



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

MICHEL CARLOS DE MEDEIROS

**O USO DO TEOREMA DE PICK NO ENSINO DE
GEOMETRIA E NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
OLIMPIADAS.**

JOÃO PESSOA - PB

2023

MICHEL CARLOS DE MEDEIROS

**O USO DO TEOREMA DE PICK NO ENSINO DE
GEOMETRIA E NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
OLIMPIADAS.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática a Distância da Universidade Federal da
Paraíba como requisito para obtenção do título de
Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Jacqueline Fabiola Rojas
Arancibia

JOÃO PESSOA – PB

2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M488u Medeiros, Michel Carlos de.

O uso do teorema de Pick no ensino de geometria e na resolução de problemas de olimpíadas / Michel Carlos de Medeiros. - João Pessoa, 2023.

76 p. : il.

Educação a Distância, UFPB, Polo João Pessoa.

Orientação: Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia.

TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Teorema de Pick - Aplicação em sala de aula. 2.
Geometria plana. 3. Software GeoGebra. 4. Matemática.
I. Arancibia, Jacqueline Fabiola Rojas. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

MICHEL CARLOS DE MEDEIROS

**O USO DO TEOREMA DE PICK NO ENSINO DE
GEOMETRIA E NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
OLIMPIADAS.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

Aprovado em: 13 / 06 / 2023

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 JACQUELINE FABIOLA ROJAS ARANCIBIA
Data: 20/06/2023 08:49:13-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.^a Dr.^a Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia (DM-UFPB)
(Orientadora)

Documento assinado digitalmente
 PEDRO ANTONIO GOMEZ VENEGAS
Data: 20/06/2023 13:32:23-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Pedro Antonio Gomez Venegas (DM-UFPB)

Documento assinado digitalmente
 WALLACE MANGUEIRA DE SOUSA
Data: 20/06/2023 12:04:18-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Wállice Manguiera de Sousa (DM-UFPB)

A Jesus, meu único senhor, diretor e salvador,
dedico, pois dele, por ele e para ele, são todas
as coisas.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, expresso minha gratidão a Deus, meu senhor e salvador, pelo presente da vida que me foi concedido. Agradeço pela sua constante presença em minha jornada, fortalecendo-me em todos os momentos. Também sou grato pelas pessoas especiais que Ele colocou em meu caminho, pelas bênçãos, pela força, coragem e determinação que me foram concedidas, bem como por todas as conquistas e vitórias que alcancei até o momento.

Em seguida, gostaria de expressar minha sincera gratidão por esta oportunidade de apresentar meu trabalho de conclusão de curso. Este momento marca o fim de uma jornada acadêmica importante em minha vida e não seria possível sem o apoio e orientação de muitas pessoas que contribuíram para minha formação.

Continuando, agradeço do fundo do meu coração à minha esposa, por estar sempre ao meu lado, apoiando-me e encorajando-me nos momentos difíceis e compartilhando comigo as alegrias das conquistas. Sua presença e amor incondicional têm sido fundamentais para enfrentar as adversidades e seguir em frente.

Aos meus filhos, que são a minha maior fonte de alegria e motivação. A presença de vocês em minha vida traz luz e esperança, e a cada dia, aprendo mais com a pureza e inocência que transmitem.

Não menos importante, agradeço a minha mãe, por ser a minha inspiração e fonte de sabedoria. Sua força e dedicação em me criar e educar são exemplos que levo comigo em todas as áreas da minha vida.

A todos vocês, minha família, sou grato por estarem sempre juntos a mim, compartilhando momentos de alegria e dificuldades, e fazendo com que eu me sinta completo e amado. Sei que sem o apoio de vocês, nada disso seria possível, e por isso, quero que saibam que sou profundamente grato por tê-los em minha vida.

Por fim, gostaria de agradecer a minha orientadora, Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia, pela dedicação e paciência em guiar-me nesta jornada. Sua expertise na área e a confiança em meu potencial foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Também gostaria de agradecer aos professores que compõem a banca examinadora por dedicarem seu tempo precioso para avaliar e contribuir para a qualidade do meu trabalho. Suas críticas e sugestões serão valiosas para meu crescimento acadêmico e profissional.

“Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar.”

François Viète

RESUMO

O objeto de estudo deste trabalho acadêmico é discutir como o teorema de Pick pode ser aplicado no ensino de geometria, seja de maneira tradicional ou com o uso de recursos tecnológicos, e na resolução de problemas de olimpíadas de matemática. Para tanto, será realizada uma pesquisa bibliográfica com o objetivo de encontrar artigos e livros que abordem o assunto e que possam ser utilizados como referência na elaboração de atividades didáticas identificando as diversas aplicações do teorema de Pick. Além disso, será elaborada uma sequência didática, para uma turma do Ensino Fundamental II, contemplando um conteúdo de geometria (onde seja utilizado o teorema de Pick) toda sequência embasada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Souza (2021), Sé (2016) e outros autores que discutem a temática para que professores possam utilizar o teorema de Pick de forma efetiva em suas aulas. Outra abordagem que será explorada é a resolução de questões das provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) utilizando o teorema de Pick. Serão selecionadas questões que permitam demonstrar a aplicação prática do teorema, de forma a incentivar o seu uso em sala de aula. Para auxiliar no processo de visualização da rede de pontos no plano, ou malha quadriculada, e figuras geométricas, será utilizado o software GeoGebra. Isso permitirá a criação de desenhos precisos e facilitará a demonstração das aplicações do teorema de Pick em atividades didáticas. A pesquisa de questões das provas da OBMEP e a utilização do software GeoGebra serão importantes ferramentas para tornar o aprendizado do assunto mais dinâmico e prático. Espera-se que este trabalho contribua para o aprimoramento do ensino de geometria plana e para o desenvolvimento das habilidades dos estudantes nessa área do conhecimento.

Palavras-chave: Teorema de Pick. Aplicação em sala de aula. Geometria plana. Software GeoGebra.

ABSTRACT

The object of study of this academic work is to discuss how the Pick's theorem can be applied in the teaching of geometry, either in a traditional way or with the use of technological resources, and in solving mathematical Olympiad problems. Therefore, a bibliographic research will be carried out with the objective of finding articles and books that address the subject and that can be used as a reference in the elaboration of didactic activities, identifying the various applications of Pick's theorem. In addition, a didactic sequence will be developed for a class in Middle School, encompassing a geometry content (where Pick's theorem will be used), with the entire sequence based on the National Common Curricular Base (BNCC), the National Curriculum Parameters (PCN), Souza (2021), Sé (2016), and other authors who discuss the theme so that teachers can effectively use Pick's theorem in their classes. Another approach that will be explored is the solving of questions from the Brazilian Mathematics Olympiad for Public Schools (OBMEP), using Pick's theorem. Questions that allow for demonstrating the practical application of the theorem will be selected, in order to encourage its use in the classroom. To aid in the visualization process of the network of points on the plane, or grid mesh, and geometric figures, the GeoGebra software will be used. This will allow for the creation of precise drawings and facilitate the demonstration of the applications of Pick's theorem in didactic activities. The research of OBMEP questions and the use of the GeoGebra software will be important tools to make the learning of the subject more dynamic and practical. It is expected that this work will contribute to the improvement of the teaching of plane geometry and to the development of students' skills in this area of knowledge.

Keywords: Pick's Theorem. Application in the classroom. Plane geometry. GeoGebra software.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Georg Alexander Pick.....	21
Figura 2 - Paralelogramo	23
Figura 3 - Retângulo	24
Figura 4 - Quadrado.....	24
Figura 5 - Triângulo escaleno	24
Figura 6 - Triângulo retângulo.....	25
Figura 7 - Triângulo isósceles	25
Figura 8 - Triângulo equilátero.....	26
Figura 9 – Trapézio.....	26
Figura 10 - Exemplos de polígonos simples e não-simples.....	27
Figura 11 – Reticulado	27
Figura 12 - Polígono com vértices localizados em pontos da malha reticular	28
Figura 13 - Octógono Irregular.....	29
Figura 14 - Triângulos fundamentais.....	29
Figura 15 - Triângulos não fundamentais.....	30
Figura 16 - Paralelogramo fundamental	30
Figura 17 - Paralelogramo não fundamental	31
Figura 18 - Paralelogramo fundamental	32
Figura 19 – Geoplano	34
Figura 20 - Polígonos no Geoplano	34
Figura 21 - Area de um heptágono	35
Figura 22 - Quadrados inscritos e circunscritos ao círculo de raio 1	35
Figura 23 – Quadrado Q_2 circunscrito ao círculo de raio 1	36
Figura 24 - Octógono aproximando o círculo de raio 3	37
Figura 25 - Polígono que aproxima o círculo de raio 10	38
Figura 26 - Google Maps.....	39
Figura 27 – GeoGebra Classic.....	39
Figura 28 - Alagoas no Google Maps.....	40
Figura 29 - Ajustes na malha do GeoGebra	41
Figura 30 – Mapa de Alagoas no Geogebra	41
Figura 31 - O polígono que aproxima o mapa de Alagoas	42
Figura 32 - Interface do software GeoGebra Classic	46

Figura 33 - Página inicial do GeoGebra na internet	46
Figura 34 - Página de downloads do GeoGebra	46
Figura 35 - Imagem ampliada GeoGebra	47
Figura 36 - Barra de Ferramentas GeoGebra.....	47
Figura 37 - Função polígono na malha reticulada (rede de pontos no plano)	48
Figura 38 - Finalização de um polígono	48
Figura 39 - Polígono finalizado	49
Figura 40 - Calculando a área com o GeoGebra	49
Figura 41 - Área do Hexágono no GeoGebra.....	49
Figura 42 – Cálculo do Hexágono com o teorema de Pick	50
Figura 43 - Desenhos poligonais	50
Figura 44 - Polígono da questão 1	59
Figura 45 - Polígono da questão 1 GeoGebra.....	60
Figura 46 - Polígono da questão 2.	60
Figura 47 - Polígono da questão 2 GeoGebra.....	62
Figura 48 - Polígono da questão 3.	63
Figura 49 - polígono da questão 3 GeoGebra.....	64

LISTA SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EaD	Educação a Distância
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
UAB	Sistema Universidade Aberta do Brasil
UFPB	Universidade Federal da Paraíba

SUMÁRIO

1 MEMORIAL	14
1.1 Histórico de formação escolar	14
1.2 Histórico de formação universitária	15
1.3 Experiência como Professor de Matemática.....	15
2 INTRODUÇÃO.....	16
3 METODOLOGIA	20
4 SOBRE PICK E O TEOREMA DE PICK.....	21
4.1 O teorema de Pick.....	22
4.1.1 Paralelogramo, triângulo e trapézio	23
4.1.2 Polígono simples e não-simples	27
4.1.3 Rede (ou reticulado) de pontos no plano.....	27
4.1.4 Triângulo fundamental	29
4.1.5 Paralelogramo fundamental.....	30
4.2 Demonstração do teorema de Pick	31
5 O TEOREMA DE PICK NO ENSINO DE GEOMETRIA.....	33
5.1 Possíveis aplicações do teorema de Pick.....	33
6 O TEOREMA DE PICK NO GEOGEBRA	44
6.1 As tecnologias digitais na BNCC	44
6.2 O GeoGebra	45
6.2.1 Apresentação	45
6.2.2 Criando um polígono qualquer, breve tutorial.	47
6.2.3 Calculando a área do polígono com o teorema de Pick	50
7 UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO O TEOREMA DE PICK.....	52
7.1 Sequência Didática	53

8 O TEOREMA DE PICK NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS	57
8.1 Resumo histórico da OBMEP.....	57
8.2 Questões da OBMEP	58
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	66
REFERÊNCIAS.....	68
APÊNDICE	72

1 MEMORIAL

Meu nome é Michel Carlos de Medeiros, natural de Currais Novos, Rio Grande do Norte, nascido em 16 de março de 1986. Compartilhar minha história educacional é algo que gostaria de fazer. Ao longo do meu percurso escolar, tive a sorte de frequentar instituições públicas de ensino de excelência, das quais me sinto extremamente honrado.

1.1 Histórico de formação escolar

Comecei minha educação formal na "Escola Municipal de Nossa Senhora", em Currais Novos RN, onde cursei do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental I. Lá, aprendi muito e comecei a desenvolver meu amor pela aprendizagem.

Em seguida, mudei-me para o "Colégio Comercial", escola municipal também em Currais Novos RN, onde cursei do 5º ao 9º ano do Ensino Fundamental II. Nessa escola, tive acesso a uma educação de qualidade, que me preparou para os próximos desafios acadêmicos que viriam pela frente.

Ao chegar ao Ensino Médio, deparei-me com um dilema que muitos estudantes enfrentam: trabalhar ou estudar. Optei por conciliar o trabalho com os estudos, no entanto, essa escolha me trouxe muitas dificuldades e prejudicou-me no início. Todavia, como acredito que a educação é a chave para um futuro melhor, decidi prosseguir e optei por uma modalidade de ensino que me auxiliaria nessa conciliação: o supletivo, objetivando concluir o Ensino Médio o mais rápido possível sem prejuízo ao trabalho.

Todo o meu Ensino Médio, cursei na "Escola Estadual Professora Creuza Bezerra", em Currais Novos RN, em seguida, diante de minha realidade social, segui de vez para o mercado de trabalho, abandonando assim, o sonho de ingressar em uma universidade. Essa foi uma escolha difícil, pois sempre sonhei com uma formação acadêmica de nível superior, mas necessária. Ao finalizar esse curso, aprendo verdadeiramente que é possível superar obstáculos quando se tem determinação e perseverança.

1.2 Histórico de formação universitária

Depois de concluído o Ensino Médio em 2002, eu decidi continuar meus estudos apenas através de cursos profissionalizantes para suprir a demanda do mercado de trabalho. Essa busca constante por conhecimento me permitiu adquirir novas habilidades e conhecimentos valiosos que seriam úteis em minha carreira, mas eu sabia que precisava de uma formação superior para alcançar melhores oportunidades na vida.

Durante os anos de 2015 a 2017, dediquei-me a estudar para o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), pois, percebi que a formação superior era essencial para o meu futuro e, por isso, não medi esforços para me preparar para ingressar no ensino superior. Esse ingresso se deu através do Processo Seletivo para ingresso em cursos de graduação da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), no âmbito do Sistema Universidade Aberta do Brasil (UAB), modalidade de Educação a Distância (EaD).

1.3 Experiência como Professor de Matemática

Até o momento, não tive a oportunidade de vivenciar situações em sala de aula como docente de matemática. No entanto, a experiência mais próxima disso ocorreu durante as práticas orientadas nos Estágios dois e quatro onde realizei intervenções como docente estagiário. Todos os meus quatro Estágios Supervisionados se deram na Escola Estadual De Ensino Fundamental e EJA Felix Daltro sob a supervisão da professora Juliana Paula Correia.

Os estágios supervisionados tiveram uma importância crucial na minha formação, uma vez que me proporcionou a oportunidade de colocar em prática os conhecimentos teóricos, observar e interagir com a rotina escolar, desenvolver habilidades pedagógicas e refletir sobre a prática docente. Essa experiência foi fundamental para a construção da minha identidade profissional como futuro professor e para aprimorar minhas competências, permitindo uma formação mais contextualizada e conectada com as demandas da educação básica, mesmo durante um contexto pandêmico complexo, por conta da COVID-19.

2 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objeto de estudo discutir como o teorema de Pick pode ser aplicado no ensino de geometria, seja de maneira tradicional ou com o uso de recursos tecnológicos, e na resolução de problemas de olimpíadas de matemática. Este teorema é muito importante para o estudo da geometria plana no que se refere ao cálculo de áreas de certas figuras planas uma vez que ele estabelece uma relação entre a área de um polígono e o número de pontos inteiros em seu interior e fronteira, o que permite que sejam realizados cálculos precisos e exatos envolvendo a área de polígonos, de maneira mais simples e eficiente.

Inicialmente, será apresentada uma breve biografia de Georg Alexander Pick e em seguida será introduzido o assim denominado teorema de Pick, publicado em 1899. Vale salientar que serão abordados alguns eventos importantes da vida de Pick assim como os conceitos básicos necessários para a compreensão do teorema de Pick.

Em seguida, abordaremos algumas aplicações do teorema de Pick em sala de aula, com o objetivo de identificar as possibilidades didáticas de utilização deste teorema em diferentes níveis de ensino. Além disso, será apresentada uma sequência didática onde utilizamos o teorema de Pick contemplando atividades práticas e sugestões de exercícios que possam ser utilizados pelos professores em sala de aula no processo de ensino aprendizagem dos alunos, de maneira a tornar o ensino da geometria mais interessante para os alunos.

Será feita ainda uma pesquisa de questões nas provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) que admitam uma resolução utilizando o teorema de Pick, com o objetivo de destacar a importância dessa ferramenta para a resolução de problemas desse tipo.

Por fim, será apresentado o software GeoGebra. Ele permite a visualização e exploração de figuras geométricas, facilitando a compreensão dos princípios subjacentes. Além disso, ele oferece a possibilidade de realizar atividades interativas, permitindo aos alunos praticar e consolidar o conteúdo de forma mais envolvente e dinâmica.

Dessa forma, este trabalho oferece aos professores um conjunto de recursos didáticos para tornar o ensino da geometria mais dinâmico e interessante para os alunos.

O enfoque desta pesquisa é “O uso do teorema de Pick no ensino de geometria e na resolução de problemas de olimpíadas”. O estudo delimitado irá focar no uso do teorema de Pick como uma ferramenta importante no ensino de geometria e na resolução de problemas de olimpíadas, explorando suas possibilidades de aplicação em sala de aula e o uso de tecnologias para aprimorar essas aplicações. Especificamente, o estudo irá examinar como o teorema de

Pick pode ser utilizado para resolver problemas de geometria em competições de matemática, e como ele pode ser ensinado em sala de aula, utilizando ainda recursos tecnológicos para auxiliar no aprendizado.

A presente pesquisa é motivada pela dificuldade que os professores enfrentam ao ensinar geometria, envolvendo a necessidade de tornar conceitos abstratos mais concretos, desenvolver habilidades visuais e espaciais nos alunos, e superar a falta de interesse ou motivação em relação à matéria.

Ao discutir como o teorema de Pick pode ser aplicado em sala de aula, é possível entender como ele pode ser utilizado para auxiliar no ensino de geometria e como pode ser uma ferramenta útil para os alunos.

A discussão sobre a possibilidade de utilizar o teorema de Pick de forma alternativa na resolução de problemas de geometria permite explorar a flexibilidade do teorema e como ele pode ser aplicado de forma criativa em diferentes situações.

A apresentação de ferramentas tecnológicas disponíveis para auxiliar no ensino e na aplicação do teorema de Pick permite que os professores tenham conhecimento sobre opções alternativas de ensino, e como elas podem ajudar a engajar os alunos e tornar o aprendizado mais eficiente.

Por fim, a discussão sobre como os professores podem integrar essas ferramentas em suas aulas de forma eficaz é importante para que possam ser utilizadas da melhor forma possível e com resultados significativos no processo de ensino e aprendizagem. É necessário conhecer as vantagens e desvantagens do uso de softwares em relação ao ensino tradicional de geometria para decidir qual abordagem é mais adequada para cada situação.

Para problematizar esse tema, eu investiguei: Como o teorema de Pick pode ser aplicado em sala de aula? É possível utilizar o teorema de Pick de forma alternativa na resolução de problemas de geometria? Existem ferramentas tecnológicas disponíveis que podem auxiliar no ensino e na aplicação do teorema? Quais são as vantagens e desvantagens do uso de softwares em relação ao ensino tradicional de geometria? Como os professores podem integrar essas ferramentas em suas aulas de forma eficaz?

Nesse sentido, o objetivo geral da pesquisa é discutir a relevância do Teorema de Pick no contexto da geometria e explorar suas aplicações em atividades didáticas que envolvam o cálculo de figuras geométricas plana buscando incentivar e promover sua utilização efetiva em sala de aula, com o intuito de contribuir para a resolução de problemas desafiadores, como os encontrados em competições de olimpíadas matemáticas.

Para alcançar o objetivo geral do trabalho, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos: Realizar uma revisão bibliográfica sobre o teorema de Pick e sua história e origens; Pesquisar como os professores podem aplicar de forma eficaz em sala de aula o teorema de Pick; Identificar possibilidades de utilização do teorema de forma alternativa na resolução de problemas de geometria; Apresentar questões de geometria aplicada na OBMEP onde seria possível sua resolução; Explorar o GeoGebra, ferramenta disponível para auxiliar no ensino do teorema; Analisar as vantagens e desvantagens do uso de ferramentas tecnológicas no ensino de geometria.

A fundamentação teórica se baseou na análise crítica de diferentes obras que abordam o Teorema de Pick e suas aplicações, abrangendo também a história e a origem do Teorema de Pick, seus conceitos iniciais, a demonstração do teorema e possíveis aplicações em sala de aula. Buscou-se também explorar diferentes abordagens que podem ser utilizadas pelos professores para ensinar geometria de forma mais atrativa. As obras de:

- “Teorema de Pick: Uma abordagem para o cálculo de áreas de polígonos simples”
- Abreu (2015);
- “O teorema de Pick” - Hermes (2015);
- “O teorema de Pick e algumas aplicações para os Ensinos Fundamental II e Médio”
- Sé (2016);
- “Sugestões para aplicação do teorema de Pick na educação básica” - Junior e Micena (2014);
- “Meu professor de matemática e outras histórias” - Lima (1991).

Foram usadas como referências para embasar nosso estudo. Essas fontes abordam diferentes pontos sobre o tema, oferecendo informações relevantes e contribuindo para a compreensão do assunto em estudo.

O presente trabalho está estruturado em 5 capítulos. O primeiro capítulo aborda a história e origem do teorema de Pick, com base nas referências de Abreu (2015), Freitas (2018). Essa análise histórica é fundamental para compreender quem foi Pick e seu teorema na história. Além disso, foi apresentado definições de figuras geométricas e necessárias a compreensão do teorema finalizando com a demonstração de Lima (1991).

Em seguida no foi abordado as possíveis aplicações do teorema de Pick na sala de aula, especificamente em conteúdos de geometria. As referências de Souza (2021), Junior e Micena (2014) e Sé (2016) foram utilizadas como base para essa análise. Essas fontes bibliográficas

fornece exemplos práticos de como o teorema de Pick pode ser incorporado no ensino, permitindo aos alunos explorar e compreender conceitos geométricos de forma mais concreta.

Posteriormente, foram abordadas as tecnologias digitais BNCC, com referências à BNCC (2017), ao GeoGebra (2023). No momento seguinte, foi apresentado o software GeoGebra, com um breve tutorial e exemplos práticos de configuração e utilização do GeoGebra na construção de polígonos simples com base no trabalho de Junior (2022).

No capítulo seguinte apresentei uma proposta de sequência didática para trabalhar a introdução do Teorema de Pick em uma aula sobre um determinado conteúdo geométrico visando facilitar a assimilação do conteúdo pelos alunos. Essa sequência utiliza o GeoGebra, ferramenta tecnológica que aprimora a compreensão dos alunos em relação aos conceitos geométricos e teve como autores principal para embasamento Freitas (2018) e Junior (2022).

Finalmente, neste trabalho, busquei questões presentes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) que pudessem ser solucionadas também pelo teorema de Pick, apresentando duas questões exemplificativas. No entanto, devido à existência de condições prévias necessárias para uma aplicação correta do teorema, decidi investigar também se haveria uma questão que não aceitasse a utilização do teorema de Pick, o que também foi exemplificado em uma questão.

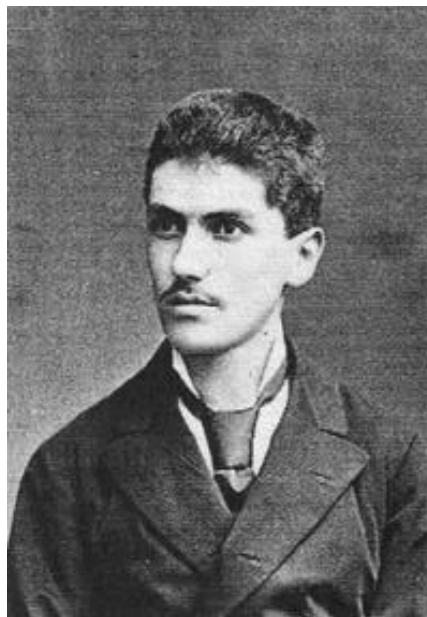
3 METODOLOGIA

A pesquisa adotada para este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) consiste em uma revisão bibliográfica, com o propósito de explorar a história, as origens, a aplicação e as vantagens/desvantagens do teorema de Pick no ensino de geometria. Essa escolha metodológica se justifica pela necessidade de realizar uma análise aprofundada da literatura existente sobre o tema, a fim de compreender de maneira abrangente as contribuições teóricas e práticas relacionadas ao uso desse teorema no contexto educacional. Ao realizar a revisão bibliográfica, serão selecionados e examinados artigos, livros, teses e outros materiais acadêmicos pertinentes, a fim de estabelecer um embasamento sólido para as discussões e conclusões apresentadas neste trabalho. Além disso, a revisão bibliográfica permitirá identificar possíveis lacunas de conhecimento e direcionar futuras pesquisas na área do ensino de geometria, com enfoque no teorema de Pick.

4 SOBRE PICK E O TEOREMA DE PICK

O propósito deste capítulo é examinar o teorema de Pick e contextualizar sua origem, abordando desde a história de vida de George Alexander Pick, seu criador, até o desenvolvimento dos conceitos fundamentais e resultados secundários que permitiram sua concepção. O intuito é compreender o ambiente que envolve o teorema e fornecer uma visão abrangente do assunto.

Figura 1 - Georg Alexander Pick



Fonte: Imagem extraída de Wikipédia (2023)

Segundo Fritsch (2001), Georg Alexander Pick nasceu em Viena em 1859, oriundo de uma família judaica. Ingressou na Universidade de Viena em 1875, quando tinha apenas dezesseis anos de idade. No ano subsequente, publicou seu primeiro artigo de matemática, graduando-se posteriormente em 1879, com qualificação em Matemática e Física, o que o habilitou a ministrar ambas as disciplinas. Na mesma universidade, obteve seu título de doutorado em 1880. Exercendo sua profissão nas universidades de Praga e Leipzig na Alemanha.

Além de suas realizações acadêmicas, é digno de nota que Pick se tornou o reitor da Faculdade Alemã em Praga em 1901, onde orientou cerca de 20 alunos em seus doutoramentos. Entre eles, Charles Loewner foi o mais famoso, tendo sido agraciado com um prêmio por seu doutorado sobre teoria de funções geométricas em 1917.

Além disso, outro aspecto importante na vida de Pick foi sua amizade com Albert Einstein. Pick participou da comissão que recomendou Einstein para a cadeira de Física na Universidade de Praga e, a partir desse momento, os dois se tornaram amigos íntimos, havendo uma ampla troca de conhecimentos científicos. Ainda segundo Fritsch (2001), eles também compartilhavam um interesse pela música, o que os levou a formar um quarteto musical com outros dois amigos que também eram professores da universidade.

De acordo com Freitas (2018), Pick concentrou seus estudos no campo da matemática, tendo escrito um total de 67 artigos científicos abordando tópicos como Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculos de Integrais e Geometria. Dentre eles destaca-se o famoso teorema de Pick – Pick’s Theorem - que apareceu no seu artigo de oito páginas, Geometrisches zur Zahlenlehre, publicado em Praga em 1899.

Embora simples, esta fórmula tem sido muito útil, mas ficou em anonimato por muitos anos. Acredita-se que o próprio Pick não tenha dado grande importância à sua descoberta, publicando-a em uma seção pouco prestigiada de matemática em Praga chamada Sitzungsber. Foi somente após setenta anos, em 1969, que o matemático polonês Władysław Hugo Dyonizy Steinhaus publicou o teorema de Pick em um de seus livros, dando-lhe maior destaque.

Segundo Abreu (2015), Pick voltou a Viena em 1927, após se aposentar, e foi eleito membro da Academia de Ciências e Artes da República Tcheca como reconhecimento por sua vida dedicada aos grandes estudos. Entretanto, quando os nazistas assumiram o poder, Pick foi expulso da academia, preso e levado para o campo de concentração de Theresienstadt em 1942, onde faleceu apenas duas semanas depois.

4.1 O teorema de Pick

A presente seção possui o intuito de fornecer brevemente o conhecimento de alguns tópicos necessários para a demonstração posterior do teorema de Pick.

Conforme Oliveira e Carobina (2017), o teorema de Pick estabelece a fórmula,

$$A = I + \frac{B}{2} - 1.$$

empregada para mensurar a área “A” de um polígono simples, cujos vértices correspondem a pontos pertencentes a uma rede (ou reticulado) de pontos no plano (cf. Figura 11). Onde “I” é

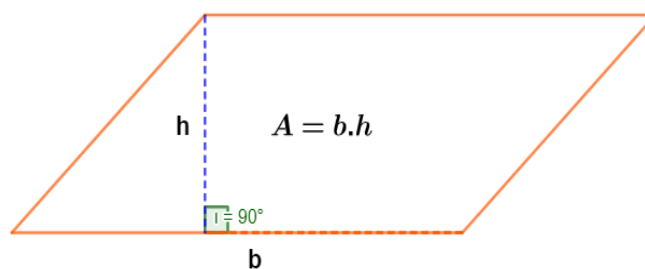
a quantidade de pontos contidos no interior do polígono e “B” é a quantidade de pontos que estão sobre os lados (segmentos de reta) do polígono (cf. Figura 12).

Uma apresentação adequada do teorema de Pick requer o conhecimento dos conceitos básicos de retângulo, triângulo e trapézio, a compreensão da distinção entre polígonos simples e não-simples, assim como um entendimento prévio sobre triângulos e paralelogramos fundamentais. Além disso, é essencial compreender a definição de rede (ou reticulado) de pontos no plano. Esses conhecimentos iniciais são indispensáveis para uma compreensão satisfatória do tema e serão abordados na sequência, com a revisão da definição de alguns quadriláteros, triângulo e polígonos simples.

4.1.1 Paralelogramo, triângulo e trapézio

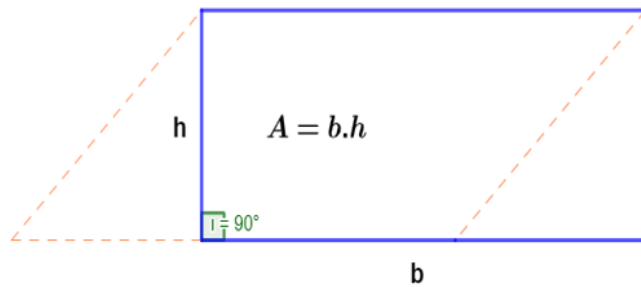
Um paralelogramo (Figura 2) é uma figura geométrica plana formado por quatro lados, sendo dois pares de lados paralelos (e necessariamente, os lados paralelos tem o mesmo comprimento). Além disso, os ângulos opostos têm a mesma medida. Essas características essenciais do paralelogramo o distinguem de outras figuras geométricas e ajudam a identificá-lo. Ele é o caso mais geral entre os quadriláteros com pares de lados paralelos. De fato, retângulos e quadrados, são casos especiais de paralelogramos.

Figura 2 - Paralelogramo

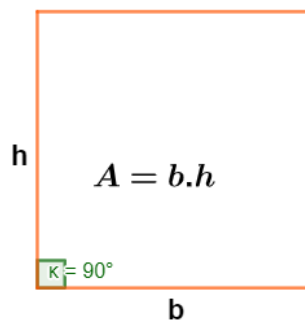


Fonte: Do autor

O retângulo (Figura 3) é um quadrilátero com quatro ângulos internos retos (medindo 90°) e congruentes. Seus lados opostos são paralelos, tornando-o um paralelogramo. Quando os lados têm a mesma medida, o retângulo se torna um quadrado (cf. Figura 4), que é um caso especial de retângulo. A fórmula utilizada para calcular a área é dada por, $A = b \cdot h$. As linhas tracejadas mostram que um retângulo é um caso especial do paralelogramo como mencionado no parágrafo anterior.

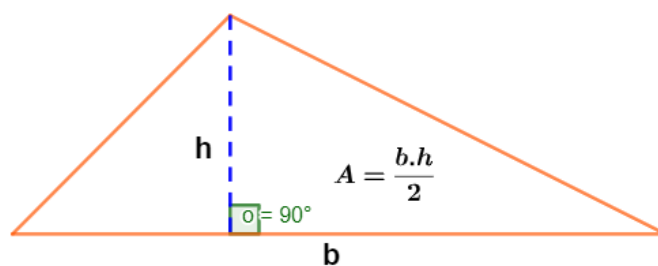
Figura 3 - Retângulo**Fonte:** Do autor

Um quadrado (Figura 4) é um paralelogramo que possui quatro lados congruentes e quatro ângulos também congruentes e retos (medindo 90°).

Figura 4 - Quadrado**Fonte:** Do autor

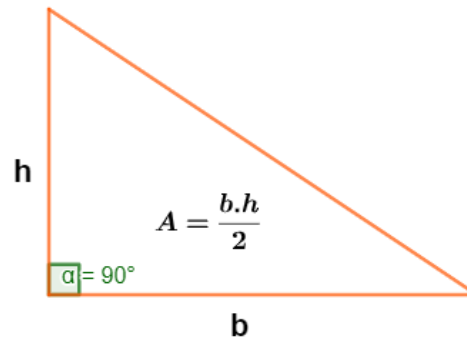
Um triângulo é uma figura geométrica plana formada por três lados e três vértices. Sua área é dada pela fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. No que segue será especificado em cada caso a altura “ h ” e a base “ b ”, utilizada para o cálculo da sua área.

Um triângulo escaleno (Figura 5) é um triângulo com três lados e três ângulos distintos entre si.

Figura 5 - Triângulo escaleno**Fonte:** Do autor

O triângulo retângulo (Figura 6) possui um ângulo interno reto (de 90°), e os outros dois ângulos agudos, com medidas menores que 90° .

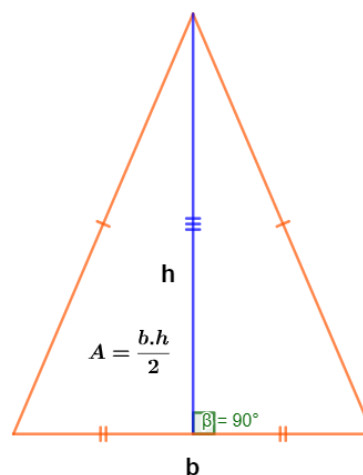
Figura 6 - Triângulo retângulo



Fonte: Do autor

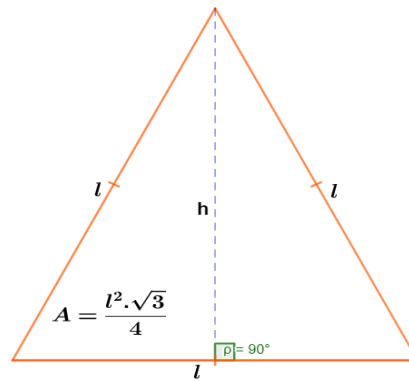
Um triângulo isósceles (Figura 7) é aquele que apresenta dois lados com medidas iguais, enquanto o terceiro lado, conhecido como base, pode ter uma medida diferente dos demais. Para encontrar a área de um triângulo isósceles usamos a fórmula da área de um triângulo qualquer.

Figura 7 - Triângulo isósceles

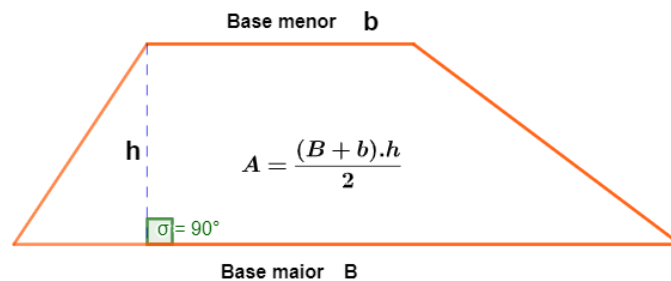


Fonte: Do autor

Triângulos equiláteros (Figura 8) possuem três lados de igual comprimento, onde os três ângulos internos são congruentes e possuem medida de 60° cada. Esses triângulos também são chamados de triângulos equiângulos. Neste caso a área é dada por $A = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$.

Figura 8 - Triângulo equilátero**Fonte:** Do autor

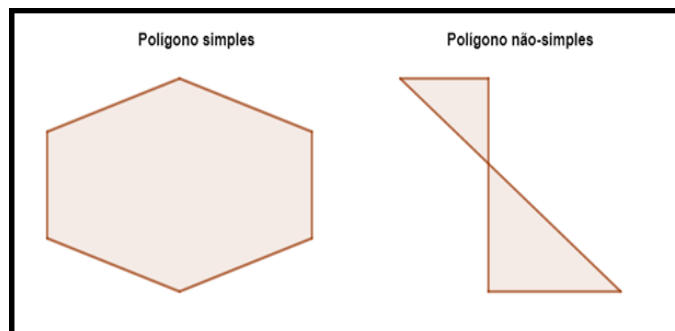
O trapézio (Figura 9) é uma figura da geometria plana caracterizada por possuir quatro lados. Dentre esses lados, dois são paralelos e são denominados bases. Assim como o retângulo, o losango e o quadrado, o trapézio é classificado como um quadrilátero, ou seja, um polígono com quatro lados. Portanto, compartilha de todas as características e propriedades fundamentais dos quadriláteros. A fórmula utilizada para calcular a área é dada por, $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$.

Figura 9 – Trapézio**Fonte:** Do autor

4.1.2 Polígono simples e não-simples

Um polígono é uma figura geométrica plana formada por segmentos de reta que podem ser classificados como polígono simples, quando os segmentos de reta não se interceptam, ou polígono não-simples, quando os segmentos de reta se interceptam, conforme ilustrado na Figura 10.

Figura 10 - Exemplos de polígonos simples e não-simples

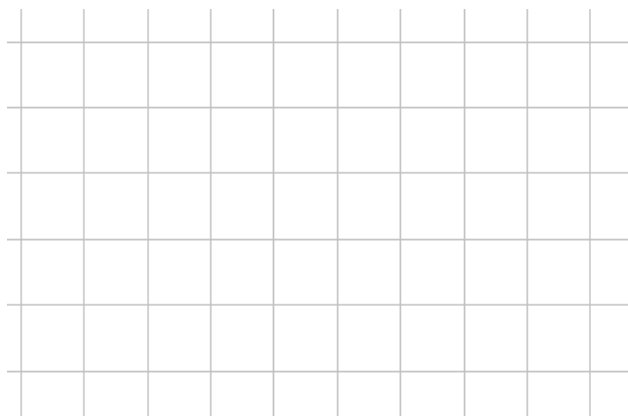


Fonte: Do Autor

4.1.3 Rede (ou reticulado) de pontos no plano

Sua definição consiste num conjunto infinito de pontos coplanares dispostos regularmente ao longo de retas paralelas horizontais e verticais, de modo que a distância entre pontos consecutivos é igual a uma unidade. Na Figura 11 é apresentado um exemplo de reticulado.

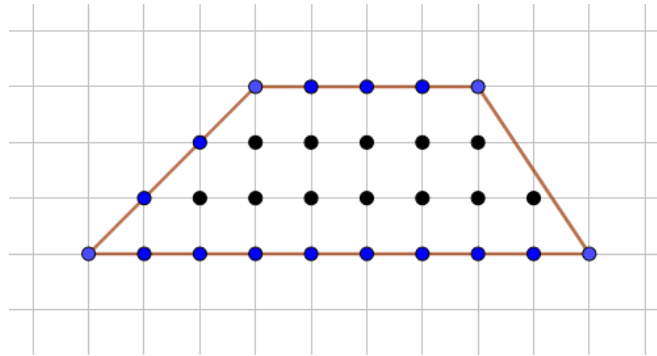
Figura 11 – Reticulado



Fonte: Do autor

Para utilizar a fórmula de Pick, é necessário ter um reticulado em que a distância entre os pontos consecutivos seja constante como na Figura 11 e que o polígono cuja área queremos calcular tenha todos os seus vértices localizados em pontos do reticulado como na Figura 12.

Figura 12 - Polígono com vértices localizados em pontos da malha reticular



Fonte: Do autor

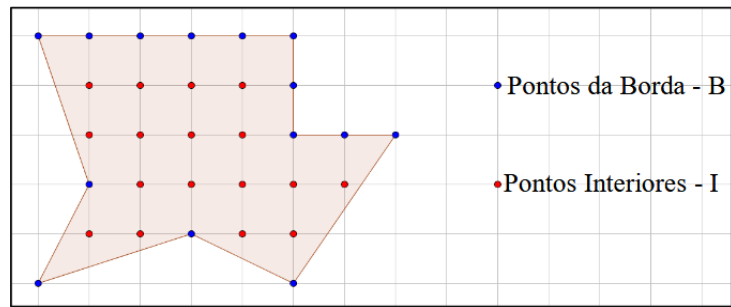
Ainda, durante a elaboração de todo o trabalho, empregar-se-á esta rede (ou reticulado) de pontos no plano, visto que para a comprovação do teorema de Pick e sua plena aplicação, como veremos mais adiante, é imprescindível que os vértices dos polígonos estejam contidos no reticulado.

Continuando ainda com definições pertinentes ao teorema de Pick temos a Figura 13, ilustrada por Atz (2015), que apresenta as seguintes definições:

- Pontos internos (I): são os pontos contidos no interior do polígono, ilustrados na Figura 13 em pontos vermelhos.
- Pontos da borda (B): são os pontos que estão sobre os lados (segmentos de reta) do polígono, exemplificados na Figura 13 em pontos azuis.

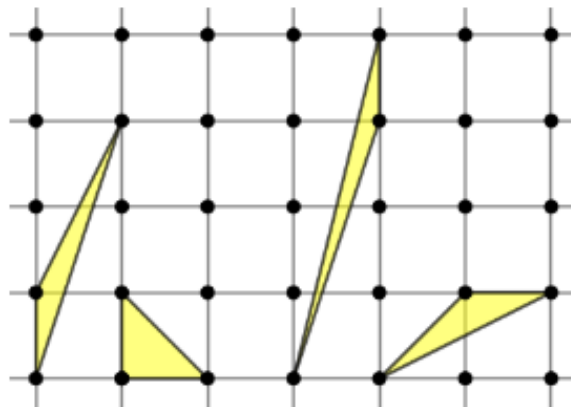
Finalizando, ainda na Figura 13, a título de exemplificação visualizamos um Octógono que apresenta 17 pontos interiores (logo $I=17$) e 14 pontos na borda (logo $B=14$). A representação será em unidades de área ($u.a.$) uma unidade generalista que é usada quando a unidade de medida real não importa na questão. Aplicando o teorema de Pick temos:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1 = 17 + \frac{14}{2} - 1 = 17 + 7 - 1 = 23 \text{ u. a.}$$

Figura 13 - Octógono Irregular**Fonte:** Atz (2015)

4.1.4 Triângulo fundamental

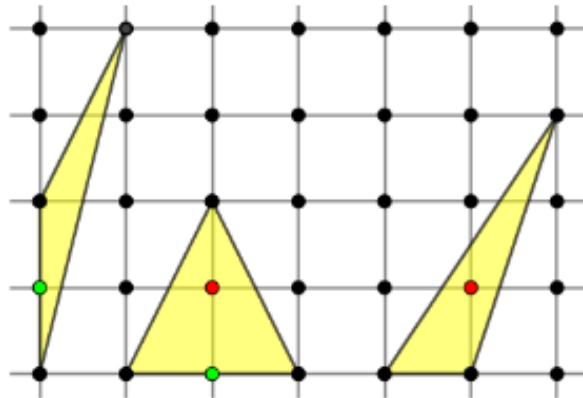
No seu trabalho, Junior (2022) introduz o conceito de triângulo fundamental, também conhecido como triângulo primitivo, utilizado na geometria para se referir a um triângulo que possui exclusivamente os seus três vértices na rede de pontos no plano, sem que nenhum outro ponto, seja na borda ou no interior do triângulo, faça parte dessa rede. Na Figura 14, são ilustrados alguns exemplos de triângulos fundamentais.

Figura 14 - Triângulos fundamentais**Fonte:** Junior (2022)

Como podemos observar, todos esses triângulos fundamentais tem área igual a $\frac{1}{2} u$ (sendo u a unidade de medida escolhida, que corresponde a distância entre dois pontos consecutivos).

Na Figura 15 apresentamos 3 triângulos que não são fundamentais retirados também de Junior (2022), uma vez que não verificam as condições em 4.1.4.

Figura 15 - Triângulos não fundamentais

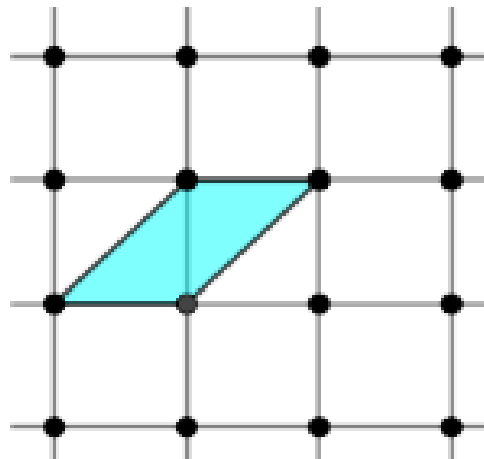


Fonte: Junior (2022)

4.1.5 Paralelogramo fundamental

Já um paralelogramo é fundamental quando apenas seus quatro vértices estão sobre a rede (ou reticulado) de pontos no plano.

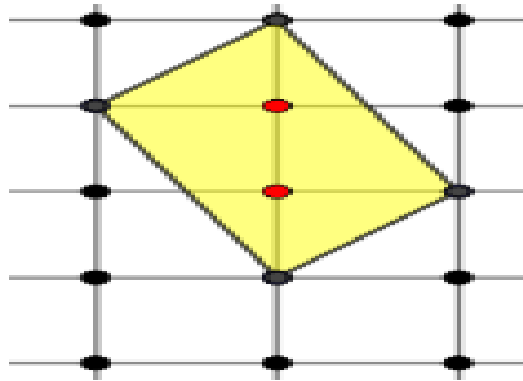
Figura 16 - Paralelogramo fundamental



Fonte: Do autor

É possível notar na Figura 16 que, ao se traçar qualquer uma das duas diagonais do paralelogramo em questão, é possível decompor o paralelogramo em dois triângulos fundamentais. O que já não é possível com o paralelogramo da Figura 17.

Figura 17 - Paralelogramo não fundamental



Fonte: Do autor

Com base nos conceitos previamente apresentados e na fórmula de Pick que foi introduzida anteriormente, prosseguimos agora com a demonstração do teorema.

4.2 Demonstração do teorema de Pick

Existem várias demonstrações para o teorema em questão. No presente trabalho será exposta uma das demonstrações, a qual é fundamentada na obra "Meu professor de Matemática e outras histórias", de autoria de Elon Lages Lima.

Na demonstração proposta por Lima (1991, p. 104), são empregados alguns Teoremas e um Corolário, dentre os quais se destaca no presente trabalho o Teorema 1, a seguir apresentado.

Teorema 1. Se ABC é um triângulo fundamental então $ABCD$ é um paralelogramo fundamental.

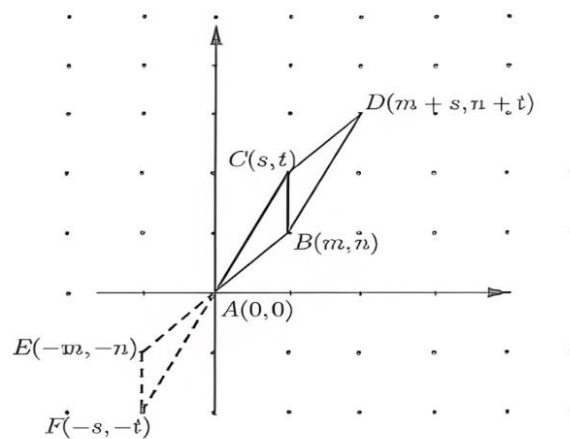
Considerando o ponto $A(0, 0)$ como a origem de um sistema de coordenadas cartesianas no plano, em que os pontos da rede possuem coordenadas inteiras, podemos definir os vértices do triângulo ABC como $B(m, n)$ e $C(s, t)$, sendo m e n primos entre si. O quarto vértice do paralelogramo, D , terá coordenadas $(m + s, n + t)$.

O triângulo AEF é formado pelos pontos $A(0, 0)$, $E(-m, -n)$ e $F(-s, -t)$, onde trocamos os sinais de ambas as coordenadas dos pontos do triângulo ABC . É importante ressaltar que o triângulo AEF não possui outros pontos com coordenadas inteiras além dos seus vértices, tornando-o um triângulo fundamental.

O triângulo BCD é formado pelos pontos $P'(x + m + s, y + n + t)$, obtidos somando $m + s$ à abscissa e $n + t$ à ordenada de um ponto arbitrário $P(x, y)$ do triângulo AEF . Se as coordenadas de P' forem inteiras, as coordenadas de P também serão inteiras. Como o triângulo AEF é fundamental, o mesmo se aplica ao triângulo BCD .

Conclui-se, portanto, que os únicos pontos com coordenadas inteiras no paralelogramo $ABCD$ são seus vértices, ou seja, o paralelogramo $ABCD$ também é fundamental. A presente demonstração pode ser encontrada na página 104, do livro “Meu professor de matemática e outras histórias” sob o título “Teorema 1”. (LIMA, 1991, p. 104)

Figura 18 - Paralelogramo fundamental



Fonte: (LIMA, 1991, p. 104)

Na sequência, abordaremos a aplicação do teorema de Pick no ensino de geometria. Essa abordagem promove o desenvolvimento de habilidades como raciocínio lógico, resolução de problemas e aplicação de conceitos matemáticos em situações práticas. Assim, o ensino do teorema de Pick contribui para a compreensão da geometria e prepara os estudantes para tópicos futuros, como trigonometria e cálculo.

5 O TEOREMA DE PICK NO ENSINO DE GEOMETRIA

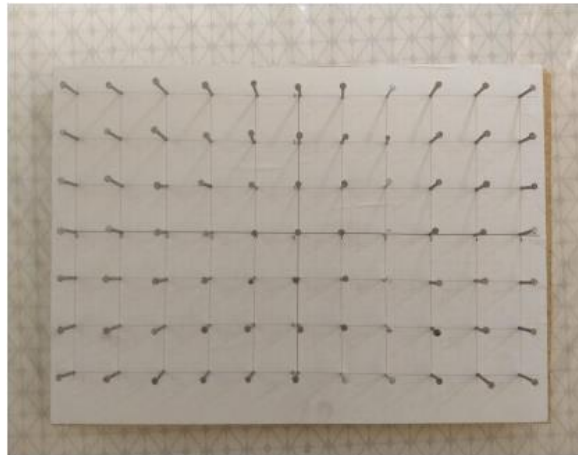
O conceito de área pode ser difícil de entender para muitos estudantes porque requer um nível de abstração que não é comum na educação básica. Muitas vezes, os alunos confundem área com perímetro e pensam que a dimensão da área é o comprimento. No entanto, quando as figuras geométricas são colocadas dispostas sobre uma rede (ou reticulado) de pontos no plano, fica mais fácil entender a ideia de área como a quantidade de quadrados da rede que cabem na figura. Por outro lado, o perímetro está relacionado com a quantidade de lados da rede de pontos utilizados para desenhar o contorno da figura geométrica. O que está de acordo com:

Baltar (1996), ao estudar a aquisição da relação entre comprimento e área na escola, relata as dificuldades que estudantes dos anos finais da educação básica encontram, em primeiro lugar, em reconhecer medidas de uma figura como um de seus elementos constituintes e, em segundo, em distinguir as medidas de área e de perímetro. Em tal pesquisa, foi evidenciado o fato de que os aspectos da aprendizagem de diferentes elementos de medida (de comprimento, de área, etc.) são específicos e diversos entre si; assim, a ideia de área de uma figura plana não é sempre reconhecida como uma característica de tal figura. (BALTAR 1996, apud HENRIQUE 2011, p. 28)

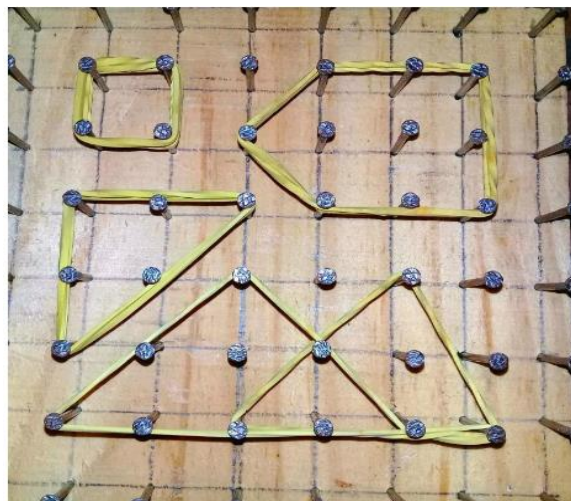
É evidente que a compreensão adequada de tópicos fundamentais em Matemática, como área e perímetro, é crucial para o entendimento de vários outros conceitos e implicações que estão intrinsecamente relacionados como já mencionado. Portanto, se esses temas não forem bem compreendidos durante o Ensino Fundamental II, isso pode ter consequências negativas significativas na assimilação de outros conhecimentos matemáticos. A próxima seção trará autores que sugerem algumas aplicações do teorema de Pick.

5.1 Possíveis aplicações do teorema de Pick

De acordo com Souza (2021) uma das aplicações mencionadas é o uso do teorema de Pick no Geoplano, conforme ilustrado na Figura 19. O Geoplano é um instrumento de confecção simples e que auxilia significativamente na compreensão dos alunos em relação ao conceito de área por meio da construção de polígonos diversos. Essa aplicação pode ser incorporada nas aulas de geometria, abordando conteúdos como a construção de triângulos fundamentais, a construção de triângulo não fundamental e a contagem de triângulos fundamentais dentro de um polígono, entre outros.

Figura 19 – Geoplano

Fonte: Sousa (2021)

Figura 20 - Polígonos no Geoplano

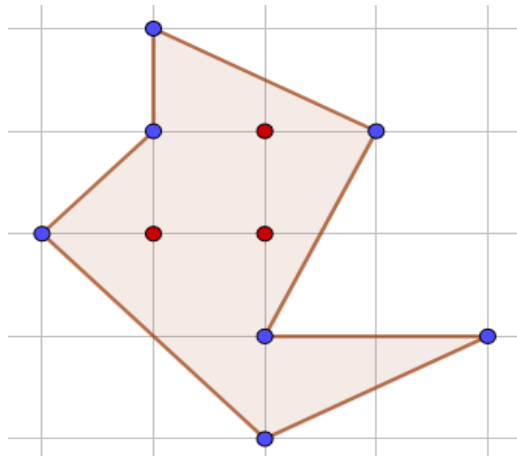
Fonte: Gazire (2019)

Na Figura 20 é apresentado exemplo de Geoplano confeccionados de forma totalmente artesanal. Esse exemplo ilustra que, mesmo na ausência de recursos tecnológicos, o que é uma realidade em muitas escolas, é possível recorrer à criatividade sem comprometer o aprendizado e entendimento do conceito. Na Figura 19 foram utilizados papel, régua, lápis comum, madeira e pregos para a confecção, enquanto na Figura 20 foram utilizados apenas madeira, régua, lápis comum e pregos.

Conforme mencionado por Dorotéo (2021), a falta de material didático publicado sobre o teorema de Pick demanda que os professores desenvolvam propostas adaptadas em sequências didáticas que envolvam o uso desse teorema, levando em consideração o nível da turma e o contexto geral, bem como os recursos disponíveis. Um exemplo de conteúdo adaptado é o

cálculo de áreas de figuras planas utilizando a ferramenta tecnológica GeoGebra, como ilustrado na Figura 21. O GeoGebra será tema do próximo capítulo.

Figura 21 - Area de um heptágono

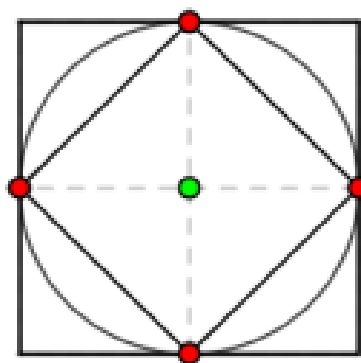


Fonte: Do autor

Junior e Micena (2014) traz o teorema de Pick como uma ferramenta útil para se estimar o valor de π .

Inicialmente, podemos expressar matematicamente a relação entre π e a área do círculo (A_c) através da fórmula, $\pi = \frac{A_c}{r^2}$. Para estimar o valor de π usando o teorema de Pick, consideramos polígonos que se ajustam e aproximam melhor o círculo dado.

Figura 22 - Quadrados inscritos e circunscritos ao círculo de raio 1



Fonte: Junior e Micena (2014)

Considerando a Figura 22, que representa um círculo de raio 1. Considere um círculo que está entre os quadrados inscritos e circunscritos a ele. Agora vamos estimar o valor de π utilizando as áreas desses dois quadrados como aproximação. Para aproximar a área do

quadrado interno Q_1 , podemos considerar que existem quatro pontos com coordenadas inteiras que estão localizados nas arestas do polígono Q_1 , ou seja, $B = 4$, além de um ponto interno a Q_1 , ou seja, $I = 1$. Aplicando o teorema de Pick $A = I + \frac{B}{2} - 1$ temos que a área do quadrado interno 1 (Q_1) é,

$$A(Q_1) = I + \frac{B}{2} - 1 = 1 + \frac{4}{2} - 1 = 2 \text{ u. a.}$$

.

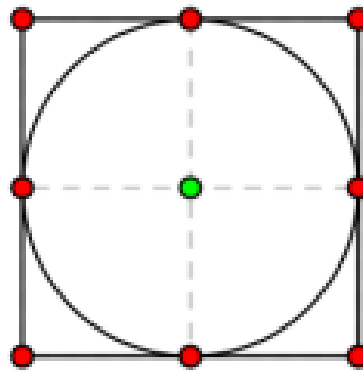
Pela fórmula da relação entre π e a área do círculo (A_c) temos,

$$\pi = \frac{A_c}{r^2} \cong \frac{A(Q_1)}{r^2} = \frac{2}{1^2} = 2.$$

Porém, inicialmente essa é uma aproximação muito ruim.

Agora, vamos considerar o quadrado Q_2 que circunscreve o círculo de raio 1, conforme Figura 23.

Figura 23 – Quadrado Q_2 circunscrito ao círculo de raio 1



Fonte: Junior e Micena (2014)

No quadrado Q_2 , identificamos oito pontos que pertencem às suas arestas, $B = 8$ e um ponto interior ao quadrado, $I = 1$. Dessa forma, temos essa configuração para a aproximação e aplicação do teorema.

$$A(Q_2) = I + \frac{B}{2} - 1 = 1 + \frac{8}{2} - 1 = 4 \text{ u. a.}$$

Pela fórmula da relação entre π e a área do círculo (A_c) temos,

$$\pi = \frac{A_c}{r^2} \cong \frac{A(Q_2)}{r^2} = \frac{4}{1^2} = \frac{4}{1} = 4.$$

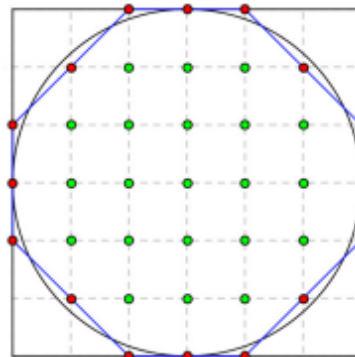
Essa aproximação ainda se mostra grosseira para π .

No entanto, podemos calcular a média aritmética das duas aproximações encontradas:

$$\pi \cong \frac{(Q_1 + Q_2)}{2} = \frac{(2 + 4)}{2} \cong 3.$$

Essa média aritmética é uma aproximação ainda ruim, porém significativamente melhor do que as aproximações anteriores. Agora, vamos considerar um círculo de raio 3 e efetuar o mesmo procedimento. Nesse caso, o octógono P_1 é o polígono que proporciona a melhor aproximação ao círculo, conforme ilustrado na Figura 24.

Figura 24 - Octógono aproximando o círculo de raio 3



Fonte: Junior e Micena (2014)

Nesse caso, ao aplicarmos a fórmula do teorema de Pick no Octógono (Figura 24) podemos observar que os pontos no reticulado que estão localizados nas arestas do Octógono é, $B = 16$, e os que estão no seu interior corresponde a $I = 21$ portanto, pelo teorema de Pick temos:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1.$$

$$A = 21 + \frac{16}{2} - 1 = 28 \text{ u. a.}$$

Pela fórmula da relação entre π e a área do círculo (A_c) temos,

$$\pi = \frac{A_c}{r^2} \cong \frac{A(P_1)}{r^2} = \frac{28}{3^2} = 3,111 \dots$$

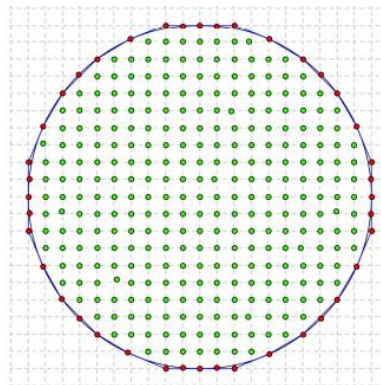
Essa aproximação é significativamente melhor do que as anteriores. No entanto, é possível melhorar ainda mais a aproximação.

Agora, considerando um círculo de raio 10 (Figura 25), o polígono R que oferece a melhor aproximação para esse círculo é um polígono com 40 pontos de coordenadas inteiras em suas arestas, $B = 40$ e 293 pontos de coordenadas inteiras no seu interior, $I = 293$. Aplicando o teorema de Pick temos que,

$$A = I + \frac{B}{2} - 1.$$

$$A(R) = 293 + \frac{40}{2} - 1 = 312 \text{ u. a.}$$

Figura 25 - Polígono que aproxima o círculo de raio 10



Fonte: Junior e Micena (2014)

Pela fórmula da relação entre π e a área do círculo (A_c) temos,

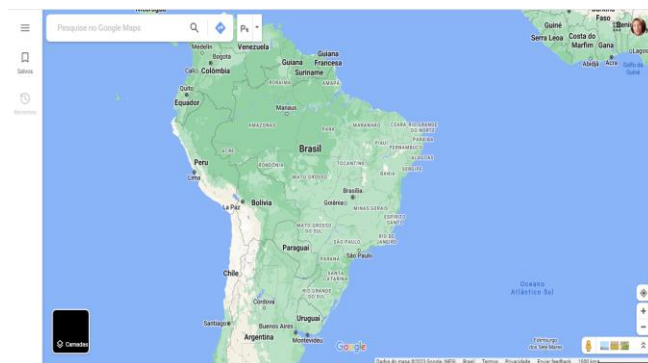
$$\pi = \frac{A_c}{r^2} \cong \frac{A(R)}{r^2} = \frac{312}{10^2} = 3,12.$$

Que resulta em uma aproximação razoavelmente boa. No entanto, esse processo pode ser repetido de forma contínua, aproximando manualmente qualquer círculo por meio de

polígonos que apresentem uma quantidade progressivamente maior de pontos com coordenadas inteiras (tanto nas suas bordas quanto no seu interior). Dessa forma, essa quantidade de pontos se aproximará infinitamente, permitindo que π se aproxime cada vez mais do seu valor real. (JUNIOR; MICENA, 2014)

Ainda de acordo com Junior e Micena (2014), é interessante trabalhar com os alunos o cálculo da área aproximada de estados e regiões encontrados em mapas, utilizando ferramentas avançadas, como o Google Maps (Figura 26) e o GeoGebra (Figura 27).

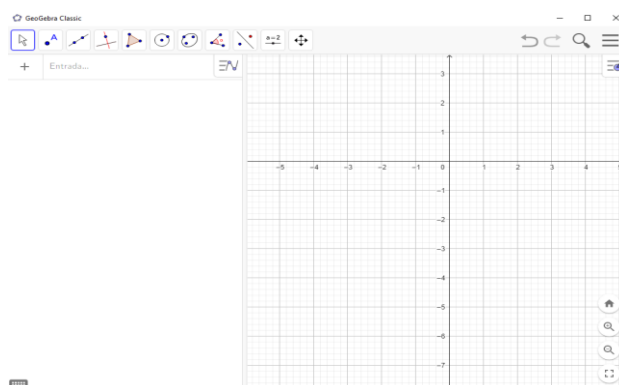
Figura 26 - Google Maps



Fonte: Google Maps (2023)

O Google Maps é uma ferramenta de mapeamento, navegação e pesquisa de locais amplamente utilizada em todo o mundo. Com recursos como direções precisas, visualização de mapas detalhados e imagens de satélite, e navegação em tempo real, o Google Maps se tornou indispensável para pessoas que precisam se deslocar ou encontrar informações geográficas confiáveis. Já o aplicativo GeoGebra é apresentado mais detalhadamente, com um breve tutorial, na seção 5.2.

Figura 27 – GeoGebra Classic



Fonte: GeoGebra (2023)

No estudo conduzido por Junior e Micena (2014) é explorada a aplicação do teorema de Pick para o cálculo aproximado dessas áreas e regiões. Eles utilizam tanto o Google Maps quanto o GeoGebra como ferramentas para realizar esses cálculos.

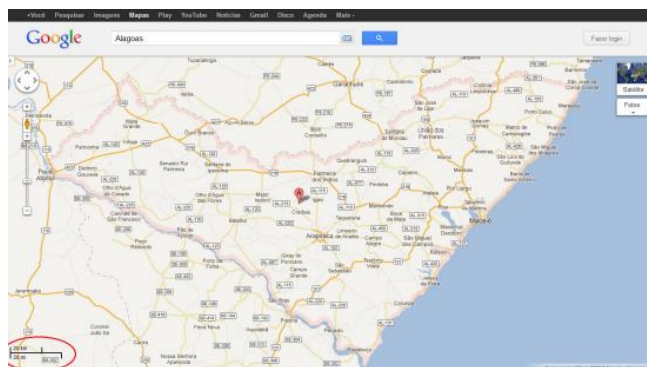
Esses dois softwares são trabalhados em conjunto, onde a imagem do Google Maps é inserida no GeoGebra, possibilitando o cálculo da área através da rede (ou reticulado) de pontos no plano do GeoGebra, conforme mostrado na Figura 28 e sequenciado na Figura 30 respectivamente.

No exemplo em questão, destacado na Figura 28, o estado de Alagoas é utilizado como um caso ilustrativo. Dessa forma, o estado de Alagoas é empregado como um exemplo prático para demonstrar como o teorema de Pick pode ser aplicado para estimar áreas.

Essa atividade pode ser realizada tanto de forma individual, dependendo dos recursos tecnológicos disponíveis, quanto em grupos de 3 a 6 alunos, com uma duração mínima de 6 aulas para um acompanhamento e aproveitamento satisfatório. No laboratório de informática, os alunos seguirão os seguintes passos, tomando como exemplo o mapa do estado de Alagoas.

Inicialmente cada equipe deverá acessar o Google Maps e pesquisar o mapa de Alagoas, ajustando o nível de zoom para 20 km em relação a 20 mi (milhas), como ilustrado na Figura 28. Os 20 km correspondem a um segmento com uma medida de 1,5 cm. Portanto, a escala é determinada pela razão entre 20 km e 1,5 cm, equivalente a aproximadamente 13,333... km/cm. Utilizaremos o valor de 13,33 como a taxa de semelhança para estimar a área real do Estado de Alagoas.

Figura 28 - Alagoas no Google Maps



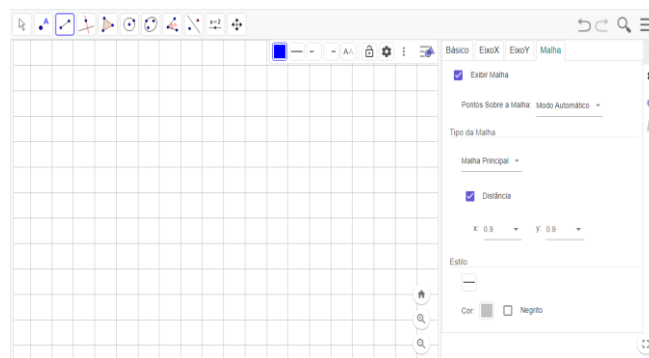
Fonte: Junior e Micena (2014)

Em seguida, o aluno deve usar a combinação de teclas *Alt + Prt Sc* para capturar a imagem do mapa no Google. Em seguida, ele deve abrir um programa de edição de imagens,

como o Paint, e colar a imagem copiada do Google Maps. Por fim, o arquivo deve ser salvo em uma pasta do computador.

Posteriormente, o estudante deve abrir o programa Geogebra e acessar o Menu *Opções*. Em seguida, selecionar *Configurações* e, dentro desta opção, escolher *Janela de Visualização*. Na guia Malha, é necessário ativar a alternativa *Exibir Malha* e ajustar a distância entre os pontos da malha para que fique o mais próximo possível de 1 cm. Neste caso, a distância que apresentou a maior aproximação de 1 cm foi 0.9, como evidenciado na Figura 29.

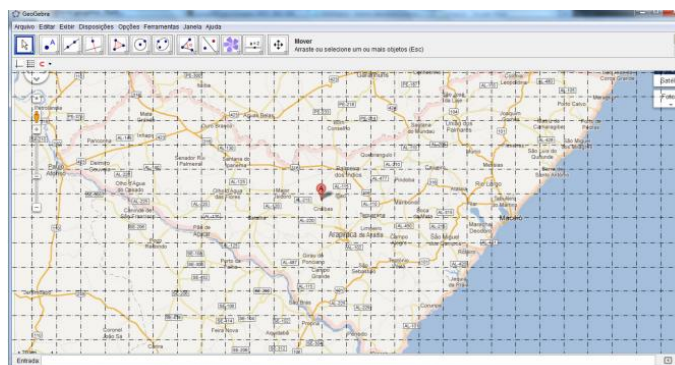
Figura 29 - Ajustes na malha do GeoGebra



Fonte: GeoGebra (2023)

Após a configuração da malha, o próximo passo é clicar no décimo botão e selecionar a terceira opção. Em seguida, o aluno deve clicar na tela e escolher a pasta do computador onde a imagem está armazenada. Em seguida, clicar com o botão direito do mouse em *Propriedades*, acessar a guia *Básico*, selecionar a opção *Imagem de Fundo* e finalizar clicando em Fechar, conforme ilustrado na Figura 30.

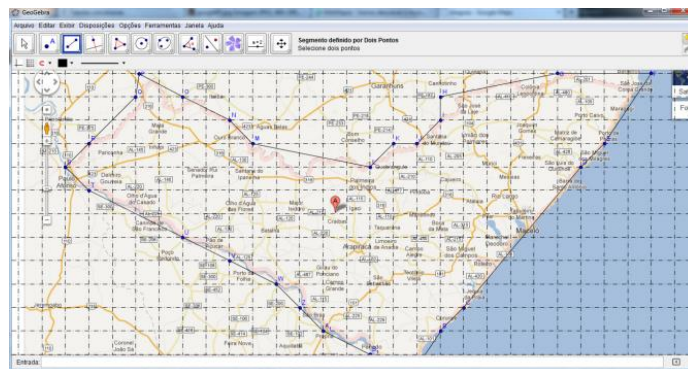
Figura 30 – Mapa de Alagoas no Geogebra



Fonte: Junior e Micena (2014)

Agora, o estudante deverá delimitar o mapa de Alagoas usando um polígono com vértices de coordenadas inteiras, respeitando assim a condição necessária do teorema de Pick. Ele irá traçar segmentos que conectam dois vértices de coordenadas inteiras até que todos esses segmentos formem um polígono que se aproxime da melhor maneira possível da região do mapa. Para realizar essa tarefa, o aluno deverá clicar no terceiro botão e em seguida selecionar a opção *Segmento*. A área do polígono será uma aproximação para a área do mapa em questão ficando com o layout conforme mostrado na Figura 31.

Figura 31 - O polígono que aproxima o mapa de Alagoas



Fonte: Junior e Micena (2014)

Agora, considerando que o mapa é uma representação semelhante da superfície real do Estado, o grupo deve determinar a área aproximada de Alagoas usando a relação entre as áreas de duas figuras semelhantes. Nesse caso, a taxa de semelhança é representada pelo quadrado de 13,33. Ao levar em conta que o polígono construído é uma aproximação do mapa, é viável estimar a área aproximada de Alagoas.

Utilizando a fórmula de Pick, podemos calcular a área do polígono (P) que construímos anteriormente. A fórmula é dada por,

$$A = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Onde (B) representa o número de pontos na fronteira do polígono e (I) representa o número de pontos no interior do polígono.

Substituindo os valores dados temos,

$$A(P) = 134 + \frac{31}{2} - 1 = 148,5$$

Considerando a área real do mapa de Alagoas como A e a razão de semelhança entre duas figuras como o quadrado da taxa de semelhança (13,33 km/cm), podemos concluir que,

$$\frac{A}{148,5} = 13,33^2 \Rightarrow A = 148,5 \cdot 177,6889 = 26.386,8 \text{ km}^2$$

A área real do mapa de Alagoas é de aproximadamente 27.830,661 km², segundo informações obtidas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Ao considerar o cálculo realizado, é importante levar em conta que a margem de erro é de aproximadamente 5%, o que pode ser considerado um valor aceitável. Esse erro pode ser atribuído a fatores como o relevo do terreno, possíveis imprecisões presentes no mapa e o método utilizado para aproximar o mapa por meio de segmentos de retas. Considerando esses aspectos, o resultado obtido é satisfatório, mesmo que tenham sido utilizadas técnicas manuais durante o processo.

Como vimos, as aplicações apresentadas aqui dão uma ideia da capacidade de contribuição do teorema de Pick nas aulas de geometria envolvendo polígonos simples, mesmo que sejam irregulares. Relembrando, os autores mencionam o teorema como uma ferramenta usada para estimar o valor de π e áreas de regiões geográficas, enfatizando a possibilidade de introduzi-lo no ensino básico para aprimorar a compreensão dos alunos sobre geometria.

Na sequência, vamos explorar o GeoGebra, um software mencionado anteriormente, que pode auxiliar na manipulação do teorema de Pick com os alunos, como já foi demonstrado. Ao utilizar o GeoGebra para explorar o teorema de Pick, os alunos podem criar polígonos, definir suas coordenadas e calcular suas áreas de forma rápida e precisa. Essa abordagem prática e visual ajuda os estudantes a compreenderem melhor o teorema, além de promover o engajamento e a participação ativa nas aulas de geometria.

6 O TEOREMA DE PICK NO GEOGEBRA

6.1 As tecnologias digitais na BNCC

No contexto educacional atual, a integração das tecnologias digitais tornou-se uma necessidade para potencializar a aprendizagem dos alunos. A BNCC reconhece a importância desse uso e inclui competências que incentivam o aproveitamento dessas ferramentas como meio de promover uma educação mais significativa e alinhada às demandas do século XXI.

Ao explorar as competências presentes na BNCC podemos identificar aquelas que abordam o uso das tecnologias como ferramentas educacionais. Essas competências visam desenvolver habilidades nos alunos para lidar de forma crítica e consciente com recursos tecnológicos, resolver problemas de maneira estruturada e utilizar ferramentas digitais de forma ética e responsável. Essas competências serão elencadas a seguir, destacando seu papel na formação dos alunos.

Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BNCC, 2017, p. 9).

A BNCC (2017) ainda elenca competências específicas de matemática para o ensino fundamental como

Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados (BNCC, 2017, p. 267).

6.2 O GeoGebra

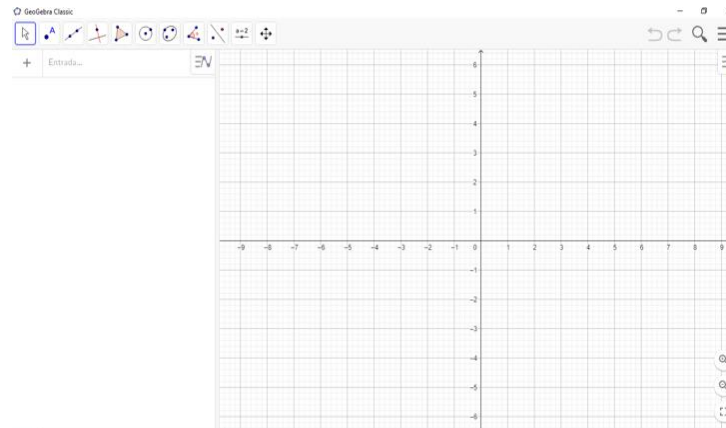
Nesta seção, vamos fazer uma breve introdução sobre o programa GeoGebra. Serão abordados o seu surgimento, interface, recursos e o processo de construção de objetos matemáticos utilizando a ferramenta. O GeoGebra, um software versátil e poderoso, oferece uma ampla gama de funcionalidades que podem auxiliar no ensino e aprendizagem da matemática, tornando o estudo mais dinâmico e interativo. Através do GeoGebra, é possível explorar conceitos matemáticos, criar gráficos, realizar cálculos, construir figuras geométricas e muito mais. Sua interface intuitiva facilita a utilização, mesmo para aqueles com menos experiência em tecnologia. Portanto, o GeoGebra se destaca como uma ferramenta valiosa para professores e alunos no ensino da matemática.

6.2.1 Apresentação

O GeoGebra (Figura 32) é um programa educacional com finalidades didáticas, projetado para ser utilizado em ambientes de ensino e aprendizado da disciplina de matemática. Essa ferramenta versátil permite realizar cálculos numéricos, executar operações algébricas e explorar diversas representações gráficas de objetos matemáticos. Desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgo, e Yves Kreis, da Universidade de Luxemburgo, o GeoGebra oferece aos usuários a opção de fazer o download do software por meio do website oficial www.geogebra.org clicando botão *Baixar Aplicativos* (cf. Figura 33) e em seguida clicando em *download* na guia *GeoGebra Clássico 6* (cf. Figura 34) ou utilizá-lo de forma online através do link <https://www.geogebra.org/classic>.

Independentemente da escolha, tanto a versão offline quanto a online proporcionam uma experiência completa ao aluno. Além disso, o GeoGebra é compatível com diversos sistemas operacionais, permitindo que os usuários o utilizem em diferentes dispositivos.

Figura 32 - Interface do software GeoGebra Classic



Fonte: GeoGebra (2023)

Figura 33 - Página inicial do GeoGebra na internet



Fonte: GeoGebra (2023)

Figura 34 - Página de downloads do GeoGebra



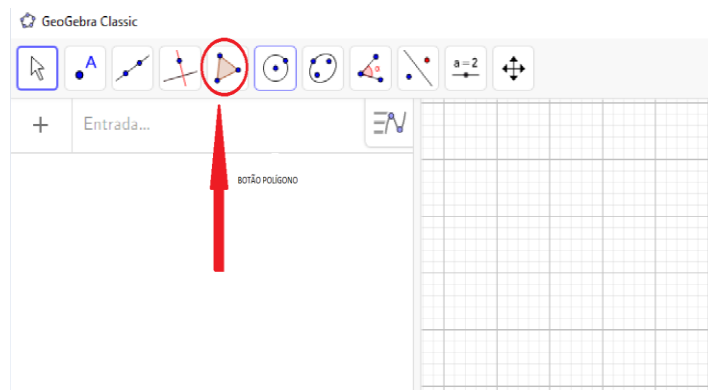
Fonte: GeoGebra (2023)

6.2.2 Criando um polígono qualquer, breve tutorial.

A interface do GeoGebra é projetada de forma a ser fácil e intuitiva de usar, proporcionando uma experiência agradável ao usuário. Para iniciar a criação de polígonos, siga os seguintes passos:

No GeoGebra, localize o botão "Polígono" conforme indicado na Figura 35.

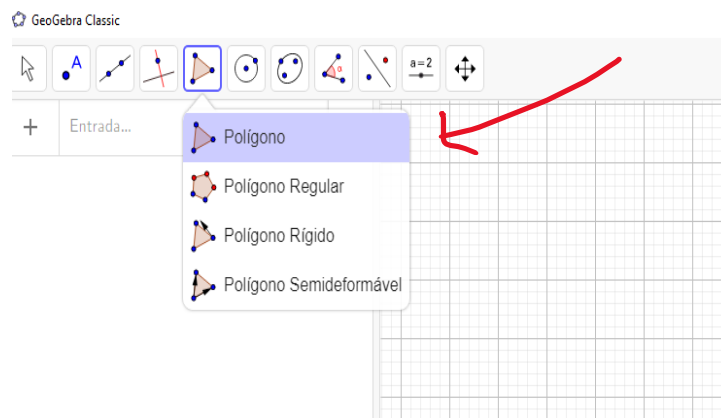
Figura 35 - Imagem ampliada GeoGebra



Fonte: GeoGebra (2023)

Em seguida, clique no botão "Polígono" conforme mostrado na Figura 36.

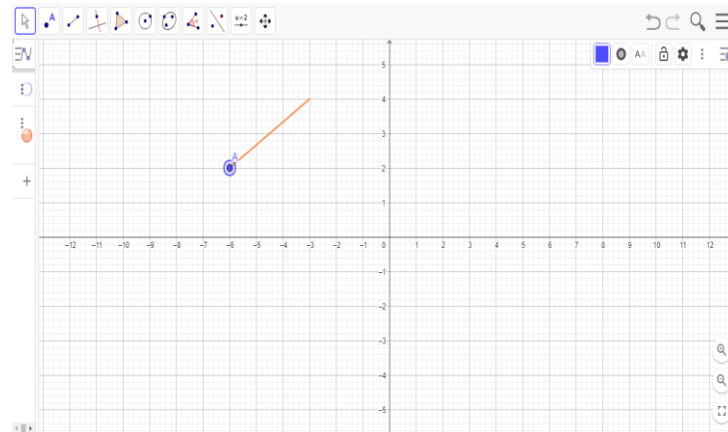
Figura 36 - Barra de Ferramentas GeoGebra



Fonte: GeoGebra (2023)

Agora, clique em pontos distintos no plano conforme mostrado nas Figuras 37 e 38.

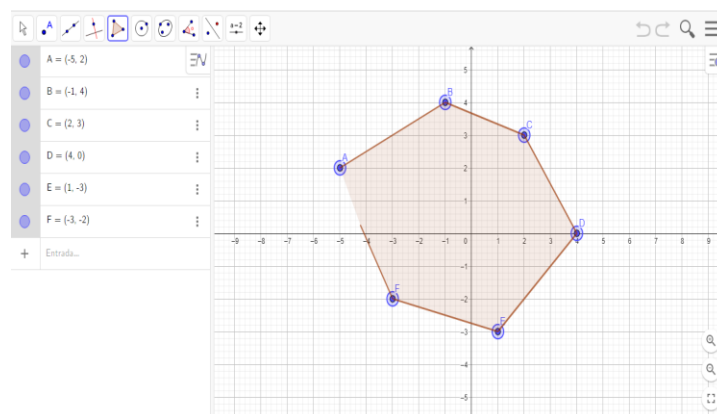
Figura 37 - Função polígono na malha reticulada (rede de pontos no plano)



Fonte: Do autor

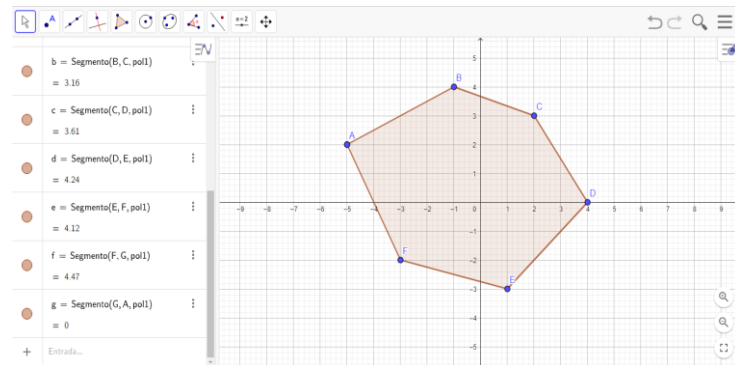
Observe que cada letra atribuída a um vértice corresponde a um clique realizado. Seguindo esses passos, você será capaz de criar o polígono desejado utilizando o GeoGebra.

Figura 38 - Finalização de um polígono

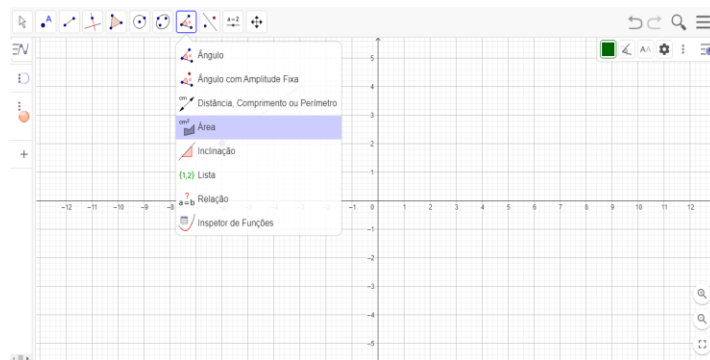
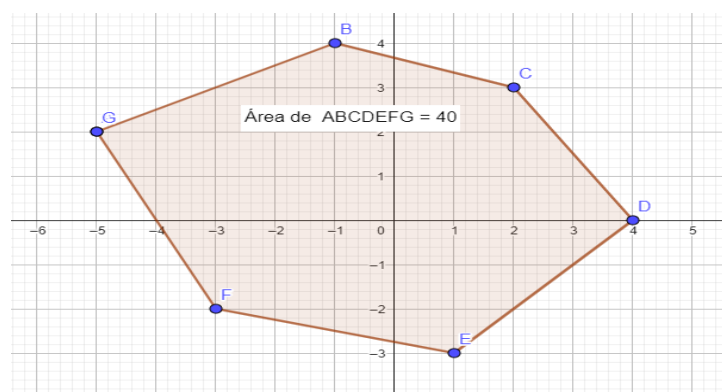


Fonte: Do autor

Continue clicando em pontos até formar o polígono desejado conforme mostrado na Figura 39 e certifique-se de começar no vértice “A” e terminar no vértice “A” para encerrar a construção do polígono. Agora vamos calcular a área desse polígono utilizando o teorema de Pick.

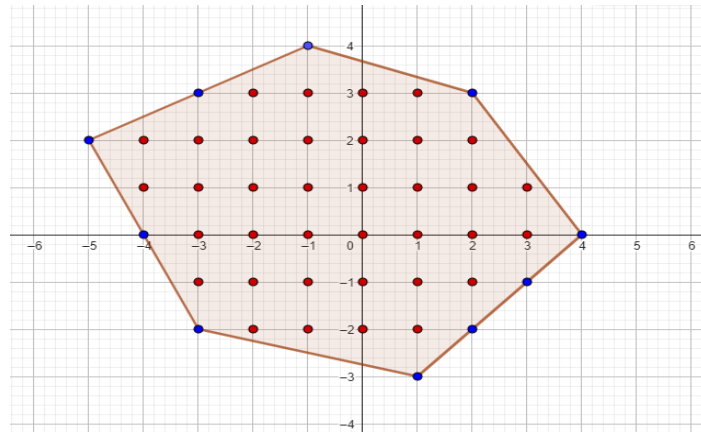
Figura 39 - Polígono finalizado**Fonte:** Do autor

Ao clicar nos botões *ângulo* e *área*, conforme ilustrado na Figura 40, e em seguida selecionar o interior de um polígono qualquer, o software exibirá o valor da área do polígono em estudo, como evidenciado na Figura 41.

Figura 40 - Calculando a área com o GeoGebra**Fonte:** Do autor**Figura 41 - Área do Hexágono no GeoGebra****Fonte:** Do autor

6.2.3 Calculando a área do polígono com o teorema de Pick

Figura 42 – Cálculo do Hexágono com o teorema de Pick



Fonte: Do autor

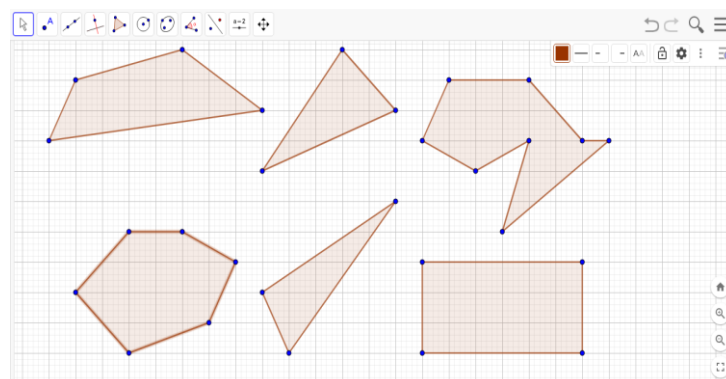
Ao Calcular a área do Hexágono (Figura 42) com o teorema de Pick temos que

$$A = I + \frac{B}{2} - 1.$$

$$A = I + \frac{B}{2} - 1 = 36 + \frac{10}{2} - 1 = 40 \text{ cm}^2.$$

Mais uma vez, utilizamos o teorema de Pick para calcular com precisão a área do polígono construído. Apresento a seguir na Figura 43 alguns exemplos de figuras poligonais criadas utilizando o GeoGebra.

Figura 43 - Desenhos poligonais



Fonte: Do autor

Inserir o GeoGebra nas aulas de geometria é uma escolha valiosa e enriquecedora. Esse software interativo oferece recursos visuais atrativos, permitindo aos alunos explorar conceitos geométricos de forma prática.

O GeoGebra é uma ferramenta tecnológica amplamente utilizada nas aulas de matemática, apresentando tanto vantagens quanto desvantagens em sua aplicação. Uma das principais vantagens é a possibilidade de visualização interativa de conceitos matemáticos. Com o GeoGebra, os alunos podem explorar de forma dinâmica e manipular gráficos, figuras geométricas e funções, o que facilita a compreensão dos conceitos abstratos e fortalece a intuição matemática.

Outra vantagem do GeoGebra é a capacidade de realizar cálculos e representações gráficas de maneira rápida e precisa. Isso permite que os alunos experimentem diferentes configurações e parâmetros, visualizando instantaneamente os efeitos dessas alterações. Além disso, o GeoGebra permite fazer construções geométricas complexas de maneira eficiente, economizando tempo e esforço.

Por outro lado, uma desvantagem do uso do GeoGebra é a possibilidade de uma dependência excessiva da tecnologia. Os alunos podem se tornar menos propensos a desenvolver habilidades manuais de cálculo e construção, tornando-se dependentes da ferramenta para resolver problemas matemáticos. Além disso, o acesso constante a recursos digitais pode levar à distração e ao desvio do foco na aprendizagem efetiva dos conceitos matemáticos, se não houver um uso adequado e orientado da ferramenta.

Portanto, ao utilizar o GeoGebra nas aulas de matemática, os professores devem equilibrar o uso da tecnologia com a exploração manual e o desenvolvimento de habilidades matemáticas fundamentais. É importante fornecer orientação e instrução adequadas para que os alunos compreendam os conceitos subjacentes e saibam como aplicá-los tanto no ambiente digital quanto no contexto real.

Continuando, será proposta uma sequência didática com o objetivo de mostrar que é possível abordar o teorema de Pick com os alunos, mesmo que frequentemente esse conteúdo não esteja incluído nos materiais didáticos tradicionais. Essa abordagem não comprometerá as metas de aprendizagem estabelecidas previamente e ainda fornecerá aos alunos um conhecimento adicional no campo da geometria.

7 UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO O TEOREMA DE PICK

No passado, acreditava-se que a aprendizagem ocorria principalmente por meio do papel do professor, que, sendo detentor do conhecimento, transmitia novos conteúdos aos alunos, que por sua vez simplesmente os absorviam, em uma abordagem mecânica, na qual o ambiente exercia uma profunda influência sobre o indivíduo, sem considerar sua capacidade reflexiva.

No entanto, nos dias atuais, compreendemos nos meios de ensino que as estratégias pedagógicas devem incentivar o aluno a pensar, questionar e criar suas próprias ideias e conceitos dentro da sala de aula. Nessa perspectiva, os professores enfrentam desafios no processo de ensino e aprendizagem de seus alunos, mas procuram adotar diferentes metodologias com o objetivo de aprimorar a experiência de aprendizagem. (MONTEIRO; CASTILHO; SOUZA, 2019)

A BNCC enfatiza as habilidades a serem adquiridas no ensino de Matemática, dividindo-as em cinco grupos para o ensino fundamental: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, e probabilidade e estatística. Já para o ensino médio, essas habilidades são agrupadas em três categorias: números e álgebra, geometria e medidas, e probabilidade e estatística.

Ela enfatiza ainda que a geometria vai além da simples aplicação de fórmulas de cálculo de área e volume, assim como da aplicação direta de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações com retas paralelas e retas secantes, ou do teorema de Pitágoras. É importante entender que a geometria não deve ser reduzida a essas abordagens mecânicas e isoladas.

E também ressalta que a geometria tem o potencial de proporcionar aos alunos uma compreensão mais profunda dos conceitos geométricos, das formas e das relações entre elementos de figuras planas e espaciais. Ela busca desenvolver o pensamento geométrico, que envolve análise, raciocínio lógico, visualização e resolução de problemas. (BRASIL, 2018, p. 272)

Portanto, o estudo da geometria deve incentivar os alunos a explorar as propriedades e os princípios subjacentes aos conceitos geométricos, estimulando sua capacidade de pensar geometricamente e aplicar esse conhecimento em situações reais e interdisciplinares.

A sequência didática consiste em uma série de atividades planejadas e interligadas entre si, criando um ambiente favorável e atrativo para o ensino de matemática. Essas atividades são organizadas de forma progressiva, etapa por etapa, com o objetivo de ensinar um conteúdo

específico. De acordo com Barbosa (2002), as sequências didáticas são uma estratégia pedagógica eficaz para promover a aprendizagem dos alunos.

Ainda de acordo com Peretti e Costa (2013), a Sequência Didática, é composta por um conjunto de atividades interligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo de forma progressiva, etapa por etapa. Essas atividades são organizadas de acordo com os objetivos que o professor deseja alcançar na aprendizagem dos alunos, e incluem avaliações que podem ocorrer ao longo de dias, semanas ou mesmo durante todo o ano letivo.

Essa abordagem pedagógica proporciona uma maneira de relacionar os conteúdos a um tema e, por sua vez, a outros, tornando o conhecimento coerente e lógico no contexto do trabalho pedagógico desenvolvido.

Nesse sentido, ao usar o teorema de Pick, o aluno se envolverá entusiasticamente nas aulas de Matemática, pois a abordagem não se limitará a conceitos abstratos, mas terá um enfoque prático. Além disso, a exploração e formulação das questões contribuirão para a experiência do aluno. Reconhecemos que estudar algo tão distante da nossa realidade, mesmo que seja necessário para uma formação geral, pode ser cansativo.

A proposta busca proporcionar aos alunos o estudo do conceito de área, abordando diversos conteúdos como razão, proporção, polígonos, perímetro, escala e outros. Além disso, durante a realização da atividade, o professor tem a oportunidade de avaliar o nível de organização da turma, estimular a argumentação durante as apresentações e avaliar a interpretação tanto dos dados fornecidos quanto do que é solicitado em cada tarefa.

Na sequência, será apresentada uma proposta de sequência didática para trabalhar a introdução do teorema de Pick em uma aula sobre um determinado conteúdo geométrico com objetivo de mostrar que é possível abordar o teorema de Pick com os alunos, facilitando a assimilação do conteúdo.

7.1 Sequência Didática

Esta seção tem como objetivo fornecer um esboço de uma sequência didática para abordar o teorema de Pick em sala de aula, especificamente com uma turma do oitavo ano do Ensino Fundamental II. Além disso, será incorporado o uso da ferramenta tecnológica GeoGebra, visando aprimorar a compreensão dos alunos em relação aos conceitos geométricos. O principal enfoque dessa sequência será a determinação de áreas de polígonos, fundamentado na pesquisa realizada por Junior (2022) em sua dissertação de mestrado.

É importante destacar que, caso não haja disponibilidade de recursos tecnológicos, o professor pode buscar alternativas, como o uso do Geoplano artesanal mencionado anteriormente, bem como a preparação antecipada de materiais impressos para os alunos. Essa abordagem incentiva os alunos a construírem ativamente as soluções propostas, conforme sugerido nesta sequência didática, garantindo que o ensino do teorema de Pick não seja comprometido.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA ENSINO FUNDAMENTAL II		
Profa. Michel Carlos de Medeiros	Turma: 8º C	Data: 9 a 18 de maio Duração: 5 aulas de 50 min cada
Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias		Componente Curricular: Matemática
Unidade Temática: Geometria	Objeto de conhecimento: Explorando áreas de polígonos com o teorema de Pick; Problemas sobre medidas envolvendo grandezas de comprimento e área; Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros; Áreas de figuras planas.	
Habilidade: (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos. (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.		
Desenvolvimento: Aula 1 – Introdução e levantamento do conhecimento prévio. Objetivo: Revisar os conteúdos que são pré-requisitos para compreender áreas de polígonos e áreas aproximadas de figuras irregulares. Recursos e/ou materiais utilizados: lousa. Atividade 1 – Apresentar o objetivo da aula, despertando a curiosidade sobre o tema. Atividade 2 – Aplicação de uma atividade impressa (Atividade 1) diagnóstica para analisar os conhecimentos prévios abordando o assunto. Atividade 3 – Após a correção da atividade em debate com a turma, realizaremos uma revisão, destacando os temas nos quais os alunos apresentaram maiores dificuldades.		

Aula 2 – Introdução ao teorema de Pick.

Objetivo: Apresentar o teorema de Pick e sua importância na geometria.

Atividade 1 – Apresentação completa do teorema de Pick.

Atividade 2 – Será distribuída aos alunos uma atividade impressa (**Atividade 2**) contendo figuras poligonais a serem respondidas em sala, com o objetivo de aprimorar ainda mais os conceitos do teorema e promover a visualização do GeoGebra, mesmo que por meio de material impresso. Além disso, a atividade incluirá uma breve biografia seguida do enunciado do teorema de Pick. No final, as folhas impressas da (**Atividade 2**) serão reservadas para uso posterior.

Atividade 3 – Após o fim da atividade, será realizado um breve debate com o objetivo de reconhecer a importância do teorema de Pick na vida cotidiana.

Aula 3 – Aplicação do teorema de Pick com o auxílio do software GeoGebra.

Objetivo: apresentar o GeoGebra como uma ferramenta de apoio reforçando a compreensão dos alunos sobre o teorema de Pick, proporcionando uma experiência mais tangível e concreta. Eles poderão explorar diferentes polígonos, variar suas medidas e acompanhar as mudanças nas áreas calculadas em tempo real, o que facilitará a compreensão dos conceitos e a aplicação prática do teorema.

Recursos e/ou materiais utilizados: Computador, GeoGebra e atividade prática.

Atividade 1 – No laboratório de informática, os alunos serão apresentados ao software GeoGebra, onde serão convidados a explorar as suas funcionalidades ligadas ao cálculo de medidas de área. Será uma atividade livre com o intuito de trazer familiaridade aos alunos junto ao aplicativo.

Atividade 2 – O professor de forma prática tirará as dúvidas dos alunos ao passo que forem surgindo, com ênfase sempre nas seguintes ferramentas úteis para a atividade:

- Malha quadriculada: possibilita a criação de uma estrutura organizada para a construção dos polígonos e a visualização das medidas.
- Ponto: permite marcar os vértices dos polígonos de forma precisa.
- Segmento de reta: auxilia na criação das arestas dos polígonos, facilitando a visualização e a medição dos comprimentos.
- Comprimento: possibilita a mensuração das arestas dos polígonos, importante para a aplicação do teorema de Pick.
- Polígonos: possibilita a construção e manipulação de polígonos com diferentes números de lados e formas.
- Áreas: fornece ferramentas para calcular e visualizar as áreas dos polígonos construídos, permitindo a aplicação direta do teorema de Pick.

Aula 4 – Resolução de Problemas de áreas com o teorema de Pick.

Objetivo: aplicação prática do que foi visto nas aulas anteriores.

Recursos e/ou materiais utilizados: folha de papel impressa (**Atividade 2**), canetas de tintas azul e vermelhas.

Atividade 1 – Dúvidas porventura não sanadas serão tiradas no primeiro momento.

Atividade 2 – Agora, será proposto aos alunos uma atividade impressa (**Atividade 3**) que consistirá em calcular as áreas, as precisas e as aproximadas, dos polígonos presentes na atividade impressa (**Atividade 2**).

Aula 5 – Aplicações do teorema de Pick no cotidiano (Reforço de conhecimentos).

Objetivo: aferir os conhecimentos construídos.

Recursos e/ou materiais utilizados: Lousa, lápis, régua, caneta ou hidrocor colorido, banner com a malha quadriculada ou a malha quadriculada projetada pelo data show.

Atividade 1 – Será realizada uma roda de debates para que os alunos expressem suas opiniões sobre o teorema de Pick e compartilhem o que aprenderam sobre sua aplicabilidade prática. Essa atividade visa promover a reflexão e identificar os pontos fortes e desafios do aprendizado do teorema.

Atividade 2 – será realizada uma revisão na lousa de todos os conceitos e detalhes do teorema visando uma consolidação dos conceitos norteadores do teorema de Pick.

Observação: Em todas as ocasiões, exceto durante o tempo no laboratório, é necessário apresentar vários exemplos desenhados na lousa para garantir um aprendizado consistente, reforçando constantemente os conceitos envolvidos.

Avaliação: Observação e registro das interações durante as aulas, produções individuais e em grupo e prova escrita.

A proposta busca introduzir uma abordagem inovadora no processo de ensino-aprendizagem de Geometria, com a utilização de novas ferramentas que demonstram a existência de múltiplos caminhos para se alcançar um resultado. Isso se torna relevante devido à apreensão que os estudantes geralmente têm em relação a esse tema e à natureza abstrata de sua abordagem tradicional. É fundamental destacar que as discussões em grupo promovem maior confiança no conteúdo aprendido, além de contribuir para o desenvolvimento das habilidades argumentativas individuais de cada aluno.

8 O TEOREMA DE PICK NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS

Neste capítulo, será abordado o potencial do teorema de Pick na resolução de questões de geometria em olimpíadas de matemática, que costumam ser solucionadas de maneira tradicional, tornando propício o surgimento de erros devido à sua complexidade e uso de fórmulas extensas.

O capítulo abordará uma breve contextualização sobre a OBMEP seguida pela exploração de duas questões específicas. Inicialmente, será apresentada a resolução tradicional dessas questões, destacando os métodos e procedimentos convencionais utilizados. Em seguida, será apresentada a resolução alternativa utilizando o teorema de Pick, demonstrando como essa ferramenta pode ser aplicada de forma eficaz na resolução de problemas geométricos.

Uma terceira questão será apresentada como forma de exemplificar um caso no qual não é possível utilizar o teorema de Pick.

8.1 Resumo histórico da OBMEP

Ao longo dos tempos, as competições matemáticas têm sido organizadas, sendo famosos os desafios nos quais renomados matemáticos arriscavam sua reputação, quantias consideráveis de dinheiro e até mesmo suas posições em prestigiadas universidades italianas.

Nessa época, muitos matemáticos dedicavam-se a encontrar soluções que pudessem ser utilizadas como "armas" poderosas nas futuras competições de habilidades matemáticas em que estivessem envolvidos. Um matemático com renome, ocupando uma cátedra universitária, desfrutava de reconhecimento público, prestígio e uma situação econômica privilegiada. (TORRENTE; REIS, 2022)

Essa posição confortável despertava o interesse de jovens matemáticos menos conhecidos, que também buscavam notoriedade e se empenhavam em vencer desafios públicos contra os respeitados e experientes matemáticos. Essas competições geralmente consistiam em uma série de trinta problemas propostos por ambas as partes, e o vencedor era aquele que resolvesse o maior número de problemas propostos pelo oponente. Esses matemáticos competiam em verdadeiros "duelos", muitas vezes impulsionados pela ambição e pelo desejo de poder. (BOYER, 1996)

Ao longo do tempo, essas competições foram gradualmente ganhando outras finalidades, sendo vistas não apenas como instrumentos de competição, mas também como ferramentas para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Além disso, elas se

tornaram importantes para avaliar e estimular políticas públicas voltadas ao aperfeiçoamento do ensino e aprendizagem da Matemática.

No Brasil, a partir do ano de 2005, foi estabelecida a OBMEP como um projeto de estímulo ao estudo da matemática, direcionado às escolas públicas, estudantes e professores em todo o território nacional. Com o objetivo de incentivar a participação, a OBMEP produz e distribui material didático, oferece bolsas de iniciação científica aos estudantes e reconhece o trabalho dos educadores, escolas e secretarias de educação. Além disso, a OBMEP prepara anualmente cerca de 30 medalhistas de ouro para representar o país em competições internacionais. (OBMEP, 2023)

A OBMEP tem como propósitos: fomentar e estimular o estudo da Matemática entre estudantes das instituições de ensino públicas; colaborar com a melhoria da qualidade da Educação Básica; identificar jovens talentosos e encorajar sua inserção nas áreas científicas e tecnológicas; incentivar o aprimoramento dos docentes das escolas públicas, contribuindo para o reconhecimento de sua profissão; estabelecer parcerias entre as escolas públicas, as universidades públicas, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas; e promover a inclusão social por meio da disseminação do conhecimento. (OBMEP, 2023)

A competição é direcionada aos alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e do Ensino Médio das escolas públicas municipais, estaduais e federais. Ela é dividida em três níveis, abrangendo diferentes séries escolares: Nível 1 para alunos do 6º e 7º anos, Nível 2 para alunos do 8º e 9º anos, e Nível 3 para alunos da 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio.

As provas são compostas por duas fases. Na Primeira Fase, todos os alunos inscritos pelas escolas públicas participantes da OBMEP realizam a prova. Apenas 5% dos alunos inscritos por escola se classificam para a Segunda Fase. É responsabilidade de cada escola selecionar os alunos com melhor desempenho na Primeira Fase, garantindo que sua cota em cada nível não seja excedida. Além disso, as escolas devem estabelecer critérios de desempate a serem aplicados, se necessário.

8.2 Questões da OBMEP

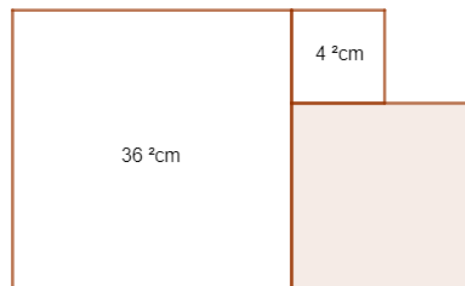
Nesta seção, como mencionado anteriormente, serão apresentadas três questões da OBMEP que podem ser resolvidas tanto de forma tradicional quanto utilizando o teorema de Pick. Será demonstrada a aplicação desse teorema como uma abordagem adicional para solucionar esses problemas geométricos, oferecendo uma perspectiva diferenciada e ampliando o leque de estratégias disponíveis aos estudantes.

Inicialmente, será apresentada a questão de forma inalterada, exatamente como foi exposta aos alunos durante a realização da prova. Em seguida, será apresentada a resolução utilizando o teorema de Pick, uma abordagem adicional para solucionar o problema de forma alternativa.

Questão – 1 (OBMEP 2022, Nível 1, Questão 5 – 1ª Fase)

A figura abaixo é formada por três quadrados. A área do maior deles é 36 cm^2 e a área do menor é 4 cm^2 . Qual é a área do terceiro quadrado?

Figura 44 - Polígono da questão 1



Fonte: OBMEP (2022)

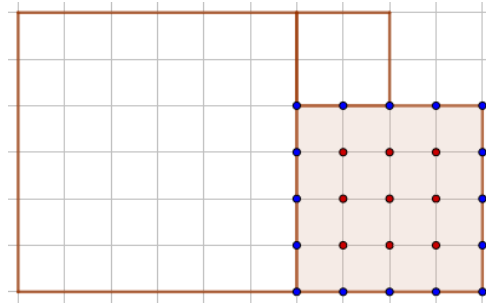
- (A) 8 cm^2 (B) 9 cm^2 (C) 12 cm^2 (D) 16 cm^2 (E) 25 cm^2

Resolução OBMEP (2022) Alternativa D

O quadrado maior tem lado medindo 6 cm e o quadrado menor tem lado medindo 2 cm , já que a área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado. Portanto, de acordo com a distribuição geométrica dos quadrados na figura, o terceiro quadrado tem lado medindo $6 - 2 = 4\text{ cm}$; logo, sua área é 16 cm^2 . (OBMEP, 2022, p. 1)

Resolução através do teorema de Pick

Utilizando a fórmula de Pick, podemos calcular o número de pontos na borda (B) e no interior (I) de uma figura representada por uma rede (ou reticulado) de pontos no plano. Na Figura 45 identificamos os pontos na borda (B) marcados em azul e os pontos no interior (I) marcados em vermelho. Ao aplicarmos a fórmula de Pick, obtemos a resposta com precisão.

Figura 45 - Polígono da questão 1 GeoGebra**Fonte:** Do autor

Portanto,

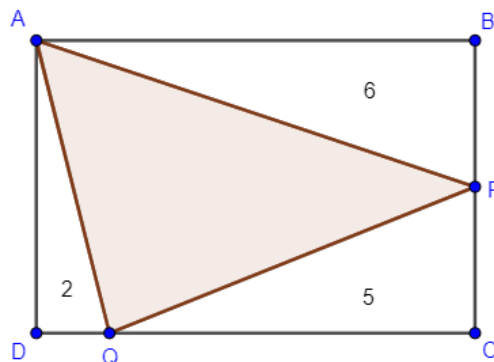
$$A = I + \frac{B}{2} - 1.$$

$$A = I + \frac{B}{2} - 1 = 9 + \frac{16}{2} - 1 = 16 \text{ cm}^2.$$

Como podemos visualizar, o resultado através do teorema de Pick foi o mesmo.

Questão – 2 (OBMEP 2022, Nível 3, Questão 19 – 1ª Fase)

O retângulo $ABCD$ é formado pelos triângulos ABP , CQP , AQD e APQ . As áreas dos triângulos ABP , CQP e AQD são, respectivamente 6, 5 e 2 cm^2 . Qual é, em cm^2 , a área do triângulo APQ ?

Figura 46 - Polígono da questão 2**Fonte:** OBMEP (2022)

- (A) 7 cm^2 (B) 8 cm^2 (C) 9 cm^2 (D) 10 cm^2 (E) 11 cm^2

Resolução OBMEP (2022) **Alternativa E**

Se $AD = BC = x$ e $AB = CD = y$, temos que a área do triângulo

$$ABP = \frac{AB \cdot BP}{2} = 6.$$

logo,

$$BP = \frac{12}{y}. \text{ Assim, } PC = BC - BP = x - \frac{12}{y}.$$

Temos também que a área do triângulo AQD é 2:

$$\frac{AD \cdot DQ}{2} = 2.$$

Logo,

$$DQ = \frac{4}{x} \text{ e } QC = DC - DQ = y - \frac{4}{x}.$$

Assim a área do triângulo PCQ é

$$\frac{PC \cdot QC}{2} = 5.$$

Usando-se as igualdades já encontradas temos

$$\left(x - \frac{12}{y}\right) \left(y - \frac{4}{x}\right) = 10.$$

Desenvolvendo-se,

$$(xy)^2 - 26xy + 48 = 0.$$

Essa última equação tem como raízes

$$xy = \frac{26 \pm 22}{2}.$$

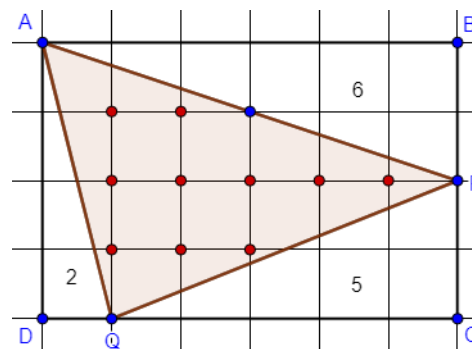
Como xy é a área do quadrilátero $ABCD$, a única raiz que interessa é $xy = 24$; logo, a área do triângulo APQ é igual a

$$24 - (6 + 5 + 2) = 11 \text{ cm}^2.$$

Resolução através do teorema de Pick

Utilizando a fórmula de Pick, podemos calcular o número de pontos na borda (B) e no interior (I) de uma figura representada por uma rede (ou reticulado) de pontos no plano. Na Figura 47 identificamos os pontos na borda (B) marcados em azul e os pontos no interior (I) marcados em vermelho. Ao aplicarmos a fórmula de Pick, obtemos a resposta com agilidade e precisão.

Figura 47 - Polígono da questão 2 GeoGebra



Fonte: Do autor

Portanto,

$$A = I + \frac{B}{2} - 1.$$

$$A = I + \frac{B}{2} - 1 = 10 + \frac{4}{2} - 1 = 11 \text{ cm}^2.$$

O teorema de Pick é um resultado matemático que relaciona a área de um polígono com o número de pontos inteiros que estão estritamente dentro do polígono e aqueles que estão exatamente sobre suas arestas. Embora o teorema seja aplicável a muitos casos de polígonos,

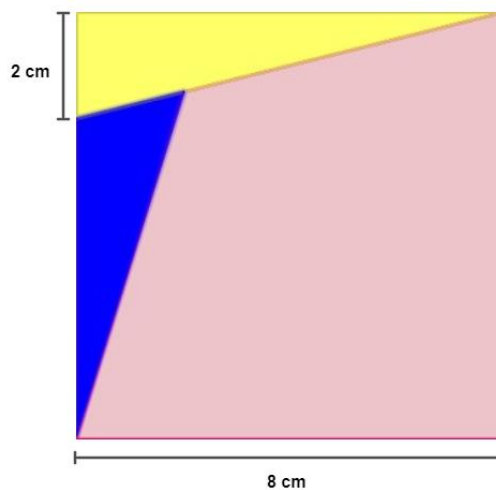
existe uma condição necessária para que ele funcione corretamente, ele é válido para polígonos cujos vértices possuem coordenadas inteiras.

Essa é uma condição necessária para que o teorema seja aplicável. Se os vértices do polígono tiverem coordenadas fracionárias ou irracionais, o teorema não poderá ser usado, conforme mostrado a seguir na questão 3 também da OBMEP.

Questão – 3 (OBMEP 2019, Nível 1, Questão 11 – 1ª Fase)

O quadrado abaixo está dividido em dois triângulos e um quadrilátero. O triângulo amarelo tem o dobro da área do triângulo azul. Qual é a área do quadrilátero rosa?

Figura 48 - Polígono da questão 3



Fonte: OBMEP (2019)

- (A) 36 cm^2 (B) 48 cm^2 (C) 52 cm^2 (D) 56 cm^2 (E) 60 cm^2

Resolução OBMEP (2019) **Alternativa C**

Observe o triângulo amarelo. Sua área é

$$A(AM) = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8 \text{ cm}^2.$$

Logo, a área do triângulo azul é 4 cm^2 . Como o quadrado tem área 64 cm^2 , o quadrilátero rosa tem área,

$$64 - 8 - 4 = 52 \text{ cm}^2.$$

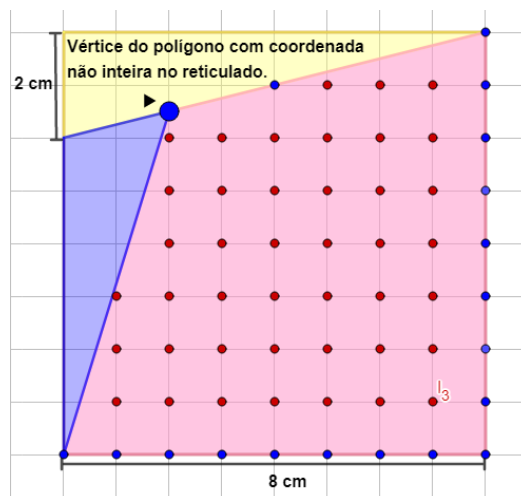
Resolução através do teorema de Pick

Ao observar a Figura 49 podemos notar que nem todos os vértices do polígono estão localizados em pontos inteiros da rede reticular. Em particular, o vértice em destaque na figura não coincide com um ponto inteiro na rede, o que inviabiliza o cálculo preciso da área utilizando o teorema de Pick. Essa condição é necessária para garantir a correta aplicabilidade do teorema.

Se continuarmos a aplicar o teorema de Pick nesse caso, obteremos resultados imprecisos para a medida da área do polígono. Portanto, nesse contexto específico, o uso do teorema de Pick seria inviável para determinar com precisão a área do polígono.

Vamos continuar com o cálculo para fins de comprovação. Na Figura 49 é possível observar os pontos marcados em azul na borda (*B*) do polígono e os pontos marcados em vermelho no interior (*I*) do mesmo.

Figura 49 - polígono da questão 3 GeoGebra



Fonte: Do autor

Aplicando o teorema de Pick temos,

$$A = I + \frac{B}{2} - 1.$$

$$A = I + \frac{B}{2} - 1 = 42 + \frac{18}{2} - 1 = 50 \text{ cm}^2.$$

A resposta correta é 52 cm^2 , o que evidencia sua inaplicabilidade para casos que não satisfaçam sua condição, de ter todos os vértices em pontos inteiros.

A utilização do teorema de Pick proporciona agilidade e simplicidade, resultando em uma economia significativa de tempo na resolução de cada questão. Além disso, seu uso substitui a necessidade de empregar várias fórmulas para o cálculo de áreas, o que nem sempre é imediato e pode depender de manipulações prévias da figura. Essas manipulações estão relacionadas ao tipo de polígono obtido após o processo de composição ou decomposição da figura.

Contudo, o teorema de Pick requer um domínio adequado para sua aplicação correta. Caso contrário, detalhes importantes do seu conceito podem ser omitidos, o que resulta em erros grosseiros e pode prejudicar a compreensão e reputação do teorema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, foi possível alcançar o objetivo geral, que era discutir como o teorema de Pick pode ser aplicado no ensino de geometria, seja de maneira tradicional ou com o uso de recursos tecnológicos, e na resolução de problemas de olimpíadas como também os objetivos específicos. O texto apresentou uma abordagem completa sobre o teorema, desde uma breve biografia de Pick até exemplos práticos de sua aplicação em situações de sala de aula.

Foi discutido como o teorema de Pick pode ser aplicado em sala de aula, destacando a sua importância no cálculo de áreas de polígonos e na resolução de problemas geométricos. Além disso, foram exploradas possibilidades alternativas de uso do teorema, mostrando que ele pode ser uma ferramenta versátil na resolução de diferentes tipos de problemas de geometria.

Também foram abordadas as ferramentas tecnológicas disponíveis, como o software GeoGebra, que podem auxiliar no ensino e na aplicação do teorema de Pick. As vantagens e desvantagens do uso desses softwares em relação ao ensino tradicional de geometria foram discutidas, permitindo uma reflexão sobre as possibilidades e limitações dessas ferramentas.

Por fim, foram apresentadas sugestões de como os professores podem integrar essas ferramentas de forma eficaz em suas aulas, proporcionando aos alunos uma experiência mais dinâmica e envolvente no estudo da geometria.

Assim, este trabalho contribuiu para a difusão do conhecimento sobre o teorema de Pick e sua aplicação no ensino de geometria, tanto de maneira tradicional quanto com o uso de recursos tecnológicos. Além disso, destacou-se a importância do teorema na resolução de problemas de olimpíadas, evidenciando o seu potencial no desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes.

Contudo, é importante reconhecer que a utilização de ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra, pode encontrar algumas barreiras, principalmente no que diz respeito à disponibilidade e acesso dos alunos a essas ferramentas. A falta de acesso adequado a computadores e dispositivos móveis, bem como a conectividade limitada em algumas áreas, são desafios que precisam ser superados para garantir a igualdade de oportunidades no processo de ensino-aprendizagem.

Diante dessas considerações, é imprescindível que haja investimentos contínuos e efetivos na educação de qualidade, garantindo a formação adequada dos professores, o acesso igualitário a recursos tecnológicos e a valorização do uso de ferramentas como o GeoGebra. Somente assim poderemos proporcionar aos estudantes uma educação matemática de

excelência, que promova o desenvolvimento pleno de suas habilidades e competências, preparando-os para os desafios do mundo atual e para um futuro promissor.

Mas, no entanto, é importante considerar que o uso excessivo de softwares pode resultar em dependência tecnológica e possivelmente diminuir a ênfase na resolução manual de problemas. Para integrar essas ferramentas de forma eficaz, os professores devem equilibrar o uso da tecnologia com a exploração manual, instrução direcionada e envolvimento ativo dos alunos.

Por fim, durante a realização deste trabalho, foi identificada uma dificuldade em relação ao domínio das ferramentas tecnológicas utilizadas, em virtude da falta de conhecimento prévio sobre tais recursos. A indisponibilidade de um computador com a agilidade necessária para utilizar eficientemente as ferramentas também se apresentou como um obstáculo.

Essa limitação na utilização das ferramentas tecnológicas afetou o desenvolvimento do estudo, uma vez que tais recursos poderiam ter contribuído significativamente para a exploração do tema abordado. A ausência de uma familiaridade prévia com as ferramentas dificultou a sua incorporação de forma plena no processo de pesquisa e análise.

Além disso, a escassez de conteúdos abundantes sobre o tema em questão representou outro desafio. A obtenção de informações específicas e aprofundadas acerca do teorema de Pick, bem como de suas aplicações e integração no ensino de geometria, mostrou-se limitada. A falta de recursos disponíveis exigiu uma busca mais intensa e seletiva por materiais que pudessem embasar e enriquecer o trabalho.

Essas dificuldades, relacionadas ao domínio das ferramentas tecnológicas e à falta de conteúdos abundantemente disponíveis, destacam a importância de uma preparação prévia adequada, tanto em termos de conhecimento técnico quanto em relação à pesquisa bibliográfica. É essencial considerar esses aspectos ao planejar estudos acadêmicos que envolvam o uso de recursos tecnológicos e a investigação de temas específicos.

Apesar dessas limitações, os esforços empreendidos permitiram a consecução dos objetivos propostos, ainda que em uma escala mais restrita. O trabalho buscou suprir as lacunas identificadas por meio de uma abordagem criteriosa e da utilização dos recursos disponíveis de forma mais adaptada às condições apresentadas.

REFERÊNCIAS

ABREU, R. C. **Teorema de Pick: uma abordagem para o cálculo de áreas de polígonos simples**. Campos dos Goytacazes: Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2015. Disponível em: <<https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/29052015Renata-da-Costa-Abreu.pdf>>. Acesso em: 31 maio 2023. Dissertação de Mestrado.

ATZ, D. **Teorema de Pick e o estudo de área e perímetro no Geoplano online**. Revista Novas Tecnologias na Educação, Porto Alegre, v. 13, n. 2, 2015. DOI: 10.22456/1679-1916.61448. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/61448>. Acesso em: 16 jun. 2023.

BALTAR, P. M. **Enseignement-apprentissage de la notion d'aire de surface plane: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège**. 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática), Universidade Joseph Fourier, Grenoble, França, 1996. Disponível em: <<https://www.theses.fr/1996GRE10193>>. Acesso em: 29 maio 2023.

BARBOSA, R. M. **Descobrendo a geometria fractal: para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 22 maio 2023.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**. Introdução. Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>>. Acesso em: 02 maio 2023.

COSTA, G. M. T.; PERETTI, L. **Sequência didática na matemática**. Instituto de Desenvolvimento Educacional do Alto Uruguai – IDEAU. Revista de Educação do IDEAU. Vol. 8 – Nº 17 - Janeiro – junho, 2013. disponível em: <https://www.bage.ideau.com.br/wp-content/files_mf/7ff08743d52102854eaaf22c19c4863731_1.pdf>. Acesso em: 23 maio 2023.

DOROTEIO, P. H. **Teorema Pick e suas aplicações**. Florestal: Universidade Federal de Viçosa, 2021. Disponível em: <<https://profmatsbm.org.br/dissertacoes/?aluno=paulo+henrique+doroteio&titulo=&polo=>>>. Acesso em: 02 jun. 2023. Dissertação de Mestrado.

FREITAS, C. V. **Uma proposta de ensino para a educação básica usando o teorema de Pick**. São Luís: Universidade Federal do Maranhão, 2018. Disponível em: <<https://tedebc.ufma.br/jspui/handle/tede/tede/2559>>. Acesso em: 09 maio 2023. Dissertação de Mestrado.

FRITSCH, R. **Georg Pick e Ludwig Berwald - zwei Mathematiker an der Deutschen Universität in Prag**, Schr. Sudet.dtsch. Akad. Wiss. Künste Forsch.beitr. Nat.wiss. Kl., p. 9-16. 2001. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pick/>>. Acesso em: 01 maio 2023.

GAZIRE, E. S.; CABRAL, S. A. B.; TEIXEIRA, B. DAS G. F. S. **Investigações geométricas em sala de aula: (re) construindo o conceito de área no geoplano com o teorema de Pick. TANGRAM - Revista de Educação Matemática**, v. 2, n. 3, p. 68–87, 21 out. 2019. Disponível em: <<https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/9393>>. Acesso em: 06 maio 2023.

GEOGEBRA. **GeoGebra classic**. 2023. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/classic/geometry>>. Acesso em: 09 jun. 2023.

WIKIPÉDIA. **Georg Alexander Pick. Wikipédia, a enciclopédia livre**. [S.l.: s.n.], 17 mar. 2022. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Georg_Alexander_Pick&oldid=63209042>. Acesso em: 14 maio 2023.

GOMES, A. S.; PADOVANI, S. **Usabilidade no ciclo de desenvolvimento de software educativo**. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/228971486_Usabilidade_no_ciclo_de_desenvolvimento_de_software_educativo>. Acesso em: 28 maio 2023.

HENRIQUES, M. D. **Um estudo sobre a produção de significados de estudantes do ensino fundamental para área e perímetro, no estado de Minas Gerais**. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2011. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/2013/1/marciliodiashenriques.pdf>>. Acesso em: 28 maio 2023. Dissertação de Mestrado.

HERMES, J. D. V. **O Teorema de Pick**. Ciência e Natura. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais. MG, 2014. Disponível em: <<https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/14606/pdf>>. Acesso em: 04 maio 2023.

IBGE. **Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística**. Censo Demográfico 2022. Rio de Janeiro: IBGE, 2022. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/al/>>. Acesso em: 31 maio. 2023.

SILVA JUNIOR, F. S.; MICENA, F. P. **Sugestões para aplicação do teorema de Pick na educação básica**. C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, 2014. DOI: 10.21167/cqdv03201423169664fssjfp4158 - Disponível em: <<http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp>>. Acesso em: 11 jun. 2023. Dissertação de Mestrado.

JUNIOR, J. V. D. S. L. **O teorema de Pick no ensino fundamental: uma abordagem com o uso do GeoGebra**. Feira de Santana: Universidade Estadual de Feira de Santana, 2022. Disponível em: <http://profmat.uefs.br/arquivos/File/JOSE_VALDECIDE_SANTANA_LIMA_JUNIOR.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2023. Dissertação de Mestrado.

LIMA, E. L. **Meu professor de matemática e outras histórias**, Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MACIEL, M. V. M. **Olimpíada brasileira de matemática das escolas Públicas (Obmep): as origens de um projeto de qualificação do ensino de matemática na educação básica**. X Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Ijuí, 2009. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_19.pdf>. Acesso em: 15 maio 2023.

MANOEL, W. A. **Uma proposta de ensino para a geometria nos anos finais do ensino fundamental**. Sorocaba: Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, 2019. Disponível em: <<https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11168>>. Acesso em: 25 maio 2023. Dissertação de Mestrado.

MENESES, P. O. **Teorema de Pick e teorema espacial tipo-Pick: demonstrações e aplicações no ensino médio**. Fortaleza: Universidade Federal Do Ceará, 2016. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/17972>>. Acesso em: 12 maio 2023. Dissertação de Mestrado.

MONTEIRO, J. C.; CASTILHO, W. S.; SOUZA, W. A. DE. **Sequência didática como instrumento de promoção da aprendizagem significativa**. Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica, v. 9, n. 01, 2019. Disponível em: <<https://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/1277>>. Acesso em: 16 maio 2023.

MORAES, M. DE S. **Teorema de Pick: uma abordagem para o cálculo de áreas de polígonos simples através do Geoplano e GeoGebra no ensino fundamental**. Manaus: Universidade Federal do Amazonas, 2018. Disponível em: <<https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/6664>>. Acesso em: 17 maio 2023.

OBMEP. **Ministério da Educação**. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/obmep#:~:text=Realizada%20desde%202005%2C%20a%20Obmep,professores%20de%20todo%20o%20pa%C3%ADs.>>. Acesso em: 17 maio 2023.

OBMEP. **Provas e Soluções de todas as Edições**. Ministério da Educação - MEC. Disponível em: <<https://www.obmep.org.br/provas.htm>>. Acesso em: 17 maio 2023.

OLIVEIRA, R. G. DE; CAROBINA, R. **O ensino da fórmula de Pick na sala de aula: um possível olhar para referências curriculares**. Revista de Educação, Ciências e Matemática, v. 7, n. 1, 9 jun. 2017. Disponível em: <<http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/3891>>. Acesso em: 11 maio 2023.

ROCHA, T. M.; ANDRADE, D. **Áreas: das noções intuitivas ao teorema de Pick**. 2008. Disponível em: <<http://www.dma.uem.br/kit/formulla-de-pick/formula-de-pick.pdf>>. Acesso em: 13 maio 2023.

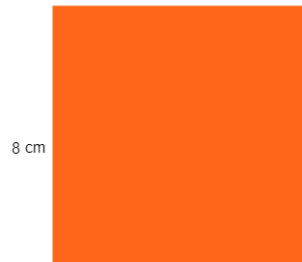
SÉ, F.C.L.S. **O teorema de Pick e algumas aplicações para os ensinos fundamental II e médio**. 2015. Salvador: Universidade Federal da Bahia, 2016. Disponível em: <<https://repositorio.ufba.br/bitstream/ri/23309/1/DissertacaoFabiola.pdf>>. Acesso em: 04 jun. 2023.

SOUZA, R. C. **Teorema de Pick como proposta para a construção de aula de geometria.** Rio de Janeiro: Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, 2021. Disponível em: <<http://www.repositorio-bc.unirio.br:8080/xmlui/handle/unirio/13204>>. Acesso em: 19 maio 2023. Dissertação Mestrado.

TORRENTE, C. R.; REIS, F. DA S. **Um passeio pelas Olimpíadas de Matemática: das origens aos atuais cenários no mundo e no Brasil.** Revemop, v. 5, p. e202301, 23 dez. 2022. Disponível em: < <https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/6357>>. Acesso em: 15 maio 2023.

APÊNDICE**ATIVIDADE 1**

Questão 1: Calcule a área de um quadrado com lado medindo 8 cm.



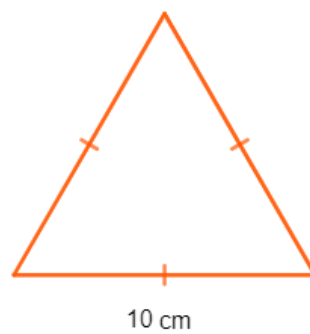
Resp:

Questão 2: Determine a área de um retângulo com comprimento de 12 cm e largura de 6 cm.



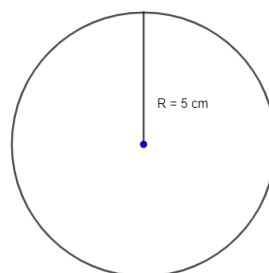
Resp:

Questão 3: Encontre a área de um triângulo equilátero com lado medindo 10 cm.



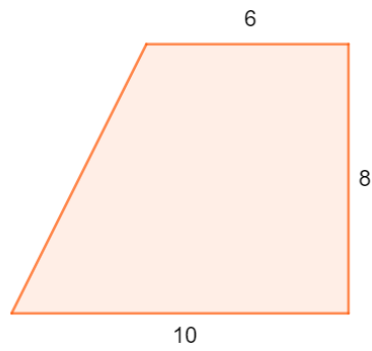
Resp:

Questão 4: Calcule a área de um círculo com raio de 5 cm, utilizando π como aproximadamente 3,14.



Resp:

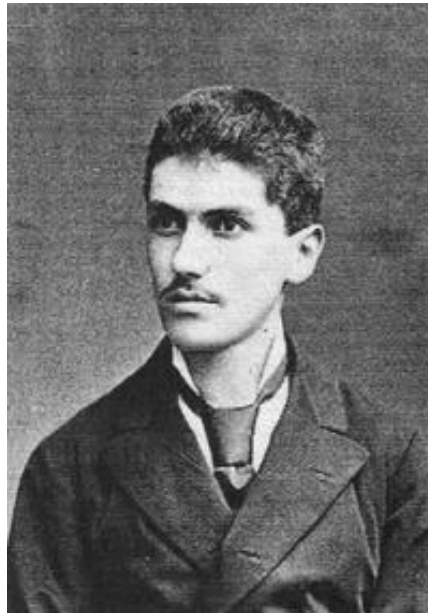
Questão 5: Determine a área de um trapézio com bases medindo 6 cm e 10 cm, e altura de 8 cm.



Resp:

ATIVIDADE 2

Breve biografia de Georg Alexander Pick



Fonte: Imagem extraída de Wikipédia, 2023

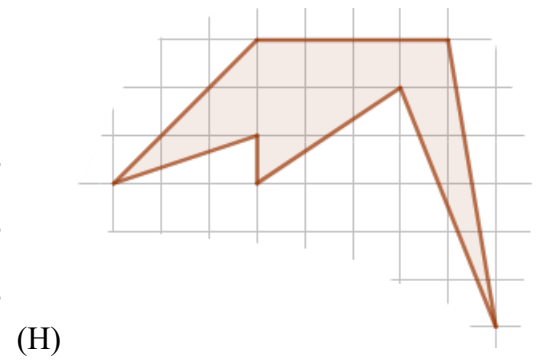
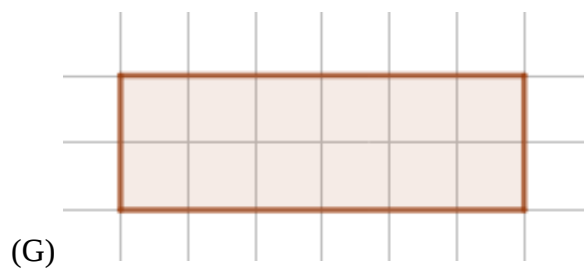
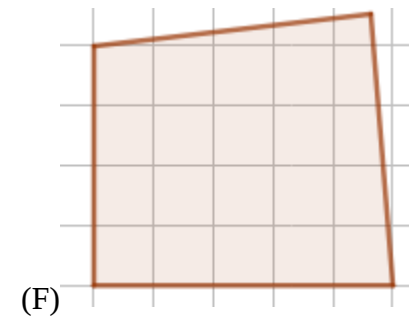
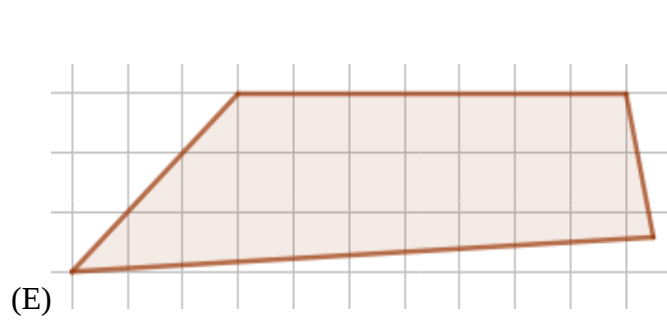
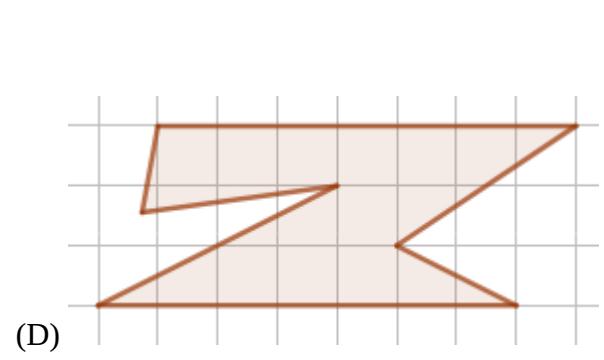
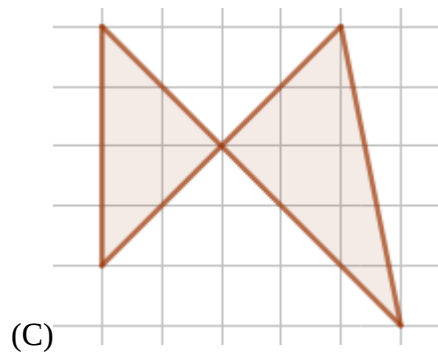
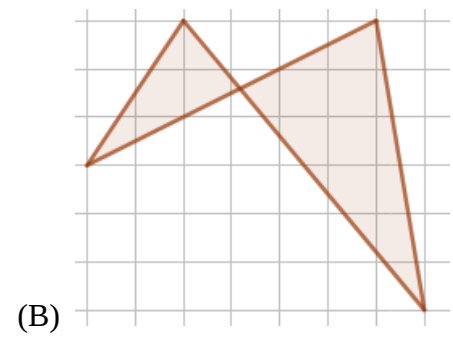
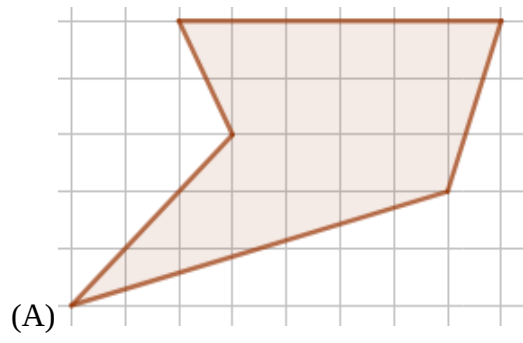
Quem foi Pick?

Georg Alexander Pick nasceu em Viena em 1859, oriundo de uma família judaica. Ingressou na Universidade de Viena em 1875, quando tinha apenas dezesseis anos de idade. No ano subsequente, publicou seu primeiro artigo de matemática, graduando-se posteriormente em 1879, com qualificação em Matemática e Física, o que o habilitou a ministrar ambas as disciplinas. Na mesma universidade, obteve seu título de doutorado em 1880. Exercendo sua profissão nas universidades de Praga e Leipzig na Alemanha.

Qual o seu teorema?

Seu teorema é dado pela fórmula $A = I + \frac{B}{2} - 1$, empregada para mensurar a área de um polígono simples, cujos vértices correspondem a pontos pertencentes a uma rede de pontos no plano. Onde (I) é os pontos contidos no interior do polígono e (B) os pontos que estão sobre os lados (segmentos de reta) do polígono.

Com base no teorema de Pick, é necessário que todos os vértices de uma figura estejam localizados em pontos inteiros na rede (ou retícula) de pontos no plano para que seu cálculo seja preciso. Com base nessa informação, determine qual das figuras abaixo pode ser calculada de forma precisa.



ATIVIDADE 3

