



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURAM EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

Luciano Bernardo Ramo

**Álgebra Linear aplicada à genética e
ao crescimento populacional por faixa etária**

João Pessoa, PB

2023

Luciano Bernardo Ramo

**Álgebra Linear aplicada à genética e
ao crescimento populacional por faixa etária**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática a Distância da Universidade Federal
da Paraíba como requisito para obtenção do título
de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Gomes de Assis

João Pessoa, PB

2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R175á Ramo, Luciano Bernardo.

Álgebra Linear aplicada à genética e ao crescimento populacional por faixa etária / Luciano Bernardo Ramo.

- João Pessoa, 2023.

83 f. : il.

Educação a Distância, UFPB.

Orientação: José Gomes de Assis.

TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Álgebra Linear. 2. Transformações lineares -
Matemática. 3. Genética. 4. Crescimento populacional.
5. Matriz de Leslie. I. Assis, José Gomes de. II.
Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

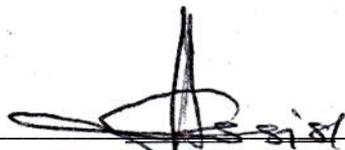
Álgebra Linear aplicada à genética e ao crescimento populacional por faixa etária

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Gomes de Assis

Aprovado em: 15/06/2023

COMISSÃO EXAMINADORA



Prof. Dr. José Gomes de Assis
Orientador
UFPB/CCEN/DM



Prof. Ms. Jorge Costa Duarte Filho
Examinador
UFPB/CCEN/DM



Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo
Examinador
UFPB/CCEN/DM

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ter me dado condições de concluir mais uma importante etapa em minha vida.

À toda minha família, em especial a minha esposa Andréia, minha mãe, Luzia e meu pai Severino pelo incentivo, carinho e apoio.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer ao meu **Deus todo poderoso!** Ao meu senhor toda honra e toda glória! Muito obrigado, por não ter me deixado desistir mesmo diante de todas as dificuldades. Consegui concluir mais uma etapa em minha vida!!!

À minha família, de forma bem especial agradeço à **minha esposa Andreia Melo** por estar sempre comigo e aos **meus pais, Luzia Bernardo e Severino do Ramo**, pelos ensinamentos dados e pelo apoio que me permitiram seguir meus estudos.

A todos os meus **professores do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância**, pela paciência, ensinamentos e contribuição com a minha formação acadêmica.

Ao **meu orientador, professor Assis**, pelo estímulo e pela colaboração nessa trajetória.

À **coordenadora** do meu polo de apoio presencial (João Pessoa), professora **Cristiane Assis**, por todo suporte e pelas excelentes recepções nos momentos das avaliações.

Aos **meus colegas de curso**, pelas trocas de experiências, pelo convívio mesmo que a distância, pelas alegrias, incertezas, meu muito obrigado!

À **Universidade Federal da Paraíba**, por ofertar junto à **Universidade Aberta do Brasil** este importante curso de formação de professores.

À **banca examinadora**, professores Jorge Duarte e Ricardo Burity, pelo aceite do convite de participar desse momento e por contribuir com este trabalho.

Enfim, gostaria de agradecer a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente com este trabalho de conclusão de curso!

“Não fui eu que ordenei a você? Seja forte e corajoso! Não se apavore nem desanime, pois o Senhor, o seu Deus, estará com você por onde você andar” (Josué 1:9).

RESUMO

A Álgebra Linear é uma área dentro da Matemática responsável por estudar os espaços vetoriais e suas funções que são conhecidas como Transformações Lineares. Os seus conceitos transcendem a Matemática, sendo aplicados em vários campos do conhecimento humano, tais como as Engenharias, Ciências Exatas, Economia, Biologia, Prospecção de Petróleo, Química, Mercado Financeiro, dentre outras. Ante o exposto, a presente pesquisa teve por objetivo utilizar os conceitos de Álgebra Linear e aplicá-los em Genética e Crescimento Populacional. Trata-se de uma pesquisa de natureza exploratória-qualitativa. Duas etapas foram realizadas, na primeira fazemos um estudo de revisão sobre transformações lineares, autovalores e autovetores, diagonalização de operadores, noção intuitiva de limites e matriz de Leslie e em seguida estudamos algumas aplicações à genética e ao crescimento populacional por faixa etária. A partir da discussão apresentada, ficou evidente a importância da Álgebra Linear para as mais variadas áreas de conhecimento.

Palavras-chaves: Álgebra Linear. Aplicações. Genética. Crescimento populacional. Matriz de Leslie.

ABSTRACT

Linear Algebra is an area within Mathematics responsible for studying vector spaces and their functions known as Linear Transformations. Its concepts transcend Mathematics, being applied in various fields of human knowledge, such as Engineering, Exact Sciences, Economics, Biology, Oil Prospecting, Chemistry, and financial markets. Given the above, the present research aimed to use the concepts of linear algebra and apply them to Genetics and Population Growth. This is exploratory-qualitative research. Two stages were carried out; in the first one, we review Linear Transformations, eigenvalues and eigenvectors, diagonalization of operators, intuitive notion of limits, and Leslie matrix. Then we study some applications to genetics and population growth by age group. The discussion presented showed the importance of Linear Algebra for many varied areas of knowledge.

Keywords: Linear Algebra. Applications. Genetics. Population growth. Leslie matrix.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Domínio, contradomínio e imagem da transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	17
Figura 2 – Definição de uma transformação linear.	18
Figura 3 – Transformação de vetores através da multiplicação de matrizes.	20
Figura 4 – Subespaços (Núcleo e imagem) que estão relacionados a uma transformação linear.	22
Figura 5 – Transformações lineares (a) não injetora e (b) injetora.	23
Figura 6 – Transformações lineares (a) não sobrejetora e (b) sobrejetora.	23
Figura 7 – Representação geométrica dos vetores de uma transformação linear do tipo reflexão no eixo-x.	33
Figura 8 – Representação geométrica do problema.	35
Figura 9 – Representação geométrica dos autovalores e autovetores.	39
Figura 10 – Gráfico da função $y = 2 - 1/x$	49
Figura 11 – Gráfico da função $y = x^2 + 2x - 3$	50
Figura 12 – Gráfico da função $y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$	50
Figura 13 – Gráfico da função $q(\lambda)$	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores positivos para noção intuitiva de limite da função $y = 2 - 1/x$	48
Tabela 2 – Valores negativos para noção intuitiva de limite da função $y = 2 - 1/x$	48
Tabela 3 – Valores positivos para noção intuitiva de limite da função $y = x^2 + 2x - 3$	49
Tabela 4 – Valores negativos para noção intuitiva de limite da função $y = x^2 + 2x - 3$	49
Tabela 5 – Valores negativos para noção intuitiva de limite da função $y = \cos(1/x)$	50
Tabela 6 – Faixas etárias, conforme o modelo de Leslie.....	53
Tabela 7 – Parâmetros demográficos, segundo o modelo de Leslie.....	54
Tabela 8 – Probabilidade dos possíveis genótipos dos descendentes e suas combinações.	60
Tabela 9 – Probabilidade dos possíveis genótipos dos descendentes e suas combinações.	71
Tabela 10 – Taxa de natalidade e mortalidade da população de mulheres canadenses.....	80

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 Memorial	13
1.2 Justificativa	14
1.3 Objetivos.....	15
<i>1.3.1 Objetivo Geral</i>	<i>15</i>
<i>1.3.2 Objetivos Específicos.....</i>	<i>15</i>
1.4 Metodologia.....	16
2 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA.....	17
2.1 TRANSFORMAÇÕES LINEARES	17
2.1.1 Considerações iniciais	17
2.1.2 Teoremas e conceitos	21
2.1.3 Transformações lineares e matrizes	27
2.2 AUTOVALORES E AUTOVETORES	32
2.2.1 Considerações iniciais.....	33
2.2.2 Autovalores e autovetores em matrizes	36
2.2.3 Polinômio característico	36
2.3 DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES	39
2.3.1 Base de autovetores	39
2.3.2 Polinômio Minimal	43
2.3.3 Diagonalização simultânea de dois operadores	46
2.4 NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITES	47
2.4.1 Noção intuitiva	47
2.4.2 Propriedades de limites	51
2.5 A MATRIZ DE LESLIE.....	52
2.5.1 Considerações iniciais.....	52
2.5.2 Descrição do modelo de Leslie.....	53

3.2.1 <i>O comportamento limite da matriz de Leslie</i>	56
3 APLICAÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR	60
3.1 Álgebra Linear aplicada à genética	60
3.1.1 <i>Hereditariedade ultrassônica</i>	60
3.1.2 <i>Doenças Recessivas Autossômicas</i>	68
3.1.3 <i>Hereditariedade ligada ao sexo</i>	70
3.2 Álgebra Linear aplicada ao crescimento populacional por faixa etária	75
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	82
REFERÊNCIAS	83

1.1 Memorial

Em 01 de janeiro de 1995 tomava posse o 35º presidente da República Federativa do Brasil, Fernando Henrique Cardoso. Em meio aos seus primeiros dias de governo, mais precisamente em 05 daquele mês, nascia na cidade de Remígio, interior da Paraíba, Luciano Bernardo Ramo, filho do senhor Severino do Ramo e da senhora Luzia Bernardo Ramo, residentes da zona rural do município de Arara-PB.

Diante de uma infância muito simples, quando possuía 6 anos, idade mínima à época para ingresso na escola, teve o seu processo de escolarização iniciado na EMEIF José Ferreira de Melo, situada na zona rural daquele município, onde estudou até a 4ª Série, hoje correspondente ao 5º ano, algumas séries nos turnos manhã outras no turno da tarde. As turmas eram multisseriadas (em alguns anos) e as professoras se esforçavam muito para alfabetizar os seus alunos.

Nesse processo, ao aprender as primeiras palavras aquele menino queria ler tudo que visualizava em sua frente, embora que erroneamente, porém faz parte do processo. Foi nessa instituição que começou a sua paixão pela educação por meio das práticas pedagógicas desenvolvidas pelas suas professoras nas aulas, como no estudo de Ciências e Geografia, passeios realizados ao entorno da instituição para observar a paisagem e discussão na sala, jogos didáticos no auxílio da aprendizagem, brincadeiras educativas, dentre outras práticas.

Aquela escola só possuía o Ensino Fundamental I (hoje anos iniciais), foi então necessário, para dar prosseguimento a sua escolarização, estudar em uma instituição na cidade, pois somente a zona urbana dispunha de colégios com aquela etapa de educação. Assim, sua mãe o matriculou na EMEFM Profª Luzia Laudelino da Silva Medeiros, onde estudou até o 3º ano do Ensino Médio no turno tarde. Foi nessa instituição que a vontade em se tornar professor aguçou ainda mais.

Na 5ª Série, atual 6º ano, por justamente não se acostumar tanto com a nova rotina, aquele menino ficou na avaliação final em 3 disciplinas. Hoje reconheço o “choque”, mas à época não tinha maturidade para isso. Realizou as provas das disciplinas, foi aprovado e aquela situação serviu para nunca mais se repetir. Era chegada a hora de se adaptar a sua nova escola, afinal já era o seu segundo ano estudando naquela instituição. Assim, aquele menino nunca mais nem soube o que era prova final.

Nessa instituição de ensino, as práticas pedagógicas variavam entre aulas expositivas, apresentação de seminários, projetos e peças teatrais. Chegou o 3º Ano do Ensino Médio, o ano era 2011, momento de “prestar” o vestibular e escolher o curso que desejaria realizar. Uma

nova chance para aquele menino realizar o seu sonho. Sendo assim, realizou o Processo Seletivo Seriado (PSS) da Universidade Federal da Paraíba (UFPB) e o vestibular da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), escolhendo os cursos de Licenciatura em Química e Matemática, respectivamente, acabando de ser aprovado na primeira opção, sendo o primeiro membro da família a ingressar em uma universidade.

Saliento que realizar Licenciatura em Matemática era o meu sonho, mas continuei a concluir minha graduação em Licenciatura em Química. Marcada por greves, a formação inicial, que era para durar apenas 4 anos e 6 meses, isto é, 9 períodos, durou 5 anos e 6 meses, porém cada momento valeu a pena. Ainda durante o curso da graduação, mais precisamente em 2015, iniciei a minha carreira docente em uma escola da rede pública estadual, localizada no município, a qual residia. Momento em que tive a oportunidade de adquirir novas experiências e contribuir com a educação local. Foi nessa instituição que lecionei a disciplina de Matemática e a paixão pela disciplina voltou a aguçar.

No ano de 2017, tive que interromper esse ciclo, pois comecei a cursar o Mestrado em Química na UEPB, retornando anos depois para dar continuidade com a minha contribuição na instituição. No decorrer desse tempo, cursei uma Especialização em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB). Em 2020 fui aprovado para cursar Doutorado em Química pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB). Durante essa formação cursei mais três especializações: Metodologias do Ensino de Química pelo Centro Universitário Internacional (UNINTER), Práticas Assertivas em Didática da Educação Profissional Integrado à Educação de Jovens e Adultos pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN) e Ciências da Natureza, suas Tecnologias e o Mundo do Trabalho pela Universidade Federal do Piauí (UFPI). Além disso, durante esse período, mais precisamente em 2021, fui aprovado para o curso de Licenciatura em Matemática na modalidade a Distância através da Universidade Aberta do Brasil (UAB) em parceria com a UFPB, curso este objeto do presente trabalho de conclusão de curso.

1.2 Justificativa

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), a Matemática surgiu na antiguidade devido à necessidade do homem, principalmente relacionadas à sobrevivência. Essa ciência é caracterizada por abstração, precisão, rigor lógico e caráter irrefutável. O conhecimento matemático é construído historicamente por meio de demonstrações, que geram teoremas, corolários, definições, proposições, argumentos, axiomas,

postulados, provas, lema e conjecturas. Sendo assim, podemos dizer que a Matemática é uma ciência que estuda as relações de interdependências quantitativas entre as grandezas.

Dentre as mais variadas áreas dentro da Matemática, encontra-se a Álgebra Linear. Para Kozakevich; Bean (2011), a Álgebra Linear é uma área de conhecimento dentro da Matemática que estuda os espaços vetoriais e suas transformações lineares. São várias as situações em que podemos aplicá-la, por isso sua importância.

Segundo D'Agostin (2020), os conceitos de Álgebra Linear estão presentes nas matrizes curriculares desde o Ensino Médio até o Ensino Superior, transcendendo para outros campos do conhecimento, uma vez que é um conteúdo importante nas mais variadas áreas, dentre as quais podemos citar, a Engenharia Civil, Engenharia Elétrica, Engenharia de Petróleo, Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia, Ciência da Computação, Física e Química.

Dada sua relevância, estudaremos algumas aplicações relacionadas a dois temas: (i) genética e (ii) crescimento populacional por faixa etária. Para isso, embasaremos o trabalho a partir da compreensão de transformações lineares, autovalores e autovetores, diagonalização de operadores e noção intuitiva de limites e matriz de Leslie. Portanto, este trabalho está muito distante de chegar a uma conclusão de seus estudos, uma vez que seu propósito é discutir as aplicações, mostrando que a Álgebra Linear não é um conhecimento desconectado das mais variadas áreas.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

- ❖ Realizar uma revisão dos conceitos de transformações lineares, autovalores e autovetores, diagonalização de operadores, noção intuitiva de limites e matriz de Leslie e aplicá-los na genética e no crescimento populacional por faixa etária.

1.3.2 Objetivos Específicos

- ❖ Compreender o conceito de transformações lineares;
- ❖ Entender os autovalores e autovetores;
- ❖ Realizar a diagonalização de operadores;
- ❖ Entender, intuitivamente, limites;
- ❖ Compreender o modelo de Leslie;

- ❖ Estudar algumas aplicações dos conceitos estudados na genética e no crescimento populacional por faixa etária;
- ❖ Compreender a Matemática como uma ciência interdisciplinar.

1.4 Metodologia

A presente pesquisa é classificada como um estudo de caráter exploratório-investigativo, de natureza quantitativa.

De acordo com Gil (2008, p. 27) as pesquisas exploratórias propõem:

“[...] desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores. De todos os tipos de pesquisa essas são as que apresentam menor rigidez no planejamento. Habitualmente, envolvem levantamento bibliográfico e documental, entrevistas não padronizadas e estudos de caso.”

Segundo Provdanov e Freitas (2013), a pesquisa quantitativa tem por objetivo formular hipóteses e identificar as relações entre as variáveis, permitindo a obtenção de resultados precisos e mais confiáveis.

Nesse sentido, o estudo está dividido em duas etapas, a primeira refere-se a um levantamento bibliográfico que embasa o estudado a partir do aporte teórico apresentado, por meio da consulta de livros e monografias sobre o tema. Já a segunda consiste na realização das aplicações dos conceitos estudados, a fim de solucionar problemas de outras áreas de conhecimento.

Neste capítulo, considerando os conhecimentos de espaços vetoriais bem estabelecidos, o qual utilizaremos sobre o corpo dos números reais, estudaremos, de forma sucinta, os conceitos importantes para a compreensão das aplicações realizadas nesse trabalho de conclusão de curso tais como: transformações lineares, autovalores e autovetores, diagonalização de operadores, noções intuitivas de limites e a matriz de Leslie.

2.1 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Começaremos entendendo melhor acerca de um tipo especial de função, denominada de “transformações lineares”. Para isso, utilizaremos a abordagem de Boldrini *et al.* (1980), Kozakevich; Bean (2011) e Silva (2007).

2.1.1 Considerações iniciais

Segundo Boldrini *et al.* (1980), uma transformação linear pode ser definida como uma função que conserva todas as operações dos espaços vetoriais envolvidos na transformação. Isso possibilita transportar os vetores de um espaço vetorial para outro espaço vetorial. De maneira geral, podemos denotar uma transformação linear como sendo $T: V \rightarrow W$, ou seja, uma função do espaço vetorial V no espaço vetorial W , onde V é o domínio e W é o contradomínio. No caso de ser $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$. Quando $x = (x_1, x_2 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, o vetor $T(x) \in \mathbb{R}^m$ é chamado de imagem de x (Figura 1).

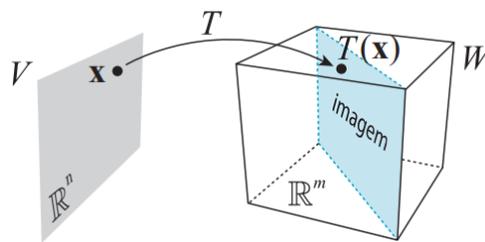


Figura 1 – Domínio, contradomínio e imagem da transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Fonte: Kozakevich; Bean (2011).

Definição 1: Sejam V e W dois espaços vetoriais, uma *Transformação Linear* $T: V \rightarrow W$ é definida como sendo uma função de V em W que deve satisfazer as condições:

- | | | |
|-----|--|------------------------|
| i) | $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in V$ | [aditividade] |
| ii) | $T(\lambda v) = \lambda T(v), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V$ | [homogeneidade] |

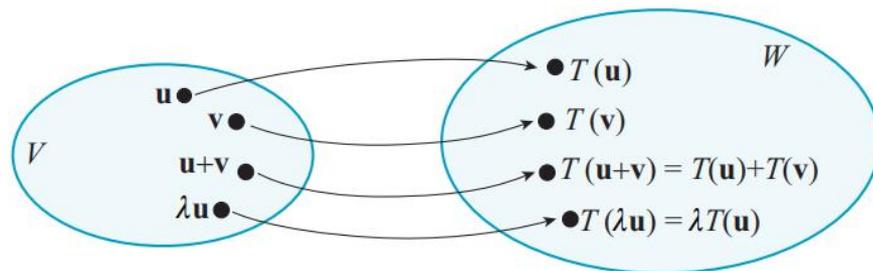


Figura 2 – Definição de uma transformação linear.
Fonte: Kozakevich; Bean (2011).

Observação 2: Cabe aqui ressaltar que quando o domínio da função é igual ao seu contradomínio, ou seja, os espaços vetoriais são os mesmos, a transformação linear pode ser chamada de *operador linear* do espaço vetorial V .

Para compreendermos melhor, veremos a seguir dois exemplos. O primeiro refere-se a uma transformação linear, enquanto o segundo trata-se de uma transformação não linear.

Exemplo 1: A transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, y) = (3x, y, x + 2y)$ é linear.

De fato, como $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, temos que a primeira condição (aditividade) é satisfeita:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad T(u + v) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ T(u + v) &= (3(x_1 + x_2), (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2)) \\ T(u + v) &= (3x_1 + 3x_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2) \\ T(u + v) &= (3x_1, y_1, x_1 + 2y_1) + (3x_2, y_2, x_2 + 2y_2) \\ T(u + v) &= F(u) + F(v) \end{aligned}$$

Além disso, a segunda condição (homogeneidade) também é satisfeita, uma vez que:

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad T(\lambda u) &= T(\lambda (x_1, y_1)) = T(\lambda x_1, \lambda y_1) \\ T(\lambda u) &= (3\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda x_1 + 2\lambda y_1) \\ T(\lambda u) &= \lambda (3x_1, y_1, x_1 + 2y_1) \\ T(\lambda u) &= \lambda T(u) \end{aligned}$$

Portanto, podemos afirmar que T é uma transformação linear.

Exemplo 2: A transformação $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = (2x - 5)$ não é linear.

De fato, considerando que $u = (4)$ e $v = (2)$, a condição de aditividade não é satisfeita, uma vez que:

$$\text{i) } T(u + v) = T(4 + 2) = T(6) = 2 \cdot 6 - 5 = 7$$

$$T(4) + T(2) = 2 \cdot 4 - 5 + 2 \cdot 2 - 5 = 2$$

Portanto, como $T(u + v) \neq T(u) + T(v)$, T não é uma transformação linear.

Observe que toda transformação linear $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é do tipo $T(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

Observação 3: Toda transformação linear $T: V \rightarrow W$ associa o vetor nulo de V ao vetor nulo de W . Isto é, se 0 (vetor nulo de V), então $T(0)$ é o vetor nulo de W . Apesar disso não ser uma condição suficiente para T ser linear, é uma condição necessária, isto é, isso nos ajuda a detectar funções que não são lineares como no caso de $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x) = (2x - 5)$.

A seguir apresentamos exemplos de algumas transformações/operadores lineares utilizados basicamente na álgebra linear.

Exemplo 3 (Operador Diferencial): Sendo $V = W = P_n$, onde $P_n = \{\text{polinômios de grau menor ou igual a } n\}$. A transformação definida pela função $D: P_n \rightarrow P_n$ que associa $f \mapsto f'$ é um operador diferencial, onde f' denota a derivada formal de f .

De fato, cada polinômio f é associado à sua derivada, com um grau a menos. Assim, usando as propriedades da derivada, temos as duas condições (aditividade e homogeneidade) satisfeitas, respectivamente:

$$\text{i) } D(f + g) = D(f) + D(g).$$

$$\text{ii) } D(\lambda f) = \lambda D(f)$$

Exemplo 4 (Operador Nulo): Sejam V e W espaços vetoriais reais \mathbb{R} , a função $O: V \rightarrow W$ definida por $O(u) = 0$ é um *operador nulo*, uma vez que as duas condições são satisfeitas:

$$\text{i) } O(u + v) = 0 + 0 = 0$$

$$O(u + v) = O(u) + O(v)$$

$$\text{ii) } O(\lambda u) = 0 = \lambda O(u)$$

Exemplo 5 (Operador Identidade): Seja V um espaço vetorial real, a função $I: V \rightarrow V$ definida por $I(u) = u$ é denominada de *operador identidade*, pois a aditividade (i) e homogeneidade (ii) são satisfeitas:

- i) $I(u + v) = u + v$
 $I(u + v) = I(u) = I(v)$
- ii) $I(\lambda u) = \lambda u = \lambda I(u)$

Observação 4: Dado todo esse aporte, agora podemos pensar de maneira matricial, de modo que podemos afirmar que toda matriz do tipo $m \times n$ está associada a uma transformação linear $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, isto é, toda matriz produz uma transformação linear e vice-versa. Vejamos um exemplo a seguir.

Exemplo 6 (Transformações Matriciais): Consideremos a matriz A do tipo $m \times n$, ela pode ser representada por uma transformação linear, $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida pela função $v \mapsto A \cdot v$, pois considerando o vetor coluna v :

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

temos que: $T_A(v) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$

Logo, dadas as propriedades de matrizes, T_A é uma transformação linear (Figura 3):

- i) $T_A(u + v) = A(u + v) = Au + Av = T_A(u) + T_A(v)$
- ii) $T_A(\lambda u) = \lambda (Au) = \lambda T_A(u)$

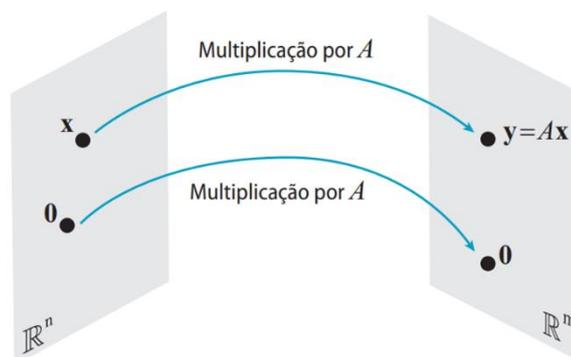


Figura 3 – Transformação de vetores através da multiplicação de matrizes.

Fonte: Kozakevich; Bean (2011).

2.1.2 Teoremas e conceitos

Vamos apresentar alguns teoremas que são fundamentais para o estudo das transformações lineares, iniciamos com um teorema de existência e unicidade de transformações lineares sabendo apenas como ela atua em uma base de V .

Teorema 1: Sejam dois espaços vetoriais reais quaisquer V e W , $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma de base V e w_1, \dots, w_n elementos arbitrários de W . Existe uma única transformação linear $T: V \rightarrow W$ de modo que $T(v_1) = w_1, \dots, T(v_n) = w_n$.

Isso é uma verdade, pois como $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ e devido ao fato desta escrita ser única, pois os vetores v_1, \dots, v_n definem uma base para V , temos que:

$$T(v) = a_1T(v_1) + \dots + a_nT(v_n)$$

$$T(v) = a_1w_1 + \dots + a_nw_n$$

Exemplo 7: Qual é a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(1, 0) = (2, -1, 0)$ e $T(0, 1) = (0, 0, 1)$?

Para solucionar esse problema, temos que $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ definem uma base de \mathbb{R}^2 e $w_1 = (2, -1, 0)$ e $w_2 = (0, 0, 1)$ são os elementos de W . Dado $v = (x_1, x_2)$ arbitrário:

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 \quad e$$

$$T(v) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2)$$

$$T(v) = x_1(2, -1, 0) + x_2(0, 0, 1)$$

$$T(v) = (2x_1, -x_1, x_2)$$

Definiremos agora dois conceitos importantes para compreensão de uma transformação linear, a imagem e o núcleo, os quais são subconjuntos especiais dos espaços vetoriais envolvidos na transformação linear.

Definição 2: Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. A *imagem* de T é o conjunto dos vetores $w \in W$ de maneira que existe um vetor v em V , o qual satisfaz a igualdade $T(v) = w$, ou seja,

$$Im(T) = \{w \in W; T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}.$$

Verifica-se que $Im(T)$ não apenas é um subconjunto de W e sim um subespaço vetorial de W . Além disso, cabe ressaltar que às vezes podemos denotar $Im(T)$ por $T(V)$.

Definição 3: Seja $T:V \rightarrow W$ uma transformação linear, o conjunto de todos os vetores v em V de maneira que $T(v) = 0$ é denominado de *núcleo* de T , podendo ele ser escrito como $ker(T)$:

$$ker(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}.$$

Agora fica mais evidente que $ker(T) \subset V$ é um subconjunto de V e um subespaço vetorial de V , conforme mostrado na Figura 4.

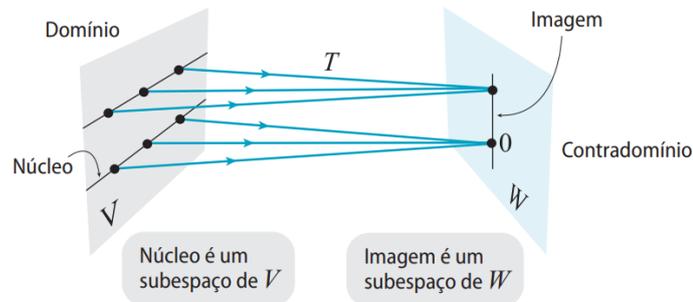


Figura 4 – Subespaços (Núcleo e imagem) que estão relacionados a uma transformação linear.
Fonte: Kozakevich; Bean (2011).

Vejamos a seguir um exemplo sobre as definições 2 e 3.

Exemplo 8: Qual é a imagem e o núcleo de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida pela função $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$?

Neste problema, temos que a imagem é dada por:

$$Im(T) = \{(x, 2y, 0): x, y \in \mathbb{R}\}$$

$Im(T) = \{x(1, 0, 0) + y(0, 2, 0): x, y \in \mathbb{R}\}$, o subespaço gerado pelos vetores $(1, 0, 0)$ e $(0, 2, 0)$.

Logo, $dim Im(T) = 2$, onde dim é a dimensão da imagem (Im) de T .

Para o núcleo dessa transformação linear, temos que:

$$ker(T) = \{(x, y, z): T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$$

$$ker(T) = \{(x, y, z): (x, 2y, 0) = (0, 0, 0)\}$$

$$ker(T) = \{(0, 0, z): z \in \mathbb{R}\}$$

$$ker(T) = \{z(0, 0, 1): z \in \mathbb{R}\}$$

$$\ker(T) = [(0, 0, 1)]$$

Portanto, $\dim \ker(T) = 1$, onde \dim é a dimensão do núcleo (\ker) de T .

Agora vamos estudar os conceitos de funções injetora e sobrejetora e como elas se relacionam com a imagem e o núcleo de uma transformação linear qualquer.

Definição 4: Seja uma transformação linear dada por $T:V \rightarrow W$, T será *injetora* se dados $u \in V$ e $v \in V$ com $T(u) = T(v)$ obtivermos $u = v$. Por outro lado, T será injetora se dados $u, v \in V$ com $u \neq v$, resultar em $T(u) \neq T(v)$. Em linhas gerais, podemos afirmar que T será injetora caso as imagens de seus vetores sejam diferentes (Figura 5).

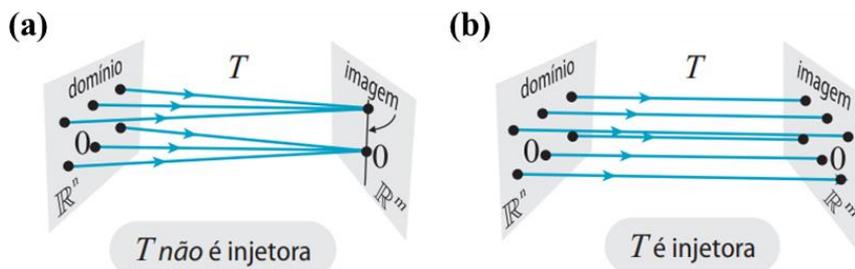


Figura 5 – Transformações lineares (a) não injetora e (b) injetora.
Fonte: Kozakevich; Bean (2011).

Definição 5: Seja uma transformação linear dada por $T:V \rightarrow W$, a função T é chamada de *sobrejetora* quando sua imagem for igual ao seu domínio, isto é, $T(V) = W$. Isso nos permite afirmar que T é sobrejetora se dado $w \in W$, existir um $v \in V$ de modo que $T(v)$ seja igual a w , conforme podemos visualizar na Figura 6.

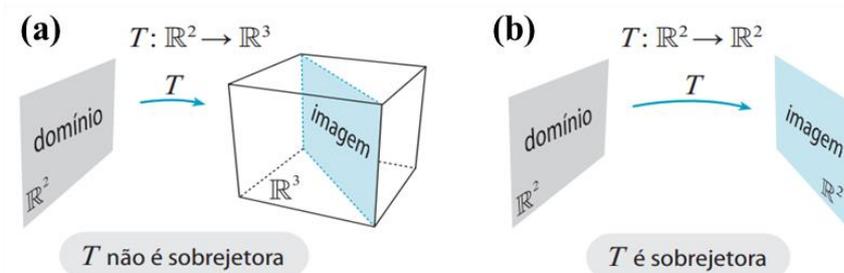


Figura 6 – Transformações lineares (a) não sobrejetora e (b) sobrejetora.
Fonte: Kozakevich; Bean (2011).

Vejam a seguir um exemplo para fixar os conceitos de função injetora e sobrejetora, conforme as definições 4 e 5.

A seguir listaremos uma sequência de resultados importantes para a teoria que omitiremos a prova devido fugir do objetivo principal do trabalho, entretanto o leitor pode acessar as demonstrações em Boldrini *et al.* (1980).

Teorema 2: Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear, $\ker(T) = \{0\} \leftrightarrow T$ é injetora.

Exemplo 9: A transformação linear dada por $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida pela função $T(x) = (x, 0)$ é injetora, porém não é sobrejetora.

Temos que $\ker(T) = \{(0, 0)\}$. Logo T é injetora. Por outro lado, $\text{Im}(T) \neq \mathbb{R}^2$, portanto a função T não é sobrejetora.

Corolário 1: Dada uma transformação linear injetora $T: V \rightarrow W$, T leva os vetores linearmente independentes em vetores linearmente independentes.

Teorema 3: Seja uma transformação linear $T: V \rightarrow W$, então

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V).$$

Ou seja, a dimensão do domínio de V é igual a soma das dimensões do núcleo e da imagem de T .

Corolário 2: Se $\dim V = \dim W$, então T é injetora se e somente se ela seja sobrejetora.

Corolário 3: Seja a transformação linear injetora dada por $T: V \rightarrow W$, caso $\dim V = \dim W$, então T leva base em base.

Apresentados os teoremas e corolários, vamos resolver um exemplo para fixá-los.

Exemplo 10: A transformação linear dada por $T: P_n \rightarrow P_{n+1}$ e definida pela função $T(p(x)) = xp(x)$, pois este polinômio tem grau $n + 1$, é bijetora?

Para resolver esse problema, precisamos verificar se a transformação linear T é bijetora, isto é, se T é uma função injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Sendo assim, primeiro vamos verificar se T é injetora, calculando o seu núcleo:

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= xp(x) \\ T(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) &= x(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) \\ T(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) &= a_0x + a_1x^2 + \dots + a_nx^{n+1} \end{aligned}$$

Além disso, precisamos determinar quais os polinômios são iguais a zero, isto é, $T(p(x)) = 0$:

$$T(p(x)) = 0 \Leftrightarrow a_0x + a_1x^2 + \dots + a_nx^{n+1} \Leftrightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$$

Nesse problema, $p(x) = 0$, ou seja, é um polinômio nulo. Sendo assim, chegamos na seguinte relação:

$$\ker(T) = \{p \in P_n / p(x) = 0; \forall x \in \mathbb{R}\} = \{0\}$$

Aqui notamos que o vetor nulo de P_n é um polinômio nulo de grau n , portanto podemos afirmar que a transformação linear T dada no problema é injetora.

Por outro lado, para verificar que T é sobrejetora, temos que como $\dim P_n = n + 1$ e $\dim P_{n+1} = n + 2$ e $\dim(\ker(T)) = 0$. Podemos escrever isso como sendo:

$$\begin{aligned} \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) &= n + 1 \\ 0 + \dim(\text{Im}(T)) &= n + 1 \\ \dim(\text{Im}(T)) &= n + 1 \end{aligned}$$

Aqui verificamos que $\dim(\text{Im}(T)) = n + 1 \neq \dim P_{n+1} = n + 2$. Portanto, $\text{Im}(T) \neq P_{n+1}$ e a transformação linear T não é sobrejetora.

Como T não é sobrejetora, podemos concluirmos que $T: P_n \rightarrow P_{n+1}$ definida por $T(p(x)) = xp(x)$ não é bijetora.

Definição 6: Se a transformação linear dada por $T: V \rightarrow W$ for bijetora, isto é, injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, podemos chamá-la de *Isomorfismo*. Sendo assim, sempre que

ocorrer um isomorfismo linear entre dois espaços vetoriais dizemos que estes dois espaços são *isomorfos*.

Observação 5: É importante ressaltar que para os espaços vetoriais serem isomorfos, devem possuir a mesma dimensão. Além disso, conforme o corolário 3, um isomorfismo leva a base em base. Sendo assim, aqui podemos concluir que um isomorfismo dado por $T:V \rightarrow W$ tem uma aplicação inversa, isto é, $T^{-1}:V \rightarrow W$. Assim, a função além de ser linear é um isomorfismo.

Exemplo 11: Seja a transformação linear dada por $T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e definida pela função $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$ vamos mostrar que T é isomorfismo e calcular sua inversa T^{-1} .

Conforme discutimos no corolário 3, para que a função T seja um isomorfismo, ela deve ser injetora, ou seja, $\ker(T) = \{(0, 0, 0)\}$. Por outro lado:

$$\ker(T) = \{(x, y, z); T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \text{ e } T(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (x - 2y, z, x + y) = (0, 0, 0).$$

A partir dessas relações, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

O sistema possui a seguinte solução: $x = y = z = 0$. Portanto, fica evidente que a T é um isomorfismo.

Já que T é um isomorfismo, podemos encontrar sua inversa T^{-1} . Para isso, vamos tomar a base canônica de \mathbb{R}^3 . Em outras palavras, vamos usar a imagem de T que é dada por $\{T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)\} = \{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ que ainda é uma base do espaço vetorial \mathbb{R}^3 .

Sendo assim, como temos que:

$T(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$, $T(0, 1, 0) = (-2, 0, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$, seu inverso é dado por $T^{-1}(1, 0, 1) = (1, 0, 0)$, $T^{-1}(-2, 0, 1) = (0, 1, 0)$ e $T^{-1}(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$. Como queremos encontrar a inversa T^{-1} , podemos escrever (x, y, z) em relação a sua base, isto é, $\{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$. Isso resulta na seguinte em:

$$(x, y, z) = \frac{x+2z}{3}(1, 0, 1) + \frac{z-x}{3}(-2, 0, 1) + y(0, 1, 0)$$

Desse modo, temos que:

$$T^{-1}(x, y, z) = \frac{x+2z}{3} T^{-1}(1, 0, 1) + \frac{z-x}{3} T^{-1}(-2, 0, 1) + yT^{-1}(0, 1, 0)$$

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x+2z}{3}, \frac{z-x}{3}, y \right)$$

Portanto, acabamos de encontrar a inversa de T que é dada por:

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x+2z}{3}, \frac{z-x}{3}, y \right).$$

Até agora estudamos as transformações lineares em espaços vetoriais mais simples, vejamos agora como fazemos quando temos espaços vetoriais matriciais, ou seja, como representamos essas transformações lineares em matrizes e vice-versa.

2.1.3 Transformações lineares e matrizes

Em linhas gerais, toda transformação linear $T:V \rightarrow W$ pode ser representada por uma matriz do tipo $m \times n$. A recíproca também é verdadeira.

Teorema 4: Considere uma transformação linear no espaço vetorial real, ou seja, $T:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, existe uma matriz $A_{n \times m}$ associada a tal que $T(x) = Ax \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Indubitavelmente, o j -ésimo vetor coluna de uma determinada matriz A é definido por

$$a_j = T(e_j), j = 1, 2, \dots, n$$

Considerando a matriz $A_{m \times n}$ representada a partir dos seus vetores colunas, podemos escrevê-la como:

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n), \text{ em que } a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$$

Desse modo, observa-se aqui que a matriz A possui n colunas, sendo cada uma delas definidas por um vetor de m componentes.

Assim, para $j = 1, 2, \dots, n$, podemos definir cada coluna da matriz A como sendo:

$$a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T = T(e_j).$$

Logo, se tivermos um vetor arbitrário qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ escrito na base determinada canônica, chegamos a:

$$x = (x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n).$$

Agora precisamos calcular $T(x)$:

$$T(x) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n).$$

$$T(x) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \dots + x_nT(e_n)$$

$$T(x) = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_n a_n$$

$$T(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$T(x) = Ax$$

Portanto, aqui fica demonstrado que cada transformação linear pode ser representada através de uma matriz.

Exemplo 12: Qual a matriz associada a transformação $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)^T$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$?

Para resolver este problema devemos encontrar uma matriz A de maneira que $T(x) = Ax$. Sendo assim, necessitamos calcular $a_1 = T(e_1)$, $a_2 = T(e_2)$ e $a_3 = T(e_3)$, pois de posse desses valores podemos obter as colunas da matriz.

$$a_1 = T(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = T(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = T(e_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Realizando a escolha desses vetores como sendo a coluna da matriz A , temos que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Conferindo o resultado obtido, temos que:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

Portanto, as transformações lineares do tipo $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ podem ser representadas em forma de matrizes. Além disso, podemos de maneira análoga representar os operadores lineares de V com dimensão n . Em linhas gerais, a representação de uma transformação linear por uma matriz vai depender da escolha das bases do domínio e a imagem do espaço vetorial. Vamos compreender isso generalizando o teorema 4.

Exemplo 13: Qual matriz representa a transformação linear dada por $T: V \rightarrow W$ e pelas bases ordenadas definidas por $E = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $F = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ para V e W , respectivamente?

Se representemos v como sendo um vetor arbitrário em V na base E , temos que:

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n.$$

Sendo assim, podemos aqui mostrar que existe uma matriz do tipo $A_{m \times n}$ que representa a transformação linear T . Matematicamente podemos escrever isso como:

$$Ax = y \Leftrightarrow T(v) = y_1w_1 + y_2w_2 + \dots + y_mw_m.$$

Cabe ressaltar que, o efeito da transformação linear T também deve ser levado em consideração. Para isso, podemos incluir nos cálculos a linearidade da transformação linear T , dada por:

$$T(v) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2) + \dots + x_nT(v_n).$$

Logo, para cada k , $1 \leq k \leq n$, isto é, $T(v_k)$ pertence a W . Isso nos permite escrever $T(v_k)$ em termos dos vetores da base F e W , como segue:

$$T(v_k) = a_{1k}w_1 + a_{2k}w_2 + \dots + a_{mk}w_m$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
T(v) &= x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m) \\
&\quad + x_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + x_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m).
\end{aligned}$$

Rearranjando a equação anterior, temos que:

$$\begin{aligned}
T(v) &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)w_1 \\
&\quad + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)w_2 \\
&\quad + \dots \\
&\quad + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n)w_m.
\end{aligned}$$

Agora fica mais fácil visualizar os coeficientes de w_1, w_2, \dots, w_m . É importante notar que esses coeficientes são produtos das respectivas linhas da matriz A pelo vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Podemos representar isso com matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = Ax$$

Sendo assim, a coluna de A , ou seja, a_k , onde $1 \leq k \leq n$ pode ser escrita como:

$$A_k = (T(v_k))_F = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{mk} \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos uma única matriz A para as bases inicialmente escolhidas, em que suas colunas são coordenadas dos vetores $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$. É importante notar que isso só é possível, pois as coordenadas dos vetores são únicas nas bases escolhidas. Por outro lado, o vetor de coordenadas de $T(v)$ em termos dos coeficientes w_1, w_2, \dots, w_m pode ser escrito como sendo: $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$. Logo, temos que $y = Ax$.

Teorema 5: Considere uma transformação linear dada por $T:V \rightarrow W$ em relação as bases ordenadas $E = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ para V e $F = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ para W , existe uma matriz $A_{m \times n}$ de maneira que $[T(v)]_F = A[v]_E$, onde $T(v)$ é a matriz A em relação as duas bases ordenadas.

Indubitavelmente, o j -ésimo vetor coluna da matriz A é definido por $a_j = [T(v_j)]_F$. Sendo assim, se considerarmos que $x = [v]_E \in \mathbb{R}^n$, podemos obter o vetor de coordenadas de v em relação a base ordenadas E . Como $y = [w]_F \in \mathbb{R}^m$, podemos obter w em relação a F , isto é:

$$T:V \rightarrow W \Leftrightarrow Ax = y.$$

Da mesma forma que estudado anteriormente, o vetor coluna de A pode ser representado pela seguinte expressão:

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) = ([T(v_1)]_F, [T(v_2)]_F, \dots, [T(v_n)]_F).$$

Nesse caso, a transformação linear $T:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ pode ser representada por uma única matriz do tipo $A_{m \times n}$ em relação às bases ordenadas dadas por $E = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ e $F = [w_1, w_2, \dots, w_m]$. Para isso, cada vetor $T(v_j)$ deve ser representado pela combinação w_1, w_2, \dots, w_m . Isso pode ser feito encontrando uma solução de um sistema linear $Bx = T(v_j)$, conforme estudaremos no Teorema a seguir.

Teorema 6: Sejam bases ordenadas definidas por $E = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ para \mathbb{R}^n e $F = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ para \mathbb{R}^m , $T:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear, $A_{m \times n}$ uma matriz de T em relação a E e F , temos que $a_j = B^{-1}T(v_j)$, em que $B = (w_1, w_2, \dots, w_m)$.

De fato, como a matriz A é uma representação da função T em relação as bases ordenadas E e F , logo para $j = 1, 2, \dots, n$, temos que:

$$\begin{aligned} T(v_j) &= a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + a_{mj}w_m \\ T(v_j) &= Ba_j \end{aligned}$$

Logo, podemos calcular a inversa da matriz B , uma vez que suas colunas são formadas por uma base no espaço vetorial real \mathbb{R}^m , logo $a_j = B^{-1}T(v_j)$. A partir desse teorema podemos calcular uma matriz $A_{m \times n}$ que é associada a um operador. Para isso, tendo-se uma matriz

aumentada, podemos calcular sua forma escalonada reduzida por linhas, conforme veremos no corolário a seguir.

Corolário 4: Seja A uma matriz que representa uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ em relação as bases $E = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ para \mathbb{R}^n e $F = [w_1, w_2, \dots, w_m]$, temos que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz A é dada por $(w_1, w_2, \dots, w_m \mid T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n))$ é $(I \mid A)$.

Indubitavelmente, dado que $B = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, a matriz $B \mid (T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n))$ é equivalente por linhas a:

$$B^{-1} (B \mid T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)) = (I \mid B^{-1}T(b_1), B^{-1}T(b_2), \dots, B^{-1}T(b_n)) = I \mid a_1, a_2, \dots, a_n = (I \mid A).$$

Exemplo 14: Seja a transformação linear dada por $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e definida pela função $T(x) = (x_2, x_1 + x_2, x_1 - x_2)^T$ e as bases ordenadas dadas por $E = [v_1, v_2] = [(1, 2)^T, (3, 1)^T]$ e $F = [w_1, w_2, w_3] = [(1, 0, 0)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 1, 1)^T]$ qual matriz associada a T ?

Para resolver esse problema, precisamos formar uma matriz aumentada e em seguida calcular sua forma escalonada reduzida por linhas. O primeiro passo é encontrar $T(u_1), T(u_2)$:

$$(w_1, w_2, w_3 \mid T(u_1), T(u_2)) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

Portanto, a matriz T é dada por: $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2.2 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Nesta seção iremos abordar os conceitos relacionados aos autovalores e autovetores que surgem a partir de uma transformação linear em um determinado espaço vetorial e são importantes para compreensão da aplicação proposta nesse trabalho de conclusão de curso. Para isso, utilizaremos a abordagem de Boldrini *et al.* (1980).

2.2.1 Considerações iniciais

Dada uma determinada transformação linear no mesmo espaço vetorial, como por exemplo, $T: V \rightarrow V$, podemos determinar os vetores v que são sempre levados por eles próprios, uma vez que eles fixos. Podemos escrever isso matematicamente como: $v \in V$ tal que $T(v) = v$.

Exemplo 15 (Aplicação identidade): Na transformação linear do tipo $I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida pela função $(x, y) \mapsto (x, y)$ os seus vetores são fixos.

De fato, todo \mathbb{R}^2 é fixo, uma vez que $I(x, y) = (x, y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 16 (Reflexão no eixo-x): Na transformação linear dada por $r_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e definida pela função $(x, y) \mapsto (x, -y)$, a qual pode ser representada matricialmente por: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, o vetor $(x, 0)$ é fixo.

Indubitavelmente, a fim de visualizar esta transformação linear, podemos representá-la geometricamente (Figura 7):

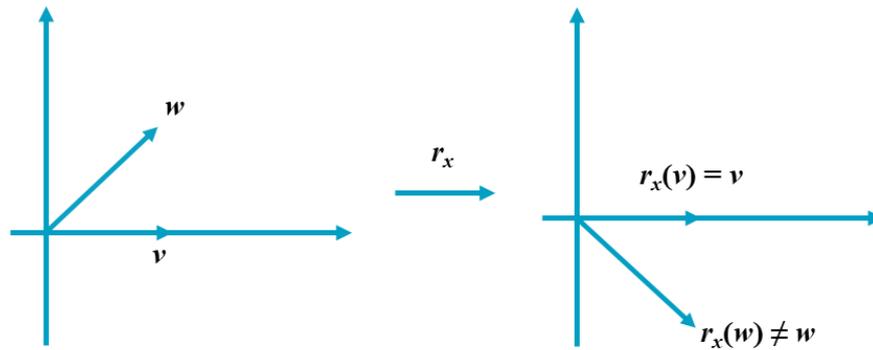


Figura 7 – Representação geométrica dos vetores de uma transformação linear do tipo reflexão no eixo-x.
Fonte: Boldrini *et al.* (1980, p. 179)

A partir da Figura 14 fica evidente que o vetor v do eixo-x permanece fixo durante a transformação linear, uma vez que $r_x(x, 0) = (x, 0)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 17 (Aplicação nula): Na transformação linear dada por $N: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e definida por $(x, y) \mapsto (0, 0)$, apenas o vetor nulo é fixo.

De fato, como temos uma transformação linear nula, ou seja, os vetores nulos são fixos. Matematicamente: $N(0, 0) = (0, 0)$.

Nesse sentido, seja uma transformação linear em um mesmo espaço vetorial dado por $T: V \rightarrow V$, podemos encontrar um vetor de modo que $v \in V$, bem como um escalar, satisfazendo $T(v) = \lambda v$. Fazendo isso encontraremos vetores os quais são transportados para o outro espaço vetorial em um múltiplo de si mesmo. Aqui vale salientar que $T(v)$ deve ser um vetor que está na mesma direção de v .

Sendo assim, caso $v = 0$ e um λ qualquer, logo devemos determinar valores de $v \neq 0$. Nesse caso, o escalar λ é denominado de *autovalor* ou também de valor característico de T e o vetor v é chamado de *autovetor* ou ainda vetor característico de T . Como agora utilizamos o mesmo espaço vetorial, uma vez que $T: V \rightarrow V$, temos na transformação linear um operador linear, conforme relatamos na observação 2. Vamos definir isso de maneira mais formal na definição 7 que segue abaixo.

Definição 7: Dado um operador linear $T: V \rightarrow V$, se existir um $v \in V$, $v \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$, λ é chamado de *autovalor* de T e v denominado de *autovetor* de T , o qual está associado a λ .

Para fixar essa definição, vamos resolver um exemplo.

Exemplo 18: Seja o operador linear dado por $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e definido por $v \mapsto 2v$, qual o autovalor e o autovetor?

Vamos primeiro representar essa transformação linear em forma de matrizes para então calcular o seu autovalor e autovetor, como segue:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Uma outra forma de visualizar essa transformação é geometricamente (Figura 8):

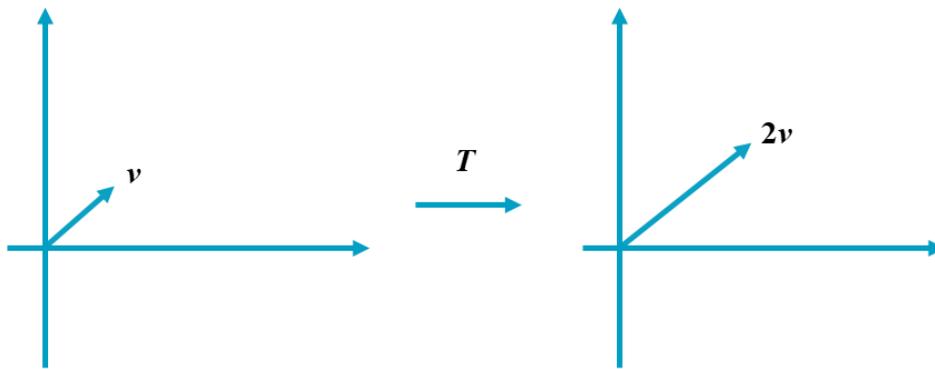


Figura 8 – Representação geométrica do problema.
Fonte: Boldrini *et al.* (1980, p. 179)

Portanto, a partir dos cálculos e da Figura 8, fica demonstrado que 2 é o autovalor do operador linear T e $(x, y) \neq (0, 0)$ é o autovetor de T , o qual está associado a esse autovalor.

Em linhas gerais, podemos afirmar que se tivermos um operador linear dado por $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e definido por $v \rightarrow \alpha v$ com $\alpha \neq 0$, teremos um autovalor α e um autovetor $(x, y) \neq (0, 0)$. Cabe aqui ressaltar que o vetor $T(v)$ estará sempre na mesma direção de v . Portanto, podemos elencar os seguintes pontos acerca dessa observação:

- i)* $\alpha < 0$, o sentido do vetor é invertido;
- ii)* $|\alpha| > 1$, o vetor é dilatado;
- iii)* $|\alpha| < 1$ o vetor é contraído;
- iv)* $\alpha = 1$, o operador T é identidade.

Exemplo 19 (Reflexão no eixo-x): Dado o operador linear $T: V \rightarrow V$ definido pela função $(x, y) \mapsto (x, -y)$ determinemos um autovalor e um autovetor associado.

Vamos primeiro representar o operador linear em forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Agora, podemos manter fixo os vetores. Para isso, deveremos multiplicar a transformação linear por $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto, qualquer vetor definido como sendo $(0, y)$ dado que $y \neq 0$ é um autovetor de r_x com um autovalor dado por $\lambda = -1$.

Exemplo 20 (Rotação de 90° em torno da origem): Dado o operador linear $T: V \rightarrow V$ definido pela função $(x, y) \mapsto (-y, x)$ qual o seu autovalor e autovetor?

Nenhum vetor diferente de zero é levado por si mesmo num múltiplo de T . Isso resulta na inexistência de autovalores e autovetores para o operador linear dado na questão. Portanto, a partir desse problema, verificamos que nem sempre os operadores lineares possuem autovalores e autovetores.

Teorema 7: Seja T um operador linear definido em um espaço vetorial V em V . Suponha que v seja um autovetor associado a um autovalor λ . Então, para qualquer vetor $w = \alpha v$ (onde $\alpha \neq 0$), w também é um autovetor relacionado a λ .

Definição 8: Em um subespaço dado por $V_\lambda = \{v \in V, T(v) = \lambda v\}$, temos V_λ é denominado de subespaço relacionado ao autovalor λ .

2.2.2 Autovalores e autovetores em matrizes

Agora vamos trabalhar os conceitos estudados anteriormente em forma de matriz. Sendo assim, considerando uma matriz quadrada A , de ordem n , os seus autovalores e autovetores são relacionados a transformação linear (operador linear) do tipo $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tudo isso sempre em relação a uma base, ou seja, $T(v) = Av$. Em linhas gerais, podemos afirmar que como $Av = \lambda v$, $v \neq 0$, teremos um autovalor que, $\lambda \in \mathbb{R}$, de A e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$.

2.2.3 Polinômio característico

De maneira geral, encontrar autovalores e autovetores de uma determinada matriz nem sempre é uma tarefa fácil, dependendo do tamanho da matriz os cálculos podem ser muitos complicados de serem resolvidos. Assim, podemos obter tais resultados utilizando o polinômio característico, como ferramenta conforme veremos a seguir.

Generalização 1: Quais os autovalores e autovetores de uma matriz A de ordem n ?

Inicialmente, ressaltamos que os autovalores e autovetores que correspondem a matriz A correspondem aqueles que satisfazem a equação $Av = \lambda Iv$ ou $Av = (\lambda I)v$ ou $(A - \lambda I)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chamando a primeira matriz, a qual contém os polinômios, de B , chegamos a $Bv = 0$. Sendo assim, caso o determinante de B seja diferente de zero, inferimos que o posto de B é n . Isso nos permite escrever um sistema de equações lineares homogêneo, cuja solução é única. Além disso, é importante ressaltar que como $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ou $v = 0$, a solução do sistema seria sempre nula. Portanto, para isso não ocorrer é necessário que o determinante de B seja zero, isto é, $\det B = 0$:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Levando isso em consideração, podemos determinar os autovalores λ que satisfazem a equação. De posse desse(s) valor(es) podemos também descobrir o autovetor correspondente a cada autovalor encontrado. Aqui notamos que:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \text{ é um polinômio em } \lambda \text{ de grau } n.$$

Portanto, para $P(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) +$ termos de grau $< n$, os autovalores procurados são as raízes do polinômio característico da matriz A .

Exemplo 21: Quais os autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$?

Para solucionar esse problema, temos que:

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (-3 - \lambda)(2 - \lambda) + 4 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2 = P(\lambda) \end{aligned}$$

Caso $P(\lambda) = 0$ chegamos a uma equação do 2º grau:

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ ou $(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$, que possui como solução ou raízes $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$, as quais são autovalores de A . De posse desses valores, podemos encontrar os autovetores de cada um desses autovalores:

i) Para $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A partir das matrizes, o seguinte sistema pode ser montado:

$$\begin{cases} -3x + 4y = x \\ -x + 2y = y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Logo, esse sistema possui como solução: $x = y$. Sendo assim, os autovetores associados a $\lambda = 1$ são os vetores na forma $v = (x, x)$ com $x \neq 0$.

ii) Para $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O seguinte sistema pode ser montado:

$$\begin{cases} -3x + 4y = -2x \\ -x + 2y = -2y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$$

Portanto, o sistema possui como solução: $x = 4y$. Sendo assim, os autovetores associados a $\lambda = -2$ são os vetores na forma $v = (4y, y)$ com $y \neq 0$ ou ainda $v = (x, \frac{1}{4}x)$.

A Figura 9 foi elaborada para mostrar geometricamente o que acontece com os autovalores e autovetores dessa transformação linear.

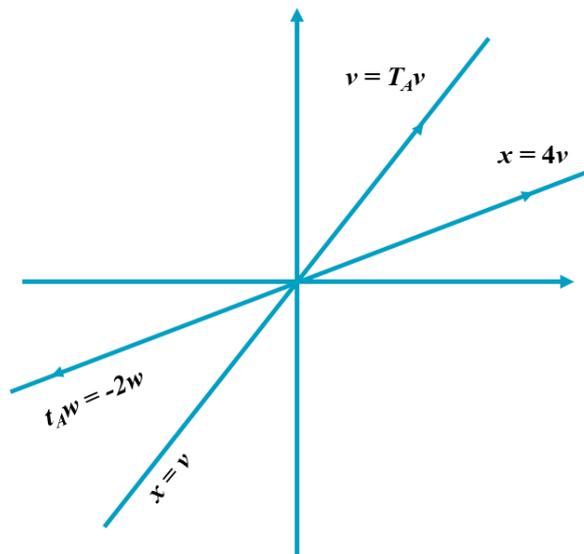


Figura 9 – Representação geométrica dos autovalores e autovetores.
Fonte: Boldrini *et al.* (1980, p. 188).

2.3 DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

Nesta seção iremos abordar o conteúdo de diagonalização de operadores, isto é, vamos encontrar uma matriz diagonal, a qual está associada a um determinado operador. De maneira geral, obteremos uma base do espaço vetorial que está associada com uma matriz do operador linear de maneira mais simples. Este conceito também será importante para as aplicações deste trabalho. Então, para fazer isso continuaremos usando a abordagem de Boldrini *et al.* (1980).

2.3.1 Base de autovetores

Seja o operador linear qualquer do tipo $T: V \rightarrow V$, a fim de realizar a diagonalização, devemos encontrar uma base β de V . No entanto, tal base deve corresponder a uma matriz diagonal que representa o operador nessa base, isto é, $([T]_{\beta}^{\beta})$.

Teorema 8: Autovetores associados a díspares autovalores são linearmente independentes.

Sem dúvidas, tomando λ_1 e λ_2 como autovalores de modo eles sejam diferentes ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) e tomando v_1 e v_2 como autovetores associados aos respectivos valores característicos λ_1 e λ_2 , podemos provar que os autovetores v_1 e v_2 são linearmente independentes.

Para que isso seja verdade, vamos aplicar a equação de transformação dada por $T - \lambda_2 I$, sendo $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$. Como T é linear e $T(v_i) = \lambda_i v_i$ e $Iv_i = v_i$ para $i = 1, 2$, temos:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_2)v_2 = 0 \text{ ou } a_1(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 = 0$$

No entanto, sabemos que o primeiro autovetor é diferente de zero ($v_1 \neq 0$) e que os autovalores também são distintos ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Portanto, temos que $a_1 = 0$.

Aplicando a equação de transformação dada por $T - \lambda_2 I$ encontramos que $a_2 = 0$:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_1)v_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0 \text{ ou } a_1(\lambda_2 - \lambda_1)v_1 = 0$$

Desse modo, podemos afirmar que os autovetores v_1 e v_2 são linearmente independentes.

Generalização 2: Analogamente podemos generalizar o Teorema 8 para os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ que sejam distintos. Fazendo isso, temos que:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r = 0$$

Agora aplicando o aplicando a equação de transformação dada por $T - \lambda_2 I$, temos que $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$. Vamos supor que $a_2 = 0$ e aplicando sucessivamente à equação original, encontramos:

$$T - \lambda_1 I, T - \lambda_2 I, T - \lambda_3 I, T - \lambda_4 I, \dots, T - \lambda_r I$$

Uma consequência desse Teorema 8 e a Generalização 2 é o corolário apresentado a seguir.

Corolário 5: Seja V um espaço vetorial n -dimensional e seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear com n diferentes autovalores, então V possui uma base onde todos os vetores são autovetores de T .

Exemplo 22: Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida pela função $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$ que possui uma matriz em relação à base canônica α dada por $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, qual a base β de autovetores e qual tipo é a matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$?

Uma vez que o autovalor $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$, ambos são diferentes. Por esse motivo, conforme o Corolário 5 podemos garantir uma base de autovetores associada e esses

autovalores. Dois deles formam uma base de \mathbb{R}^2 e são dados por $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (4, 1)$. De maneira geral, podemos afirmar que este espaço vetorial possui uma base $\beta = \{v_1, v_2\}$ que é constituída por autovetores de T .

Sabendo disso e levando em conta que $T(v_1) = 1v_1 = 1v_1 + 0v_2$ e $T(v_2) = -2v_2 = 0v_1 - 2v_2$, finalmente podemos encontrar a base $[T]_{\beta}^{\beta}$ que é dada por:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Portanto, acabamos de verificar que a matriz T em relação à base $[T]_{\beta}^{\beta}$ é uma matriz quadrada diagonal, em que os elementos que não constituem a diagonal principal são iguais nulos. Sendo assim, a partir de agora apresentaremos formas de como devemos fazer para diagonalizar uma matriz, uma vez que trabalhar com matrizes desse tipo é mais fácil de manusear.

Generalização 3: Seja uma transformação linear qualquer $T: V \rightarrow V$ e considerando uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ formada por autovetores T , como

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ T(v_2) &= 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0v_n \\ &\vdots \\ T(v_n) &= 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

a matriz na base β , ou seja, $[T]_{\beta}^{\beta}$ é do tipo diagonal, na qual os elementos da diagonal principal correspondem exclusivamente aos autovalores λ_i . Escrevendo isso matricialmente, temos que:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

É importante ressaltar que os autovalores λ_i não precisam ser distintos. Sendo assim, na matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$, o autovalor será repetido na diagonal tantas vezes quantos forem os autovetores linearmente independentes forem a ele associado.

No entanto, se agora a base de V for dada por $\gamma = \{u_1, \dots, u_n\}$, isto é,

No entanto, para o autovalor $\lambda_2 = -1$, temos um autovetor dado por $v_3 = (-1, -20, 16)$. Assim, verifica-se que apenas dois autovalores de T que são linearmente independentes, o que implica na inexistência de uma base \mathbb{R}^3 composta exclusivamente por autovalores. Em outras palavras, podemos afirmar que T não é diagonalizável, pois nenhuma base transforma T em uma matriz do tipo diagonal.

A seguir veremos como obtemos uma matriz diagonal usando polinômio minimal.

2.3.2 Polinômio Minimal

O polinômio minimal é frequentemente utilizado para determinar se dada matriz é diagonalizável, em espaços vetoriais de alta dimensão.

Definição 10: Seja o polinômio dado por $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ e sendo A uma matriz quadrada, temos que o polinômio desta matriz, ou seja, $p(A)$ é uma matriz dada por:

$$p(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I.$$

Então, quando o polinômio desta matriz for igual a zero, isto é, $p(A) = 0$, o polinômio anula a matriz A .

Vejamos a seguir um exemplo para melhor fixar essa definição.

Exemplo 24: Dados os polinômios $p(x) = x^2 - 9$, $q(x) = 2x + 3$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine qual destes polinômios anula a matriz A .

Para resolver este problema, simplesmente aplicamos a definição 10, isto é, $(p(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I)$. Sendo assim, temos que:

$$p(A) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^2 - 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$q(A) = 2 \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Portanto, $p(x)$ é um polinômio que anula a matriz A , enquanto o polinômio $q(x)$ não anula A .

Definição 11: Seja A uma matriz quadrada, o polinômio minimal de A é dado por:

$$m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_0$$

de maneira que tem que satisfazer a duas condições:

- i) $m(A) = 0$, ou seja, $m(x)$ anula a matriz A .
- ii) $m(x)$ é um polinômio de menor grau dentre aqueles que anulam a matriz A .

Observação 6: É importante ressaltar que o coeficiente do termo x^k do polinômio minimal é 1, isto é, $a_k = 1$.

Teorema 9: Dado o operador linear $T: V \rightarrow V$ e uma base α de V qualquer com n -dimensão, dizemos que T é diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal desta matriz na base $[T]_\alpha^\alpha$ é dado por:

$$m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_r)$$

com diferentes valores de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.

Vamos apresentar dois teoremas que nos permitem obter o polinômio minimal.

Teorema 10 (Cayley-Hamilton): Sendo $T: V \rightarrow V$ um operador linear, α uma base de qualquer de V e $p(x)$ um polinômio característico de T . Então:

$$p([T]_\alpha^\alpha) = 0.$$

Diante do teorema podemos afirmar que o polinômio característico de T é um anulador da matriz T na base α .

Vamos demonstrar esses teoremas em dimensão 2 a seguir.

Demonstração 1: Tendo um espaço de dimensão dois e considerando a matriz do operador linear T na base α dada por $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, teremos o polinômio característico:

$$p(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc.$$

Resolvendo, chegamos ao seguinte polinômio:

$$p[T]_{\alpha}^{\alpha} = \left(a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \left(d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) - bc \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 11: As raízes do polinômio minimal devem ser idênticas às raízes do polinômio característico.

Observação 7: Vale ressaltar que o polinômio minimal é um polinômio que possui o menor grau ou no máximo grau igual ao polinômio característico e deve possuir as mesmas raízes deste polinômio característico.

Teorema 12: Se os autovalores de um operador linear T dados por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, então, T será diagonalizável se, e somente se, o polinômio $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_r)$ anular essa matriz de T .

Vejamos a seguir um exemplo para fixar melhor esses dois teoremas apresentados anteriormente.

Exemplo 25: O operador linear dado por $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ e definido por $t(x, y, z, t) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -t)$ é diagonalizável?

Para resolver esse problema, vamos considerar a base canônica dada por $\alpha = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Logo, podemos escrever a matriz de T :

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sabendo que o polinômio característico é dado por:

$$p(\lambda) = \det([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 (-1 - \lambda)^2,$$

encontraremos os autovalores, os quais são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$, ambos com multiplicidade de 2. Agora ficou mais fácil de encontrar o polinômio minimal, já que ele pode ser uma das opções abaixo:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (x - 3)(x + 1) \\ p_2(x) &= (x - 3)^2(x + 1) \\ p_3(x) &= (x - 3)(x + 1)^2 \\ p_4(x) &= (x - 3)^2(x + 1)^2 \end{aligned}$$

Para encontrá-lo devemos verificar quais das opções anula a matriz T . Fazendo isso, notamos que $p_1([T]_{\alpha}^{\alpha}) = 0$, ou seja, $p_1(x)$ anula a matriz T . Além disso, observamos que polinômio é o de menor grau, satisfazendo as duas condições definidos na definição 11. Portanto, $p_1(x) = (x - 3)(x + 1)$ é o polinômio minimal e T diagonalizável, isto é, existe uma base β de autovetores e nela:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vimos até aqui como diagonalizar apenas um único operador. No entanto, há situações que necessitamos diagonalizar mais de um operador e podemos fazer isso de maneira simultânea como veremos na subseção seguinte.

2.3.3 Diagonalização simultânea de dois operadores

Sejam dois operadores lineares dados por $T_1: V \rightarrow V$ e $T_2: V \rightarrow V$, os quais são diagonalizáveis, existem duas bases α_1 e α_2 de V de modo que essas matrizes nessa base, isto é, $[T]_{\alpha_1}^{\alpha_1}$ e $[T]_{\alpha_2}^{\alpha_2}$, respectivamente, são diagonais. Vale salientar que não podemos garantir que as duas bases desses operadores sejam iguais, ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2$. Sendo assim, sejam os operadores T_1 e T_2 diagonalizáveis, então teremos que eles são simultaneamente diagonalizáveis se, e somente se, comutarem, ou seja, matematicamente: $T_1 \bullet T_2 = T_2 \bullet T_1$. Em linhas gerais, para verificar isso, tomamos os determinados operadores T_1 e T_2 e uma base β qualquer do espaço vetorial V e verificamos se T_1 e T_2 são diagonalizáveis. Em outras palavras, podemos afirmar que se $[T_1]_{\beta}^{\beta}[T_2]_{\beta}^{\beta} = [T_2]_{\beta}^{\beta}[T_1]_{\beta}^{\beta}$ (comutatividade), os operadores T_1 e T_2 são simultaneamente diagonalizáveis, vejamos a seguir um exemplo para fixar essa ideia.

Exemplo 26: Dados os operadores lineares $T_1, T_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ quem possuem as matrizes, respectivamente, em relação à base canônica dadas por

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ \frac{5}{5} & \frac{5}{5} & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ \frac{5}{5} & \frac{5}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } [T_2] = \begin{bmatrix} 11 & 8 & 0 \\ \frac{5}{5} & \frac{5}{5} & 0 \\ 8 & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{5}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

são simultaneamente diagonalizáveis.

Isso é verdade, uma vez que calculando os autovalores de T_1 , encontramos que $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 2$ e o polinômio que anula a matriz $[T]$ é dado por $m(x) = (x - 1)(x - 2)$, logo T_1 é diagonalizável. Analogamente, para T_2 , os autovalores são $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 4$, portanto como temos autovalores diferentes, T_2 é também diagonalizável. Além disso, cabe observar que temos presente a comutatividade:

$$[T_1][T_2] = \begin{bmatrix} \frac{115}{25} & \frac{70}{25} & 0 \\ 70 & 10 & 0 \\ \frac{70}{25} & \frac{10}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = [T_2][T_1]$$

Portanto, podemos afirmar que T_1 e T_2 são simultaneamente diagonalizáveis.

2.4 NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITES

Um outro conceito para entendimento das aplicações deste trabalho de conclusão de curso refere-se à noção intuitiva de limites. Assim, faremos tal fundamentação usando a abordagem de Flemming e Gonçalves (2012).

2.4.1 Noção intuitiva

Para Flemming e Gonçalves (2012), no conjunto dos números reais, sempre podemos escolher um conjunto numérico, conforme regras preestabelecidas. Sendo assim, a fim de compreender melhor a noção intuitiva de limites, estudaremos os seguintes exemplos:

- i) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

- ii) $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 7/8...$
- iii) $1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7...$
- iv) $1, 3/2, 3, 5/4, 5, 7/6, 7, 8/9, 8...$

Verifica-se que em (i) os números tendem a crescer para o infinito, isto é, na sucessão sempre encontraremos um termo positivamente maior que o anterior. Logo, dizemos que o limite tende ao infinito positivo. Para isso, usamos a seguinte denotação:

$$x \rightarrow +\infty.$$

De maneira análoga, no exemplo (ii), os números se aproximam cada vez mais de 1, porém nunca atingem esse valor. Sendo assim, dizemos que o limite tende a 1:

$$x \rightarrow 1.$$

No terceiro caso (iii), os números se aproximam possuem um sucessor, só que negativo, ou seja, o limite tende ao infinito negativo. Denotamos essa ideia como sendo:

$$x \rightarrow -\infty.$$

Por outro lado, em (iv) os números oscilam sem tender para nenhum limite.

Para melhor compreender essas ideias apresentadas, vejamos agora os limites utilizando funções.

Exemplo 27: Seja $y = 2 - 1/x$

Para valores positivos podemos montar a Tabela 1.

Tabela 1 – Valores positivos para noção intuitiva de limite da função $y = 2 - 1/x$.

x	1	2	3	4	5	6	...	1000	...	2000
y	1	3/2	5/3	7/4	9/5	11/6	...	1999/1000	...	3999/2000

Para valores negativos, a Tabela 2 pode ser elaborada.

Tabela 2 – Valores negativos para noção intuitiva de limite da função $y = 2 - 1/x$.

x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	...	-1000	...	-2000
y	3	5/2	5/3	9/4	9/5	13/6	...	2001/1000	...	4001/2000

Para melhor visualização, o gráfico da Figura 10 pode ser obtido:

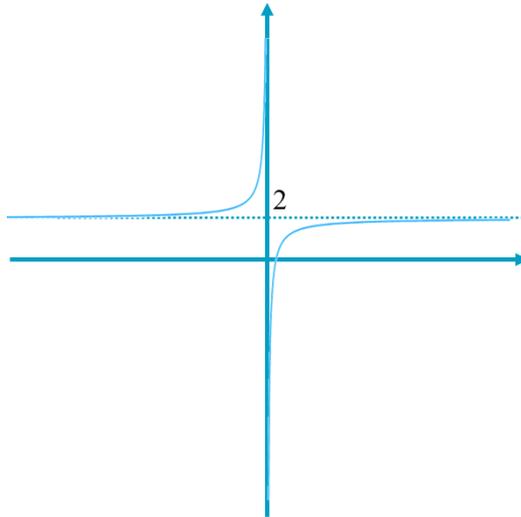


Figura 10 – Gráfico da função $y = 2 - 1/x$.

Sendo assim, podemos afirmar que esta função $y = 2 - 1/x$ tende para 2, quando x tende para o infinito, seja negativo ou positivo. Desse modo, denotamos como:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2$$

Exemplo 28: A função $y = x^2 + 2x - 3$ tende para $+\infty$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 + 2x - 3) = \pm\infty.$$

Para valores positivos podemos montar a Tabela 3.

Tabela 3 – Valores positivos para noção intuitiva de limite da função $y = x^2 + 2x - 3$.

x	1	2	3	4	5	6	...	100	...	1000
y	0	5	12	21	32	45	...	10197	...	1001997

Para valores negativos, a Tabela 4 pode ser elaborada.

Tabela 4 – Valores negativos para noção intuitiva de limite da função $y = x^2 + 2x - 3$.

x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	...	-100	...	-1000
y	-4	-3	0	5	12	21	...	9797	...	997997

Das Tabelas 3 e 4 podemos elaborar o seguinte gráfico:

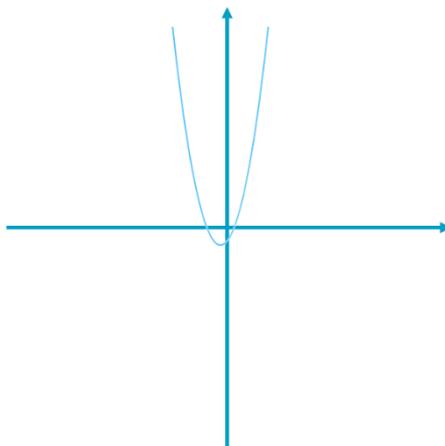


Figura 11 – Gráfico da função $y = x^2 + 2x - 3$.

Indubitavelmente, de maneira intuitiva, ao analisar as Tabelas 3 e 4, além do gráfico da Figura 11 podemos observar que o limite da função tende para $\pm\infty$.

Exemplo 29: Considere a função $y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Para esta função trigonométrica, podemos elaborar a seguinte tabela:

Tabela 5 – Valores negativos para noção intuitiva de limite da função $y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

X	$\frac{1}{\pi} \cong 0,318309$	$\frac{1}{2\pi} \cong 0,159154$	$\frac{1}{3\pi} \cong 0,106103$	$\frac{1}{4\pi} \cong 0,0795774$...
y	-1	1	-1	1	...

Fonte: Flemming e Gonçalves (2012).

A partir desta tabela podemos elaborar o seguinte gráfico:

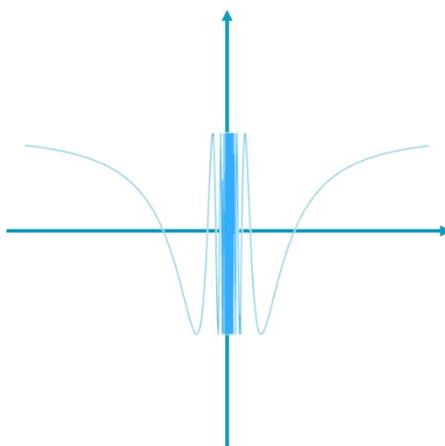


Figura 12 – Gráfico da função $y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2012).

Desse modo, verifica-se no gráfico da função $y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ que esta função oscila numa vizinhança de zero, porém sem tender para nenhum limite.

Agora podemos definir limite

Definição 12: Dada uma função $f(x)$ definida em um intervalo aberto I , contendo a , exceto, possivelmente, no próprio a . O limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é L , ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid |f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Exemplo 30: Prove que $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2$.

De acordo com a definição de limites, para provar que $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2$ devemos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $|3x - 1 - 2| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$.

Desse modo, as seguintes desigualdades são equivalentes:

$$|3x - 1 - 2| < \varepsilon$$

$$|3x - 3| < \varepsilon$$

$$|3(x - 1)| < \varepsilon$$

$$3|x - 1| < \varepsilon$$

$$|x - 1| < \varepsilon/3.$$

Logo, temos que $\delta = \varepsilon/3$ e $|3x - 1 - 2| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$.

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2$.

A seguir veremos algumas propriedades de limites.

2.4.2 Propriedades de limites

Para facilitar os cálculos, podemos aplicar algumas propriedades de limites. Sendo assim, considerando que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existem, bem como para um determinado número real c , podemos elencar que:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$;
- (iv) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ com $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$;
- (v) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$ com $n > 0$;
- (vi) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$ com $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq 0$ com $n > 0$ e ímpar;
- (vii) $\lim_{x \rightarrow a} \ln [f(x)] = \ln [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]$ com $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$;
- (viii) $\lim_{x \rightarrow a} \cos [f(x)] = \cos [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]$;
- (ix) $\lim_{x \rightarrow a} \text{sen} [f(x)] = \text{sen} [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]$;
- (x) $\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$.

2.5 A MATRIZ DE LESLIE

Para finalizar o aporte teórico que sustentará as aplicações apresentadas neste trabalho de curso, será abordado neste capítulo a matriz de Leslie. Para isso, usaremos os autores Anton e Rorres (2012) como referência principal.

2.5.1 Considerações iniciais

O crescimento ou decréscimo populacional é um parâmetro muito importante para as ciências aplicadas, especialmente para demografia. Sendo assim, a matemática pode contribuir com o fornecimento de modelos que permitem estimá-lo quantitativamente. Dentre esses modelos, encontra-se o modelo Leslie, que segundo Anton e Rorres (2012), é um dos modelos mais utilizado pelos demógrafos para investigar o crescimento populacional de uma espécie animal ou humana.

De acordo com Silva (2016), o modelo de Leslie foi proposto em 1920 pelo matemático Alfred J. Lotka. No entanto, somente foi publicado em 1945 por Patrick Holt Leslie, por meio do artigo intitulado como “*On the use of matrices in certain population mathematics*” (Leslie, 1945). Em seu estudo, Leslie investigou roedores, no que tange aos parâmetros de ciclos da lebre e predador, bem como a expansão territorial do esquilo cinzento em função do esquilo vermelho originário da Inglaterra. Posteriormente, o autor aplicou esses dados em estudos

demográficos humanos, realizado por Lotka (Bacaër, 2011). Na subseção seguinte veremos como podemos utilizar este importante modelo.

2.5.2 Descrição do modelo de Leslie

O modelo de Leslie delinea o crescimento de uma população fêmea a partir da divisão de faixas etárias de idêntica duração. Para isso, considera a idade máxima atingida pelas fêmeas da população, a qual é dada em L anos. Assim, podemos dividir a população em n faixas etárias, onde cada faixa terá L/n anos de duração, conforme Tabela 6.

Tabela 6 – Faixas etárias, conforme o modelo de Leslie.

Faixa etária	Intervalo de idade
1	$[0, L/n)$
2	$[L/n, 2L/n)$
3	$[2L/n, 3L/n)$
\vdots	\vdots
$n - 1$	$[(n - 2)L/n, (n - 1)L/n)$
n	$[n - 1)L/n, L]$

Fonte: Anton e Rorres (2012).

Supondo que o número de fêmeas em cada uma das n faixas no instante $t = 0$ seja um valor conhecido, teremos um total de $x_1^{(0)}$ fêmeas na primeira faixa, $x_2^{(0)}$ fêmeas na segunda faixa etária e assim sucessivamente. A partir dessas informações podemos montar um vetor coluna, o qual passaremos a denominar de vetor de distribuição etária inicial:

$$x^{(0)} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Entretanto, ao longo do tempo, o número da população fêmea, nas n faixas, pode ser afetado por três processos biológicos a saber: nascimento, morte e envelhecimento. Esses processos podem ser descritos quantitativamente, de modo que podemos obter um futuro vetor de distribuição etária inicial, a fim de entender a dinâmica do crescimento populacional.

Sendo assim, uma abordagem conveniente para compreender esse processo de envelhecimento é considerar a população em intervalos discretos de tempo, ou seja, $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k$. Nesse caso, para aplicar o modelo Leslie, é necessário que a duração entre os dois tempos de observação seja igual a duração da faixa etária. Desse modo, temos que:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_1 &= L/n \\ t_2 &= 2L/n \\ &\vdots \\ t_k &= kL/n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observamos que considerando essa hipótese, todas as fêmeas que estão na faixa etária $(i + 1)$, no instante t_{k+1} estavam anteriormente na faixa i no instante t_k . Desse modo, entre dois tempos de observação sucessivos, os processos de nascimento e morte podem ser descritos através dos parâmetros demográficos resumidos na Tabela 7.

Tabela 7 – Parâmetros demográficos, segundo o modelo de Leslie.

Parâmetro demográfico	Descrição
a_i ($i = 1, 2, \dots, n$)	O número médio de filhas nascidas por fêmea durante o tempo em que ela está na faixa etária i .
b_i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$)	A fração de fêmeas da faixa etária i que se espera que vá sobreviver e passar para a faixa etária $(i + 1)$.

Fonte: Anton e Rorres (2012).

Pelas definições, temos dois pontos a observar:

- i)** $a_i \geq 0$ com $i = 1, 2, 3, \dots, n$
- ii)** $0 < b_i \leq 1$ com $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$

A partir desses dois pontos, verificamos que não é permitido que qualquer valor de b_i seja nulo, uma vez que nenhuma fêmea sobreviveria a faixa etária i . Além disso, podemos assumir que pelo menos um dos valores de a_i seja positivo, para que haja algum nascimento ocorrendo na população. Desse modo, qualquer faixa etária em que o valor correspondente de a_i seja positivo é chamada de faixa etária fértil, indicando que a população de fêmea que se encontra nessa faixa etária é capaz de procriar.

Em seguida, podemos definir o vetor $x^{(k)}$ de distribuição etária no instante t_k como sendo:

$$x^{(k)} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

onde $x_i^{(k)}$ refere-se ao número de fêmeas na faixa etária i e instante t_k . Nesse instante t_k , as fêmeas da primeira faixa etária correspondem as filhas que nasceram entre os instantes t_{k-1} e t_k , de modo que podemos expressar essa informação como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{o número de} \\ \text{fêmeas na} \\ \text{faixa etária 1} \\ \text{no instante } t_k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{o número de} \\ \text{filhas nascidas} \\ \text{de fêmeas na} \\ \text{faixa etária} \\ \text{1 entre os} \\ \text{instantes } t_{k-1} \\ \text{e } t_k \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{o número de} \\ \text{filhas nascidas} \\ \text{de fêmeas na} \\ \text{faixa etária} \\ \text{2 entre os} \\ \text{instantes } t_{k-1} \\ \text{e } t_k \end{array} \right\} + \dots + \left\{ \begin{array}{l} \text{o número de} \\ \text{filhas nascidas} \\ \text{de fêmeas na} \\ \text{faixa etária} \\ \text{n entre os} \\ \text{instantes } t_{k-1} \\ \text{e } t_k \end{array} \right\}$$

Podemos escrever matematicamente, conforme a equação 1.

$$x_i^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \dots + a_n x_n^{(k-1)} \quad (1)$$

As fêmeas que se encontram na faixa etária $(i + 1)$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) e instante t_k são aquelas que estavam na faixa etária i e instante t_{k-1} e que ainda estão vivas no instante t_k . Logo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{o número de} \\ \text{fêmeas na faixa} \\ \text{etária } i + 1 \text{ no} \\ \text{instante } t_k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{a fração de} \\ \text{fêmeas da faixa} \\ \text{etária } i \text{ que} \\ \text{sobrevive e passa} \\ \text{para a faixa} \\ \text{etária } i + 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{o número de} \\ \text{fêmeas na} \\ \text{faixa etária } i \\ \text{no instante } t_{k-1} \end{array} \right\}$$

Podemos escrever matematicamente, conforme a equação 2.

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (2)$$

Podemos expressar as equações 1 e 2 matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

ou de maneira mais condensada como a Equação 3:

$$x^{(k)} = Lx^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{3}$$

em que L é a matriz de Leslie (Equação 4):

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Utilizando a Equação 3, chegamos nas Equações 5:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= Lx^{(0)} \\ x^{(2)} &= Lx^{(1)} = L^2x^{(0)} \\ x^{(3)} &= Lx^{(2)} = L^3x^{(0)} \\ &\vdots \\ x^{(k)} &= Lx^{(k-1)} = L^kx^{(0)} \end{aligned} \tag{5}$$

Portanto, podemos conhecer a distribuição etária das fêmeas em qualquer momento, caso o valor da distribuição etária inicial $x^{(0)}$ e a matriz de Leslie L sejam conhecidos.

3.2.1 O comportamento limite da matriz de Leslie

Apesar da Equação (5) dar a ideia de uma distribuição em qualquer instante de uma faixa etária de idade, não fornece de maneira automática uma noção geral do crescimento

populacional das fêmeas. Sabemos que o polinômio característico é dado pela relação:
 $p(\lambda) = |L - \lambda I|$, ou seja:

$$p\lambda = \det \left[\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{array} \right] - \left(\lambda \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right] \right)$$

$$p\lambda = \det \left[\begin{array}{cccccc} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & b_{n-1} & 0 \end{array} \right]$$

Logo, o polinômio característico $p(\lambda)$ é:

$$p(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \dots - a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}$$

Desse modo, para obter as raízes do polinômio característico $p(\lambda)$ é conveniente introduzir a função:

$$\frac{p(\lambda)}{\lambda^n} = 1 - \left[\frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3} + \dots + \frac{a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda^n} \right]$$

Chamando a expressão dentro do colchete de $q(\lambda)$, temos que:

$$\frac{p(\lambda)}{\lambda^n} = 1 - q(\lambda) \text{ ou } q(\lambda) = -\frac{p(\lambda)}{\lambda^n} + 1$$

Portanto, para a equação característica $p(\lambda) = 0$, $q(\lambda) = 1$ com $\lambda \neq 0$. A Figura 13 apresenta o gráfico dessa função.

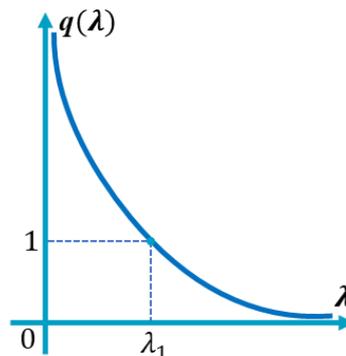


Figura 13 – Gráfico da função $q(\lambda)$.
Fonte: Anton e Rorres (2012).

Conforme verifica-se na Figura 13, a função $q(\lambda)$ é monotonamente decrescente com λ maior que zero, uma vez que os valores de a e b são negativos. Somasse a isso, $q(\lambda)$ apresenta uma assíntota vertical no ponto $\lambda = 0$ e o limite tende para zero quando $\lambda \rightarrow \infty$. Logo, existe um valor único de λ , de modo que $\lambda = \lambda_1$ tal que $q(\lambda_1) = 1$. Desse modo, a matriz de Leslie possui um único autovalor que é positivo.

Sabemos que $Lx_1 = \lambda_1 x_1$, onde x_i é a distribuição da faixa etária futura e λ_1 é o autovalor positivo. Assim, temos que:

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A partir da matriz, podemos montar o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = \lambda_1 x_1 \\ b_1 x_1 = \lambda_1 x_2 \\ b_2 x_2 = \lambda_1 x_3 \\ b_3 x_3 = \lambda_1 x_4 \\ \vdots \\ b_{n-1} x_{n-1} = \lambda_1 x_n \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = \lambda_1 x_1 \\ x_2 = \frac{b_1 x_1}{\lambda_1} \\ x_3 = \frac{b_2 x_2}{\lambda_1} = \frac{b_2 \left(\frac{b_1 x_1}{\lambda_1} \right)}{\lambda_1} = \frac{b_1 b_2 x_1}{\lambda_1^2} \\ x_4 = \frac{b_3 x_3}{\lambda_1} = \frac{b_3 \left(\frac{b_1 b_2 x_1}{\lambda_1^2} \right)}{\lambda_1} = \frac{b_1 b_2 b_3 x_1}{\lambda_1^3} \\ \vdots \\ \lambda_1 x_n = \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1} x_1}{\lambda_1^{n-1}} \end{array} \right.$$

Substituindo os valores na primeira equação e dividindo por x_1 , temos que:

$$\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2 b_1}{\lambda_1^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda_1^3} + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} = 1$$

Portanto, $q(\lambda_1) = 1$, ou seja, λ_1 tem multiplicidade 1, indicando que λ_1 não é uma raiz repetida do polinômio característico. Nesse caso, o autovetor é dado Equação 6:

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{b_1 x_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2 x_1}{\lambda_1^2} \\ \frac{b_1 b_2 b_3 x_1}{\lambda_1^3} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1} x_1}{\lambda_1^{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Nesse caso, λ_1 tem multiplicidade 1 e seu autoespaço é de dimensão 1. Desse modo, qualquer autovetor que é associado a x_1 é múltiplo de x_1 .

Acerca do modelo de Leslie podemos elaborar os Teoremas 13 e 14.

Teorema 13 (Existência de autovalores positivos): Em modelos de crescimento populacional, utilizando a matriz de Leslie L, existe um único autovalor positivo λ_1 . Esse autovalor possui multiplicidade 1 e está associado a um autovetor x_1 cujas entradas são todas positivas.

Teorema 14 (Autovalores de uma matriz de Leslie): Se a matriz de Leslie L possuir um único autovalor positivo λ_1 e dado qualquer outro autovalor λ_k real ou complexo de L, temos que $|\lambda_k| \leq \lambda_1$.

O Teorema 14 somente deveria ser válido para todas as matrizes de Leslie, indicando λ_1 é um autovalor dominante, porém isso nem sempre acontece, como veremos na aplicação 6.

Neste capítulo veremos duas aplicações interessantes da Álgebra Linear: genética e crescimento populacional por faixa etária.

3.1 Álgebra Linear aplicada à genética

De acordo com Anton e Rorres (2012), a Álgebra Linear, a partir do cálculo de potências de uma matriz, pode ser utilizada para investigar a propagação de características herdadas em sucessivas gerações de um indivíduo. Sendo assim, nesta seção estudaremos a Álgebra Linear aplicada à hereditariedade de características de animais ou plantas.

3.1.1 Hereditariedade ultrassônica

Inicialmente, vamos considerar que a característica hereditária seja dominada pelos genes A e a . Assim, por meio da hereditariedade autossômica podemos concluir que cada indivíduo de cada sexo carrega consigo dois desses genes, sendo os prováveis pares: AA , Aa e aa , que são denominados de genótipos e determinam como o caráter controlado por esses genes se manifesta no indivíduo. Para melhor compreensão, podemos citar como exemplo os olhos dos seres humanos, os quais aqueles que têm olhos castanhos possuem o genótipo AA e Aa , já aqueles que têm olhos azuis possuem o aa . Desse modo, A é denominado de gene dominante e a de recessivo. Além disso, a hereditariedade autossômica também está ligada ao sexo, uma vez que o macho da espécie possui somente um dos genes, seja A ou a , enquanto a fêmea tem um dos pares, ou seja, AA , Aa ou aa , disponíveis para combinação.

Na hereditariedade autossômica, um indivíduo recebe um dos genes de cada par de genes dos seus pais e forma o seu próprio par. Assim, os dois genes dos pais que vão ser recebidos pelos filhos estão ligados à probabilidade. Por exemplo, considerando um genitor com genótipo Aa , o descendente vai herdar com a mesma probabilidade o gene A ou a . Já se um dos pais é aa e o outro Aa , o filho irá sempre receber um gene a do genitor aa e herdar, com igual probabilidade, um gene A ou a do genitor Aa . Logo, cada descendente poderá gerar, com iguais chances, um genótipo Aa ou aa , conforme visualizamos na Tabela 8.

Tabela 8 – Probabilidade dos possíveis genótipos dos descendentes e suas combinações.

Genótipo do descendente	Genótipo dos pais					
	$AA-AA$	$AA-Aa$	$AA-aa$	$Aa-Aa$	$Aa-aa$	$aa-aa$
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Fonte: Anton e Rorres (2012).

Aplicação 1 (Distribuição de Genótipos numa população): Suponhamos que um determinado agricultor tenha uma grande população de plantas constituídas de todos os possíveis genótipos: AA , Aa e aa . Sabendo que o agricultor tem a intenção de implementar um programa de criação no qual cada planta da população seja sempre fertilizada pela planta de genótipo AA , podemos deduzir uma expressão para distribuição desses três genótipos depois de um número n de gerações. Sendo assim, como $n = 0, 1, 2, \dots$, temos que:

a_n = representa a fração das plantas de genótipo AA na n ésima geração

b_n = representa a fração das plantas de genótipo Aa na n ésima geração

c_n = representa a fração das plantas de genótipo aa na n ésima geração

Desse modo, a_0, b_0, c_0 , representam a distribuição inicial desses genótipos, de maneira que temos:

$$a_n + b_n + c_n = 1 \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots$$

Pela tabela 8, podemos determinar a distribuição de genótipos em cada geração da planta, por meio da distribuição da geração que precede. Fazemos isso utilizando as seguintes equações:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} \\ b_n &= c_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} \\ c_n &= 0 \end{aligned} \quad \text{com } n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

A partir da primeira equação de (7) podemos concluir que nesse programa, todos os descendentes de uma planta com um genótipo AA serão do genótipo AA , enquanto a metade do genótipo Aa terá genótipo AA . Já na segunda equação de (7), a metade dos descendentes do genótipo Aa será Aa e todos os descendentes aa será Aa . Além disso, por meio da terceira equação de (7) verificamos que não há descendentes do tipo aa . Em linhas gerais, as equações (7) podem ser escritas matricialmente como:

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

em que:

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}, x^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota-se que as três colunas da matriz M são idênticas aquelas obtidas na Tabela 8. Então, encontramos a seguinte equação:

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} = M^2x^{(n-2)} = \dots = M^n x^{(0)} \tag{8}$$

Se encontrarmos uma expressão explícita para M^n , usamos a expressão (8) para encontrar $x^{(n)}$. Sendo assim, para encontrar M^n , primeiro temos que diagonalizar a matriz M , isto é, devemos procurar uma matriz inversa P e uma matriz do tipo diagonal D , de modo que:

$$M = PDP^{-1} \tag{9}$$

Então temos que:

$$M^n = PD^nP^{-1} \text{ com } n = 1, 2, \dots$$

$$\text{onde } D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k^n \end{bmatrix}$$

A diagonalização da matriz M é obtida por meio do cálculo dos autovalores e os autovetores correspondentes. Então, temos que:

$$(M - \lambda I)v = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo a subtração, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desse modo, para encontrar esses autovetores, precisamos determinar os valores de λ que satisfazem a equação $\det(A - \lambda I)v = 0$, isto é,

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Logo, resolvendo o determinante, temos que $\lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda = 0$ e as raízes soluções da equação são: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = \frac{1}{2}$.

De posse desse resultado, podemos encontrar os seus autovetores correspondentes. Para isso, devemos resolver a equação $Av = \lambda v$:

i) Para $\lambda_1 = 0$, $Av = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 - 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1x + \frac{1}{2}y + 0z = 0 \\ 0x + \frac{1}{2}y + 1z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que $y = -2x$ e $z = x$, ou seja, $x(1, -2, 1)$. Portanto, os autovetores associados a $\lambda_1 = 0$ são do tipo $(x, -2x, x)$, os quais pertencem ao subespaço $[(1, -2, 1)]$.

ii) De maneira análoga para $\lambda_2 = 1$, $Av = v$ e seguinte sistema pode ser montado:

$$\begin{cases} 0x + \frac{1}{2}y + 0z = 0 \\ 0x - \frac{1}{2}y + 1z = 0 \\ 0x + 0y - 1z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que $y = 0$ e $z = 0$. Portanto, os autovetores associados a $\lambda_2 = 1$ são do tipo $(x, 0, 0)$, os quais pertencem ao subespaço $[(1, 0, 0)]$.

iii) Já para $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $Av = \frac{1}{2}v$, temos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 1z = 0 \\ 0x + 0y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que $y = -x$ e $z = 0$. Portanto, os autovetores associados a $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ são do tipo $(x, -x, 0)$, os quais pertencem ao subespaço $[(1, -1, 0)]$.

Desse modo, da equação (4), temos que:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Já P é dado por:

$$P = [v_1 | v_2 | v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, temos:

$$x^{(n)} = PD^n P^{-1} x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

Ou ainda:

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 + c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, temos que:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} \\ b_n &= c_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1} \quad \text{com } n = 1, 2, \dots \\ c_n &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Sendo assim, estas são as fórmulas explícitas para a fração dos três genótipos na n -ésima geração de plantas em termos das frações dos genótipos iniciais.

Como $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tende para zero quando n tende para o infinito, temos que:

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow 1 \\ b_n &\rightarrow 0 \\ c_n &= 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, no limite todas as plantas da população do programa de criação serão do genótipo AA.

Aplicação 2 (Modificação da aplicação 1): Supondo que ao invés da planta ser fertilizada com outra do genótipo AA, mas do seu próprio genótipo e sabendo que da mesma maneira da aplicação 1:

a_n = representa a fração das plantas de genótipo AA na enésima geração

b_n = representa a fração das plantas de genótipo Aa na enésima geração

c_n = representa a fração das plantas de genótipo aa na enésima geração

Usando a Tabela 8, temos que cada geração em função da sua geração precedente pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{4}b_{n-1} \\ b_n &= \frac{1}{2}b_{n-1} \\ c_n &= \frac{1}{4}b_{n-1} + c_{n-1} \end{aligned} \quad \text{com } n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Sendo assim, por meio da primeira equação de (10) podemos afirmar que nesse novo programa modificado, todos os descendentes de uma planta com um genótipo AA serão do genótipo AA e um quarto dos descendentes de Aa são do tipo AA. Já na segunda equação de (10), temos que metade dos descendentes do genótipo Aa será do tipo Aa. Além disso, por meio da terceira equação de (10), podemos concluir que a terceira geração de um quarto dos descendentes do genótipo de Aa são do tipo aa e todas as plantas aa originadas do cruzamento serão do mesmo tipo. Matricialmente, temos que:

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}, x^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Verificamos que a matriz M tem as mesmas colunas da Tabela 8. Então, encontramos a seguinte equação:

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} = M^2x^{(n-2)} = \dots = M^n x^{(0)} \quad (11)$$

Logo, os autovalores de M são: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = \frac{1}{2}$. O primeiro autovalor possui uma multiplicidade de dois e seu autoespaço é bidimensional, ou seja, $(x, 0, z)$. Para $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, temos que escolhendo dois autovalores linearmente independentes v_1 e v_2 e um único vetor do tipo v_3 , chegamos a:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Já P e D são dados por:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ e } P = [v_1 | v_2 | v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo assim,

$$x^{(n)} = PD^n P^{-1} x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

Ou ainda:

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] b_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \\ \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] b_0 + c_0 \end{bmatrix}$$

Como $a_n + b_n + c_n = 1$, temos que:

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] b_0 \\ b_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \quad \text{com } n = 1, 2, \dots \\ c_n &= \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] b_0 + c_0 \end{aligned} \tag{12}$$

Desse modo, quando n tende para o infinito, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tende para zero de maneira que:

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow a_0 + \frac{1}{2}b_0 \\ b_n &\rightarrow 0 \\ c_n &\rightarrow c_0 + \frac{1}{2}b_0 \end{aligned}$$

Portanto, fertilizando cada planta do programa de criação com uma de seu próprio genótipo, teremos uma população que, no limite, contém somente plantas AA e aa .

3.1.2 Doenças Recessivas Autossômicas

Há várias doenças genéticas marcadas pela hereditariedade autossômica nas quais um determinado gene do tipo normal A domina um gene do tipo anormal a . Sendo assim, o genótipo AA é um indivíduo considerado normal, ou seja, sem a existência de doença, enquanto aqueles com o genótipo Aa é portador da doença, porém não é afetado por ela e os que são aa possuem a doença. Nos seres humanos, na maioria das vezes essas doenças estão relacionadas a um grupo social específico. Sendo assim, podemos citar como exemplo, a fibrose cística que é uma doença predominante entre a população branca, enquanto a anemia falciforme é predominante no grupo dos negros. Além disso, a talassemia é predominante nas pessoas que possuem origem do Mar Mediterrâneo, enquanto a doença de Tay-Sachs predomina nos judeus europeus ocidentais.

Aplicação 3 (Controle de uma doença recessiva autossômica): Vamos pressupor que um determinado pecuarista tenha uma população animal que possui uma doença recessiva autossômica. Além disso, suponhamos que tais animais doentes não sobrevivem até a maturidade. Desse modo, uma possível solução para o problema é cruzar qualquer fêmea de qualquer genótipo com um macho normal, isto é, que não possui a doença. Assim, caso seja realizado um cruzamento do tipo $AA-AA$, todos os descendentes terão os dois pais normais real ou um macho normal e uma fêmea portadora da doença, se o cruzamento for $AA-Aa$. Vale salientar que não pode ter nenhum cruzamento do tipo $AA-aa$, uma vez que origina animais aa não sobrevivem. Logo, realizando esses cruzamentos não haverá descendentes que sejam portadores da doença, mesmo que ainda tenha animais doentes nas gerações futuras. Podemos escrever isso, em função dos animais doentes nas gerações futuras:

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Onde, nesse problema:

a_n = representa a fração da população de genótipo AA na n ésima geração

b_n = representa a população de genótipo Aa (doentes) na n ésima geração

A partir da Tabela 8, a distribuição de genótipos em função da sua geração precedente é dada pelas equações (13):

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} \\ b_n &= \frac{1}{2}b_{n-1} \end{aligned} \quad \text{com } n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Por meio da primeira equação podemos concluir que todos os descendentes *AA* são do tipo *AA* e a metade daqueles que são *Aa* serão do tipo *AA*. Em linhas gerais, podemos afirmar que cada animal descendente terá um dos genitores normais, de maneira que podemos considerar um cruzamento constante do genótipo *AA*. Em forma de matrizes escrevemos:

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, x^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Então, conhecendo a distribuição inicial $x^{(0)}$, encontramos a seguinte equação:

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} = M^2x^{(n-2)} = \dots = M^n x^{(0)}$$

Realizando a diagonalização da matriz M , encontramos os autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ com os autovalores associados, respectivamente, $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (1, -1)$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

Já P e D são dados por:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ e } P = [v_1 \mid v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sendo assim,

$$x^{(n)} = PD^n P^{-1} x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

Ou ainda:

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \end{bmatrix}$$

Como $a_0 + b_0 = 1$, temos que:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \\ b_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \end{aligned} \quad \text{com } n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Desse modo, quando n tende para o infinito, as frações $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tende para zero de modo que as equações 14 se tornam:

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow 1 \\ b_n &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad 15$$

Notamos que, no limite, não haverá mais animais portadores da doença na população, de modo que a fração de portadores da doença cai em cada nova geração a metade da geração anterior.

3.1.3 Hereditariedade ligada ao sexo

Na hereditariedade relacionada ao sexo, o macho possui apenas um gene, seja A ou a , enquanto a fêmea pode ter dois genes: AA , Aa ou aa . Quando se refere “ligada ao sexo”, é porque esses genes são encontrados no cromossomo X, dos quais o macho tem um e a fêmea tem dois deles. Desse modo, podemos afirmar que um macho recebe um dos dois genes da sua genitora com igual probabilidade, enquanto a fêmea recebe um único gene do seu genitor e um daqueles dois genes da sua genitora com igual probabilidade. Essas probabilidades estão resumidas na Tabela 9.

Tabela 9 – Probabilidade dos possíveis genótipos dos descendentes e suas combinações.

		Genótipo dos pais (pai, mãe)						
		(A, AA)	(A, Aa)	(A, aa)	(a, AA)	(a, Aa)	(a, aa)	
Descendente	Mach	A	1	½	0	1	½	0
		a	0	½	1	0	½	1
	Fêmea	AA	1	½	0	0	0	0
		Aa	0	½	1	1	½	0
		aa	0	0	0	0	½	1

Fonte: Anton e Rorres (2012).

Aplicação 4 (Procriação consanguínea): Nesta aplicação vamos considerar a seleção aleatória de um macho e uma fêmea, ambos descendentes dos mesmos genitores; em seguida selecionamos dois descendentes dessa geração, um de cada sexo, e os cruzamos e assim sucessivamente. A procriação consanguínea é muito utilizada com animais, a fim de manter as características genéticas da espécie. Além disso, esse tipo de procriação foi utilizado pelos egípcios para manter a pureza da família real. Dados os cruzamentos (Tabela 9), o par original do casal macho-fêmea pode ser de um dos seis tipos abaixo:

$$(A, AA), (A, Aa), (A, aa), (a, AA), (a, Aa), (a, aa)$$

Nesse problema, os pares de irmãos utilizados no cruzamento nas n gerações têm uma probabilidade de ser um desses seis tipos. Assim:

a_n = representa a probabilidade de o genótipo ser do tipo (A, AA) na n ésima geração

b_n = representa a probabilidade de o genótipo ser do tipo (A, Aa) na n ésima geração

c_n = representa a probabilidade de o genótipo ser do tipo (A, aa) na n ésima geração

d_n = representa a probabilidade de o genótipo ser do tipo (a, AA) na n ésima geração

e_n = representa a probabilidade de o genótipo ser do tipo (a, Aa) na n ésima geração

f_n = representa a probabilidade de o genótipo ser do tipo (a, aa) na n ésima geração

Essas frações podem ser representadas matricialmente, por meio do vetor coluna:

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A partir da Tabela 1, a distribuição de genótipos em função da sua geração precedente é dada pelas equações (14):

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{4}b_{n-1} \\
 b_n &= \frac{1}{4}b_{n-1} + d_{n-1} + \frac{1}{4}e_{n-1} \\
 c_n &= \frac{1}{4}e_{n-1} \\
 d_n &= \frac{1}{4}b_{n-1} \\
 e_n &= \frac{1}{4}b_{n-1} + c_{n-1} + \frac{1}{4}e_{n-1} \\
 f_n &= \frac{1}{4}e_{n-1} + f_{n-1}
 \end{aligned}
 \quad \text{com } n = 1, 2, \dots \tag{16}$$

Matricialmente podemos escrever:

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \end{bmatrix}, x^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ d_{n-1} \\ e_{n-1} \\ f_{n-1} \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Por suposição, considerando que o par macho-fêmea na $(n - 1)$ -ésima geração seja (A, Aa) . Logo, o descendente macho desse cruzamento irá possuir genótipo A ou a com a mesma probabilidade, enquanto a descendente fêmea pode ser AA ou Aa com a mesma probabilidade. Já que os descendentes serão escolhidos aleatoriamente, o próximo cruzamento será um dos pares de genótipos (A, AA) , (A, Aa) , (a, AA) ou (a, Aa) com igual probabilidade. Por isso, a segunda coluna da matriz M é de $\frac{1}{4}$ para os pares genótipos mencionados.

Então, conhecendo a distribuição inicial $x^{(0)}$, encontramos a seguinte equação:

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} = M^2x^{(n-2)} = \dots = M^n x^{(0)}$$

Realizando a diagonalização da matriz M com o auxílio computacional, encontramos os autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\lambda_4 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_5 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ e $\lambda_6 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5})$ com os autovalores associados, respectivamente:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -3 \\ 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) \\ \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{5}) \end{bmatrix} \text{ e } v_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) \\ \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

Já P , P^{-1} , D e D^n são dados por:

$$P = [v_1 | v_2 | v_3 | v_4 | v_5 | v_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{5}) \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}(5 + \sqrt{5}) & +\frac{1}{5}\sqrt{5} & +\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{20}(5 + \sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}(5 - \sqrt{5}) & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{20}(5 - \sqrt{5}) & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5}) \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left[\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})\right]^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left[\frac{1}{4}(1 - \sqrt{5})\right]^n \end{bmatrix}$$

Sendo assim,

$$x^{(n)} = PD^nP^{-1}x^{(0)}$$

Tomando um vetor específico $x^{(0)}$, formado a partir da distribuição inicial das frações, os cálculos para $x^{(n)}$ não são muito trabalhosos. Como os valores absolutos das últimas quatro entradas na diagonal da matriz D são inferiores a 1, vemos que quando n tende para o infinito:

$$D^n \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, temos que:

$$x^{(n)} \rightarrow P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}x^{(0)} \quad (17)$$

Realizando a multiplicação do lado direito da matriz, obtemos:

$$x^{(n)} \rightarrow \begin{bmatrix} a_0 + \frac{2}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 + \frac{2}{3}d_0 + \frac{1}{3}e_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_0 + \frac{1}{3}b_0 + \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{3}d_0 + \frac{2}{3}e_0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Notamos que, no limite, todos os pares macho-fêmea consanguíneos serão do tipo (A, AA) ou (a, aa) . Sendo assim, um exemplo prático deste problema seria considerar os pais iniciais serem do tipo (A, Aa) , isto significa que $b_0 = 1$ e $a_0 = c_0 = d_0 = e_0 = f_0 = 0$. Desse modo, quando n tender ao infinito:

$$x^{(n)} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Portanto, no limite, há uma chance de $\frac{2}{3}$ dos pares macho-fêmea consanguíneos serem do tipo (A, AA) e uma probabilidade de $\frac{1}{3}$ ser do tipo (a, aa).

3.2 Álgebra Linear aplicada ao crescimento populacional por faixa etária

Uma outra aplicação interessante da Álgebra Linear refere-se ao crescimento populacional por faixa etária. Segundo Anton e Rorres (2012), o modelo matricial de Leslie pode ser utilizado para investigar o crescimento de um determinado gênero da população ao longo do tempo. Em um próximo passo, podemos determinar o limite dessa distribuição etária e da taxa de crescimento populacional.

Aplicação 5 (Distribuição etária de fêmeas em animais): Sabendo que a idade máxima de uma população animal de fêmeas é de 60 anos e sendo essa população dividida em três faixas de idade iguais duração de vinte anos, isto é, [0; 20); [20; 40); [40; 60], considerando que havia, 3.000, 2.000 e 1.000 fêmeas nas respectivas faixas e dada a matriz de Leslie abaixo, qual a quantidade de fêmeas em cada faixa?

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando a equação 1 e sabendo que inicialmente existiam 3.000, 2.000 e 1.000 fêmeas nas respectivas três faixas etárias, temos que:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 3.000 \\ 2.000 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = Lx^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.000 \\ 2.000 \\ 1.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.000 \\ 1.500 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Lx^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11.000 \\ 1.500 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.500 \\ 5.500 \\ 375 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = Lx^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.500 \\ 5.500 \\ 375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23.125 \\ 3.750 \\ 1.375 \end{bmatrix}$$

Portanto, depois de 60 anos há um total de 23.125 fêmeas na faixa de 0 a 20 anos de idade, 3.750 fêmeas na faixa de 20 a 40 anos de idade e 1.375 fêmeas na faixa de 40 a 60 anos de idade.

Aplicação 6 (Uma matriz de Leslie sem autovalor dominante): Dada a matriz de Leslie

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Então o polinômio característico de L é dado por:

$$p\lambda = \det \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 1 \text{ ou } \lambda^3 - 1$$

Logo, os autovalores são as soluções de $\lambda^3 - 1$, isto é,

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

A matriz de Leslie em questão possui todos os autovalores com valor absoluto 1, porém o único autovalor positivo $\lambda_1 = 1$ não é dominante. Além disso, é importante verificar que essa matriz possui propriedade $L^3 = I$, o que significa que dada qualquer escolha da distribuição etária inicial $x^{(0)}$, temos:

$$x^{(0)} = x^{(3)} = x^{(6)} = \dots = x^{(3k)} = \dots$$

o que significa que o vetor de distribuição etária fica oscilando com um período de três unidades de tempo. Essas oscilações são chamadas de ondas populacionais, sendo inviável quando λ_1 for um autovalor dominante, como estudaremos em seguida.

Teorema 15 (Autovalor dominante): Se as duas entradas sucessivas a_i e a_{i+1} da primeira linha da matriz de Leslie possuírem valores diferente de zero, o autovalor positivo da matriz é dominante.

Vamos assumir que a matriz de Leslie L seja diagonalizável. Vale salientar que isso não é necessário, mas resume os cálculos. Realizando essa suposição, L passa a ter n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, não obrigatoriamente diferentes, e n autovetores linearmente independentes

relacionados a x_1, x_2, \dots, x_n . Dentre eles, o autovalor λ_1 é o primeiro. Assim, podemos elaborar uma matriz P de maneira que suas colunas correspondem aos autovetores de L .

$$P = |x_1|x_2|x_3|\dots|x_n|$$

Como L é diagonalizável, isto é, possui uma matriz invertível: $L = PDP^{-1}$, temos que:

$$L = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

Fazendo L^k , encontramos:

$$L^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}, \quad \text{com } k = 1, 2, \dots$$

Para um vetor de distribuição etária inicial $x^{(0)}$ qualquer, temos:

$$L^k x^{(0)} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} x^{(0)}, \quad \text{com } k = 1, 2, \dots$$

Dividindo ambos o lado da equação por λ_1^k e lembrando que $x^{(k)} = L^k x^{(0)}$, encontramos a Equação 20:

$$\frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \end{bmatrix} P^{-1} x^{(0)} \quad (19)$$

Logo, $\lambda_1 = 1$, sendo o valor dominante. Assim, $|\lambda_i/\lambda_1| < 1$ com $i = 2, 3, \dots, n$, ou seja,

$$(\lambda_i/\lambda_1)^k \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty, \quad \text{com } i = 2, 3, \dots, n$$

Sendo assim, aplicando o limite em ambos os lados da Equação 19, temos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} \right\} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} P^{-1} x^{(0)} \quad (20)$$

Reescrevendo a Equação (20), denominando a primeira entrada do vetor coluna $P^{-1}x^{(0)}$ pela constante c , obtemos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} \right\} = c x_1 \quad (21)$$

onde c depende somente do vetor de distribuição etária inicial $x^{(0)}$.

Podemos realizar a seguinte aproximação da Equação (21):

$$x^{(k)} \cong c \lambda_1^k x_1, \quad \text{com grandes valores de } k \quad (22)$$

Além disso, a partir da Equação (21) ainda podemos escrever:

$$x^{(k-1)} \cong c \lambda_1^{k-1} x_1, \quad \text{com grandes valores de } k \quad (23)$$

Finalmente, comparando as Equações (22) e (23), observamos que:

$$x^{(k)} \cong \lambda_1 x^{(k-1)}, \quad \text{com grandes valores de } k \quad (24)$$

Portanto, com os grandes valores de k à medida que o tempo passa, cada vetor da distribuição etária corresponde a um múltiplo escalar do vetor de distribuição que o antecede, sendo um autovalor positivo e dominante da matriz de Leslie. Isso torna a proporção de fêmeas em cada faixa etária constante ao longo do tempo.

Aplicação 7 (Retomando a aplicação 5): Retomando a matriz de Leslie L da aplicação 5, temos que:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico $p(\lambda) = |\lambda - L|$ é dado por:

$$p\lambda = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 4 & 3 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/4 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda - 3/8$$

Para conhecer os autovalores, temos que encontrar as raízes do polinômio característico:

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \quad \lambda_3 = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$$

O único autovalor positivo é $\lambda_1 = \frac{3}{2}$. Logo, usaremos ele para encontrar x_1 , usando a Equação (6):

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2/\lambda_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}/\frac{3}{2} \\ \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)/\left(\frac{3}{2}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/18 \end{bmatrix}$$

Usando a Equação (3), obtemos:

$$x^{(k)} \cong \frac{3}{2} x^{(k-1)}, \quad \text{com grandes valores de } k.$$

Assim, em um período de cinco anos, a população de fêmeas em cada uma das três faixas cresce em 50%. Além disso, conforme a Equação (23), temos:

O autovalor positivo e o autovalor associado é, aproximadamente,

$$\lambda_1 = 1,07622 \text{ e } x_1 = \begin{bmatrix} 1,00000 \\ 0,92594 \\ 0,85881 \\ 0,79641 \\ 0,73800 \\ 0,68364 \\ 0,63281 \\ 0,58482 \\ 0,53897 \\ 0,49429 \end{bmatrix}$$

Desse modo, caso a taxa de natalidade e mortalidade da população fêmea do Canadá permaneçam a mesma de 1965, sua população irá aumentar 7,622% a cada cinco anos. A partir do vetor x_1 , podemos notar que a população de mulheres canadenses ao longo do tempo será de 100.000 mulheres entre 0 e 5 anos de idade, 92.594 mulheres entre os 5 e os 10 anos, 85.881 mulheres entre os 10 e os 15 anos, e assim sucessivamente.

Teremos três casos para o autovalor positivo λ_1 :

- i)* Quando $\lambda_1 > 1$, a população cresce;
- ii)* Quando $\lambda_1 < 1$, a população decresce;
- iii)* Quando $\lambda_1 = 1$, a população se estabiliza.

A terceira situação é interessante, uma vez que determina o m crescimento populacional nulo. Seja qualquer distribuição etária inicial, temos que o crescimento da população de fêmeas tende para um limite, que é um múltiplo qualquer do autovetor x_1 . Sendo assim, $\lambda_1 = 1$, se, e somente se

$$a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} = 1 \quad (25)$$

Assim, a taxa líquida de reprodução da população (R) é dada pela Equação (26):

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} \quad (26)$$

Este trabalho de conclusão de curso teve como objetivo estudar cinco pontos importantes da Álgebra Linear: (i) transformações lineares, (ii) autovetores e autovalores, (iii) diagonalização de uma matriz, (iv) compreensão intuitiva de limites e (v) matriz de Leslie. Todos os conceitos foram estudados a partir de definições, teoremas, corolários, observações e exemplos, que podem ser aplicados à diversas áreas que necessitam de modelagem matemática para explicar algum fenômeno em questão. No entanto, neste trabalho nos limitamos a compreender a genética e o crescimento populacional por faixa etária.

Na primeira aplicação, resolvemos problemas de hereditariedade autossômica, por meio da distribuição dos genótipos numa população qualquer; estudamos ainda casos de doenças recessivas autossômicas e hereditariedade ligada ao sexo. Esses pontos são importantes, caso um determinado pecuarista objetive uma população de animais livre ou com menor número possível de doenças, o que causa menos prejuízo do ponto de vista econômico.

Na segunda aplicação, a matriz de Leslie foi utilizada para explicar o crescimento populacional por faixa etária. Nesse caso, verificamos como podemos obter o número da população de fêmeas, por exemplo, em qualquer faixa de idade ao longo do tempo. Além disso, estudos relacionados à matriz de Leslie sem autovalor dominante também foram realizados, uma vez que nem sempre tal matriz possui um autovalor não dominante. Esse conceito é muito útil para explicar a partir da taxa de natalidade e mortalidade o comportamento populacional. Um estudo interessante, seria utilizar a matriz de Leslie para estimar a população masculina e feminina de João Pessoa-PB em determinado período.

Por fim, podemos observar o quanto os conteúdos matemáticos, especialmente aqueles relacionados à Álgebra Linear, estão presentes no nosso cotidiano. Portanto, essa disciplina não deve ser estudada de maneira isolada, mas de maneira interdisciplinar a partir da utilização de inúmeras aplicações a várias outras áreas de conhecimento.

ANTON, H., RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BACAËR, N. **A short history of mathematical population dynamics**. London: Springer, 2011.

BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I. R., FIGUEIREDO, V. L., WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental: MEC/SEMTEC **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1997.

D'AGOSTIN, I. **Aplicações de álgebra linear**. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2020.

FLEMMING, D. M., GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2008. 200 p

KOZAKEVICH, D. N., BEAN, S. E. P. C. **Álgebra Linear I**. 2. ed. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2011.

LESLIE, P. H. On the use of matrices in certain population mathematics. **Biometrika**, 33(3):183-212, 1945.

PROVDANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2ª ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. 276 p.

SILVA, A. A. **Introdução à Álgebra Linear**. 1. ed. João Pessoa: Editora UFPB, 2007.

SILVA, A. G. F. G. **Matemática aplicada à biologia**. 2016. 134 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.