$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$  denota o produto interno euclidiano em  $\mathbb{R}^{2N+2}$ .

Sejam  $K_f = \mathbb{S}_\varepsilon \cap V(f)$ , o link de  $f$ , onde  $V(f) := \{f = 0\}$  e  $\mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1} = \{z \in \mathbb{C}^{N+1} \mid \|z\| = \varepsilon\}$ .

Defina  $\phi : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K_f \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $\phi(z) = \frac{f(z)}{\|f(z)\|}$ . O Lema a seguir fornece uma caracterização dos pontos críticos de  $\phi$ .

**Teorema 5.1.2.** Os pontos críticos de  $\phi : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K_f \rightarrow \mathbb{C}$  são exatamente os pontos  $z \in \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K_f$  para os quais o vetor  $i \mathbf{grad} \text{Log} f(z)$  é um múltiplo real do vetor  $z$ .

**Demonstração:** Tome  $\frac{f(z)}{\|f(z)\|} = e^{i\theta(z)}$ , com  $\theta : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K_f \rightarrow [0, 2\pi)$ .

Temos que  $\theta = -i \text{Log} f(z) + i \text{Log} \|f(z)\|$ , tomando a parte real da expressão, temos:

$$\theta = \mathbf{Re}(-i \text{Log} f(z)).$$

Diferenciando  $\theta$  ao longo de uma curva  $z = p(t)$  com  $t \in I$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt}(p(t)) &= \mathbf{Re} \left( \frac{d}{dt}(-i \text{Log} f(p(t))) \right) \\ &= \mathbf{Re} \left( \frac{-i}{f(p(t))} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(p(t)) \right) \\ &= \mathbf{Re} \left( \frac{-i}{f(p(t))} \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \mathbf{grad} f(p(t)) \right\rangle \right) \\ &= \mathbf{Re} \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \frac{i \mathbf{grad} f(z)}{f(z)} \right\rangle. \end{aligned}$$

Em outras palavras, a derivada direcional da função  $\theta(z)$  na direção do vetor  $v = \frac{dp(t)}{dt}$  é

$$\mathbf{Re} \left\langle v, \frac{i \mathbf{grad} f(z)}{f(z)} \right\rangle.$$

Agora, notemos que,  $\text{Log} f(z) = i\theta(z) + \text{Log} \|f(z)\|$  está bem definida para  $z \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus K_f$ . Logo,

$$\mathbf{grad} \text{Log} f(z) = \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial z_1} \text{Log} f(z)}, \dots, \overline{\frac{\partial f}{\partial z_{N+1}} \text{Log} f(z)} \right) = \left( \frac{1}{f(z)} \cdot \overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}}(z), \dots, \frac{1}{f(z)} \cdot \overline{\frac{\partial f}{\partial z_{N+1}}}(z) \right).$$

Segue que

$$\mathbf{grad} \text{Log} f(z) = \frac{\mathbf{grad} f(z)}{f(z)}.$$

Assim, temos

$$d\phi(z) \cdot v = ie^{i\theta(z)} d\theta(z) \cdot v = i\phi(z) d\theta(z) \cdot v.$$

Portanto, obtemos pelos resultados anteriores que

$$d\phi(z) \cdot v = i\phi(z) \mathbf{Re} \langle v, i \mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle.$$

Queremos estudar os pontos críticos de  $\phi(z)$ , então fazemos  $d\phi(z) \cdot v = 0$ , para todo  $v \in T_z(\mathbb{S}_\varepsilon \setminus K_f)$ .

Um vetor  $v$  é tangente a esfera  $\mathbb{S}_\varepsilon$  em  $z$  se, e somente se,  $\mathbf{Re} \langle v, z \rangle = 0$ . Logo, se o vetor  $i \mathbf{grad} \text{Log} f(z)$  é múltiplo real de  $z$ , ou seja, se este vetor é normal a  $\mathbb{S}_\varepsilon$ , então para todo vetor  $v$  tangente a  $\mathbb{S}_\varepsilon$  em  $z$  temos:

$$\mathbf{Re} \langle v, i \mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle = 0$$

Logo,  $z$  é um ponto crítico de  $\phi$  se  $d\phi(z) : T_z(\mathbb{S}_\varepsilon \setminus K_f) \rightarrow T_{\phi(z)}(\mathbb{S}^1)$  for a transformação linear nula, ou seja,

$$d\phi(z) \cdot v = 0.$$

Portanto,  $z$  é ponto crítico de  $\phi$ .

Por outro lado, se o vetor  $i \mathbf{grad} \text{Log} f(z)$  não é um múltiplo real de  $z$ , então  $i \mathbf{grad} \text{Log} f(z)$  e  $z$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{R}$ . Logo, existe um vetor  $v$  pertencente ao espaço vetorial euclidiano, tal que  $\mathbf{Re} \langle v, z \rangle = 0$  e  $\mathbf{Re} \langle v, i \mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle \neq 0$ . Para isso, basta tomar um vetor  $v$  ortogonal a  $z$  que não é ortogonal a  $i \mathbf{grad} \text{Log} f(z)$ . Assim,  $v$  é tangente a  $\mathbb{S}_\varepsilon$  e a derivada direcional de  $\theta$  na direção de  $v$  é diferente de zero, pois  $d\theta(z) \cdot v \neq 0$ . Portanto,  $z$  não é ponto crítico. ■

## 5. O Número de Betti da Fibra na Dimensão Média

Agora, assumiremos que  $f : \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{C}$  é um polinômio que se anula na origem. Nosso objetivo é provar que para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, a função

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K_f &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto \frac{f(z)}{\|f(z)\|} \end{aligned}$$

não admite pontos críticos. De acordo com o Lema 5.1.2 deve-se provar que para todo  $z \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus V(f)$  suficientemente próximo a origem,  $z$  e  $i \mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z)$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{R}$ , esse resultado é mostrado pelo Corolário 5.1.4 que é uma consequência do seguinte Lema:

**Lema 5.1.3.** *Dada uma função polinomial  $f$  que se anula na origem, existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para todo  $z \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus V(f)$  com  $\|z\| \leq \varepsilon_0$ , os vetores  $z$  e  $\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z)$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{C}$  ou*

$$\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z) = \lambda z,$$

onde  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $\mathbf{Arg} \lambda < \frac{\pi}{4}$ .  $\mathbf{Arg} \lambda$  denota o argumento principal de  $\lambda$ .

Em outras palavras  $\lambda$  pertence ao quadrante aberto do plano complexo contendo o semi-eixo real positivo. Segue que

$$\mathbf{Re}(\lambda) > 0.$$

Portanto,  $\lambda$  não pode ser imaginário puro.

**Demonstração:** Ver Lema 4.3 de [13].

■

**Corolário 5.1.4.** *Para todo  $z \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus V(f)$  suficientemente próximo da origem, os vetores  $z$  e  $i \mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z)$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{R}$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $z$  e  $\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z)$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{C}$ , logo toda combinação linear nula

$$\alpha z + \beta \mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z) = 0$$

implica que  $\alpha = \beta = 0$ . Tome  $\gamma = \begin{pmatrix} \beta \\ i \end{pmatrix}$ . Seja  $\alpha z + \gamma i \mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z) = 0$  então  $\alpha = \gamma = 0$  e assim concluímos que  $z$  e  $i \mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z)$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{C}$ , portanto  $z$  e  $i \mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z)$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{R}$ .

■

Combinando o Teorema 5.1.2 e o Corolário 5.1.4, segue que:

**Corolário 5.1.5.** Se  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  então a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K_f &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longrightarrow \frac{f(z)}{\|f(z)\|} \end{aligned}$$

não tem pontos críticos.

Com esse resultado, Milnor provou em [13] que é possível construir um campo de vetores  $v(z)$  em  $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus K_f$ , onde para todo  $z \in \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K_f$ , o produto interno complexo  $\langle v(z), i \mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle$  é não-nulo e o módulo de seu argumento é menor que  $\frac{\pi}{4}$ . Esse campo dá suporte para mostrar que:

**Teorema 5.1.6. (Teorema da Fibrção de Milnor na Esfera)** Para  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , o espaço  $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus K_f$  é um fibrado suave sobre  $\mathbb{S}^1$ , com aplicação projeção  $\phi(z) = \frac{f(z)}{\|f(z)\|}$ .

**Demonstração:** Ver Teorema 4.8 de [13].

■

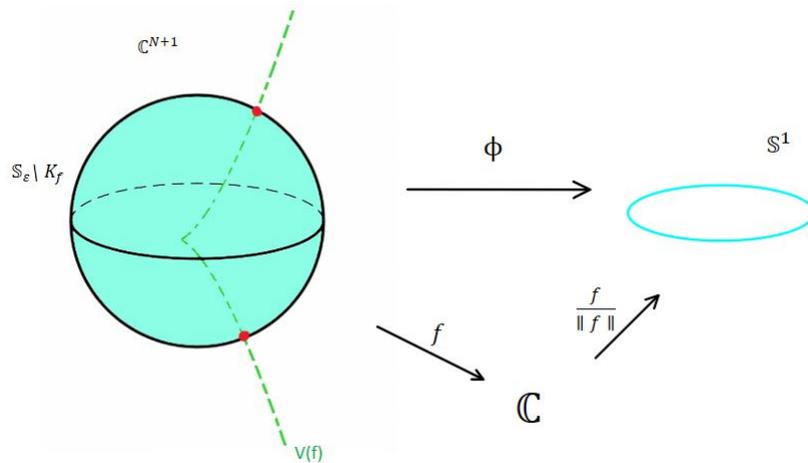


Figura 5.1: Representação da Fibrção de Milnor na Esfera (Teorema 5.1.6)

Segue que, para cada  $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ , a fibra

$$F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K_f$$

é uma variedade suave  $2N$ -dimensional.

**Definição 5.1.7.**  $F_\theta$  é dita a *fibra de Milnor* de  $f$ .

## 5.2 A Topologia da Fibra e do Link $K_f$

Pela seção anterior, já sabemos que J. Milnor provou que existe um  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeno e um germe de função analítica  $f : (\mathbb{C}^{N+1}, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , com singularidade isolada em  $\underline{0}$ , tal que para  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , a aplicação

$$\phi := \frac{f}{\|f\|} : \mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1} \setminus K_f \rightarrow \mathbb{S}^1$$

é um fibrado suave localmente trivial. A fibra  $F_\theta$  nesta fibração é *difeomorfa* à da fibração dada no Teorema 4.4.1, quando  $X = \mathbb{C}^{N+1}$  (veja Teorema 5.11 de [13]).

Continuando com o estudo da fibração suave localmente trivial  $\phi : \mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1} \setminus K_f \rightarrow \mathbb{S}^1$ , associada a função polinomial complexa  $f(z_1, \dots, z_{N+1})$  que se anula na origem, e utilizando ferramentas da Teoria de Morse, prova-se que  $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$  é uma variedade suave paralelizável de dimensão real  $2N$  e que tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo finito de dimensão  $N$  (veja [13], Teorema 5.1). Além disso, o espaço topológico  $K_f$  é  $(N-2)$ -conexo (ver [13], Teorema 5.2).

Agora, adicionando a hipótese que  $f : (\mathbb{C}^{N+1}, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é uma função polinomial que não tem nenhum ponto crítico em alguma vizinhança da origem, exceto possivelmente a origem. Isto é, a origem será um ponto não singular ou ponto singular isolado da hipersuperfície  $V(f) = f^{-1}(0)$ . Os próximos resultados são referentes a topologia da fibra e do link.

**Lema 5.2.1.** *Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, o fecho  $\overline{F_\theta}$  da fibra  $F_\theta$  em  $\mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1}$  é uma variedade  $2N$ -dimensional com bordo, cujo interior é  $F_\theta$  e o bordo é o link  $K_f = f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1}$ .*

**Demonstração:** Mostraremos inicialmente que  $f|_{\mathbb{S}_\varepsilon}$  não possui pontos críticos em  $K_f$ . Lembre-se, os pontos críticos de  $f|_{\mathbb{S}_\varepsilon}$  são os pontos  $z \in \mathbb{S}_\varepsilon$  para os quais o vetor (não nulo)  $\mathbf{grad} f$  é múltiplo complexo de  $z$ .

Considere os seguintes conjuntos analíticos

$$V = f^{-1}(0) \text{ e } W = \{z \in \mathbb{C}^{N+1} \mid \mathbf{grad} f(z) = \lambda z, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

e seja  $U$  o conjunto semianalítico

$$U = \{z \in \mathbb{C}^{N+1} \mid \|z\|^2 > 0\} = \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$$

Suponha por absurdo, que para todo  $\varepsilon > 0$  exista  $z \in V$  tal que é ponto crítico de  $f|_{\mathbb{S}_\varepsilon}$ . Note que,  $0 \in \overline{U \cap V \cap W}$ , logo pelo Lema de Seleção da Curva, considere o caminho não suave, tal que  $p : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{C}^{N+1}$  com  $p(0) = 0$  e  $p(t) \in U \cap V \cap W$  para  $t \in (0, \delta)$ .

Por  $p(t) \in V$ , temos que  $f(p(t)) = 0$ , para todo  $t \in [0, \delta)$ , donde segue que

$$\left\langle \frac{dp}{dt}(t), \mathbf{grad} f(p(t)) \right\rangle = \frac{d}{dt}(f \circ p)(t) \equiv 0.$$

Além disso,  $p(t) \in W$ , logo  $\mathbf{grad} f(p(t)) = \lambda \cdot p(t)$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Sendo assim,

$$0 = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \mathbf{grad} f(p(t)) \right\rangle = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \lambda p(t) \right\rangle = \bar{\lambda} \left\langle \frac{dp}{dt}, p(t) \right\rangle.$$

Sendo  $\lambda \neq 0$  para  $t > 0$ , temos  $\left\langle \frac{dp}{dt}, p(t) \right\rangle = 0$ , conseqüentemente

$$0 = 2\mathbf{Re} \left\langle \frac{dp}{dt}, p(t) \right\rangle = \frac{d}{dt} \|p(t)\|^2,$$

concluimos que  $p(t)$  é constante e como  $p(0) = 0$ , teremos  $p(t) \equiv 0$ . Contradição, já que  $p(t) \in U$  para  $t > 0$ .

Seja  $z_0 \in K_f$ . Como  $z_0$  não é um ponto crítico de  $f|_{\mathbb{S}_\varepsilon}$ , existem pela forma local das submersões coordenadas locais  $u_1, \dots, u_{2N+1}$  para  $\mathbb{S}_\varepsilon$  em uma vizinhança  $U$  de  $z_0$ , tal que  $f(z) = u_1(z) + iu_2(z)$ , para todo  $z \in U$ .

Seja,

$$F_0 = \phi^{-1}(1) = \{z \in \mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1} \setminus K_f \mid f(z) = \|f(z)\|\},$$

se  $z \in F_0 \cap U$  então  $u_1(z) > 0$  e  $u_2(z) = 0$  e se  $z \in K_f \cap U$  teremos  $u_1(z) = 0$  e  $u_2(z) = 0$ . Dessa forma,  $\overline{F_0}$  intersecta  $U$  no conjunto  $u_1(z) \geq 0$  e  $u_2(z) = 0$ .

Portanto,  $\overline{F_0} \cap U$  é uma variedade suave  $2N$ -dimensional com interior  $F_0 \cap U$  e bordo  $K_f \cap U$ . Como todo ponto de  $K_f$  admite uma vizinhança  $U$ , segue o resultado para a fibra  $F_0$ . Para as outras fibras  $F_\theta$ , faz-se de modo análogo. ■

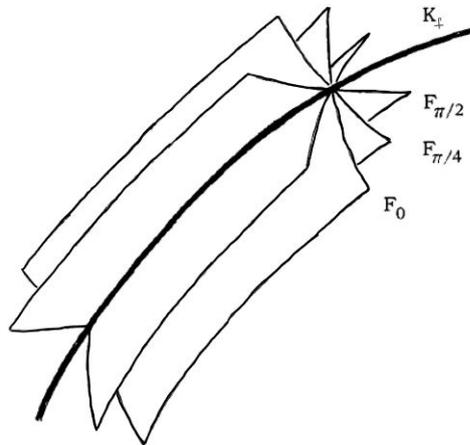


Figura 5.2: Fibras  $F_\theta$  e sua fronteira comum  $K_f$  [[13], p. 06]

**Corolário 5.2.2.** A variedade compacta com bordo  $\overline{F_\theta}$  está mergulhada em  $\mathbb{S}_\varepsilon$  e possui o mesmo tipo de homotopia do seu complementar  $\mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1} \setminus \overline{F_\theta}$ .

**Demonstração:** De fato, a aplicação  $\mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1} \setminus (K_f \cup F_\theta) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{e^{i\theta}\}$  ainda é um fibrado localmente trivial por ser a restrição do fibrado  $\mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1} \setminus K_f \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Temos que  $\mathbb{S}^1 \setminus \{e^{i\theta}\}$  é contrátil, logo pelo Teorema 1.2.6,  $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta} \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{e^{i\theta}\}$  é um fibrado global, tal que  $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}$  é difeomorfa a  $(\mathbb{S}^1 \setminus \{e^{i\theta}\}) \times F_0$ , com  $F_0 \neq F_\theta$ . Portanto,  $F_0$  é retrato por deformação de  $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}$ , logo temos:

$$\mathbb{S}_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta} \simeq F_0 \simeq F_\theta \simeq \overline{F_\theta}$$

Lembre-se: Uma variedade com bordo tem o mesmo tipo de homotopia do seu interior e que as fibras são difeomorfas. ■

É importante ressaltar, que Milnor em [13] prova que a Fibra  $F_\theta$  tem a homologia de um ponto em dimensão menor que  $N$ , ou seja,  $H_q(F_\theta) \simeq \{0\}$ , para  $q < N$ . Além disso, a fibra tem dimensão real  $2N$  e possui o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo finito de dimensão  $N$ .

**Lema 5.2.3.** *A fibra  $F_\theta$  é  $(N - 1)$ -conexa.*

**Demonstração:** Ver Lema 6.4 em [13]. ■

Milnor prova em [13], Teorema 6.5 que:

**Teorema 5.2.4.** *Cada fibra tem o tipo de homotopia de um buquê  $\mathbb{S}^N \vee \mathbb{S}^N \vee \dots \vee \mathbb{S}^N$  de esferas.*

Portanto,

$$H_q(F_\theta; \mathbb{Z}) = H_q(\mathbb{S}^N \vee \dots \vee \mathbb{S}^N; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0 \\ \mathbb{Z}^\mu = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } q = N, \\ 0, & \text{se } q \neq 0 \text{ e } q \neq N \end{cases}$$

Assim, podemos definir o número de Milnor:

**Definição 5.2.5.** *O número de esferas  $\mathbb{S}^N$  do buquê é chamado de **número de Milnor** e é denotado por  $\mu$ .*

### 5.3 O Número de Betti da Fibra na Dimensão Média

Um ponto crítico isolado  $z_0$  de um polinômio complexo  $f(z_1, \dots, z_{N+1})$  é chamado *não degenerado* se a matriz hessiana  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_k}(z_0) \right)$  é não singular. Caso contrário é dito *degenerado*.

**Exemplo 5.3.1.** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x^2 - y^3$ . Temos que  $c = (0, 0)$  é um ponto crítico isolado de  $f$ . Além disso, a matriz hessiana aplicada neste ponto  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_k}(c) \right)$  é singular. Logo,  $c$  é um ponto crítico degenerado. Seja  $g(x, y) = x^2 - y^3 + \lambda y$  com  $0 < \lambda \ll 1$ , uma perturbação em torno da origem. A partir dessa perturbação, é possível perceber que estamos diante de uma situação instável, pois o ponto crítico degenerado é removido e se divide em dois pontos críticos não degenerados.

Uma função que só tem pontos críticos não degenerados é chamada *função de Morse*.

Iremos introduzir o inteiro positivo  $\mu$  que mede a degeneração do ponto crítico isolado  $z_0$ . Esse inteiro  $\mu$ , descrito anteriormente como o número de Milnor, será agora caracterizado como a *multiplicidade* de  $z_0$  como solução isolada, também chamado de zero isolado, para as equações polinomiais

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\partial f}{\partial z_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_{N+1}} = 0$$

**Definição 5.3.2.** A *multiplicidade*  $\mu$  do zero isolado  $z_0$  é o grau da aplicação

$$z \mapsto \frac{\nabla f(z)}{\|\nabla f(z)\|}$$

de uma esfera  $\mathbb{S}_{\varepsilon}^{2N+1}$  centrada em  $z_0$  para a esfera unitária de  $\mathbb{C}^{N+1}$ . Em que  $\nabla f(z)$  é  $\overline{\mathbf{grad} f(z)}$  (conjugado complexo de  $\mathbf{grad} f(z)$  em  $\mathbb{C}^{N+1}$ ).

Para a prova do Teorema 5.3.4, principal resultado dessa seção, precisamos de uma ferramenta para calcular o grau da aplicação suave

$$v : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$$

da esfera nela mesma em termos dos pontos fixos de  $v$ .

Seja  $M$  uma região compacta com fronteira suave na esfera  $\mathbb{S}^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ , e para cada ponto  $x$  na fronteira de  $M$ , seja  $n(x)$  o vetor tangente à  $\mathbb{S}^k$ , normal a fronteira de  $M$ ,  $\partial M$ , e que aponta para o interior de  $M$ .

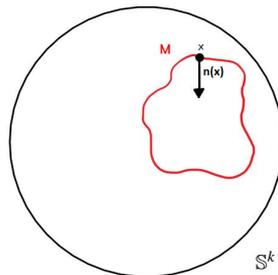


Figura 5.3: Esfera  $\mathbb{S}^k$  e região compacta  $M$

**Lema 5.3.3.** *Seja  $v : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$  a aplicação suave e  $M \subset \mathbb{S}^k$  uma região compacta de  $\mathbb{S}^k$  com fronteira suave. Suponhamos que:*

- a) *Todo ponto fixo da aplicação  $v : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$  está no interior de  $M$ ;*
- b) *Nenhum ponto  $x$  de  $M$  é aplicado em seu antípoda  $-x$  por  $v$ . ( $v(x) \neq -x, \forall x \in M$ );*
- c) *O produto interno euclidiano  $\langle v(x), n(x) \rangle$  é positivo para todo  $x \in \partial M$ .*

Então, a característica de Euler  $\chi(M)$  está relacionado com o grau,  $\text{deg}$ , de  $v$  pela igualdade

$$\chi(M) = 1 + (-1)^k \text{deg}(v)$$

**Demonstração:** Depois de perturbar ligeiramente  $v$ , podemos assumir que os pontos fixos de  $v$  estão todos isolados.

O número de Lefschetz para a aplicação  $v(x) : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$  é dada por:

$$\tau(v) = \sum_j (-1)^j \cdot \text{tr}(v_* : H_j(\mathbb{S}^k) \rightarrow H_j(\mathbb{S}^k)) = 1 + (-1)^k \text{deg}(v).$$

Como  $v(x) \neq -x$ , para todo  $x \in M$ , podemos definir a aplicação  $v_t : M \rightarrow \mathbb{S}^k$  dada por:

$$v_t(x) = \frac{(1-t)x + tv(x)}{\|(1-t)x + tv(x)\|}.$$

Pela hipótese c) temos que  $v_t(x) \subset M$ . Para  $t = 0$ , obtemos que  $v_t$  é homotópica a identidade, portanto concluímos que o número de Lefschetz de  $v_t : M \rightarrow M$  é a característica de Euler  $\chi(M)$ , para todo  $0 < t \leq \varepsilon$ .

Note que,  $\text{Fix}(v_t) = \text{Fix}(v)$ , para todo  $t > 0$ . Logo

$$\chi(M) = \tau(v_t) = \sum_{x \in \text{Fix}(v)} i(x, v_t) = \sum_{x \in \text{Fix}(v)} i(x, v) = \tau(v) = 1 + (-1)^k \text{deg}(v).$$

■

**Teorema 5.3.4.** *O número de Betti na dimensão média da fibra de Milnor  $F_\theta$  é igual a multiplicidade  $\mu$ . Portanto, o grupo de homologia  $H_n(F_\theta)$  é um grupo abeliano livre de torção com posto  $\mu$ .*

**Demonstração:** Defina

$$M = \{z \in \mathbb{S}_\varepsilon \mid \text{Re}f(z) \geq 0\}$$

onde  $\text{Re}f(z)$  denota a parte real da função  $f(z)$ . Note que  $M$  é a união das fibras  $F_\theta$ , onde  $\theta$  varia ao longo do intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  junto da fronteira comum  $K_f$ . Com isso, temos:

$$\partial M = F_{-\frac{\pi}{2}} \cup K_f \cup F_{\frac{\pi}{2}}$$

que ainda é uma variedade suave.

É importante ressaltar, que  $M$  tem o mesmo tipo de homotopia de  $F_\theta$ . De fato, o interior de  $M$  é um fibrado sobre o semi-círculo aberto com  $F_\theta$  como fibra.

Considere a função suave  $v : \mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1} \rightarrow \mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1}$ , definida por:

$$v(z) = \frac{\varepsilon \mathbf{grad} f(z)}{\|\mathbf{grad} f(z)\|}$$

Provaremos que  $v(z)$  satisfaz o Lema 5.3.3.

*Hipótese a):*

De fato, seja  $z$  um ponto fixo de  $v(z)$ , ou seja,

$$v(z) = z = \frac{\varepsilon \mathbf{grad} f(z)}{\|\mathbf{grad} f(z)\|}.$$

Isso implica que  $\mathbf{grad} f(z) = cz$ , com  $c > 0$ . Pelo Teorema da Estrutura Cônica,  $f(z) \neq 0$ . Lembre-se, provamos em 5.1.2 que

$$\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z) = \frac{\mathbf{grad} f(z)}{f(z)}.$$

Logo,  $\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z) = \frac{cz}{f(z)}$ .

Pelo Lema 5.1.3, temos que  $\operatorname{Re} \left( \frac{c}{f(z)} \right) > 0$ , então  $\operatorname{Re} f(z) > 0$  e assim concluímos que  $z$  esta no interior de  $M$ .

*Hipótese b):*

Suponha que

$$v(z) = -z = \frac{\varepsilon \mathbf{grad} f(z)}{\|\mathbf{grad} f(z)\|}.$$

Usando os mesmos artifícios da hipótese *a)*, obteremos que  $\operatorname{Re} f(z) < 0$ . Portanto,  $-z \notin M$ .

*Hipótese c):*

Dado  $z$  na fronteira de  $M$ , podemos escolher um caminho  $p(t)$ , com  $p(0) = z$ , suave que cruza  $M$  para o seu interior, com vetor velocidade  $\frac{dp}{dt} = n(z)$ , com isso obtemos que  $\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(f(p(t)))|_{t=0} > 0$ .

Note que,

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(f(p(t)))|_{t=0} = \operatorname{Re} \left\langle \frac{dp}{dt}, \mathbf{grad} f(p(t)) \right\rangle |_{t=0} = \operatorname{Re} \langle n(z), \mathbf{grad} f(z) \rangle > 0$$

Portanto, o produto interno euclidiano  $\langle n(z), v(z) \rangle > 0$ .

Pelo Lema 5.3.3, obtemos que

$$\chi(F_\theta) = \chi(M) = 1 + (-1)^{2N+1} \cdot \deg(v) \quad (5.1)$$

Sabemos que,

$$\mu = \deg \left( \frac{\nabla f(z)}{\|\nabla f(z)\|} \right).$$

Seja  $g : \mathbb{S}_\varepsilon^{2N+1} \rightarrow \mathbb{S}^{2N+1}$  dada por  $g(z) = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{N+1})$ . Note que  $\mu = \deg(g \circ v)$  e que  $\deg(g) = (-1)^{N+1}$ . Logo,  $\mu = (-1)^{N+1} \cdot \deg(v)$ .

Pela equação (5.1)

$$\chi(F_\theta) = 1 + (-1)^N \cdot \mu$$

Mas pela definição da característica de Euler e pelo Teorema 5.2.4

$$\chi(F_\theta) = \sum_j (-1)^j \cdot \text{posto} H_j(F_\theta) = 1 + (-1)^N \cdot \text{posto} H_n(F_\theta)$$

Portanto,

$$\text{posto} H_n(F_\theta) = \mu.$$

■

**Exemplo 5.3.5.** Seja  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por  $f(x, y) = x^2 - y^3$ . Para calcular o número de Milnor de  $f$  no ponto crítico isolado  $c = (0, 0)$ , utilizamos a Definição 5.3.2, daí teremos  $\deg \left( \frac{(2x, -3y^2)}{\|(2x, -3y^2)\|} \right)$ , que por sua vez é a multiplicidade do ponto crítico isolado  $c = (0, 0)$  como solução para as equações polinomiais:

$$2x = -3y^2 = 0.$$

Portanto,  $\mu_c(f) = 2$ . Pelo Teorema 5.3.4, podemos obter a característica de Euler para a fibra  $F_\theta$  de  $f$ , fazendo:

$$\chi(F_\theta) = 1 + (-1) \cdot 2 = -1.$$

**Exemplo 5.3.6.** Agora tome  $g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por  $g(x, y) = x^3 + y^4$ , o número de Milnor de  $g$  no ponto crítico isolado  $b = (0, 0)$  é a multiplicidade de  $b$  como solução para as equações polinomiais:

$$3x^2 = 4y^3 = 0$$

que é o grau de  $\left( \frac{(3x^2, 4y^3)}{\|(3x^2, 4y^3)\|} \right)$ . Portanto,  $\mu_b(f) = 6$  e pelo Teorema 5.3.4, temos que  $\chi(F_\theta) = -5$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] BIERSTONE, E., MILMAN, P. D. *Semianalytic and subanalytic sets*. Publications Mathématiques de l’IHÉS. 1988.
- [2] COHEN, R. L. *The topology of fiber bundles lecture notes*. Stanford University. 1988.
- [3] DIMCA, A. *Topics on real and complex singularities: an introduction*. Springer-Verlag. 2013.
- [4] GARCIA, A., LEQUAIN, Y. *Elementos de álgebra*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. 2018.
- [5] GUILLEMIN, V., POLLACK, A. *Differential topology*. American Mathematical Soc., 2010.
- [6] HATCHER, A. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2001.
- [7] HIRONAKA, H.. *Stratification and flatness*. In *Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos.* Oslo. 1976.
- [8] LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, New York, NY, 2013.
- [9] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Projeto Euclides, Impa, Vol. II. Rio de Janeiro. 2015.
- [10] LIMA, E. L. *Homologia básica*. IMPA, 2009.
- [11] LIMA, E. L. *Variiedades Diferenciáveis*, IMPA. Publicações Matemáticas, Rio de Janeiro, 2007.
- [12] LINS NETO. *Funções de uma variável complexa*, Projeto Euclides CNPq. Rio de Janeiro, 1996.
- [13] MILNOR, J. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Vol. 61. Princeton University Press. 1968.

- [14] RIBEIRO, M. F. S. *Singular Milnor Fibrations*. Doctoral dissertation. Universidade de São Paulo. 2018.
- [15] SEADE, J. *On the topology of isolated singularities in analytic spaces*. Springer Science Business Media. Vol. 241. 2005.
- [16] SILVA, O. N. *Superfícies com singularidades não isoladas*. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. 2017.
- [17] STEIN, E., MILNOR, J. W., SPIVAK, M., WELLS, R., WELLS, R., MATHER, J. N. *Morse theory*. Princeton University Press. 1963.
- [18] TRÁNG, L. D, NUÑO-BALLESTEROS, J. J., SEADE, J. *The topology of the Milnor fibration*. In Handbook of geometry and topology of singularities I (pp. 321-388). Springer, 2020.
- [19] TRÁNG, L. D. *Notes on non-isolated singularities*. In *School on Real and Complex Singularities in São Carlos, 2012*. (Vol. 68, pp. 143-171). Mathematical Society of Japan. 2016.
- [20] TROTMAN, D. *Stratification theory*. In Handbook of Geometry and Topology of Singularities I (pp. 243-273). Springer, 2020.
- [21] VICK, JAMES W. *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*. Academic Press, 1973.
- [22] WHITNEY, H. *Tangents to an analytic variety*. In Hassler Whitney Collected Papers (pp. 537-590). Birkhäuser Boston, 1992.