UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

JOSÉ AUGUSTO LOURENÇO BEZERRA SANTOS

LOGARITMO E EXPONENCIAL: Uma Breve Abordagem Histórica E Suas Aplicações No Ensino Médio.

TAPEROÁ-PB
2023

JOSÉ AUGUSTO LOURENÇO BEZERRA SANTOS

LOGARITMO E EXPONENCIAL: Uma Breve Abordagem Histórica E Suas Aplicações No Ensino Médio.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora do Curso de Licenciatura em Matemática a distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Drª. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

TAPEROÁ-PB

2023

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S237l Santos, José Augusto Lourenço Bezerra.
Logaritmo e exponencial : uma breve abordagem histórica e suas aplicações no ensino médio / José Augusto Lourenço Bezerra Santos. - João Pessoa, 2023.
50 p. : il.

Educação a Distância, UFPB, Polo Taperoá-PB.
Orientação: Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia.
TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Função exponencial. 2. Função logarítmica. 3. Ensino Médio - Documentos oficiais. I. Arancibia, Jacqueline Fabiola Rojas. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

JOSÉ AUGUSTO LOURENÇO BEZERRA SANTOS

LOGARITMO E EXPONENCIAL: Uma Breve Abordagem Histórica E Suas Aplicações No Ensino Médio.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora do Curso de Licenciatura em Matemática a distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.a Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

Aprovado em: 14/06/2023

BANCA EXAMINADORA:

Documento assinado digitalmente
gov.br
JACQUELINE FABIOLA ROJAS ARANCIBIA
Data: 19/06/2023 22:10:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.a Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia (DM-UFPB)

Documento assinado digitalmente
gov.br
FERNANDO ANTONIO XAVIER DE SOUZA
Data: 20/06/2023 13:52:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Fernando Antonio Xavier de Souza (DM-UFPB)

Documento assinado digitalmente
gov.br
SERGIO DE ALBUQUERQUE SOUZA
Data: 20/06/2023 16:21:44-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Sérgio de Albuquerque Souza (DM-UFPB)

Agradecimentos

Hoje, finalmente, chegamos ao fim de uma jornada que foi repleta de desafios, aprendizados e conquistas. É com grande alegria e gratidão em meu coração que escrevo este texto para expressar minha profunda gratidão a todos vocês que estiveram ao meu lado durante toda essa caminhada.

Aos meus familiares, agradeço por serem a base sólida que sustentou meus sonhos e aspirações. Vocês sempre me apoiaram incondicionalmente, me encorajando a perseguir meus objetivos e acreditando em meu potencial. Sei que nem sempre foi fácil para vocês, mas a presença e o amor que sempre me demonstraram foram fundamentais para o meu sucesso. Sou verdadeiramente abençoado por tê-los ao meu lado.

Aos meus amigos, agradeço por compartilharem comigo momentos de alegria, descontração e, é claro, muitas noites de estudo intensivo. Juntos, enfrentamos desafios, superamos obstáculos e celebramos cada pequena vitória. Suas palavras de encorajamento e apoio constante me deram forças para seguir em frente, mesmo nos momentos mais difíceis. Sou grato por cada sorriso compartilhado e cada memória criada.

Aos meus queridos professores, agradeço por serem os guias nessa jornada acadêmica. Suas mentes brilhantes e sua dedicação ao ensino fizeram toda a diferença em minha formação. Vocês compartilharam seus conhecimentos, inspiraram meu crescimento intelectual e me incentivaram a questionar, explorar e buscar respostas. Cada lição aprendida com vocês foi valiosa e certamente fará parte do meu caminho profissional.

A todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para minha jornada acadêmica, sejam colegas de classe, funcionários da instituição de ensino ou qualquer pessoa que cruzou meu caminho, meu mais sincero agradecimento. Cada interação, seja ela pequena ou significativa, deixou uma marca em minha vida e contribuiu para meu desenvolvimento como estudante e como ser humano.

Chegar ao fim deste curso é um marco importante em minha vida, mas sei que esta é apenas uma etapa do meu percurso. O conhecimento adquirido, as habilidades desenvolvidas e as experiências vividas durante esses anos moldaram-me de uma maneira única. Agora, estou preparado para enfrentar os desafios futuros, confiante de que possuo as ferramentas necessárias para construir um futuro brilhante.

RESUMO

O presente trabalho teve como objeto de estudo pesquisar sobre as funções logarítmicas e exponenciais, no que se refere a suas origens, como também a forma em que elas são abordadas no ensino médio. Nessa pesquisa foram utilizados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), as Diretrizes e Orientações nos Documentos Oficiais: Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC), além de alguns livros didáticos onde foi possível analisar como as funções logarítmicas e exponenciais são abordadas no ensino médio, segundo os autores Paiva (2009), Dante (2006) e Giovanni & Bonjorno (2005). De fato, dentre os textos de ensino que utilizamos nessa pesquisa foram analisados os seguintes itens: como cada um apresenta o tema das funções logarítmicas e exponenciais; se esse tópico é apresentado aos alunos com clareza; se o tema é apresentado de forma contextualizada; se os exemplos apresentados pelos autores motivam os alunos a buscar mais informações e aprofundar o conhecimento dessas funções. Além disso, também pesquisamos em exames e competições de matemática tais como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), questões onde a função logarítmica e a função exponencial são cobradas. Onde observamos a importância de ter domínio do conhecimento, correlacionado ao conceito de logaritmos e exponencial, como também a importância de saber aplicar esses conhecimentos, determinado por situações-problemas.

Palavras-chaves: Função exponencial. Função logarítmica. Documentos oficiais. Ensino Médio.

SUMMARY

The present work had as object of study research on the logarithmic and exponential functions, with regard to their origins, as well as the way in which they are approached in high school. In this research, the National Curricular Parameters (PCN), the Guidelines and Orientations in the Official Documents were used: Law of Guidelines and Bases of Education (LDB) and National Common Curricular Base (BNCC), in addition to some textbooks where it was possible to analyze how the Logarithmic and exponential functions are addressed in high school, according to the authors Paiva (2009), Dante (2006) and Giovanni & Bonjorno (2005). In fact, among the teaching texts that we used in this research, the following items were analyzed: how each one presents the theme of logarithmic and exponential functions; whether this topic is clearly presented to students; if the theme is presented in a contextualized way; whether the examples presented by the authors motivate students to seek more information and deepen their knowledge of these functions. In addition, we also research in mathematics exams and competitions such as the National High School Examination (ENEM) and the Brazilian Public School Mathematics Olympics (OBMEP), questions where the logarithmic function and the exponential function are charged. Where we observe the importance of having mastery of knowledge, correlated to the concept of logarithms and exponential, as well as the importance of knowing how to apply this knowledge, determined by problem situations.

Keywords: Exponential function. Logarithmic function. Official documents. High school.

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista Siglas

CNE: Conselho Nacional de Educação.

DCN: Diretrizes Curriculares Nacionais.

EEEF: Escola Estadual de Ensino Fundamental.

EEEFM: Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio.

EJA. Educação de Jovens e Adultos.

FIES: Fundo de Financiamento Estudantil.

ENEM: Exame Nacional do Ensino Médio.

FNDE: Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação.

IMC: Olimpíada Internacional de Matemática para Alunos do Ensino Médio.

IMO: Olímpiada de Internacional de Matemática.

INEP: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

LDB: Lei de Diretrizes Nacionais da Educação.

MEC: Ministério da Educação.

MMS: Escala de Magnitude de Momento.

OMT: Organização Mundial do Turismo.

OBM: Olimpíada Brasileira de Matemática.

OBMEP: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

OIAM: Olimpíada Ibero-Americana de Matemática.

PCNEM: Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.

PCN: ParâmetrosCurriculares Nacionais.

PNLEM: Programa Nacional Do Livro Didático para o Ensino Médio.

ProUni: Programa Universidade para Todos.

SISU: Sistema de Seleção Unificada.

SUMÁRIO

1 MEMORIAL.

Me chamo José Augusto Lourenço Bezerra Santos, tenho 27 anos, nasci no dia 19 de março de 1995 na cidade de Campina Grande-PB, mas sempre morei na cidade de Taperoá-PB. Sou filho da professora Maria Rosemilda Lourenço Bezerra Santos e do pedreiro e agricultor Wanderley Rodrigues dos Santos.

1.1 Histórico de formação escolar.

Durante os primeiros anos do ensino fundamental (1° ao 5° ano), estudei em alguns colégios da minha cidade. O 1° ano foi na Escola João Ribeiro de Farias, localizada no bairro São Francisco em Taperoá-PB. A escola contava com quatro salas de aula, dois banheiros, um pátio e uma cantina. No entanto, minha experiência não foi muito boa, pois o ensino na escola não era exigente, o que me causou muitas dificuldades em matemática básica e leitura. Do 2° ao 4° ano, estudei na EEEF E EJA Felix Daltro, onde o ensino era um pouco melhor. A escola tinha uma estrutura física mais ampla, com várias salas de aula e um corpo docente excelente. No 5° ano, retornei à Escola João Ribeiro de Farias para concluir os primeiros anos do ensino fundamental.

Os 6° e 7° anos foram cursados na EEEFM E EJA Melquíades Vilar, que atualmente é Escola Cidadã Integral Melquíades Vilar. Tive muitas dificuldades por não ter recebido uma boa formação nos anos anteriores, chegando a reprovar em matemática no 7° ano. A metodologia de ensino do professor era expositiva e dialogada, sempre enfatizando os exercícios propostos em sala. Os 7°, 8° e 9° anos foram na nova escola EMEF Manoel de Farias Souza, com uma nova professora de matemática e uma abordagem de ensino diferente. Comecei a enxergar a matemática com outros olhos e passei a gostar cada dia mais da disciplina. No 9° ano, decidi abandonar os estudos. Retornei ao Melquíades Vilar, mas agora para cursar o EJA.

Os 1°, 2° e 3° anos do ensino médio foram cursados na modalidade EJA na Escola Melquíades Vilar. Apesar de ter uma carga horária reduzida, os professores sempre buscavam transmitir o conteúdo de forma abrangente, para que os alunos não fossem prejudicados. O planejamento bem estruturado evitava lacunas no aprendizado. Posso dizer com convicção que essa foi uma das melhores épocas da minha vida, pois foi quando a matemática se tornou uma matéria de fácil compreensão para mim. Eu ajudava todos os meus colegas de sala, pois um aluno que não gostava de matemática acabou gostando e compartilhando seus conhecimentos.

1.2 Histórico da formação universitária.

No ano de 2012, concluí o ensino médio na modalidade Eja. Fiz o ENEM em 2013 e em 2014.2 consegui uma bolsa no Fies para o curso de engenharia mecânica. Infelizmente, não concluí o curso e cursei apenas dois anos e meio. Muitos problemas e dificuldades levaram à desmotivação. Saía de casa às 14h30, pegava o ônibus e passava mais duas horas viajando até a cidade de Campina Grande. Chegava em casa às 00h30, todos os dias.

Em 2018, fiz a prova do ENEM novamente, porém a nota de corte não foi alcançada para entrar no curso que eu desejava. No finalzinho de 2018, abriram cursos de Ensino a Distância (EAD) no polo Monsenhor Manoel Vieira, na minha cidade, Taperoá. Esses cursos eram oferecidos pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB).

Inicialmente, pensei em cursar administração. No entanto, como sempre gostei de cálculo e já tinha noção de como seria, pois já cursei engenharia, optei pela Licenciatura em Matemática. No início, fiquei em dúvida por ser licenciatura. Mas, estou na reta final do meu curso.

No início do curso, foi muito complicado, algo novo, um recomeço, pois tinha ficado muitos anos parado. Lembro que na primeira atividade, quis desistir do curso. Sempre tive o pensamento de que "o curso a distância é muito fácil", mas, na verdade, não é. Requer muito estudo, persistência, determinação e vontade de aprender.

No primeiro período, não foi fácil se adaptar ao ensino a distância, pois estudava sozinho e não conseguia entender o que os professores queriam. Mas, com o tempo, veio a adaptação e a interação com os colegas e professores, que não tinha no primeiro período. Acho que isso foi o que dificultou no começo do curso.

Mas, com tudo isso, estou muito feliz por estar no processo final do curso. Sei que tudo o que tive que passar foi necessário e importante para minha formação como docente. Foi através dessas dificuldades e aprendizagem de cada disciplina e dos mestres do curso de Licenciatura em Matemática que aprendi a nunca desistir de ser alguém melhor.

1.3 Experiência como docente.

No presente momento, estou atuando como docente na Escola Dr. Adonias De Queiroz Melo do município de Taperoá-PB. Minha experiência como docente tem sido enriquecedora e desafiadora. Desde que iniciei minha carreira como professor, tenho tido a oportunidade de compartilhar meus conhecimentos. Cada dia na sala de aula traz novos desafios, mas também recompensas significativas.

2 INTRODUÇÃO.

O presente trabalho tem como objetivo analisar o ensino das funções logarítmicas e exponenciais no ensino médio. Mais especificamente, o foco deste trabalho é compreender um pouco sobre cada uma dessas funções e a sua importância no processo de ensino-aprendizagem para alunos do ensino médio.

Para o trabalho a foram utilizados alguns livros didáticos, onde podemos verificar como a abordagem do tema em questão é apresentado para os alunos, segundo os autores Paiva (2009); Dante (2006) e Giovanni & Bonjorno (2005).

No decorrer do trabalho, será exibido um pouco das origens das funções logarítmicas e exponenciais, mais precisamente como surgiram e os matemáticos que contribuíram no estudo dessas funções ao longo da história.

Exploraremos como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Diretrizes e Orientações nos Documentos Oficiais, tais como LDB tratam as funções logarítmicas e exponenciais e no ensino médio.

Será realizado um levantamento em exames e competições de matemática, tais como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), sobre questões onde as funções logarítmicas e exponenciais são cobradas.

2.1 Problematização.

Como o ensino das funções logarítmicas e exponenciais são abordadas no Ensino Médio? A apresentação do tema é contextualizada? É apresentada de forma clara? Os exemplos apresentados em textos didáticos motivam os alunos a buscar mais informações e aprofundar o conhecimento dessas funções?

2.2 Objetivo geral.

A abordagem do ensino-aprendizagem das funções logarítmicas e exponenciais no ensino médio.

2.3 Objetivo específicos.

- Realizar uma pesquisa histórica sobre as funções logarítmicas e exponenciais.
- Estudar como os documentos oficiais abordam as funções logarítmicas e exponenciais.
- Investigar como alguns livros didáticos apresentam o tema função logarítmica e função exponencial com foco no processo de ensino-aprendizagem no ensino médio.
- Pesquisar em exames e competições de matemática tais como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), questões onde a função logarítmica e função exponencial são cobradas.

2.4 Referencial teórico.

O objetivo dessa pesquisa é analisar é compreender um pouco sobre as funções logarítmicas e exponenciais no ensino médio. Nesse trabalho pesquisaremos sobre as origens, definições e aplicações de cada uma dessas funções.

Para tal pesquisa foram utilizados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), as Diretrizes e Orientações nos Documentos Oficiais: LDB, BNCC, e os livros didáticos dos autores Paiva (2009), Dante (2006) e Giovanni & Bonjorno (2005). Onde foi possível analisar como as funções logarítmicas e exponenciais são abordadas no ensino médio.

3 SOBRE AS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS.

O foco deste capítulo é apresentar as funções logarítmicas e exponenciais no que se refere a suas origens e conceitualização matemática.

3.1 Origem da função logarítmica.

De acordo com Silva (2016), durante o desenvolvimento da civilização e transformação humana, foi possível criar e aperfeiçoar o pensamento científico que conduziu a evolução de diversas áreas do conhecimento, facilitando o entendimento da complexidade em que a tecnologia e a ciência atuam nos dias de hoje. Portanto, é fundamental destacar que nos diversos trabalhos teóricos presentes há milhares de anos nas civilizações antigas (árabes, babilônios, chineses, egípcios, fenícios, gregos, hindus, judeus, maias, romanos e sumérios...), inspiram a descoberta e a formalização de conceitos que se tornam mais precisos apenas a partir do século XV ou XVI. De fato, muitos dos conceitos que intervém na definição das funções logarítmicas e exponenciais começaram a ser desenvolvidos por matemáticos gregos tais como Euclides e Arquimedes (em torno do século III a.C.). Assim, as origens dos conceitos modernos das funções logarítmicas e exponenciais, objetos centrais deste estudo, se remontam há 4000 a.C.

Nessa época, os babilônios tinham domínio em técnicas para resolução de cálculos que envolviam volume, áreas, superfícies, peso e capacidade. Consequentemente foram pioneiros a exibirem métodos e técnicas que impactaram na origem dos logaritmos, utilizando o sistema sexagesimal para desenvolvimento de todos os cálculos.

O termo "log" forma abreviada de logaritmo, do grego, "logos" = razão, e "arithmos" = número, ou "número de razão" foi introduzido pelo matemático escocês John Napier no início do século XVII. Napier criou os logaritmos como uma maneira de simplificar cálculos matemáticos complexos, especialmente na área de trigonometria. Os logaritmos foram utilizados extensivamente na ciência e na engenharia durante os séculos XVII e XVIII, mas sua utilização era limitada pela falta de tabelas de logaritmos precisas e confiáveis.

Figura 1: John Napier (1550 – 1617).

Fonte: John Napier – Wikipédia, enciclopédia livre

A Figura 2 apresenta a imagem de duas páginas da tabela logarítmica.

Figura 2: Imagem de uma Tabela logarítmica

Fonte: SlidePlayer

Napier publicou suas descobertas no livro "Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio" (Descrição do Maravilhoso Cânon dos Logaritmos) em 1614 (Figura 3), e os logaritmos foram amplamente adotados na comunidade científica e tecnológica, já que simplificavam significativamente o cálculo de grandes números. Eles também tornaram possível o desenvolvimento de instrumentos como o cálculo logarítmico, o que revolucionou a navegação e a astronomia.

Figura 3: Capa do livro "Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio”


MIRIFICI

Logarithmorum
Canonis descriptio,

Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,

Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.

EDINBURGI,
Ex officina ANDREÆ HART

Fonte: Wikipédia

3.2 Sobre as origens do número de Euler.

O número de Euler, representado pela letra "e", é um número irracional que possui um valor aproximado de $2{,}71828$ ... Esse número foi descoberto pelo matemático suíço Leonhard Euler (Figura 4) no século XVIII, mas sua origem remonta a um problema matemático que foi estudado por vários matemáticos ao longo dos séculos. Segundo Maor (2008a, p. 45) “Não sabemos quem primeiro notou o comportamento peculiar da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, à medida que n tende ao infinito, por isso, a data exata do nascimento do número que mais tarde seria denotado por e permanece obscura”.

Leonhard Euler (1707-1783) foi um matemático, físico e engenheiro suíço que fez contribuições significativas para muitos campos da matemática e da ciência. Ele é amplamente considerado como um dos maiores matemáticos de todos os tempos e é conhecido por sua produção prolífica de artigos de pesquisa e livros.

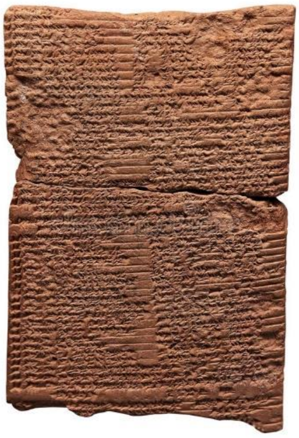
Figura 4: Leonhard Euler (1707-1783)

Fonte: Wikipedia

O problema em questão era o seguinte: imagine que você tem um investimento que rende juros compostos continuamente. Em outras palavras, o dinheiro investido e reinvestido continuamente a uma taxa constante de juros. A questão era determinar qual seria o valor final do investimento após um determinado período de tempo.

Assim, o número "e" foi implicitamente conhecido pelos povos antigos por meio de problemas práticos estudado durante séculos. Na Figura 5 exibimos uma imagem de uma tabuleta de argila da Mesopotâmia, que hoje se encontra no museu do Louvre em Paris, datada de 1700 a.C., onde constam diversos tópicos, por exemplo, transações comerciais e registros contábeis, entre outros.

Figura 5: Imagem de uma tabuleta de argila da Mesopotâmia (1700 a.C)



Fonte: Tabuleta de argila com escrita Cuneiforme Foto de Stock - Imagem de argila, cuneiforme: 31947190

O matemático escocês John Napier, inventor dos logaritmos, já havia descoberto uma fórmula para calcular o valor final de um investimento com juros compostos, mas essa fórmula só era aplicável a investimentos com juros compostos discretos, ou seja, investimentos em que os juros são calculados em intervalos fixos de tempo.

O matemático holandês Jacob Bernoulli (Figura 6) foi o primeiro a tentar resolver o problema dos juros compostos contínuos. Ele percebeu que o valor final do investimento seria dado por uma exponencial, mas não sabia qual seria a base dessa exponencial. Seu irmão, Johann Bernoulli (Figura 7), continuou seus estudos e descobriu que a base da exponencial seria o número de Euler, ou seja, e.

Jacob Bernoulli (1655-1705) foi um matemático suíço que, junto com seu irmão Johann Bernoulli, fez contribuições significativas para o desenvolvimento do cálculo e da teoria da probabilidade.

Figura 6: Jacob Bernoulli (1655-1705)

Fonte: Matemática e Cia.

Figura 7: Johann Bernoulli (1667 – 1748)

Fonte: Johann Bernoulli – EcuRede

Assim, a descoberta do número de Euler foi um importante avanço na matemática financeira e é utilizado até hoje em cálculos de juros compostos contínuos, além de ter aplicações em outras áreas da matemática, como cálculo diferencial e equações diferenciais.

3.3 Relação entre a função exponencial e a função logarítmica.

A função exponencial é definida como $f(x) = a^x$, onde "a" é um número real positivo diferente de 1 fixado, denominado de base da função exponencial e "x" pode assumir qualquer valor real e é denominado expoente. A função logarítmica é a função inversa da exponencial e é escrita como $log_a(y)$, onde "a" é a base do logaritmo e "y" é o valor do logaritmando, que só pode assumir valores reais positivos.

A relação fundamental entre a função exponencial e a função logarítmica é expressa na seguinte equação:

$$log_a(a^x) = x.$$

Essa equação nos diz que o logaritmo em base "a" de uma exponencial de base "a" é igual ao expoente "x" da potência "a^x". Por exemplo, $log_2(8) = 3$, porque 2 elevado a 3 é igual a 8, logo o logaritmo de 8 na base 2 é igual a 3.

De forma geral:

$$log_a x = y \leftrightarrow a^y = x.$$

Temos também o logaritmo na base e,ou seja, $log_a x$ denotado por $ln(x)$ e denominado logaritmo natural que é a função matemática inversa da função exponencial com base o número de Euler e.

Segue da forma geral que, o logaritmo natural é definido da seguinte forma:

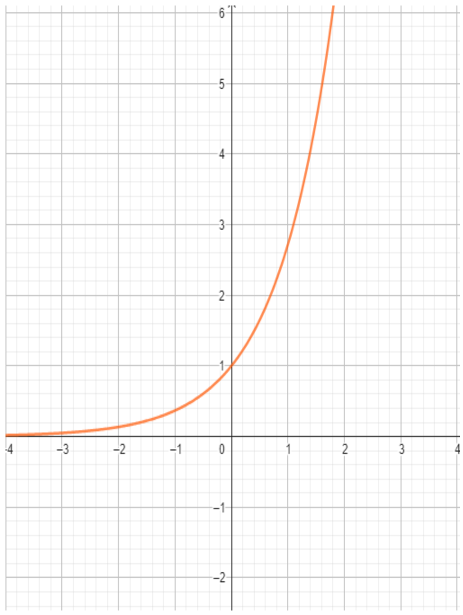
$$ln(x) = y \text{ se e somente se, } e^y = x.$$

Por exemplo, o logaritmo natural de e é igual a 1, pois $e^1 = e$. Da mesma forma, o logaritmo natural de 1 é igual a 0, pois $e^0 = 1$.

Essa relação é muito útil na resolução de problemas matemáticos que envolvem exponenciais e logaritmos, pois permite transformar uma equação exponencial em uma equação logarítmica e vice-versa, facilitando assim a sua resolução. Além disso, a relação entre exponenciais e logaritmos é fundamental em muitas áreas da ciência, como na física, na química e na engenharia.

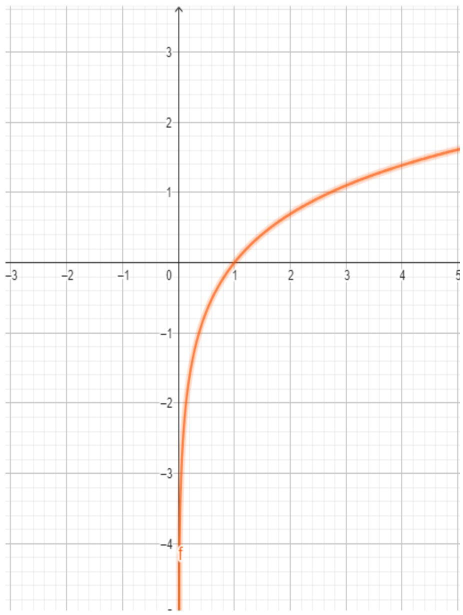
Concluímos está seção com os gráficos da função exponencial em base e e função logaritmo natural.

Figura 8: Gráfico da função exponencial $f(x) = e^x$



Fonte: Autor (2023)

Figura 9: Gráfico da função $f(x) = \ln(x)$



Fonte: Autor (2023)

Vale salientar que o logaritmo natural tem várias propriedades úteis em matemática e ciências, sendo frequentemente utilizado em cálculos envolvendo crescimento e decrescimento exponencial, cálculo diferencial e integral, e modelagem de fenômenos naturais.

4. SOBRE A CONCEPÇÃO DO ENSINO MÉDIO EM DOCUMENTOS OFICIAIS.

Como o propósito do tema é discutir e analisar o ensino das funções logarítmicas e exponenciais, um dos conteúdos discutidos no Ensino Médio, nesse tópico será realizada uma pesquisa a respeito dos documentos oficiais que orientam o ofício docente a ser executado nesta etapa de ensino.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), o Ensino Médio é a etapa final da educação básica com duração mínima de três anos, que tem por finalidade: Consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no ensino fundamental para possibilitar a continuidade aprendizagem, preparação básica para o mercado de trabalho e cidadania, para que possa continuar a aprender, poder adaptar-se facilmente a novas condições de trabalho ou melhorar, à medida que a pessoa melhora na formação moral, à medida que se desenvolve a sua autonomia intelectual e pensamento crítico e compreensão das bases científicas e tecnológicas relevantes para a teoria e prática no ensino de diferentes disciplinas (BRASIL, 1996).

O Ensino Médio, ao ser instituído como última etapa da Educação Básica, tem objetivo de complementar e aprofundar o aprendizado iniciado no Ensino Fundamental, dessa maneira a LDB/96 determina que o currículo dessa etapa consista de alguns pressupostos:

> I - destacará a educação tecnológica básica, a compreensão do significado da ciência, das letras e das artes; o processo histórico de transformação da sociedade e da cultura; a língua portuguesa como instrumento de comunicação, acesso ao conhecimento e exercício da cidadania;
> II - adotará metodologias de ensino e de avaliação que estimulem a iniciativa dos estudantes;
> III - será incluída uma língua estrangeira moderna, como disciplina obrigatória, escolhida pela comunidade escolar, e uma segunda, em caráter optativo, dentro das disponibilidades da instituição (BRASIL, 1996).

As Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio apresentam uma educação voltada para a promoção de valores, destacando que o atual marco legal financiado pela LDB/96 representa um divisor de águas na construção da identidade do ensino médio, com dois propósitos fundamentais, o primeiro afirmando que a finalidade do ensino médio é valorizar o aluno como pessoa, em sua formação moral, facilitar o desenvolvimento de sua autonomia intelectual, seu senso crítico, sua preparação para o mundo do trabalho e o desenvolvimento de novas competências para o mercado de trabalho.

O segundo proposito trata da organização curricular e inclui os seguintes componentes: uma base curricular nacional comum, que cada escola complementa de acordo com suas especificidades regionais e locais, sociais, culturais e econômicas; interdisciplinaridade; governança democrática, quando os professores participam ativamente do desenvolvimento de normas comuns e recomendações pedagógicas das instituições (BRASIL, 2006).

Cabe ressaltar que o grande avanço contido nessas diretrizes é que o trabalho da escola pode ser organizado com base na gestão democrática e no trabalho coletivo de acordo com as características da escola e da realidade local.

Como pode ser visto acima, a definição de tais propósitos no ensino médio sugere que a educação não pode se limitar ao ensino de disciplinas isoladas, mas deve incluir uma ampla gama de competências e habilidades a serem desenvolvidas em todas as disciplinas.

4.1 Diretrizes e orientações sobre matemática no Ensino Médio nos documentos oficiais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) são documentos normativos que orientam as políticas educacionais no Brasil.

Os PCNEM são um conjunto de diretrizes curriculares nacionais elaboradas pelo Ministério da Educação (MEC) em 1999. Eles foram criados com o objetivo de fornecer orientações para as escolas de ensino médio de todo o país sobre o que deve ser ensinado em cada disciplina, além de sugerir estratégias para a organização do currículo escolar. Os PCNEM são referências para a elaboração de propostas curriculares pelas redes estaduais e municipais de ensino.

As Diretrizes Curriculares Nacionais, por sua vez, são orientações gerais para a elaboração e implementação dos currículos de cada nível e modalidade de ensino no Brasil. Elas são elaboradas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) e têm caráter obrigatório para todas as escolas públicas e particulares do país. As DCN abrangem desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, e estabelecem as competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada fase da educação básica.

As duas normativas são importantes para garantir a qualidade da educação oferecida no país, promovendo a equidade e a melhoria do ensino. Os PCNEM fornecem uma orientação mais específica para o Ensino Médio, enquanto as DCN estabelecem diretrizes gerais que orientam a educação básica em todas as suas etapas.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) identificam a importância da matemática para os discentes do ensino médio. Tendo como proposta apresentar aos professores as habilidades e competências que os discentes devem ter no ensino médio, transformando a matemática uma disciplina que tenha um caráter formativo na qualificação dos discentes e na preparação para a vida adulta em sociedade.

De acordo com os PCN (1999, p. 40) encontra-se a importância do professor considerar a matemática como uma ciência aplicada ao cotidiano dos alunos, conforme mostra a passagem a seguir:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas especificas em quase todas as atividades humanas.
> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e cientifica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

No ensino médio o estudo das funções é considerado um dos conteúdos mais importantes na qual os discentes devem se empenhar em compreender. Conforme escrito no PCN (1999, p. 43), há o destaque que esse conteúdo deve possuir no decorrer do planejamento pedagógico do professor.

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construções de gráficos, o comportamento de certos fenómenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2002).

Isso demonstra que os docentes sejam capazes de desenvolver atividades que apresente aos os discentes a concepção de função nos diversos campos do conhecimento.

A importância da aprendizagem deste conceito reside na capacidade dos alunos para investigar, modelar e explicar problemas que surgem na sua vida diária ou profissional.

Em PCN (2002, p. 121) observa-se que o estudo proposto de funções deve capacitar os alunos a dominar a linguagem da álgebra como a linguagem da ciência, que é necessária para expressar relações entre magnitudes e modelar situações problemáticas, para construir modelos descritivos de fenômenos e para permitir várias conexões dentro e fora do domínio da própria matemática. O artigo também sugere que projetos para ensinar isso poderiam partir diretamente do conceito de uma função que descreve uma dependência entre duas grandezas, permitindo aprender a partir de situações contextualizadas descritas graficamente ou algebricamente.

Segundo Silva (2016) é notório a importância das aplicações de problemas, na qual serão apresentados diversos contextos para o estudo das funções, com o objetivo de estimular a aprendizagem dos alunos já no início dos estudos. Com a considerável quantidade de situações incluindo funções, possibilita que o estudo desse conteúdo seja associado com exemplos do cotidiano, como também as representações que a mídia e outros campos de conhecimentos manuseia para descrever acontecimentos de dependência entre grandezas.

Partindo do pressuposto da utilização de problemas de modelagem sirvam de estímulos na aprendizagem dos discentes. Segundo o PCN (2002, p. 121), há um trecho no texto que enfatiza as características interdisciplinares das funções logarítmicas e exponenciais e, e deixa um pouco de lado a natureza e as habilidades operacionais, que se impossibilita no fato do docente estudar com mais profundidade os problemas abordados

> O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas As funções exponenciais e logarítmicas, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandeza em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substancias e outras. A resolução de equações logarítmicas e exponenciais e o estudo das propriedades de características e mantissas podem ter sua ênfase diminuída e, até mesmo podem ser suprimidas.

Observe na citação acima do PCN que não é necessário que o docente enfatize todas as propriedades e características pertinentes ao estudo das funções logarítmicas e exponenciais e, pois ao priorizar a exploração de determinado assunto, o professor poderá explorar de forma satisfatória todas as possibilidades para satisfazer os alunos, evitando nomear e detalhar excessivamente os conteúdos.

Outro ponto de levar em consideração é o auto-questionamento do professor, ao propor um novo assunto em sala de aula, por exemplo: Como posso saber se meus alunos realmente aprenderam esse conteúdo? Será que isso é realmente necessário? Qual a utilidade desse assunto para a vida dos meus alunos?

As questões levantadas no parágrafo anterior são relevantes ao se investigar a possibilidade de uma nova abordagem na educação matemática, pois leva os professores a “secar” um pouco do conteúdo a ser abordado em sala de aula. Isso pode reduzir a carga de conteúdo para trabalhar e melhorar qualitativamente a abordagem de tópicos centrais em matemática do ensino médio

Segundo PCN (2002 p. 120) esse questionamento feito pelo professor é válido e pode justificar o sucesso ou insucesso de seus alunos na aprendizagem de determinado conteúdo:

> Por exemplo, se o único caso de funções inversas que os alunos verão no ensino médio forem as funções exponenciais e logarítmicas, não há necessidade de todo o estudo sobre funções injetoras, sobrejetoras e inversíveis, assim como se o foco do estudo estiver na análise de gráficos e nas aplicações da função logarítmica, podemos questionar por que estudar cologaritmos, característica e mantissa.

Um ponto de vista considerado interessante nas diretrizes é que se a importância dos logaritmos não for claramente enunciada aos alunos, nas adversidades tecnológicas e de outras ciências, todo o aprendizado envolvido perde o contexto para expressar a magnitude de sua variação como exponencial. Tudo isso reforça o projeto do trabalho desenvolvido e aplicada neste estudo, que antepõe a importância do estudo da função logarítmica e da função exponencial e em termos de sua aplicação no ensino médio.

5. FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS EM TEXTOS UTILIZADOS NO ENSINO MÉDIO.

As funções logarítmicas e exponenciais são conceitos importantes estudados no ensino médio, especialmente em matemática e nas ciências. Elas são usadas para modelar uma ampla variedade de fenômenos do mundo real e têm aplicações em áreas como economia, biologia, física e engenharia.

Aqui estão algumas maneiras como as funções logarítmicas e exponenciais são aplicadas no ensino médio:

- Matemática: As funções logarítmicas e exponenciais são estudadas na álgebra, onde os alunos aprendem sobre suas propriedades, gráficos e operações. As equações exponenciais e logarítmicas são resolvidas usando as propriedades dessas funções, e os estudantes aprendem a aplicar essas propriedades em problemas do mundo real, como crescimento populacional, decaimento radioativo e juros compostos.
- Ciências: As funções logarítmicas e exponenciais são frequentemente usadas em disciplinas científicas como biologia, química e física. Por exemplo, em biologia, a função exponencial pode ser usada para modelar o crescimento populacional de uma espécie, a taxa de decaimento de uma substância química pode ser modelada usando uma função logarítmica, e a absorção de radiação pode ser descrita usando função exponencial.
- Economia: As funções logarítmicas e exponenciais também são aplicadas em economia, especialmente em tópicos relacionados a juros compostos, inflação, crescimento econômico e investimentos. Os estudantes podem usar essas funções para entender como uma quantia de dinheiro cresce ou diminui ao longo do tempo e como as taxas de juros afetam os investimentos e empréstimos.
- Estatística: A função logarítmica é usada em estatística para transformar dados que estão em escalas diferentes ou para reduzir a variabilidade dos dados. Os estudantes podem aprender a aplicar funções logarítmicas em análises estatísticas, como a regressão logarítmica, que é usada para modelar relações não lineares entre variáveis.
- Tecnologia: As funções logarítmicas e exponenciais têm aplicações em tecnologia, como na modelagem de algoritmos de busca na internet, na compressão de dados e na análise de crescimento de redes sociais. Os estudantes podem aprender como essas funções são usadas em contextos tecnológicos e como elas afetam nossa vida cotidiana.

Naturalmente essas são apenas algumas das muitas maneiras como as funções logarítmicas e exponenciais são aplicadas no ensino médio.

5.1 Como as funções logarítmicas e exponenciais são abordadas no ensino médio de acordo com alguns livros didáticos.

Baseando-se nas orientações dos parâmetros curriculares nacionais para o ensino das funções logarítmicas e exponenciais, investigaremos e avaliaremos 4 livros didáticos que geralmente são utilizados no ensino médio.

- Matemática, 1^a série, Dante (2006)
- Matemática, 2^a série, Dante (2006)
- Matemática, Volume 1, Paiva (2009)
- Matemática Completa, 1^a série do ensino médio, Giovanni & Bonjorno (2005)

5.2 Estudo das funções logarítmicas e exponenciais.

Conforme o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) os livros aqui citados foram aprovados, e fazem parte das diretrizes recomendadas pelo o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE).

Dentre as quatro obras analisadas o texto de Paiva (2009) foi a única que apresentou o conteúdo funções na perspectiva almejada na pesquisa, ou seja, por meio da relação real entre grandezas denominadas de funções. O mesmo apresenta o conceito da relação entre grandezas de forma intuitiva, proporcionando ao discente compreender apropriadamente o conteúdo. Analisando e comparando com as ideias apresentada por Giovanni & Bonjorno (2005), observamos que a obra de Paiva (2009) é apropriadamente contextualizada, assim proporcionando ao discente uma forma mais compreensiva em relação ao conceito de função na matemática, estudada como relação entre duas grandezas.

De acordo com Silva (2012).

> Muitas vezes nos deparamos com situações que envolvem uma relação entre grandezas. Assim, o valor a ser pago na conta de luz de sua casa depende do consumo medido no período, o tempo de uma viagem de automóvel entre duas cidades depende da velocidade média desenvolvida no trajeto. Quando uma indústria lança um produto no mercado, para fixar o preço desse produto ela tem que levar em conta os custos para a sua produção e distribuição, que dependem de diversos fatores, entre eles as despesas com energia, aluguel de prédio, custos das matérias-primas e salários. Como esses custos podem variar, a indústria tem que estar "equacionando" essas variáveis para compor o preço do seu produto.

> Podemos utilizar a linguagem matemática para representar essas situações de dependência entre duas ou mais grandezas. (Giovanni e Bonjorno, 2005, p. 104).
> Usamos as medidas para indicar o comprimento de uma corda, a velocidade de um automóvel, a temperatura de uma região, a profundidade de um rio etc. Toda característica que pode ser expressa por uma medida é chamada de grandeza. São exemplos de grandeza: comprimento, área, volume, velocidade, pressão, temperatura, profundidade, tempo, massa e vazão. A variação da medida de uma grandeza associada a um objeto dependente da variação das medidas de outras grandezas, por exemplo: o crescimento de uma planta depende do tempo, a taxa de evaporação das águas de um rio depende da temperatura, a pressão no mar depende da profundidade. Para estudar essas dependências, podemos recorrer a equações matemáticas que relacionem as grandezas envolvidas. (Paiva, 2009. p. 83).

Comparando as ideias dos autores citados acima, é notória a diferença que há entre ambas. Observa-se que em Giovanni & Bonjorno (2005), a ideia de dependência entre grandezas é passada para os alunos de forma confusa, pois não há exemplos que mostre aos alunos o que pode ser uma grandeza. Na qual os autores não apresentam o conceito de uma grandeza para os alunos, pois o que é apresentado é o nível da relação que teoricamente exista entre grandezas. De acordo com Paiva (2009) a introdução do conteúdo é apresentada por uma perspectiva sequencial para a concepção, mencionando que o estudo da variação das grandezas e suas dependências determinam a proposta das funções na matemática.

Na obra de Dante (2006) versão para a 1^a série do ensino médio, na introdução ao conteúdo funções é mais confusa com relação ao conceito de grandezas e suas relações. O mesmo inicia o capítulo de funções anunciando que: “O conceito de função é um dos mais importantes na matemática. Ele está presente sempre que relacionamos duas grandezas variáveis” (DANTE, 2006, p. 44). O mesmo apresenta exemplos, seguidos de soluções analíticas para cada situação e conclui com uma lista de exercícios sugeridos para descobrir padrões e leis algébricas em tabelas de números. Consequentemente essa maneira inicial do conteúdo se torna ineficaz em sala de aula, pois como os discentes poderiam entender a construção de regras algébricas sem apresentar adequadamente o conceito de magnitude.

Segundo Silva (2012) no que diz respeito à apresentação das funções logarítmicas e exponenciais, os livros didáticos analisado nessa pesquisa afastam-se das recomendações propostas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). No ponto de vista identificado nas obras analisadas combina uma série de conteúdos ao apresentar esses modelos de funções. Os capítulos destinados para esses assuntos constituem uma mistura mal elaborada de equações. inequações, problemas e gráficos. Para o mesmo ainda destaca que “Não se observa em nenhuma obra a necessária fundamentação que se deve dar à importância dos assuntos e seu real motivo para serem estudados na escola”.

De acordo com Silva (2012) na introdução do capítulo proposto à função exponencial nos livros analisados segue o mesmo padrão, a apresentação de um problema que envolve o crescimento populacional de uma colônia de bactérias. Mesmo sendo interessante a proposta é superficial, pois todas as obras estudadas centralizam no mesmo modelo de problema introdutivo e, sendo assim, não possibilitando apresentação de exemplos alternativos para a abordagem do conteúdo, como por exemplo: rendimentos da poupança ou o comportamento de um medicamento no corpo de uma pessoa, etc.

O diagrama utilizado no texto de Paiva (2009) na Figura 10 mostra o início do crescimento populacional, difere de outros trabalhos na medida em que permite que os alunos construam seu raciocínio em etapas e visualizem a matemática envolvida no problema. Uma chamada para representar e/ou modelar problemas de matemática é um recurso divertido que os professores podem usar na sala de aula para aprimorar o aprendizado dos alunos.

No capítulo dedicado à função exponencial no texto de Paiva (2009) é realizada uma revisão sobre as propriedades de potências já estudada no ensino fundamental, no intuito de reduzir futuras dificuldades ao trabalhar com o conteúdo. Entretanto são apresentadas determinações operatórias sem justificativas, através de exemplos utilizando essas propriedades. Consequentemente isso acaba tornando as propriedades de potências um pré-requisito para introdução ao estudo da função exponencial como também justificar sua utilização.

Figura10: Função exponencial em Paiva (2009)

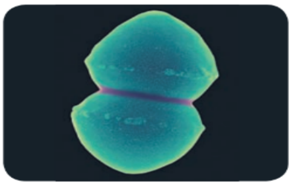
Introdução ao estudo da função exponencial

Várias situações do cotidiano, como a depreciação de um bem, o cálculo da taxa de juro em aplicações financeiras ou em empréstimos bancários, e do universo científico, como o cálculo de crescimento populacional, a medição dos níveis de radioatividade de um elemento atômico, entre outras, podem ser estudadas com o auxílio das **funções exponenciais**.

Para apresentar a função exponencial, vamos partir de uma situação que mostra a relação entre essa função e uma forma de crescimento de grandezas.

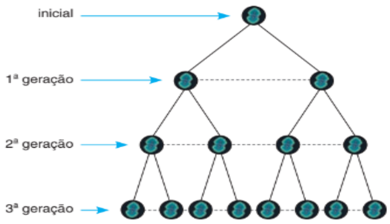
A maioria das bactérias reproduz-se por bipartição, isto é, cada uma delas se divide em duas ao atingir determinado tamanho.

Em uma cultura de laboratório, vamos considerar determinada bactéria que se dividirá em duas, dando origem à primeira geração; cada bactéria da primeira geração sofrerá bipartição, dando origem à segunda geração, e assim por diante. A tabela abaixo mostra o crescimento do número de bactérias, a partir de uma bactéria, admitindo-se que todas sobrevivam a cada geração.



Bactéria em processo de bipartição.

	Número de bactérias
Inicial	$1 = 2^0$
1ª geração	$2 = 2^1$
2ª geração	$4 = 2^2$
3ª geração	$8 = 2^3$
4ª geração	$16 = 2^4$
⋮	⋮



Note que a coluna onde se registra o número de bactérias apresenta as potências $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ...$ Assim, o número *y* de indivíduos gerados por uma bactéria será, na geração *x*, expresso pela função:

$$y = 2^x$$

Se essas bactérias conseguissem se bipartir a cada 20 minutos, após 1 hora, teríamos três gerações; e, em apenas um dia, teríamos 72 gerações. Para se ter ideia, o número de bactérias somente na 72ª geração seria: $2^{72} = 4.722.366.482.869.645.213.696$

E o total de bactérias em apenas um dia seria:
9.444.732.965.739.290.427.391

Essa situação mostra o crescimento assustador da função $f(x) = 2^x$. Igualmente espantoso é o decrescimento de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Funções como essas, chamadas de **funções exponenciais**, serão estudadas neste capítulo. Os pré-requisitos para esse estudo são os conceitos e as propriedades envolvidas na potenciação e na radiciação no conjunto dos reais em $\mathbb{R}$, que revisaremos a seguir.

Fonte: Paiva (2009)

Na obra de Dante (2006) inicialmente apresenta em seu capítulo referente as funções exponenciais uma revisão envolvendo as determinações operatórias de potência.

Ambos autores Paiva (2009) e Dante (2006) tem como objetivo reduzir as dificuldades que possam suceder possivelmente na realização do trabalho com funções. Sem muito aprofundar o mesmo faz um breve resumo sobre função exponencial onde ele apresenta a definição da função exponencial com base a, faz algumas considerações sobre o valor de a (para a função exponencial ficar bem definida). Também apresenta uma lista de exemplos e deixa uma lista de problemas propostos. Conforme a Figura 11.

Figura 11: Função exponencial em Dante (2006)

4 Função exponencial

Vamos agora estudar a **função exponencial** definida por $f(x) = a^x$.

Definição

Dado um número real a ($a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se função exponencial de base a a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ representada por $f(x) = a^x$ para todo x real.

Fique atento!
$\mathbb{R}_+^*$ é o símbolo que indica o conjunto dos números reais positivos: $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$.

Exemplos:

a) $f(x) = 3^x$

b) $y = 5^x$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $f(x) = (0{,}4)^x$

e) $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$

f) $f(x) = 10^x$

Exercícios

28. Verifique quais das sentenças dadas correspondem à lei de uma função exponencial.

x a) $f(x) = 9^x$

x b) $f(x) = (0{,}666...)^x$

c) $y = x^2$

x d) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

29. Dada a função exponencial $f(x) = 4^x$, determine:

a) $f(0)$; 1

b) $f(3)$; 64

c) $f(-1)$; $\frac{1}{4}$

d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; 2

e) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\frac{1}{2}$

f) m tal que $f(m) = 1$. 0

Fonte: Dante (2006)

Conforme é mostrado na figura acima, podemos analisar que os exercícios propostos, não favorecem o raciocínio interpretativo dos discentes. Segundo Silva (2012) “Trata-se de uma simples repetição de técnicas e não demonstram utilidade do assunto para os alunos”. Ao trabalhar com esses tipos de atividades em sala de aula, os alunos não percebem o sentido de aprender funções exponenciais, pois a maneira que é apresentada ao aluno, torna a aula desinteressante.

Dante (2006) no que se refere ao gráfico das funções exponenciais analisou dois casos para esboçar seu gráfico: funções exponenciais crescentes e decrescentes. Por meio de uma tabela de valores, faz a construção de gráficos e, a seguir, resume as principais características desses tipos de funções.

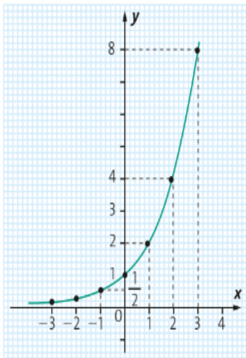
Figura 12: Gráficos das funções exponenciais em Dante (2006)

Gráfico da função exponencial

Vamos analisar os gráficos de duas funções exponenciais $f(x) = a^x$, a primeira com $a > 1$ e a segunda com $0 < a < 1$.

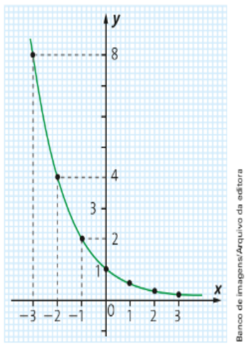
a) $f(x) = 2^x$ ou $y = 2^x$, ou seja, $\boldsymbol{a > 1}$. Neste caso, a função é crescente ($x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ou $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, ou seja, $0 < a < 1$. Neste caso, a função é decrescente ($x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

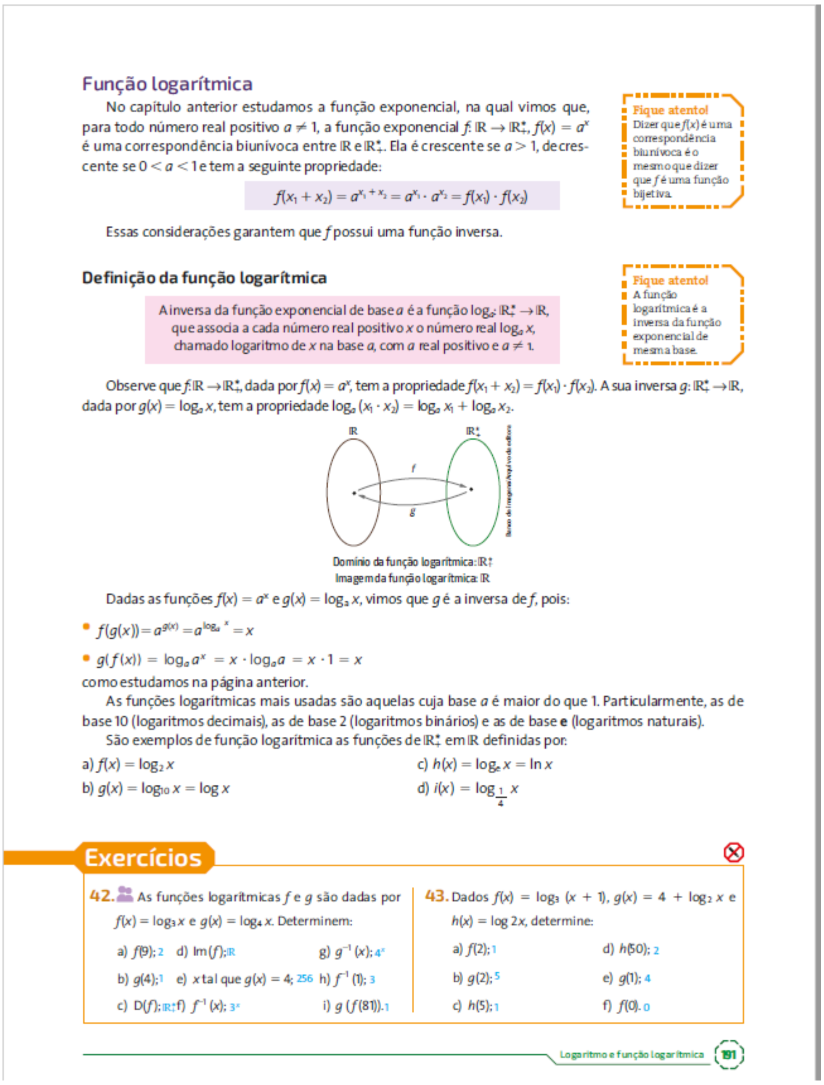


Fonte: Dante (2006)

É importante notar que existem representações comuns nos resumos (cf. Figuras 12 e 13) que podem ser mal interpretadas pelos alunos, cabe aos professores ser capazes de escolher representações mais adequadas para o nível da turma na qual estão lecionando. Visto que para os alunos, apenas a associação entre a regra e a forma da curva resultante permanece. Em nenhum lugar do texto, Dante (2006) revela a possibilidade de professores utilizarem laboratórios de informática ao trabalharem com gráficos de funções. De acordo com Silva (2012) "Na escola, dificilmente durante o momento das aulas, o professor está consciente do abismo que existe separando os entes matemáticos e suas representações na concepção dos alunos".

Dante (2006) aborda o estudo da função logarítmica após o estudo da função exponencial, traz um pouco sobre a função exponencial e logo em seguida já apresenta a definição da função logarítmica, e na sequência exemplos sobre o tema. Conforme na Figura 13.

Figura 13: Função logarítmica em Dante (2006)



Função logarítmica

No capítulo anterior estudamos a função exponencial, na qual vimos que, para todo número real positivo $a \neq 1$, a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$ é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+^*$. Ela é crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$ e tem a seguinte propriedade:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

Essas considerações garantem que f possui uma função inversa.

Fique atento! Dizer que $f(x)$ é uma correspondência biunívoca é o mesmo que dizer que f é uma função bijetiva.

Definição da função logarítmica

A inversa da função exponencial de base a é a função $\log_a: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado logaritmo de x na base a, com a real positivo e $a \neq 1$.

Fique atento! A função logarítmica é a inversa da função exponencial de mesma base.

Observe que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = a^x$, tem a propriedade $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$. A sua inversa $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \log_a x$, tem a propriedade $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$.

$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}_+^*$ f g

Domínio da função logarítmica: $\mathbb{R}_+^*$
Imagem da função logarítmica: $\mathbb{R}$

Dadas as funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, vimos que g é a inversa de f, pois:

- $f(g(x)) = a^{g(x)} = a^{\log_a x} = x$
- $g(f(x)) = \log_a a^x = x \cdot \log_a a = x \cdot 1 = x$

como estudamos na página anterior.

As funções logarítmicas mais usadas são aquelas cuja base a é maior do que 1. Particularmente, as de base 10 (logaritmos decimais), as de base 2 (logaritmos binários) e as de base **e** (logaritmos naturais).

São exemplos de função logarítmica as funções de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definidas por:

a) $f(x) = \log_2 x$
b) $g(x) = \log_{10} x = \log x$
c) $h(x) = \log_e x = \ln x$
d) $i(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

Exercícios

42. As funções logarítmicas f e g são dadas por $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = \log_4 x$. Determinem:

a) $f(9)$; 2
b) $g(4)$; 1
c) $D(f)$; $\mathbb{R}_+^*$
d) $Im(f)$; $\mathbb{R}$
e) x tal que $g(x) = 4$; 256
f) $f^{-1}(x)$; 3^x
g) $g^{-1}(x)$; 4^x
h) $f^{-1}(1)$; 3
i) $g(f(81))$. 1

43. Dados $f(x) = \log_3 (x + 1)$, $g(x) = 4 + \log_2 x$ e $h(x) = \log 2x$, determine:

a) $f(2)$; 1
b) $g(2)$; 5
c) $h(5)$; 1
d) $h(50)$; 2
e) $g(1)$; 4
f) $f(0)$. 0

Logaritmo e função logarítmica 191

Fonte: Dante (2006)

Seguindo sobre o assunto, o mesmo apresenta o gráfico da função logarítmica e suas definições.

Figura 14: Gráficos das funções logarítmicas em Dante (2006)

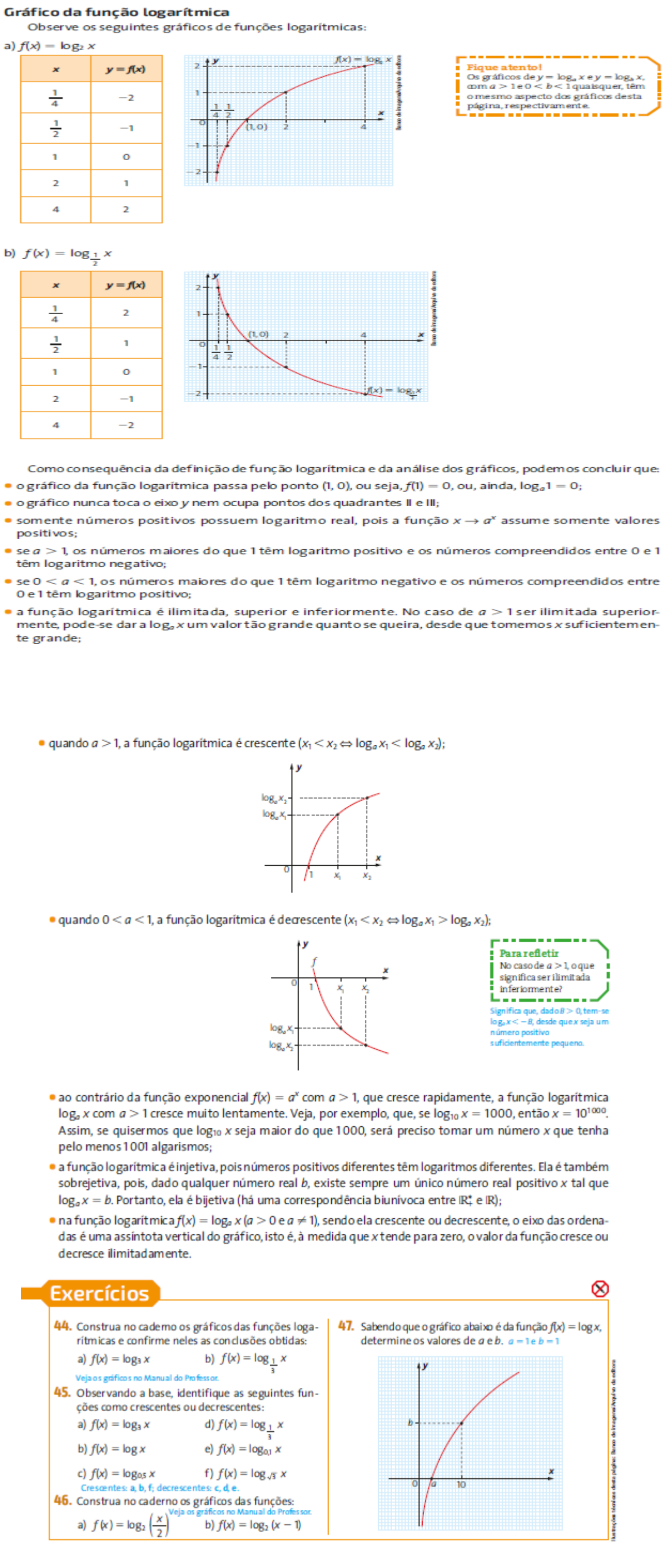


Gráfico da função logarítmica

Observe os seguintes gráficos de funções logarítmicas:

a) $f(x) = \log_2 x$

x	$y = f(x)$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2

Fique atento!
Os gráficos de $y = \log_a x$ e $y = \log_b x$, com $a > 1$ e $0 < b < 1$ quaisquer, têm o mesmo aspecto dos gráficos desta página, respectivamente.

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$y = f(x)$
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2

Como consequência da definição de função logarítmica e da análise dos gráficos, podemos concluir que:

- o gráfico da função logarítmica passa pelo ponto (1, 0), ou seja, $f(1) = 0$, ou, ainda, $\log_a 1 = 0$;
- o gráfico nunca toca o eixo y nem ocupa pontos dos quadrantes II e III;
- somente números positivos possuem logaritmo real, pois a função $x \to a^x$ assume somente valores positivos;
- se $a > 1$, os números maiores do que 1 têm logaritmo positivo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo;
- se $0 < a < 1$, os números maiores do que 1 têm logaritmo negativo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo positivo;
- a função logarítmica é ilimitada, superior e inferiormente. No caso de $a > 1$ ser ilimitada superiormente, pode-se dar a $\log_a x$ um valor tão grande quanto se queira, desde que tomemos x suficientemente grande;

- quando $a > 1$, a função logarítmica é crescente ($x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$);
- quando $0 < a < 1$, a função logarítmica é decrescente ($x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$);

Para refletir
No caso de $a > 1$, o que significa ser ilimitada inferiormente?
Significa que, dado $B > 0$, tem-se $\log_a x < -B$, desde que x seja um número positivo suficientemente pequeno.

- ao contrário da função exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 1$, que cresce rapidamente, a função logarítmica $\log_a x$ com $a > 1$ cresce muito lentamente. Veja, por exemplo, que, se $\log_{10} x = 1000$, então $x = 10^{1000}$. Assim, se quisermos que $\log_{10} x$ seja maior do que 1000, será preciso tomar um número x que tenha pelo menos 1001 algarismos;
- a função logarítmica é injetiva, pois números positivos diferentes têm logaritmos diferentes. Ela é também sobrejetiva, pois, dado qualquer número real b, existe sempre um único número real positivo x tal que $\log_a x = b$. Portanto, ela é bijetiva (há uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}_+^*$ e $\mathbb{R}$);
- na função logarítmica $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$ e $a \neq 1$), sendo ela crescente ou decrescente, o eixo das ordenadas é uma assíntota vertical do gráfico, isto é, à medida que x tende para zero, o valor da função cresce ou decresce ilimitadamente.

Exercícios

44. Construa no caderno os gráficos das funções logarítmicas e confirme neles as conclusões obtidas:
a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$
Veja os gráficos no Manual do Professor.

45. Observando a base, identifique as seguintes funções como crescentes ou decrescentes:
a) $f(x) = \log_3 x$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$
b) $f(x) = \log x$ e) $f(x) = \log_{0,1} x$
c) $f(x) = \log_{0,5} x$ f) $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$
Crescentes: a, b, f; decrescentes: c, d, e.

46. Construa no caderno os gráficos das funções:
Veja os gráficos no Manual do Professor.
a) $f(x) = \log_2 \left(\frac{x}{2}\right)$ b) $f(x) = \log_2 (x - 1)$

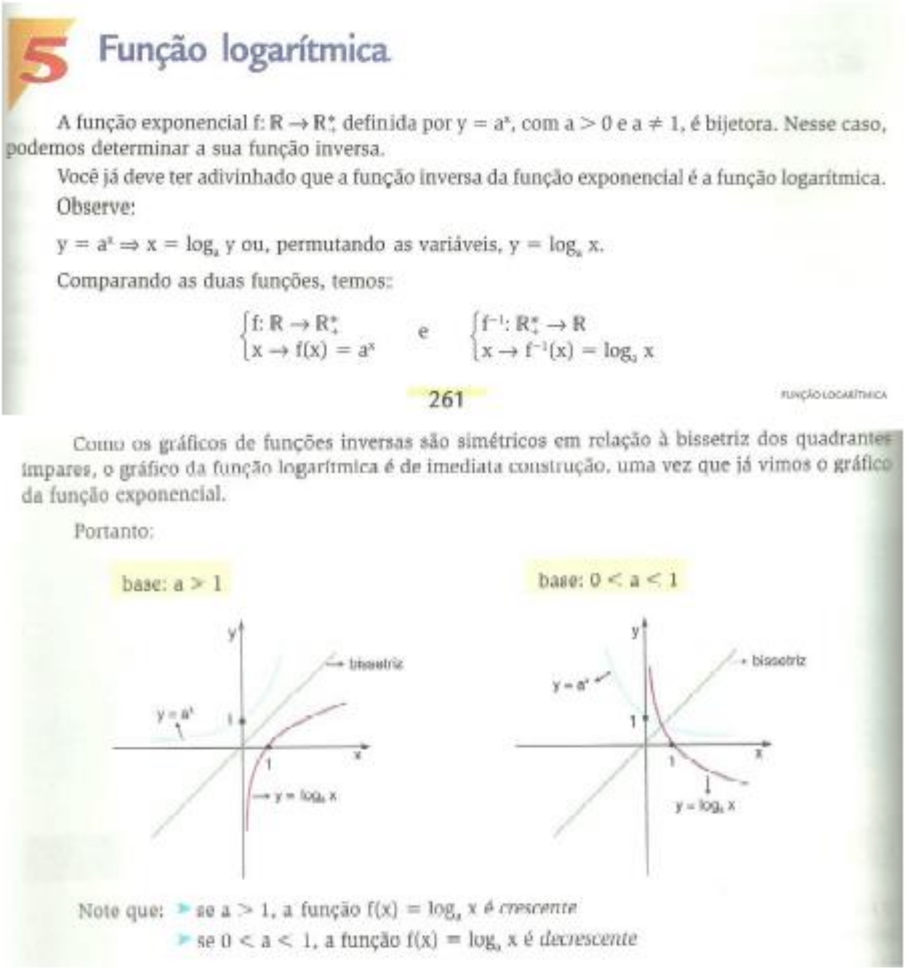
47. Sabendo que o gráfico abaixo é da função $f(x) = \log x$, determine os valores de a e b. $a = 1$ e $b = 1$

Fonte: Dante (2006)

Logo, podemos observar que a abordagem do auto sobre o tema função logarítmica é apresentado com uma breve explicação sobre as definições, gráficos e exercícios. Sendo assim, deixando os alunos sem compreender sobre o assunto, apenas definições e aplicações diretas sobre o assunto.

Conforme os autores Giovanni & Bonjorno (2005) o estudo da função logarítmica, aparece após o estudo da definição, propriedades e equações logarítmicas.

Figura 15: Função Logarítmica em Giovanni & Bonjorno (2005)



5 Função logarítmica

A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é bijetora. Nesse caso, podemos determinar a sua função inversa.

Você já deve ter adivinhado que a função inversa da função exponencial é a função logarítmica.

Observe:

$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$ ou, permutando as variáveis, $y = \log_a x$.

Comparando as duas funções, temos:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \to f(x) = a^x \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \to f^{-1}(x) = \log_a x \end{cases}$$

261 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Como os gráficos de funções inversas são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, o gráfico da função logarítmica é de imediata construção, uma vez que já vimos o gráfico da função exponencial.

Portanto:

base: $a > 1$

base: $0 < a < 1$

Note que: ➤ se $a > 1$, a função $f(x) = \log_a x$ é *crescente*

➤ se $0 < a < 1$, a função $f(x) = \log_a x$ é *decrescente*

Fonte: Giovanni e Bonjorno (2005)

Sem destaques a apresentação do conteúdo é realizada de forma que as modelagens e os problemas são apresentados apenas no final do capítulo. Dessa forma a apresentação do conteúdo persiste no modelo tradicional de ensino. De acordo com Silva (2012) “sua estrutura é como a de um resumo, onde não é possível realizar questionamentos ou intervenções na metodologia proposta pelos autores”.

De acordo com Silva (2012).

> Quando a proposta do assunto é demasiadamente técnica, a matemática é percebida pelos alunos como uma disciplina difícil e sem utilidade prática, pois a única atividade feita por eles são cálculos, que às vezes não tem o mínimo sentido. Apresentar aos alunos a matemática do ponto de vista como ciência importante é necessária para a vida das pessoas, torna o estudo da disciplina mais proveitoso e a aprendizagem dos alunos melhora qualitativamente.

Paiva (2009), além do problema de modelagem apresentado no início do capítulo sobre a função logarítmica, o mesmo apresenta outro exemplo envolvendo raciocínio logarítmico. Para o autor a apresentação desses problemas é a motivação que os alunos têm para embarcar no estudo das equações e funções logarítmicas, de acordo com a Figura abaixo.

Figura 16: Função Logarítmica em Paiva (2009)

3 Função logarítmica

Vimos, neste capítulo e no anterior, que vários problemas do cotidiano ou do universo científico relacionam grandezas que crescem ou decrescem através do produto por taxas constantes: juros em aplicações financeiras, crescimento populacional, decaimento radioativo, depreciação de um bem etc. O estudo desses problemas exige o conhecimento das funções exponencial e logarítmica, com as quais economistas fazem projeções, geógrafos estudam populações, biólogos avaliam crescimento de culturas bacteriológicas ou químicos estimam o tempo de duração de substâncias radioativas.

RAYMOND FORBES/MASTERFILE/LATINSTOCK-GETTY IMAGES

Espectrômetro de massa, aparelho que mede a massa atômica dos elementos químicos presentes em uma amostra.

Para exemplificar, vamos considerar uma amostra de 1 kg de plutônio, elemento químico que perde 0,4% de sua massa a cada século.

Aplicando a fórmula do montante, com taxa negativa, obtemos a função que descreve o tempo t, em século, em função da massa remanescente M dessa amostra, em quilograma:

$$M = 1(1 - 0{,}004)^t \Rightarrow M = (0{,}996)^t$$

$$\therefore t = \log_{0{,}996} M$$

Neste capítulo estudaremos funções desse tipo, chamadas de **funções logarítmicas**.

Chama-se **função logarítmica** toda função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_b x$, em que b é um número real, positivo e diferente de 1.

Fonte: Paiva (2009)

Logo, é notória a importância de cativar os alunos e de proporcionar oportunidade para debates ao respeito de aplicações das teorias matemáticas. Visto que nesse momento, os alunos irão manifestar suas opiniões e relatar experiências que envolvem o conteúdo, o que acabará enriquecendo o processo de ensino-aprendizagem.

Para melhor compreensão das análises realizadas nos textos citados, seguem abaixo as Tabelas 1 e 2 onde serão apresentadas análises sobre a abordagem das funções logarítmicas e exponenciais no ensino médio segundo cada autor. De fato, nessas tabelas ficará registrada como cada abordagem foi apresentada, se de forma clara, contextualizada, motivadora e se os exemplos são precisamente eficientes para a aprendizagem dos alunos.

Tabela 1**:** Abordagem da função exponencial

Textos	Apresentada de forma clara.	Apresentada de forma contextualizada.	Apresentada de forma motivadora.	Exemplos apresentados são eficientes.
Matemática, 1^a série, Dante (2006)	Não! É apresentado de forma confusa, pois não a clareza no conceito de grandezas e suas relações.	Não! É apresentando através de exemplos seguido de lista de exercícios.	Não! Não há motivação e nem incentivos para os alunos.	Não! Ineficaz em sala de aula, pois como os discentes poderiam entender a construção de regras algébricas sem apresentar adequadamente o conceito de magnitude.
Matemática, 2^a série, Dante (2006)	Não! Pois o autor apenas faz uma breve revisão sobre função.	Não! Sem muito aprofundar o mesmo faz um breve resumo sobre função exponencial. E em seguida apresenta problemas a respeito do conteúdo	Não! Ao trabalhar com uma simples repetição de técnicas, que não demonstram utilidade do assunto para nos alunos. Isso não gera nós alunos motivações sobre o assunto.	Não! Exercícios propostos, não favorecem o raciocínio interpretativo dos discentes.
Matemática, Volume1, Paiva, 2009	Sim! O conceito da relação entre grandezas é apresentado de	Sim! Apresentada de forma contextualizada	Sim! O autor traz em seu texto questões relacionadas ao	Sim! Pois proporciona ao discente uma forma mais

	forma intuitiva, proporcionando ao discente compreender apropriadamente o conteúdo.	conforme a (Figura 10).	cotidiano, que despertam o interesse dos alunos.	compreensiva do conceito de função estudada como relação entre duas grandezas.
Matemática Completa, 1^a série do ensino médio, Giovanni & Bonjorno, 2005	Não! Pois é apresentado de forma implícita, e não há exemplos que pode ser uma grandeza.	Não! Pois só apresenta de forma teórica a relação entre grandezas	Não! Pois carece de exemplos ou contextualização sobre a função exponencial.	Não! Pois os exemplos carecem de motivação e contextualização.

Fonte: autor (2023)

Tabela 2**:** Abordagem função logarítmica

Textos	Apresentada de forma clara	Apresentada de forma contextualizada	Apresentada de forma motivadora	Exemplos apresentados são eficientes
Matemática, 1^a série, Dante (2006)	Não Pois o autor apresenta apenas definições.	Não Sem contextualização, apenas é apresentada no método tradicional	Não! Apresentação mais técnica, para os alunos se torna desinteressante, difícil e sem utilidade prática.	Não! Pois os exemplos carecem de motivação e contextualização.
Matemática, Volume1, Paiva, 2009	Sim! Seu texto é apresentado de forma clara e intuitiva, destacando sempre exemplos do cotidiano.	Sim! A introdução do assunto é contextualizada e traz um exemplo.	Sim! O exemplo destacado pelo o autor traz o raciocínio logarítmico, e é motivador.	Sim! Como o autor da ênfase em textos contextualizados, explícitos e motivadores.
Matemática Completa, 1^a série do ensino	Não! São apresentados apenas	Não Sem contextualização,	Não! Apresentação mais técnica, para os alunos	Não! Pois os exemplos carecem de

médio, Giovanni & Bonjorno, 2005	definições e propriedades.	apenas é apresentada no método tradicional.	se torna desinteressante, difícil e sem utilidade prática.	motivação e contextualização.

Fonte**:** autor (2023)

Logo, observamos que dentre os quatros textos analisados sobre as funções logarítmicas exponenciais o que se destacou do ponto de vista do nível de ensino-aprendizagem de mais qualidade foi o texto de Paiva (2009). Pois o mesmo apresentou de forma clara, contextualizada e motivadora, proporcionando aos alunos uma melhor aprendizagem sobre o conteúdo estudado. Os demais autores Dante (2006) primeira e segunda série, e Giovanni & Bonjorno (2005), apresentaram os conteúdos de forma muito confusa, mesmo porque os alunos não tem a oportunidade de compreender a ideia de grandeza e suas relações. Com isso dificultando a aprendizagem dos alunos.

6. PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICAS E ENEM ENVOLVENDO LOGARITMO E EXPONENCIAL.

Neste capítulo vamos apresentar de forma sucinta a OBMEP e ENEM, seguindo para a resolução de questões desses eventos nos quais aparecem as funções logarítmicas e/ou exponenciais.

6.1 Um pouco sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

As Olimpíadas de Matemática são competições acadêmicas realizadas em todo o mundo, com o objetivo de estimular o interesse pela matemática e identificar jovens talentosos nesta área. No Brasil, a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) foi realizada em 1979. Na ocasião, foram 11 premiados em 1º, 2º e 3º lugares e 15 premiados nas demais categorias, e em 2005 surge a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

A OBMEP é dividida em várias fases, começando pela fase escolar, em que os alunos participam de uma prova aplicada em suas próprias escolas. Aqueles que se destacam na fase escolar são convidados a participar da fase regional, e posteriormente, da fase nacional. Os melhores classificados na fase nacional são convidados a participar de treinamentos e competições internacionais, como a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO).

Além da OBMEP, existem outras olimpíadas de matemática em nível estadual e municipal, bem como outras competições internacionais, entre estas podemos citar a Olimpíada Ibero-Americana de Matemática (OIAM) e a Olimpíada Internacional de Matemática para Alunos do Ensino Médio (IMC).

6.2 Um pouco sobre o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é uma prova aplicada anualmente no Brasil pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e tem como objetivo avaliar o desempenho dos estudantes que estão concluindo o ensino médio. Além disso, o ENEM também é utilizado como critério para o acesso ao ensino superior por meio de programas do governo federal, como o Sistema de Seleção Unificada (SISU), o Programa Universidade para Todos (ProUni) e o Fundo de Financiamento Estudantil (FIES).

A prova do ENEM é composta por quatro áreas de conhecimento: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias. Cada área possui 45 questões, totalizando 180 questões na prova. Além disso, há ainda uma redação, que é avaliada de acordo com cinco competências.

As questões do ENEM são elaboradas de forma a avaliar a capacidade do estudante de aplicar o conhecimento adquirido durante o ensino médio em situações cotidianas e em problemas interdisciplinares. As questões são contextualizadas e exigem do estudante habilidades como leitura, interpretação, análise crítica, argumentação e resolução de problemas.

O ENEM é considerado uma das principais formas de acesso ao ensino superior no Brasil e sua importância tem crescido nos últimos anos, sendo utilizado por cada vez mais instituições de ensino superior como forma de seleção de seus alunos.

As Olimpíadas de Matemática são uma excelente oportunidade para os estudantes desenvolverem suas habilidades matemáticas, além de estimular a criatividade e a resolução de problemas. Elas também podem ser um importante diferencial na hora de ingressar em uma universidade ou concorrer a uma vaga de emprego na área de exatas.

6.3 Questões do ENEM com as funções logarítmicas e/ou exponenciais.

Questão 1. [Equação logarítmica no Enem de 2011].

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como Mw), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, subsituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Ricther, a MMS é uma escala logarítmica. Mw e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$Mw = -10{,}7 + \frac{2}{3} * log(M_0).$$

Onde M_0 é o movimento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o $dina * cm$. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $Mw = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado). U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em $dina * cm$)?

$a)$ $10^{-5,10}$
$b)$ $10^{-0,73}$
$c)$ $10^{12,00}$
$d)$ $10^{21,65}$
$e)$ $10^{27,00}$

Solução da questão 1.

Para resolver essa questão vamos utilizar a equação logarítmica para medir a magnitude dos terremotos

$$Mw = -10{,}7 + \frac{2}{3} * log(M_0).$$

Se o terremoto de Kobe teve magnitude $Mw = 7{,}3$, basta substituirmos esse valor na equação logarítmica acima para determinar seu momento sísmico M_0. Assim, obtemos

$$7,3 = -10{,}7 + \frac{2}{3} * log(M_0).$$

Isolando o $\frac{2}{3} * log(M_0)$ temos: $7,3 + 10{,}7 = +\frac{2}{3} * log(M_0)$.

De onde concluímos que $18 = \frac{2}{3} * log(M_0) \rightarrow 18 * 3 = 2log(M_0) \rightarrow 2log(M_0) = 54$.

Isolando $log(M_0)$ temos: $log(M_0) = \frac{54}{2} \leftrightarrow log(M_0) = 27$.

Se considerarmos a função logarítmica log em base 10 e aplicarmos sua inversa $f(x) = 10^x$, obtemos: $M_0 = 10^{27}$.

Logo, o momento sísmico do terremoto de Kobe foi de $M_0 = 10^{27}\ dina * cm$. Concluindo assim, que a alternativa correta é o item e).

Questão 2. [Enem de 2014. Equação exponencial]

Segundo a Organização Mundial do Turismo (OMT), o Ecoturismo cresce a uma taxa de 5% ao ano. No Brasil, em 2011, o Ecoturismo foi responsável pela movimentação de 6,775 bilhões de dólares. Supondo que o percentual de crescimento incida sobre a movimentação do ano anterior, pode-se expressar o valor movimentado V (em bilhões de dólares), em função do tempo t (em anos), por $V = 6,775 * (1,05)^{t-1}$ com $t = 1$ correspondendo a 2011, $t = 2$, a 2012 e assim por diante. Em que ano o valor movimentado será igual a 13,5 bilhões de dólares?

$Dados$: $log\ 2 = 0,3$ e $log\ 1,05 = 0,02$

a) 2015.
b) 2016.
c) 2020.
d) 2025.
e) 2026.

Solução questão 2.

Primeiro passo para resolver a função exponencial dada acima, devemos encontrar o tempo em que o valor movimentado pelo Ecoturismo seja igual a 13,5 bilhões de dólares. Vamos substituir V por 13,5 na equação $V = 6,775 * (1,05)^{t-1}$.

Logo temos.

$V = 6,775 * (1,05)^{t-1} \rightarrow \ 13,5 = 6,775 * (1,05)^{t-1} \rightarrow \ \frac{13,5}{6,775} = (1,05)^{t-1} \rightarrow 2 = (1,05)^{t-1}$.

Agora basta aplicar o log em ambos os lados e temos:

$$log2 = log(1,05)^{t-1}.$$

Utilizando a propriedade da função logarítmica que nos diz que: $log_a b^m = m * log_a b$. Tendo em consideração $log\ 2 = 0,3$ e $log\ 1,05 = 0,02$.
Segue que:

$$log2 = (t-1) * log(1,05)$$

$$0,3 = (t-1) * 0,02$$

$$t - 1 = \frac{0,3}{0,02}$$

$$t = 15 + 1 = 16.$$

Observe que o tempo $t = 1$, refere-se a 2011, $t = 2$, a 2012 e assim por diante. Este percentual de crescimento, expresso pela função exponencial dada, incide sobre a movimentação do ano anterior, isto é, no $t = 1$, este valor será em referente a 2010. Portanto, o valor de 13,5 bilhões de dólares será movimentado em $2010 + 16 = 2026$. A alternativa correta é a e).

6.4 Questões da OBMEP com as funções logarítmicas e/ou exponenciais.

Questão 1. [Equação exponencial na OBMEP de 2013, nível 3]
Se $x\ e\ y$ são inteiros positivos tais que $x * (x + 2 + 4 + 6 + \cdots + 4024) = 2013^y$, qual é o valor de y?

$a)$ 1
$b)$ 2
$c)$ 3
$d)$ 4
$e)$ 5

Solução da questão 1.
Observe que $2 + 4 + 6 + \cdots + 4024 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 2012)$. A seguir vamos utilizar o seguinte resultado $1 + 2 + 3 + \ldots + n = (n+1)n/2$. Ao substituir n por 2012 nessa equação, obtemos $1 + 2 + 3 + \ldots + 2012 = 2013 * 2006$.

Portanto $2 + 4 + 6 + \cdots + 4024 = 2013 * 2006$. Assim a equação dada é equivalente a $x * (x + 2013 * 2012) = 2013^y$.

Lembrando que a divide b, se existe c inteiro tal que $b = a.c$, (a é um divisor de b, ou analogamente b é um múltiplo de a).

Observe que $2013 = 3 * 11 * 61$, sendo que $3, 11\ e\ 61$, são primos. Decorre da igualdade $x * (x + 2013 * 2012) = 2013^y$, que $3, 11\ e\ 61$ dividem x. Temos que:

$x * (x + 2013 * 2012) = 2013^y$. Se p primo divide 2013, então p divide o produto x*(x+2013*2012). Entretanto, sendo p primo, segue que:

$$p \text{ divide } x \text{ ou } p \text{ divide } x + 2013 * 2012.$$

Em ambos dos casos, conclui-se que p divide x (uma vez que p divide 2013). Logo 2013 divide x. Assim $x = 2013 * k$ para algum k natural. Logo, tem-se:

$$2013^2 k * (k + 2012) = 2013^y.$$

Que implica em $k * (k + 2012) = \frac{2013^y}{2013^2}$. Equivalente, $k * (k + 2012) = 2013^{y-2}$.

De onde concluímos que $y > 2$. Se $k = 1$, temos $y = 3$, o que nos dá uma solução. Suponhamos agora $y > 3$. Considere d um divisor comum de k e $k + 2012$. Logo d divide 2012 e 2013, o que nos da $d = 1$, pois 2012 e 2013 são primos entre si. Logo, podemos escrever $k = a^{y-2}$ e $k + 2012 = b^{y-2}$, onde a e b são inteiros positivos tais que $a * b = 2013$ com $a < b$. Que implica em $b^{y-2} - a^{y-2} = 2012$.

Temos as seguintes possibilidades para $(a,\ b)$: $(1, 2013)$; $(3, 671)$; $(11, 183)$; $(33, 61)$. Em todos os casos, temos que $b^2 - a^2 > 2012$. De fato, observe que b^{y-2} e a^{y-2} são funções crescentes de y o que nos leva a concluir que $b^{y-2} - a^{y-2} = 2012$ se $y > 3$, o que é um absurdo. Assim a reposta correta é item c).

Questão 2. [Função logarítmica da OBMEP].

A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de $I = 0$ até $I = 8{,}9$ para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula:

$$I = \left(\frac{2}{3}\right) log\left(\frac{E}{E_0}\right).$$

onde E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7 * 10^{-3} kWh$.

a) Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

b) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

Solução da questão 2.

a) Dada a formula $I = \left(\frac{2}{3}\right) log \left(\frac{E}{E_0}\right)$. Temos: $I * \frac{3}{2} = log \left(\frac{E}{E_0}\right)$.

Aplicando a inversa da função log, a saber $f(x) = 10^x$, segue que:

$$E = 10^{I*\frac{3}{2}} * E_0.$$

Substituindo $I = 8\ e\ E_0 = 7 * 10^{-3}$ na expressão acima, obtemos:

$E = 10^{8*\frac{3}{2}} * 7 * 10^{-3} \leftrightarrow E = 7 * 10^{-3} * 10^{12} \leftrightarrow E = 7 * 10^9 kWh.$

Portanto, a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter é de $E = 7 * 10^9 kWh.$

b) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

Como $E = 10^{I*\frac{3}{2}} * E_0$. Para $I + 1$, obtemos $E' = 10^{(I+1)*\frac{3}{2}} * E_0$. Ou equivalentemente,

$$E' = 10^{\frac{3I+3}{2}} * E_0$$

$$E' = 10^{\frac{3I}{2}} * 10^{\frac{3}{2}} * E_0$$

$$E' = \sqrt{10^3} * E_0 * 10^{\frac{3I}{2}}$$

$$E' = \left(10\sqrt{10}\right) * \left(E_0 * 10^{\frac{3I}{2}}\right) = 10\sqrt{10} * E.$$

Logo, a energia liberada fica multiplicada por $10\sqrt{10}$.

Portanto, podemos observar a importância de ter domínio do conhecimento, correlacionado ao conceito de logaritmos e exponencial, como também a importância de saber aplicar esses conhecimentos, em determinadas por situações-problemas, pois são muito utilizados em distintos tipos de Exames Nacional do Ensino Médio (ENEM) e Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escola Pública (OBMEP).

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Este trabalho teve como finalidade analisar como as funções logarítmicas e exponenciais são apresentadas aos alunos no ensino médio. Com esse objetivo em mente foram realizadas pesquisas bibliográficas sobre as origens das funções logarítmicas e exponenciais, e apresentação desses conceitos em alguns livros didáticos e documentos oficiais tais como as Lei de Diretrizes Nacionais da Educação (LDB).

Os livros utilizados nessa pesquisa mostram dados de como cada uma dessas funções são apresentadas aos alunos do ensino médio. Na maioria dos textos analisados, as funções logarítmicas e exponenciais são apresentadas aos alunos de forma simbólica, abstrata e de difícil compreensão, resultando em um aprendizado baseado em reprodução e imitação, no qual os problemas são resolvidos simplesmente aplicando a fórmula recém-aprendida, sem uma compreensão do sistema de conceitos envolvidos na sua resolução

Desse modo os dados contribuíram para um olhar mais crítico sobre a abordagem das funções logarítmicas e exponenciais. Nota-se a grande importância de trabalhar não só o estudo das funções aqui estudadas, mas sim do ensino de matemática no geral, pois o ensino deve ser desenvolvido de maneira contextualizada e relacionada a outros conhecimentos, que promovam a interdisciplinaridade de conteúdos, para alcançar o desenvolvimento de novas habilidades intelectuais, capacitando o aluno a interpretar e compreender situações problemas nas situações cotidianas e em outras áreas curriculares.

Portanto, considerando o exposto ao longo deste trabalho, concluíamos com êxito os objetivos proposto nesta pesquisa.

8. REFERENCIAS:

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI, J. R. **Coleção Matemática Completa, 1° série do ensino médio**. 2° edição renovada, São Paulo, FTD, 2005.

BOYER. C. B**. História da Matemática.** 2° edição. São Paulo: Edgar Blücher, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio,** Brasília, 1999. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em 19/04/2023.

BRASIL. Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Brasília, DF, 20 dez. 1996. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394htm. Acesso em 11/04/2023.

BRASIL. SEMTEC/MEC. **PCN Ensino Médio Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais Ciências da Natureza**, **Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: SEMTEC/MEC, 2002.

DANTE, L. R. **Matemática - 1° Série**. 1° edição. São Paulo: Ática 2006. **Matemática -2° Série**. 1° edição. São Paulo: Ática 2006.

MAOR, **Eli. A história de um número**. Rio de Janeiro: Record, 2003.

Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN Ensino médio: orientações educacionais + complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2002. Disponível http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Ciencias Natureza.pdf. Acesso em 10/04/2023.

OBMEP. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. OBMEP 2015. Disponível em http://www.obmep.org.br/apresentacao.hotmail. Acesso em 10/05/2023

PAIVA, M. **Matemática**, volume 1. 1° edição. Editora Moderna. São Paulo, SP. 2009.

SILVA, Rodrigo Sychocki da. **O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na Escola Básica**. 2012. Tese (Mestrado em ensino a Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, [*S. l.*], 2012.

SILVA, Rodrigo Felipe da. **Função exponencial e logarítmica**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista, [*S. l.*], 2016.